UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA, COMPUTACIÓN, GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

ESTUDIO DE DOS INVARIANTES EN ÁLGEBRAS DE LIE FILIFORMES COMPLEJAS Y CLASIFICACIÓN A PARTIR DE ÉSTOS

Memoria presentada por Francisco Ramírez López para optar al grado de Doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla

Fdo.: Francisco Ramírez López

VºBº de los Directores

Fdo.: Francisco Javier Echarte Reula
Catedrático de Geometría
del Departamento de Álgebra,
Computación, Geometría y
Topología de la Universidad
de Sevilla

Fdo.: Juan Núñez Valdés
Profesor titular de Universidad
del Departamento de Álgebra,
Computación, Geometría y
Topología de la Universidad
de Sevilla

Sevilla, Mayo de 1995

A Maryló

AGRADECIMIENTOS

Sirvan estas líneas como mi más sincero agradecimiento a todas aquellas personas que de una forma u otra han contribuido a la realización de este trabajo.

Especialmente quiero agradecer al director de la tesis, D. Francisco Javier Echarte Reula, su valiosísima ayuda y constante asesoramiento, sin los que esta memoria nunca se hubiera realizado.

Deseo resaltar la ayuda prestada por el profesor Juan Núñez Valdés por sus oportunos consejos y su constante apoyo.

También quiero resaltar la gran ayuda prestada por los profesores J. R. Gómez, M. Goze y V. R. Varea con sus valiosos asesoramientos y consejos.

Quiero expresar mi gratitud a mis compañeros del Departamento de Álgebra, Computación, Geometría y Topología, por las ayudas de todo tipo que siempre me dispensaron.

Por último, aunque no en importancia, no puedo dejar de mencionar a mi mujer, Maryló y al resto de mi familia por su paciencia y estímulo durante la realización de este trabajo.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

INTRODUCCIÓN

Para estudiar la clasificación de las álgebras de Lie, debemos tener en cuenta que conocida la clasificación de las álgebras semisimples desde finales del siglo XIX, uno de los principales objetivos de la teoría de álgebras de Lie es la clasificación de la otra clase de álgebras que aparece en la descomposición de Levi: las resolubles.

En lo que sigue se supondrá que el cuerpo base es el cuerpo complejo.

El problema de la clasificación de las álgebras de Lie resolubles complejas permanece abierto en la actualidad, ya que sólo se conoce la clasificación de las álgebras de Lie resolubles de dimensiones menores o iguales que 5.

Por ello, actualmente, los intentos de clasificación de las álgebras de Lie resolubles pasan por obtener primero la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes, dado el importante papel que desempeñan los ideales maximales nilpotentes en el estudio de las álgebras resolubles, cuyo conocimiento facilitaría en gran medida la obtención de las álgebras de Lie resolubles.

Los primeros resultados de interés relacionados con la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes datan de hace aproximadamente un siglo y fueron publicados en 1.891 por Ümlauf [30], que hace un intento de clasificación (que posteriormente se probaría que era incompleta) de álgebras de Lie nilpotentes de dimensiones menores o iguales que 6.

La primera clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes hasta dimensión 6 fue realizada en 1.958 por Morozov [26], basándose en la máxima dimensión de un ideal abeliano maximal. Previamente, Dixmier [14] y [15] también había presentado una clasificación hasta dimensión 5 y Vranceanu [32], de una manera independiente a Morozov y basándose en otros procedimientos, obtuvo la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 6, si bien tanto su clasificación como la de Morozov son completas para el caso complejo pero no para el caso real.

Vergne [31] dió por primera vez una clasificación completa de las álgebras de Lie nilpotentes reales o complejas de dimensión 6, completando así los trabajos de Morozov y Vranceanu. Vergne probó además que a diferencia del caso de dimensiones menores o iguales que 6, para dimensiones mayores o iguales que 7 aparecen ya clases de isomorfía de un tipo particular de álgebras de Lie nilpotentes, como son las filiformes, lo cual dificulta más la obtención de las clasificaciones a partir de dimensión 7.

Safiullina publica en 1.964 [28] una clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 7, basándose en el método desarrollado por Morozov, si bien Magnin [25] demuestra en 1.986 que esta clasificación no es del todo completa. Romdhani en 1.985 [27] también presenta una clasificación de estas álgebras a partir de las dimensiones de las sucesiones derivada, central descendente y central ascendente.

Skjelbred y Sund en 1.977 [29] desarrollaron un método que permitía obtener la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión $n+1$ supuesta conocida la clasificación de las de dimensión n. No obstante este método presenta excesivas dificultades de realización y no ha vuelto a ser utilizado hasta la fecha.

Finalmente, Goze y Ancochea, en 1.989 [4] llegaron a clasificar las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 7, mediante el uso de un nuevo invariante obtenido por ellos, que denominaron "sucesión característica", que corresponde a las dimensiones maximales de los bloques de Jordan de una matriz nilpotente, lo que les permitió también obtener la clasificación de las álgebras de Lie filiformes complejas de dimensión 8 [3].

Como es sabido, las álgebras de Lie filiformes, definidas por M. Vergne con motivo de su Tesis Doctoral [31], constituyen un subconjunto de las álgebras de Lie nilpotentes.

Por todo ello, el problema de la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión ≥ 8 continúa abierto y los intentos actuales pasan por conseguir primero una clasificación de las álgebras de Lie filiformes.

Así, por aplicación de las técnicas de Goze y Ancochea, Gómez Martín y Echarte en 1.991 [23] obtuvieron la clasificación de las álgebras de Lie filiformes de dimensión 9 y recientemente, mediante la introducción de un nuevo invariante para estas álgebras, Boza, Echarte y Núñez [7] clasificaron en 1.993 las álgebras de Lie filiformes complejas de dimensión 10.

En este trabajo hacemos una clasificación de las álgebras de Lie filiformes complejas, atendiendo a un nuevo invariante que vamos a detallar.

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Lie; denotaremos por:
$\mathcal{L}^2 = [\mathcal{L}, \mathcal{L}]; \quad \mathcal{L}^3 = [\mathcal{L}^2, \mathcal{L}]; \ \ldots; \ \mathcal{L}^h = [\mathcal{L}^{h-1}, \mathcal{L}]; \ \ldots$

Un álgebra de Lie filiforme $\mathcal{L}$ de dimensión n, es un álgebra de Lie nilpotente, tal que

$dim\mathcal{L}^2 = n-2;\quad dim\mathcal{L}^3 = n-3;\ \ldots;\ dim\mathcal{L}^h = n-h;\ \ldots;\ dim\mathcal{L}^n = 0$.

Se dice que $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base adaptada de $\mathcal{L}$ si:

$e_1 \notin \mathcal{L}^2$,

$[e_1, e_2] = 0$,

$[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, n)$ **y**

$[e_3, e_h] = 0 \quad (h = 2, \ldots, n)$.

En este trabajo supondremos que las álgebras de Lie filiformes son complejas, y que las bases que utilizamos son adaptadas.

Un álgebra de Lie filiforme se denomina modelo si sus únicos productos no nulos respecto a una base adaptada son los: $[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, n)$. **Trivialmente se tiene que hay un álgebra modelo para cada dimensión.**

En este trabajo, además de utilizar el invariante "$\underline{i}$": $i = min\{k \in I\!N - \{1\} \mid [e_k, e_n] \neq 0\}$, **introducimos un nuevo invariante que denominamos "$\underline{j}$", definido por:** $j = min\{k \in I\!N \mid [e_k, e_{k+1}] \neq 0\}$. **A** $[e_j, e_{j+1}]$ **lo denominamos producto principal.**

Demostramos que toda álgebra de Lie filiforme no modelo tiene un producto principal, y que el valor $\underline{j}$ es independiente de la base adaptada elegida.

Demostramos también que: $i \leq j;\quad j < n$. **Más concretamente**

se verifica: $\quad 4 \leq i \leq j \quad$ y $\quad j+1 \leq n \leq 2j-2.$

La clasificación de las álgebras de Lie filiformes complejas la hacemos mediante el uso de este nuevo invariante, teniendo en cuenta en primer lugar las álgebras de Lie filiformes cuya $\underline{j}$ es determinada y subclasificando éstas atendiendo a la terna (i, j, n), tres invariantes respecto a las bases adaptadas, de los que también damos una definición alternativa independiente de cualquier base adaptada.

El valor mínimo de $\underline{i}$ y de $\underline{j}$ es 4, por lo que nuestra clasificación comienza para $j = 4$, continuando con las álgebras de Lie filiformes para las que $j = 5$ y $j = 6$.

Esta clasificación es completamente original, en el sentido de que se aparta del hecho de que hasta ahora las clasificaciones se habían hecho atendiendo únicamente a la dimensión de las álgebras.

El trabajo se ha estructurado en tres capítulos. En el primero de ellos, que denominamos capítulo 0, indicamos las definiciones y propiedades más importantes de las álgebras de Lie (omitimos todas las demostraciones), que van a ser útiles para una adecuada comprensión del resto del trabajo.

En el capítulo 1, tras estudiar algunas de las propiedades fundamentales de las álgebras de Lie filiformes, se estudian con detalle las propiedades de los invariantes $\underline{i}$ y $\underline{j}$ antes citados, que van a permitirnos realizar la clasificación de las álgebras de Lie filiformes.

En el capítulo 2 se obtiene ya la clasificación de las álgebras de Lie filiformes mediante la aplicación del nuevo invariante $\underline{j}$. Se clasifican en primer lugar aquellas para las que $j = 4$, que responden a las ternas $(4, 4, 5)$ y $(4, 4, 6)$, donde las ternas son las (i, j, n) ya citadas. Después, aquellas álgebras de Lie filiformes para las que $j = 5$ $(i = 4, 5;$ $n = 6, 7, 8)$ y finalmente se clasifican aquellas álgebras de Lie filiformes para las que $j = 6$ $(i = 4, 5, 6;$ $n = 7, 8, 9, 10)$.

Se finaliza el trabajo con la exposición de una bibliografía, en la que se referencian los textos y artículos, relativos al tema que nos ocupa.

CAPÍTULO 0

CAPÍTULO 0

0.1 Álgebras de Lie.

Un álgebra de Lie $\mathcal{L}$ es un espacio vectorial sobre el que se encuentra definida una segunda operación interna [,] distributiva, llamada producto corchete, que satisface las siguientes propiedades:

$$[X, X] = 0 \quad \forall X \in \mathcal{L}. \tag{0.1.}$$

$$[\,[X, Y], Z\,] + [\,[Y, Z], X\,] + [\,[Z, X], Y\,] = 0 \tag{0.2.}$$
$$\forall X, Y, Z \in \mathcal{L}.$$

La igualdad (0.2.) se denomina <u>identidad de Jacobi</u>. De ahora en adelante, dicha identidad de Jacobi la representaremos por: $(X, Y, Z) = 0$.

Un álgebra de Lie se denomina real, compleja, ..., según sea el cuerpo base del espacio vectorial. Se denomina <u>dimensión</u> de $\mathcal{L}$ a la que tiene como espacio vectorial.

De (0.1.) se deduce que $[X, Y] = -[Y, X]$.

Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de $\mathcal{L}$, basta conocer los productos $[e_h, e_k]$, para conocerlos todos, ya que si:
$X = \sum \lambda_h e_h\,;\quad Y = \sum \mu_k e_k \quad \Longrightarrow \quad [X, Y] = \sum \lambda_h \mu_k\, [e_h, e_k]$.

Los productos corchetes de dos elementos cualesquiera de la base serán $[e_h, e_k] = \sum c_{hk}^m e_m$. Los coeficientes c_{hk}^m se denominan <u>constantes de estructura</u>. De (0.1.) y (0.2.) se deduce:

$$c_{hk}^m = -c_{kh}^m$$

$$\sum (c_{hk}^r c_{rm}^s + c_{km}^r c_{rh}^s + c_{mh}^r c_{rk}^s) = 0$$

De ahora en adelante, definiremos un álgebra por una de sus bases y los productos de cada par de elementos de dicha base, obviando los productos nulos.

0.2 Relaciones entre álgebras de Lie.

Dadas dos álgebras de Lie $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$, sobre el mismo cuerpo, diremos que:
$\Phi : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'$ es un homomorfismo, si Φ es lineal, y se verifica que:
$\Phi : [X, Y] \longrightarrow [\Phi(X), \Phi(Y)]$.

Si Φ es biyectiva se denomina isomorfismo.

Se denomina subálgebra de una álgebra de Lie $\mathcal{L}$, a todo subespacio vectorial $\mathcal{J}$, tal que si $X, Y \in \mathcal{J} \Longrightarrow [X, Y] \in \mathcal{J}$.

Se dice que $\mathcal{I}$ es un ideal de $\mathcal{L}$, si $\mathcal{I}$ es una subálgebra de $\mathcal{L}$, tal que $\forall X \in \mathcal{I}, \forall\, Y \in \mathcal{L} \Longrightarrow [X, Y] \in \mathcal{I}$.

Se denomina centro de $\mathcal{L}$ al conjunto de elementos $X \in \mathcal{L}$, tales que $[X, Y] = 0$ $(\forall\, Y \in \mathcal{L})$.

El centro de $\mathcal{L}$ es un ideal de $\mathcal{L}$.

Llamaremos centralizador de una subálgebra $\mathcal{M}$ de $\mathcal{L}$, al conjunto de elementos de $\mathcal{L}$ que conmutan con todos los elementos de $\mathcal{M}$, es decir: $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}\mathcal{M} \equiv \{X \in \mathcal{L} \mid [X, Y] = 0 \quad \forall Y \in \mathcal{M}\}$.

Llamaremos álgebra derivada de $\mathcal{L}$, y lo denotamos $[\mathcal{L}, \mathcal{L}]$, al conjunto de elementos $[X, Y] : \forall X, Y \in \mathcal{L}$. El álgebra derivada es un ideal de $\mathcal{L}$.

Un ideal $\mathcal{I}$ se dice conmutativo si $[X, Y] = 0 \quad \forall X \in \mathcal{I}, \quad \forall Y \in \mathcal{L}$.

Un álgebra se dice conmutativa si $[\mathcal{L}, \mathcal{L}] = 0$.

0.3 Clases de álgebras de Lie.

Un álgebra de Lie se dice simple si no es conmutativa y no contiene ideales no triviales (estos son 0 y $\mathcal{L}$). Para las álgebras simples $\mathcal{L} = [\mathcal{L}, \mathcal{L}]$.

Un álgebra de Lie se dice semisimple si no contiene ideales conmutativos no triviales. Toda álgebra simple es semisimple, pero el recíproco no es cierto. Toda álgebra semisimple es suma directa de álgebras simples. También las álgebras semisimples coinciden con su álgebra derivada.

Dada un álgebra de Lie $\mathcal{L}$, establecemos a partir de ella la siguiente sucesión:

$$\mathcal{L}_2 = [\mathcal{L}, \mathcal{L}]; \quad \mathcal{L}_3 = [\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_2]; \ldots; \quad \mathcal{L}_i = [\mathcal{L}_{i-1}, \mathcal{L}_{i-1}]; \ldots$$

Decimos que un álgebra es resoluble si existe un $n < \infty$ tal que $\mathcal{L}_n \equiv \{0\}$.

Establecemos otra sucesión:

$\mathcal{L}^2 = [\mathcal{L}, \mathcal{L}]; \quad \mathcal{L}^3 = [\mathcal{L}^2, \mathcal{L}]; \ldots; \quad \mathcal{L}^i = [\mathcal{L}^{i-1}, \mathcal{L}]; \ldots$

Decimos que $\mathcal{L}$ es <u>nilpotente</u>, si existe un $n < \infty$ tal que $\mathcal{L}^n \equiv \{0\}$. Toda álgebra nilpotente es resoluble, pero el recíproco no es cierto.

Los $\mathcal{L}_i$ son ideales de $\mathcal{L}$.

La intersección, suma y producto de ideales resolubles de un álgebra de Lie, son también ideales resolubles. De aquí se deduce que la suma de todos los ideales resolubles de un álgebra de Lie, es otro ideal resoluble que se denomina <u>radical</u> de $\mathcal{L}$ y lo denotamos $rad\mathcal{L}$.

Si un álgebra es semisimple su radical es nulo.

Las álgebras semisimples ya han sido clasificadas, pero las resolubles no, ni siquiera las nilpotentes.

En las álgebras de Lie nilpotentes se verifica el llamado "Teorema de Engel", del que se deduce que en toda álgebra de Lie nilpotente, existe un elemento $e_1 \notin \mathcal{L}^2$, y una base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, tal que

$[e_1, e_2] = 0;$

$[e_1, e_h] = \varepsilon_{h-1} e_{h-1} \quad (\varepsilon_{h-1} = 0, 1).$

Un álgebra de Lie se dice <u>filiforme</u> si es nilpotente y tal que

todos los $\varepsilon_{h-1} = 1$**, siendo** $dim\mathcal{L}^i = n - i$**. A ellas va dedicado este trabajo.**

CAPÍTULO 1

CAPÍTULO 1

Las álgebras de Lie filiformes.

1.1 Definición y propiedades.

Un álgebra de Lie nilpotente $\mathcal{L}$ se dice filiforme, si siendo $dim\mathcal{L} = n$, se verifica que:

$dim\mathcal{L}^2 = n-2$; ... ;$dim\mathcal{L}^k = n-k$; ... ; $dim\mathcal{L}^n = 0$,

siendo $\mathcal{L}^2 = [\mathcal{L},\mathcal{L}]$, ... , $\mathcal{L}^k = [\mathcal{L},\mathcal{L}^{k-1}]$, ...

Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de $\mathcal{L}$ tal que:
$[e_1, e_2] = 0;$ $\quad [e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, n)$, **donde** $\underline{e_1}$ **es un elemento con** $e_1 \notin \mathcal{L}^2$**, que viene dado por el teorema de Engel.**
Por tanto:

$$\mathcal{L}^2 \equiv \{e_2, \ldots, e_{n-1}\}$$

$$\mathcal{L}^3 \equiv \{e_2, \ldots, e_{n-2}\}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}^k \equiv \{e_2, \ldots, e_{n-k+1}\} \quad (1 < k < n)$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}^{n-2} \equiv \{e_2, e_3\}$$

$$\mathcal{L}^{n-1} \equiv \{e_2\}$$

$$\mathcal{L}^n \equiv \{0\}$$

Para un $h > 2$**, se deduce que:**

$$[e_h, e_n] = c_{hn}^{h-1} e_{h-1} + \cdots + c_{hn}^2 e_2 \tag{1.1}$$

pudiendo algunos coeficientes o todos ser nulos. De la igualdad anterior tenemos que $[e_3, e_n] = \alpha\, e_2$**. Si** $\alpha \neq 0$**, el cambio:** $e_n' = e_n + \alpha\, e_1$ **nos permite conseguir que** $[e_3, e_n'] = 0$**, lo que no cambia los demás elementos de la base ya que** $[e_1, e_n'] = [e_1, e_n + \alpha\, e_1] = e_{n-1}$, $\ldots$

En adelante, supondremos que las álgebras son filiformes complejas, y que todas las bases que utilizamos verifican estas propiedades, es decir, la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es tal que:

$[e_1, e_2] = 0,$

$[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, n),$

$[e_3, e_h] = 0 \quad (h = 2, \ldots, n).$

Una base que verifique dichas propiedades se denomina base adaptada.

1.2 Estudio del invariante i.

Definición: *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Lie filiforme de dimensión n. Definimos el subíndice $\underline{i}$ como:*

$$i = max\{k \in I\!N \mid \mathcal{C}_{\mathcal{L}}(\mathcal{L}^{n-k+2}) \supset \mathcal{L}^2\}.$$

Esto quiere decir que el ideal $\mathcal{L}^{n-i+2}$ de base $\{e_2, \ldots, e_{i-1}\}$ es el mayor ideal cuyo centralizador contiene a $\mathcal{L}^2 \equiv \{e_2, \ldots, e_{n-1}\}$. Si contiene a $\mathcal{L}^2$, se trata del ideal $\overline{\mathcal{L}}$ generado por $\{e_2, \ldots, e_{n-1}, e_n\}$, ya que si se tratara del ideal: $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ su centralizador se reduciría al ideal $\{e_2\}$, único que conmuta con el vector e_1.

Por tanto, los vectores del ideal $\{e_2, \ldots, e_{i-1}\}$ conmutan con todos

los vectores del ideal $\{e_2, \ldots, e_{n-1}, e_n\}$. En particular se verifica que:

$$[e_2, e_n] = [e_3, e_n] = \cdots = [e_{i-1}, e_n] = 0$$

Teorema 1. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Lie filiforme de dimensión n. Si existe $\underline{i}$, se verifica:*

$$[e_i, e_n] \neq 0$$

Demostración:

Si $[e_i, e_n] = 0$, de la identidad de Jacobi $(e_1, e_i, e_n) = 0$ se deduciría que $[e_i, e_{n-1}] = 0$, de la identidad de Jacobi $(e_1, e_i, e_{n-1}) = 0$ se deduciría que $[e_i, e_{n-2}] = 0$ y siguiendo sucesivamente el procedimiento llegariamos a que $[e_i, e_h] = 0 \quad (\forall h > 1)$, por tanto el centalizador del ideal $\mathcal{L}^{n-i+1}$ también será el ideal de base $\overline{\mathcal{L}} \equiv \{e_2, \ldots, e_{n-1}, e_n\}$, y en consecuencia $\mathcal{L}^{n-i+2}$ no será el ideal mayor que cumpliera esta propiedad. Por tanto $[e_i, e_n] \neq 0$. $\square$

Observese que $\underline{i}$ es un invariante en las álgebras de Lie filiformes de dimensión n, pues no depende de la base adaptada elegida.

También, como consecuencia del teorema anterior, se tiene que el invariante $\underline{i}$ viene definido por:

$$i = min\{k \in I\!N - \{1\} \mid [e_k, e_n] \neq 0\} \quad [19].$$

Si no existe $\underline{i}$ se verifica el siguiente teorema:

Teorema 2. *Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base adaptada de un álgebra de Lie filiforme $\mathcal{L}$. Si no existe $\underline{i}$, el álgebra tiene como únicos productos no nulos los $[e_1, e_h] = e_{h-1}$ $(h = 3, \ldots, n)$. Es la llamada álgebra de Lie filiforme modelo, y hay una en cada dimensión.*

Demostración:

Si $[e_h, e_n] = 0 \quad (\forall h > 1)$, **se sigue**

de $(e_1, e_h, e_n) = 0 \quad \longrightarrow \quad [e_h, e_{n-1}] = 0\,(\forall\, h > 1)$

de $(e_1, e_h, e_{n-1}) = 0 \quad \longrightarrow \quad [e_h, e_{n-2}] = 0\,(\forall\, h > 1)$

$\vdots$

Y siguiendo el procedimiento se tiene probado el teorema. Por tanto $[e_h, e_k] = 0$ **siempre que** $h, k > 1$. $\square$

De este teorema se deduce que el álgebra de base $\{e_2, \ldots, e_n\}$ es conmutativa, lo cual permite dar una nueva definición de álgebra modelo, independiente de cualquier base adaptada. Así, diremos que un álgebra de Lie filiforme $\mathcal{L}$ es un álgebra modelo si $C_{\mathcal{L}}(\mathcal{L}^{n-2})$ es conmutativo. La equivalencia entre ambas definiciones es inmediata al ser $\mathcal{L}^{n-2}$ el ideal de base $\{e_2, e_3\}$ cuyo centralizador es el ideal de base $\{e_2, \ldots, e_n\}$.

Si suponemos que existe $\underline{i}$, se verifica el siguiente teorema:

Teorema 3. *Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base adaptada de un álgebra de Lie filiforme $\mathcal{L}$. Si existe $\underline{i}$, se verifica:*

$$[e_h, e_k] = 0 \quad si \quad 1 < h < i;\ k > 1. \tag{1.2}$$

Demostración:

Si $h < i$ **:**

de $(e_1, e_h, e_n) = 0 \quad \longrightarrow \quad [e_h, e_{n-1}] = 0$

de $(e_1, e_h, e_{n-1}) = 0 \quad \longrightarrow \quad [e_h, e_{n-2}] = 0$

$\vdots$

Y siguiendo el procedimiento se tiene probado el teorema. □

Como consecuencia, se verifica:

$$\begin{aligned}
&[e_h, e_n] = 0 \qquad (1 < h < i)\\
&[e_i, e_n] = \underline{c_{in}^{i-1}} e_{i-1} + \cdots + c_{in}^2 e_2\\
&\quad \vdots\\
&[e_h, e_n] = \underline{c_{hn}^{h-1}} e_{h-1} + \cdots + c_{hn}^2 e_2 \qquad (i \leq h \leq n-1)\\
&\quad \vdots\\
&[e_{n-1}, e_n] = \underline{c_{n-1,n}^{n-2}} e_{n-2} + \cdots + c_{n-1,n}^2 e_2
\end{aligned}$$

<u>Teorema 4.</u> *Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base adaptada de un álgebra de Lie filiforme $\mathcal{L}$. Si existe $\underline{i}$, y se tiene*

$$[e_i, e_n] = c_{in}^p e_p + \cdots + c_{in}^4 e_4 + c_{in}^3 e_3 + c_{in}^2 e_2 \qquad (p < i;\ c_{in}^p \neq 0)$$

entonces se verifica:

$$[e_i, e_{n-1}] = c_{in}^p e_{p-1} + \cdots + c_{in}^4 e_3 + c_{in}^3 e_2 \tag{1.3}$$

$$[e_i, e_{n-2}] = c_{in}^p e_{p-2} + \cdots + c_{in}^4 e_2 \tag{1.4}$$

$$\vdots$$

$$[e_i, e_{n-p+2}] = c_{in}^p e_2 \tag{1.5}$$

Demostración:

De la identidad de Jacobi $(e_1, e_i, e_n) = 0$ **se obtiene** (1.3), **de la identidad de Jacobi** $(e_1, e_i, e_{n-1}) = 0$ **se obtiene** (1.4) **y siguiendo el procedimiento se llega a** (1.5). □

Por tanto, se tiene que:
$[\mathcal{L}^{n-i+1}, \overline{\mathcal{L}}] \equiv \mathcal{L}^{n-p+1}$, **pero** $[\mathcal{L}^{n-i+1}, \overline{\mathcal{L}}] \not\subset \mathcal{L}^{n-p+2}$, **lo que nos pueba que** $\underline{p}$ **es también un invariante.**

<u>Teorema 5.</u> *Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base adaptada de un álgebra de Lie filiforme $\mathcal{L}$, si:*

$$[e_{k-1}, e_k] = \alpha_p e_p + \cdots + \alpha_3 e_3 + \alpha_2 e_2 \qquad (p < k-1) \quad (k \geq 4)$$

entonces se verifica que:

$$[e_{k-2}, e_k] = \alpha_p e_{p-1} + \cdots + \alpha_3 e_2, \qquad \text{y recíprocamente.}$$

Demostración:

Se sigue inmediatamente de la identidad de Jacobi:

$$(e_1, e_{k-1}, e_k) = 0. \qquad \square$$

Se verifica el siguiente teorema:

Teorema 6. *Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base adaptada de un álgebra de Lie filiforme $\mathcal{L}$. Se verifica que los coeficientes $c_{in}^{i-1}, \ldots, c_{hn}^{h-1}, \ldots, c_{n-1,n}^{n-2}$ son iguales.*

Demostración:

De la identidad de Jacobi $(e_1, e_h, e_n) = 0$ para $h > 4$ se deduce que:

$$c_{hn}^{h-1} - c_{h-1,n}^{h-2} = c_{h,n-1}^{h-2} \tag{1.6}$$

Probaremos que $c_{h,n-1}^{h-2} = 0$

De la identidad de Jacobi $(e_1, e_h, e_{n-1}) = 0 \quad (i < h < n-1)$ se

deduce:

$$c_{h,n-1}^{h-2} = c_{h-1,n-1}^{h-3} + c_{h,n-2}^{h-3} \tag{1.7}$$

de $(e_1, e_{h-1}, e_{n-1}) = 0$, y de $(e_1, e_h, e_{n-2}) = 0$ tenemos:

$$c_{h,n-1}^{h-2} = c_{h-2,n-1}^{h-4} + 2\, c_{h-1,n-2}^{h-4} + c_{h,n-3}^{h-4} \tag{1.8}$$

la igualdad (1.7) desdobla $c_{h,n-1}^{h-2}$ en suma de dos coeficientes de superíndice $h-3$; la igualdad (1.8) desdobla $c_{h,n-1}^{h-2}$ como suma de coeficientes de superíndice $h-4$.

Procediendo sucesivamente se obtiene que:

$$c_{h,n-1}^{h-2} = c_{4,n-1}^{2} + \binom{h-4}{1}\; c_{5,n-2}^{2} + \cdots + \binom{h-4}{h-4}\; c_{h,n+3-h}^{2}$$

Si $c_{in}^{i-1} = 0$, todos los sumandos del segundo miembro son nulos, luego $c_{h,n-1}^{h-2} = 0$. Si $c_{in}^{i-1} \neq 0$, los coeficientes $c_{k,n+3-k}^{2}$ del segundo miembro son alternativamente $1, -1, 1, -1, \ldots$, luego se tiene que $c_{h,n-1}^{h-2} = (1-1)^{h-4} = 0$

Por tanto $c_{h,n-1}^{h-2} = 0$, de donde por (1.6) se tiene que:

$$c_{hn}^{h-1} = c_{h-1,n}^{h-2} \qquad (h > i). \qquad \square$$

<u>Definición:</u> *Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base adaptada de un álgebra de Lie filiforme $\mathcal{L}$. A los coeficientes $c_{in}^{i-1}, \ldots, c_{hn}^{h-1}, \ldots, c_{n-1,n}^{n-2}$ se les denominan primeros coeficientes.*

Si $c_{in}^{i-1} = 0$, podemos escribir:

$$c_{4n}^{3} = \cdots = c_{in}^{i-1} = \cdots = c_{hn}^{h-1} = \cdots = 0$$

Si $c_{in}^{i-1} \neq 0$ se verifica el siguiente teorema:

Teorema 7. *Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base adaptada de un álgebra de Lie filiforme $\mathcal{L}$. Si $c_{in}^{i-1} \neq 0$, se tiene que $\underline{i = 4}$; y $\underline{n}$ es par.*

Demostración:

a) Si $c_{in}^{i-1} \neq 0 \Longrightarrow i = 4$

$[e_{n-1}, e_n] = c_{n-1,n}^{n-2} e_{n-2} + \cdots + c_{n-1,n}^{2} e_2 \qquad (c_{n-1,n}^{n-2} \neq 0)$

de $(e_i, e_{n-1}, e_n) = 0$ **se deduce:** $[[e_{n-1}, e_n], e_i] = 0$

de donde:

$$c_{n-1,n}^{n-2}[e_{n-2}, e_i] + \cdots + c_{n-1,n}^{2}[e_2, e_i] = 0$$

lo que exige que $i = 4$, **ya que** $[e_{n-2}, e_4] = 0$ **siempre, mientras que** $[e_{n-2}, e_5]$ **es distinto de cero, al ser** $[e_5, e_n] = c_{5n}^4 e_4 + c_{5n}^3 e_3 + c_{5n}^2 e_2$.

b) Si $c_{in}^{i-1} \neq 0 \Longrightarrow \underline{n}$ es par

$[e_4, e_n] = c_{4n}^3 e_3 + c_{4n}^2 e_2 \qquad (c_{4n}^3 \neq 0)$

de $(e_1, e_4, e_n) = 0 \quad \longrightarrow \quad [e_4, e_{n-1}] = c_{4n}^3 e_2$

de $(e_1, e_5, e_{n-1}) = 0 \quad \longrightarrow \quad [e_5, e_{n-2}] = -c_{4n}^3 e_2$

$\vdots$

Sucesivamente $\quad \longrightarrow \quad [e_h, e_{n+3-h}] = (-1)^h c_{4n}^3 e_2 \qquad (1.9)$

Si $\underline{n}$ fuera impar , entonces $n+3$ sería par, luego $\frac{n+3}{2}$ es natural. Haciendo $h = \frac{n+3}{2}$ en la última igualdad, quedará:

$$c_{4n}^3 = 0$$

en contra de lo supuesto. Luego $\underline{n}$ es par. $\square$

Si $c_{4n}^3 = c_{5n}^4 = \cdots = c_{hn}^{h-1} = \cdots = c_{n-1,n}^{n-2} \neq 0$**, haciendo el cambio de base adaptada:**

$$e_1' = e_1; \qquad e_h' = \frac{e_h}{c_{4n}^3} \quad (h = 2, \ldots, n)$$

podemos conseguir que todos los primeros coeficientes sean iguales a $\underline{1}$**.**

En adelante supondremos que si $c_{4n}^3 \neq 0$ **entonces** $c_{4n}^3 = 1$**, y en consecuencia:**

$$c_{4n}^3 = c_{5n}^4 = \cdots = c_{hn}^{h-1} = \cdots = c_{n-1,n}^{n-2} = 1 \tag{1.10}$$

<u>Teorema 8.</u> *Un álgebra de Lie filiforme compleja de dimensión n, está definida respecto de una base adaptada, por los productos:*

$$[e_h, e_n] \qquad (i \leq h < n).$$

Demostración:

De la identidad de Jacobi $(e_1, e_{n-2}, e_n) = 0$ **se obtiene:** $[e_{n-3}, e_n] + [[e_{n-2}, e_n], e_1] + [e_{n-2}, e_{n-1}] = 0$. **Entonces, si conocemos** $[e_{n-3}, e_n]$ **y** $[e_{n-2}, e_n]$ **queda determinado** $[e_{n-2}, e_{n-1}]$**.**

Análogamente, de $(e_1, e_h, e_n) = 0$ **queda determinado** $[e_h, e_{n-1}]$. **Conocidos los productos** $[e_h, e_{n-1}]$ $(i \leq h < n-1)$ **de análoga forma se obtienen los productos** $[e_h, e_{n-2}]$, **y aplicando reiteradamente el proceso, obtenemos todos los productos** $[e_h, e_k]$. □

Corolario 9. *Para definir un álgebra de Lie filiforme compleja de dimensión* n*, respecto de una base adaptada, basta conocer todos los productos* $[e_h, e_n]$ $(i \leq h < n)$ *no nulos.*

Demostración:

Es consecuencia inmediata del teorema 8. □

1.3 Estudio del invariante j.

Sea $\mathcal{L}$ **un álgebra de Lie filiforme compleja, y** $\{e_1, \ldots, e_n\}$ **una base adaptada. Ya hemos definido el invariante** $\underline{i}$ **respecto a las bases adaptadas. A continuación vamos a definir otro invariante:**

Definición: *Sea* $\mathcal{L}$ *un álgebra de Lie filiforme de dimensión* n*. Definimos el subíndice* $\underline{j}$ *como:*

$$j = max\{k \in \mathbb{N} \,|\, \mathcal{L}^{n-k+1} \text{ es conmutativo}\}$$

Esta definición nos dice que el ideal $\mathcal{L}^{n-j+1} \equiv \{e_2, \ldots, e_j\}$ es el mayor ideal conmutativo en la sucesión de nilpotencia.

Teorema 10. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Lie filiforme de dimensión n. Si existe $\underline{j}$, se verifica:*

$$[e_j, e_{j+1}] \neq 0$$

Demostración:

Por reducción al absurdo, si $[e_j, e_{j+1}] = 0$, de la identidad de Jacobi $(e_1, e_j, e_{j+1}) = 0$ obtenemos que $[e_{j-1}, e_{j+1}] = 0$. De la identidad de Jacobi $(e_1, e_{j-1}, e_{j+1}) = 0$ obtenemos que $[e_{j-2}, e_{j+1}] = 0$ y siguiendo sucesivamente llegariamos a que: $[e_h, e_{j+1}] = 0 \quad (2 \leq h \leq j+1)$, por tanto el ideal $\mathcal{L}^{n-j} \equiv \{e_2, \ldots, e_{j+1}\}$ es conmutativo, lo que es contradictorio por ser $\mathcal{L}^{n-j+1}$ el mayor ideal que es conmutativo. Por tanto $[e_j, e_{j+1}] \neq 0$. $\square$

Como cosecuencia, se tiene que $\underline{j}$ puede ser definido como:

$$j = min\{\, k \in \mathbb{N} \mid [e_k, e_{k+1}] \neq 0\}.$$

Observese que $\underline{j}$ es un invariente en las álgebras de Lie filiformes de dimensión n, pues no depende de la base adaptada elegida. Al producto $[e_j, e_{j+1}]$, si existe, lo denominamos producto principal.

Como en toda base adaptada se tiene:

$[e_1, e_2] = [e_2, e_3] = [e_3, e_4] = 0$, **si existe** $\underline{j}$**, el menor valor de** $\underline{j}$ **es** 4.

Por otra parte, se verifica $i \leq j$**, pues si** $1 < j < i$**, entonces por el teorema 3 se tiene que** $[e_j, e_{j+1}] = 0$**, lo que es contradictorio.**

Teorema 11. *Sea* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *una base adaptada de un álgebra de Lie filiforme* $\mathcal{L}$ *de dimensión* n. *Se verifica:*
Si $1 < k, l \leq n$ *con* $k + l \leq n + 2 \implies [e_k, e_l] = 0$.

Demostración:

Ya vimos que $\mathcal{L}^i \equiv \{e_2, \ldots, e_{n-i+1}\}$ **para** $2 \leq i \leq n$. **Entonces, se tiene** $e_k \in \mathcal{L}^{n-(k-1)}$ **y por tanto,**

$$[e_k, e_l] \in [\mathcal{L}^{n-(k-1)}, \mathcal{L}^{n-(l-1)}] \subseteq \mathcal{L}^{2n-(k+l)+2}.$$

Entonces, como $k + l \leq n + 2$, **se tiene**

$$2n - (k + l) + 2 \geq 2n - (n + 2) + 2 = n$$

Por tanto, $\mathcal{L}^{2n-(k+l)+2} \subseteq \mathcal{L}^n \equiv \{0\}$ **y ello implica** $[e_k, e_l] = 0$. □

Teorema 12. *Sea* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *una base adaptada de un álgebra de Lie filiforme* $\mathcal{L}$ *de dimensión* n. *Se verifica:*
Si $1 < k, l \leq n$ *entonces* $[e_k, e_l] \in \mathcal{L}^{2n-k-l+2} \equiv \{e_{k+l-n-1}, \ldots, e_2\}$.

Además si $i \neq 4$, *ó* n *es impar se verifica:*
Si $1 < k, l \leq n$ *entonces* $[e_k, e_l] \in \mathcal{L}^{2n-k-l+3} \equiv \{e_{k+l-n-2}, \ldots, e_2\}$.

Demostración:

Suponemos que $\mathcal{L}$ no es el álgebra modelo, ya que en caso contrario todos sus productos son nulos excepto:
$[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, n)$, **luego si** $k, l > 1$ **se verifica que** $[e_k, e_l] = 0$ **y por tanto se obtiene el resultado trivialmente.**

Según vimos anteriormente en el teorema 11, se tiene que si $1 < k, l \leq n$, **se verifica** $[e_k, e_l] \in \mathcal{L}^{2n-k-l+2} \equiv \{e_{k+l-n-1}, \ldots, e_2\}$ **y se tiene el resultado.**

Además, si $i \neq 4$ **ó** n **es impar, por el teorema 7 tenemos que los primeros coeficientes valen cero, luego:**

$$c_{hn}^{h-1} = 0 \quad (\forall h).$$

Como consecuencia del teorema 3 se tiene que:

$$[e_k, e_n] = 0 \qquad 1 < k < i$$

$$[e_i, e_n] = \underbrace{c_{in}^{i-1}}_{0} e_{i-1} + c_{in}^{i-2} e_{i-2} + \cdots + c_{in}^{2} e_2 \in \mathcal{L}^{n-i+3} \equiv \{e_{i-2}, \ldots, e_2\}$$

$$\vdots$$

$$[e_k, e_n] = \underbrace{c_{kn}^{k-1}}_{0} e_{k-1} + c_{kn}^{k-2} e_{k-2} + \cdots + c_{kn}^{2} e_2 \in \mathcal{L}^{n-k+3} \equiv \{e_{k-2}, \ldots, e_2\}$$

$(i \leq k \leq n-1)$

$$\vdots$$

$$[e_{n-1}, e_n] = \underbrace{c_{n-1,n}^{n-2}}_{0} e_{n-2} + c_{n-1,n}^{n-3} e_{n-3} + \cdots + c_{n-1,n}^{2} e_2 \in \mathcal{L}^{4} \equiv \{e_{n-3}, \ldots, e_2\}$$

Por tanto, se tiene que:

$[e_k, e_n] = c_{kn}^{k-2} e_{k-2} + \cdots + c_{kn}^2 e_2 \in \mathcal{L}^{n-k+3} \equiv \{e_{k-2}, \ldots, e_2\}$ **(valido** $\forall k > 1$**)**

Por tanto, se deduce que: $[e_{k-1}, e_n] \in \{e_{k-3}, \ldots, e_2\} \equiv \mathcal{L}^{n-k+4}$ **ya que de la identidad de Jacobi** $(e_1, e_k, e_n) = 0$ **se tiene que:**

$[e_{k-1}, e_n] + [[e_k, e_n], e_1] + [e_k, e_{k-1}] = 0 \Longrightarrow$

$$c_{k-1,n}^{k-3} e_{n-3} + \cdots + c_{k-1,n}^2 e_2 - c_{kn}^{k-2} e_{k-3} - \ldots - c_{kn}^3 e_2 + [e_k, e_{n-1}] = 0 \Longrightarrow$$

$$[e_k, e_{n-1}] = \underbrace{\left(c_{kn}^{k-2} - c_{k-1,n}^{k-3}\right)}_{A_{k-3}} e_{k-3} + \cdots + \underbrace{\left(c_{kn}^3 - c_{k-1,n}^2\right)}_{A_2} e_2 \in \{e_{k-3}, \ldots, e_2\} \equiv$$

$$\equiv \mathcal{L}^{n-k+4}$$

Veamos también que se verifica:

$[e_k, e_{n-2}] \in \{e_{k-4}, \ldots, e_2\} \equiv \mathcal{L}^{n-k+5}$

Para ello, de la identidad de Jacobi $(e_1, e_k, e_{k-1}) = 0$ **se tiene:**

$[e_{k-1}, e_{n-1}] - A_{k-3} e_{k-4} - \ldots - A_3 e_2 + [e_k, e_{n-2}] = 0$

y de la identidad de Jacobi $(e_1, e_{k-1}, e_n) = 0$ **se tiene que:**

$$c_{k-2,n}^{k-4} e_{k-4} + \cdots + c_{k-2,n}^2 e_2 + [c_{k-1,n}^{k-3} e_{k-3} + \cdots + c_{k-1,n}^2 e_2 \, , e_1] + [e_{k-1}, e_{n-1}] = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad [e_{k-1}, e_{n-1}] = \underbrace{\left(c_{k-1,n}^{k-3} - c_{k-2,n}^{k-4}\right)}_{B_{k-4}} e_{k-4} + \cdots + \underbrace{\left(c_{k-1,n}^3 - c_{k-2,n}^2\right)}_{B_2} e_2 =$$

$$= B_{k-4} e_{k-4} + \cdots + B_2 e_2.$$

Luego de ambas identidades se obtiene que:

$[e_k, e_{n-2}] = (A_{k-3} - B_{k-4}) e_{k-4} + \cdots + (A_3 - B_2) e_2 \in \{e_{k-4}, \ldots, e_2\} \equiv \mathcal{L}^{n-k+5}$

Por tanto, supuesto $i \neq 4$ ó n es impar se tiene probado que:

$$[e_k, e_n] \in \mathcal{L}^{n-k+3} \equiv \{e_{k-2}, \ldots, e_2\}$$

$$[e_k, e_{n-1}] \in \mathcal{L}^{n-k+4} \equiv \{e_{k-3}, \ldots, e_2\}$$

$$[e_k, e_{n-2}] \in \mathcal{L}^{n-k+5} \equiv \{e_{k-4}, \ldots, e_2\}$$
$$\vdots$$
$$[e_k, e_{n-p}] \in \mathcal{L}^{n-k+p+3} \equiv \{e_{k-3}, \ldots, e_2\}$$
$$\vdots$$

Siendo $k > 1$ **y** $n - p > 1$.

Luego, si $k, l > 1$ **se tiene que:**

$$[e_k, e_l] = [e_k, e_{n-\underbrace{(n-l)}_{p}}] \in \mathcal{L}^{2n-k-l+3} \equiv \{e_{k+l-n-2}, \ldots, e_2\}$$

Por tanto, se tiene que: $[e_k, e_l] \in \mathcal{L}^{2n-k-l+3}$. $\square$

<u>Corolario 13.</u> *Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base adaptada de un álgebra de Lie filiforme $\mathcal{L}$ de dimensión n. Se verifica:*

a) Si n es par, entonces los productos $[e_k, e_{k+1}]$ son nulos, para todo k natural con $k \leq \frac{n}{2}$.
b) Si n es impar, entonces los productos $[e_k, e_{k+1}]$ son nulos, para todo k natural con $k \leq \frac{n+1}{2}$.

Demostración:

a) Supongamos n **par. De ser** $k \leq \frac{n}{2}$**, tenemos que** $k+1 \leq \frac{n}{2}+1$**, por tanto** $k+(k+1) \leq \frac{n}{2}+\frac{n}{2}+1 = n+1 \leq n+2$.

Luego se tiene que $\underbrace{k}_{k} + \underbrace{(k+1)}_{l} \leq n+2$ **y aplicando el teorema 11 se obtiene que** $[e_k, e_{k+1}] = 0$ **con** $k \leq \frac{n}{2}$.

b) Supongamos n **impar. De ser** $k \leq \frac{n+1}{2}$**, tenemos que** $k+1 \leq \frac{n+3}{2}$**, por tanto** $k+(k+1) \leq \frac{n+1}{2}+\frac{n+3}{2} = n+2$.

Luego se tiene que $\underbrace{k}_{k} + \underbrace{(k+1)}_{l} \leq n+2$ **y aplicando el teorema 11 se obtiene que** $[e_k, e_{k+1}] = 0$ **con** $k \leq \frac{n+1}{2}$. □

Teorema 14. *Toda álgebra de Lie filiforme $\mathcal{L}$ de dimensión n, no modelo, tiene algún producto $[e_k, e_{k+1}] \neq 0$, para algún $k < n$, y por tanto existe el producto principal.*

Demostración:

Si $[e_{n-1}, e_n] \neq 0$ **ya está demostrado; de lo contrario, por la identidad de Jacobi** $(e_1, e_{n-1}, e_n) = 0$ **tenemos que** $[e_{n-2}, e_n] = 0$**. En este caso, de la identidad de Jacobi**

$$(e_1, e_{n-2}, e_n) = 0 \longrightarrow [e_{n-3}, e_n] + [e_{n-2}, e_{n-1}] = 0$$

Si $[e_{n-2}, e_{n-1}] \neq 0$ **ya está demostrado; de lo contrario, por la identi-**

dad de Jacobi anterior se tiene que $[e_{n-3}, e_n] = 0$. **Pero además, de la identidad de Jacobi**

$$(e_1, e_{n-3}, e_n) = 0 \longrightarrow [e_{n-4}, e_n] + [e_{n-3}, e_{n-1}] = 0$$

pero como suponemos que $[e_{n-2}, e_{n-1}] = 0$, **se tiene por la identidad de Jacobi** $(e_1, e_{n-2}, e_{n-1}) = 0$ **que** $[e_{n-3}, e_{n-1}] = 0$, **y por tanto, por la anterior identidad de Jacobi obtenemos que** $[e_{n-4}, e_n] = 0$.
De las identidades de Jacobi

$$(e_1, e_{n-4}, e_n) = 0 \longrightarrow [e_{n-5}, e_n] + [e_{n-4}, e_{n-1}] = 0$$

$$(e_1, e_{n-3}, e_{n-1}) = 0 \longrightarrow [e_{n-4}, e_{n-1}] + [e_{n-3}, e_{n-2}] = 0$$

Si $[e_{n-3}, e_{n-2}] \neq 0$ **ya está demostrado; de lo contrario, si además de ser** $[e_{n-1}, e_n] = 0$ **y** $[e_{n-2}, e_{n-1}] = 0$ **se tiene que** $[e_{n-3}, e_{n-2}] = 0$, **por las identidades de Jacobi anteriores se deduce que** $[e_{n-4}, e_{n-1}] = 0$ **y por tanto** $[e_{n-5}, e_n] = 0$.
Además, de las identidades de Jacobi

$$(e_1, e_{n-5}, e_n) = 0 \longrightarrow [e_{n-6}, e_n] + [e_{n-5}, e_{n-1}] = 0$$

$$(e_1, e_{n-4}, e_{n-1}) = 0 \longrightarrow [e_{n-5}, e_{n-1}] + [e_{n-4}, e_{n-2}] = 0$$

Como tenemos $[e_{n-3}, e_{n-2}] = 0$, **de la identidad de Jacobi** $(e_1, e_{n-3}, e_{n-2}) = 0$ **se obtiene que** $[e_{n-4}, e_{n-2}] = 0$, **por las identidades de Jacobi anteriores se deduce que** $[e_{n-5}, e_{n-1}] = 0$, **y por tanto** $[e_{n-6}, e_n] = 0$.

Y en general, se tiene:

Si $\quad [e_{n-1}, e_n] = 0 \qquad \longrightarrow \qquad [e_{n-1}, e_n] = 0\,; \quad [e_{n-2}, e_n] = 0$

Si además $[e_{n-2}, e_{n-1}] = 0 \quad \longrightarrow \quad [e_{n-3}, e_n] = 0\,; \quad [e_{n-4}, e_n] = 0$

Si además $[e_{n-3}, e_{n-2}] = 0 \quad \longrightarrow \quad [e_{n-5}, e_n] = 0\,; \quad [e_{n-6}, e_n] = 0$

$\vdots$

Si n es par

y además $[e_{\frac{n}{2}+2}, e_{\frac{n}{2}+3}] = 0 \quad \longrightarrow \quad [e_5, e_n] = 0\,; \quad [e_4, e_n] = 0$

Si n es impar

y además $[e_{\frac{n+3}{2}}, e_{\frac{n+5}{2}}] = 0 \quad \longrightarrow \quad [e_4, e_n] = 0$

Por lo que en ambos casos, si algún $[e_k, e_{k+1}] \neq 0$ tenemos probado el teorema, en caso contrario llegamos a que $[e_h, e_n] = 0 \quad \forall h > 1$, luego no existe el valor $\underline{i}$ y por el teorema 2 obtenemos que $\mathcal{L}$ es el álgebra modelo, lo que es contradictorio. Por tanto existe el producto principal. $\square$

Se tiene por tanto, que todas las álgebras filiformes, menos las modelo, tienen productos $[e_k, e_{k+1}] \neq 0$. De estos productos, el menor subíndice posible es el número "$\underline{j}$".

Corolario 15. *Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base adaptada de un álgebra de Lie filiforme $\mathcal{L}$ de dimensión n. Supongamos que existe $\underline{j}$. Se verifica:*

a) Si n es par $\Longrightarrow \frac{n}{2} + 1 \leq j \leq n - 1$

(o lo que es equivalente: $j + 1 \leq n \leq 2j - 2$).

b) Si n es impar $\Longrightarrow \frac{n+3}{2} \leq j \leq n - 1$

(o lo que es equivalente: $j + 1 \leq n \leq 2j - 3$).

Demostración:

Evidentemente al existir j tenemos que $[e_j, e_{j+1}] \neq 0$ luego $e_{j+1} \in \mathcal{L} \equiv \{e_1, \ldots, e_n\}$ por tanto $j+1 \leq n \Longrightarrow j \leq n-1$.
Luego siempre tenemos que: $j \leq n-1$.

Supongamos n par. Por el corolario 13 tenemos que:
$[e_k, e_{k+1}] = 0 \quad \forall\, k \leq \frac{n}{2}$, pero j verifica que $[e_j, e_{j+1}] \neq 0$ entonces $\frac{n}{2} < j$ siendo ambos valores naturales, luego $\frac{n}{2} + 1 \leq j$. Por tanto tenemos que:

$$\frac{n}{2} + 1 \leq j \leq n-1.$$

Supongamos n impar. Por el corolario 13 tenemos que:
$[e_k, e_{k+1}] = 0 \quad \forall\, k \leq \frac{n+1}{2}$, pero j verifica que $[e_j, e_{j+1}] \neq 0$ entonces $\frac{n+1}{2} < j$ siendo ambos valores naturales, luego $\frac{n+1}{2} + 1 \leq j$ es decir $\frac{n+3}{2} \leq j$. Por tanto tenemos que:

$$\frac{n+3}{2} \leq j \leq n-1. \qquad \square$$

Como consecuencia inmediata tenemos el siguiente corolario:

<u>Corolario 16.</u> *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Lie filiforme no modelo de dimensión n. Se verifica:*

$$4 \leq i \leq j < n \leq 2j - 2. \tag{1.11}$$

Demostración:

Es inmediata por los teoremas 3 y 14 y por el corolario 15. □

Ejemplos:

- Sea n **impar. Es bien conocida el álgebra dada por** $\{e_1, \ldots, e_n\}$ **base de** $\mathcal{L}$ **y productos:**

$$\begin{aligned}
&[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, n);\\
&[e_4, e_n] = e_2\\
&[e_5, e_{n-1}] = -e_2\\
&[e_6, e_{n-2}] = e_2\\
&\quad\vdots\\
&[e_{\frac{n+3}{2}}, e_{\frac{n+5}{2}}] = (-1)^{\frac{n+3}{2}} e_2
\end{aligned} \tag{1.12}$$

en este caso $j = \frac{n+3}{2}$**, siendo éste el menor valor posible para** $\underline{j}$**, siendo** n **impar.**

- Sea n **par. También es bien conocida el álgebra dada por** $\{e_1, \ldots, e_n\}$ **base de** $\mathcal{L}$ **y productos:**

$$\begin{aligned}
&[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, n);\\
&[e_h, e_n] = e_{h-1} \quad (h = 4, \ldots, n-1);
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&[e_4, e_{n-1}] = e_2 \\
&[e_5, e_{n-2}] = -e_2 \\
&[e_6, e_{n-3}] = e_2 \\
&\qquad\vdots \\
&[e_{\frac{n}{2}+1}, e_{\frac{n}{2}+2}] = (-1)^{\frac{n}{2}+1} e_2
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

en este caso $j = \frac{n}{2} + 1$, siendo éste el menor valor posible para $\underline{j}$, siendo n par.

<u>Teorema 17.</u> *Un álgebra de Lie filiforme compleja, respecto de una base adaptada, está definida si se conocen los productos:*

$$[e_k, e_{k+1}] \quad (j \leq k < n).$$

Demostración:

A partir de estos productos se obtiene el $[e_{n-1}, e_n]$ y de éste, el $[e_{n-2}, e_n]$ según el teorema 5. Seguidamente, de la identidad de Jacobi $(e_1, e_{n-2}, e_n) = 0$ se obtiene el producto $[e_{n-3}, e_n]$ y así sucesivamente, se van obteniendo todos los productos $[e_k, e_n] \quad (i \leq k < n)$, con lo que queda definida el álgebra según el teorema 8. $\square$

Como el ideal de base $\{e_2, \ldots, e_j\}$ es conmutativo, una consecuencia inmediata de este teorema es que si el producto:
$[e_j, e_{j+1}] = \beta_q e_q + \cdots + \beta_2 e_2 \quad (q < j; \; \beta_q \neq 0)$ **entonces:**

$$[e_{j-1}, e_{j+1}] = \beta_q e_{q-1} + \cdots + \beta_3 e_2$$

$$[e_{j-2}, e_{j+1}] = \beta_q e_{q-2} + \cdots + \beta_4 e_2$$

$$\vdots$$

$$[e_{j-q+2}, e_{j+1}] = \beta_q e_2$$

Podemos observar que $\underline{q}$ es un invariante de estas álgebras. De ser $[e_j, e_{j+1}] = \beta_q e_q + \cdots + \beta_2 e_2 \quad (q < j;\ \beta_q \neq 0)$, como $e_j \in \mathcal{L}^{n-j+1} \equiv$ $\equiv \{e_2, \ldots, e_j\}$ y $e_{j+1} \in \mathcal{L}^{n-j} \equiv \{e_2, \ldots, e_{j+1}\}$ se sigue que: $[\mathcal{L}^{n-j+1}, \mathcal{L}^{n-j}] \equiv \mathcal{L}^{n-q+1}$, pero $[\mathcal{L}^{n-j+1}, \mathcal{L}^{n-j}] \not\subset \mathcal{L}^{n-q+2}$, lo que nos prueba que $\underline{q}$ es invariante.

Para probar que ciertas álgebras no son isomorfas unas a otras vamos a introducir el concepto de <u>álgebras cortadas</u>.

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Lie filiforme de dimensión n y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una de sus bases adaptadas. Llamamos $\mathcal{Z}(\mathcal{L}) = \{e_2\}$ al centro unidimensional de $\mathcal{L}$.

<u>Definición:</u> *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Lie filiforme, llamaremos <u>algebra cortada</u> de $\mathcal{L}$, al cociente: $\mathcal{L}/_{\mathcal{Z}(\mathcal{L})}$.*

Como el centro de $\mathcal{L}$ es unidimensional de base e_2, para todas las álgebras filiformes, el álgebra cortada $\mathcal{L}/_{\mathcal{Z}(\mathcal{L})}$ es filiforme,

de dimensión $n-1$, una de cuyas bases es $\{e'_1, e'_3, \dots, e'_n\}$ siendo: $e'_h = e_h + \mathcal{Z}(\mathcal{L}) \quad (h = 1, 3, \dots, n)$, y verificándose que:

$$[e'_1, e'_3] = 0; \qquad [e'_1, e'_h] = e'_{h-1} \quad (h = 4, \dots, n).$$

Denotaremos al álgebra cortada de $\mathcal{L}$ por: $\mathcal{CL} = \mathcal{L}/_{\mathcal{Z}(\mathcal{L})}$.

Teorema 18. *Si dos álgebras de Lie filiformes $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ son isomorfas, sus álgebras cortadas $\mathcal{L}/_{\mathcal{Z}(\mathcal{L})}$ y $\mathcal{L}'/_{\mathcal{Z}(\mathcal{L}')}$ también lo son.*

Demostración:

Es consecuencia inmediata del hecho de ser $\mathcal{Z}(\mathcal{L})$ y $\mathcal{Z}(\mathcal{L}')$ isomorfos, al ser unidimensionales. $\square$

Consecuencia de este teorema es que si dos álgebras de Lie filiformes $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ verifican la propiedad de que sus álgebras cortadas no son isomorfas, entonces ellas tampoco pueden serlo. Este resultado nos permitirá más adelante probar en algunos casos que dos álgebras de Lie filiforme no son isomorfas entre sí, mediante el procedimiento del corte.

El recíproco no es cierto, dos álgebras cortadas pueden ser isomorfas y no serlo las álgebras originales. Por ejemplo:

Las álgebras filiformes de dimensión 7:

$$[e_1, e_h] = e_{h-1} \ (h = 3, \dots, 7); \quad [e_5, e_7] = e_2; \quad [e_6, e_7] = e_3$$

y la

$$[e_1, e_h] = e_{h-1} \ (h = 3, \ldots, 7); \quad [e_5, e_7] = e_2; \quad [e_6, e_7] = e_3 + e_2$$

no son isomorfas, y en cambio sus álgebras cortadas coinciden:

$$[e'_1, e'_h] = e'_{h-1} \ (h = 4, \ldots, 7); \quad [e'_5, e'_7] = 0; \quad [e'_6, e'_7] = e'_3.$$

CAPÍTULO 2

CAPÍTULO 2

Clasificación de las álgebras de Lie filiformes atendiendo al valor del invariante j.

En primer lugar, tenemos las álgebras de Lie filiformes modelo, para las que no existe el invariante j, siendo ellas las únicas con esta propiedad. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base adaptada del álgebra modelo $\mathcal{L}$, ésta queda definida por los productos:
$[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, n)$, y obtenemos una para cada dimensión.

A continuación, vamos a tener en cuenta para la clasificación, las ternas (i, j, n), los dos primeros valores ya definidos y el tercero la dimensión del álgebra, es decir, $i = min\{\, k \in I\!N - \{1\} \,|[e_k, e_n] \neq 0\,\}$, $j = min\{\, k \in I\!N|[e_k, e_{k+1}] \neq 0\}$ y $n = dim\mathcal{L}$. Como siempre, se verifica que para toda base adaptada $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathcal{L}$ se tiene que si existe j (es decir $\mathcal{L}$ es no modelo), el menor valor de j es 4, y entonces $[e_4, e_5] \neq 0$. Comenzaremos, por tanto, por este caso.

2.1 Clasificación de las álgebras de Lie filiformes para las que $j = 4$.

En este caso, por (1.11) del corolario 16 tenemos que $i = 4$ y $n = 5, 6$. Es decir, tenemos dos posibles ternas: $(4, 4, 5)$ y $(4, 4, 6)$.

- Comenzamos por la terna $(4, 4, 5)$.

De ser $j = 4$, y por ser $n = 5$ impar, por el teorema 12 se tiene que: $[e_4, e_5] = \alpha_1 e_2 \qquad (\alpha_1 \neq 0)$.

Luego tenemos que las álgebras vienen dadas por los productos:

$$[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, 4, 5)$$
$$[e_4, e_5] = \alpha_1 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0)$$

haciendo el cambio de base:

$e'_1 = e_1$

$e'_5 = \frac{1}{\alpha_1} e_5$

conseguimos que el coeficiente $\alpha_1' = 1$.

Basta dar en el cambio de base adaptada cuánto valen los elementos e_1' y e_5', en nuestro caso: $e_1' = e_1$ y $e_5' = \frac{1}{\alpha_1}e_5$, ya que a partir de estos quedan definidos los demás elementos de la base, pues la nueva base $\{e_1', \ldots, e_5'\}$ deseamos que sea también una base adaptada, luego verifican que $[e_1', e_h'] = e_{h-1}' \quad (h = 3, 4, 5)$ y obtenemos e_4', e_3' y e_2' de la siguiente forma:

Tenemos que $[e_1', e_5'] = e_4'$ y por otro lado:
$[e_1', e_5'] = [e_1, \frac{1}{\alpha_1}e_5] = \frac{1}{\alpha_1}[e_1, e_5] = \frac{1}{\alpha_1}e_4$. Por tanto tenemos que $e_4' = \frac{1}{\alpha_1}e_4$.

Análogamente, de $[e_1', e_4'] = e_3'$ y $e_4' = \frac{1}{\alpha_1}e_4$ se obtiene $e_3' = \frac{1}{\alpha_1}e_3$.

Por último, de $[e_1', e_3'] = e_2'$ y $e_3' = \frac{1}{\alpha_1}e_3$ obtenemos $e_2' = \frac{1}{\alpha_1}e_2$.

Por tanto, el cambio de base es: $e_1' = e_1$; $e_h' = \frac{1}{\alpha_1}e_h \quad (h = 2, \ldots, 5)$.

En general dada la base adaptada $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathcal{L}$, para dar un cambio de base adaptada, basta dar lo que valen los elementos e_1' y e_n' en función de los elementos de la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y por el mismo procedimiento anterior calculamos cuánto valen los elementos $e_{n-1}', e_{n-2}', \ldots, e_2'$ en función de los elementos de la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Por tanto, de ahora en adelante, para dar un cambio de base adaptada, daremos simplemente los valores de e_1' y e_n'.

Luego aplicando el cambio anterior conseguimos que el coe-

ficiente $\alpha_1' = 1$ y tenemos que dichas álgebras son isomorfas al álgebra:

$$\mathcal{L}_{(4,4,5)} \begin{cases} [e_1, e_h] = e_{h-1} & (h = 3, 4, 5) \\ [e_4, e_5] = e_2 \end{cases}$$

- **<u>Terna</u>** <u>$(4, 4, 6)$.</u>

Por ser $j = 4 \Longrightarrow [e_4, e_5] \neq 0$ y por el teorema 12 se obtiene que: $[e_4, e_5] = \alpha_1 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0)$.

De la identidad de Jacobi $(e_1, e_4, e_6) = 0$ se tiene: $[e_4, e_6] = \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_2$.

Y por el teorema 5 tenemos: $[e_5, e_6] = \alpha_1 e_4 + \alpha_2 e_3 + \alpha_3 e_2$

Al ser los primeros coeficientes $\alpha_1 \neq 0$, por (1.10) podemos tomar un cambio de base de manera que los primeros coeficientes son todos iguales 1, entonces $\alpha_1 = 1$, con lo que dichas álgebras son isomorfas a las:

$$[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 6)$$
$$[e_4, e_5] = e_2$$
$$[e_4, e_6] = e_3 + \alpha_2 e_2$$
$$[e_5, e_6] = e_4 + \alpha_2 e_3 + \alpha_3 e_2$$

y mediante el cambio de base:

$e_1' = e_1 + \frac{\alpha_3}{2} e_4$

$e_6' = e_6$

conseguimos hacer el coeficiente $\alpha_3' = 0$, **y en cosecuencia, dichas álgebras son isomorfas a las:**

$[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 6)$

$[e_4, e_5] = e_2$

$[e_4, e_6] = e_3 + \alpha_2 e_2$

$[e_5, e_6] = e_4 + \alpha_2 e_3$

Consideramos dos casos: a) $\alpha_2 \neq 0$ **y b)** $\alpha_2 = 0$

a).- Si $\alpha_2 \neq 0$, **haciendo el nuevo cambio de base:**

$e_1' = \alpha_2 e_1$

$e_6' = \alpha_2 e_6$

conseguimos hacer el coeficiente $\alpha_2' = 1$, **y estas álgebras son isomorfas al álgebra:**

$$\mathcal{L}_{(4,4,6)(a)} \begin{cases} [e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 6) \\ [e_4, e_5] = e_2 \\ [e_4, e_6] = e_3 + e_2 \\ [e_5, e_6] = e_4 + e_3 \end{cases}$$

b).- Si $\alpha_2 = 0$, tenemos el álgebra:

$$\mathcal{L}_{(4,4,6)(b)} \begin{cases} [e_1, e_h] = e_{h-1} & (h = 3, \ldots, 6) \\ [e_4, e_5] = e_2 \\ [e_4, e_6] = e_3 \\ [e_5, e_6] = e_4 \end{cases}$$

Estas dos álgebras $\mathcal{L}_{(4,4,6)(a)}$ y $\mathcal{L}_{(4,4,6)(b)}$ no son isomorfas entre sí, ya que sus cortes son: $C\mathcal{L}_{(4,4,6)(a)}$ es isomorfo al álgebra $\mathcal{L}_{(4,4,5)}$ y $C\mathcal{L}_{(4,4,6)(b)}$ es isomorfo al álgebra modelo de dimensión 5. Luego al ser sus cortes no isomorfos, estas algebras no son isomorfas entre sí.

2.2 Clasificación de las álgebras de Lie filiformes para las que $j = 5$.

En este caso, por ser $j = 5$, se tiene $[e_4, e_5] = 0$; $[e_5, e_6] \neq 0$. De (1.11) se deduce, por ser $j = 5$, que $i = 4, 5$ y $n = 6, 7, 8$; tenemos por tanto seis posibles ternas.

- Terna $(4, 5, 6)$.

Por ser $i = 4$, se tiene $[e_4, e_5] = 0$, y $[e_4, e_6] \neq 0$.

Tenemos que $[e_4, e_6] = c_{46}^3 e_3 + c_{46}^2 e_2$, por (1.3) del teorema 4 tenemos $[e_4, e_5] = c_{46}^3 e_2$ y como $[e_4, e_5] = 0$ deducimos que $c_{46}^3 = 0$, por tanto si llamamos α_1 a c_{46}^2 obtenemos que $[e_4, e_6] = \alpha_1 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0)$.

Por el teorema 5 deducimos que $[e_5, e_6] = \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_2$.

Luego las álgebras correspondientes a la terna $(4, 5, 6)$ **vienen dadas por:**

$$\begin{aligned}
&[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 6) \\
&[e_4, e_6] = \alpha_1 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0) \\
&[e_5, e_6] = \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_2
\end{aligned}$$

haciendo el cambio de base:

$e'_1 = \alpha_1 e_1$

$e'_6 = \alpha_1 e_6$

conseguimos hacer $\alpha'_1 = 1$, **luego estas álgebras son isomorfas a las:**

$$\begin{aligned}
&[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 6) \\
&[e_4, e_6] = e_2 \\
&[e_5, e_6] = e_3 + \alpha_2 e_2
\end{aligned}$$

haciendo de nuevo el cambio de base:

$e'_1 = e_1 - \frac{\alpha_2}{2} e_6$

$e'_6 = e_6$

conseguimos hacer el coeficiente $\alpha'_2 = 0$, **y dichas álgebras son isomorfas al álgebra:**

$$\mathcal{L}_{(4,5,6)} \begin{cases} [e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 6) \\ [e_4, e_6] = e_2 \\ [e_5, e_6] = e_3 \end{cases}$$

• Terna $(5,5,6)$.

Por ser $i = 5$ entonces $[e_4, e_6] = 0$ y $[e_5, e_6] \neq 0$, se deduce que necesariamente ha de ser $[e_5, e_6] = \alpha_1 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0)$. En efecto, por el teorema 12, al ser $i \neq 4$ se tiene que $[e_5, e_6] \in \mathcal{L}^4 \equiv \{e_3, e_2\}$, luego ha de ser $[e_5, e_6] = c_{56}^3 e_3 + c_{56}^2 e_2$, entonces por el teorema 5 se tiene que $[e_4, e_6] = c_{56}^3 e_2$ siendo $[e_4, e_6] = 0$ por ser $i = 5$, luego $c_{56}^3 = 0$ y por tanto $[e_5, e_6] = c_{56}^2 e_2$. Llamemos α_1 a c_{56}^2. Al ser $i = 5$, se tiene que $[e_5, e_6] \neq 0$, luego entonces $\alpha_1 \neq 0$. Por tanto se tiene que $[e_5, e_6] = \alpha_1 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0)$.

Luego las álgebras tienen como productos:

$$[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 6)$$
$$[e_5, e_6] = \alpha_1 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0)$$

haciendo el cambio de base:

$e_1' = \alpha_1 e_1$

$e_6' = (\alpha_1)^2 e_6$

conseguimos hacer el coeficiente $\alpha_1' = 1$; y estas álgebras son isomorfas al álgebra:

$$\mathcal{L}_{(5,5,6)} \begin{cases} [e_1, e_h] = e_{h-1} & (h = 3, \ldots, 6) \\ [e_5, e_6] = e_2 & \end{cases}$$

- **Terna** $(4,5,7)$.

Por ser $i = 4$ **entonces** $[e_4, e_7] \neq 0$, **y aplicando el teorema 12** ($[e_4, e_7] \in \mathcal{L}^6 \equiv \{e_2\}$) **se tiene que:** $[e_4, e_7] = \alpha_1 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0)$.

Por ser $j = 5$ **entonces** $[e_5, e_6] \neq 0$, **y aplicando el teorema 12** ($[e_5, e_6] \in \mathcal{L}^6 \equiv \{e_2\}$) **se tiene que:** $[e_5, e_6] = \alpha_2 e_2 \quad (\alpha_2 \neq 0)$.

Además, de la identidad de Jacobi: $(e_1, e_5, e_7) = 0$ **se obtiene que:** $[e_5, e_7] = (\alpha_1 + \alpha_2)e_3 + \alpha_3 e_2$, **y por el teorema 5 se tiene que:** $[e_6, e_7] = (\alpha_1 + \alpha_2)e_4 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_2$.

Luego las álgebras correspondientes a la terna $(4,5,7)$ **vienen dadas por:**

$$
\begin{aligned}
&[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \dots, 7)\\
&[e_4, e_7] = \alpha_1 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0)\\
&[e_5, e_6] = \alpha_2 e_2 \quad (\alpha_2 \neq 0)\\
&[e_5, e_7] = (\alpha_1 + \alpha_2)e_3 + \alpha_3 e_2\\
&[e_6, e_7] = (\alpha_1 + \alpha_2)e_4 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_2
\end{aligned}
$$

Consideramos dos casos: a) $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ **y b)** $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$.

a).- Si $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, **entonces tenemos que** $\alpha_2 = -\alpha_1$ **y por tanto las álgebras vienen dadas por:**

$$
\begin{aligned}
&[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 7)\\
&[e_4, e_7] = \alpha_1 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0)\\
&[e_5, e_6] = -\alpha_1 e_2\\
&[e_5, e_7] = \alpha_3 e_2\\
&[e_6, e_7] = \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_2
\end{aligned}
$$

haciendo el cambio de base:

$e_1' = \alpha_1 e_1$

$e_7' = \alpha_1 e_7$

conseguimos hacer el coeficiente $\alpha_1' = 1$**, luego dichas álgebras son isomorfas a:**

$$
\begin{aligned}
&[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 7)\\
&[e_4, e_7] = e_2\\
&[e_5, e_6] = -e_2\\
&[e_5, e_7] = \alpha_3 e_2\\
&[e_6, e_7] = \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_2
\end{aligned}
$$

haciendo de nuevo el cambio de base:

$e_1' = e_1$

$e_7' = e_7 - \frac{\alpha_4}{2} e_5$

conseguimos hacer el coeficiente $\alpha_4' = 0$**, y dichas álgebras son isomorfas a las álgebras dadas por:**

$[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 7)$

$[e_4, e_7] = e_2$

$[e_5, e_6] = -e_2$

$[e_5, e_7] = \alpha_3 e_2$

$[e_6, e_7] = \alpha_3 e_3$

a.1).- Si $\alpha_3 \neq 0$, hacemos el cambio de base:

$e'_1 = \alpha_3 e_1$

$e'_7 = (\alpha_3)^2 e_7$

conseguimos hacer el coeficiente $\alpha'_3 = 1$, con lo que dichas álgebras son isomorfas al álgebra:

$$\mathcal{L}_{(4,5,7)(a)} \begin{cases} [e_1, e_h] = e_{h-1} & (h = 3, \ldots, 7) \\ [e_4, e_7] = e_2 \\ [e_5, e_6] = -e_2 \\ [e_5, e_7] = e_2 \\ [e_6, e_7] = e_3 \end{cases}$$

a.2).- Si $\alpha_3 = 0$, tenemos entonces el álgebra:

$$\mathcal{L}_{(4,5,7)(b)} \begin{cases} [e_1, e_h] = e_{h-1} & (h = 3, \ldots, 7) \\ [e_4, e_7] = e_2 \\ [e_5, e_6] = -e_2 \end{cases}$$

b).- Si $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$, hacemos el cambio de base:

$e'_1 = e_1 - \frac{\alpha_3}{2(\alpha_1+\alpha_2)^2} e_7$

$e'_7 = e_7$

conseguimos hacer el coeficiente $\alpha'_3 = 0$, por tanto estas álgebras

son isomorfas a las álgebras dadas por:

$$[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 7)$$
$$[e_4, e_7] = \alpha_1 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0)$$
$$[e_5, e_6] = \alpha_2 e_2 \quad (\alpha_2 \neq 0)$$
$$[e_5, e_7] = (\alpha_1 + \alpha_2) e_3 \quad (\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0)$$
$$[e_6, e_7] = (\alpha_1 + \alpha_2) e_4 + \alpha_4 e_2$$

efectuando de nuevo el cambio de base definido por:

$e_1' = e_1$

$e_7' = e_7 + \frac{\alpha_4}{2\alpha_2} e_5$

conseguimos hacer el coeficiente $\alpha_4' = 0$, **y las álgebras son isomorfas a las álgebras dadas por:**

$$[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 7)$$
$$[e_4, e_7] = \alpha_1 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0)$$
$$[e_5, e_6] = \alpha_2 e_2 \quad (\alpha_2 \neq 0)$$
$$[e_5, e_7] = (\alpha_1 + \alpha_2) e_3 \quad (\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0)$$
$$[e_6, e_7] = (\alpha_1 + \alpha_2) e_4$$

Por último, si hacemos el cambio de base definido por:

$e_1' = \alpha_2 e_1$

$e_7' = \alpha_2 e_7$

conseguimos hacer el coeficiente $\alpha_2' = 1$, **y de ser** $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ **(como** $\alpha_2 \neq 0$**), se tiene que** $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + 1 \neq 0$, **pero como en dicho cambio se tiene que** $\alpha_1' = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ **se tiene que** $\alpha_1' + 1 \neq 0$, **es decir** $\alpha_1' \neq -1$. **Además como se tiene que** $\alpha_1 \neq 0$, **(al ser** $\alpha_2 \neq 0$**) se tiene que** $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \neq 0$ **y luego** $\alpha_1' \neq 0$.

En definitiva, se tiene que $\alpha_1' \neq 0$ y $\alpha_1' \neq -1$, y las anteriores álgebras son isomorfas a las álgebras dadas por:

$$\mathcal{L}_{(4,5,7)(c)} \begin{cases} [e_1, e_h] = e_{h-1} & (h = 3, \ldots, 7) \\ [e_4, e_7] = \alpha_1 e_2 & (\alpha_1 \neq 0 \text{ y } \alpha_1 \neq -1) \\ [e_5, e_6] = e_2 & \\ [e_5, e_7] = (1+\alpha_1) e_3 & \\ [e_6, e_7] = (1+\alpha_1) e_4 & \end{cases}$$

Estas tres álgebras no son isomorfas entre si, ya que sus cortes son no isomorfos: $C\mathcal{L}_{(4,5,7)(a)}$ es isomorfo al álgebra $\mathcal{L}_{(5,5,6)}$, $C\mathcal{L}_{(4,5,7)(b)}$ es isomorfo al álgebra modelo de dimensión 6 y $C\mathcal{L}_{(4,5,7)(c)}$ es isomorfo al álgebra $\mathcal{L}_{(4,5,6)}$, siendo estas tres álgebras no isomorfas entre sí. Por tanto las algebras originales no son isomorfas.

- Terna $(5, 5, 7)$.

Por ser $i = 5$ tenemos que: $[e_4, e_7] = 0$ y $[e_5, e_7] \neq 0$. Por el teorema 12 se tiene que $[e_5, e_7] \in \mathcal{L}^5 \equiv \{e_3, e_2\}$, luego:
$[e_5, e_7] = \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_2$.

Además ha de ser $\alpha_1 \neq 0$, ya que en caso contrario, por el teorema 4 se tiene que $[e_5, e_6] = 0$, lo que es contradictorio por ser $j = 5$. Luego necesariamente $[e_5, e_7] = \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0)$.

Y por tanto, por el teorema 5, se tiene:
$[e_6, e_7] = \alpha_1 e_4 + \alpha_2 e_3 + \alpha_3 e_2$.

Y además, por el teorema 4, al ser $[e_5, e_7] = \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_2$ se tiene que $[e_5, e_6] = \alpha_1 e_2$.

Por tanto las álgebras son isomorfas a las definidas por:

$$
\begin{aligned}
&[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 7)\\
&[e_5, e_6] = \alpha_1 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0)\\
&[e_5, e_7] = \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_2\\
&[e_6, e_7] = \alpha_1 e_4 + \alpha_2 e_3 + \alpha_3 e_2
\end{aligned}
$$

haciendo el cambio de base:

$e_1' = \alpha_1 e_1$

$e_7' = \alpha_1 e_7$

conseguimos hacer el coeficiente $\alpha_1' = 1$, **luego dichas álgebras son isomorfas a:**

$$
\begin{aligned}
&[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 7)\\
&[e_5, e_6] = e_2\\
&[e_5, e_7] = e_3 + \alpha_2 e_2\\
&[e_6, e_7] = e_4 + \alpha_2 e_3 + \alpha_3 e_2
\end{aligned}
$$

y realizando nuevamente el cambio de base definido por:

$e_1' = e_1$

$e_7' = e_7 + \frac{\alpha_3}{2} e_5$

conseguimos hacer el coeficiente $\alpha_3' = 0$, **y dichas álgebras son isomorfas a las álgebras dadas por:**

$[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 7)$

$[e_5, e_6] = e_2$

$[e_5, e_7] = e_3 + \alpha_2 e_2$

$[e_6, e_7] = e_4 + \alpha_2 e_3$

y haciendo por último el cambio de base:

$e_1' = e_1 - \frac{\alpha_2}{2} e_7$

$e_7' = e_7 - \frac{(\alpha_2)^2}{2} e_5$

conseguimos hacer el coeficiente $\alpha_2' = 0$, **por tanto todas estas álgebras son isomorfas al álgebra:**

$$\mathcal{L}_{(5,5,7)} \begin{cases} [e_1, e_h] = e_{h-1} & (h = 3, \ldots, 7) \\ [e_5, e_6] = e_2 & \\ [e_5, e_7] = e_3 & \\ [e_6, e_7] = e_4 & \end{cases}$$

- **Terna** $(4, 5, 8)$.

Por ser $i = 4$, $[e_4, e_8] \neq 0$ **y por el teorema 12 se tiene que:** $[e_4, e_8] \in \mathcal{L}^6 \equiv \{e_3, e_2\}$.

Supongamos que $[e_4, e_8] = \alpha_1 e_2$ **con** $\alpha_1 \neq 0$, **al ser** $j = 5$ **se tiene** $[e_5, e_6] \neq 0$ **y por el teorema 12 se tiene que** $[e_5, e_6] = \alpha_2 e_2 \quad (\alpha_2 \neq 0)$.
De la identidad de Jacobi $(e_1, e_5, e_7) = 0$ **deducimos que:**
$[e_5, e_7] = \alpha_2 e_3 + \alpha_3 e_2 \quad (\alpha_2 \neq 0)$.
De la identidad de Jacobi $(e_1, e_5, e_8) = 0$ **se obtiene:**
$[e_5, e_8] = \alpha_2 e_4 + (\alpha_1 + \alpha_3) e_3 + \alpha_4 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 \neq 0)$.

Como siempre se verifica $[e_5, e_8] = c_{58}^4 e_4 + c_{58}^3 e_3 + c_{58}^2 e_2$, **se deduce que** $c_{58}^4 = \alpha_2 \neq 0$, **por tanto, los primeros coeficientes son distintos de cero, y por el teorema 6 tenemos** $c_{48}^3 = c_{58}^4 = c_{68}^5 = c_{78}^6 \neq 0$.

Además se tiene que $[e_4, e_8] = c_{48}^3 e_3 + c_{48}^2 e_2$ **y como suponemos que** $[e_4, e_8] = \alpha_1 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0)$, **se tiene por tanto que** $c_{48}^3 = 0$, **lo que es contradictorio (pues los primeros coeficientes son distintos de cero).**

Por tanto necesariamente ha de ser: $[e_4, e_8] = c_{48}^3 e_3 + c_{48}^2 e_2$ **con** $c_{48}^3 \neq 0$. **Y mediante un cambio de base adaptada, como se indica en** (1.10), **podemos conseguir que los primeros coeficientes sean iguales a** 1. **Llamando** α_1 **a** c_{48}^2 **tenemos** $[e_4, e_8] = e_3 + \alpha_1 e_2$.

Por las igualdades de (1.9) **del teorema 7 obtenemos que:** $[e_4, e_7] = e_2$ **y** $[e_5, e_6] = -e_2$, **y de las siguientes identidades de Jacobi se obtienen:**

de $(e_1, e_5, e_7) = 0 \Longrightarrow [e_5, e_7] = \alpha_2 e_2$

de $(e_1, e_6, e_7) = 0 \Longrightarrow [e_6, e_7] = \alpha_2 e_3 + \alpha_3 e_2$

de $(e_1, e_5, e_8) = 0 \Longrightarrow [e_5, e_8] = e_4 + (\alpha_1 + \alpha_2)e_3 + \alpha_4 e_2$

de $(e_1, e_6, e_8) = 0 \Longrightarrow [e_6, e_8] = e_5 + (\alpha_1 + 2\alpha_2)e_4 + (\alpha_3 + \alpha_4)e_3 + \alpha_5 e_2$

de $(e_1, e_7, e_8) = 0 \Longrightarrow [e_7, e_8] = e_6 + (\alpha_1 + 2\alpha_2)e_5 + (\alpha_3 + \alpha_4)e_4 + \alpha_5 e_3 + \alpha_6 e_2$.

Aplicando la identidad de Jacobi $(e_6, e_7, e_8) = 0$ **obtenemos la relación:** $2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 0$, **luego** $\alpha_1 = -\frac{5\alpha_2}{2}$.

Por tanto, estas álgebras vienen definidas por los productos:

$$
\begin{aligned}
&[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 8) \\
&[e_4, e_7] = e_2 \\
&[e_4, e_8] = e_3 - \tfrac{5\alpha_2}{2} e_2 \\
&[e_5, e_6] = -e_2 \\
&[e_5, e_7] = \alpha_2 e_2 \\
&[e_5, e_8] = e_4 - \tfrac{3\alpha_2}{2} e_3 + \alpha_4 e_2 \\
&[e_6, e_7] = \alpha_2 e_3 + \alpha_3 e_2 \\
&[e_6, e_8] = e_5 - \tfrac{\alpha_2}{2} e_4 + (\alpha_3 + \alpha_4) e_3 + \alpha_5 e_2 \\
&[e_7, e_8] = e_6 - \tfrac{\alpha_2}{2} e_5 + (\alpha_3 + \alpha_4) e_4 + \alpha_5 e_3 + \alpha_6 e_2
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Distinguimos dos casos: a) $\alpha_2 = 0$ y b) $\alpha_2 \neq 0$.

a).- Comenzamos con el caso $\alpha_2 = 0$. Las álgebras vienen dadas por:

$$
\begin{aligned}
&[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 8) \\
&[e_4, e_7] = e_2 \\
&[e_4, e_8] = e_3 \\
&[e_5, e_6] = -e_2 \\
&[e_5, e_8] = e_4 + \alpha_4 e_2 \\
&[e_6, e_7] = \alpha_3 e_2 \\
&[e_6, e_8] = e_5 + (\alpha_3 + \alpha_4) e_3 + \alpha_5 e_2 \\
&[e_7, e_8] = e_6 + (\alpha_3 + \alpha_4) e_4 + \alpha_5 e_3 + \alpha_6 e_2
\end{aligned}
$$

hacemos el cambio de base:

$e_1' = e_1$

$e_8' = e_8 + \frac{\alpha_4}{2} e_6$

y conseguimos hacer el coeficiente $\alpha'_4 = 0$. Las álgebras son isomorfas a las dadas por:

$$
\begin{aligned}
&[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 8)\\
&[e_4, e_7] = e_2\\
&[e_4, e_8] = e_3\\
&[e_5, e_6] = -e_2\\
&[e_5, e_8] = e_4\\
&[e_6, e_7] = \alpha_3 e_2\\
&[e_6, e_8] = e_5 + \alpha_3 e_3 + \alpha_5 e_2\\
&[e_7, e_8] = e_6 + \alpha_3 e_4 + \alpha_5 e_3 + \alpha_6 e_2
\end{aligned}
$$

haciendo el nuevo cambio de base:

$e'_1 = e_1$

$e'_8 = e_8 + \frac{\alpha_6}{2} e_4$

conseguimos hacer el coeficiente $\alpha'_6 = 0$, y queda que estas álgebras son isomorfas a las dadas por los productos:

$$
\begin{aligned}
&[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 8)\\
&[e_4, e_7] = e_2\\
&[e_4, e_8] = e_3\\
&[e_5, e_6] = -e_2\\
&[e_5, e_8] = e_4\\
&[e_6, e_7] = \alpha_3 e_2\\
&[e_6, e_8] = e_5 + \alpha_3 e_3 + \alpha_5 e_2\\
&[e_7, e_8] = e_6 + \alpha_3 e_4 + \alpha_5 e_3
\end{aligned}
$$

a.1).- Si $\alpha_3 \neq 0$, hacemos el cambio de base:

$e'_1 = \sqrt{\alpha_3} e_1$

$e'_8 = \sqrt{\alpha_3} e_8$

conseguimos hacer el coeficiente $\alpha'_3 = 1$, y por tanto, las álgebras son isomorfas a:

$$
\begin{aligned}
&[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 8)\\
&[e_4, e_7] = e_2\\
&[e_4, e_8] = e_3\\
&[e_5, e_6] = -e_2\\
&[e_5, e_8] = e_4\\
&[e_6, e_7] = e_2\\
&[e_6, e_8] = e_5 + e_3 + \alpha_5 e_2\\
&[e_7, e_8] = e_6 + e_4 + \alpha_5 e_3
\end{aligned}
$$

$\star$ **Si $\alpha_5 \neq 0$, hacemos el cambio de base:**

$e'_1 = \alpha_5^3 e_1 + (\alpha_5^3 - \alpha_5)e_8 + \alpha_5^3 \sqrt{2(1-\alpha_5^2)}\ e_7$

$e'_8 = \alpha_5 e_8 + 2(\alpha_5^3 - \alpha_5^5)e_4$

y conseguimos hacer el coeficiente $\alpha'_5 = 1$, luego dichas álgebras son isomorfas al álgebra:

$$\mathcal{L}_{(4,5,8)(a)} \begin{cases} [e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 8) \\ [e_4, e_7] = e_2 \\ [e_4, e_8] = e_3 \\ [e_5, e_6] = -e_2 \\ [e_5, e_8] = e_4 \\ [e_6, e_7] = e_2 \\ [e_6, e_8] = e_5 + e_3 + e_2 \\ [e_7, e_8] = e_6 + e_4 + e_3 \end{cases}$$

$\star$ Si $\alpha_5 = 0$, tenemos que dichas álgebras son isomorfas al álgebra:

$$\mathcal{L}_{(4,5,8)(b)} \begin{cases} [e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 8) \\ [e_4, e_7] = e_2 \\ [e_4, e_8] = e_3 \\ [e_5, e_6] = -e_2 \\ [e_5, e_8] = e_4 \\ [e_6, e_7] = e_2 \\ [e_6, e_8] = e_5 + e_3 \\ [e_7, e_8] = e_6 + e_4 \end{cases}$$

a.2).- Si $\alpha_3 = 0$, dichas álgebras vienen dadas por los productos:

$[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 8)$

$[e_4, e_7] = e_2$

$[e_4, e_8] = e_3$

$[e_5, e_6] = -e_2$

$[e_5, e_8] = e_4$

$[e_6, e_8] = e_5 + \alpha_5 e_2$

$[e_7, e_8] = e_6 + \alpha_5 e_3$

⋆ **Si** $\alpha_5 \neq 0$, **hacemos el cambio de base:**

$e'_1 = \sqrt[3]{\alpha_5} e_1$

$e'_8 = \sqrt[3]{\alpha_5} e_8$

y conseguimos hacer el coeficiente $\alpha'_5 = 1$, **luego dichas álgebras son isomorfas al álgebra:**

$$\mathcal{L}_{(4,5,8)(c)} \begin{cases} [e_1, e_h] = e_{h-1} & (h = 3, \ldots, 8) \\ [e_4, e_7] = e_2 \\ [e_4, e_8] = e_3 \\ [e_5, e_6] = -e_2 \\ [e_5, e_8] = e_4 \\ [e_6, e_8] = e_5 + e_2 \\ [e_7, e_8] = e_6 + e_3 \end{cases}$$

⋆ **Si** $\alpha_5 = 0$, **estas álgebras son isomorfas al álgebra dada por los productos:**

$$\mathcal{L}_{(4,5,8)(d)} \begin{cases} [e_1, e_h] = e_{h-1} & (h = 3, \ldots, 8) \\ [e_4, e_7] = e_2 \\ [e_4, e_8] = e_3 \\ [e_5, e_6] = -e_2 \\ [e_5, e_8] = e_4 \\ [e_6, e_8] = e_5 \\ [e_7, e_8] = e_6 \end{cases}$$

b).- Veamos ahora el caso $\alpha_2 \neq 0$. **Tenemos las álgebras definidas en** (2.1)**:**

$[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 8)$

$[e_4, e_7] = e_2$

$[e_4, e_8] = e_3 - \frac{5\alpha_2}{2} e_2 \quad (\alpha_2 \neq 0)$

$[e_5, e_6] = -e_2$

$[e_5, e_7] = \alpha_2 e_2$

$[e_5, e_8] = e_4 - \frac{3\alpha_2}{2} e_3 + \alpha_4 e_2$

$[e_6, e_7] = \alpha_2 e_3 + \alpha_3 e_2$

$[e_6, e_8] = e_5 - \frac{\alpha_2}{2} e_4 + (\alpha_3 + \alpha_4) e_3 + \alpha_5 e_2$

$[e_7, e_8] = e_6 - \frac{\alpha_2}{2} e_5 + (\alpha_3 + \alpha_4) e_4 + \alpha_5 e_3 + \alpha_6 e_2$

haciendo el cambio de base dado por:

$e'_1 = -\frac{5\alpha_2}{2} e_1$

$e'_8 = -\frac{5\alpha_2}{2} e_8$

conseguimos hacer el coeficiente $\alpha'_2 = -\frac{2}{5}$, **y en cosecuencia las álgebras son isomorfas a las dadas por:**

$[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 8)$

$[e_4, e_7] = e_2$

$[e_4, e_8] = e_3 + e_2$

$[e_5, e_6] = -e_2$

$[e_5, e_7] = -\frac{2}{5} e_2$

$[e_5, e_8] = e_4 + \frac{3}{5} e_3 + \alpha_4 e_2$

$[e_6, e_7] = -\frac{2}{5} e_3 + \alpha_3 e_2$

$[e_6, e_8] = e_5 + \frac{1}{5} e_4 + (\alpha_3 + \alpha_4) e_3 + \alpha_5 e_2$

$[e_7, e_8] = e_6 + \frac{1}{5} e_5 + (\alpha_3 + \alpha_4) e_4 + \alpha_5 e_3 + \alpha_6 e_2$

haciendo el cambio de base:

$e'_1 = e_1$

$e'_8 = e_8 + \sqrt{\alpha_3} e_7$

conseguimos hacer el coeficiente $\alpha'_3 = 0$ y estas álgebras son isomorfas a las dadas por:

$$
\begin{aligned}
&[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 8)\\
&[e_4, e_7] = e_2\\
&[e_4, e_8] = e_3 + e_2\\
&[e_5, e_6] = -e_2\\
&[e_5, e_7] = -\tfrac{2}{5} e_2\\
&[e_5, e_8] = e_4 + \tfrac{3}{5} e_3 + \alpha_4 e_2\\
&[e_6, e_7] = -\tfrac{2}{5} e_3\\
&[e_6, e_8] = e_5 + \tfrac{1}{5} e_4 + \alpha_4 e_3 + \alpha_5 e_2\\
&[e_7, e_8] = e_6 + \tfrac{1}{5} e_5 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_3 + \alpha_6 e_2
\end{aligned}
$$

haciendo de nuevo el cambio:

$e'_1 = e_1$

$e'_8 = e_8 - \frac{5\alpha_6}{6} e_5$ **hacemos el coeficiente $\alpha'_6 = 0$, luego las álgebras son isomorfas a las dadas por los productos:**

$$
\begin{aligned}
&[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 8)\\
&[e_4, e_7] = e_2\\
&[e_4, e_8] = e_3 + e_2\\
&[e_5, e_6] = -e_2\\
&[e_5, e_7] = -\tfrac{2}{5} e_2\\
&[e_5, e_8] = e_4 + \tfrac{3}{5} e_3 + \alpha_4 e_2\\
&[e_6, e_7] = -\tfrac{2}{5} e_3
\end{aligned}
$$

$$[e_6, e_8] = e_5 + \tfrac{1}{5}e_4 + \alpha_4 e_3 + \alpha_5 e_2$$
$$[e_7, e_8] = e_6 + \tfrac{1}{5}e_5 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_3$$

y mediante otro cambio de base se consigue hacer los coeficientes $\alpha_4' = 0$ y $\alpha_5' = 0$, por tanto dichas álgebras son isomorfas al álgebra:

$$\mathcal{L}_{(4,5,8)(e)} \left\{ \begin{array}{l} [e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 8) \\ [e_4, e_7] = e_2 \\ [e_4, e_8] = e_3 + e_2 \\ [e_5, e_6] = -e_2 \\ [e_5, e_7] = -\tfrac{2}{5}e_2 \\ [e_5, e_8] = e_4 + \tfrac{3}{5}e_3 \\ [e_6, e_7] = -\tfrac{2}{5}e_3 \\ [e_6, e_8] = e_5 + \tfrac{1}{5}e_4 \\ [e_7, e_8] = e_6 + \tfrac{1}{5}e_5 \end{array} \right.$$

Estas 5 álgebras correspondientes a la terna $(4, 5, 8)$ no son isomorfas dos a dos, para ello veamos que sus cortes no son isomorfos.

El corte de $\mathcal{L}_{(4,5,8)(a)}$ es isomorfo al álgebra de productos:

$$\mathcal{CL}_{(4,5,8)(a)} \left\{ \begin{array}{l} [e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 7) \\ [e_5, e_7] = e_2 \\ [e_6, e_7] = e_3 + e_2 \end{array} \right.$$

El corte de $\mathcal{L}_{(4,5,8)(b)}$ es isomorfo al álgebra de productos:

$$\mathcal{CL}_{(4,5,8)(b)} \left\{ \begin{array}{l} [e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 7) \\ [e_5, e_7] = e_2 \\ [e_6, e_7] = e_3 \end{array} \right.$$

El corte de $\mathcal{L}_{(4,5,8)(c)}$ es isomorfo al álgebra de productos:

$$\mathcal{CL}_{(4,5,8)(c)} \left\{ \begin{array}{ll} [e_1, e_h] = e_{h-1} & (h = 3, \ldots, 7) \\ [e_6, e_7] = e_2 & \end{array} \right.$$

El corte de $\mathcal{L}_{(4,5,8)(d)}$ es isomorfo al álgebra modelo de dimensión 7:

$$\mathcal{CL}_{(4,5,8)(d)} \left\{ \begin{array}{ll} [e_1, e_h] = e_{h-1} & (h = 3, \ldots, 7) \end{array} \right.$$

El corte de $\mathcal{L}_{(4,5,8)(e)}$ es isomorfo al álgebra de productos:

$$\mathcal{CL}_{(4,5,8)(e)} \left\{ \begin{array}{ll} [e_1, e_h] = e_{h-1} & (h = 3, \ldots, 7) \\ [e_4, e_7] = \frac{3}{5}e_2 & \\ [e_5, e_6] = -\frac{2}{5}e_2 & \\ [e_5, e_7] = \frac{1}{5}e_3 & \\ [e_6, e_7] = \frac{1}{5}e_4 & \end{array} \right.$$

Por tanto los tres últimos cortes no son isomorfos dos a dos, y cualquiera de ellos no son isomorfos a ninguno de los dos primeros, probemos que los dos primeros cortes no son isomorfos entre sí. Llamemos $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ a los dos primeros cortes respectivamente. Suponiendo lo contrario existirá un cambio de base adaptada que nos lleva $\mathcal{L}$ en $\mathcal{L}'$. Este cambio de base será de la forma:

$e_1' = \sum_{k=1}^{7} a_k e_k \quad (a_1 \neq 0)$

$e_7' = \sum_{k=2}^{7} b_k e_k \quad (b_7 \neq 0)$

siendo necesariamente que $b_1 = 0$ para que el producto: $[e'_3, e'_7] = 0$. Los demás elementos de la base vienen dados por estos dos anteriores y por ser una base adaptada. Por tanto de ser $[e'_5, e'_7] = e'_2$ deducimos que $b_7 = a_1^3$ y de ser $[e'_6, e'_7] = e'_3$ se obtiene que $b_7 = a_1^3$ y $a_1 = 0$ lo que es contradictorio, ya que $a_1 \neq 0$. Por tanto $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ no son isomorfas.

Luego como consecuencia obtenenemos que las 5 álgebras originales no son isomorfas.

- Terna $(5, 5, 8)$.

Veamos que este caso es imposible.

Por ser $j = 5$ entonces $[e_5, e_6] \neq 0$, y por ser $i = 4$ se tiene: $[e_4, e_8] = 0$ y $[e_5, e_8] \neq 0$. Por el teorema 12 se verifica $[e_5, e_8] \in \mathcal{L}^6 \equiv \{e_3, e_2\}$, entonces $[e_5, e_8] = \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_2 \neq 0$.

Supongamos $\alpha_1 = 0$, entonces se tiene: $[e_5, e_8] = \alpha_2 e_2$ $(\alpha_2 \neq 0)$ y por (1.3) del teorema 4 se tiene $[e_5, e_7] = 0$, y aplicando las identidades de Jacobi $(e_1, e_5, e_7) = 0$ y $(e_1, e_4, e_8) = 0$ se obtiene que $[e_5, e_6] = 0$, lo que es contradictorio por ser $j = 5$.

Por tanto ha de ser $\alpha_1 \neq 0$. Luego $[e_5, e_8] = \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_2$ $(\alpha_1 \neq 0)$, aplicando (1.3) del teorema 4 se tiene: $[e_5, e_7] = \alpha_1 e_2$, luego por las identidades de Jacobi $(e_1, e_5, e_7) = 0$ y $(e_1, e_4, e_8) = 0$ se deduce que $[e_5, e_6] = 0$, lo que es imposible por ser $j = 5$.

Luego deducimos que no existe ninguna álgebra de Lie filiforme para la terna $(5,5,8)$.

2.3 Clasificación de las álgebras de Lie filiformes para las que $j = 6$.

Aplicando (1.11) del corolario 16, por ser $j = 6$ deducimos que los posibles valores para $\underline{i}$ y $\underline{n}$ son: $i = 4,5,6$, y $n = 7,8,9,10$; tenemos por tanto, 12 posibles ternas. Estudiemos cada una de ellas.

De ahora en adelante damos los resultados finales para cada caso, obtenidos procediendo como hemos indicado anteriormente.

- Terna $(4,6,7)$.

Por ser $i = 4$ tenemos que $[e_4, e_7] \neq 0$, y por el teorema 12 obtenemos que: $[e_4, e_7] = \alpha_1 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0)$.

Además por ser $j = 6$ se tiene: $[e_4, e_5] = [e_5, e_6] = 0$, $[e_6, e_7] \neq 0$, y por la identidad de Jacobi $(e_1, e_5, e_7) = 0$ se deduce que:
$[e_5, e_7] = \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_2$ y por el teorema 5 obtenemos que:
$[e_6, e_7] = \alpha_1 e_4 + \alpha_2 e_3 + \alpha_3 e_2$.

Luego estas álgebras vienen dadas por los productos:

$[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 7)$

$[e_4, e_7] = \alpha_1 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0)$

$[e_5, e_7] = \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_2$

$[e_6, e_7] = \alpha_1 e_4 + \alpha_2 e_3 + \alpha_3 e_2$

Álgebras que denominaremos $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ según los valores de dichos parámetros.

Mediante cambios de bases adaptadas, se obtiene que dichas álgebras son isomorfas a una de las siguientes:

$\mathcal{L}_{(4,6,7)(a)} \equiv (1, 0, 1)$

$\mathcal{L}_{(4,6,7)(b)} \equiv (1, 0, 0)$

- **Terna $(5, 6, 7)$.**

Por el teorema 12 tenemos que: $[e_5, e_7] = c_{57}^3 e_3 + c_{57}^2 e_2$, **y aplicando el teorema 4 tenemos** $[e_5, e_6] = c_{57}^3 e_2$, **pero al ser** $j = 6$ **se tiene que** $[e_5, e_6] = 0$, **luego se deduce que** $c_{57}^3 = 0$. **Llamando** α_1 **a** c_{57}^2, **por ser** $i = 4$ **se tiene que** $\alpha_1 = c_{57}^2 \neq 0$.

Por tanto, necesariamente ha de ser: $[e_5, e_7] = \alpha_1 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0)$, **y por el teorema 5 se obtiene:** $[e_6, e_7] = \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_2$.

Luego dichas álgebras vienen dadas por los productos:

$[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 7)$

$[e_5, e_7] = \alpha_1 e_2$

$[e_6, e_7] = \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_2$

Álgebras que designaremos por (α_1, α_2).

Mediante adecuados cambios de base, se tiene que dichas álgebras son isomorfas a una de las álgebras:

$\mathcal{L}_{(5,6,7)(a)} \equiv (1, 1)$

$\mathcal{L}_{(5,6,7)(b)} \equiv (1, 0)$.

- **Terna** $(6, 6, 7)$.

Por el teorema 12 tenemos que $[e_6, e_7] = c_{67}^4 e_4 + c_{67}^3 e_3 + c_{67}^2 e_2$, **y aplicando el teorema 5 tenemos que** $[e_5, e_7] = c_{67}^4 e_3 + c_{67}^3 e_2$, **pero al ser** $i = 6$ **tenemos que** $[e_5, e_7] = 0$ **y** $[e_6, e_7] \neq 0$, **luego se deduce que** $c_{67}^4 = c_{67}^3 = 0$, **y** $c_{67}^2 \neq 0$. **Llamando** α_1 **a** c_{67}^2, **tenemos por tanto que:** $[e_6, e_7] = \alpha_1 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0)$.

Luego estas álgebras son isomorfas a las álgebras definidas por los productos:

$[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 7)$

$[e_6, e_7] = \alpha_1 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0)$

Álgebras que designaremos por (α_1), **y todas ellas son isomorfas al álgebra:** $\mathcal{L}_{(6,6,7)} \equiv (1)$

- **Terna** $(4, 6, 8)$.

Tenemos por el teorema 12 que $[e_4, e_8] = c_{48}^3 e_3 + c_{48}^2 e_2$, **si suponemos** $c_{48}^3 \neq 0$, **entonces por las igualdades** (1.9) **del teorema 7, deducimos que** $[e_4, e_7] = c_{48}^3 e_2$ **y** $[e_5, e_6] = -c_{48}^3 e_2$ **y esto es contradictorio, ya que** $[e_5, e_6] = 0$ **por ser** $j = 6$. **Luego necesariamente ha de ser** $c_{48}^3 = 0$. **Llamemos** α_1 **a** c_{48}^2, **por ser** $i = 4$ **tenemos que** $\alpha_1 \neq 0$.

Por tanto, tenemos que $[e_4, e_8] = \alpha_1 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0)$, **y aplicando el teorema 4 se deduce que** $[e_4, e_7] = 0$, **además por ser** $j = 6$ **se tiene que** $[e_4, e_5] = [e_5, e_6] = 0$ **y** $[e_6, e_7] \neq 0$. **Y aplicando las siguientes identidades de Jacobi se obtienen:**

de $(e_1, e_5, e_7) = 0 \Longrightarrow [e_5, e_7] = \alpha_2 e_2$

de $(e_1, e_5, e_8) = 0 \Longrightarrow [e_5, e_8] = (\alpha_1 + \alpha_2) e_3 + \alpha_3 e_2$

de $(e_1, e_6, e_7) = 0 \Longrightarrow [e_6, e_7] = \alpha_2 e_3 + \alpha_4 e_2 \quad (\alpha_2 \neq 0$ **ó** $\alpha_4 \neq 0)$

de $(e_1, e_6, e_8) = 0 \Longrightarrow [e_6, e_8] = (\alpha_1 + 2\alpha_2) e_4 + (\alpha_3 + \alpha_4) e_3 + \alpha_5 e_2$

de $(e_1, e_7, e_8) = 0 \Longrightarrow [e_7, e_8] = (\alpha_1 + 2\alpha_2) e_5 + (\alpha_3 + \alpha_4) e_4 + \alpha_5 e_3 + \alpha_6 e_2$

Por tanto, todas estas álgebras vienen dadas por los productos:

$$[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 8)$$
$$[e_4, e_8] = \alpha_1 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0)$$
$$[e_5, e_7] = \alpha_2 e_2$$

$$[e_5, e_8] = (\alpha_1 + \alpha_2)e_3 + \alpha_3 e_2$$
$$[e_6, e_7] = \alpha_2 e_3 + \alpha_4 e_2 \quad (\alpha_2 \neq 0 \text{ ó } \alpha_4 \neq 0)$$
$$[e_6, e_8] = (\alpha_1 + 2\alpha_2)e_4 + (\alpha_3 + \alpha_4)e_3 + \alpha_5 e_2$$
$$[e_7, e_8] = (\alpha_1 + 2\alpha_2)e_5 + (\alpha_3 + \alpha_4)e_4 + \alpha_5 e_3 + \alpha_6 e_2$$

Álgebras que designaremos por $(\alpha_1, \ldots, \alpha_6)$ **y que son isomorfas a una de las siguientes álgebras:**

$$\mathcal{L}_{(4,6,8)(a)} \equiv (\alpha_1, 1, 1, \alpha_4, 0, 0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,8)(b)} \equiv (-1, 1, 0, 1, 0, 0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,8)(c)} \equiv (\alpha_1, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,8)(d)} \equiv (1, 0, 0, 1, \alpha_5, 0)$$

- **Terna** $(5, 6, 8)$**.**

Por el teorema 12 y por ser $i = 5$**, deducimos que:** $[e_5, e_8] = \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_2 \neq 0$.

Por el teorema 4 tenemos que $[e_5, e_7] = \alpha_1 e_2$.

Y de las siguientes identidades de Jacobi se obtienen:

de $(e_1, e_6, e_7) = 0 \Longrightarrow [e_6, e_7] = \alpha_1 e_3 + \alpha_3 e_2 \neq 0$ **(por ser** $j = 6$**)**
de $(e_1, e_6, e_8) = 0 \Longrightarrow [e_6, e_8] = 2\alpha_1 e_4 + (\alpha_2 + \alpha_3)e_3 + \alpha_4 e_2$

de $(e_1, e_7, e_8) = 0 \Longrightarrow [e_7, e_8] = 2\alpha_1 e_5 + (\alpha_2 + \alpha_3)e_4 + \alpha_4 e_3 + \alpha_5 e_2$.

Luego las álgebras correspondiente a la terna $(5, 6, 8)$ **vienen definidas por los productos:**

$$
\begin{aligned}
&[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 8) \\
&[e_5, e_7] = \alpha_1 e_2 \\
&[e_5, e_8] = \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0 \text{ **ó** } \alpha_2 \neq 0) \\
&[e_6, e_7] = \alpha_1 e_3 + \alpha_3 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0 \text{ **ó** } \alpha_3 \neq 0) \\
&[e_6, e_8] = 2\alpha_1 e_4 + (\alpha_2 + \alpha_3)e_3 + \alpha_4 e_2 \\
&[e_7, e_8] = 2\alpha_1 e_5 + (\alpha_2 + \alpha_3)e_4 + \alpha_4 e_3 + \alpha_5 e_2
\end{aligned}
$$

Álgebras que podemos representar por $(\alpha_1, \ldots, \alpha_5)$. **Mediante adecuados cambios de base, se tiene que dichas álgebras son isomorfas a las:**

$$\mathcal{L}_{(5,6,8)(a)} \equiv (1, \alpha_2, 1, 0, 0)$$

$$\mathcal{L}_{(5,6,8)(b)} \equiv (1, 1, 0, 0, 0)$$

$$\mathcal{L}_{(5,6,8)(c)} \equiv (1, 0, 0, 0, 0)$$

$$\mathcal{L}_{(5,6,8)(d)} \equiv (0, \alpha_2, 1, 1, 0)$$

$$\mathcal{L}_{(5,6,8)(e)} \equiv (0, \alpha_2, 1, 0, 0)$$

- **Terna** $(6,6,8)$.

Por el teorema 12 tenemos que $[e_6, e_8] = c_{68}^4 e_4 + c_{68}^3 e_3 + c_{68}^2 e_2$.

Si suponemos que el coeficiente $c_{68}^4 \neq 0$ **tenemos por** (1.3) **del teorema 4 que se verifica:** $[e_6, e_7] = c_{68}^4 e_3 + c_{68}^3 e_2$, **y por las identidades de Jacobi** $(e_1, e_6, e_7) = 0$ **y** $(e_1, e_5, e_8) = 0$, **obtenemos que** $c_{68}^4 e_2 = 0$, **lo que es contradictorio.**

Por tanto tenemos que: $[e_6, e_8] = c_{68}^3 e_3 + c_{68}^2 e_2 \neq 0$, **ya que** $i = 6$.

Si suponemos que $c_{68}^3 = 0$, **tendríamos que** $[e_6, e_8] = c_{68}^2 e_2$, **entonces por la identidad de Jacobi** $(e_1, e_6, e_8) = 0$ **se deduce** $[e_6, e_7] = 0$, **lo que es contradictorio por ser** $j = 6$.

Por tanto, necesariamente ha de ser $c_{68}^3 \neq 0$. **Llamando** α_1 **al coeficiente** c_{68}^3 **y** α_2 **a** c_{68}^2 **tenemos que:** $[e_6, e_8] = \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0)$. **Por el teorema 4 se deduce** $[e_6, e_7] = \alpha_1 e_2$. **Y por el teorema 5 obtenemos:** $[e_7, e_8] = \alpha_1 e_4 + \alpha_2 e_3 + \alpha_3 e_2$.

Por tanto las álgebras correspondientes a la terna $(6,6,8)$ **vienen dadas por los productos:**

$$[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 8)$$
$$[e_6, e_7] = \alpha_1 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0)$$
$$[e_6, e_8] = \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_2$$
$$[e_7, e_8] = \alpha_1 e_4 + \alpha_2 e_3 + \alpha_3 e_2$$

Que podemos representar por $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ **y que es isomorfa a una de las siguientes:**

$$\mathcal{L}_{(6,6,8)(a)} \equiv (1,1,0)$$

$$\mathcal{L}_{(6,6,8)(b)} \equiv (1,0,0)$$

- <u>**Terna** $(4,6,9)$.</u>

Por ser $i = 4$ **se tiene que** $[e_4, e_9] = \alpha_1 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0)$ **y el producto** $[e_5, e_6] = 0$ **por ser** $j = 6$. **De las siguientes identidades de Jacobi se obtienen los siguientes productos:**

De $(e_1, e_5, e_7) = 0 \Longrightarrow [e_5, e_7] = \alpha_2 e_2$
De $(e_1, e_5, e_8) = 0 \Longrightarrow [e_5, e_8] = \alpha_2 e_3 + \alpha_3 e_2$
De $(e_1, e_5, e_9) = 0 \Longrightarrow [e_5, e_9] = \alpha_2 e_4 + (\alpha_1 + \alpha_3)e_3 + \alpha_4 e_2$

De esta última igualdad se obtiene que $\alpha_2 = 0$ **por ser** $n = 9$ **impar.**

De $(e_1, e_6, e_7) = 0 \Longrightarrow [e_6, e_7] = \alpha_5 e_2 \quad (\alpha_5 \neq 0)$ **por ser** $j = 6$
De $(e_1, e_6, e_8) = 0 \Longrightarrow [e_6, e_8] = (\alpha_3 + \alpha_5)e_3 + \alpha_6 e_2$
De $(e_1, e_6, e_9) = 0 \Longrightarrow [e_6, e_9] = (\alpha_1 + 2\alpha_3 + \alpha_5)e_4 + (\alpha_4 + \alpha_6)e_3 + \alpha_7 e_2$
De $(e_1, e_7, e_8) = 0 \Longrightarrow [e_7, e_8] = (\alpha_3 + \alpha_5)e_4 + \alpha_6 e_3 + \alpha_8 e_2$
De $(e_1, e_7, e_9) = 0 \Longrightarrow [e_7, e_9] = (\alpha_1 + 3\alpha_3 + 2\alpha_5)e_5 + (\alpha_4 + 2\alpha_6)e_4 + {}$
$+(\alpha_7 + \alpha_8)e_3 + \alpha_9 e_2$

De $(e_1, e_8, e_9) = 0 \Longrightarrow [e_8, e_9] = (\alpha_1 + 3\alpha_3 + 2\alpha_5)e_6 + (\alpha_4 + 2\alpha_6)e_5 +$

$$+(\alpha_7 + \alpha_8)e_4 + \alpha_9 e_3 + \alpha_{10} e_2$$

De $(e_7, e_8, e_9) = 0 \Longrightarrow$ **obtenemos la relación** $2\alpha_1 + \alpha_3 + 2 = 3\alpha_3^2$.

Por tanto las álgebras correspondientes a la terna $(4, 6, 9)$ **vienen definidas por los productos:**

$$
\begin{aligned}
&[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 9)\\
&[e_4, e_9] = \alpha_1 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0)\\
&[e_5, e_8] = \alpha_3 e_2\\
&[e_5, e_9] = (\alpha_1 + \alpha_3)e_3 + \alpha_4 e_2\\
&[e_6, e_7] = \alpha_5 e_2 \quad (\alpha_5 \neq 0)\\
&[e_6, e_8] = (\alpha_3 + \alpha_5)e_3 + \alpha_6 e_2\\
&[e_6, e_9] = (\alpha_1 + 2\alpha_3 + \alpha_5)e_4 + (\alpha_4 + \alpha_6)e_3 + \alpha_7 e_2\\
&[e_7, e_8] = (\alpha_3 + \alpha_5)e_4 + \alpha_6 e_3 + \alpha_8 e_2\\
&[e_7, e_9] = (\alpha_1 + 3\alpha_3 + 2\alpha_5)e_5 + (\alpha_4 + 2\alpha_6)e_4 + (\alpha_7 + \alpha_8)e_3 + \alpha_9 e_2\\
&[e_8, e_9] = (\alpha_1 + 3\alpha_3 + 2\alpha_5)e_6 + (\alpha_4 + 2\alpha_6)e_5 + (\alpha_7 + \alpha_8)e_4 + \alpha_9 e_3 + \alpha_{10} e_2
\end{aligned}
$$

Álgebras que dependen de 9 **parámetros y que podemos representar por** $(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_{10})$, **de los que sólo** 8 **son independientes, ya que se tiene la relación:** $2\alpha_1 + \alpha_3 + 2 = 3\alpha_3^2$.

Mediante adecuados cambios de base, obtenemos que estas álgebras son isomorfas a las:

$$\mathcal{L}_{(4,6,9)(a)} \equiv (-\tfrac{3}{8}, -\tfrac{1}{2}, 0, 1, 1, \alpha_7, 0, 0, \alpha_{10})$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,9)(b)} \equiv (-\tfrac{3}{8}, -\tfrac{1}{2}, 0, 1, 0, \alpha_7, 0, 0, \alpha_{10})$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,9)(c)} \equiv (-1, 0, 0, 1, 1, \alpha_7, 0, 0, 0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,9)(d)} \equiv (-1, 0, 0, 0, 1, \alpha_7, 0, 0, 0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,9)(e)} \equiv (1, -1, 0, 1, 1, \alpha_7, \alpha_8, 0, 0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,9)(f)} \equiv (1, -1, -1, 1, 1, \alpha_7, \alpha_8, 0, 0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,9)(g)} \equiv (1, -1, -2, 1, 1, \alpha_7, \alpha_8, 0, 0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,9)(h)} \equiv (1, -1, 1, 1, 0, 0, \alpha_8, 0, 0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,9)(i)} \equiv (1, -1, 0, 1, 0, 0, -1, 1, 0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,9)(j)} \equiv (1, -1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,9)(k)} \equiv (1, -1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,9)(l)} \equiv (-\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,9)(m)} \equiv (-\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, 1, 1, 0, 0, \alpha_8, 0, 0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,9)(n)} \equiv (-\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,9)(o)} \equiv (-\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

- Terna $(5,6,9)$.

Si $[e_5, e_9] = \alpha_1 e_2$ $\quad(\alpha_1 \neq 0$ por ser $i = 5)$ entonces por la identidad de Jacobi $(e_1, e_5, e_9) = 0$ se deduce que $[e_5, e_8] = 0$. También de las siguientes identidades de Jacobi se obtienen:

de $(e_1, e_6, e_7) = 0 \Longrightarrow [e_6, e_7] = \alpha_2 e_2 \quad (\alpha_2 \neq 0$ por ser $j = 6)$
de $(e_1, e_6, e_8) = 0 \Longrightarrow [e_6, e_8] = \alpha_2 e_3 + \alpha_3 e_2$
de $(e_1, e_6, e_9) = 0 \Longrightarrow [e_6, e_9] = \alpha_2 e_4 + (\alpha_1 + \alpha_3) e_3 + \alpha_4 e_2$
de $(e_1, e_7, e_8) = 0 \Longrightarrow [e_7, e_8] = \alpha_2 e_4 + \alpha_3 e_3 + \alpha_5 e_2$
de $(e_1, e_7, e_9) = 0 \Longrightarrow [e_7, e_9] = 2\alpha_2 e_5 + (\alpha_1 + 2\alpha_3) e_4 + (\alpha_4 + \alpha_5) e_3 + \alpha_6 e_2$
de $(e_1, e_8, e_9) = 0 \Longrightarrow [e_8, e_9] = 2\alpha_2 e_6 + (\alpha_1 + 2\alpha_3) e_5 + (\alpha_4 + \alpha_5) e_4 + \alpha_6 e_3 + \alpha_7 e_2$
Por último, de la identidad de Jacobi $(e_7, e_8, e_9) = 0$ se obtiene que: $2\alpha_2^2 e_2 = 0$ y por tanto $\alpha_2 = 0$ en contradicción con $\alpha_2 \neq 0$ por ser $j = 6$.

Como por el teorema 12 se verifica: $[e_5, e_9] \in \mathcal{L}^7 \equiv \{e_3, e_2\}$, entonces ha de ser: $[e_5, e_9] = \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0)$ y por tanto $[e_5, e_8] = \alpha_1 e_2$; $[e_5, e_7] = 0$. De las siguientes identidades de Jacobi se obtienen:

de $(e_1, e_6, e_7) = 0 \Longrightarrow [e_6, e_7] = \alpha_3 e_2 \quad (\alpha_3 \neq 0$ por ser $j = 6)$
de $(e_1, e_6, e_8) = 0 \Longrightarrow [e_6, e_8] = (\alpha_1 + \alpha_3) e_3 + \alpha_4 e_2$
de $(e_1, e_6, e_9) = 0 \Longrightarrow [e_6, e_9] = (2\alpha_1 + \alpha_3) e_4 + (\alpha_2 + \alpha_4) e_3 + \alpha_5 e_2$
de $(e_1, e_7, e_8) = 0 \Longrightarrow [e_7, e_8] = (\alpha_1 + \alpha_3) e_4 + \alpha_4 e_3 + \alpha_6 e_2$

de $(e_1, e_7, e_9) = 0 \Longrightarrow [e_7, e_9] = (3\alpha_1 + 2\alpha_3)e_5 + (\alpha_2 + 2\alpha_4)e_4 + (\alpha_5 + \alpha_6)e_3 +$
$+\alpha_7 e_2$

de $(e_1, e_8, e_9) = 0 \Longrightarrow [e_8, e_9] = (3\alpha_1 + 2\alpha_3)e_6 + (\alpha_2 + 2\alpha_4)e_5 + (\alpha_5 + \alpha_6)e_4 +$
$+\alpha_7 e_3 + \alpha_8 e_2$

Y por último de $(e_7, e_8, e_9) = 0$ se obtiene la relación:
$(3\alpha_1 + 2\alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1) = 0$, **y por tanto tenemos que** $\alpha_1 = \alpha_3$ **o bien** $\alpha_3 = -\frac{3\alpha_1}{2}$.

Por tanto las álgebras correspondientes a la terna $(5, 6, 9)$ vienen dadas por los productos:

$[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 9)$
$[e_5, e_8] = \alpha_1 e_2$
$[e_5, e_9] = \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0)$
$[e_6, e_7] = \alpha_3 e_2 \quad (\alpha_3 \neq 0)$
$[e_6, e_8] = (\alpha_1 + \alpha_3)e_3 + \alpha_4 e_2$
$[e_6, e_9] = (2\alpha_1 + \alpha_3)e_4 + (\alpha_2 + \alpha_4)e_3 + \alpha_5 e_2$
$[e_7, e_8] = (\alpha_1 + \alpha_3)e_4 + \alpha_4 e_3 + \alpha_6 e_2$
$[e_7, e_9] = (3\alpha_1 + 2\alpha_3)e_5 + (\alpha_2 + 2\alpha_4)e_4 + (\alpha_5 + \alpha_6)e_3 + \alpha_7 e_2$
$[e_8, e_9] = (3\alpha_1 + 2\alpha_3)e_6 + (\alpha_2 + 2\alpha_4)e_5 + (\alpha_5 + \alpha_6)e_4 + \alpha_7 e_3 + \alpha_8 e_2$
Verificándose que $\alpha_1 = \alpha_3$ ó $\alpha_3 = -\frac{3\alpha_1}{2}$.

Estas álgebras las designaremos por $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8)$ y mediante adecuados cambios de base, se obtiene que todas ellas son isomorfas a las:

Caso $\alpha_1 = \alpha_3$:

$\mathcal{L}_{(5,6,9)(a)} \equiv (1, 1, 1, 0, \alpha_5, \alpha_6, 0, 0)$

$\mathcal{L}_{(5,6,9)(b)} \equiv (1, 0, 1, 0, \alpha_5, \alpha_6, 0, 0)$

Caso $\alpha_3 = -\frac{3\alpha_1}{2}$:

$\mathcal{L}_{(5,6,9)(c)} \equiv (1, 1, -\frac{3}{2}, 0, \alpha_5, \alpha_6, 0, 0)$

$\mathcal{L}_{(5,6,9)(d)} \equiv (1, 0, -\frac{3}{2}, 0, \alpha_5, \alpha_6, 0, 0)$

- **Terna** $(6, 6, 9)$.

Por el teorema 12 se tiene que $[e_6, e_7] \in \mathcal{L}^8 \equiv \{e_2\}$, **luego** $[e_6, e_7] = \alpha_1 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0$ **por ser** $j = 6)$, **por tanto** $[e_6, e_8] = \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_2$; $[e_6, e_9] = \alpha_1 e_4 + \alpha_2 e_3 + \alpha_3 e_2$. **De las siguientes identidades de Jacobi se obtienen:**

de $(e_1, e_7, e_8) = 0 \Longrightarrow [e_7, e_8] = \alpha_1 e_4 + \alpha_2 e_3 + \alpha_4 e_2$
de $(e_1, e_7, e_9) = 0 \Longrightarrow [e_7, e_9] = 2\alpha_1 e_5 + 2\alpha_2 e_4 + (\alpha_3 + \alpha_4) e_3 + \alpha_5 e_2$
de $(e_1, e_8, e_9) = 0 \Longrightarrow [e_8, e_9] = 2\alpha_1 e_6 + 2\alpha_2 e_5 + (\alpha_3 + \alpha_4) e_4 + \alpha_5 e_3 + \alpha_6 e_2$

Por último de la identidad de Jacobi $(e_7, e_8, e_9) = 0$ **se obtiene que:** $2\alpha_1^2 e_2 = 0$ **y por tanto** $\alpha_1 = 0$ **en contradicción con** $\alpha_1 \neq 0$ **por ser** $j = 6$.

Luego no hay álgebras para esta terna.

- **Terna** $(4, 6, 10)$.

Por el teorema 12 se tiene que $[e_4, e_{10}] \in \mathcal{L}^8 \equiv \{e_3, e_2\}$ **luego** $[e_4, e_{10}] = \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_2$ **y por el teorema 4 obtenenemos** $[e_4, e_9] = \alpha_1 e_2$. **Además por las siguientes identidades de Jacobi se obtienen:**

de $(e_1, e_5, e_8) = 0 \Longrightarrow [e_5, e_8] = -\alpha_1 e_2$
de $(e_1, e_5, e_9) = 0 \Longrightarrow [e_5, e_9] = \alpha_3 e_2$
de $(e_1, e_5, e_{10}) = 0 \Longrightarrow [e_5, e_{10}] = \alpha_1 e_4 + (\alpha_2 + \alpha_3) e_3 + \alpha_4 e_2$
de $(e_1, e_6, e_7) = 0 \Longrightarrow [e_6, e_7] = \alpha_1 e_2$

Y al ser $j = 6$ **se tiene que** $[e_6, e_7] \neq 0$ **y por tanto se obtiene que** $\alpha_1 \neq 0$, **luego queda** $[e_4, e_{10}] = \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0)$ **es decir se deduce que** $i = 4$. **Por tanto, para** $j = 6$ **y** $n = 10$ **se deduce que** $i = 4$, **es decir, no hay más terna que la** $(4, 6, 10)$.

Además de las siguientes identidades de Jacobi se obtienen:

de $(e_1, e_6, e_8) = 0 \Longrightarrow [e_6, e_8] = \alpha_5 e_2$
de $(e_1, e_6, e_9) = 0 \Longrightarrow [e_6, e_9] = (\alpha_3 + \alpha_5) e_3 + \alpha_6 e_2$
de $(e_1, e_6, e_{10}) = 0 \Longrightarrow [e_6, e_{10}] = \alpha_1 e_5 + (\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_5) e_4 + (\alpha_4 + \alpha_6) e_3 + \alpha_7 e_2$
de $(e_1, e_7, e_8) = 0 \Longrightarrow [e_7, e_8] = \alpha_5 e_3 + \alpha_8 e_2$
de $(e_1, e_7, e_9) = 0 \Longrightarrow [e_7, e_9] = (\alpha_3 + 2\alpha_5) e_4 + (\alpha_6 + \alpha_8) e_3 + \alpha_9 e_2$
de $(e_1, e_7, e_{10}) = 0 \Longrightarrow [e_7, e_{10}] = \alpha_1 e_6 + (\alpha_2 + 3\alpha_3 + 3\alpha_5) e_5 +$

$$+(\alpha_4 + 2\alpha_6 + \alpha_8) e_4 + (\alpha_7 + \alpha_9) e_3 + \alpha_{10} e_2$$

de $(e_1, e_8, e_9) = 0 \Longrightarrow [e_8, e_9] = (\alpha_3 + 2\alpha_5)e_5 + (\alpha_6 + \alpha_8)e_4 + \alpha_9 e_3 + \alpha_{11} e_2$

de $(e_1, e_8, e_{10}) = 0 \Longrightarrow [e_8, e_{10}] = \alpha_1 e_7 + (\alpha_2 + 4\alpha_3 + 5\alpha_5)e_6 +$

$$+(\alpha_4 + 3\alpha_6 + 2\alpha_8)e_5 + (\alpha_7 + 2\alpha_9)e_4 +$$

$$+(\alpha_{10} + \alpha_{11})e_3 + \alpha_{12} e_2$$

de $(e_1, e_9, e_{10}) = 0 \Longrightarrow [e_9, e_{10}] = \alpha_1 e_8 + (\alpha_2 + 4\alpha_3 + 5\alpha_5)e_7 +$

$$+(\alpha_4 + 3\alpha_6 + 2\alpha_8)e_6 + (\alpha_7 + 2\alpha_9)e_5 +$$

$$+(\alpha_{10} + \alpha_{11})e_4 + \alpha_{12} e_3 + \alpha_{13} e_2$$

Y finalmente de las siguientes identidades de Jacobi se obtienen las relaciones:

de $(e_6, e_9, e_{10}) = 0 \Longrightarrow \alpha_1(2\alpha_2 + 7\alpha_3 + 7\alpha_5) = 0$

de $(e_8, e_9, e_{10}) = 0 \Longrightarrow 2\alpha_2\alpha_5 = 3\alpha_3^2 + 3\alpha_3\alpha_5$ **y también**

$$\alpha_1(2\alpha_7 + 5\alpha_9) = 2\alpha_2\alpha_8 + (4\alpha_3 + 5\alpha_5)(\alpha_8 - \alpha_6) +$$

$$+(3\alpha_6 + \alpha_4 + 2\alpha_8)(\alpha_5 - \alpha_3) + (\alpha_3 + 2\alpha_5)\alpha_4.$$

De donde las álgebras correspondientes a la terna $(4, 6, 10)$ **vienen dadas por los productos:**

$$[e_1, e_h] = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, 10)$$

$$[e_4, e_9] = \alpha_1 e_2 \quad (\alpha_1 \neq 0)$$

$$[e_4, e_{10}] = \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_2$$

$$[e_5, e_8] = -\alpha_1 e_2$$

$$[e_5, e_9] = \alpha_3 e_2$$

$$[e_5, e_{10}] = \alpha_1 e_4 + (\alpha_2 + \alpha_3)e_3 + \alpha_4 e_2$$

$$[e_6, e_7] = \alpha_1 e_2$$

$$[e_6, e_8] = \alpha_5 e_2$$

$[e_6, e_9] = (\alpha_3 + \alpha_5)e_3 + \alpha_6 e_2$

$[e_6, e_{10}] = \alpha_1 e_5 + (\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_5)e_4 + (\alpha_4 + \alpha_6)e_3 + \alpha_7 e_2$

$[e_7, e_8] = \alpha_5 e_3 + \alpha_8 e_2$

$[e_7, e_9] = (\alpha_3 + 2\alpha_5)e_4 + (\alpha_6 + \alpha_8)e_3 + \alpha_9 e_2$

$[e_7, e_{10}] = \alpha_1 e_6 + (\alpha_2 + 3\alpha_3 + 3\alpha_5)e_5 + (\alpha_4 + 2\alpha_6 + \alpha_8)e_4 + (\alpha_7 + \alpha_9)e_3 + \alpha_{10} e_2$

$[e_8, e_9] = (\alpha_3 + 2\alpha_5)e_5 + (\alpha_6 + \alpha_8)e_4 + \alpha_9 e_3 + \alpha_{11} e_2$

$[e_8, e_{10}] = \alpha_1 e_7 + (\alpha_2 + 4\alpha_3 + 5\alpha_5)e_6 + (\alpha_4 + 3\alpha_6 + 2\alpha_8)e_5 + (\alpha_7 + 2\alpha_9)e_4 +$
$+(\alpha_{10} + \alpha_{11})e_3 + \alpha_{12} e_2$

$[e_9, e_{10}] = \alpha_1 e_8 + (\alpha_2 + 4\alpha_3 + 5\alpha_5)e_7 + (\alpha_4 + 3\alpha_6 + 2\alpha_8)e_6 + (\alpha_7 + 2\alpha_9)e_5 +$
$+(\alpha_{10} + \alpha_{11})e_4 + \alpha_{12} e_3 + \alpha_{13} e_2$

Verificándose las relaciones:

- $\alpha_1(2\alpha_2 + 7\alpha_3 + 7\alpha_5) = 0$
- $2\alpha_2\alpha_5 = 3\alpha_3^2 + 3\alpha_3\alpha_5$
- $\alpha_1(2\alpha_7 + 5\alpha_9) = 2\alpha_2\alpha_8 + (4\alpha_3 + 5\alpha_5)(\alpha_8 - \alpha_6) + (3\alpha_6 + \alpha_4 + 2\alpha_8)(\alpha_5 - \alpha_3) +$
$+(\alpha_3 + 2\alpha_5)\alpha_4$.

Las álgebras $(4,6,10)$ dependen de 13 parámetros, y las designaremos por $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{13})$. De estos 13 parámetros, 10 son independientes entre sí.

Mediante adecuados cambios de base, se obtiene que estas álgebras son isomorfas a estas 28:

$\mathcal{L}_{(4,6,10)(1)} \equiv (1, -14, 7, 0, -3, 0, \alpha_7, \alpha_8, -\frac{2}{5}\alpha_7 - 7\alpha_8, 0, 0, \alpha_{12}, 0)$

$$\mathcal{L}_{(4,6,10)(2)} \equiv (1, -14, 7, 0, -3, 14, -301 - \tfrac{5}{2}\alpha_9, 0, \alpha_9, 0, 0, \alpha_{12}, 0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,10)(3)} \equiv (1, -14, 7, 0, -3, 14, 49, -20, 0, 0, 0, \alpha_{12}, 0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,10)(4)} \equiv (1, -14, 7, 0, -3, 14, -536, -20, 234, 0, 0, 0, 0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,10)(5)} \equiv (1, -14, 7, 0, -3, 14, -536, -20, 234, 0, 0, -6320, 0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,10)(6)} \equiv (1, 0, 1, 0, -1, 0, \alpha_7, \alpha_8, -\tfrac{2}{5}\alpha_7 - \alpha_8, 0, 0, \alpha_{12}, 0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,10)(7)} \equiv (1, 0, 1, 0, -1, 2, \alpha_7, 0, -\tfrac{2}{5}\alpha_7 - 2, 0, 0, \alpha_{12}, 0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,10)(8)} \equiv (1, 0, 1, 0, -1, 2, 5, -2, -2, 0, 0, \alpha_{12}, 0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,10)(9)} \equiv (1, 0, 1, 0, -1, 2, 0, -2, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,10)(10)} \equiv (1, 0, 1, 0, -1, 2, 0, -2, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,10)(11)} \equiv (1, 0, 0, 0, 0, 1, -5, \alpha_8, 2, 0, 0, 0, 0) \quad (\alpha_8 \neq -1)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,10)(12)} \equiv (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \alpha_8, 0, 0, 0, 0, 0)$$
$$(\alpha_8 \neq -1, \quad 5\alpha_8^2 + 17\alpha_8 + 15 \neq 0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,10)(13)} \equiv (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \alpha_8, 0, 0, 1, 0, 0)$$
$$(\alpha_8 \neq -1, \quad 5\alpha_8^2 + 17\alpha_8 + 15 = 0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,10)(14)} \equiv (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \alpha_8, 0, 0, 5\alpha_8^2 + 17\alpha_8 + 15, 0, 0) \quad (\alpha_8 \neq -1)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,10)(15)} \equiv (1,0,0,0,0,1,-5,-1,2,0,\alpha_{11},\alpha_{12},0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,10)(16)} \equiv (1,0,0,0,0,1,0,-1,0,0,0,\alpha_{12},0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,10)(17)} \equiv (1,0,0,0,0,1,0,-1,0,0,3,1,0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,10)(18)} \equiv (1,0,0,0,0,1,0,-1,0,0,3,0,0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,10)(19)} \equiv (1,0,0,0,0,0,-5,1,2,0,\alpha_{11},0,0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,10)(20)} \equiv (1,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,10)(21)} \equiv (1,0,0,0,0,0,0,1,0,0,5,0,0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,10)(22)} \equiv (1,0,0,0,0,0,-5,0,2,0,1,\alpha_{12},0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,10)(23)} \equiv (1,0,0,0,0,0,-5,0,2,0,0,1,0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,10)(24)} \equiv (1,0,0,0,0,0,-5,0,2,0,0,0,0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,10)(25)} \equiv (1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,10)(26)} \equiv (1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,10)(27)} \equiv (1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0)$$

$$\mathcal{L}_{(4,6,10)(28)} \equiv (1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)$$

2.4 Estudio de las ternas: $(i, j, 2j-2)$, $(j, j, 2j-3)$ y $(j, j, j+1)$.

En el estudio de las ternas (i, j, n); $(j = 4, 5, 6)$ que hemos realizado se observa que existen ternas a las que no les corresponde ninguna álgebra. Por ejemplo, las ternas $(5, 5, 8)$, $(5, 6, 10)$, $(6, 6, 10)$. Éstas son casos particulares de las $(i, j, 2j-2)$ con $i > 4$. Este es el caso límite de la dimensión n. Ya que al ser $i > 4$, se tiene que $i \neq 4$, y aplicando el teorema 12 se tiene que: $[e_j, e_{j+1}] \in \mathcal{L}^{2j-2} = \mathcal{L}^n \equiv \{0\}$ por tanto obtenemos $[e_j, e_{j+1}] = 0$, lo que es contradictorio por la definición de j.

Por tanto si $n = 2j-2$, entonces necesariamente ha de ser $i = 4$. Luego no hay álgebras para las ternas $(5, j, 2j-2)$; $(6, j, 2j-2)$; $\ldots$; $(j, j, 2j-2)$.

Ya vimos que las ternas $(4, 4, 5)$ y $(5, 5, 7)$ tienen álgebras (una en cada caso) relativas a dichas ternas y también que la terna $(6, 6, 9)$ no tenía álgebras. Veamos que en general las ternas $(j, j, 2j-3)$ para $j > 6$ no tiene ninguna álgebra, y por tanto podemos concluir que las ternas $(j, j, 2j-3)$ no tiene ninguna álgebra para $j \geq 6$.

En la terna $(j, j, 2j-3)$ al ser la dimensión $n = 2j-3$ impar, por el teorema 12 se tiene $[e_j, e_{2j-3}] \in \mathcal{L}^j \equiv \{e_{j-2}, \ldots, e_2\}$, y por tanto $[e_j, e_{2j-3}] = \alpha_{j-2}e_{j-2} + \cdots + \alpha_2 e_2$ y por ser $i = j$ podemos escribir por

el teorema 4:

$[e_j, e_{2j-4}] = \alpha_{j-2}e_{j-3} + \cdots + \alpha_3 e_2$

$\vdots$

$[e_j, e_{j+1}] = \alpha_{j-2}e_2 \neq 0$ **por tanto** $\alpha_{j-2} \neq 0$ **por la definición de** j.

De las relaciones anteriores tenemos $[e_j, e_{j+2}] = \alpha_{j-2}e_3 + \alpha_{j-3}e_2$ **y por la identidad de Jacobi** $(e_1, e_{j+1}, e_{j+2}) = 0$ **deducimos que:**
$[e_{j+1}, e_{j+2}] = \alpha_{j-2}e_4 + \alpha_{j-3}e_3 + \beta_1 e_2$.

De las relaciones anteriores tenemos $[e_j, e_{j+3}] = \alpha_{j-2}e_4 + \alpha_{j-3}e_3 + {}$ $+\alpha_{j-4}e_2$ **y por la identidad de Jacobi** $(e_1, e_{j+1}, e_{j+3}) = 0$ **deducimos que:**
$[e_{j+1}, e_{j+3}] = 2\alpha_{j-2}e_5 + 2\alpha_{j-3}e_4 + (\alpha_{j-4} + \beta_1)e_3 + \beta_2 e_2$.

Y de la identidad de Jacobi $(e_1, e_{j+2}, e_{j+3}) = 0$ **deducimos que:**
$[e_{j+2}, e_{j+3}] = 2\alpha_{j-2}e_6 + 2\alpha_{j-3}e_5 + (\alpha_{j-4} + \beta_1)e_4 + \beta_2 e_3 + \beta_3 e_2$

Y procediendo sucesivamente, obtenemos en general que en el producto $[e_h, e_k]$ **para** $h, k \geq j$ **con** $h \neq k$ **el primer coeficiente no nulo es de la forma un número natural por** α_{j-2} **y que corresponde al vector** $e_{h+k-2j+1}$.

Por tanto, en particular, tenemos:
$[e_{2j-4}, e_{2j-3}] = K\alpha_{j-2}e_{2j-6} + \cdots$ **con** $K \in \mathbb{N}$

De la identidad de Jacobi $(e_j, e_{2j-4}, e_{2j-3}) = 0$ **se obtiene que:**
$[[e_{2j-4}, e_{2j-3}], e_j] = 0$, **entonces** $[K\alpha_{j-2}e_{2j-6} + \cdots, e_j] = 0$, **luego**

$K\alpha_{j-2}[e_{2j-6}, e_j] + \cdots = 0$, **luego** $-K(\alpha_{j-2})^2 e_{j-5} + \cdots = 0$, **y por tanto** $\alpha_{j-2} = 0$, **cosa imposible por ser** $\alpha_{j-2} \neq 0$. **Por tanto no hay álgebras en dicha terna siempre que el producto** $[e_j, e_{2j-6}]$ **sea distinto de cero, lo que exige que** $2j - 6 > j$, **o lo que es equivalente** $j > 6$. **Como ya indicamos, la terna** $(6, 6, 9)$ **no tiene álgebras. Por tanto, concluimos que las ternas** $(j, j, 2j - 3)$ **no tienen álgebras para** $j \geq 6$.

La terna $(4, 4, 5)$ **es un caso particular de las ternas** $(j, j, j + 1)$. **Para estas ternas se tiene por el teorema 12 que:**

$[e_j, e_{j+1}] = [e_{n-1}, e_n] \in \mathcal{L}^3 \equiv \{e_{n-2}, \ldots, e_2\}$,

luego $[e_{n-1}, e_n] = c^{n-2}_{n-1,n} e_{n-2} + \cdots + c^2_{n-1,n} e_2$ **y por el teorema 5 tenemos:**

$[e_{n-2}, e_n] = c^{n-2}_{n-1,n} e_{n-3} + \cdots + c^3_{n-1,n} e_2$, **siendo** $[e_{n-2}, e_n] = 0$ **por ser** $i = n - 1$. **De donde** $c^{n-2}_{n-1,n} = \cdots = c^3_{n-1,n} = 0$. **Por tanto, llamando** α **al coeficiente** $c^2_{n-1,n}$ **se tiene que:** $[e_{n-1}, e_n] = \alpha e_2$ $(\alpha \neq 0$ **por ser** $i = j = n - 1)$. **Mediante el cambio de base adaptada:**

$e'_1 = e_1$

$e'_h = \frac{1}{\alpha} e'_h \quad (h = 2, \ldots, n)$

conseguimos que el coeficiente $\alpha' = 1$. **Por tanto, existe una única álgebra para la terna** $(j, j, j+1)$ **que viene definida por los productos:**

$$\mathcal{L}_{(j,j,j+1)} \left\{ \begin{array}{ll} [e_1, e_h] = e_{h-1} & (h = 3, \ldots, n) \\ [e_{n-1}, e_n] = e_2 & \end{array} \right.$$

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía

[1] **J. M. Ancochea y M. Goze. Sur la classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7.** *C. R. Acad. Sci. Paris. T. 302, série I, pp. 611- 613,* **1986.**

[2] **J. M. Ancochea y M. Goze. Classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7.** *I.R.M.A. Strasbourg,* **1986.**

[3] **J. M. Ancochea y M. Goze. Classification des algèbres de Lie filiformes de dimension 8.** *Arch. Math. vol. 50, pp. 511-525,* **1988.**

[4] **J. M. Ancochea y M. Goze. Classification des algèbres de Lie nilpotentes complexes de dimension 7.** *Arch. Math. vol. 52, pp. 175-185,* **1989.**

[5] **E. Angelopoulos. Algèbres de Lie satisfaiant** $[g,g] = g$, **Der** g = **ad** g. *C. R. Acad. Sci. Paris. T. 106, série I, pp. 523-525,* **1988.**

[6] **M. P. Benito y V. R. Varea. The lattice of ideals of a nilpotent Lie algebras.** *Linear and Multilinear Algebra. Vol. 33, 1-13,* **1992.**

[7] **L. Boza, F.J. Echarte y J. Núñez. Classification of complex Filiform Lie Algebras of dimension 10.** *Algebra, Groups and Geometries.* **Por aparecer.**

[8] **F. Bratzlavsky. Une Algèbre de Lie caratéristiquement nilpotente de dimension 6.** *C. R. Acad. Sci. Paris. T. 276, série A, pp. 1035-1037,* **1973.**

[9] **F. Bratzlavsky. Classification des Algèbres de Lie nilpotentes de dimension n, de classe n-1, dont l'ideal derivé es commutatif.** *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. vol. 560, pp. 858-865,* **1974.**

[10] **F. Bratzlavsky. Sur les Algèbres admettant un tore d'automorphismes donnè.** *Journal of Algebra, vol. 30, pp. 305-316,* **1974.**

[11] **R. Carles. Sur les algèbres de Lie caractéristiquement nilpotentes.** *Prépublication Université de Poitiers,* **1984.**

[12] **A. Cerezo. Les algèbres de Lie nilpotentes réelles et complexes de dimension 6.** *Publications Université Nice 27,* **1983.**

[13] **J. Dixmier and W. G. Lister. Derivations of nilpotent Lie algebras.** *Proc. Amer. Math. Soc. vol. 8, pp. 155-158,* **1957.**

[14] **J. Dixmier. Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotentes.** *Bull. Soc. Math. France 85, pp. 325-388,* **1957.**

[15] **J. Dixmier. Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotentes.** *Canadian Journal Math. 10, pp. 321-348,* **1958.**

[16] **J. L. Dyer. A Nilpotent Lie Algebra with Nilpotent automorphism groups.** *Bull. Amer. Math. Soc. vol 1, pp. 52-56,* **1970.**

[17] **F. J. Echarte. Étude des algébres de Lie résolubles réelles qui admettent des ideaux unidimensionnels n'appartenant pas au centre.** *Lecture Notes in Mathematics 1209, pp. 152-156, Springer Verlag,* **1987.**

[18] **F. J. Echarte y J. Núñez. Relation among solvable Lie Algebras and their nilpotent derived algebras.** *Proc. Sixth Int. Collo. on Dif. Geom. Univ. Santiago Comp. pp 69-73,* **1989.**

[19] **F.J. Echarte, J.R. Gómez, J. Núñez. Les algèbres de Lie filiformes complexes dérivées d'autres algèbres de Lie.** *Collection Travaux en Cours, Hermann, Paris.* **Por aparecer.**

[20] **G. Favre. Une Algèbre de Lie caractéristiquement nilpotente de dimension 7.** *C. R. Acad. Sci. Paris. T. 274, série A, pp. 1338-1339,* **1972.**

[21] **G. Favre. Systéme de poids sur une Algèbre de Lie nilpotente.** *Manuscripta Math. 9, pp. 53-90,* **1973.**

[22] **C. Godfrey. Tables of coadjoints orbits for nilpotent Lie algebras.** *University of Massachusetts at Boston,* **Boston, Mass. 021125, U.S.A.**

[23] **J. R. Gómez y F. J. Echarte. Classification of complex filiform nilpotent Lie algebras of dimension 9.** *Rendiconti Seminario Facoltà Scienze Università Cagliari, vol. 61 Fasc. 1,* **1991.**

[24] **Y. B. Hakimjanov, J.M. Ancochea Bermúdez et M. Goze. Sur la réductibilité de la variété des algèbres de Lie nilpotentes complexes.** *C. R. Acad. Sci. Paris. T. 313, série I, pp. 59-62,* **1991.**

[25] **L. Magnin. Sur les algèbres de Lie nilpotentes de dimensión $\leq$ 7.** *J. Geom. and Phys. vol. 3-1, pp. 119-144,* **1986.**

[26] **V. V. Morozov. Classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 6.** *Isv. Vyss. Ucheb. Zav. Math. 190:161–171,* **1958.**

[27] **M. Romdhani. Classification of Real and Complex Nilpotent Lie Algebras of dimension 7.** *Thèse Université Nice,* **1985.**

[28] **E. N. Safiullina. Clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 7. (Original en ruso).** *Candidate's Works,* **1964.** *Math. Mech. Phys. pp. 66-69. Izdan Kazan, Univ. Kazan,* **1964.**

[29] **T. Skjelbred y T. Sund. On the classification of nilpotent Lie algebras.** *Univ. Oslo Math., n. 8,* **1977.**

[30] **K. A. Ümlauf. Über die Zusammentsung der endlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen, insbesondere der Gruppen vom Range Null.** *Leipzig,* **1891.**

[31] **M. Vergne. Sur la variété des algèbres de Lie nilpotente.** *Thèse de 3e cycle,* **Paris, 1966.**

[32] **G. Vranceanu. Lecciones de Geometría Diferencial,** 4a **Edic.** *Acad. Rom. Bucarest,* **1975.**

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. FRANCISCO RAMIREZ LOPEZ

titulada ESTUDIO DE DOS INVARIANTES EN ALGEBRAS DE LIE FILIFORMES COMPLEJAS Y CLASIFICACION A PARTIR DE ESTOS.

acordó otorgarle la calificación de APTO CUM LAUDE POR UNANIMIDAD

Sevilla, ______ de ______________ 19 95

El Vocal, | El Vocal, | El Vocal,

El Presidente | El Secretario, | El Doctorado,