

T
55

R. 5331

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
SECRETARIA GENERAL

Queda registrada esta Tesis Doctoral
al folio 1 número 2 del libro
correspondiente.

Sevilla, 31 OCT. 1986

El Jefe del Negocio de Tesis,

Isabel González



UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE FISICA

DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA



T E S I S

CONTRIBUCION AL ESTUDIO DE MODELOS DE
TRAFICO VIAL

MEMORIA presentada para aspirar al Grado de
Doctor en Ciencias Físicas por la licencia-
da en Ciencias Físicas, AZUCENA ALVAREZ
CHILLIDA.



DIRECTOR:

JOSE JAVIER BREY ABALO, Catedrático de Física
Teórica de la Universidad de Sevilla.

A handwritten signature in dark ink, appearing to read "Jose Javier Brey Abalo". The signature is written in a cursive style and is positioned below the name of the director.

CO-DIRECTOR:

JOSE MANUEL CASADO VAZQUEZ, Profesor titular
de Física Teórica de la Universidad de Sevilla.

A handwritten signature in dark ink, appearing to read "Jose Manuel Casado Vazquez". The signature is written in a cursive style and is positioned below the name of the co-director.

Quiero expresar mi agradecimiento al Dr. D. José Javier Brey Abalo, director de esta tesis y al Dr. D. José Manuel Casado Vazquez, co-director de la misma, por su gran interés y ayuda prestada a lo largo de su realización.

También quiero agradecer las sugerencias y estímulo constante de mi compañero el Dr. D. Andrés Santos Reyes, así como el interés general manifestado por los demás miembros del Depto. de Física Teórica.

Agradezco, asimismo, la paciencia y cariño puesto por la Srta. Dolores Millán Márquez en el mecanografiado de esta memoria.

A mis padres

INDICE

I	INTRODUCCION	7
II	MODELOS TEORICOS PARA LA DESCRIPCION DEL TRAFICO VEHICULAR	
II.1	Modelos basados en ecuaciones de movimiento	15
II.2	Modelos de seguimiento	18
II.3	Modelos basados en ecuaciones cinéticas	
II.3.1	La ecuación cinética	28
II.3.2	Análisis de la ecuación cinética	36
II.4	Comentarios a los modelos de ecuación cinética de tráfico	47
III	SIMULACION DEL PROBLEMA DEL TRAFICO EN EL ORDENADOR	
III.1	Introducción	57
III.2	Simulación de un modelo de seguimiento	60
III.3	Modelo de seguimiento con adelantamiento	67
III.4	Modelo cinético con velocidad deseada	
III.4.1	Descripción del modelo	77
III.4.2	Resultados: régimen transitorio	84
III.4.3	Resultados: régimen estacionario	100
III.5	Algunas cuestiones abiertas y sugerencias para experimentos	107
	CONCLUSIONES	111
	APENDICES	114
	BIBLIOGRAFIA	120

I INTRODUCCION

Es una constante a lo largo de la Historia de la Física la introducción de métodos e ideas que luego se han aplicado con gran éxito en otros campos de la Ciencia. Puede decirse, sin exageración, que la Física ha promovido importantes estudios en Matemáticas, Biología, Sociología, etc. Esta observación es particularmente cierta en el caso de la Física Estadística. La razón está en el propio objeto de esta rama de la Física, que se ocupa de estudiar el comportamiento de sistemas constituidos por un gran número de individualidades atómicas o moléculas.

La primera teoría Mecánico-Estadística es probablemente lo que hoy conocemos como Teoría Cinética. Su desarrollo ha llevado, como es sabido, a una mayor comprensión de las propiedades físicas de los sistemas macroscópicos, tales como el calor específico o la viscosidad. Pero también, ha permitido aclarar ciertos conceptos fundamentales como el origen de la irreversibilidad, la aparición de organización en sistemas macroscópicos, la existencia de estados estacionarios, etc. Lo que subyace en todas estas cuestiones es la relación entre el comportamiento individual de cada una de las partículas y el comportamiento del sistema como un todo.

Dado el éxito obtenido por la Mecánica Estadística, surge de un modo natural la cuestión de si sus métodos e ideas son en alguna medida trasladables al estudio del comportamiento de colectivos cuyas individualidades son más complejas que los entes considerados en Mecánica (clásica o cuántica). Durante los últimos años se han llevado a cabo numerosas investigaciones que muestran que la respuesta a la pregunta anterior es claramente afirmativa. Así, por ejemplo, se han abordado múltiples problemas sociológicos utilizando una combinación de Estadística Matemática, Mecánica Estadística y Teoría de Comportamiento Humano.

Es claro que la aplicación de la Mecánica Estadística a problemas sociológicos debe incorporar factores específicos de la naturaleza humana, como, son la capacidad de razonamiento, prejuicios, adaptabilidad, deseos, memoria, etc. Desde luego, la incorporación simultánea de todos estos factores llevaría a una teoría tan complicada que sería inútil, al perder toda su capacidad de predicción. Sin embargo, parece razonable intentar desarrollar modelos que incorporen aquellos aspectos que esperamos que sean dominantes en una situación dada y que, en caso necesario, puedan ser extendidos y mejorados. Desde esta perspectiva, un buen candidato a modelar es el problema del flujo de tráfico de que nos ocupamos en esta memoria.

Una de las razones por las que el problema del tráfico resulta especialmente atractivo, es el hecho de que puede ser medido en forma similar a un flujo en un fluido. Además, los parámetros relevantes (p.e. densidad de tráfico y número de vías) pueden ser identificados y controlados. Por otro lado, la componente sociológica, a diferencia de otros problemas, es sencilla en el sentido de que cada conductor tiene un único propósito bien definido, que es llevar a cabo su recorrido en un tiempo razonable. A pesar de ello son pocos los modelos de tráfico que existen y que han sido respaldados por datos experimentales. En el caso del problema del flujo en una vía, del que nos ocuparemos en esta memoria, podemos citar el modelo de seguimiento del líder y los modelos estadísticos de ecuación cinética.

Las medidas experimentales realizadas en líneas de tráfico muestran una dependencia cualitativa del flujo de los vehículos respecto de la concentración de la forma indicada en la Fig. I.1. Es usual referirse a esta curva como "diagrama fundamental" de tráfico y a su expresión analítica como "ecuación de estado del tráfico". Para bajas concentraciones el flujo crece según una ley aproximadamente lineal con la concentración.

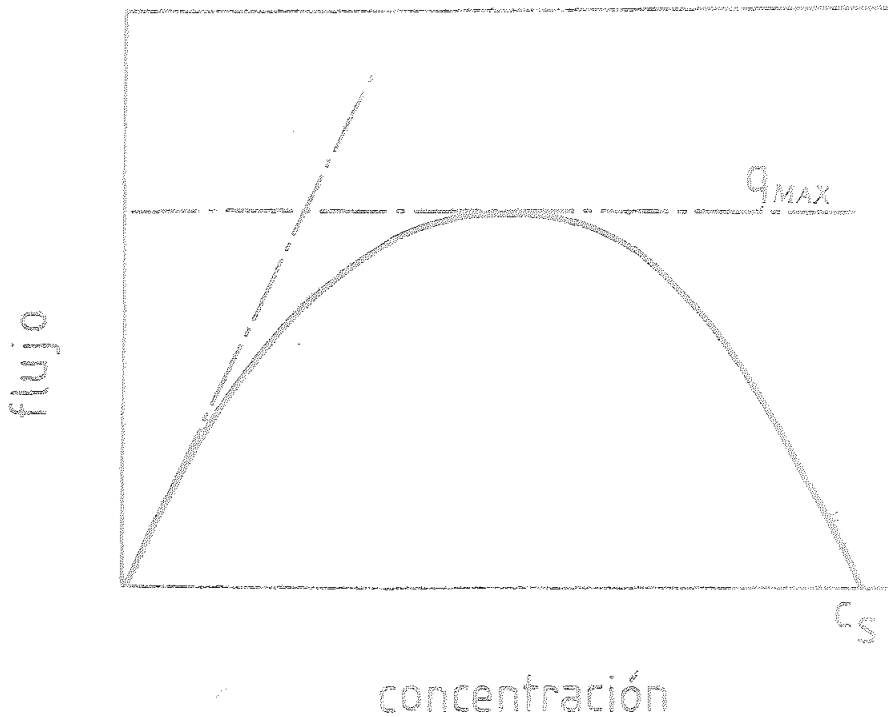


Fig. I.1 Diagrama esquemático del flujo frente a la concentración

Este crecimiento se hace más lento para valores mayores de la concentración, alcanzándose un valor a partir del cual decae a cero. La concentración teórica para la que el flujo se anula se denomina "concentración de saturación" c_s . A veces se utiliza también una representación velocidad-concentración cuyo aspecto cualitativo mostramos en la Fig. I.2.

Cualquier modelo de tráfico debe llevar al com-

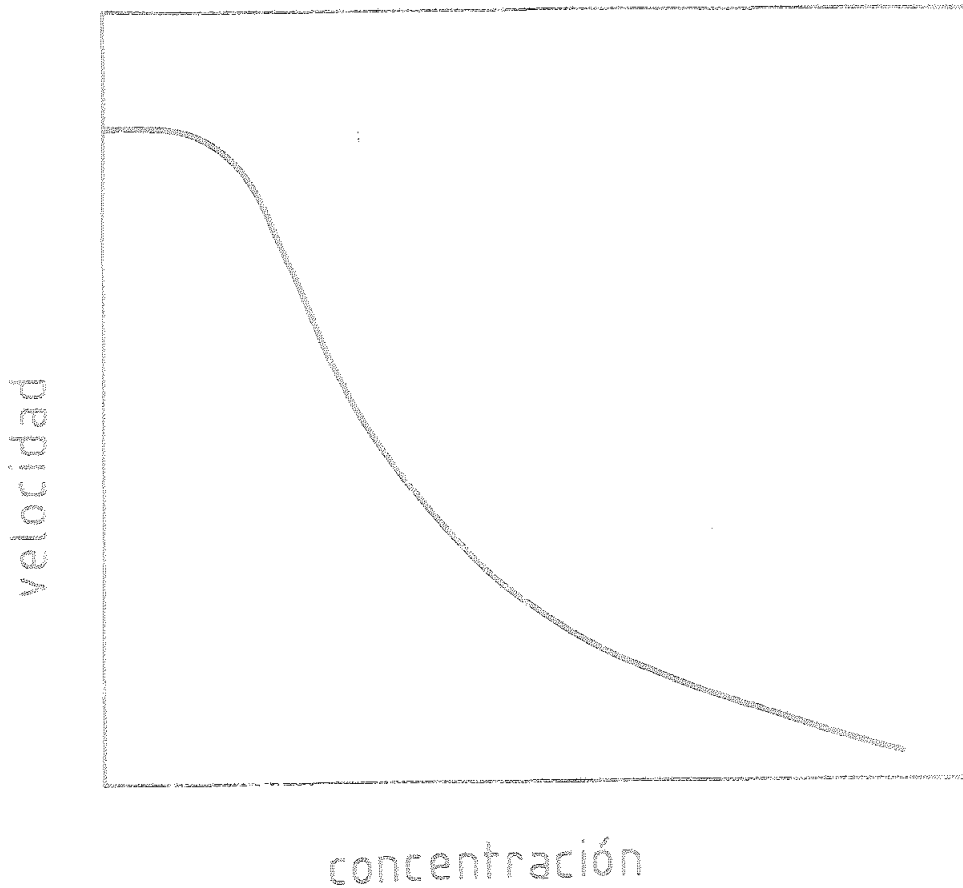


Fig. I.2 Representación esquemática de la velocidad frente a la concentración

portamiento cualitativo anterior. Por ser el problema del tráfico un problema más complejo que uno puramente físico son muchos los enfoques que en principio pueden hacerse de él. En primer lugar puede reducirse a un problema puramente mecánico introduciendo una cierta ley para las interacciones o "fuerzas" entre los vehículos. Este es el caso de los modelos de seguimiento

en que cada vehículo responde a los estímulos que le producen los que le preceden y le siguen. En este mismo contexto pueden encuadrarse los modelos de tipo hidrodinámico, con la diferencia de que en éstos se adopta desde el principio una descripción en términos de propiedades continuas y globales del sistema.

Al incorporar las componentes psicológicas de los conductores, aparece un mecanismo de competición entre los deseos de un conductor dado y los deseos de los demás, que interaccionan con él. Este mecanismo de competición lleva también a comportamientos como los de las figuras 1.1 y 1.2. A bajas concentraciones, tráfico diluido, los conductores se comportan de modo prácticamente independiente y la velocidad media es prácticamente constante e igual a lo que podríamos denominar "velocidad libre media". Al aumentar la concentración, la velocidad media disminuye como consecuencia de la interacción entre los conductores.

Nuestro trabajo ha consistido en llevar a cabo una revisión crítica de algunas de las teorías existentes para describir el comportamiento de una línea de tráfico. Para ello, hemos simulado en el ordenador algunas de las leyes de interacción propuestas y comparado los resultados con los obtenidos mediante teorías analíticas. En la segunda parte hemos formulado y desarrollado modelos originales que creemos que incorporan elementos esenciales no tenidos en cuenta hasta ahora. Esto nos ha llevado a introducir parámetros tales como la distancia de seguridad, y a complementar, dotándoles de significado operacional, otros parámetros ya conocidos como el de probabilidad de adelantar.

No queremos terminar esta introducción sin citar explícitamente a uno de los más grandes físicos estadísticos de este siglo y que ha contribuido significativamente a la teoría del

tráfico de vehículos y que es E.W. Montroll, recientemente fallecido. Precisamente acaba de aparecer un artículo póstumo* suyo dedicado a la teoría del tráfico vehicular.

* H. Reiss, A.D. Hammerich, and E.W. Montroll. *Thermodynamic Treatment of Nonphysical Systems: Formalism and an Example (Single-Lane Traffic)*, *J. Stat. Phys.* 42, 647 (1986)

II MODELOS TEORICOS PARA LA DESCRIPCION
DEL TRAFICO VEHICULAR

II.1 MODELOS BASADOS EN ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Los primeros modelos que vamos a discutir son modelos descritos por ecuaciones de movimiento o, lo que es lo mismo, basados en el comportamiento individual de los vehículos. Estos modelos resultan especialmente atractivos, pues permiten planteamientos de simulación tanto desde una perspectiva determinista como estocástica. Además, existe la posibilidad de deducir a partir de ellos ecuaciones de evolución para la función de distribución del sistema. Una versión especialmente afortunada es la llamada teoría de seguimiento del líder, inicialmente discutida por Reuschel¹⁾ y Pipes²⁾ y desarrollada más extensamente en el trabajo de Chandler³⁾.

La cuestión que nos planteamos es la siguiente. Dado un supersistema, compuesto por sistemas interactivos, ¿cómo podríamos describir el comportamiento global del supersistema a partir de los comportamientos individuales de los sistemas, incluidas sus interacciones?

Nosotros consideraremos que los mecanismos aditivos esenciales que influyen en el comportamiento de un conductor son tres y que, por tanto, las ecuaciones de evolución para cada uno de los vehículos van a constar de tres términos. Habrá un término que represente el deseo que tienen los conductores individualmente de conseguir un objetivo dado, y otro asociado con la interacción entre los vehículos. El efecto combinado de estos dos términos expresa la competición entre el deseo de un conductor y la influencia que los demás ejercen sobre él. Podemos incluir, además, un tercer término de ruido, dando así un carácter estocástico a nuestras ecuaciones de evolución. Escribimos entonces para cada vehículo las ecuaciones

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = v_j \quad (\text{II.1a})$$

$$\frac{dv_j(t)}{dt} = \left[\frac{dv_j(t)}{dt} \right]_{rel} + \left[\frac{dv_j(t)}{dt} \right]_{int} + \left[\frac{dv_j(t)}{dt} \right]_{ruido} \quad (\text{II.1b})$$

donde los tres términos del segundo miembro de la Ec. (II.1b) corresponden respectivamente a los tres efectos discutidos. Las variables x y v representan la posición y la velocidad de cada uno de los coches.

El primer sumando del segundo miembro de la Ec. (II.1b), que llamamos término de relajación describe el comportamiento de un conductor si se encontrase sólo en la vía, es decir, considerando que no existe interacción con otros conductores. Corresponde, pues, al caso límite de una concentración de coches en la carretera tendiendo a cero. Este término se ve afectado por el de interacción, que aparece como una corrección al mismo para concentraciones finitas. Cada miembro individual, al mismo tiempo que intenta conseguir su propia velocidad óptima se ve ligado por el comportamiento de los restantes miembros del grupo, apareciendo, por tanto, un feedback entre "intención" y "resultado".

Finalmente, podemos introducir un término adicional de ruido, que da a la ecuación un carácter estocástico. La idea básica de este término es considerar la aceleración como una variable aleatoria, manifestación de los múltiples factores que impiden a un conductor mantener su velocidad constante, por muy óptimas que sean las condiciones en la carretera. Lo denominaremos "ruido acelerativo"⁴⁾. Este término depende fuertemente de los condicionantes externos (estado del vehículo, de la vía, del tráfico y del medio ambiente) e internos (estado psicofísico) que afectan a cada conductor. Una medida de la

dispersión σ^2 de este ruido viene dada por

$$\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \left[\frac{dv}{dt} \right]^2 \quad (\text{II.2})$$

que nos da idea de la suavidad o brusquedad de la conducción. Así, por ejemplo, sobre una carretera mal asfaltada y con muchas curvas se han medido valores de σ^2 comprendidos entre 0.46 y 0.61 ms^{-2} , mientras que un valor típico cuando la medida se hace sobre un tramo recto en el interior de un túnel, en ausencia de tráfico y con pavimento perfecto es de 0.22 ms^{-2} . El valor de σ^2 también aumenta por efecto del alcohol, el cansancio, etc.

En las ecuaciones de evolución (II.1b) puede darse prioridad aun tipo de mecanismo frente a otros. Así, por ejemplo, podemos considerar que el término de interacción es dominante frente al de ruido y al de relajación. Este es el caso en los llamados modelos de "seguimiento del líder", de los que nos ocuparemos a continuación.

II.2 MODELOS DE SEGUIMIENTO.

Los modelos de seguimiento tratan de describir el comportamiento de una vía simple de tráfico en la que no son posibles los adelantamientos entre vehículos. Esta es una situación común en embotellamientos, túneles, puentes, etc. El hecho de que los coches se sigan unos a otros provoca una interacción entre vehículos, debida esencialmente a la respuesta de cada conductor a los estímulos generados por los demás. Las ecuaciones que describan el efecto de seguimiento deben tener en cuenta estos estímulos y sus consiguientes respuestas.

La teoría considera que cada vehículo interactúa únicamente con el vehículo que tiene delante. Además, esta interacción se admite que puede expresarse matemáticamente en términos de una sola variable, la aceleración. Si representamos por $x_j(t)$ la posición del coche j en el instante t , las ecuaciones del modelo son ⁵⁾:

$$a_j(t+\Delta) = \frac{d^2 x_j(t+\Delta)}{d^2 t} = \lambda \left[\frac{d^p x_{j-1}(t)}{dt^p} - \frac{d^p x_j(t)}{dt^p} \right] \quad (\text{II.3})$$

$$\lambda = \lambda_0 \frac{[dx_j(t)/dt]^m}{[x_{j-1}(t) - x_j(t)]^e} \quad (\text{II.4})$$

como se ve, la aceleración de un coche en un instante t es proporcional a la diferencia entre las derivadas de orden p

de la posición del coche que le precede y la suya calculadas en un tiempo $t-\Delta$. A su vez, el factor de proporcionalidad crece con una potencia de la velocidad del coche y es inversamente proporcional a la distancia elevada a otra potencia. Los estímulos generados en t actúan multiplicados por un "factor de sensibilidad" λ originando una respuesta en $t+\Delta$.

Es evidente que una línea de tráfico en movimiento no debe amplificar pequeñas perturbaciones. Si, por ejemplo, el vehículo en cabeza frena ligeramente y luego acelera, la perturbación resultante no debe amplificarse cuando se propaga hacia atrás en la línea. Por otro lado, la ley de seguimiento debe ser tal que una perturbación grande, por ejemplo un frenazo repentino, sea capaz de originar un colapso de la línea (colisiones). Es decir, el modelo debe ser estable ante pequeñas perturbaciones y, al mismo tiempo, poder describir inestabilidades locales cuando los vehículos son incapaces de compensar rápidamente una perturbación fuerte que se produce delante de ellos.

Un estudio teórico de la estabilidad de las Ecuaciones (II.3) y (II.4) respecto de pequeñas desviaciones del equilibrio (estabilidad lineal) muestra⁶⁾ que es necesario que p sea distinto de cero. Si se admite una ley de seguimiento dada por la distancia relativa se obtiene⁷⁾ un comportamiento inestable que, de acuerdo con la discusión anterior, no se corresponde con la situación real que tratamos de describir. La elección aceptable más sencilla de ley de seguimiento es, entonces, la que se obtiene haciendo $p=1$ y $l=m=0$ en las Ecuaciones (II.3) y (II.4), o sea

$$a_j(t+\Delta) = \lambda_0 [v_{j-1}(t) - v_j(t)] \quad (\text{II.5})$$

Con estas ecuaciones se demuestra fácilmente que una perturbación pequeña (por ejemplo, un coche que acelera durante un período corto de tiempo, volviendo luego a su velocidad inicial) se propaga hacia atrás en la línea con una velocidad $\lambda = \lambda_0/d$, donde d es el espaciado medio entre vehículos. Además, la amplitud de la perturbación decrece como $n^{-1/2}$ siendo n el número de vehículos a través de los cuales se propaga la perturbación.

Respecto a la estabilidad para perturbaciones grandes, el estudio teórico muestra que las Ecuaciones (II.5) no presentan inestabilidades locales importantes si se cumple que $\lambda_0 \Delta < \frac{1}{2}$. Desigualdad que no se verifica casi nunca en los experimentos de seguimiento hasta ahora realizados.

La Ley (II.5) puede mejorarse⁸⁾ considerando un modelo no lineal, correspondiendo a $m=0$, $p=1$:

$$a_j(t+\Delta) = \lambda_0 \left[\frac{V_{j-1}(t) - V_j(t)}{X_{j-1}(t) - X_j(t)} \right] ; j = 1, \dots, N \quad (\text{II.6})$$

Esta Ecuación tiene en cuenta el hecho, intuitivamente evidente, de que la interacción entre los coches disminuye al aumentar la distancia que los separa. Aunque, es mucho más difícil de tratar matemáticamente que el modelo anterior. Por otro lado, hacemos $p=1$ dado que no parece razonable considerar estímulos con valores de p mayores que 1, pues las derivadas temporales de la velocidad no son apreciadas en la práctica por los conductores.

A continuación, vamos a describir algunas de las experiencias llevadas a cabo para comparar con los resultados previstos por la ley de seguimiento. La más conocida

fueron realizadas en las pistas de pruebas de la General Motors así como en los tuneles Holland y Lincoln en New York^{9),10),11)} Los coches llevaban instrumental que permitía registrar de modo continuo su posición, velocidad y aceleración. Si representamos por $v_R(t)$ y $d(t)$ las velocidades y distancias medias respecto del coche anterior, de acuerdo con la relación (II.6), tenemos

$$Q(t+\Delta) = \lambda_0 V_R(t) / d(t) \quad (II.7)$$

A partir de esta expresión se obtuvieron diversos valores de los parámetros λ_0 y Δ que se ajustaron por el método de los mínimos cuadrados. Los resultados se presentan en la Tabla II.1.

TABLA II.1

Lugar	Nº de conductores	λ_0 (km/h)	Δ (s)
Pista de prueba Gral. Motors	8	44.09	1.5
Tunel Holland	10	29.28	1.4
Tunel Lincoln	16	32.66	1.2

Los coeficientes de correlación obtenidos para los mejores valores de λ_0 y Δ fueron en general superiores a 0.9 y para algunos conductores el valor llegó a ser tan bueno como 0.97. Parte de las flucturaciones observadas en los valores de Δ y λ_0 pueden explicarse si en las Ecuaciones de evolución introducimos el término de ruido acelerativo. En particular, se ha propues-

to el modelo¹²⁾

$$q_j(t+\Delta) = \lambda_0 \left[\frac{V_{j-1}(t) - V_j(t)}{X_{j-1}(t) - X_j(t)} \right] + \beta(t) \quad (\text{II.8})$$

donde $\beta(t)$ es un término de ruido del que se postulan sus propiedades estocásticas. Los resultados obtenidos con este modelo han sido comparados con las observaciones hechas en el túnel Holland y las medidas no se desvían en más de un 10 o 15% de los valores calculados.

El modelo de seguimiento descrito por (II.6) ha sido estudiado analíticamente.⁸⁾ En particular, puede calcularse el flujo en el estado estacionario para el que se obtiene una expresión analítica sencilla en función de la concentración. Este tipo de relaciones son las que se miden en situaciones reales.

Evidentemente, el flujo es cero tanto en una carretera vacía, en ausencia de vehículos, como en una carretera donde el tráfico se encuentra colapsado. Por tanto, el flujo será distinto de cero únicamente en el rango de concentraciones $0 < c < c_s$, donde c_s es la concentración de saturación de la línea. Al existir una relación concentración-flujo podemos preguntarnos cuál es la concentración para la cual el flujo es máximo. La respuesta nos dará la concentración y velocidad óptimas a las que sería aconsejable circular. Un tráfico a mayores velocidades implicaría el aumento del espaciado entre coches necesario para asegurar una conducción sin peligro, que a su vez haría disminuir la concentración y por consiguiente el flujo.

El primer paso para determinar la velocidad local del coche j es integrar las Ecuaciones (II.6)

$$v_j(t+\Delta) - \lambda_0 \ln d_j(t) = v_j(t'+\Delta) - \lambda_0 \ln d_j(t') = cte \quad (\text{II.9})$$

donde $d_j(t) = x_{j-1}(t) - x_j(t)$ es el espaciado relativo entre el coche j y el que le precede.

Considerando que las variaciones de flujo tienen lugar sobre una escala temporal mucho mayor que el tiempo de retardo (recordemos que de acuerdo con la Tabla II.1 es $\Delta \approx 1.55$), se puede despreciar Δ en los términos de velocidad. Definimos la velocidad media de la línea en un instante dado como la media aritmética de las velocidades de los N coches

$$V(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N v_j(t) \quad (\text{II.10})$$

y el espaciado medio como la media geométrica de los espaciados

$$d(t) = \left[\prod_{j=1}^N d_j(t) \right]^{1/N} \quad (\text{II.11})$$

Al inverso del espaciado medio lo denominaremos concentración de la línea $c(t) = 1/d(t)$. Sin más que sumar (II.9) para todo j se obtiene una "constante de movimiento":

$$v(t) + \lambda_0 \ln c(t) = \text{cte} \quad (\text{II.12})$$

El valor de la constante puede expresarse utilizando el hecho comentado antes de que cuando la concentración c alcanza el valor de saturación, la velocidad media se hace cero:

$$\text{cte} = \lambda_0 \ln C_s \quad (\text{II.13})$$

Por tanto, resulta

$$c(t) = C_s e^{-v(t)/\lambda_0} \quad (\text{II.14})$$

Este resultado concuerda cualitativamente con el comportamiento representado en la Fig. I.1. Si tenemos en cuenta ahora que el flujo q se define como:

$$q(t) = v(t) c(t) \quad (\text{II.15})$$

la relación que nos liga al flujo y la concentración será

$$q(t) = \lambda_0 c(t) \ln [C_s / c(t)] \quad (\text{II.16})$$

cuya representación gráfica concuerda cualitativamente con los resultados de las medidas experimentales tal como se muestran en la Fig. II.1.

La densidad c_0 a la cual el flujo es máximo se obtiene haciendo $dq/dc=0$ y resulta ser $c_0=c_s/e$, que utilizando la Ec. (II.16) lleva a la velocidad óptima $v_{qmax} = \lambda_0$.

Los datos de flujo que se obtuvieron a partir de las experiencias realizadas en el tunel Holland de New York, con una muestra de unos 20.000 coches ajustan muy bien con la Ecuación de flujo (II.16), permitiendo determinar el valor de λ_0 . La comparación se representa en la Fig. II.1^{9), 8)}.

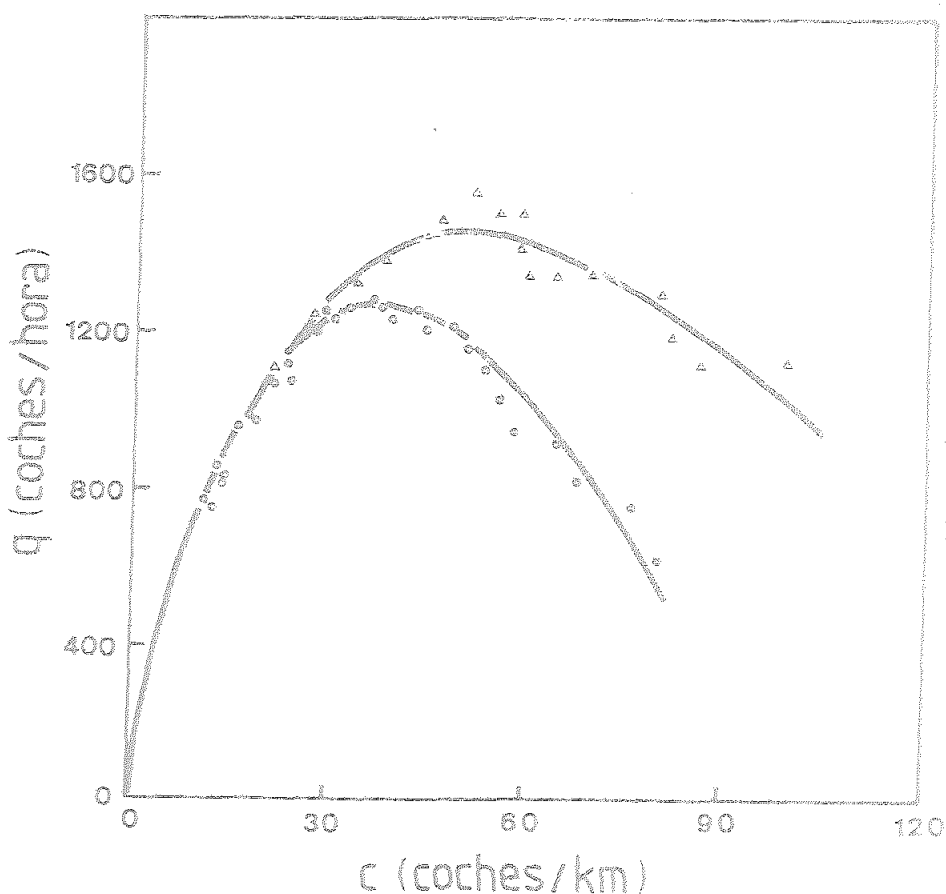


Fig. II.1 Flujo (coches/h) frente a concentración de vehículos (coches/km) para los túneles Lincoln (curva superior) y Holland (curva inferior).

También ajustan bien los datos obtenidos en otros túneles. En la Tabla II.2 damos los valores de λ_0 (igual a la velocidad óptima teórica) y de v_{qmax} medida experimentalmente en varios túneles.

TABLA II.2

Lugar	λ_0 (km/h)	v_{qmax} (km/h)
Túnel Lincoln	32	27
Túnel Holland	29	31
Túnel Queens Midtown	35	40

Es interesante notar que la velocidad óptima v_{qmax} toma valores mayores, en los túneles mas nuevos, donde la mayor anchura de la vía, la mejor calidad del alumbrado, etc. juegan un papel bastante significativo. La ingeniería de tráfico, debería tener en cuenta este valor y hacerlo tan grande como sea posible para obtener una conducción más fluida, especialmente en aquellas zonas donde se producen embotellamientos, como son los túneles y puentes y en donde el modelo de seguimiento de tráfico da buenos resultados.

Ahora bien, de los razonamientos expuestos, resulta evidente que la teoría de seguimiento no puede ser aplicada a situaciones de tráfico con adelantamientos frecuentes. Por ello, no debe sorprender que la ecuación para el flujo no esté de acuerdo con los resultados experimentales obtenidos en estos casos.

Por otro lado, queremos destacar un punto que es frecuentemente olvidado en la bibliografía. Estos modelos de seguimiento no son capaces de describir la relajación hacia el estado estacionario de una línea de tráfico bajo condiciones dadas. Los valores de λ_0 y c_s y por tanto de la constante del movimiento, Ec. (II.12), se introducen mediante ajuste con los datos experimentales correspondientes a una situación supuestamente estacionaria. Si uno parte de un valor distinto de la constante del movimiento, por su propio concepto este valor se mantiene en el tiempo y no se alcanza nunca la situación estacionaria.

II.3 MODELOS BASADOS EN ECUACIONES CINÉTICAS

II.3.1 La ecuación cinética

La idea de estos modelos es plantear una ecuación que describa la evolución espacio-temporal de la función de distribución de coches ¹³⁾, que es proporcional a la densidad de probabilidad de encontrar un coche con una posición y velocidad en un cierto instante. Supongamos que conocemos el comportamiento de una población bajo condiciones extremas, por ejemplo, el comportamiento de los conductores en una carretera con tráfico lo suficientemente diluido como para poder desprestigiar las interacciones mutuas. ¿Podremos predecir el comportamiento de esta población bajo condiciones en que las interacciones entre los conductores sean relevantes? Prigogine y sus colaboradores, para responder esta pregunta, introdujeron, siguiendo las técnicas de la Física Estadística una descripción en el espacio de las fases definido por las posiciones y las velocidades de todos los coches.

Comencemos por definir la función de distribución de vehículos $f(x,v,t)$. En términos de esta función, el número de coches dN que en un instante dado t se encuentra en un intervalo de carretera comprendido entre x y $x+dx$ y con una velocidad comprendida entre v y $v+dv$, viene dado por:

$$dN = \int f(x,v,t) dx dv \quad (II.17)$$

Una característica importante del sistema con que estamos tratando, y que lo diferencia de los sistemas usuales de la Mecánica Estadística, es la posibilidad de medir experimentalmente de un modo directo la función de distribución. Desgraciadamente, hasta la fecha se han realizado pocas medidas de la misma y, en particular, no tenemos noticia de ninguna realizada en España. En la Fig. II.2 representamos los resulta-

dos obtenidos en la ciudad de Lansing para una situación estacionaria, a fin de dar una idea cualitativa de la forma que es de esperar que tenga la función de distribución

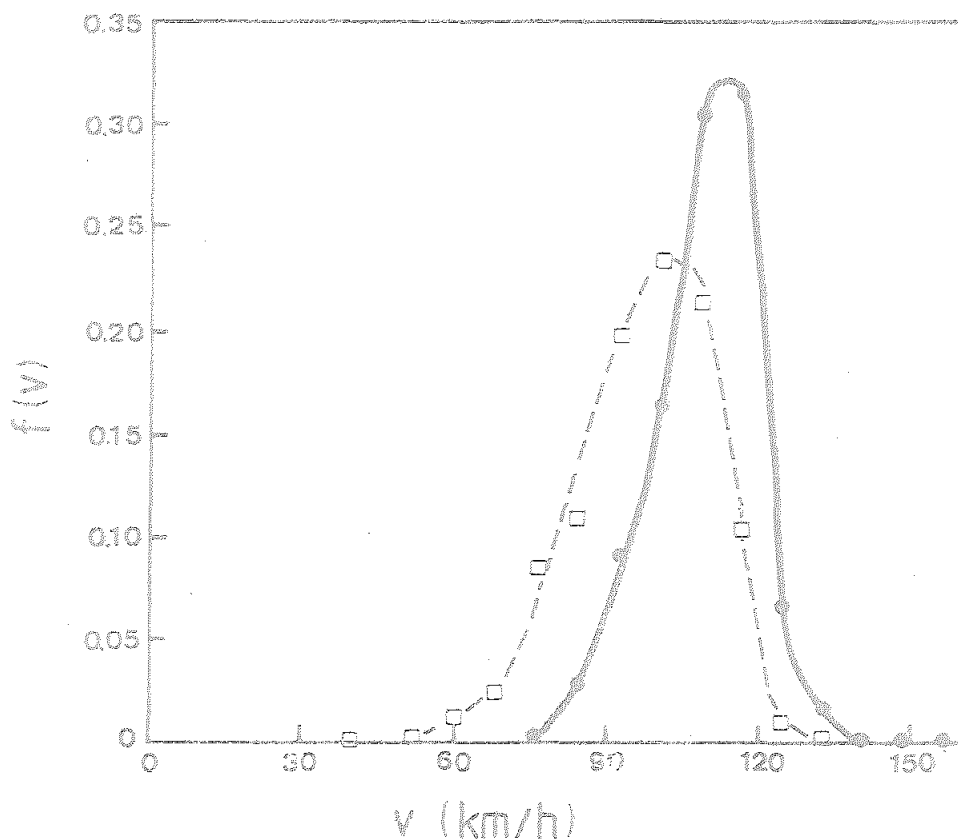


Fig. II.2 Función de distribución de velocidades estacionaria observada $f(v)$. Los datos se obtuvieron sobre un tramo de 3.5 millas en la ciudad de Lansing, carretera I.96, donde no había ni entradas ni salidas. Los puntos negros representan $f(v)$ para la línea de la izquierda (644 coches) y los cuadrados, línea derecha (782 coches).

A partir de $f(x, v, t)$ se pueden obtener importantes cantidades. Así, por ejemplo, la concentración local de coches $c(x, t)$ vendrá dada por

$$c(x, t) = \int_0^{\infty} dv f(x, v, t) \quad (\text{II.18})$$

y el flujo local $q(x, t)$

$$q(x, t) = c(x, t) \bar{v}(x, t) = \int_0^{\infty} dv v f(x, v, t) \quad (\text{II.19})$$

La primera igualdad define la velocidad media local $\bar{v}(x, t)$.

Otra magnitud que juega un papel relevante es la dispersión de la velocidad definida como

$$\overline{(\Delta v)^2} = \overline{(v - \bar{v})^2} = \frac{1}{c} \int_0^{\infty} dv (v - \bar{v})^2 f(x, v, t) \quad (\text{II.20})$$

y, más generalmente, los momentos M_n de orden n

$$M_n = \frac{1}{c} \int_0^{\infty} dv v^n f(x, v, t) \quad (\text{II.21})$$

Para obtener una ecuación de evolución para $f(x,v,t)$ vamos a analizar las distintas causas que la afectan, admitiendo que su efecto es aditivo. La primera causa de variación está asociada con la existencia de inhomogeneidades, es decir, con la dependencia de f respecto de x . Despreciando todos los demás efectos, se trata de un flujo libre, para el que la conservación del número de coches lleva directamente a

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (\text{IX.22})$$

Uno de los puntos más originales de la teoría desarrollada por Prigogine y sus colaboradores es la introducción del concepto de "función de distribución deseada"¹⁴⁾, que representaremos por $f_0(x,v,t)$. Esta función está asociada con el deseo que en cada instante poseen los distintos conductores. Más específicamente, $f_0(x,v,t)dx dv$ representa el número de vehículos cuyos conductores desearían en el instante t , en el intervalo de carretera dx , circular con una velocidad comprendida entre v y $v+dv$. Se trata pues de una representación matemática del plan de conducción de los conductores. Evidentemente, este plan se altera por los distintos factores que van afectando la conducción, y que hacen que la función de distribución real $f(x,v,t)$ sea distinta de la deseada $f_0(x,v,t)$. Los factores o perturbaciones citados pueden actuar durante un cierto tiempo y cesar después, o bien actuar de forma continua. El primer caso correspondería, por ejemplo, a una racha de vientos fuertes actuando entre $t=-T$ y $t=0$, mientras que el segundo podría referirse a una carretera con una alta densidad de tráfico. Desde un punto de vista cualitativo es de esperar que el efecto de una perturbación del primer tipo decaiga a partir del instante en que ha cesado la causa. Dicho de otro modo, $f(x,v,t)$ debe relajarse hacia $f_0(x,v,t)$. La forma precisa de esta relajación es imposible de

determinar dado el gran número de factores que intervienen. Para construir un modelo matemático hemos de postular una cierta ley de relajación. La más sencilla, y por otro lado frecuente en los problemas de sistemas compuestos por muchas individualidades, es una ley exponencial. Así pues, escribimos:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{f - f_0}{T} \quad (\text{II.23})$$

donde T es un tiempo característico de relajación, que tomaremos independiente de x y v . Evidentemente, esto supone admitir que todos los coches relajan de la misma forma hacia su distribución deseada. Es posible introducir una T dependiente de la velocidad pero ello complica considerablemente el modelo. En el caso particular de una distribución deseada independiente del tiempo resulta.

$$f(v, t) = f_0(v) + \left[f(v, 0) - f_0(v) \right] e^{-t/T} \quad (\text{II.24})$$

Sin embargo, es conveniente, con frecuencia, considerar un modelo en el que aunque f_0 dependa del tiempo, el "programa" que sigue cada conductor, expresado por la función de distribución deseada, sea independiente de la concentración local, o sea,

$$f_0(x, v, t) = c(x, t) \tilde{f}_0(v) \quad (\text{II.25})$$

Dicho de otra forma, toda la información del "deseo" de los con-

ductores está contenida en la función de distribución de velocidades $\tilde{f}_0(v)$.

Realicemos algunos comentarios acerca de los dos efectos introducidos hasta ahora. El primero corresponde a un proceso de homogeneización espacial, y el segundo describe la relajación de las velocidades en ausencia de interacción entre los vehículos. Ambos procesos vienen definidos en general por escalas de tiempo muy distintas. La relajación de las velocidades tiene lugar muy rápidamente, T es en situaciones prácticas del orden de unos pocos segundos. Por el contrario, la tendencia de la concentración hacia la uniformidad tiene lugar mucho más lentamente, es decir, viene caracterizado por tiempos $t \gg T$.

Hasta ahora, hemos considerado una situación de tráfico "diluido", en que las interferencias entre los conductores no se han tenido en cuenta. Para evaluar su influencia podemos proceder de un modo análogo al utilizado en teoría cinética para derivar la ecuación de Boltzmann^{15),16)}.

Consideremos el número de coches en el intervalo $dx dv$ que vendrá dado por $\tilde{f}(x,v,t) dx dv$. Su variación en el intervalo de tiempo dt debido a las interacciones será

$$\left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} \right]_{int} dx dv dt \quad (II.26)$$

Nosotros descompondremos esta cantidad en dos partes escribiendo

$$\left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} \right]_{int} dx dv dt = G - D \quad (II.27)$$

donde G es el número de coches que "entran" en nuestro intervalo en el tiempo dt , mientras que D es el número de coches que lo "abandonan". Comencemos por evaluar el término de pérdida D . Caracterizaremos mediante el subíndice i a los coches que estaban inicialmente en $dx dv$, y usaremos el subíndice j para los coches inicialmente fuera de él. Una interacción entre dos coches i y j sólo contribuirá a D cuando v_i sea mayor que v_j . Sólo en este caso v_i disminuirá su velocidad acomodándose a la del coche j y saliendo por tanto de nuestro intervalo de velocidades. Despreciamos, por ahora, la posibilidad de que tengan lugar adelantamientos. Luego el número de coches que inicialmente estaban en el intervalo y que se salen de él debido a las interacciones que tienen lugar en dt se obtendrá multiplicando el número de coches que hay inicialmente por el flujo de coches del tipo j que entran en dx con velocidades menores que v_i , es decir

$$D = dx dv dt f(x, v_i, t) \int_0^{v_i} dv_j f(x, v_j, t) (v_i - v_j) \quad (\text{II.28})$$

Un razonamiento análogo lleva a

$$G = dx dv dt f(x, v_i, t) \int_{v_i}^{\infty} dv_j f(x, v_j, t) (v_j - v_i) \quad (\text{II.29})$$

Es decir, las interacciones que contribuyen a G son las que tienen lugar entre un coche j y un coche i cuando v_j es mayor que v_i . Entonces el coche j ha de frenar acomodándose a una velocidad comprendida en el intervalo dv .



Sustituyendo las Ecuaciones (II.28) y (II.29) en (II.27) resulta

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t} \right]_{int} = f_{vc} - f_{vc} = f_c (\bar{v} - v) \quad (\text{II.30})$$

donde hemos eliminado los subíndices que eran sólo un instrumento útil para nuestro razonamiento.

Al escribir la ecuación anterior, hemos supuesto que en nuestro sistema no se producen adelantamientos de coches. Cuando un coche j se encuentra con un coche i puede suceder que aquel no acomode su velocidad a la del coche i , sino que simplemente se produzca un adelantamiento. Esto quiere decir que parte de las interacciones que hemos contado no tienen lugar sino que consisten en adelantamientos. Para caracterizar los adelantamientos que tienen lugar en nuestro sistema introducimos una probabilidad P de que una posible interacción teórica se convierta en un adelantamiento. Dicho de otra forma, cada una de las interacciones contadas en la expresión anterior tiene una probabilidad $1-P$ de ocurrir realmente. Por lo tanto, en lugar de la Ecuación (II.30) escribimos ¹⁷⁾

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t} \right]_{int} = (1-P) f_c (\bar{v} - v) \quad (\text{II.31})$$

Finalmente utilizamos la hipótesis, ya citada anteriormente, de aditividad de las tres causas de variación estudiadas y llegamos a la ecuación cinética

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{f-f_0}{T} + (1-P) f c (\bar{v}-v) \quad (\text{II.32})$$

Notemos que en realidad esta es una ecuación no lineal integro-diferencial ya que \bar{v} y c son funcionales integrales de f .

II.3.2 Análisis de la ecuación cinética

El término de interacción que acabamos de obtener es fácil de interpretar cualitativamente. Si $v > \bar{v}$ el término es negativo de manera que las interacciones tienden a hacer decrecer $f(v)$. Por el contrario si $v < \bar{v}$ las interacciones tienden a aumentar $f(v)$.

Consideremos una situación homogénea, es decir, con f independiente de x , lo cual implica que la concentración c es constante. Multiplicando en este caso la ecuación cinética por v e integrando para todo v resulta

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\bar{v}-\bar{v}_0}{-T} - (1-P) c \overline{(v-\bar{v})^2} \quad (\text{II.33})$$

donde \bar{v}_0 representa la velocidad deseada media de la línea de tráfico. La solución estacionaria de esta ecuación es¹⁷⁾

$$\bar{v}_{st} = \bar{v}_0 - T (1-P) c \overline{(v_{st} - \bar{v}_{st})^2} \quad (\text{II.34})$$

este resultado nos indica que la velocidad media estacionaria en presencia de interacciones es menor que la velocidad deseada media, como era de esperar.

Es importante notar que la probabilidad introducida P , de que se produzcan adelantamientos, es una cantidad global y no específica de cada coche. Se trata pues de una cantidad media, independiente de la velocidad o posición particular del coche considerado.

Analizaremos a continuación las situaciones estacionarias descritas por la Ecuación (II.32) en el caso homogéneo. Para avanzar en los argumentos teóricos es conveniente reducir el número de parámetros independientes que aparecen en la ecuación. Concretamente vamos a expresar la probabilidad de adelantar P y tiempo de relajación T como funciones de la concentración del tráfico. Para ello recurrimos a argumentos plausiblemente sencillos de tipo intuitivo. Para la probabilidad P admitimos la expresión:

$$\begin{aligned} P &= 1 - c/c_s = 1 - \eta & ; & \quad c < c_s \\ P &= 0 & ; & \quad c \geq c_s \end{aligned} \tag{II.35}$$

donde c_s es cierto valor crítico de la concentración que puede tomarse por ejemplo igual al valor de saturación que aparece en la teoría de seguimiento. La idea de (II.35), es que a bajas concentraciones la probabilidad de adelantar es grande, disminuyendo según una ley lineal hasta anularse en un cierto límite.

En cuanto al tiempo de relajación T es claro que será también una función de la concentración c ya que la posibilidad de acomodación a una distribución deseada estará íntimamente ligada a la posibilidad de que en la línea se produzcan

adelantamientos. Nosotros admitiremos para T una expresión de la forma

$$T = \frac{z(1-P)}{P} \quad (\text{II.36})$$

donde toda la dependencia de T respecto de c es a través de P , de manera que z es un tiempo intrínseco independiente de la concentración. Cuanto más pequeña es la concentración mayor es el valor de P y más pequeño es T , es decir, más rápida es la relajación hacia la distribución deseada.

Consideremos la solución estacionaria de la Ecuación (II.32), $f_{st}(v)$, en el caso homogéneo. Formalmente vendrá dado por

$$f_{st} = \frac{f_0}{1 - \gamma(\bar{v} - v)} \quad (\text{II.37})$$

donde

$$\gamma = Tc(1-P) = \frac{\alpha \eta^3}{1-\eta} \quad (\text{II.38})$$

siendo $\eta = c/c_s$ la concentración normalizada a la crítica y $\alpha = z c_s$. Notemos que la relación (II.37) es una ecuación funcional ya que \bar{v} es el primer momento de la distribución f_{st} . Su resolución no es trivial. El hecho de que la función de distribución tiene que ser definida positiva para todo valor de la velocidad implica

que

$$1 - \gamma \bar{v} \geq 0 \quad (\text{II.39})$$

El signo de igualdad se cumplirá de acuerdo con (II.38) cuando

$$\bar{v} = \frac{1 - \gamma}{\alpha \gamma^3} \quad (\text{II.40})$$

viniendo entonces la función de distribución estacionaria dada por

$$f_{st} = \frac{f_0}{\gamma \gamma} \quad (\text{II.41})$$

Se comprueba fácilmente la consistencia de las relaciones (II.40) y (II.41). Así pues, en este caso la velocidad media depende únicamente de la concentración, siendo independiente de las características de la función de distribución deseada, es decir, del deseo de los conductores. Por esta razón, Prigogine denomina a este caso "situación de flujo colectivo", mientras que al caso general en que (II.39) es una desigualdad se refiere como "situación de flujo individual".

Cuando γ tiende a cero la función de distribución f tiende a la función de distribución deseada. Al ir

aumentando γ hacia la unidad \bar{V} también va creciendo, pero no puede sobrepasar el valor máximo permitido por la positividad de la función de distribución. Este valor máximo γ_{cr} crítico vendrá dado por

$$1 - \gamma_{cr} \bar{V} = 0 \quad (II.42)$$

A partir de la Ec. (II.37) podemos obtener relaciones entre los momentos de la distribución estacionaria y los de la distribución deseada. En particular, multiplicando por v e integrando resulta

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \bar{V}_0 + \gamma (\bar{V}^2 - \bar{V}^2) \\ &= \bar{V}_0 - \gamma M_2 \end{aligned} \quad (II.43)$$

donde \bar{V}_0 representa la velocidad deseada media, y M_2 es el cumulante de segundo orden de la distribución verdadera. Debe notarse que la relación (II.43) no es cerrada y no permite por tanto calcular la velocidad media en el estado estacionario.

En el caso particular de flujo colectivo, a partir de (II.40) resulta que $\bar{V}^2 = \bar{V}_0 / \gamma$ con lo que

$$M_z = \frac{1}{\gamma^2} (\gamma \bar{v}_0 - 1) \quad (\text{II.44})$$

que indica que en esta situación existe una correlación íntima entre la dispersión y la velocidad media deseada.

Si consideramos sistemas diluidos, en el sentido de concentraciones mucho menores que la correspondiente a γ_{cr} la situación es más compleja. Para valores de γ suficientemente pequeños podemos desarrollar (II.37) obteniendo

$$f_{st} = f_0 \left[1 - \gamma(v - \bar{v}) + O(\gamma^2) \right] \quad (\text{II.45})$$

Por otro lado,

$$\bar{v} = \frac{1}{c} \int_0^{\infty} dv f_{st} v = \frac{1}{c} \int_0^{\infty} dv f_0 v + O(\gamma) = \bar{v}_0 + O(\gamma) \quad (\text{II.46})$$

con lo que reteniendo hasta el primer orden en γ

$$f_{st} = f_0 \left[1 - \gamma(v - \bar{v}_0) \right] \quad (\text{II.47})$$

En esta aproximación la velocidad media viene dada por

$$\bar{V} = \bar{V}_0 - \gamma \left[\overline{V_0^2} - \bar{V}_0^2 \right] = \bar{V}_0 - \gamma M_{20} \quad (\text{II.48})$$

Si tenemos en cuenta la igualdad (II.43) resulta que retener el orden más bajo en γ equivale a aproximar en la ecuación de valor medio el segundo cumulante de la distribución estacionaria M_2 por el segundo cumulante de la distribución deseada M_{20} . En esta misma aproximación el flujo es

$$q = c \left[\bar{V}_0 - \gamma M_{20} \right] \quad (\text{II.49})$$

Cuando se consideran concentraciones mayores, es decir, órdenes superiores en γ , la expresión del flujo contendrá, en general, momentos de orden superior de la distribución deseada. Aunque en principio podrían obtenerse sucesivos términos de un desarrollo en potencias de γ , los cálculos se vuelven en seguida muy complejos por lo que, en la práctica, es más útil recurrir al cálculo numérico. Realizaremos una discusión más profunda de este punto en el apartado siguiente.

Para elaborar un modelo concreto y realizar cálculos explícitos es necesario especificar una función de distribución deseada. Prigogine et al.¹⁷⁾ han considerado y analizado diversas distribuciones sencillas. Todas ellas tienen la característica común de depender de un único parámetro. Con objeto de comparar en los apartados siguientes y a modo de ejemplo, en la Fig. II.3 presentamos los resultados obtenidos numéricamente para una función de distribución deseada de la

forma exponencial

$$f_0(v) = \frac{c_s \tau}{V_0} \exp(-v/V_0) \quad (\text{II.50})$$

La figura muestra el flujo normalizado q/c_s en función de la concentración normalizada η , para distintos valores de la velocidad media deseada \bar{v}_0 .

$$\bar{v}_0 = \frac{1}{c} \int_0^{\infty} v f_0(v) dv = V_0 \quad (\text{II.51})$$

Se observa un comportamiento lineal para concentraciones bajas de acuerdo con la expresión (II.49). Es de destacar también el hecho de que a altas concentraciones las distintas curvas se superponen. En la Fig. II.4 se representa la dependencia de la velocidad media respecto de η . A concentraciones muy bajas $\bar{v} = \bar{v}_0$ de acuerdo con (II.48). En esta región las interacciones son prácticamente despreciables de manera que la velocidad media es prácticamente igual a la velocidad deseada media. Al ir aumentando la concentración, aumentan las interacciones y por tanto la diferencia entre la velocidad deseada y la real, que será menor.

Evidentemente la ecuación cinética (II.32) puede mejorarse, introduciendo términos que describan con mayor detalle tanto la relajación como la interacción. En particular pueden incorporarse efectos análogos a los que se consideran en

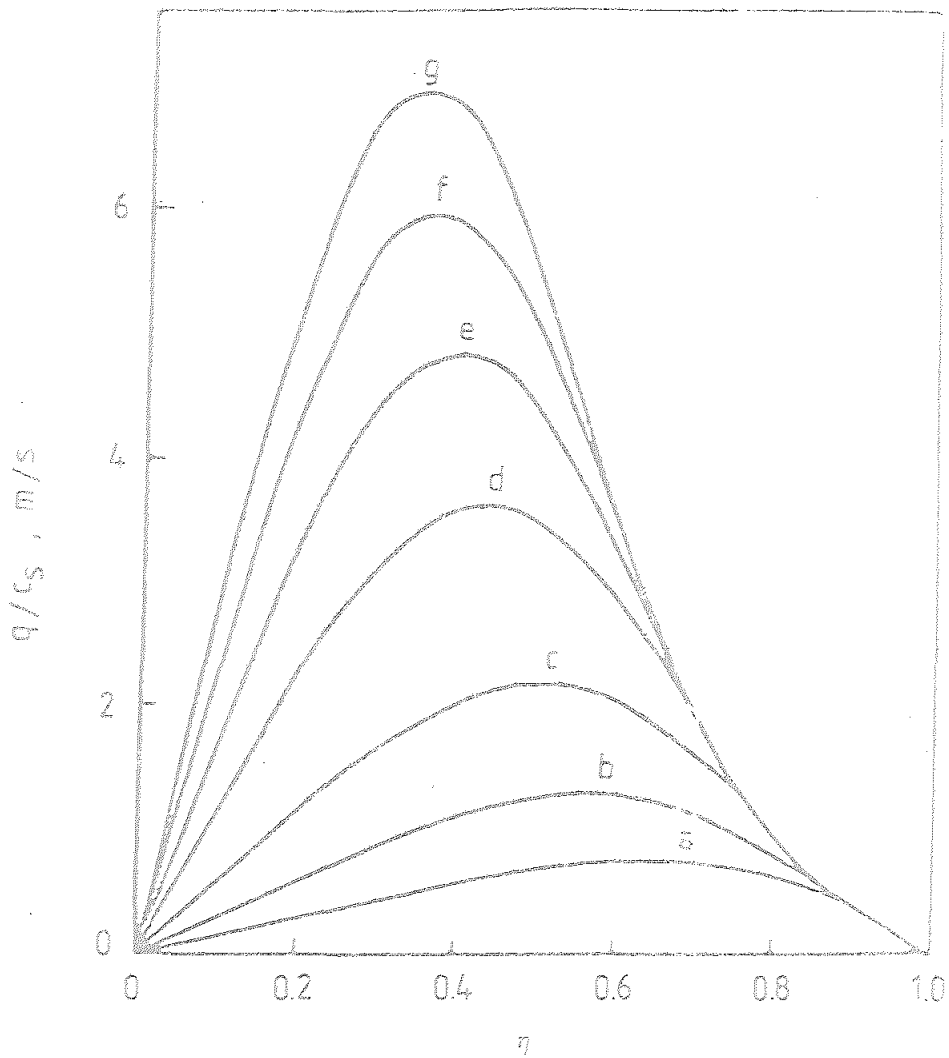


Fig. II.3 Flujo normalizado q/c_s frente a concentración normalizada $\eta = c/c_s$ para el modelo exponencial (II.50) para varias velocidades medias deseadas (curva a, $v_0=1.5$ m/s; curva b, $v_0=3.05$ m/s; curva c, $v_0=6.1$ m/s; curva d, $v_0=12.2$ m/s; curva e, $v_0=18.3$ m/s; curva f, $v_0=24.4$ m/s; curva g, $v_0=30.5$ m/s) y $c_s \tau = 0.33$ s/m.

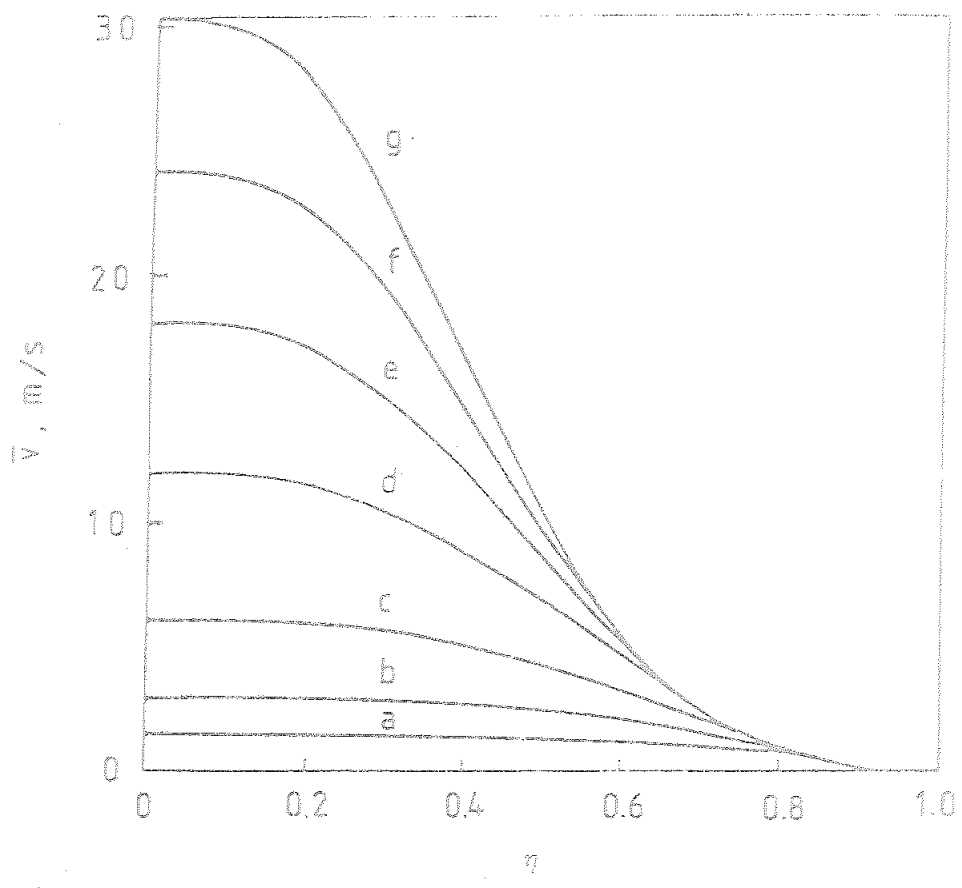


Fig. II.4 Dependencia de la concentración normalizada respecto de la velocidad media para el modelo exponencial (II.50), para varias velocidades medias deseadas (las curvas corresponden a los mismos valores de la velocidad que en la figura anterior) siendo igualmente $c_s \tau = 0,33s/m$.

el modelo de seguimiento descrito en el apartado II.2. Sin embargo, esto lleva a una gran complicación de la teoría sin que aparentemente se introduzca ningún elemento nuevo que sea relevante para la comprensión del problema. No entraremos en más detalles acerca de estos puntos, que pueden consultarse en la repetidamente citada referencia 17).

II.4 COMENTARIOS A LOS MODELOS DE ECUACION CINÉTICA DE TRAFICO

Es evidente que la aproximación basada en ecuaciones cinéticas discutido en el apartado anterior contiene elementos de gran belleza y conceptualmente muy atractivos. Sin embargo, y a nuestro entender sorprendentemente, la teoría no ha sido desarrollada mucho más allá de donde la dejaron sus proponentes, Prigogine y Herman. En particular, no tenemos conocimiento de que se hayan llevado a cabo medidas experimentales sistemáticas a fin de efectuar un test cuantitativo de la teoría. Una posible razón para esto es la señalada por los propios autores¹⁷⁾.

Un peligro obvio de una teoría como la nuestra es que puede conducir a un círculo vicioso. El comportamiento de los conductores se "explicaría" en términos de una función de distribución deseada, que a su vez se introduce para describir el comportamiento de los conductores.

La aportación fundamental que se hace en la teoría es sin duda la introducción del concepto de función de distribución deseada. En ella residen sus potencialidades, pero también sus dificultades prácticas. La determinación experimental de una función de distribución es un problema muy complejo¹⁸⁾. Si se quiere hacer, por ejemplo, a partir de la medida de momentos de la velocidad serian necesarios infinitos momentos. Sin embargo no parece posible realizar medidas fiables más que del valor medio y de la dispersión de la velocidad. Debe tenerse en cuenta que la medida de la función de distribución deseada debe llevarse a cabo en las mismas condiciones reales a que se va a aplicar. Es decir, no parece adecuado, en principio, determinarla a partir de medidas realizadas en una situación de tráfico muy diluido y aplicarla después a uno muy

denso . No hay que olvidar que, como ya hemos dicho, los conductores ajustan su "deseo" a las situaciones reales de tráfico en que se encuentran en cada momento.

A la vista de la discusión anterior podemos plantearnos el problema en dos etapas consecutivas. En una primera etapa realizaríamos medidas de las velocidades reales, a fin de obtener información a cerca de la distribución deseada. Con esta información construiríamos un modelo que aplicaríamos, en una segunda etapa, para predecir el comportamiento del tráfico en una situación real. De acuerdo con este esquema nos planteamos ahora cuál sería la información relevante de la distribución deseada que pueda obtenerse a partir del conocimiento de de los dos primeros momentos de la velocidad en una situación dada. Llevaremos a cabo este análisis utilizando la técnica de cumulantes¹⁹⁾.

Introduzcamos la función generatriz de momentos .

$$\Gamma(\lambda, t) = \int_0^{\infty} dv f(v, t) e^{\lambda v} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{M_{\alpha}(t)}{\alpha!} \lambda^{\alpha} \quad (\text{II.51})$$

que en el caso de la función de distribución deseada es

$$\Gamma_0(\lambda) = \int_0^{\infty} dv f_0(v) e^{\lambda v} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{M_{0\alpha}}{\alpha!} \lambda^{\alpha} \quad (\text{II.52})$$

A partir de la ecuación cinética (II.32) particularizada para una situación homogénea, se obtiene sin dificultad

$$\frac{\partial \Gamma(\lambda, t)}{\partial t} = -\frac{\Gamma - \Gamma_0}{T} + C(1-P)\bar{V}\Gamma - C(1-P)\frac{\partial \Gamma}{\partial \lambda} \quad (\text{II.53})$$

Se definen los cumulantes Λ_α y su función generatriz $Z(\lambda, t)$ a través de las relaciones

$$Z = \ln \Gamma(\lambda, t) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{\Lambda_\alpha}{\alpha!} \lambda^\alpha \quad (\text{II.54})$$

Análogamente para la función de distribución deseada se tiene

$$Z_0 = \ln \Gamma_0(\lambda) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{\Lambda_{0\alpha}}{\alpha!} \lambda^\alpha \quad (\text{II.55})$$

A partir de la Ecuación (II.53) se obtiene fácilmente la ecuación de evolución para la función $Z(\lambda, t)$ y a partir de ella una jerarquía de ecuaciones para los cumulantes. En particular las dos primeras ecuaciones de la jerarquía son

$$\frac{\partial}{\partial t} \Lambda_1(t) = -\frac{1}{T} [\Lambda_1(t) - \Lambda_{01}] - C(1-P) \Lambda_2(t) \quad (\text{II.56})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Lambda_2(t) = & \frac{1}{T} [\overline{V_0^2} - 2\overline{V_0} \Lambda_1(t) + \Lambda_1^2(t)] - \\ & \frac{1}{T} \Lambda_2(t) - \frac{C(1-P)}{T} \Lambda_3(t) \end{aligned} \quad (\text{II.57})$$

En la aproximación gaussiana se considera que $\Lambda_n(t) = 0$ para todo $n > 2$, de manera que se tiene el siguiente sistema cerrado de ecuaciones:

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial t} = -\frac{1}{T} \overline{V} + \frac{\overline{V_0}}{T} - C(1-P) \Lambda_2 \quad (\text{II.58})$$

$$\frac{\partial \Lambda_2}{\partial t} = \frac{\overline{V_0^2}}{T} - 2 \frac{\overline{V_0} \overline{V}}{T} + \frac{\overline{V}^2}{T} - \frac{\Lambda_2}{T} \quad (\text{II.59})$$

Consideremos un estado estacionario, es decir, hagamos en estas ecuaciones $\frac{\partial \overline{V}}{\partial t} = \frac{\partial \Lambda_2}{\partial t} = 0$. Resulta entonces un sistema de ecuaciones algebraicas. La condición para que ese sistema admita soluciones reales resulta ser

$$\Lambda_{02} \leq \frac{(1-\eta)^2}{4\alpha^2\eta^6} \quad (\text{II.60})$$

ya que las soluciones estacionarias son

$$\bar{V} = \bar{V}_0 - \frac{1}{2} \left[\gamma^{-1} \pm (\gamma^{-2} - 4\Lambda_{02})^{1/2} \right] \quad (\text{II.61})$$

$$\Lambda_2 = \frac{\gamma^{-1}}{2} \left[\gamma^{-1} \pm (\gamma^{-2} - 4\Lambda_{02})^{1/2} \right] ; \quad \gamma = \frac{\alpha \eta^3}{1-\eta} \quad (\text{II.62})$$

Supongamos que la función de distribución deseada es la exponencial (II.50), para la que $\bar{V}_0^n = n! V_0^n$ y $\Lambda_{02} = V_0^2$. Las Ecuaciones (II.61) y (II.62) toman entonces la forma:

$$\bar{V} = V_0 - \frac{1}{2} \left[\gamma^{-1} \pm (\gamma^{-2} - 4V_0^2)^{1/2} \right] \quad (\text{II.63})$$

$$\Lambda_2 = \frac{\gamma^{-1}}{2} \left[\gamma^{-1} \pm (\gamma^{-2} - 4V_0^2)^{1/2} \right] \quad (\text{II.64})$$

mientras que la condición para la existencia de soluciones reales es:

$$\gamma^{-2} \geq 4V_0^2 \quad (\text{II.65})$$

En las figuras II.5 y II.6 presentamos una comparación de los resultados obtenidos con la aproximación gaussiana, Ecs. (II.63) y (II.64), y los resultados numéricos exactos. Hay que tener en cuenta que de las dos soluciones que aparecen en las Ecs. (II.63) y (II.64) únicamente es estable la que corresponde al signo menos. Se observa una concordancia bastante buena en la zona lineal correspondiente a bajas densidades, mientras que la discrepancia aumenta notablemente al aumentar el valor de η . Por otro lado, sólo existen soluciones estables de la aproximación gaussiana hasta un cierto valor de η determinado por (II.65). Se observa también que el ajuste es tanto mejor y el rango de densidades en que existe solución estable tanto mayor cuanto menor es el valor de la velocidad media deseada V_0 .

La consecuencia del análisis anterior es que, en el caso de una distribución deseada exponencial la aproximación gaussiana solo es buena en la región de bajas concentraciones. Se plantea entonces de modo natural la cuestión de si ello es debido a las peculiaridades de una distribución exponencial. Parece lógico pensar que las mejores condiciones de aplicabilidad de la aproximación gaussiana correspondan a una situación tal que la distribución externa que se introduce, es decir, la deseada sea gaussiana. Nosotros hemos realizado un análisis de este caso y los resultados no parecen muy prometedores, en el sentido de que de nuevo existe un valor límite de la concentración más allá del cual la aproximación gaussiana se vuelve inestable.

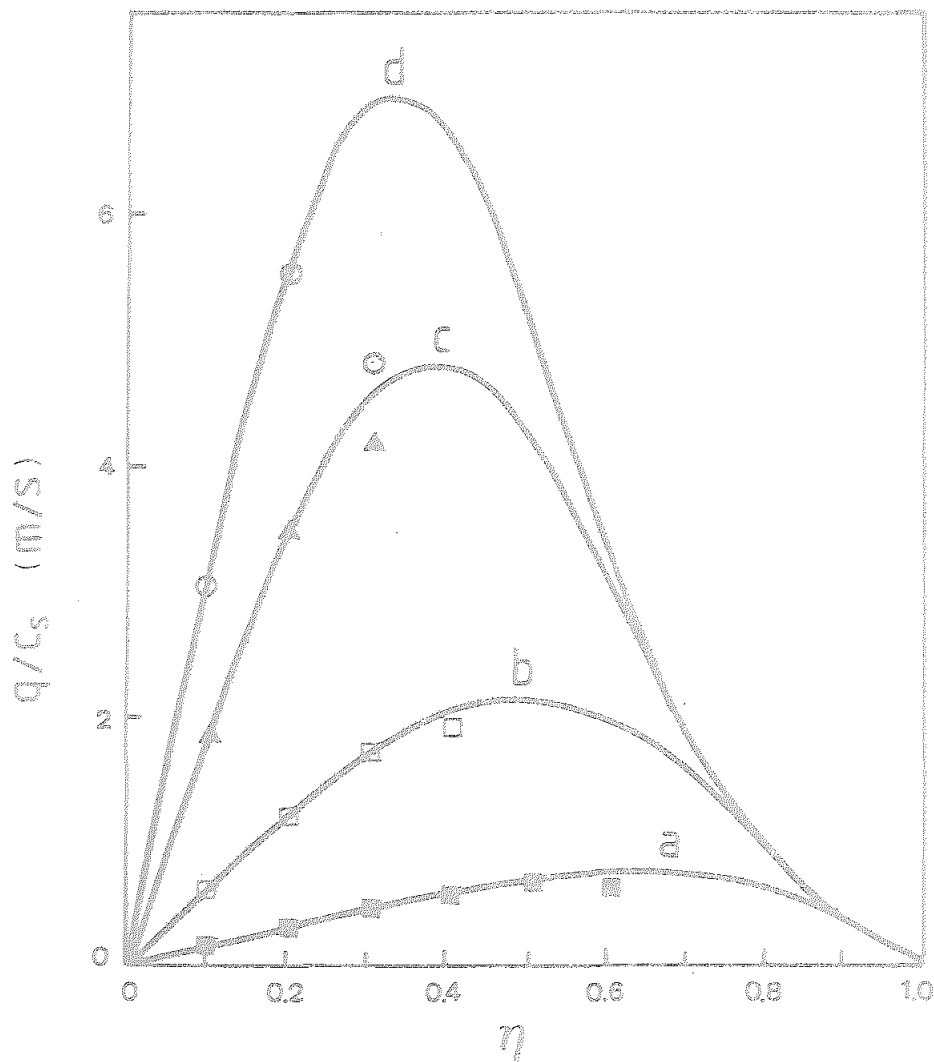


Fig. II.5 Flujo normalizado q/c_s frente a la concentración normalizada $\eta = c/c_s$ para el modelo exponencial (II.50) propuesto por Prigogine. Se representan diferentes velocidades deseadas medias (curva a, $v_0=1.5\text{m/s}$; curva b, $v_0=6.1\text{m/s}$; curva c, $v_0=18.3\text{m/s}$; curva d, $v_0=30.5\text{m/s}$). Los símbolos corresponden a valores obtenidos mediante la aproximación gaussiana. Se toma $\tau c_s = 0.33\text{s/m}$.

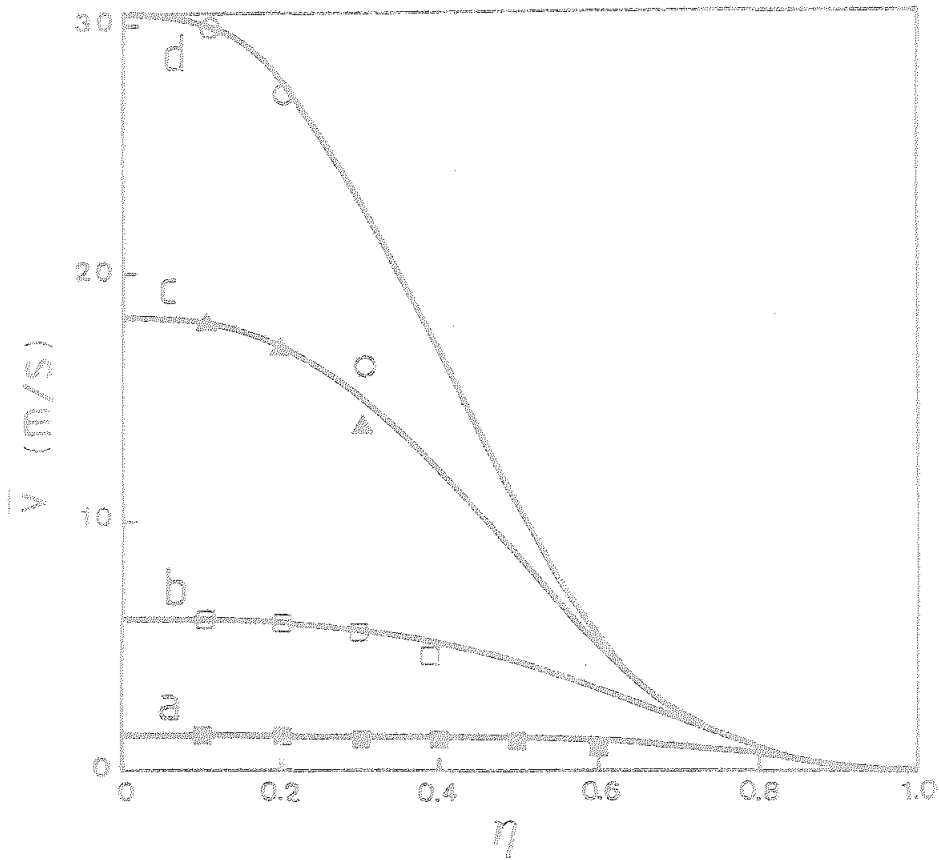


Fig. II.6 Dependencia de la concentración con la velocidad media para el modelo exponencial (II.50) para diferentes velocidades medias deseadas (las curvas corresponden a los mismos valores de la velocidad que en la figura anterior). Los símbolos representan el comportamiento en la aproximación gaussiana. Se toma igualmente $\tau c_s = 0.33 \text{ s/m}$.

La consecuencia principal de la discusión que hemos llevado a cabo en este apartado es que en el modelo de ecuación cinética de Prigogine la evolución de los momentos más bajos de la velocidad, que son los relevantes experimentalmente, está fuertemente afectada por los valores de los momentos mayores, que son experimentalmente inaccesibles. Dicho en otras palabras la explicitación del modelo de ecuación cinética requiere una cantidad de información experimental, para la medida indirecta de la función de distribución deseada, que parece inalcanzable en la práctica. Esta es una de las razones que nos ha llevado a formular los modelos de simulación que discutiremos en los apartados siguientes.

III SIMULACION DEL PROBLEMA DEL TRAFICO
EN EL ORDENADOR

III.1 INTRODUCCION

Los modelos analíticos que hemos discutido en el capítulo anterior son de indudable valor, y han permitido avanzar en el conocimiento de los factores y mecanismos que intervienen en el comportamiento del tráfico vial. Los modelos han llevado al establecimiento de ciertas normas fundamentales, alguna de las cuales han sido verificadas experimentalmente, al menos a un nivel cualitativo²⁰⁾. Por otro lado, la propia naturaleza de los modelos hace que no sean sino una imagen muy simplificada de lo que en realidad es un fenómeno muy complejo.

Si uno quiere mejorar la concordancia con los datos experimentales, es necesario introducir refinamientos así como agentes que han sido despreciados en las versiones primitivas de los modelos. Así, por ejemplo, si se quiere describir una línea de tráfico en la cual sean posibles los adelantamientos entre los coches, ha de completarse el modelo de seguimiento del líder con algún mecanismo que incorpore aquellos. En el extremo opuesto, el modelo de ecuación cinética que hemos discutido, y que contempla la posibilidad de adelantamientos, sólo describe la interacción a distancia entre los coches en una forma muy primaria. Aunque, desde luego, puede pensarse, e incluso llevarse a cabo una situación de "laboratorio" que corresponda a las condiciones de aplicabilidad de los modelos anteriores, es de desear disponer de otros modelos cuyo rango de validez sea mayor o esté más cerca de las condiciones usuales de tráfico.

Sin embargo, cuando se modifican en el sentido anterior, los modelos se vuelven prácticamente intratables a un nivel analítico. El desarrollo de los ordenadores de alta velocidad ha llevado no solo a una mayor posibilidad de cálculo numé-

rico sino también a la aparición de un nuevo concepto de modelo. En efecto, se llevan a cabo en la actualidad numerosas simulaciones de sistemas en ordenador. La idea no es resolver un modelo analítico sino reproducir aquellos aspectos considerados relevantes de un sistema real. Como ha escrito John McLeod²¹⁾.

El modelado mediante ordenador consiste en la programación del mismo de forma que exhiba ciertas características seleccionadas similares a las de una situación real, o al menos hipotéticamente real.

La dificultad más importante que presenta la simulación de un problema de tráfico proviene del hecho de que se trata, en general, de un supersistema compuesto por un gran número de sistemas interactivos. Esta es una situación que se presenta con gran frecuencia en los problemas físicos y en particular en aquellos que se refieren a propiedades de los flujos. En este contexto se ha desarrollado una técnica de simulación en ordenador que se conoce con el nombre de dinámica molecular²²⁾. Nuestro objetivo, en este capítulo, es adaptar esta técnica y aplicarla a ciertos modelos de tráfico vial.

Una de las características de la simulación en ordenador es que permite abordar también procesos dinámicos de evolución de la línea de tráfico, es decir, situaciones no estacionarias. Así por ejemplo puede estudiarse la relajación hacia el comportamiento estacionario desde una situación inicial dada o la propagación de una perturbación producida en un cierto instante.

En los apartados siguientes consideraremos varios

modelos de simulación por ordenador, y discutiremos su rango de aplicabilidad así como su relación con los modelos analíticos.

III.2 SIMULACION DE UN MODELO DE SEGUIMIENTO

El primer modelo cuya simulación en ordenador vamos a considerar es el modelo de seguimiento del líder discutido en el apartado II.2. Aunque hemos visto que este modelo tiene solución analítica su simulación en ordenador resulta interesante por varias razones. En primer lugar nos servirá como test de las técnicas que utilizaremos, al permitirnos comparar los resultados analíticos con los obtenidos mediante simulación. Por otro lado, nos permitirá analizar con detalle los efectos dinámicos y comprender mejor los mecanismos que llevan a la solución estacionaria obtenida analíticamente.

Consideremos una línea de tráfico compuesta por N vehículos cada uno de los cuales obedece a una ecuación de movimiento de la forma

$$a_j(t) = \lambda_0 \left[\frac{V_{j-1}(t) - V_j(t)}{X_{j-1}(t) - X_j(t)} \right] ; \quad j = 1, \dots, N \quad (\text{III.1})$$

es decir la Ec. (II.6) con $\Delta = 0$. La notación utilizada es la misma que en el apartado II.2.

Para la simulación hemos considerado que existe un coche adicional que encabeza la línea de tráfico y que juega un auténtico papel de líder, de manera que su velocidad evoluciona en el tiempo de acuerdo con una ley establecida. Dicho coche no obedece, por tanto, las ecuaciones (III.1) y no se tendrá en cuenta al evaluar las propiedades medias de la línea.

Su única misión es producir la evolución temporal de los coches que le siguen al influir sobre los mismos según la ley de seguimiento. Para obtener la evolución de los restantes coches se resuelve el sistema de N ecuaciones diferenciales (III.1) utilizando un método numérico sobre intervalos de tiempo Δt , a partir de una situación inicial dada. El método que hemos utilizado ha consistido en una combinación del método de R-K de segundo orden con un método de Corrección-Predicción. El programa empleado se describe brevemente en el apéndice A. Después de cada paso de tiempo se calculan los valores medios de la velocidad y de la concentración definida por las ecuaciones (II.10) y (II.11).

Como primer test de fiabilidad del algoritmo numérico empleado hemos verificado que la variable dinámica definida en la Ec. (II.12) es realmente una constante del movimiento, es decir, permanece constante a lo largo de toda la simulación. Sin embargo, sí que varían los valores de la velocidad y la densidad o, si se quiere, del flujo y la concentración. De acuerdo con la discusión que realizamos en el capítulo II, es claro que todos los pares de valores que se van obteniendo a lo largo de la evolución temporal corresponden a una curva de estado del tráfico. La ecuación de estas curvas es (II.16), es decir,

$$\frac{q(t)}{\lambda_0 C_s} = \frac{c(t)}{C_s} \ln \left[\frac{C_s}{c(t)} \right] \quad (\text{III.2})$$

Resulta entonces que si tomamos como variables reducidas $y = \frac{q(t)}{\lambda_0 C_s}$ y $x = \frac{c(t)}{C_s}$ se tiene una curva de estado universal independiente de los valores de λ_0 y C_s .

En la Fig. III.1 se presentan los resultados obtenidos en la simulación numérica y se compara con la curva teórica exacta. Hay que hacer notar que en la simulación a partir de unas ciertas condiciones iniciales con una velocidad constante del coche líder, el punto que describe al sistema solo recorre una parte pequeña de la curva de estado antes de alcanzar la situación estacionaria. Por ello es necesario en este caso utilizar distintas condiciones iniciales para reconstruir toda la curva teórica. Otra posibilidad es, desde luego, dotar al coche líder de una velocidad variable en el tiempo escogida de tal forma que la velocidad media de la línea recorra todo el rango de valores.

Existe, no obstante una importante diferencia conceptual entre el modelo de seguimiento formulado en el ordenador y el modelo de seguimiento tal y como es entendido usualmente en la teoría de tráfico. En dicha teoría uno considera por definición estados o situaciones estacionarias caracterizados por los valores de λ_0 y C_s . Dicho de otro modo, para valores dados de λ_0 y de C_s a cada valor de concentración corresponde un único valor de flujo, describiendo ambos un estado estacionario. Por el contrario, en nuestra simulación el sistema solo está en un estado estacionario después de un cierto tiempo de relajación. Esta diferencia proviene de lo siguiente. En los modelos de tráfico se admite que λ_0 y C_s no tienen el carácter de condiciones iniciales sino que caracterizan unas condiciones físicas de tráfico. Por ejemplo, los de un cierto puente o tunel a una cierta hora. Solo son posibles estados estacionarios que correspondan a esos valores. Por el contrario en la simulación en ordenador λ_0 y C_s vienen dadas por las condiciones iniciales y son en principio totalmente arbitrarias.

Una posibilidad que ofrece el modelado en ordenador es el estudio de fenómenos de relajación y de propagación de

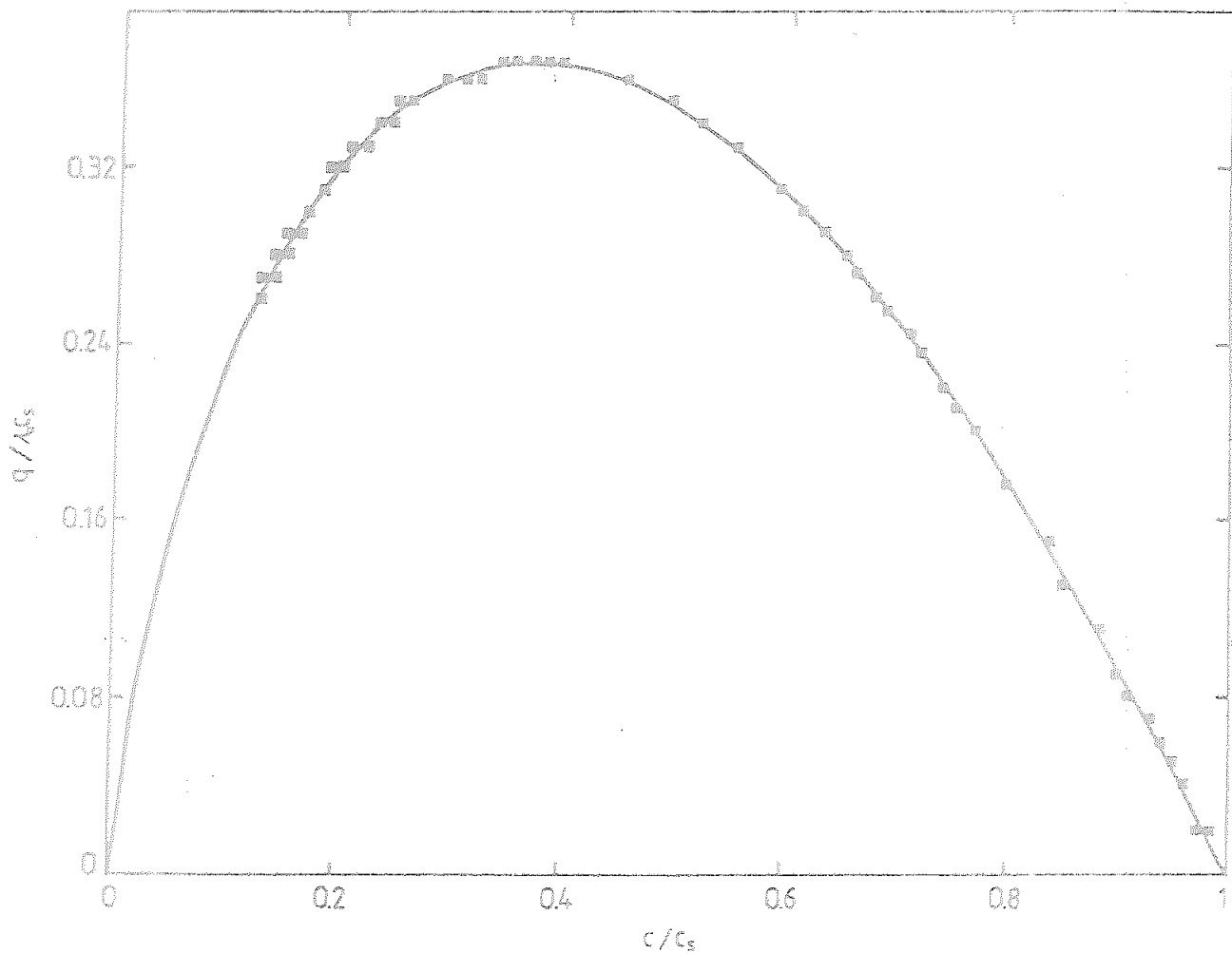


Fig. III.1 Comparación de los resultados obtenidos mediante simulación numérica (símbolos ■), con la curva de estado teórica exacta (III.2). En la simulación se ha tomado $M=25$.

perturbaciones. Como un ejemplo, hemos analizado la propagación y decaimiento en la línea de tráfico de una perturbación en velocidad generada en ella. Partimos de un estado inicial homogéneo en que todos los coches tienen la misma velocidad v_0 y están igualmente espaciados. En el instante $t=0$ la velocidad del coche líder es perturbada de manera que

$$V_0(t) = (V(0) + t) e^{-\beta t} \quad (\text{III.3})$$

En la Fig. III.2 se representa la evolución temporal de las velocidades de algunos coches de la línea. Se observa como la perturbación que podemos caracterizar por el valor máximo de la velocidad se va propagando a través de los coches, al mismo tiempo que se va atenuando. A fin de tener una imagen más global, en la Fig. III.3 representamos las velocidades de todos los coches para distintos instantes de tiempo. Sobre la figura puede realizarse una estimación de la velocidad de propagación del máximo de la perturbación obteniéndose 0.3 coches/s. No nos detenemos más en el análisis de estos resultados, que no constituyen el objetivo fundamental de esta tesis aunque, desde luego, sería interesante abordar un estudio sistemático de estos fenómenos.

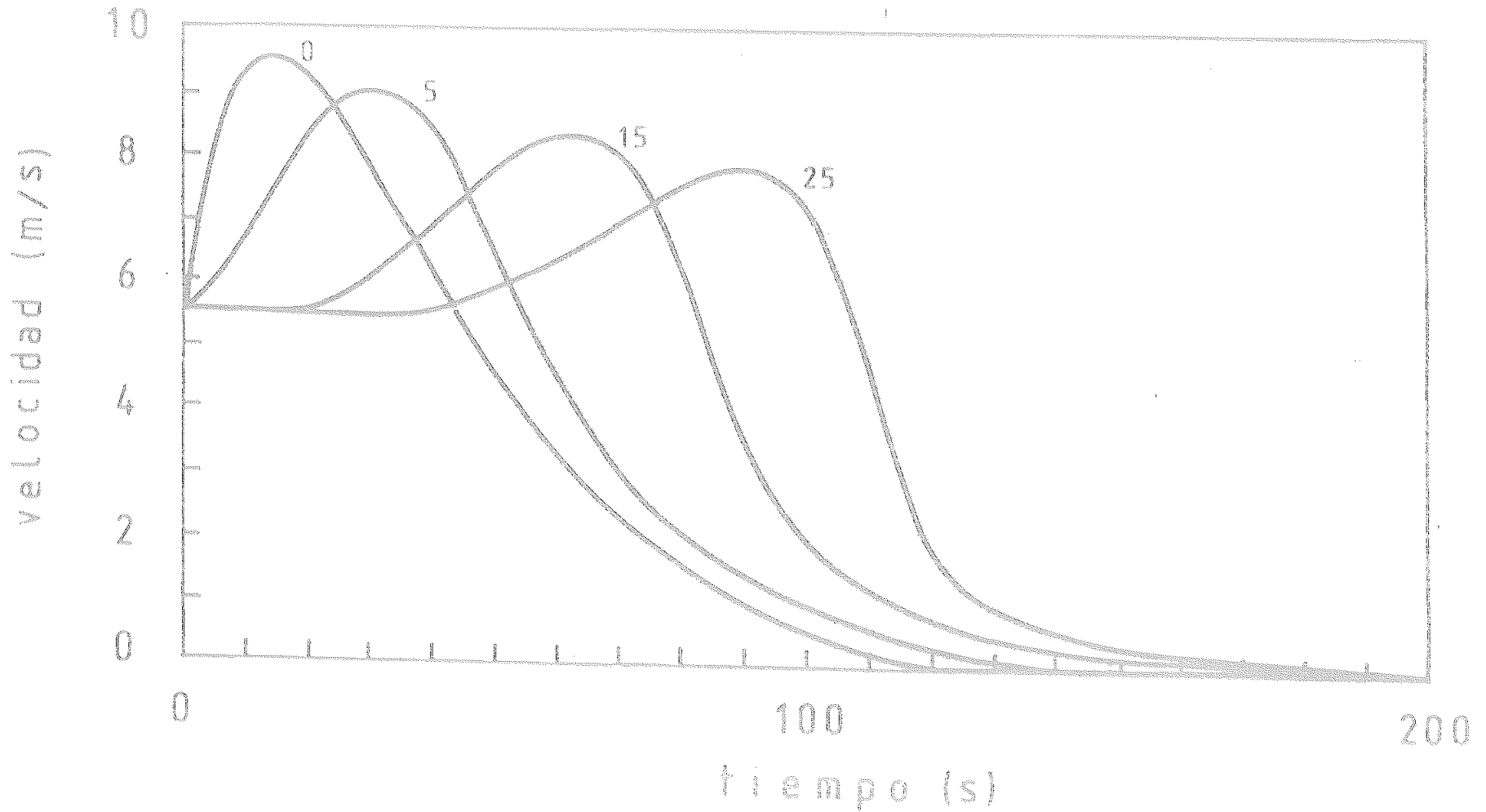
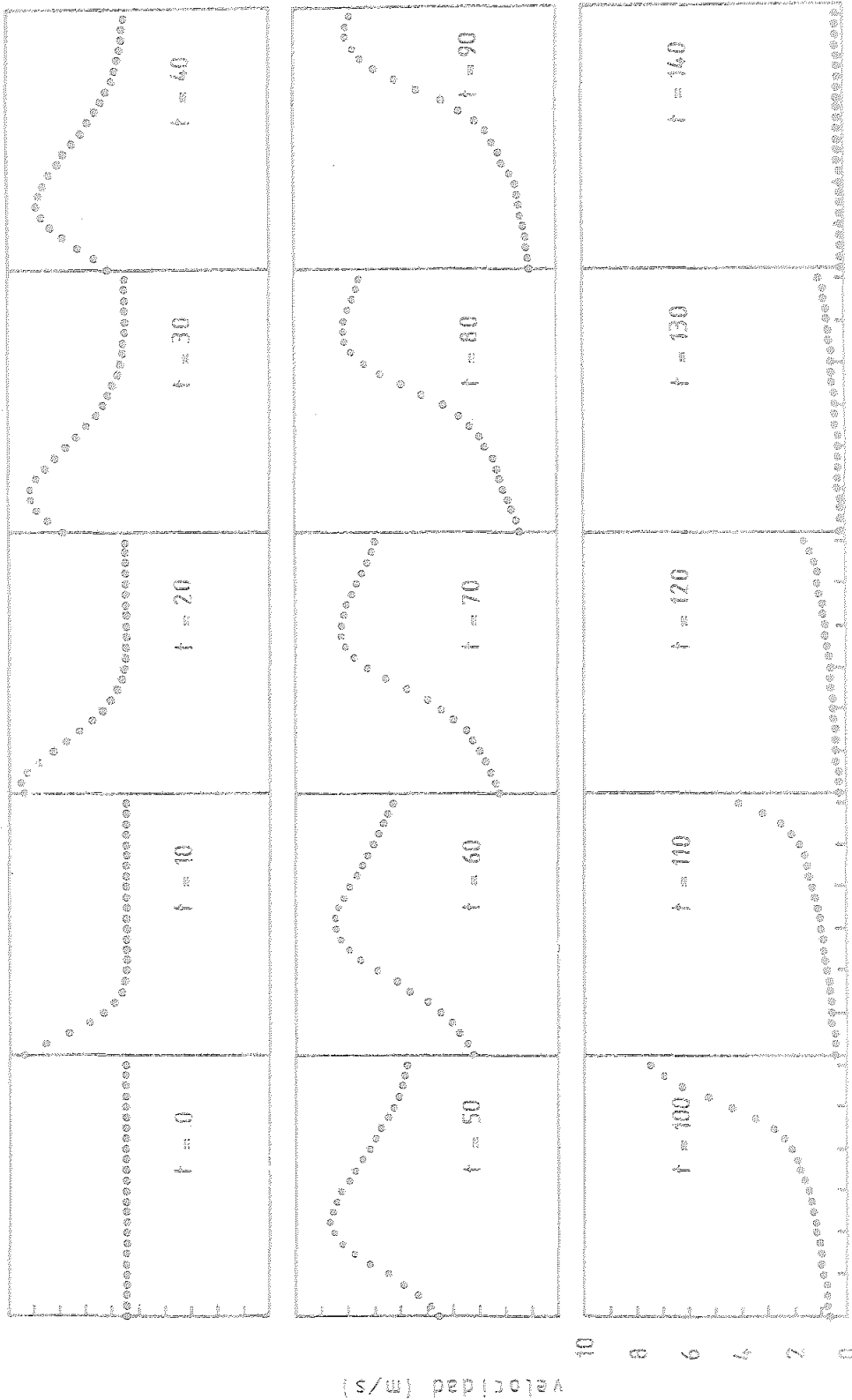


Fig. III.2 Representación de la evolución de la velocidad para el coche líder (0) y otros coches de la línea ($j=5, 15$ y 25).



situación en la línea

Fig. III.3 Evolución de la distribución espacial de velocidades en el caso de un coche líder con la ley (III.3)

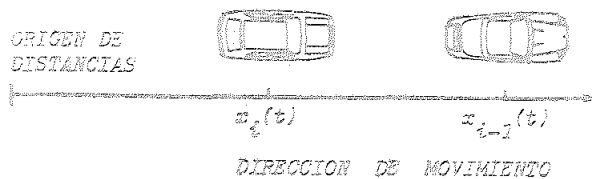
III.3 MODELO DE SEGUIMIENTO CON ADELANTAMIENTO

Como ya hemos discutido, una de las principales limitaciones del modelo de seguimiento del líder proviene del hecho de que no contempla la posibilidad de adelantamientos entre los vehículos. Esto restringe su aplicación práctica a situaciones reales muy especiales, concretamente a situaciones en que la densidad del tráfico o las características físicas de la carretera hagan imposible la realización de adelantamientos.

Por lo anterior, resulta evidente el interés de ampliar el modelo de seguimiento, de manera que tenga en cuenta los efectos que sobre el comportamiento de una línea de tráfico tienen los adelantamientos entre vehículos. El modelo que se presenta aquí introduce un algoritmo de adelantamiento gobernado por dos parámetros, uno, P , midiendo la probabilidad de que se produzca un adelantamiento y otro, D_s , representando una distancia de seguridad. Ambos conceptos serán analizados a continuación.

Consideremos una línea de tráfico como la descrita en el apartado anterior en la que cada uno de los vehículos obedece, en principio, las ecuaciones del movimiento (III.1). Estas ecuaciones se resuelven numéricamente considerando intervalos de tiempo Δt tal y como hemos descrito en el apéndice A. Supongamos que en un cierto instante t la velocidad del coche i , v_i , es mayor que la del que le precede v_{i-1} . Se admite entonces que existe una probabilidad, P , de que durante el siguiente intervalo de tiempo Δt el coche i se mueva con velocidad constante v_i y no obedezca a las ecuaciones de seguimiento. En la práctica la probabilidad P se introduce mediante un número aleatorio tal y como se muestra en el apéndice B.

Con sólo el mecanismo que acabamos de discutir el modelo presenta dificultades que son fácilmente previsibles. En efecto, es posible que un coche a mayor velocidad que el que le precede se aproxime a éste a velocidad constante, situándose tan próximo como queramos. Si, a continuación, resulta que dicho coche ha de moverse de acuerdo con la ley de seguimiento aparece una fuerza efectiva fuertemente repulsiva que lleva a un comportamiento singular y no físico del modelo. Para obviar esta dificultad hemos introducido el concepto de distancia de seguridad D_s , de manera que cuando un coche se encuentra a una distancia del coche anterior menor que la distancia de seguridad se mueve siempre por definición con velocidad constante. El mecanismo completo de interacción incluyendo el adelantamiento se representa en la Fig. III.4.



$$[x_{i-1}(t) - x_i(t)] < D_s \implies x_i(t+\Delta t) = x_i(t) + v_i(t) \Delta t$$

$$[x_{i-1}(t) - x_i(t)] \geq D_s \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{l} [v_{i-1}(t) - v_i(t)] > 0 \implies \text{El coche } i \text{ se mueve} \\ \text{entre } t \text{ y } t+\Delta t \text{ por} \\ \text{SEGUIMIENTO} \\ \\ [v_{i-1}(t) - v_i(t)] \leq 0 \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Prob. } = 1-P \implies \\ \text{SEGUIMIENTO} \\ \\ \text{Prob. } = P \implies \\ x_i(t+\Delta t) = x_i(t) + v_i(t) \Delta t \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Fig. III.4 Mecanismo de interacción en el modelo de Seguimiento con Adelantamiento.

Es fácil y atractivo relacionar la distancia de seguridad D_s con los procesos reales de adelantamiento. En la práctica, y por término medio, dos coches no se aproximan a distancias menores que una dada a no ser que vayan a adelantarse y, en este caso, la velocidad del coche que adelanta se vuelve independientemente (aunque superior) de la del coche adelantado.

Un hecho característico que aparece al introducir mecanismos de adelantamiento es que el coche que inicialmente era el primero pierde el papel de líder al poder ser adelantado por los que le siguen. No tiene sentido ya, por tanto, el postular una ley de evolución de la velocidad de un coche dado. Podría admitirse, por ejemplo, que el coche que va el primero se mueve siempre con una cierta velocidad, independientemente de cual sea. Sin embargo, esto introduce unas condiciones de contorno que hacen al modelo fuertemente dependiente de la dimensión del sistema y de las condiciones iniciales. Por ello, nosotros hemos considerado una "línea cerrada" de tráfico de tal forma que todo coche precede y sigue a otros dos. Es como si los coches describiesen una carretera con forma de circunferencia.

Es importante hacer notar que la introducción de dichas condiciones de contorno no altera en ningún sentido el resultado analítico obtenido en el apartado II.2 para una línea encabezada por un líder. En efecto consideremos N vehículos en una línea de tal forma que el vehículo caracterizado por el subíndice 1 siga al vehículo N . Es necesario, entonces, modificar las ecuaciones (II.6) introduciendo una nueva que tenga en cuenta este seguimiento. Escribiremos:

$$\dot{V}_1(t) = \lambda_0 \frac{V_N(t) - V_1(t)}{X_N(t) - X_1(t)}$$

(III.4)

$$\dot{V}_j(t) = \lambda_0 \frac{V_{j-1}(t) - V_j(t)}{X_{j-1}(t) - X_j(t)} \quad , \quad j = 2, \dots, N$$

donde por simplicidad se ha hecho $\Delta = 0$. Integrando, entonces las ecuaciones (III.4) se obtiene

$$V_1(t) - \lambda_0 \ln(X_N(t) - X_1(t)) = V_1(t') - \lambda_0 \ln(X_N(t') - X_1(t')) = cte$$

(III.5)

$$V_j(t) - \lambda_0 \ln(X_{j-1}(t) - X_j(t)) = V_j(t') - \lambda_0 \ln(X_{j-1}(t') - X_j(t')) = cte$$

definiendo ahora el espaciado relativo entre dos coches sucesivos como

$$d_1(t) = X_N(t) - X_1(t)$$

(III.6)

$$d_j(t) = X_{j-1}(t) - X_j(t) \quad ; \quad j = 2, \dots, N$$

puede escribirse las ecuaciones (III.5) en la forma

$$v_j(t) - \lambda_0 \ln d_j(t) = cte \quad ; \quad j = 1, \dots, N \quad (III.7)$$

lo que nos lleva directamente al igual que en el apartado (II.2) a la ecuación de estado (II.12).

Vamos a comenzar por analizar a un nivel puramente cualitativo cual es la influencia que se espera que tenga sobre el comportamiento del tráfico, la existencia de un mecanismo de adelantamiento como el que acabamos de describir. Supongamos que partimos de una distribución dada por las posiciones y velocidades de los coches y seguimos su evolución en el tiempo. Al cabo de un cierto intervalo el sistema alcanzará un estado estacionario caracterizado por valores constantes en el tiempo del flujo y la concentración. En este estado estacionario, es de esperar que los coches se mantengan a distancias mayores que la de seguridad, pues en otro caso entraría en juego el mecanismo de adelantamiento y se producirían fenómenos transitorios. Así pues, llegamos a la conclusión de que en el estado

estacionario la dinámica de los coches viene regida por la ley de seguimiento pura y por lo tanto obedecerá una ecuación de estado de la forma

$$\bar{v} + \lambda_0 \ln \bar{c} = K$$

(III.8)

¿Cuál es entonces el efecto de los adelantamientos? modificar a lo largo del régimen transitorio el valor de la constante K . A un nivel puramente intuitivo parece lógico esperar que una probabilidad de adelantamiento produzca un aumento de la constante, de manera que para un valor dado de la concentración el flujo estacionario que se alcance sea tanto mayor cuanto mayor sea P .

Por otro lado la influencia del mecanismo de adelantamiento dependerá de cual sea el número de interacciones reales de este tipo que tengan lugar en la línea. Es fácil entrever que para un valor dado de P el número de adelantamientos que tienen lugar debe aumentar con la concentración. En otras palabras la variación de K debida a los adelantamientos debe ser tanto mas acusada cuanto mayor sea la probabilidad P y la concentración c .

Para poner las anteriores ideas a un nivel cuantitativo hemos realizado una serie de "experiencias" con un valor dado de la constante K para distintos valores de la probabilidad de adelantar P . Además en cada caso se consideraron distintas concentraciones iniciales. En todas las simulaciones las velocidades de los coches obedecían inicialmente una ley lineal de manera que la velocidad del coche i venía dada por

$$v_i = \bar{v} - \frac{N+1}{2} \operatorname{tg} \psi + i \operatorname{tg} \psi \quad (\text{III.9})$$

donde N es impar y \bar{v} y $\operatorname{tg} \psi$ son parámetros dados. Hay que señalar que todas las experiencias se realizaron con 25 coches y que la densidad se hizo variar modificando la longitud de la circunferencia que recorrían.

Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla III.1 y en la Fig. III.5. En todos los casos el valor inicial de la constante era $K_0 = -18.46$. En las simulaciones con $P=0$ tomamos $D_s = 0$ de manera que corresponde a un seguimiento puro. En todos los demás casos era $D_s = 4m$. Observamos en primer lugar en la tabla como el valor estacionario final de la constante K_{st} disminuye con P y, para un valor dado de P aumenta con C , todo ello de acuerdo con la discusión anterior. Sin embargo, la influencia de la concentración es muy pequeña excepto para valores grandes de P . Esta es la razón por la que las curvas $P = \text{cte}$ representadas en la Fig. III.5 muestran el mismo comportamiento que las de la Fig. III.1, es decir, obedecen a la Ec. (III.8).

Es fácil interpretar los anteriores resultados en términos de tráfico real. Sea una línea estacionaria de tráfico que transcurre por una zona en la que no son posibles los adelantamientos, e imaginemos que en un cierto momento las características de la ruta cambian haciéndolos posibles. Los coches se reorganizan entonces de manera que su flujo aumenta. Este aumento es tanto mayor cuanto mayores sean las "facilidades" que los vehículos encuentren para adelantar. Finalmente, una vez "acomodados" los coches, se llega a un nuevo estado estaciona-

TABLE III. 2

P	σ_0	0.013	0.014	0.017	0.020	0.025	0.029	0.033	0.040	0.050	0.067	0.071	0.083	0.100
0	c_{st}	0.013	0.015	0.018	0.021	0.027	0.031	0.036	0.043	0.054	0.072	0.077	0.090	
	v_{st}	16.029	14.935	13.711	12.252	10.469	9.400	8.167	6.708	4.923	2.622	2.070	0.836	
	k_{st}	-18.466	-18.466	-18.466	-18.466	-18.466	-18.466	-18.466	-18.466	-18.466	-18.466	-18.466	-18.466	-18.466
0.2	c_{st}	0.014	0.016	0.018	0.022	0.027	0.031	0.036	0.044	0.055	0.073	0.078	0.091	0.109
	v_{st}	17.426	16.399	15.165	13.713	11.934	10.863	9.634	8.174	6.391	4.070	3.525	2.293	0.886
	k_{st}	-16.921	-16.907	-16.901	-16.897	-16.893	-16.893	-16.886	-16.894	-16.884	-16.901	-16.886	-16.885	-16.854
0.4	c_{st}	0.014	0.016	0.019	0.022	0.028	0.032	0.037	0.045	0.056	0.074	0.079	0.092	0.109
	v_{st}	18.677	17.605	16.380	14.929	13.151	12.078	10.855	9.388	7.604	5.300	4.758	3.561	2.186
	k_{st}	-15.500	-15.484	-15.486	-15.471	-15.479	-15.485	-15.465	-15.483	-15.478	-15.488	-15.489	-15.499	-15.510
0.6	c_{st}	0.015	0.017	0.020	0.024	0.030	0.034	0.040	0.048	0.059	0.077	0.082	0.094	0.110
	v_{st}	19.598	18.529	17.299	15.840	14.052	12.986	11.754	10.292	8.514	6.211	5.678	4.466	3.059
	k_{st}	-14.082	-14.074	-14.078	-14.073	-14.069	-14.080	-14.070	-14.052	-14.142	-14.316	-14.317	-14.442	-14.570
0.8	c_{st}	0.018	0.021	0.024	0.029	0.036	0.040	0.046	0.054	0.066	0.084	0.088	0.100	0.115
	v_{st}	20.449	19.384	18.152	16.702	14.905	13.840	12.613	11.159	9.349	7.079	6.526	5.322	3.861
	k_{st}	-11.509	-11.565	-11.634	-11.663	-11.740	-11.835	-11.965	-12.123	-12.402	-12.783	-12.907	-13.124	-13.418

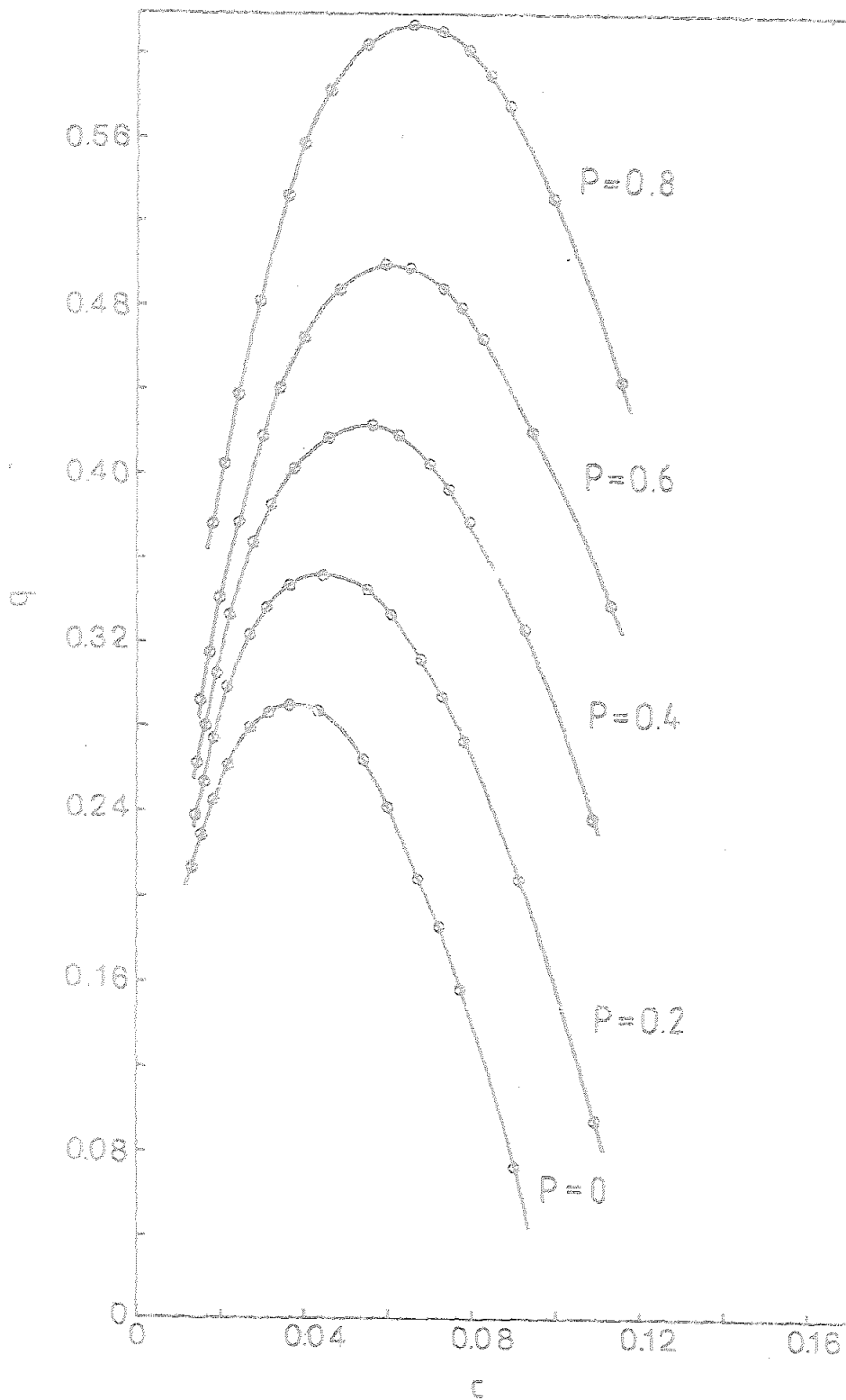


Fig. III.5 Flujo estacionario q (coches/s) frente a concentración c (coches/m) para diferentes valores de la P . En todas las experiencias las condiciones iniciales cumplen (III.8) y (III.9) con $\lambda_0=8\text{m/s}$ y $\psi=23$.

ric. Estos resultados ponen de manifiesto la gran utilidad que tiene el introducir periódicamente tramos de doble carril en vías que mayoritariamente tienen un carril único en cada sentido.

III.4 MODELO CINETICO CON VELOCIDAD DESEADA

III.4.1 Descripción del modelo

A pesar del buen acuerdo entre ciertas experiencias y los modelos de seguimiento del líder (véase la Fig. II.1 y los comentarios allí efectuados), no hay que olvidar que dichos modelos contienen un conjunto de parámetros que se ajustan a posteriori, a partir de los datos experimentales. Además estos modelos conducen a resultados cualitativamente correctos, pero que corresponden a líneas reales de tráfico muy concretas, a saber, líneas cuyas características puedan ser controladas por el experimentador. Un punto importante a discutir sería si un modelo basado en un mecanismo de seguimiento daría buenos resultados al aplicarlo a líneas de tráfico más generales. Pensamos que, en general, no sería así, ya que el mecanismo de seguimiento describe situaciones en las que los conductores se ven forzados a realizar un tipo muy particular de conducción. Tal puede ser el caso en túneles, puentes o vías de una dirección en condiciones de concentración alta. En situaciones más generales, es de esperar, de acuerdo con las ideas de Prigogine, que aparezca un nuevo mecanismo dominante en el comportamiento de los conductores. Este mecanismo, al que hemos llamado de relajación, no depende en principio de la presencia de los demás vehículos en la línea. Refleja los deseos individuales de cada conductor, que a su vez están influenciados por las características físicas de la vía, por ejemplo, el estado de la carretera, número y dificultad de las curvas, existencia de estrechamientos etc., así como por otras variables tales como el clima e iluminación. Además, refleja una característica intrínseca de cada conductor; lo que podríamos denominar "su forma de conducir".

El mecanismo anterior ha sido introducido en la teoría de tráfico por Prigogine y colaboradores.¹⁷⁾ mediante el uso de la función de distribución de velocidades deseadas, en la ecuación cinética del tráfico de vehículos (II.32).

Como ya se ha hecho notar, el concepto de función de distribución de velocidad deseada es un instrumento poco útil desde el punto de vista práctico para el análisis de vías de tráfico. Ello es debido a que contiene, en principio, "demasiada información" sobre el deseo de los conductores en la línea. Es tentador, sin embargo, introducir dicha idea en un modelo de ordenador que tenga en cuenta como mecanismo dominante el efecto de relajación. En dicho modelo uno puede introducir a priori una hipótesis sobre la forma de la función de distribución de velocidades deseadas y estudiar las consecuencias de ésta elección. Esto nos permite plantear funciones de distribución de velocidades deseadas más generales que las empleadas por Prigogine, el cual se limita a funciones de distribución con un sólo parámetro.

En el modelo que vamos a introducir más adelante, asignamos mediante un sorteo ciertas velocidades deseadas a los coches de la línea, según una ley de probabilidad dada a priori. Estudiaremos el comportamiento medio de la línea al evolucionar y en el estado estacionario. Este modo de proceder, nos lleva a considerar sólo una pequeña parte de la información que pueda obtenerse mediante un planteamiento de ecuación cinética. Pensamos, sin embargo, que la parte retenida es precisamente la significativa a efectos prácticos. Por otro lado, una simulación de este tipo permite determinar razonablemente la función de distribución de velocidades de los coches en la línea en cada instante de tiempo, aunque sólo sea a un nivel cualitativo.

Para obtener las ecuaciones de movimiento de los vehículos de la línea utilizando las ideas anteriormente expuestas, es necesario establecer la dinámica de relajación hacia la velocidad deseada de cada coche en ausencia de todos los demás, es decir, como si estuviese solo en la vía. Esto debe

ser una buena aproximación para concentraciones suficientemente bajas. Parece que la forma más sencilla de modelar esta dinámica es aceptar que la relajación hacia la velocidad deseada es lineal, y caracterizada por una escala de tiempo que va a ser independiente de cual sea el vehículo concreto. Explícitamente tomamos:

$$\dot{v}_j(t) = \frac{-(v_j(t) - v_{oj})}{T} \quad ; \quad j = 1, \dots, N \quad (\text{III.10})$$

donde $v_j(t)$ es la velocidad instantánea del vehículo j , v_{oj} es su velocidad deseada y T es el tiempo característico de relajación hacia ésta. Sin embargo, dicha escala de tiempo T no debe ser independiente de la presencia de los demás coches en la línea. En efecto, es de esperar que si la concentración es alta cualquier mecanismo de interacción entre vehículos bloquee en forma muy efectiva la tendencia a relajarse hacia la velocidad deseada, haciendo, por lo tanto, aumentar el tiempo característico de relajación. Por otra parte, si la concentración es muy baja, cada vehículo podrá relajarse rápidamente a su velocidad deseada. La expresión concreta que adoptaremos para modelar esta dependencia del tiempo de relajación respecto de la concentración se discutirá más adelante.

Desde luego, como es evidente de nuestras consideraciones anteriores, si sólo se considera una dinámica de relajación para los coches de la línea, se llega a un estado estacionario en el que la velocidad media es la velocidad media deseada. Este sería el caso límite de concentración nula. Es necesario, por lo tanto, para dar cuenta del comportamiento de

la línea a concentraciones finitas, la introducción de un término de interacción entre vehículos. Hemos modelado dicho término de interacción mediante un algoritmo de adelantamiento que controla, en cierta medida, el mecanismo de relajación.

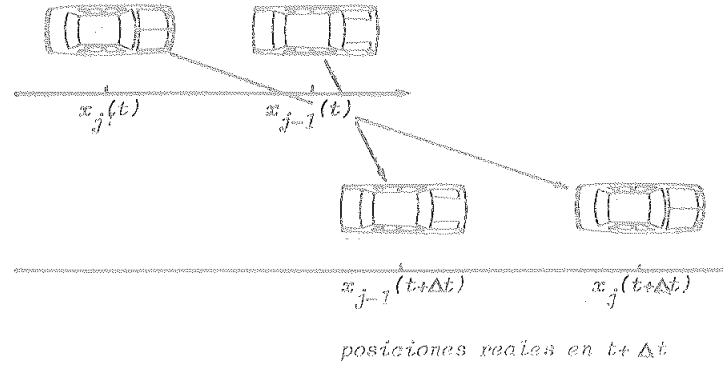
Supongamos que un coche de la línea de tráfico tiene una velocidad deseada mayor que el que le precede. Si sólo actuase el mecanismo de relajación el primer coche sería, antes o después, rebasado por el que le sigue. En nuestro modelo, esto no va a ser así. Los adelantamientos van a ocurrir con una cierta probabilidad P . Dicho de otro modo, si al aplicar las ecuaciones del modelo el coche j resulta que ha rebasado al coche $j-1$ en el intervalo de tiempo comprendido entre t y $t + \Delta t$, el coche j sólo es desplazado y modificada su velocidad de acuerdo con las ecuaciones, con una probabilidad P . En el caso de que resulte que el adelantamiento no se produce, como consecuencia de este carácter probabilístico, al coche que lo ha intentado se le asignará una velocidad igual a la del coche que le precede. Además su nueva posición viene dada por

$$X_j(t + \Delta t) = \frac{X_{j-1}(t + \Delta t) - X_j(t)}{2} \quad (\text{III.11})$$

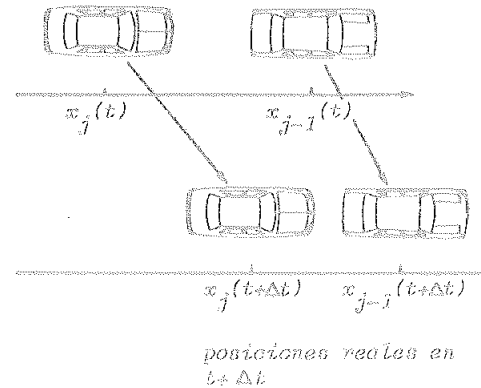
El mecanismo se representa esquemáticamente en la Fig. III.6 y el diagrama de flujo de la simulación numérica se describe brevemente en el apéndice C. Nótese que este modelo utiliza una ley de seguimiento instantáneo.

Naturalmente el vehículo de detrás intentará sucesivas veces el adelantamiento, hasta que pueda efectuarlo realmente. La mayor o menor facilidad con que esto se produce

SE PRODUCE ADELANTAMIENTO



NO SE PRODUCE ADELANTAMIENTO



$$\begin{cases} v_j(t+\Delta t) = v_{j-1}(t+\Delta t) \\ x_j(t+\Delta t) = \frac{1}{2}[x_{j-1}(t+\Delta t) + x_j(t)] \end{cases}$$

MOVIMIENTO SIN INTERACCION

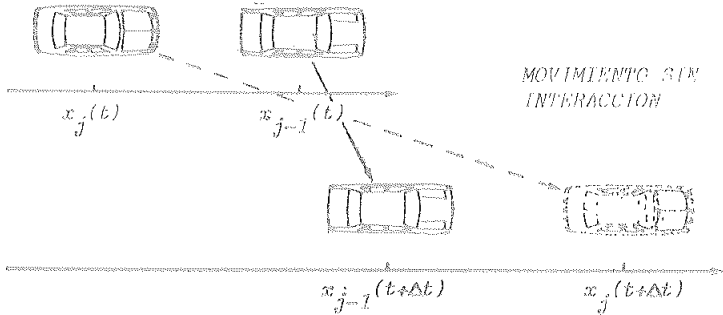


Fig. III.6 Mecanismo de interacción en el modelo Cinético con Velocidad Deseada

viene gobernada por la probabilidad de adelantamiento P . En el caso límite $P=0$ el modelo se reduce a un modelo de seguimiento, mientras que a $P=1$ los coches no intraccionan en la línea. Obviamente, debe haber una relación entre la probabilidad de adelantar y la concentración en la línea. Por otra parte, como el tiempo de relajación también depende de la concentración, podemos considerarlo como una función de la probabilidad de adelantar a P .

Siguiendo a Prigogine y colaboradores, hemos elegido una función muy sencilla para representar la dependencia de la probabilidad de adelantar con la concentración. Explícitamente admitimos:

$$P = 1 - c/c_s \quad (III.12)$$

Esta relación supone el admitir nuevamente que existe una cierta concentración en la línea, c_s , para la cual la probabilidad de adelantar se vuelve cero y por lo tanto se tiene seguimiento puro. A esta concentración la denominaremos "concentración de saturación", y será una de los parámetros que caractericen la vía de tráfico. Obsérvese que (III.12) lleva a $P=1$ en el límite $c \rightarrow 0$ lo que significa flujo libre.

Para caracterizar el tiempo de relajación en ausencia de interacciones de los vehículos de la línea elegiremos al igual que se hizo en (II.3.2) la relación

$$T = \frac{\tau c}{c_s - c} \quad (III.13)$$

donde Z es un tiempo característico independiente de la concentración.

Nótese que T tiende a infinito cuando c se acerca a la concentración de saturación, mostrando el mecanismo de bloqueo discutido anteriormente. Es conveniente basar nuestra discusión de los resultados del modelo directamente en términos de la probabilidad de adelantar P . Puede escribirse, entonces, T a partir de (III.12) y (III.13) como

$$T = \frac{z(1-P)}{P} \quad (\text{III.14})$$

Como ya se ha hecho notar, si la probabilidad de adelantar es distinta de cero los sucesivos intentos de adelantamiento de un coche acabaran llevando a que se produzca realmente. Esto tiene como efecto global que el único estado al que tiende una línea abierta de tráfico es aquel en que los coches quedan ordenados en orden decreciente de velocidades deseadas, y la concentración tiende monótonamente a cero. Para evitar este tipo de colapso en el modelo, es necesario introducir condiciones de contorno periódicas, o en otras palabras, líneas cerradas de tráfico. Con este tipo de condiciones, el coche de velocidad deseada mayor, una vez rebasados todos los coches que estaban por delante de él en la línea vuelve a ser introducido al final de ésta, volviendo a producirse una nueva secuencia de adelantamientos. Lo mismo le ocurre, evidentemente a los demás coches de la línea.

Es necesario, ahora, hacer algunas consideraciones en torno a la solución con ordenador del modelo que estamos describiendo en los casos límites de $P=0$ y $P=1$. El pri-

mer caso conduce a un tiempo de relajación infinito lo cual no nos permite obtener en nuestra simulación el estado estacionario. Como hemos discutido anteriormente este caso corresponde a un seguimiento puro, cuyo estudio puede hacerse mediante un modelo de seguimiento de líder.

Por otro lado, el límite $p=1$ corresponde al caso trivial de una relajación instantánea de cada coche a la velocidad deseada. Es en la zona $1 > p > 0$ donde es relevante la competencia entre el mecanismo de relajación y el de interacción y su influencia sobre el comportamiento global de la línea. En el apartado siguiente se analizan algunos resultados obtenidos.

III.4.2 Resultados: régimen transitorio

En este apartado presentamos los resultados obtenidos con el modelo cinético con velocidad deseada que acabamos de describir.

Desde un punto de vista práctico la especificación del modelo requiere la elección de una función de distribución de velocidades deseada. Dicha función de distribución se genera en el ordenador mediante un algoritmo que distribuye aleatoriamente entre los vehículos de la línea un conjunto de velocidades deseadas con una probabilidad dada por la ley elegida. En nuestro caso la línea consta de 500 vehículos y como primera distribución para las velocidades deseadas hemos considerado una ley exponencial. Esta elección corresponde a uno de los casos estudiados por Prigogine et al.¹⁷⁾ en su modelo de ecuación cinética. La expresión de la distribución viene dada por la ecuación (II.50) con $v_0=12.1$. En la Fig. III.7 se representa la distribución de velocidades deseada generada en el ordenador y se compara con la

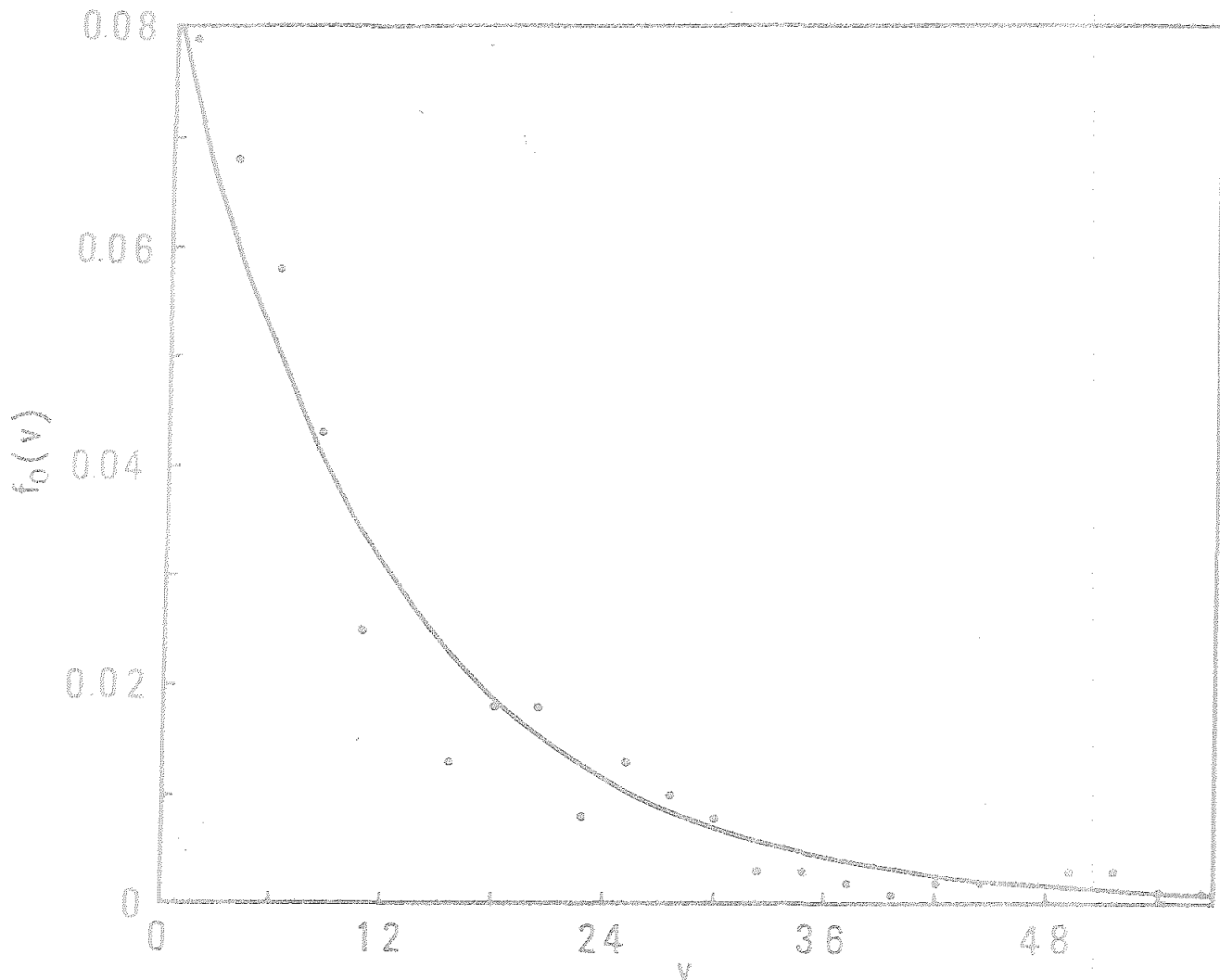


Fig. III.7 Comparación de la función de distribución deseada generada en la simulación con 500 vehículos (puntos) con la expresión teórica exacta (línea continua).

expresión teórica. Para representar la distribución generada, hemos discretizado la variable velocidad en intervalos $v=0.3$. Naturalmente la distribución obtenida, es sólo una aproximación de la expresión teórica. Esta aproximación podría mejorarse tomando una muestra de más vehículos, pero consideramos, a la vista de la Fig. III.7 que 500 es un número suficiente para nuestros propósitos.

Es necesario también especificar las condiciones iniciales tanto en posición como en velocidad de los vehículos de la línea. Para las experiencias que vamos a discutir a continuación, hemos elegido condiciones iniciales en las que todos los vehículos tienen la misma velocidad y se encuentran igualmente espaciados en la línea. La elección de un determinado valor de la concentración (número de vehículos por unidad de longitud de la línea) determina la probabilidad de adelantamiento a través de la relación (III.12), una vez que se ha dado los valores de los parámetros c_s y τ . Siguiendo a Prigogine hemos elegido para todas las simulaciones los valores $c_s = 0.16$ coches/m y $\tau = 2$ s.

En la Fig. III.8 se representa la evolución temporal de la velocidad media de los vehículos para diferentes velocidades iniciales, así como para diferentes probabilidades de adelantar (o lo que es lo mismo para diferentes concentraciones). La velocidad media se calcula como la media aritmética de las velocidades de los coches en cada instante de tiempo.

Para cada probabilidad de adelantamiento se han elegido velocidades iniciales por encima y por debajo de la velocidad deseada media \bar{v}_0 . Se observa en primer lugar que dada una probabilidad de adelantamiento, es decir: una concentración de vehículos, diferentes condiciones iniciales en velocidad

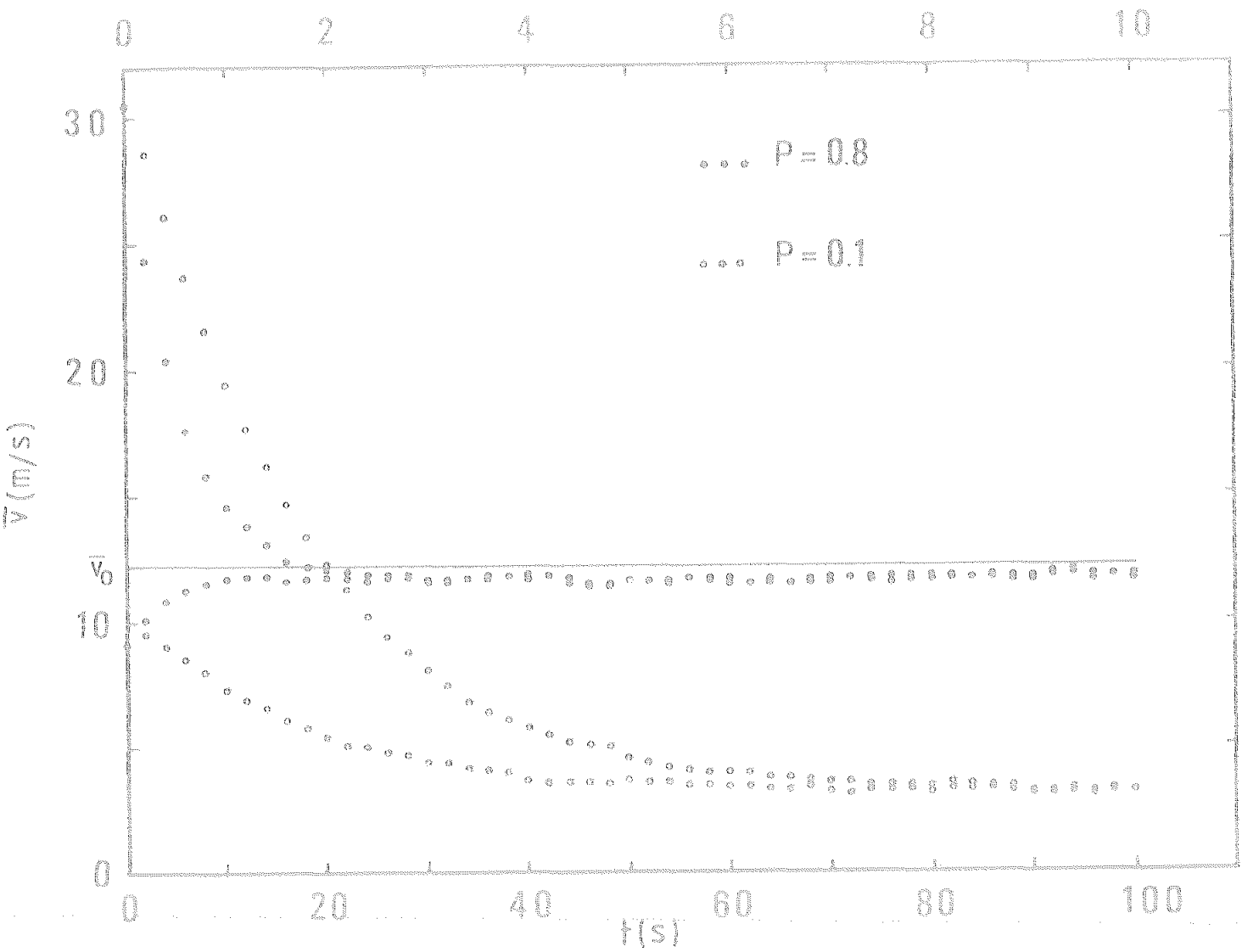


Fig. III. 8

Evolución temporal de la velocidad media, en el momento exponencial, para dos velocidades iniciales distintas de los coches (30.488m/s y 9.146m/s) y dos P distintas. La escala superior de tiempo corresponde a $P=0.8$ y la inferior a $P=0.1$

llevan a la misma velocidad media estacionaria \bar{v}_{st} . Así mismo, este valor estacionario es tanto más cercano a la velocidad media deseada \bar{v}_0 cuando mayor es P (menor c). Es decir, los adelantamientos favorecen la tendencia del sistema al "estado deseado". Se observa también que la relajación de la velocidad hacia el estado estacionario es tanto más lenta cuanto menor es P . Este efecto es fácil de entender cualitativamente. Si la probabilidad de adelantamiento es muy pequeña, sucederá, en primero lugar que los vehículos de velocidad alta se verán fuertemente frenados en su tendencia hacia sus velocidades deseadas como consecuencia de las interacciones. Además la propia relajación intrínseca de cada vehículo será más lenta al ser el tiempo de relajación directamente proporcional a la concentración. Esto llevará, por tanto, a transitorios mucho más largos. Obsérvese las distintas escalas de tiempo utilizadas en la figura para los dos casos $P=0.8$ y $P=0.1$.

A continuación, hemos considerado el mismo tipo de simulación pero con una distribución de velocidades deseada en la forma gaussiana,

$$f_0(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(v-v_0)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (\text{III.15})$$

con $v_0 = 12.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $\sigma^2 = 1.84$. La generación en el ordenador de esta distribución la hemos llevado a cabo utilizando la fórmula de Box-Müller²³⁾. La idea es generar la variable v mediante la expresión

$$v = \sqrt{2\sigma^2} \chi \quad (\text{III.16})$$

donde el valor de λ se obtiene a través de

$$\lambda = (-2 \ln \eta_1)^{1/2} \cos(2\pi \eta_2) \quad (\text{III.17})$$

siendo η_1 y η_2 dos números aleatorios independientes, distribuidos uniformemente en el intervalo $[0, 1]$. En la Fig. III.9 presentamos los resultados obtenidos. De nuevo hemos tomado $c_0 = 0.16$ coches/m y $\tau = 2$ s, y considerado que inicialmente todos los coches estaban igualmente espaciados y tenían la misma velocidad. El comportamiento cualitativo que se observa es claramente similar al del caso de una distribución deseada exponencial. Naturalmente los valores estacionarios de la velocidad obtenidos para un mismo valor de P , son distintos, para ambas distribuciones. Esto es debido, más que a la forma específica de las distribuciones, a ciertas peculiaridades de las mismas. Es evidente, que cuanto más aguda sea la distribución de velocidades deseada, menor será la influencia de los adelantamientos al tender los coches a ir prácticamente con la misma velocidad. En consecuencia, tanto menor será la diferencia entre \bar{v}_{st} y v_0 . En este sentido nuestra distribución gaussiana es más aguda que la distribución exponencial considerada anteriormente. Esto puede verse fácilmente calculando, por ejemplo, la varianza de ambas distribuciones. De nuevo insistimos en las diferentes escalas de tiempo utilizadas en la figura para $P = 0.1$ y $P = 0.8$.

Una duda natural que se plantea ahora, es la posible dependencia de nuestros resultados respecto de los detalles de las condiciones iniciales. Nos referimos concretamente a la distribución inicial de velocidades. Los resultados presentados hasta ahora corresponden todos ellos a una distribución inicial delta de Dirac, es decir,

$$f(v; t=0) = C \delta(v - \bar{v}(0)) \quad (\text{III.18})$$

donde C es una constante de normalización y $\bar{v}(0)$ la velocidad inicial considerada para todos los coches.

Intuitivamente, uno espera que la evolución para tiempos cortos (régimen transitorio) dependa fuertemente de los detalles de la distribución inicial de velocidades, pero que esta influencia vaya disminuyendo al aumentar el tiempo. Asintóticamente, y en el régimen estacionario, el valor de la velocidad v_{st} debe ser independiente de la forma de $f(v; t=0)$ y, a la vista de los resultados anteriores, ni siquiera debe depender del valor medio inicial de la velocidad.

Para comprobar la veracidad de los argumentos anteriores, hemos realizado una simulación correspondiendo a unas condiciones iniciales en que 50 coches tenían una velocidad dada, mientras que los 450 restantes tenían otra velocidad distinta.

$$f(v; t=0) = C [50 \delta(v - v_1(0)) + 450 \delta(v - v_2(0))] \quad (\text{III.19})$$

Concretamente nosotros hemos tomado $v_1(0) = 20.488$ m/s y $v_2(0) = 31.599$ de tal modo que la velocidad media inicial vuelve a ser $\bar{v}(0) = 30.488$ m/s. Los valores de los restantes parámetros son los mismos que en la Fig. III.9. Los resultados obtenidos, que se dan en la Fig. III.10 muestran como, dentro de la precisión que estamos manejando, el valor de la velocidad media estacionaria

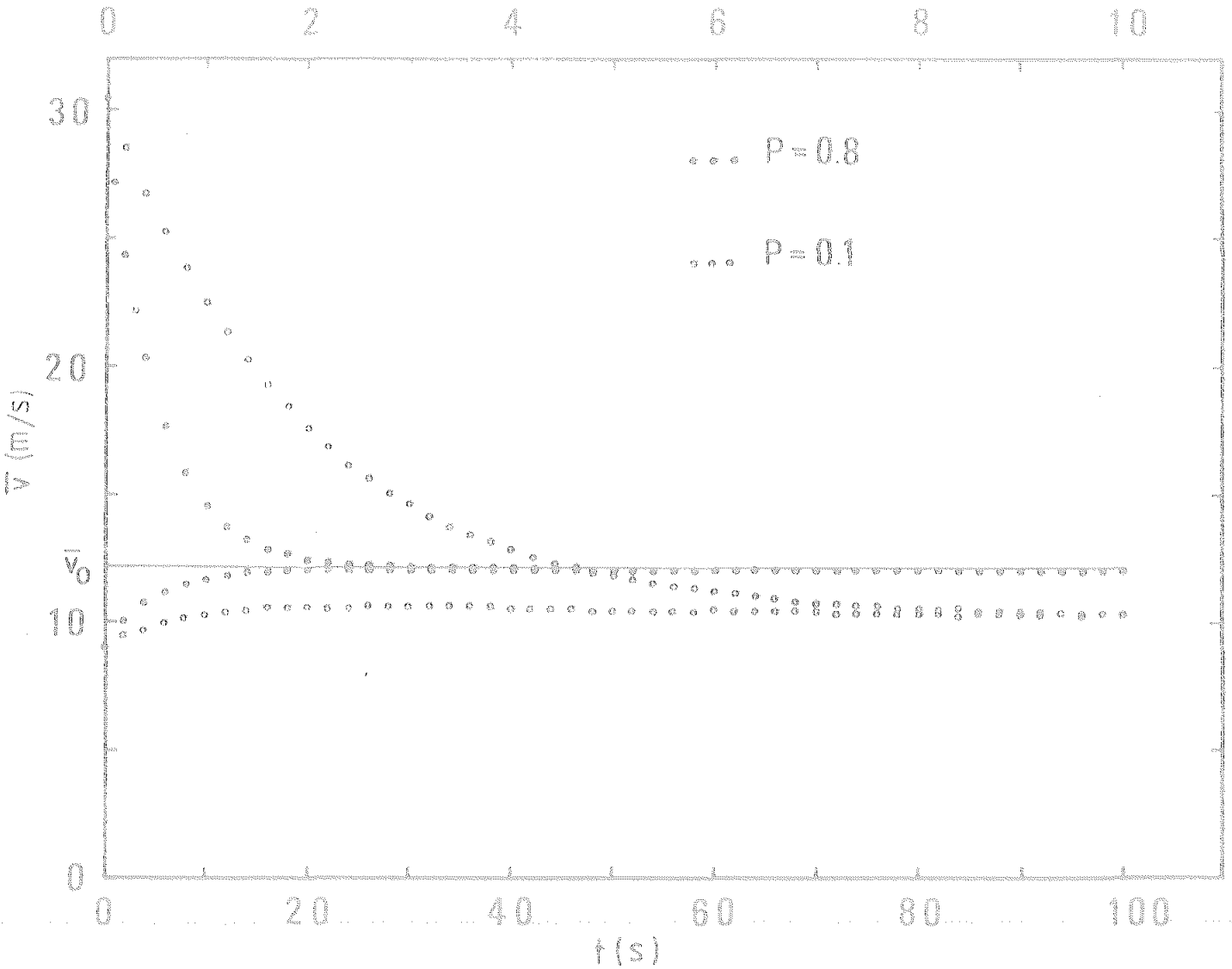


Fig. III.9 Igual que en la figura anterior para el modelo gaussiano.

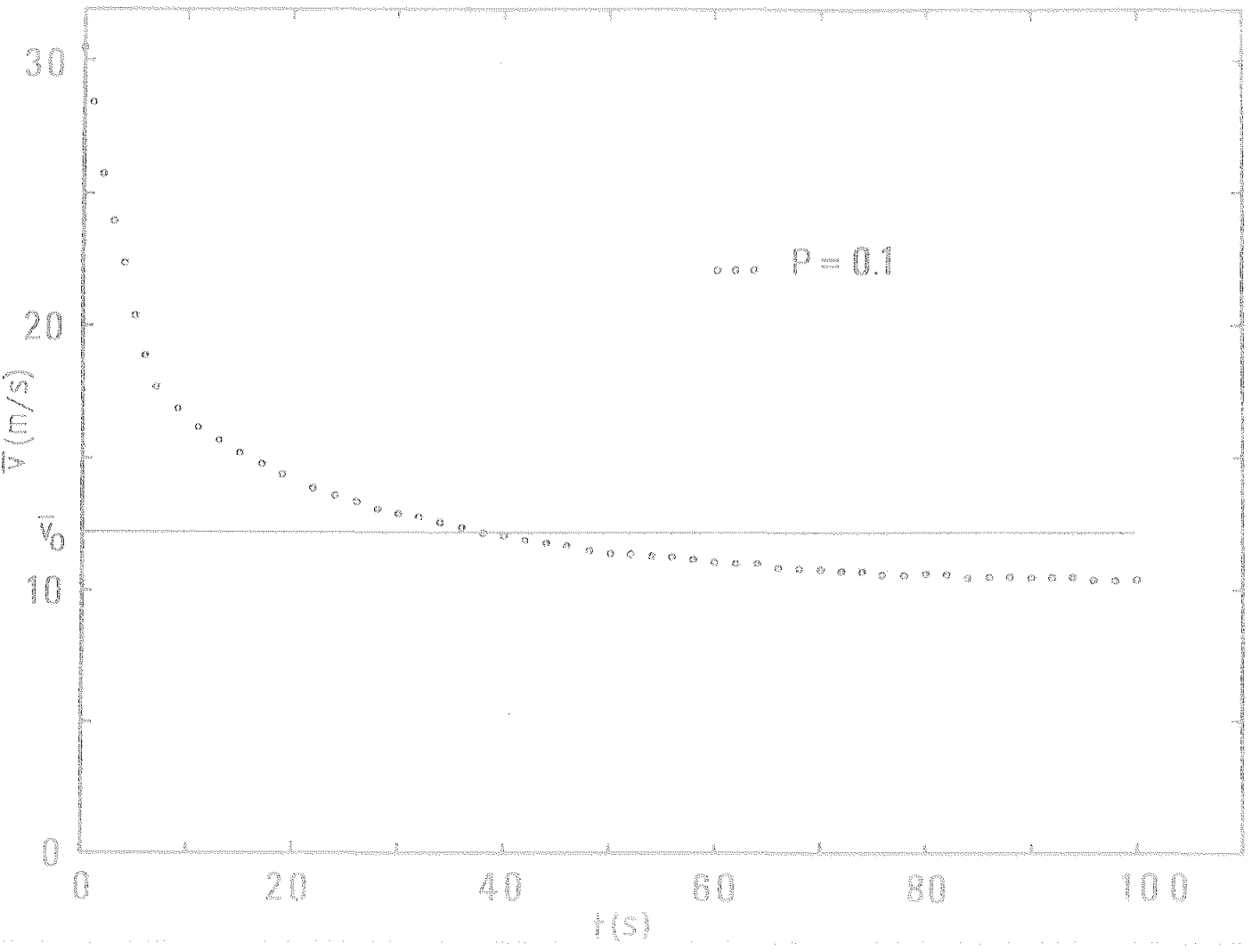


Fig. III.10 Evolución temporal de la velocidad media de los vehículos a partir de una distribución inicial de velocidades dada por dos funciones delta de Dirac.

coincide en los dos casos. Hemos llevado a cabo otras experiencias del mismo tipo y todas parecen confirmar la validez de nuestra conjetura.

El modo de llevar a cabo la simulación nos permite seguir la evolución, no sólo del valor medio de la velocidad, sino de la velocidad de cada uno de los coches, es decir, de la función de distribución de velocidades completa. Notemos que la función de distribución estacionaria será en general una función muy complicada. Sólo para valores muy altos (bajos) de la probabilidad de adelantar (concentración) la distribución final de velocidades sería muy parecida a la función de distribución de velocidades deseada.

Hemos estudiado en primer lugar el caso de una distribución deseada gaussiana con $\sigma^2=1.84$ y $\bar{v}_0=30.5$ m/s. La distribución inicial de velocidades corresponde a 450 coches con velocidad $v_2(0)=39.6$ m/s y 50 con $v_1(0)=12.2$ m/s. La evolución del valor medio de la velocidad así como de la varianza se representa en las Figs. III.11 y III.12 respectivamente. En la Fig. III.13 mostramos la distribución de velocidades $f(v,t)$ discretizada para distintos valores del tiempo, $t=0, 0.3, 0.8, 3$ y 5 s. Se observa como, al estar la velocidad media deseada situada entre los dos valores iniciales de la velocidad, los coches con la menor de las velocidades aumentan su velocidad en el tiempo mientras que los de mayor velocidad la disminuyen. Durante un cierto intervalo de tiempo ($t \ll 1$) la distribución de velocidades consta de dos partes claramente separadas. Cada una de ellas parece tender a tomar una forma gaussiana centrada en una velocidad que va variando en el tiempo. A partir de $t=1$, las dos partes de la distribución se confunden y el valor medio de la velocidad está ya muy próximo al valor medio deseado. No obstante, la distribución de velocidades tiene todavía diferencias significativas respecto de la distribución deseada. En otras palabras

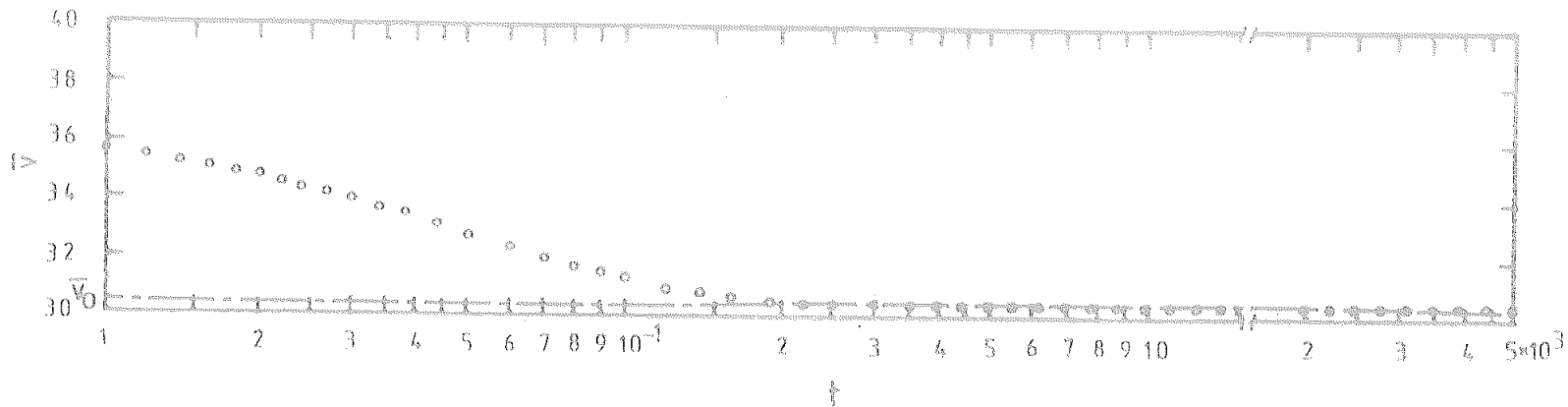


Fig. III.11 Evolución de la velocidad media para un valor alto (0.8) de la probabilidad de adelantar P . Las condiciones iniciales se especifican en el texto.

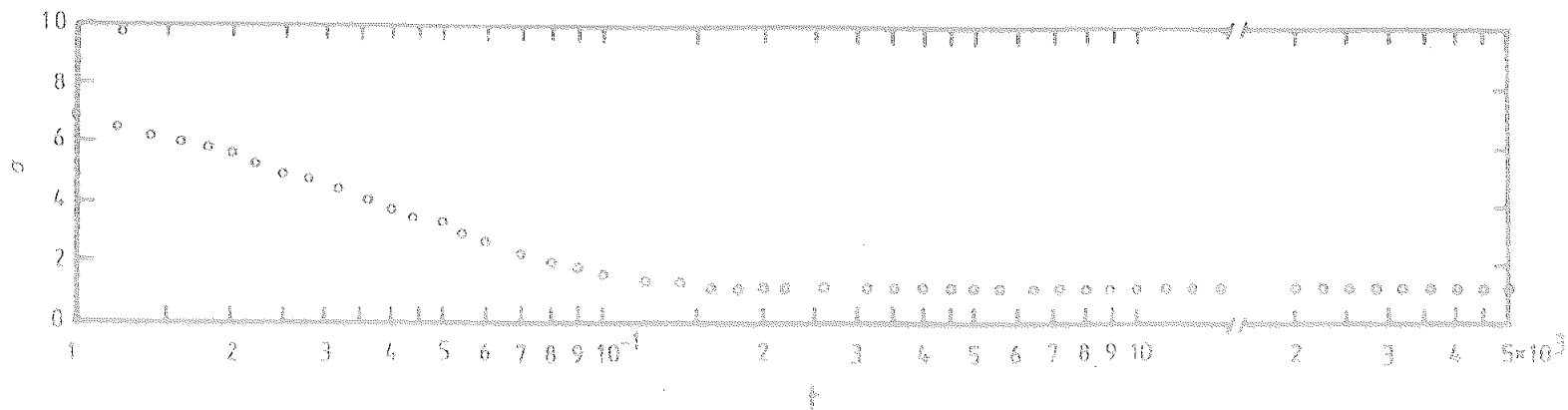


Fig. III.12 Evolución de la varianza en el caso de la figura anterior.

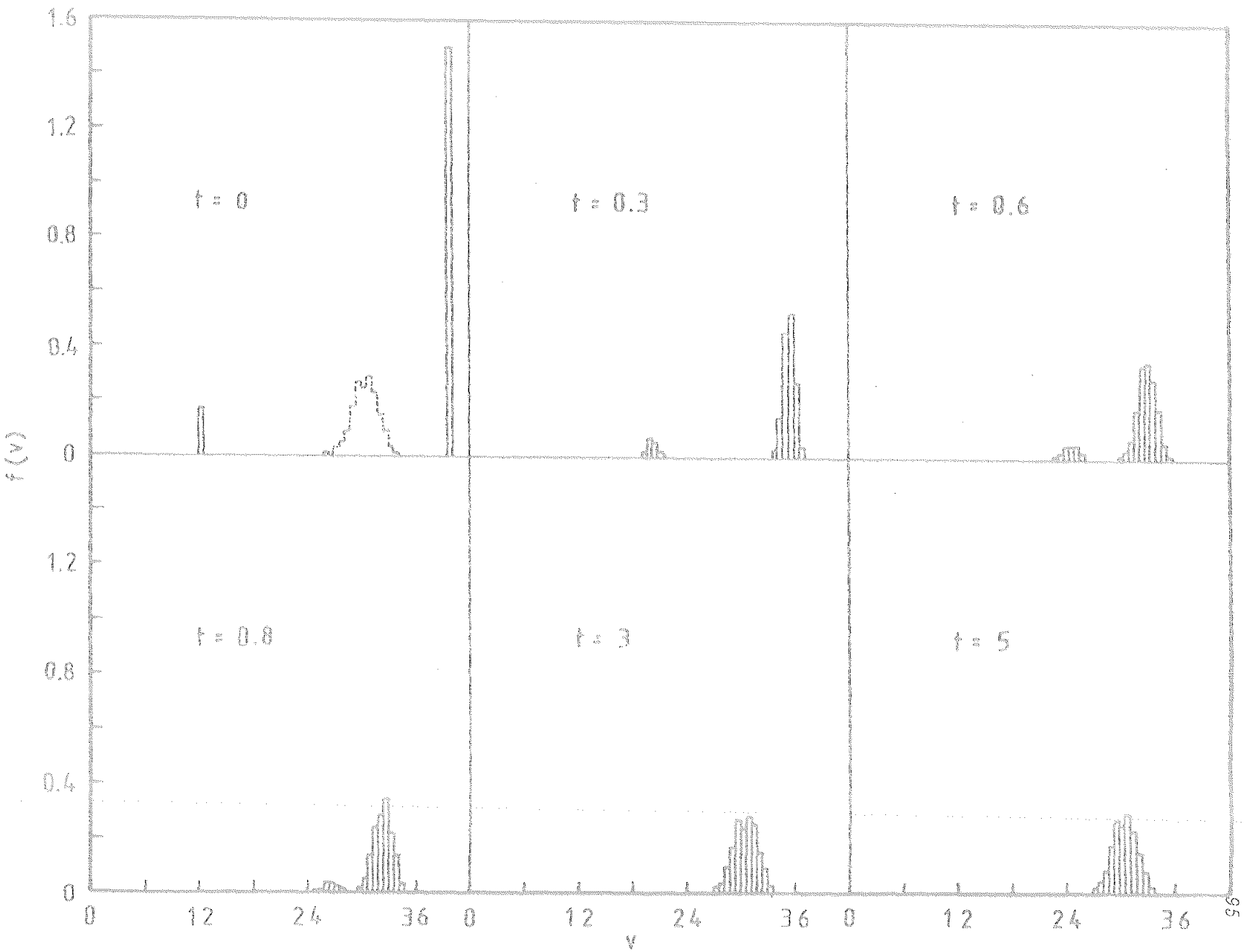


Fig. III. 13 Distribución de velocidades discretizada para distintos instantes de tiempo en la experiencia correspondiente a las Figs. III. 11 y III. 12. La distribución de puntos es la deseada.

el comportamiento individual de cada conductor es significativamente distinto de su deseo, pero el comportamiento colectivo, caracterizado por la velocidad media, se aproxima ya bastante a una especie de voluntad media, caracterizada por la velocidad media deseada. Finalmente, a partir de $t = 5s$ la distribución de velocidades coincide prácticamente con la deseada. A pesar de las diferencias que acabamos de señalar notemos que las relajaciones del valor medio y de la distribución tienen lugar sobre escalas del mismo orden.

El comportamiento es completamente distinto en el caso de probabilidades de adelantar pequeñas. En las Fig. III.14 y III.15 se presenta la evolución del valor medio y la varianza de la velocidad para $P=0.1$. El resto de la simulación es igual al caso anterior. Se pone de manifiesto claramente la existencia de dos escalas bien separadas de relajación. Existe en primer lugar una escala de variación rápida hasta $t \approx 50$ y, a continuación, una relajación muy lenta hacia los valores estacionarios. Este efecto se pone también de manifiesto en la evolución de la función de distribución representada en la Fig. III.16. Hasta $t \approx 50$ la distribución parece tender a tomar forma de tipo gaussiano. Esta tendencia no tiene lugar como sucedía antes por un corrimiento de las dos distribuciones iniciales centradas en $v_1(0)$ y $v_2(0)$. Por el contrario existe un intercambio continuo de coches entre ambos picos de la distribución. Lo que sucede es que el mecanismo de adelantamiento juega un papel muy poco importante y los coches se ven continuamente sometidos a fuertes deceleraciones ocasionadas por los coches que les preceden. Los vehículos aceleran tratando de alcanzar su velocidad deseada, pero son frenados al aproximarse entre si y no poder llevar a la práctica los adelantamientos debido al pequeño valor de la probabilidad. Se alcanza entonces para $t \approx 50s$ una distribución de velocidades regida por la competencia entre los mecanismos de aceleración y frenado que acabamos de describir. Sin embargo,

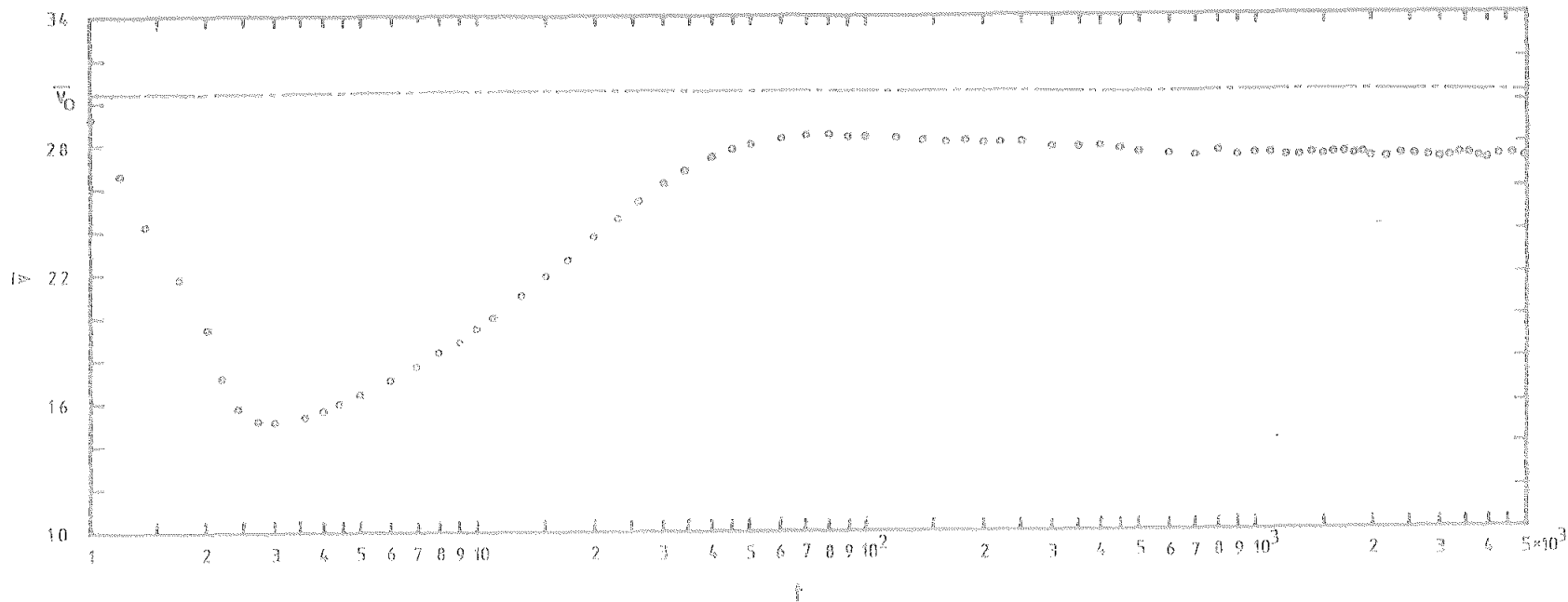


Fig. III.14 Evolución de la velocidad media para un valor pequeño (0,1) de la probabilidad de adelantarse. Las condiciones iniciales se especifican en el texto.

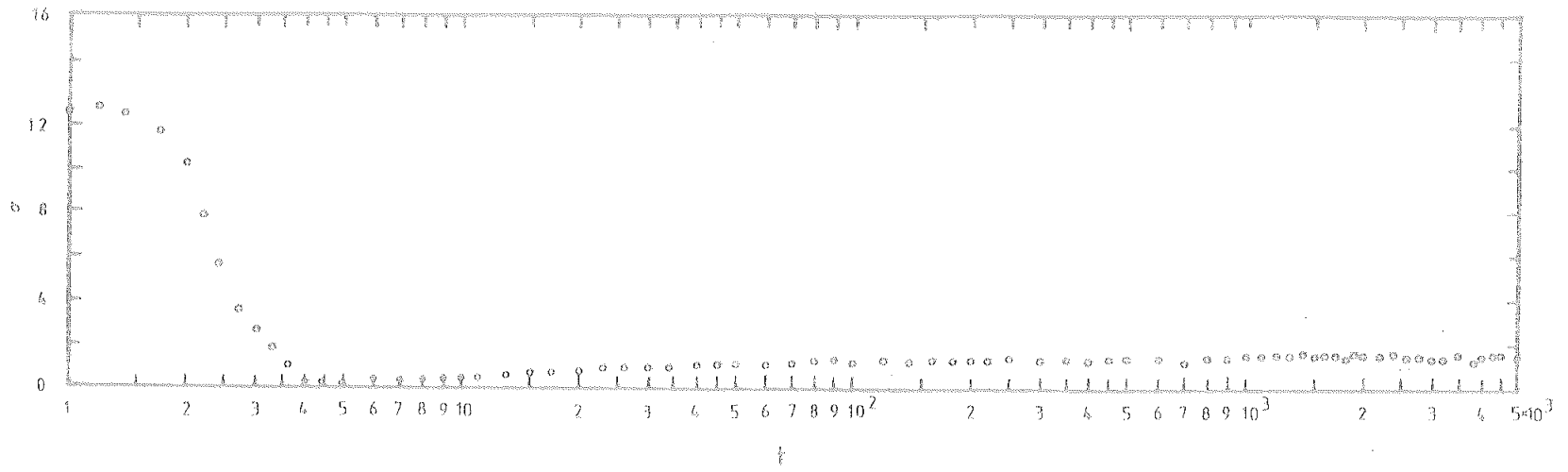


Fig. III.15 Evolución de la varianza en el caso de la figura anterior.

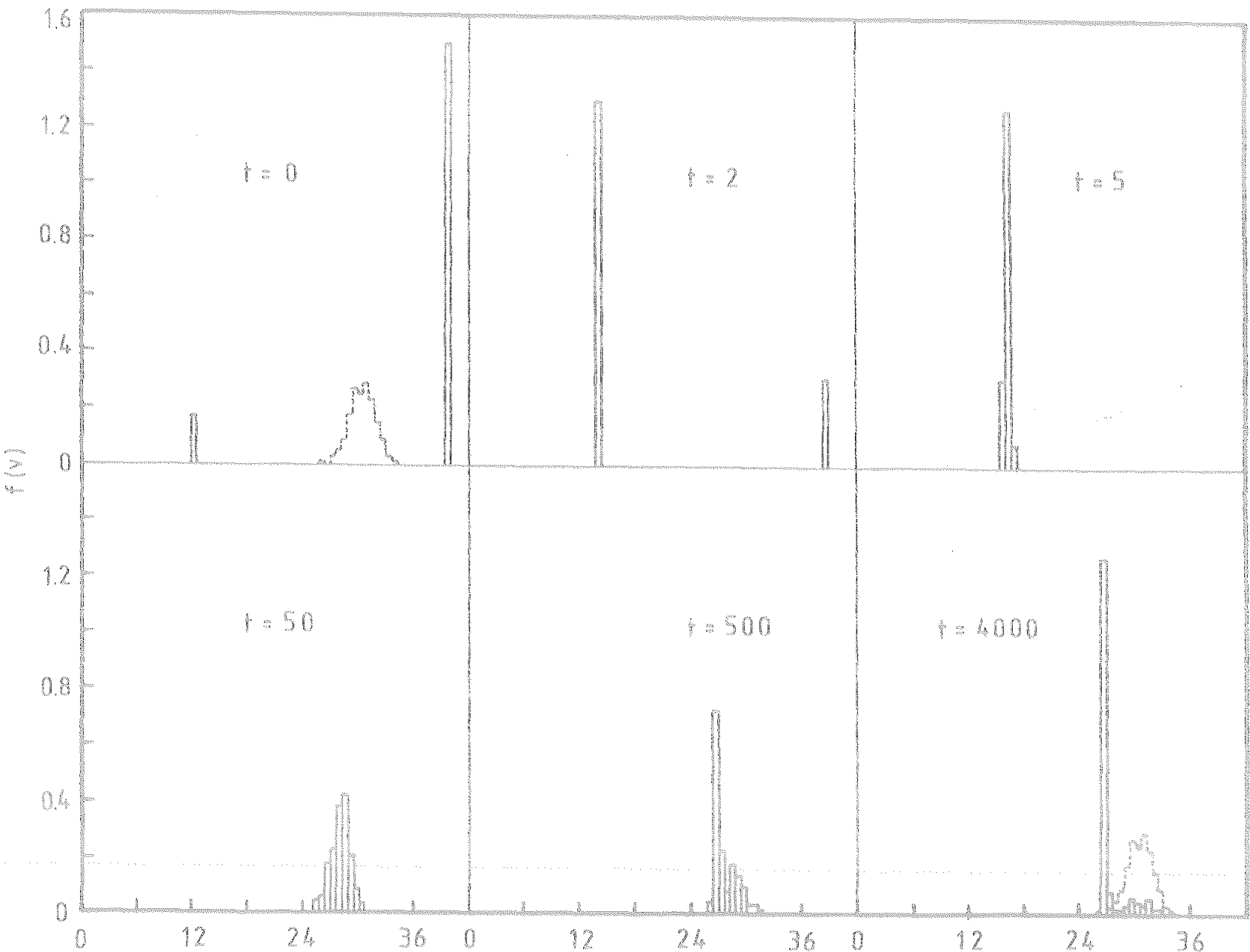


Fig. III. 16 Distribución de velocidades discretizada para distintos instantes de tiempo en la experiencia correspondiente a las Figs. III. 14 y III. 15. La distribución de puntos es la deseada.

es claro, que si uno espera suficientemente, los coches con mayor velocidad deseada acabarían adelantando, apareciendo un mecanismo que desestabiliza la distribución anterior. Este efecto tendrá lugar sobre una escala de tiempo mucho más larga, como ponen de manifiesto nuestros resultados. Así, para $t = 4000$ la distribución no se parece en nada a una gaussiana. Recordemos que como ya hemos dicho, para valores pequeños de la probabilidad la función de distribución estacionaria es de esperar que sea muy distinta de la función de distribución deseada, que es la que hemos supuesto gaussiana.

Utilizando un lenguaje distinto podríamos decir que los resultados anteriores muestran que líneas de tráfico de alta concentración, es decir, con adelantamientos infrecuentes presentan un comportamiento altamente inestable, tanto desde un punto de vista individual como colectivo. Esto hace la línea de tráfico muy peligrosa. El único medio de disminuir esta peligrosidad sería adecuar las velocidades deseadas a las características del tráfico, evitando así grandes aceleraciones y deceleraciones. Naturalmente, esto implica una toma de decisión individualizada de cada uno de los conductores o la regulación externa de la velocidad. En otras palabras, se trataría de establecer unos límites de velocidad en las carreteras dependiendo, no sólo de sus características físicas, sino de la densidad de tráfico existente en cada momento.

III.4.3 Resultados: régimen estacionario

Una vez discutida la relajación del sistema y la independencia del estado estacionario respecto de las condiciones iniciales, presentamos ahora la forma de las curvas de estado caracterizando el comportamiento de la línea de tráfico en situaciones independientes del tiempo. En la Fig. III.17 se muestra la velocidad media en función de la concentración reducida $\eta = c/c_s$ para el modelo exponencial, es decir, con una distribución

deseada dada por la Ec. (II.50). Las dos curvas mostradas corresponden a dos valores distintos de la velocidad media deseada V_0 . Recordemos que la probabilidad de adelantar viene determinada unívocamente por el valor de la concentración. Como era de esperar, se observa un decaimiento monótono de la velocidad con la concentración y también que cuanto mayor es la velocidad media deseada mayor es la velocidad estacionaria.

Como ya hemos dicho repetidamente, la magnitud relevante desde un punto de vista práctico no es la velocidad sino el flujo, que se presenta en la Fig. III.18. Las curvas allí dibujadas pueden entenderse como auténticas ecuaciones de estado del flujo estacionario. A diferencia de lo que sucedía con la velocidad media, el flujo aumenta con la concentración hasta un cierto valor (alrededor de $\eta = 0.5$), a partir del cual disminuye monótonamente. La posición y altura del máximo depende de la velocidad media deseada. De las Figuras III.17 y III.18 se deduce que existe una velocidad media óptima a la cual corresponde un flujo máximo. Esto quiere decir que si se fuese capaz de influir en los conductores de manera que "ajustaran" su separación media con el valor óptimo de la densidad, se conseguiría un flujo máximo. Dicho en otras palabras, de acuerdo con este modelo es importante ser capaz de controlar la separación entre vehículos si se quiere influir positivamente sobre la fluidez del tráfico.

Hemos realizado un estudio análogo para el modelo gaussiano, Ec. (III.15). Los resultados vienen expresados por las Figuras III.19 y III.20. La influencia de la concentración sobre la velocidad media es ahora muy pequeña hasta valores relativamente grandes de aquella ($\eta \approx 0.8$). Naturalmente, esto trae como consecuencia que el flujo sea una función rápidamente creciente de la concentración hasta un cierto valor, a partir del cual decae abruptamente a cero. Aparte de esta diferencia, todos los comentarios

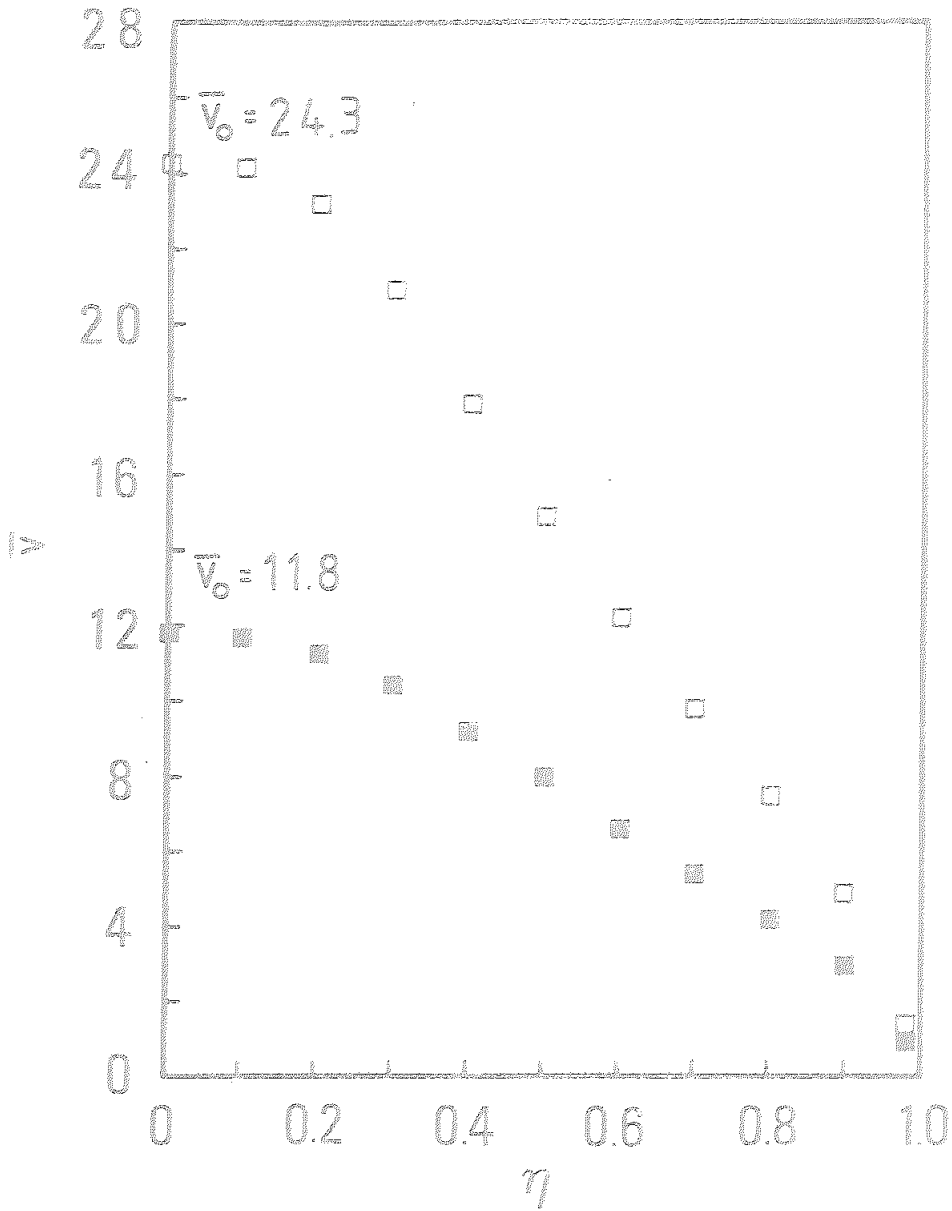


Fig. III.17 Representación de la velocidad media estacionaria \bar{v} (m/s) en función de la concentración reducida η para el modelo exponencial. Los diferentes símbolos corresponden a diferentes valores de la velocidad media deseada.

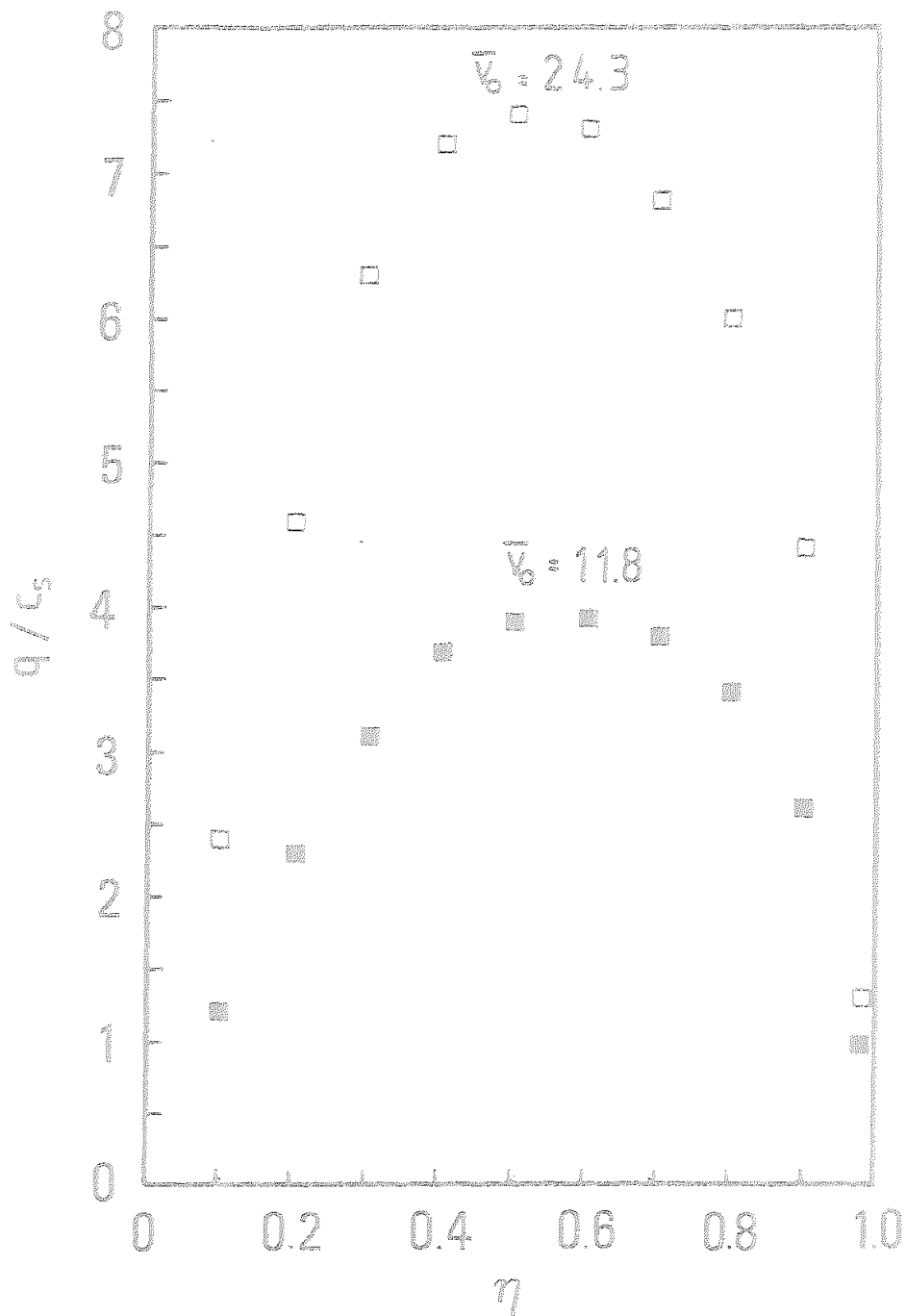


Fig. III.18 Representación del flujo normalizado q/c_s (m/s) frente a la concentración normalizada η para el modelo exponencial.

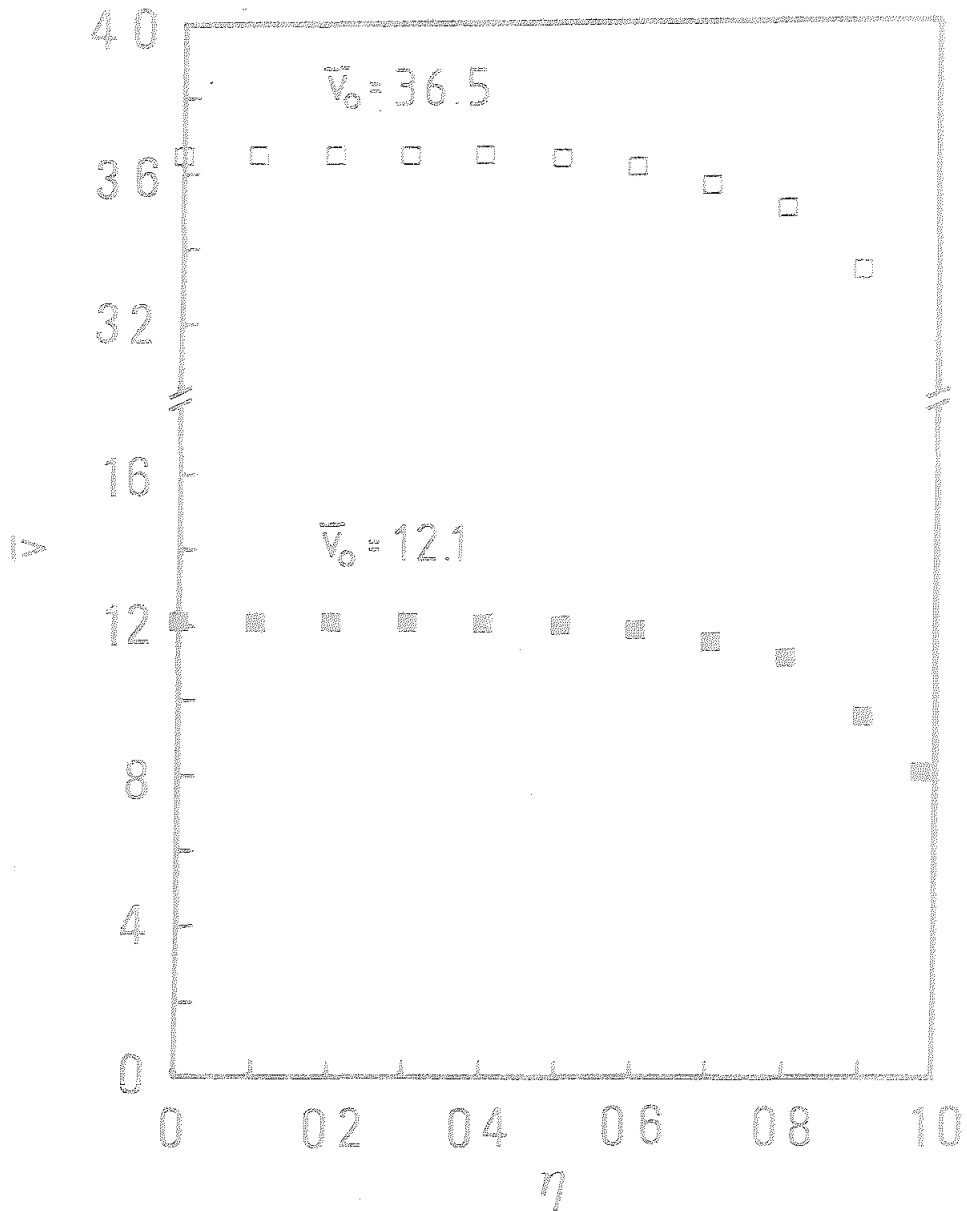


Fig. III.19 Representación de la velocidad media estacionaria \bar{v} (m/s) en función de la concentración reducida η para el modelo gaussiano. Los diferentes símbolos corresponden a diferentes valores de la velocidad media deseada.

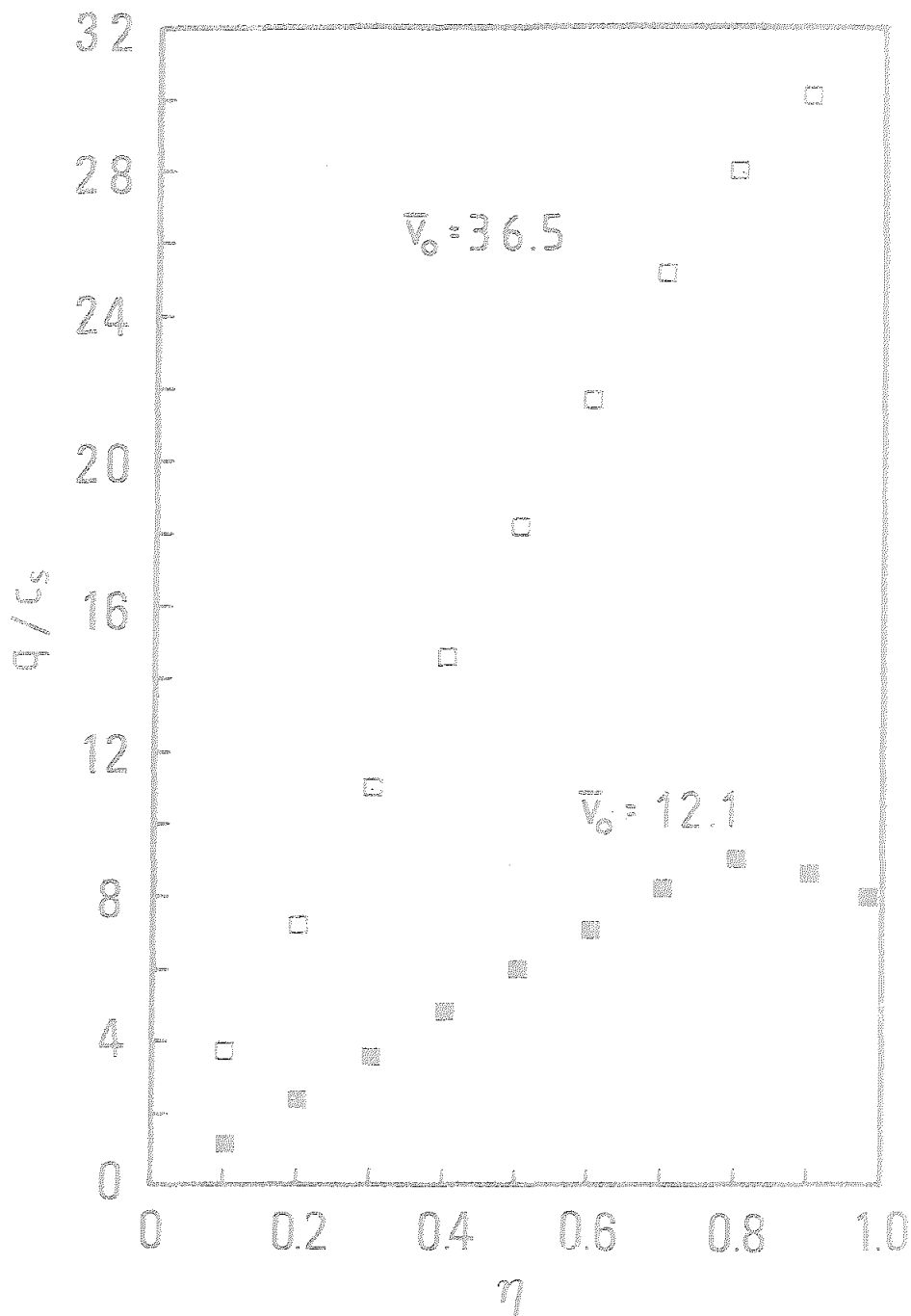


Fig. III.20 Representación del flujo normalizado q/c_s (m/s) frente a la concentración normalizada η para el modelo gaussiano.

que hemos realizado para el modelo exponencial son también aplicables al gaussiano.

Al comparar los resultados anteriores con los obtenidos a partir del modelo de ecuación cinética de Prigogine que hemos discutido en el capítulo II, se observan ciertas similitudes en el comportamiento cualitativo, pero también apreciables diferencias, especialmente en la "suavidad" de las curvas de estado. La comparación no constituye en ningún caso un test de nuestro modelo. No hemos tratado de reproducir dinámicamente el modelo de Prigogine, sino que hemos formulado un nuevo modelo que aunque incorpore el concepto de distribución de velocidades deseada, trata de un modo completamente distinto los mecanismos de interacción entre los coches.

Podemos comprobar también nuestros resultados con los obtenidos mediante el modelo de seguimiento. Es claro que a un nivel cualitativo los obtenidos mediante una distribución deseada exponencial se parecen más al modelo de seguimiento. Comentaremos más acerca de este punto en el apartado siguiente, pero no hay que olvidar que en el modelo de seguimiento no existe posibilidad de adelantamiento y que, por otro lado, en nuestro modelo todas las interacciones entre los coches se producen precisamente mediante un mecanismo de adelantamiento.

III.5. ALGUNAS CUESTIONES ABIERTAS Y SUGERENCIAS PARA EXPERIMENTOS.

Los diversos resultados obtenidos en los apartados anteriores suscitan una serie de comentarios y conjeturas, algunas de las cuales vamos a exponer a continuación.

Las medidas experimentales, conocidas por nosotros, de funciones de distribución de velocidades estacionarias para líneas de tráfico, han sido realizadas en condiciones muy libres, es decir, en condiciones en que los conductores se comportan esencialmente según sus propios deseos. Los resultados sugieren que en tales condiciones las funciones de distribución reales de velocidad se parecen mucho más a una distribución gaussiana que a una distribución del tipo exponencial (ver Fig.II.2). Por otra parte, nuestros modelos de simulación llevan a que para valores grandes de la probabilidad de adelantar la función de distribución estacionaria coincide prácticamente con la deseada. Esto nos lleva a conjeturar que la distribución deseada de velocidad de los coches en las experiencias citadas era, con muy buena aproximación, gaussiana. Nuestros resultados para el modelo gaussiano muestran que para valores no muy grandes de la concentración de vehículos en la línea, ésta influye muy poco en la velocidad media. Dicho con otras palabras, es necesario ir a concentraciones muy altas para que los conductores empiecen a notar significativamente la presencia de los demás coches en la línea e influyan en su velocidad. Dado que esto ocurre para cualquier valor de la velocidad deseada media, si ésta es muy alta debido a las buenas condiciones de conducción en la vía, puede suceder que el tráfico en ésta sea a la vez muy denso y de alta velocidad. En esas condiciones el tráfico puede ser altamente inestable, en el sentido de que una pequeña perturbación puede conducir a un resultado catastrófico. Esto induce a corroborar

la alta peligrosidad de las carreteras que permiten conducción a alta velocidad, en tanto en cuanto no exista un mecanismo regulador de la propia concentración.

Por lo que respecta a situaciones de tráfico tales como puentes o túneles, donde los desvíos de los conductores individuales se ven muy limitados, nuestros resultados sugieren, al comprobarlos con las medidas experimentales, que el tráfico obedece más a funciones de distribución deseada exponenciales que a gaussianas. Hasta el presente no conocemos ninguna medida experimental de función de distribución de velocidades en situaciones de tráfico fuertemente limitado (pequeña probabilidad de adelantar). Nuestro estudio nos lleva a conjeturar que el paso de un régimen de tráfico poco condicionado por la vía a un régimen limitado (paso de la carretera por una población, entrada en un un tunel o puente etc.), cambia el modo de conducir, lo cual se refleja en una variación más o menos brusca de la función de distribución deseada. A este respecto sugeriríamos la conveniencia de realizar medidas de dicha función de distribución en ciertos tramos característicos de una vía con el fin de prever el comportamiento de los conductores y llevar a cabo una mejor regulación del tráfico en ella.

En todas estas medidas sería muy importante tener en cuenta los regímenes transitorios que aparecen al cambiar bruscamente las condiciones en la vía. Si nuestra conjetura anterior es cierta, cabe esperar que cuando cambien las condiciones físicas de la vía en un cierto tramo de ésta, aparezcan regímenes transitorios asociados con el cambio en el deseo de los conductores. El estudio teórico de tales situaciones utilizando nuestros modelos puede considerarse como una extensión natural al trabajo que presentamos aquí.

Por otra parte, aún en ausencia de cambios bruscos

en el deseo de los conductores, nuestros estudios indican la existencia de regímenes transitorios en aquellos puntos de la vía en que comienzan a interaccionar grupos de conductores que llegan a ella en condiciones diferentes. Pensemos, por ejemplo en la entrada a una carretera de alta velocidad, por la cual circulan coches en régimen estacionario, de un grupo de coches procedentes de una carretera secundaria, en la que el estado estacionario es de mucha menor velocidad. Nuestros modelos indican la aparición de un régimen transitorio que puede extenderse considerablemente y en el cual cualquier medida que se realice no puede ser comparada con resultados teóricos para regímenes estacionarios. De hecho, pueden aparecer fuertes inestabilidades en la línea. El análisis teórico así como las medidas experimentales para entender el comportamiento de la línea bajo este tipo de situaciones inestables es un problema abierto, que nos atravesamos a denominar como crucial desde un punto de vista práctico.

Otro hecho que nos interesa resaltar es el que se refiere a la posibilidad de introducir en los modelos, ciertos aspectos no contemplados anteriormente.²⁴⁾ Estos podrían ser mejorados bien en un contexto general o bien ser contruidos específicamente para tratar en detalle ciertas situaciones reales concretas. Sin ánimo de ser exhaustivo daremos a continuación una lista de algunos de estos aspectos que podrían tenerse en cuenta en la construcción de modelos más detallados:

- a) Algoritmos de adelantamiento más cercanos a situaciones experimentales, teniendo en cuenta, por ejemplo, el flujo existente en la dirección contraria. También pueden incorporarse retrasos temporales que den cuenta del tiempo característico de respuesta del conductor medio. De hecho existen ciertas medidas de estos tiempos de reacción.
- b) En general un conductor que desea mantener su velocidad constante sólo podrá conseguirlo en cierta medida. Su conducción

está afectada por lo que se denomina ruido acelerativo. Dicho efecto puede modelarse mediante la introducción de términos estocásticos en las ecuaciones del modelo. Un campo de trabajo interesante sería el análisis de posibles inestabilidades inducidas por estos términos de ruido.

- c) En lo que respecta a los términos de relajación hacia la velocidad deseada, cabe pensar en la introducción de mecanismos no lineales que conducirán a dinámicas de relajación más generales. En particular podría ser interesante estudiar la posibilidad de acoplo entre relajaciones no lineales y fenómenos de interacción. La aparición de dichos acoplos daría lugar sin duda a nuevos comportamientos globales de la línea de tráfico. Es necesario decir, sin embargo, que es muy posible que para descripciones de este tipo sea necesario cambiar drásticamente la formulación de los modelos.

Para terminar queremos insistir en que la limitación actual más fuerte para el desarrollo de este tipo de trabajos es la ausencia prácticamente total de medidas experimentales sistemáticas. En particular, es importante realizar medidas en la propia zona o área cuyo tráfico se quiere modelar. Debido a las componentes subjetivas de nuestros modelos, es muy posible que medidas realizadas en otros países, con distinto clima, características geográficas, estado de las carreteras y también elemento humano, no sean trasladables a nuestro país.

CONCLUSIONES

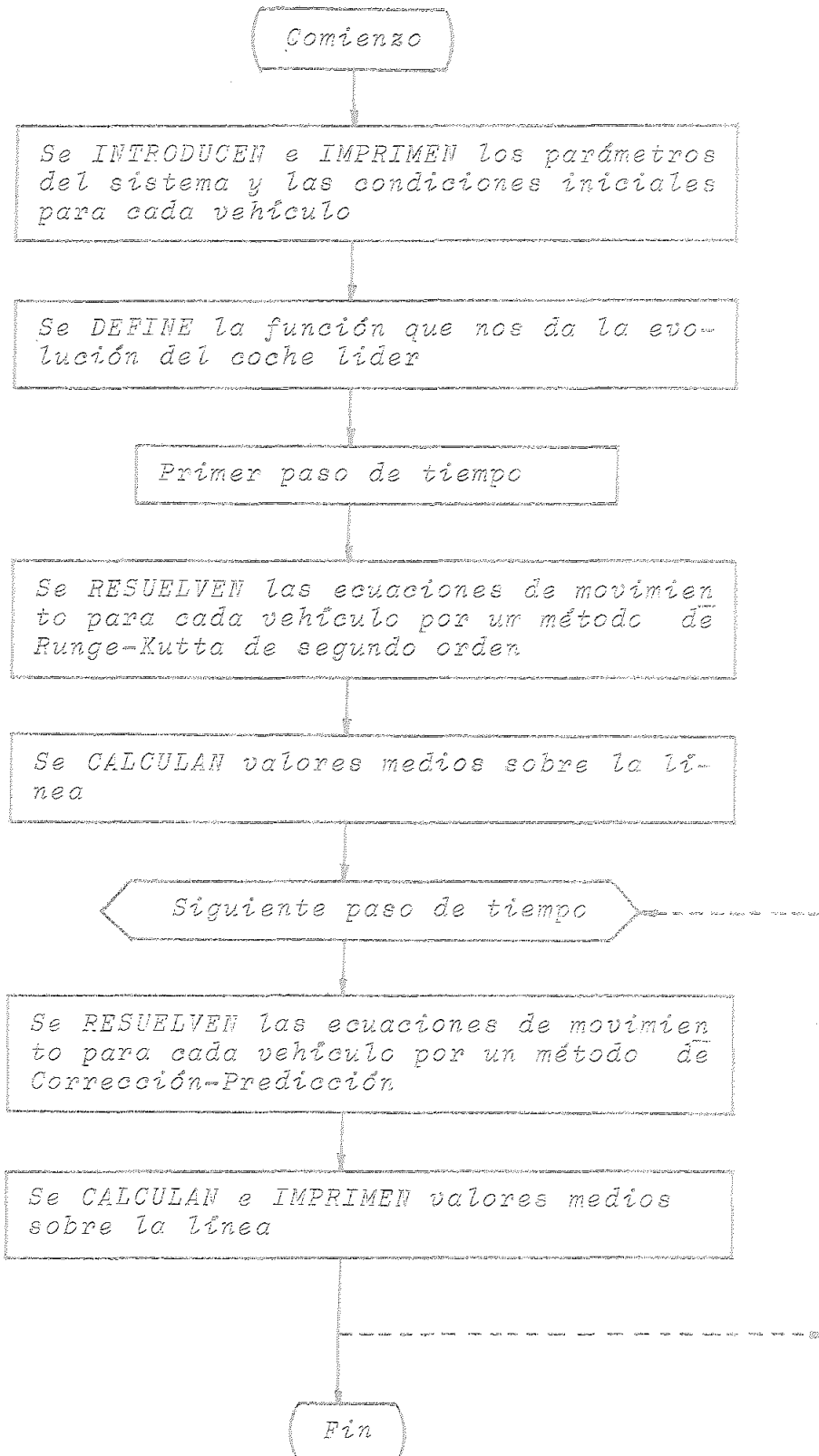
- 1.- Se ha realizado una revisión crítica de los distintos modelos existentes para la descripción del tráfico de vehículos a lo largo de una vía.
- 2.- El modelo de seguimiento de Montroll lo hemos simulado en el ordenador, aunque en un espíritu ligeramente diferente, ya que sus soluciones estacionarias corresponden a puntos distintos de nuestra evolución temporal. Hemos comprobado así numéricamente la validez de los resultados obtenidos anteriormente por métodos analíticos. Además, hemos estudiado la propagación de perturbaciones a lo largo de una línea de tráfico según este modelo.
- 3.- Hemos introducido en el modelo de seguimiento un mecanismo de adelantamiento entre los vehículos y estudiado su influencia sobre la fluidez del tráfico.
- 4.- A continuación, hemos formulado un modelo cinético con velocidad deseada. Esta está asociada con los deseos intrínsecos de cada uno de los conductores. Al incorporar también este modelo un mecanismo de adelantamiento creemos que es el más poderoso de los propuestos hasta ahora.
- 5.- En el modelo aparece de modo natural el concepto de distancia de seguridad, como una distancia mínima a la cual circulan los coches en el régimen estacionario.
- 6.- Se ha analizado la relación entre el comportamiento individual deseado de los conductores y su comportamiento colectivo. Matemáticamente esto se traduce en la relación entre la función de distribución deseada y la real.

- 7.- También se ha abordado el estudio del comportamiento de la línea al cambiar las condiciones externas a la misma, es decir, la relajación desde un régimen transitorio hasta uno estacionario.
- 8.- A la vista de los resultados obtenidos, hemos propuesto diversas cuestiones teóricas de interés para un futuro próximo y, lo que es más importante, la realización de experiencias que permitan profundizar en el comportamiento de una línea de tráfico.
- 9.- Globalmente, nuestro modelo incorpora una componente mecánica y una sociológica. Aisladamente, el análisis de ambas componentes es análogo (pasar del comportamiento de partícula al comportamiento de fluido y del comportamiento del individuo al de la comunidad). Adicionalmente, aparecen los efectos de acople de estas dos componentes.

APENDICES

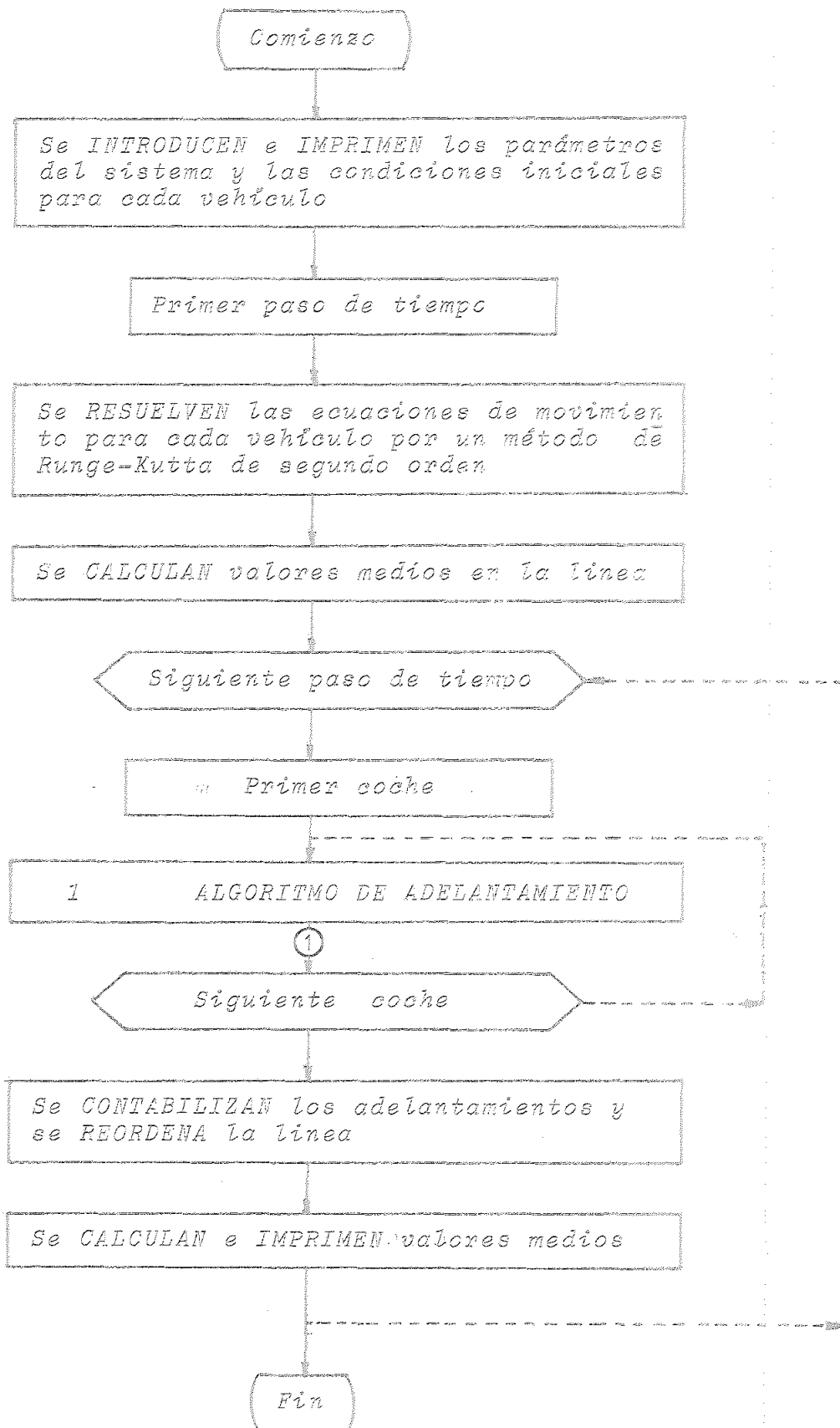
APENDICE A

Simulación del modelo de seguimiento

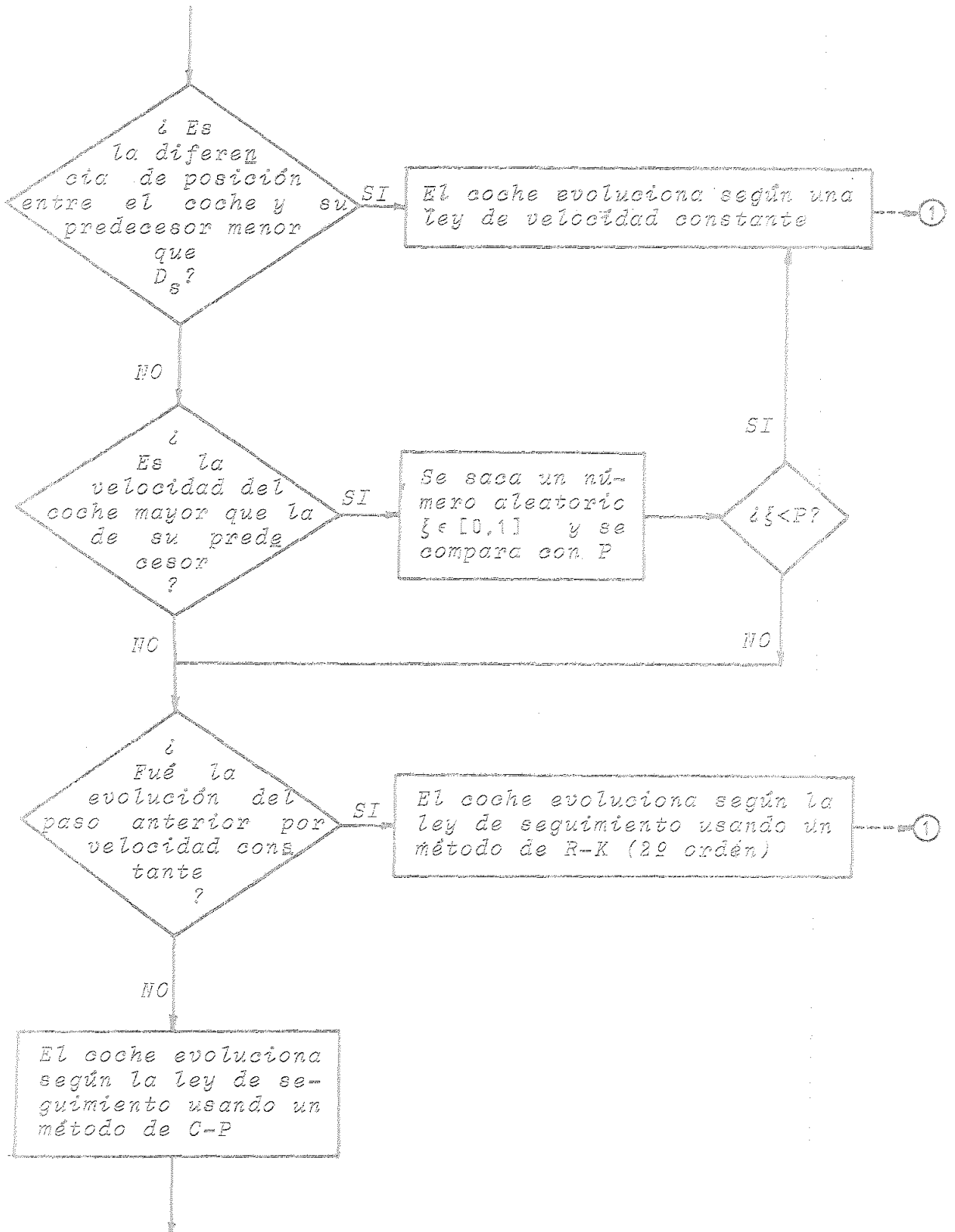


APENDICE B

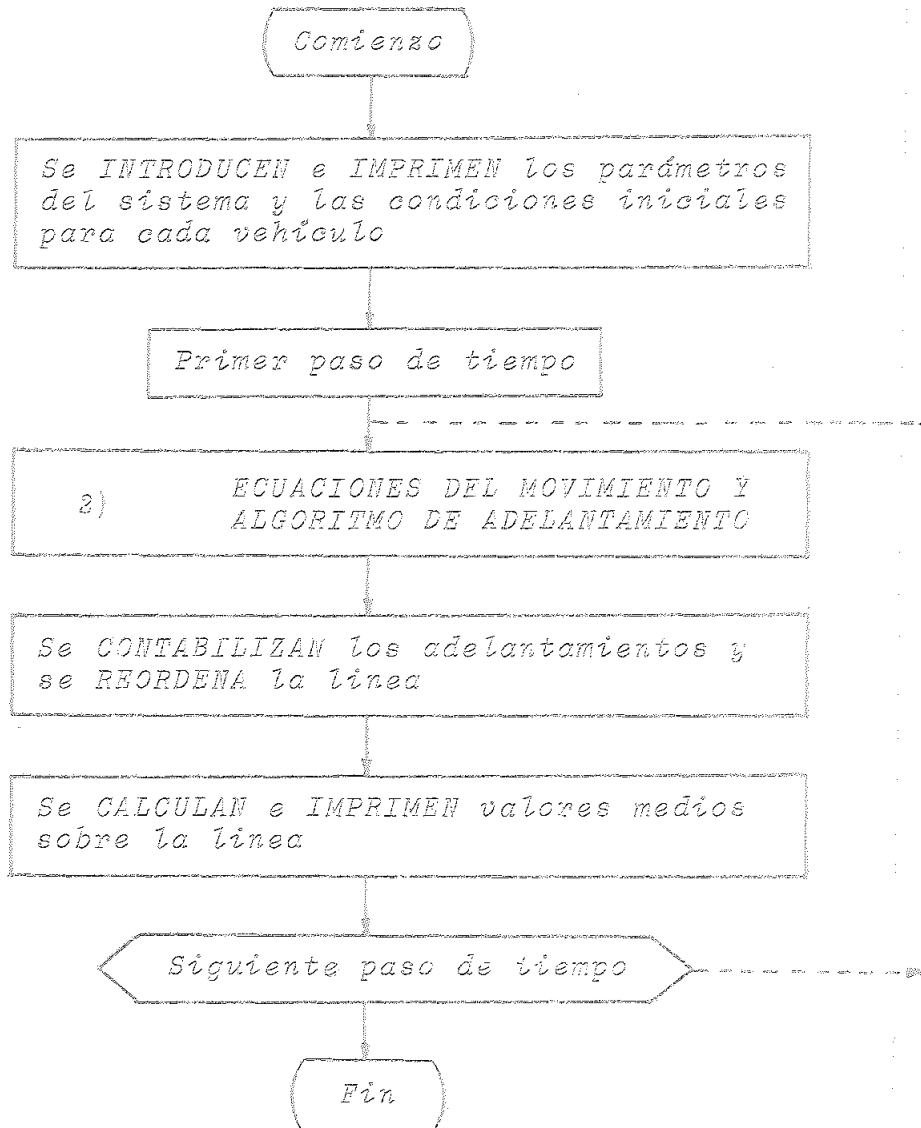
Módulo de seguimiento con adelantamiento



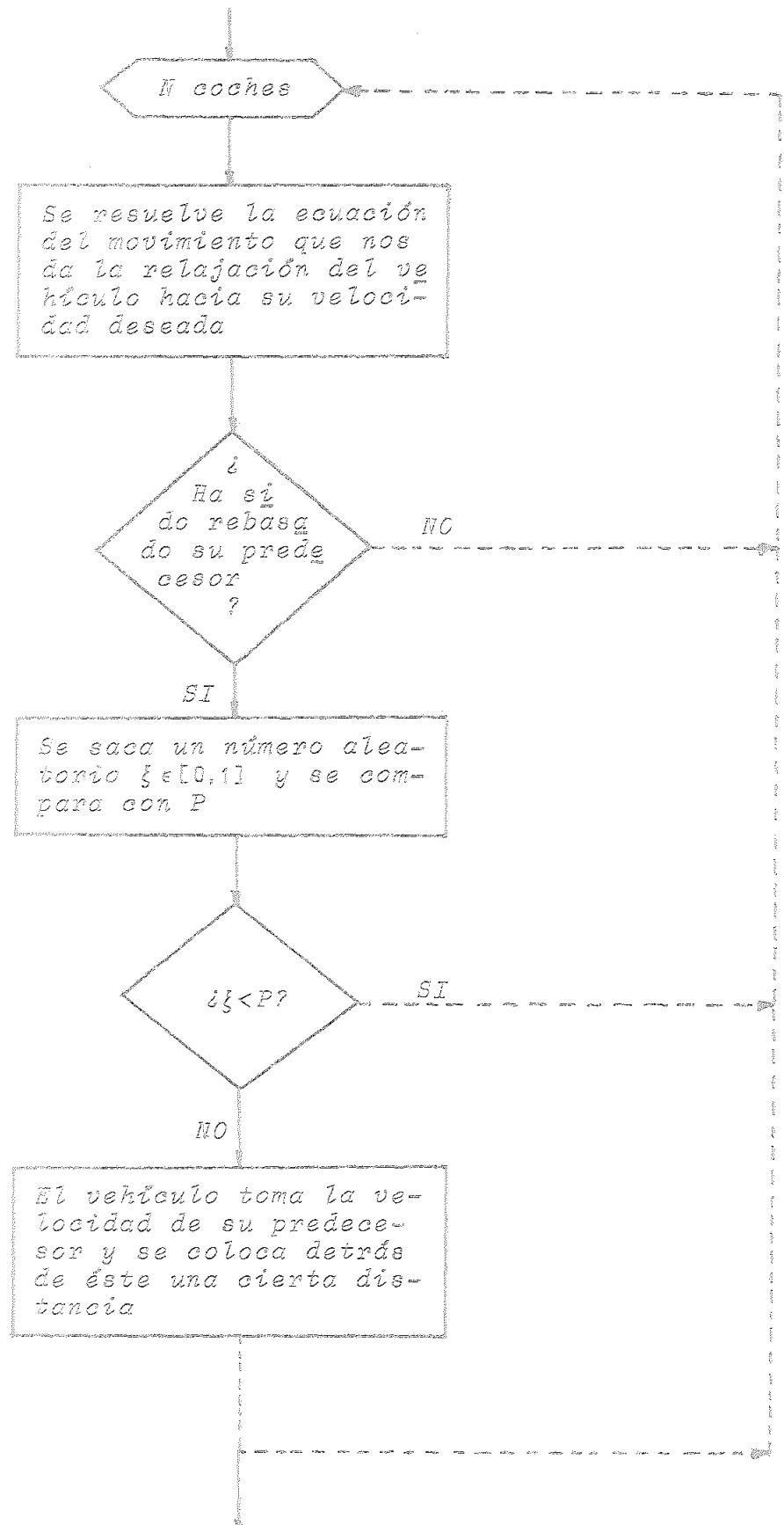
1) Detalle del algoritmo de adelantamiento:



APENDICE C

Modelo cinético

2) Detalle del algoritmo de adelantamiento:



BIBLIOGRAFIA

- 1) A. Reuscher. Fahrzeugbewegungen in der Kolonne bei Gleichförmig Beschleunigten oder Verzögertem Leitfahrzeug, Z. Osterr. Ingr.- Arch. Vereins 95, 59, (1950)
- 2) L.A. Pipes. An Operational Analysis of Traffic Dynamics, J. Appl. Phys. 24, 274 (1953)
- 3) R.E. Chandler, R. Herman, and E.W. Montroll. Traffic Dynamics: Study in Car Following, Oper. Res., 6, 165-184, (1958)
- 4) T.R. Jones and R.B. Potts. The Measurement of Acceleration Noise—a Traffic Parameter, Oper. Res. 10, 745 (1962)
- 5) D.C. Gazis, R. Herman, and R.W. Rothery. Non-linear Follow-the-leader Models of Traffic Flow, Oper. Res. 9, 545 (1961)
- 6) R. Herman, E.W. Montroll, R.B. Potts and R.W. Rothery. Traffic Dynamics: Analysis of Stability in Car-Following, Oper. Res. 7, 86 (1959)
- 7) R.L. Bierley. Investigation of an intervehicle Spacing Display, Res. Board Record 25, 58 (1963)
- 8) E.W. Montroll and W. Badger. *Quantitative Aspects of Social Phenomena*, Gordon and Breach, New York (1974)
- 9) D.C. Gazis, R. Herman and R.B. Potts. Car Following Theory of Steady-State Flow, Oper. Res. 7, 499 (1959)
- 10) H. Greenberg. An Analysis of Traffic Flow, Oper. Res. 7, 79 (1959)
- 11) L.C. Edie, R.S. Foote, R. Herman and R. Rothery. Analysis of Single-Lane Traffic Flow, Traff. Engng. 33, 21 (1963)

- 12) E.W. Montroll and R.B. Potts, *An Introduction to Traffic Flow Theory*, N.R.C. Highway Research Board Publication n^o 1121. (1964)
- 13) J.R. Dorfman and H. van Beijeren. The Kinetic Theory of Gases, in *Statistical Mechanics, Part B: Time-Dependent Processes*, p. 65, B.J. Berne, ed., Plenum, New York (1977)
- 14) I. Prigogine in *Theory of Traffic Flow*, p. 158, R. Herman, ed., Elsevier (1961)
- 15) K. Huang, *Statistical Mechanics*, Wiley (1963)
- 16) I. Prigogine and F.C. Andrews, A Boltzmann-like Approach for Traffic Flow, *Oper. Res.* 8, 789 (1960)
- 17) I. Prigogine, R. Herman. *Kinetic Theory of Vehicular Traffic*, American Elsevier Publishing Co. (1971)
- 18) J.L. Kraus. *Distribution of Vehicle Speeds*. The Port of New York authority (1966)
- 19) N.G. Van Kampen. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, North Holland (1981)
- 20) J.G. Gardeta Oliveros. *Modelos de Tráfico Vial*. Ctro. de Estudios y Experimentación de Obras Públicas. Madrid (1984)
- 21) John McLeod, *Simulation Today-from Fuzz to Fact*, *Simulation*, 20, (1973)
- 22) B.J. Ader and T.E. Wainwright, *J. Chem. Phys.* 33, 1439 (1960)
- 23) W.W. Wood, in *Fundamental Problems in Statistical Mechanics*, E.G.D. Cohen, ed., North-Holland, Amsterdam (1975)



- 24) C.R.Berger and G.L.Alderman. Discrete-event simulation of freeway traffic, in *Simulation Councils Proceedings Series, Vol.7 NR1, An Overview of Simulation in High-way Transportation: Part 1*, J.E.Bernard, ed., Michigan State University (1977)