

DEPENDENCIA ENTRE LOS PARÁMETROS DE UN SISTEMA Y DE UN MODELO BORROSO DEL TIPO TAKAGI-SUGENO

Miguel Peña, Sandra Piñón y Eduardo F. Camacho

*Dpto. de Sistemas y Automática. Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla.
Camino de los Descubrimientos s/n, Sevilla, España, 41092
miguelp@cartuja.us.es*

Resumen

En este trabajo se presenta una discusión sobre las propiedades de los parámetros de un Sistema de Inferencia Borrosa del Tipo Takagi-Sugeno (TS FIS por sus siglas en inglés) usado como modelo de un sistema. Dicha discusión extiende trabajos anteriores donde se presentó en detalle el TS FIS y se analizaron tres propiedades del mismo: la Zona de Validez del Modelo (MVZ), la posibilidad de obtener los parámetros del modelo por medio de una linealización de un modelo matemático y la posibilidad de acoplamiento (o fusión) entre dos modelos borrosos. Aquí se hace una corta revisión de tales tópicos. Luego se analiza la diferencia entre adaptación de parámetros y ajuste de parámetros en los modelos. Finalmente se describe la dependencia entre los parámetros del sistema y los parámetros del modelo y se presenta un ejemplo para ilustrar las propiedades de los parámetros discutidas.

1. INTRODUCCIÓN

El concepto de identificación implica el uso de métodos para establecer modelos de procesos (matemáticos o simbólicos) con la información del proceso contenida en un conjunto de datos de entrada-salida. Aquí se ha adoptado como modelo un Sistema de Inferencia Borrosa (FIS) del tipo Takagi-Sugeno (TS FIS) establecido en [6]. En [3] se presenta una discusión detallada sobre una propuesta de identificación con este tipo de modelos. Además, en [4] se desarrollaron las propiedades de las Zonas de Validación del Modelo (MVZ), la propiedad de obtención de un modelo borroso mediante la linealización del modelo matemático y, por último, la propiedad de el acoplamiento (o fusión) entre dos modelos borrosos. En [5] se resume esta aproximación.

En el presente trabajo se desarrollan dos contribuciones. Primero, se analiza la diferencia entre adaptación de parámetros y ajuste de parámetros. Segundo, se describe la dependencia entre el parámetro del sistema y los parámetros del modelo.

El trabajo está organizado como sigue: En la sección 2 se da una descripción del modelo borroso utilizado. En la sección 3 se describen las propiedades de los modelos TS FIS. Primeramente se han revisado propiedades ya estudiadas anteriormente y se desarrollan nuevas propiedades. Finalmente, se dan algunas conclusiones en la sección 4.

2. MODELO BORROSO UTILIZADO

En este trabajo se ha utilizado un modelo borroso del tipo Takagi-Sugeno (TS FIS) pero modificado con el objeto de utilizar en el antecedente conjuntos borrosos multidimensionales. Esta propuesta se presentó en [5]. Este TS FIS puede representar o modelar una clase de sistemas no lineales estáticos y dinámicos. En dicho modelo las reglas son de la forma

$$R^{(i)} : \text{Si } \mathbf{x} \text{ es } \mathbf{B}^{(i)}(\mathbf{x}) \text{ entonces } y^{(i)} = f^{(i)}(\mathbf{x})$$

donde $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_M]$ son las M entradas del modelo, $\mathbf{B}^{(i)}(\mathbf{x})$ es un conjunto borroso de dimensión M e $y^{(i)}$ es la salida para cada regla, definida por medio de la función $f^{(i)}(\mathbf{x})$. En general, se elige una función lineal afín de las entradas de la forma

$$f^{(i)}(\mathbf{x}) = a_0^{(i)} + a_1^{(i)}x_1 + \dots + a_M^{(i)}x_M$$

donde $a_j^{(i)}$ son escalares. La salida del modelo se obtiene mediante un promedio pesado de las salidas individuales de las reglas $y^{(i)}$. Son utilizadas funciones de normalización sobre las entradas y salidas. Por tanto, la nueva formulación para el TS FIS con normalización sobre las entradas y salida es

$$R^{(i)} : \text{Si } \mathbf{x}_n \text{ es } \mathbf{B}^{(i)}(\mathbf{x}_n) \text{ entonces } y_n^{(i)} = f^{(i)}(\mathbf{x}_n) \quad (1)$$

con

$$\begin{aligned} f^{(i)}(\mathbf{x}_n) &= a_0^{(i)} + a_1^{(i)}x_{n1} + \dots + a_M^{(i)}x_{nM} \\ &= a_0^{(i)} + \mathbf{a}^{(i)T} \mathbf{x}_n \end{aligned} \quad (2)$$

donde

$$\mathbf{a}^{(i)} = [a_1^{(i)} \quad \dots \quad a_M^{(i)}]^T.$$

La salida del modelo normalizado y_n , se calcula como un promedio pesado de la contribución de cada regla

$$y_n = \frac{\sum_{i=1}^L w^{(i)}(\mathbf{x}_n) y_n^{(i)}}{\sum_{i=1}^L w^{(i)}(\mathbf{x}_n)}. \quad (3)$$

Esta ecuación generalmente se expresa como

$$y_n = \sum_{i=1}^L \varphi^{(i)}(\mathbf{x}_n) (a_0^{(i)} + a_1^{(i)} x_{n1} + \dots + a_M^{(i)} x_{nM}) \quad (4)$$

con $\varphi^{(i)}(\mathbf{x}_n) = \frac{w^{(i)}(\mathbf{x}_n)}{\sum_{i=1}^L w^{(i)}(\mathbf{x}_n)}$

donde L es el número de reglas y w^i es el grado de verdad (valor de pertenencia) de la i -ésima regla. El valor de pertenencia se obtiene como una función de distancia de la forma

$$w^{(i)} = 1 / \sum_{j=1}^L \frac{d^{(i)}}{d^{(j)}} \quad (5)$$

para $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{v}^{(i)}$, y $w^{(i)} = 1.0$ para $\mathbf{x}_n = \mathbf{v}^{(i)}$. En esta expresión, $d^{(i)} = (\mathbf{x}_n - \mathbf{v}^{(i)})^T (\mathbf{x}_n - \mathbf{v}^{(i)})$ es el cuadrado de la distancia desde el dato \mathbf{x}_n hasta el centro $\mathbf{v}^{(i)}$.

Los vectores $\mathbf{v}^{(i)}$ son elementos representativos de cada regla. Los resultados obtenidos muestran una forma esférica en el espacio m -dimensional de las variables de entrada. Debido a (5) se cumple la condición $\sum_{i=1}^L w^i = 1$, por tanto, de (4) $w^i = \varphi$. Esta función de pertenencia lleva a cabo una partición borrosa del espacio de entrada [1].

La entrada y la salida normalizadas (\mathbf{x}_n e y_n) se obtienen como

$$\mathbf{x}_n = g_x(\mathbf{x}), \quad y_n = g_y(y) \quad (6)$$

Las funciones de normalización se utilizan con el objeto de facilitar el procedimiento para determinar la estructura del modelo y para mejorar su desempeño. Estas funciones de normalización traen consigo una corrección de escalas y una corrección estadística en los datos. Nótese que la normalización de la salida debe tener inversa.

3. PROPIEDADES DEL MODELO BORROSO

3.1. REVISIÓN DE LAS PROPIEDADES DE LOS MODELOS TS FIS

En esta sección se presentan algunas de las propiedades que ya se habían dado en [4]. Primeramente se considera la zona de validez para el modelo TS FIS. Luego se analiza la capacidad de

linealización del modelo y finalmente se introduce la propiedad de acople (o fusión) del modelo con respecto al dato disponible.

3.1.1 Zona de Validez del Modelo

La primera propiedad explora la Zona de Validez del Modelo (MVZ) para un modelo TS FIS. Esta propiedad da una fuerte caracterización del modelo para determinar la validez de su salida con respecto a un vector de entrada particular. Por tanto, cualquier dato de entrada al modelo TS FIS producirá una salida válida si este está dentro de la MVZ.

Cualquier modelo no lineal identificado por medio de los datos de entrada salida hereda todas las limitaciones que contiene el conjunto de datos. Por tanto, la validez del modelo está restringida a la zona determinada por señales utilizadas para producir el conjunto de datos [2].

Considerando el modelo TS FIS establecido en las ecuaciones (1) a la (5), el conjunto borroso del antecedente es una función de la distancia entre el dato y el centro del grupo. Debido a esto, no se tiene una información explícita entre el dato y la MVZ. La Fig. 1 muestra una alternativa para determinar si un dato de entrada está dentro de la MVZ. El ejemplo por simplicidad está en dos dimensiones, pero se puede extender a más.

Pequeños círculos representan los datos de entrada utilizados para la identificación. La figura también muestra una alternativa restrictiva para determinar la MVZ. En este método, se realiza una partición dura en la entrada, considerando el mismo número de grupos y los mismos valores de los centros del modelo. Un dato pertenecerá a un grupo si el grado de pertenencia es el máximo entre todos los grupos. Esto indica que el dato pertenece al grupo cuyo centro está más cerca del mismo. Se determina como valor de cota para cada grupo la distancia máxima desde el centro hasta el dato del grupo más alejado.

$$\delta_v^{(i)} = \max_{k=1}^{N^{(i)}} \left(\|\mathbf{x}_{n(i)k} - \mathbf{v}^{(i)}\| \right) \quad (7)$$

donde $\mathbf{x}_{n(i)k}$ es el k -ésimo dato del grupo i ($i=1, \dots, L$) y $N^{(i)}$ el número de datos del grupo i . Es posible establecer un incremento de la cota para incrementar la generalidad del modelo, pero manteniendo un valor de cota que refleje la riqueza del conjunto de datos. El procedimiento para analizar si un dato de entrada está dentro de la MVZ es:

- i) Calcular la distancia entre el dato y cada centro del modelo TS FIS.
- ii) Encontrar el centro al cual corresponde la mínima distancia y de esta manera determinar el grupo al cual corresponde esta mínima distancia.

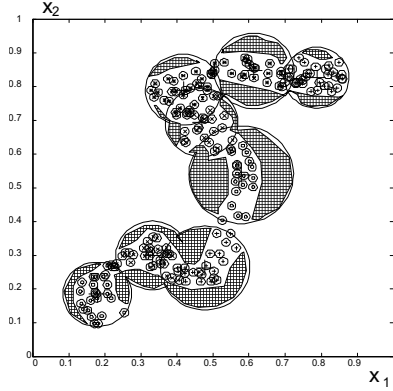


Fig. 1. MVZ teniendo en cuenta la norma-2 acotada.

iii) Si esta mínima distancia es menor que la cota del grupo, entonces el dato de entrada está dentro de la MVZ.

3.1.2 MODELO BORROSO MEDIANTE LINEALIZACIÓN

Debido a la forma lineal de la función del consecuente, el TS FIS presenta una característica de linealización que puede aprovecharse para la construcción de modelos. A partir de un modelo matemático del proceso, por medio de su linealización, puede obtenerse un modelo TS FIS. La siguiente proposición sustenta la equivalencia entre la linealización del modelo matemático y del modelo TS FIS. De esta forma es posible utilizar el modelo matemático linealizado para obtener los parámetros del TS FIS. La proposición supone que la función de pertenencia utilizada está dada por (5) y que $\mathbf{v}^{(n)} \neq \mathbf{v}^{(m)}$, para todo $n \neq m$ (es decir, no existen centros repetidos en la base de reglas).

Proposición 1: Linealización de una función continua en el centro de la base de reglas borrosas.

Dada una función continua

$$y(\mathbf{x}_n) = f(\mathbf{x}_n)$$

y el modelo TS FIS de la forma

$$y_f(\mathbf{x}_n) = \sum_{j=1}^L \left(w^{(j)} \left(\mathbf{a}^{(j)T} \mathbf{x}_n + a_0^{(j)} \right) \right)$$

con la función de pertenencia (5), y considerando $\mathbf{v}^{(n)} \neq \mathbf{v}^{(m)}$ para $m, n = 1, \dots, L$

$$\mathbf{a}^{(l)} = \left. \frac{\partial y(\mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{x}_n} \right|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{v}^{(l)}} \quad (8)$$

$$a_0^{(l)} = -\mathbf{a}^{(l)T} \mathbf{v}^{(l)} + y(\mathbf{v}^{(l)}) \quad (9)$$

Entonces, puede verificarse que

$$a) \lim_{\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{v}^{(i)}} y(\mathbf{x}_n) = \lim_{\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{v}^{(i)}} y_f(\mathbf{x}_n), \quad i = 1 a L$$

$$b) \lim_{\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{v}^{(i)}} \frac{\partial y(\mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{x}_n} = \lim_{\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{v}^{(i)}} \frac{\partial y_f(\mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{x}_n}, \quad i = 1 a L$$

■

La proposición anterior muestra que la función matemática y la función generada por el modelo TS FIS tienen el mismo valor de salida y las mismas derivadas en el centro del grupo. Una interpretación de esto sugiere que el modelo TS FIS y el proceso tienen la misma linealización en los centros de los grupos borrosos. Estos grupos se generan cuando el modelo TS FIS divide el espacio de entrada. Así, la linealización del modelo matemático en los centros del modelo TS FIS dan los parámetros del modelo TS FIS utilizando (8) y (9).

3.1.3 ACOPLAMIENTO (O FUSIÓN) DE MODELOS TS FIS

Esta propiedad permite que dos modelos TS FIS identificados con dos conjuntos de datos diferentes (de un mismo sistema) puedan ser acoplados (o fusionados) en un único modelo TS FIS. Esta propiedad es interesante cuando el sistema (proceso que se está identificando) poseen dos o más zonas donde su comportamiento dinámico es muy diferente. Un modelo TS FIS obtenido con un conjunto de datos único generalmente interpola las dos dinámicas del proceso produciendo una respuesta bastante distinta de la respuesta dinámica del sistema real. Sin embargo, se pueden obtener modelos independientes para cada zona con buen comportamiento. La siguiente proposición sugiere que se pueden acoplar (o fusionar) los modelos que se han obtenido con distintos conjuntos de datos, dando lugar a un modelo único que contempla el comportamiento de cada zona en particular.

Proposición 2: Acoplamiento (o fusión) de modelos TS FIS. Dados dos modelos borrosos

$$y_{fA}(\mathbf{x}_n) = \sum_{j=1}^{LA} \left(w_A^{(j)}(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{LA}) \left(\mathbf{a}^{(j)T} \mathbf{x}_n + a_0^{(j)} \right) \right)$$

$$w_A^{(j)}(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{LA}) = 1 / \left(\sum_{k=1}^{LA} \left(\frac{d^{(j)}}{d^{(k)}} \right) \right)$$

y

$$y_{fB}(\mathbf{x}_n) = \sum_{j=LA+1}^{LA+LB} \left(w_B^{(j)}(\mathbf{v}^{(LA+1)}, \dots, \mathbf{v}^{(LA+LB)}) \left(\mathbf{a}^{(j)T} \mathbf{x}_n + a_0^{(j)} \right) \right)$$

$$w_B^{(j)}(\mathbf{v}^{(LA+1)}, \dots, \mathbf{v}^{(LA+LB)}) = 1 / \left(\sum_{k=LA+1}^{LA+LB} \left(\frac{d^{(j)}}{d^{(k)}} \right) \right)$$

donde $\mathbf{v}^{(j)} \neq \mathbf{v}^{(k)}$ para $j, k = 1, \dots, LA + LB$ y asumiendo que los dos modelos TS FIS verifican (8)

y (9), entonces es posible obtener el modelo borroso acoplado (o fusionado)

$$y_{fAB}(\mathbf{x}_n) = \sum_{j=1}^{LA+LB} \left(w_{AB}^{(j)} \left(\mathbf{a}^{(j)T} \mathbf{x}_n + a_0^{(j)} \right) \right)$$

$$w_{AB}^{(j)}(\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(LA+LB)}) = 1 / \sum_{k=1}^{LA+LB} \left(\frac{d^{(j)}}{d^{(k)}} \right)$$

que satisface la siguiente condición:

$$a) \lim_{\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{v}^{(i)}} y_{fAB}(\mathbf{x}_n) = \lim_{\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{v}^{(i)}} y(\mathbf{x}_n), \quad i = 1 \text{ to } LA + LB$$

$$b) \lim_{\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{v}^{(i)}} \frac{\partial y_{fAB}(\mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{x}_n} = \lim_{\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{v}^{(i)}} \frac{\partial y(\mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{x}_n}, \quad i = 1 \text{ to } LA + LB$$

■

Esta proposición muestra que si dos modelos TS FIS son versiones linealizadas del modelo matemático obtenidos en zonas particulares, entonces el modelo TS FIS acoplado (o fusionado) obtenido con $LA + LB$ también es una versión linealizada del modelo matemático. Esto sugiere una herramienta para la identificación ya que es posible identificar dos o más modelos TS FIS en zonas diferentes con dinámicas diferentes y acoplar (o fusionar) en un modelo TS FIS único. Este modelo TS FIS único es un modelo general del proceso, pero que es diferente de un modelo TS FIS identificado con un único conjunto de datos formado por la suma de los datos usados para obtener los dos modelos locales.

Si el proceso de identificación se ha realizado en forma correcta en las zonas donde se han obtenido los modelos locales, entonces se satisfarán las siguientes condiciones

$$y_{fN}(\mathbf{x}_n) \approx y(\mathbf{x}_n) \quad (10)$$

$$\frac{\partial y_{fN}(\mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{x}_n} \approx \frac{\partial y(\mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{x}_n} \quad (11)$$

para cada uno de los modelos locales. Como el modelo será válido para la zona de validez, y los centros se encuentran dentro de la zona de validez, las ecuaciones (10) y (11) también serán válida para los centros de los modelos. Al acoplar los dos modelos las ecs. (10) y (11) seguirán manteniéndose para los centros del modelo acoplado (o fusionado)

3.2. ADAPTACIÓN O SINTONÍA DE PARÁMETROS

En esta sección se analiza la diferencia entre adaptación de parámetros y sintonía de parámetros. Este análisis es una extensión de las propiedades estudiadas previamente.

Cuando se realiza un proceso de identificación con un modelo tipo caja negra (con la capacidad de aproximar funciones con el grado de precisión necesaria) sobre un sistema no lineal en estado de

funcionamiento, se deben diferenciar el concepto de "ajuste de parámetros" y el concepto de "adaptación de parámetros". Se supone que un sistema en funcionamiento está siendo identificado en línea por un modelo tipo caja negra. Para claridad en la explicación se supone también que el algoritmo de identificación ajusta los parámetros del modelo periódicamente de acuerdo a un lote o conjunto de datos de entrada-salida. Ante un conjunto nuevo de datos pueden ocurrir distintas alternativas:

1 - que algunos de los parámetros del sistema físico hayan cambiado. De esto surge un error entre la salida del sistema y del modelo.

2 - que el sistema haya cambiado la zona de trabajo. Esto también provoca un error entre la salida del sistema y del modelo. Esto se debe a que el modelo no se tiene información del sistema en esa zona.

Ante la primera alternativa se debe realizar una "adaptación de los parámetros" del modelo para contemplar los cambios en los parámetros físicos del sistema. Este ajuste se debe realizar para reducir el índice de error. A este concepto se lo puede interpretar como "adaptación de los parámetros".

En la segunda alternativa, el ajuste de los parámetros puede ser perjudicial porque se cambia el comportamiento general del modelo, cuando lo que ocurre es que ha surgido una nueva zona de operación del sistema. En estas circunstancias se debe realizar una extensión del modelo a la zona nueva de trabajo.

Para poder llevar a cabo estos conceptos es importante la propiedad de acoplamiento y la propiedad de la determinación de la zona de validez del modelo. Lo que se debe hacer es analizar si el nuevo conjunto de datos pertenece a la zona de validez del modelo. Si este pertenece a dicha zona, se debe aplicar un algoritmo para el ajuste de los parámetros del modelo ya que se estaría ante un problema de "adaptación de los parámetros". Por lo contrario, si el nuevo conjunto de datos no pertenece a la zona de validez del modelo, se debe obtener un modelo local con este conjunto de datos y a través del acoplamiento de los modelos, obtener un modelo global.

3.3. DEPENDENCIA PARAMÉTRICA ENTRE EL SISTEMA Y EL MODELO

En esta sección se analiza el concepto de dependencia entre los parámetros del sistema real y los parámetros del modelo identificado cuando se utiliza el modelo TS FIS propuesto (o en forma general un aproximador universal de funciones).

Se supone que algunos parámetros del sistema físico cambian con el tiempo y que los parámetros del modelo se están identificando en forma periódica. En estas circunstancias, si el modelo utilizado se basa en los principios físicos que rigen al proceso (modelo tipo caja blanca), el cambio en un parámetro del sistema físico, producirá, después del proceso de

identificación, el cambio en un parámetro en el modelo. Por otro lado, cuando el sistema está modelado por un método genérico como puede ser un aproximador universal de funciones (modelos tipos caja negra) el cambio en un parámetro del sistema físico puede producir el cambio en uno, varios o todos los parámetros del modelo. En general, un cambio en un parámetro del sistema produce un cambio en muchos parámetros del modelo.

Como la complejidad del problema de cálculo es menor cuando es menor la cantidad de parámetros a ajustar, es conveniente que ante cambios en los parámetros del sistema cambien la menor cantidad de parámetros del modelo. Lo ideal sería que un cambio en el parámetro del sistema produzca un cambio en el parámetro del modelo.

El análisis de la dependencia entre los parámetros del sistema físico y los parámetros del modelo pueden brindar una mejor interpretación del sistema en conjunto.

Dado un sistema físico definido en entrada-salida (cuyo comportamiento depende de sus parámetros físicos) que se puede modelar en función de sus parámetros físico como

$$y(\mathbf{x}_n, \mathbf{p}) = f(\mathbf{x}_n, \mathbf{p})$$

donde \mathbf{p} es el vector de parámetros con significado físico; y es la salida del sistema y \mathbf{x}_n es el vector de entradas. Dicho sistema se modela a través de un método de identificación con un modelo borroso de la forma

$$y_f(\mathbf{x}_n, \mathbf{p}_f) = \sum_{j=1}^L \left(w^{(j)} \left(\mathbf{a}^{(j)T} \mathbf{x}_n + a_0^{(j)} \right) \right)$$

donde \mathbf{p}_f es el vector con los parámetros del modelo borroso. El objeto es analizar el comportamiento de los parámetros del modelo \mathbf{p}_f en función del comportamiento de los parámetros del sistema \mathbf{p} .

Una forma de evaluar este comportamiento es evaluando la derivada de los parámetros del modelo respecto de los parámetros del sistema, o sea, evaluando $\partial \mathbf{p}_f / \partial \mathbf{p}$. Dicho comportamiento es analizado para un modelo borroso obtenido por linealización en los centros de los conjuntos borrosos del antecedente (proposición 1).

Debido a que se considera que el centro de los conjuntos borrosos del antecedente $\mathbf{v}^{(l)}$ es fijo, los parámetros del consecuente constituyen el vector de parámetros a ajustar. Por lo tanto,

$$\mathbf{p}_f = [a_0^{(l)}, \mathbf{a}^{(l)}, \dots, a_0^{(L)}, \mathbf{a}^{(L)}].$$

Debido a que el modelo borroso se supone que se ha obtenido por linealización en los centros (según la proposición 1), resulta

$$\mathbf{a}^{(l)} = \left. \frac{\partial y(\mathbf{x}_n, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}_n} \right|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{v}^{(l)}}$$

$$a_0^{(l)} = y(\mathbf{x}_n, \mathbf{p}) \Big|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{v}^{(l)}} - \mathbf{v}^{(l)T} \left. \frac{\partial y(\mathbf{x}_n, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}_n} \right|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{v}^{(l)}}.$$

La derivada de los parámetros del modelo \mathbf{p}_f respecto de los parámetros del sistema \mathbf{p} resulta

$$\frac{\partial \mathbf{a}^{(l)}}{\partial \mathbf{p}} = \left. \frac{\partial^2 y(\mathbf{x}_n, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}_n \partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{v}^{(l)}}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial a_0^{(l)}}{\partial \mathbf{p}} = \left. \frac{\partial y(\mathbf{x}_n, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{v}^{(l)}} - \mathbf{v}^{(l)T} \left. \frac{\partial^2 y(\mathbf{x}_n, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}_n \partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{v}^{(l)}}. \quad (13)$$

Las ecuaciones (12) y (13) muestran cual es el efecto que se produce en los parámetros del consecuente cuando existe un cambio en los parámetros del sistema. Para aclarar este concepto se presenta un ejemplo sencillo.

Ejemplo:

El siguiente sistema puede ilustrar el concepto anterior.

Dado un sistema con una entrada y una salida de la forma

$$y(x, \mathbf{p}) = k_0 + k_1(x - x_0) + k_2(x - x_0)^2 \quad (14)$$

donde x es la entrada, y es la salida y $\mathbf{p} = [k_0, k_1, k_2, k_0]^T$ es el vector de los parámetros del sistema.

En este ejemplo

$$\frac{\partial y(x, \mathbf{p})}{\partial x} = 2k_2(x - x_0) + k_1$$

Por la evaluación respecto del parámetro k_0 ,

$$\frac{\partial y(x, \mathbf{p})}{\partial k_0} = 1, \quad \frac{\partial^2 y(x, \mathbf{p})}{\partial x \partial k_0} = 0 \quad (15)$$

por la sustitución de (15) en (12) y (13),

$$\frac{\partial \mathbf{a}^{(l)}}{\partial k_0} = 0, \quad \frac{\partial a_0^{(l)}}{\partial k_0} = 1.$$

Si se evalúa con respecto al parámetro k_1

$$\frac{\partial y(x, \mathbf{p})}{\partial k_1} = x - x_0, \quad \frac{\partial^2 y(x, \mathbf{p})}{\partial x \partial k_1} = 1 \quad (16)$$

y sustituyendo (16) en (12) y (13),

$$\frac{\partial \mathbf{a}^{(l)}}{\partial k_1} = 1, \quad \frac{\partial a_0^{(l)}}{\partial k_1} = (x - x_0) \Big|_{\mathbf{x} = \mathbf{v}^{(l)}} - \mathbf{v}^{(l)} = -x_0.$$

En forma similar para k_2

$$\frac{\partial y(x, \mathbf{p})}{\partial k_2} = (x - x_0)^2, \quad \frac{\partial^2 y(x, \mathbf{p})}{\partial x \partial k_2} = 2(x - x_0) \quad (17)$$

y sustituyendo (17) en (12) y (13),

$$\begin{aligned} \frac{\partial a^{(l)}}{\partial k_2} &= 2(x - x_0) \Big|_{x=v^{(l)}} = 2(v^{(l)} - x_0) \\ \frac{\partial a_0^{(l)}}{\partial k_2} &= (x - x_0)^2 \Big|_{x=v^{(l)}} - v^{(l)} 2(x - x_0) \Big|_{x=v^{(l)}} \\ &= x_0^2 - v^{(l)2} \end{aligned}$$

Finalmente, evaluando para x_0

$$\frac{\partial y(x, \mathbf{p})}{\partial x_0} = -2k_2(x - x_0) - k_1, \quad \frac{\partial^2 y(x, \mathbf{p})}{\partial x \partial x_0} = -2k_2 \quad (18)$$

Por la sustitución de (18) en (12) y (13),

$$\begin{aligned} \frac{\partial a^{(l)}}{\partial x_0} &= -2k_2 \Big|_{x=v^{(l)}} = -2k_2 \\ \frac{\partial a_0^{(l)}}{\partial x_0} &= (-2k_2(x - x_0) - k_1) \Big|_{x=v^{(l)}} - v^{(l)} 2k_2 \Big|_{x=v^{(l)}} \\ &= 2k_2 x_0 - k_1 \end{aligned}$$

Para analizar los resultados de este ejemplo se hace una analogía con la aproximación local por un polinomio de Taylor de segundo orden. Esta aproximación se obtiene como

$$\begin{aligned} y(x) \approx y(x_0) + \frac{dy(x)}{dx} \Big|_{x=x_0} (x - x_0) \\ + \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \Big|_{x=x_0} (x - x_0)^2 \end{aligned} \quad (19)$$

donde, después de contrastar (14) con (19), se pueden contrastar los parámetros

$$k_0 = y(x_0), \quad k_1 = \frac{dy(x)}{dx} \Big|_{x=x_0}, \quad k_2 = \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \Big|_{x=x_0}$$

Analizando estos resultados para un comportamiento local se puede inferir lo siguiente:

1. El cambio en un parámetro del sistema que cambie en una constante la ecuación del sistema (cambio del offset, en este caso $y(x_0)$, es decir k_0) producirá que los parámetros del modelo $a^{(l)}$ no cambien y los parámetros $a_0^{(l)}$ cambien en la misma proporción que el parámetro que cambió en el sistema. En la Fig. 2 se observa el comportamiento de la función (14) y de los parámetros para diferentes valores de k_0 . En la parte superior izquierda se observa la función (línea de puntos) y su aproximación (línea continua) para distintos valores de k_0 . En la parte superior derecha se muestran los distintos valores de los parámetros. En parte inferior se observa los valores que toman los parámetros $a^{(l)}$ y $a_0^{(l)}$ en función de los valores de los centros $v^{(l)}$ para los diferentes valores de k_0 .

2. El cambio en un parámetro del sistema que modifique la pendiente de la ecuación del sistema (cambio de la derivada primera $\frac{dy(x)}{dx}$, es decir k_1) producirá que los parámetros del modelo $a^{(l)}$ cambien en la misma proporción que el parámetro que cambió en el sistema. Los parámetros $a_0^{(l)}$ se modifican en una función constante que depende de x_0 . En la Fig. 3 se observa la influencia del cambio de k_1 en los valores de los parámetros $a^{(l)}$ y $a_0^{(l)}$.
3. El cambio en un parámetro del sistema que modifica la curvatura (concavidad o convexidad) de la ecuación del sistema (cambio de la derivada segunda $\frac{d^2 y(x)}{dx^2}$, es decir k_2) producirá un cambio en forma lineal en los parámetros del modelo $a^{(l)}$, respecto a la posición de los centros $v^{(l)}$ (al que corresponde el parámetro). Los cambios en los parámetros $a_0^{(l)}$ serán función cuadrática respecto a la posición de los centros $v^{(l)}$. En la Fig. 4 se observa la influencia del cambio de k_2 en los valores de los parámetros $a^{(l)}$ y $a_0^{(l)}$.
4. Un cambio en un parámetro del sistema que produzca un desplazamiento en x , es decir un cambio en x_0 de la ecuación del sistema, produce un cambio en los parámetros $a^{(l)}$ función de la curvatura de la función (de la derivada segunda $\frac{d^2 y(x)}{dx^2}$, es decir k_2). El cambio en los parámetros $a_0^{(l)}$ será función lineal del cambio en x_0 y de los parámetros k_2 (curvatura) y k_1 (pendiente). En la Fig. 5 se observa la influencia del cambio de x_0 en los valores de los parámetros $a^{(l)}$ y $a_0^{(l)}$.

4. CONCLUSIONES

En este artículo se analizaron distintas propiedades de un modelo borroso del tipo Takagi-Sugeno. A modo de introducción se repasaron propiedades previamente estudiadas. Entre éstas se resumieron la zona de validez del modelo, la capacidad de linealización en los centros de los conjuntos borrosos y la capacidad de acoplamiento o fusión de los modelos borrosos.

A continuación se analizó el comportamiento del modelo ante la presencia de datos nuevos cuando se están ajustando los parámetros en línea. Se diferenciaron los conceptos de adaptación de parámetros (el cual ocurre con un cambio en los parámetros físicos del sistema) con el de ajuste de parámetros (el cual ocurre por un cambio en la zona de trabajo del modelo).

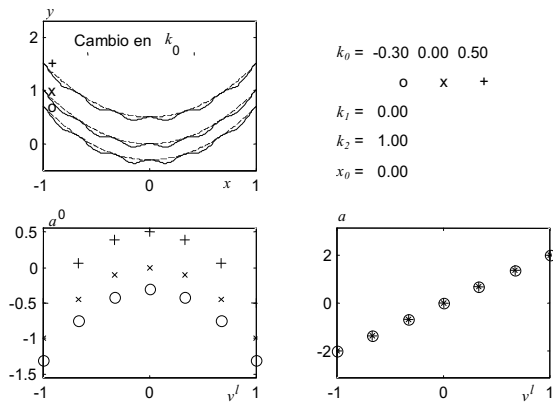


Fig.2. Cambio en $a^{(l)}$ y $a_0^{(l)}$ como consecuencia de un cambio en k_0

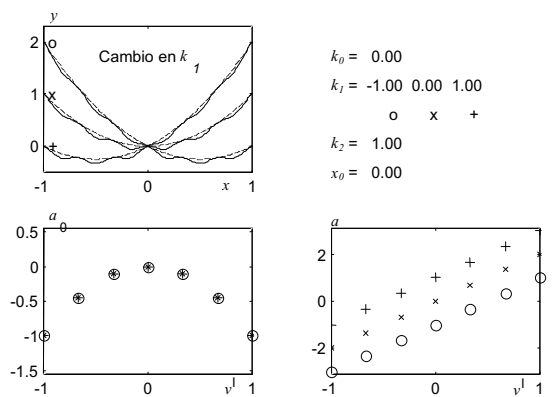


Fig. 3. Cambios en $a^{(l)}$ y $a_0^{(l)}$ como consecuencia de un cambio en k_1

En este trabajo también se analiza cual es el efecto que se produce en los parámetros del modelo cuando se produce un cambio en los parámetros del sistema. Se observa que, debido a la estructura elegida en el modelo borroso, se pueden determinar parte del comportamiento de los parámetros del sistema observando el comportamiento de los parámetros del modelo.

5. REFERENCIAS

- [1] Bezdek, J. C. (1987). Pattern Recognition whit Fuzzy Objective Function Algorithms, Second Printing. Plenum Press, New York.
- [2] Laukonen, E. and Passino, K (1995). Training fuzzy systems to perform estimation and identification. Eng. Applic. Artif. Intell. Vol. 8, No. 5, pp 499-514.
- [3] Peña, M., Carelli, R. and di Sciascio, F. (2000 a). Systems Identification using a Type of Takagi-Sugeno Fuzzy Model. SICICA 2000. Buenos Aires. Argentina.
- [4] Peña, M., Álvarez, H., Carelli, R. and di Sciascio, F. (2000 b), Validity, Linearization and Coupling Properties of a Takagi-Sugeno Fuzzy Model. IX Congreso Latinoamericano de Control Automático. Colombia.

[5] Peña, M. (2001) Control Basado en Modelos Borroso. Tesis de doctorado. Instituto de Automática, Fac. de Ingeniería, U.N.S.J. ISBN 950-605-278-6. EFU, San Juan, Argentina.

[6] Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy Identification of systems and its application to modeling an control, IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics, Vol. 15. No. 1. Pag. 116-132.

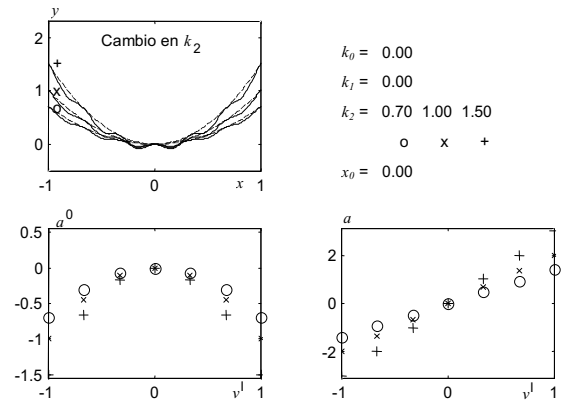


Fig. 4. Cambio en $a^{(l)}$ y $a_0^{(l)}$ como consecuencia del cambio en k_2

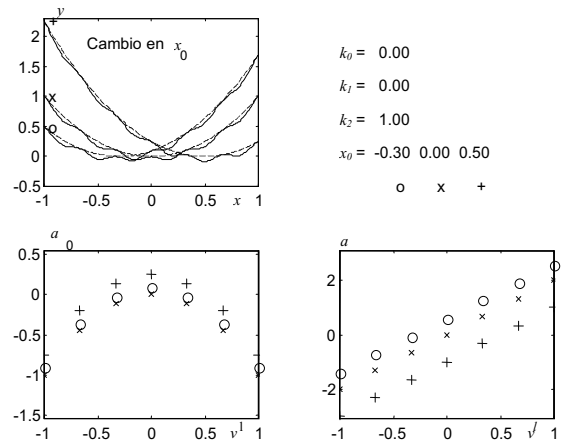


Fig. 5. Cambios en $a^{(l)}$ y $a_0^{(l)}$ como consecuencia del cambio en x_0