Universidad de Sevilla
Facultad de Ciencias.

# Resolución de ecuaciones funcionales planteadas mediante operadores lineales.





Memoria:
Que presenta para optar el grado a Doctor en Ciencias ~~Exactas~~ Matemáticas el Licenciado José Juan Rodriguez Cano.

Director de la tesis.

Pf. Dr. D. Antonio de Castro Brzezicki. Catedrático de Analisis I y II de la Facultad de Ciencias Universidad de Sevilla.

A. Castro

A la memoria de mi padre y a mi madre.

Quiero traer a mi recuerdo a cuantos profesores han contribuido a mi formación academica en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada y en espscial al profesor Dr. D. Inocencio Aldanondo quien acentuó en mi el espiritu de investigación, con su ejemplo como investigador y con su labor como profesor.

Mi mayor expresión de agradecimiento va para el Profesor Dr. D.Antonio de Castoro, que con sus especiales caracteristicas humanas ha contribuido a mantener en mi el animo asi como el empuje necesario para pder llegar a realizar este trabajo.

Sin su orientación tanto cientifica, como bibliografica no habria llegado a reunir los elementos que habria necesitado para la realización del mismo.

No quisiera olvidar a mis compañeros de carrera que supieron animarme para dar continuidad a mis investigaciones y en especial a Conchita López Moratalla, que tanta ayuda me prestó en los comienzos de mis investigaciones.

No puedo olvidar a mis compañeros de trabajo en el Departamento que supieron darme animos en cuantas ocasiones les fue posible a lo largo de las conferencias celebradas durante los cursillos monográficos.

Tambien quisiera agradecer la colaboración del Consejo Superior de Investigaciones Cientificas gracias a la ayuda economica recibida y al interes por la formación de investigadores en España sin las cuales no habria dispuesto de los medios necesarios para la dedicación a este trabajo.

Sevilla ~~Septiembre~~ Junio 1970.

# CAPITULO I.

1. ESTUDIO ELEMENTAL DE LAS ECUACIONES LINEALES, ELIGIENDO PREVIAMENTE COMO MODELO, EL DE LAS ECUACIONES LINEALES DE COEFICIENTES VARIABLES PLANTEADAS EN DIFERENCIAS FINITAS, SEPARANDO EL CONJUNTO OPERACIONAL DEL FUNCIONAL.
2. ESTRUCTURACION DEL CONJUNTO DE FUNCIONES Y DE OPERADORES.
3. CONSECUENCIAS

a) LA DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA OPERACIONAL Y FUNCIONAL, COMO CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LOS ESPACIOS OBJETO

b) DESCOMPOSICION DE UN OPERADOR EN FACTORES ELEMENTALES

## 1. ESTUDIO ELEMENTAL DE LAS ECUACIONES LINEALES EN DIFERENCIAS FINITAS.

Es conveniente hacer uso de tales ecuaciones, para que nos sirva de apoyo y a la vez para fijar las ideas, a la hora de presentar la resolución general de las ecuaciones funcionales planteadas mediante operadores de tipo lineal.

Propongamos el problema.Encontrar la función o las funciones que cumplen con la propiedad de satisfacer a la ecuación:

$$a_0(x)_x \Delta^k y(x) + a_1(x)_x \Delta^{k-1} y(x) + \dots + a_{k-1}(x)_x \Delta y(x) + a_k(x)_x y(x) = 0$$

La ecuación planteada, relaciona las propiedades que debe de cumplir la función solución no en un solo punto, sino en K puntos de un intervalo determinado.En principio cabría hacer el estudio del campo de resistencia de las soluciones, así como el de unicidad con unas condiciones determinadas.Una vez estudiada la existencia y unicidad de las soluciones de la ecuación, conviene estudiar el de la variable independiente.¿Para qué intervalos o intervalo la función que toma valores en ellos, es solución?

Nuestro problema no es este en concreto.Buscamos como ha sido planteada la ecuación y cuales son los elementos fundamentales para definir la misma.

Tal solución está definida , por las propiedades que satisfacen las diferencias sucesivas de la misma:la de verificar a una ecuación determinada.

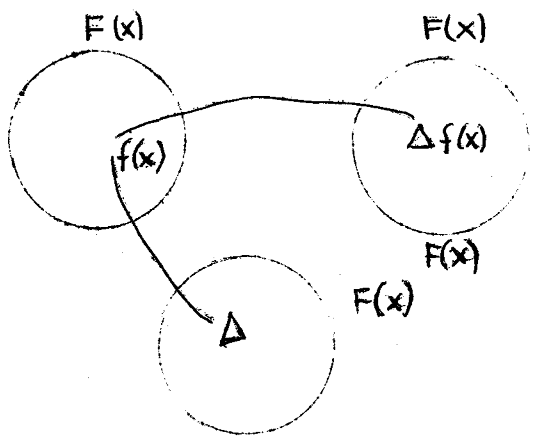
El concepto de diferencia es pues esencial para definir dicha ecuación. Aquí comienza la separación. Hay que distinguir del concepto de diferencia al de función. La diferencia tiene definición intrínseca e independiente de la función. En otras palabras la diferencia tiene existencia con independencia de la función a la cual se aplica. No debemos de olvidar que siempre hablamos de diferencia de una función, lo cual supone la existencia de unos elementos sobre los cuales actúa.

La definición intrínseca de la diferencia aparece como una aplicación; una aplicación definida en el conjunto de aplicaciones de un conjunto funcional en el mismo.

La definición de diferencia puede ser expresada como aquella aplicación que al actuar sobre una función determinada da origen a una nueva función definida por el valor de la diferencia que toma dicha función en dos puntos. Si a un punto lo anotamos con x y otro por x+h, la definición de esta aplicación quedaría en la forma:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

Para precisar que la diferencia entre los puntos es h, se suele también anotar en la forma $\underset{h}{\Delta} f(x)$. Por comodidad la utilizaremos en la forma $\Delta f(x)$, precisando en la igualdad la distancia entre los puntos. En un diagrama expresamos este resultado:




Conjunto de funciones que admiten la aplicación $\Delta$

Conjunto de las aplicaciones de F(x) sobre F(x)

## DEFINICION DE LAS DIFERENCIAS DE ORDEN K.

Una vez obtenida la diferencia de una función, al aplicarle la diferencia a la función obtenida, aparece lo que denominaremos diferencia segunda de la función primitiva y está definida:

$$\Delta^2 f(x) = \Delta[\Delta f(x)] = \Delta\{f(x+h) - f(x)\} = f(x+2h) - f(x+h) - f(x+h) + f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

En consecuencia la $\Delta^2$ es una aplicación autonoma. Al aplicarle directamente a una función se puede obtener la función resultado de una forma directa o bien haciendo uso de la diferencia.

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

Para definir la como aplicación autonoma, podriamos obtener como generalización de los resultados propuestos es decir.

$$\Delta^k f(x) = \Delta^{k-1}[\Delta f(x)] = \Delta^{k-1}[f(x+h) - f(x)] = \Delta^{k-1} f(x+h) - \Delta^{k-1} f(x) =$$
$$= \binom{k}{0} f(x+kh) - \binom{k}{1} f(x+[k-1]h) + \ldots + (-1)^k \binom{k}{k} f(x)$$

Como conclusión llegamos a que las aplicaciones $\Delta, \Delta^2, \Delta^k$ son autonomas dentro del conjunto de las aplicaciones del espacio funcional en el mismo, y pueden ser consideradas como generadas por una sola aplicación: la diferencia.

Definamos otras aplicaciones dentro de dicho conjunto. Estas aplicaciones pueden ser consideradas como aplicaciones fundamentales. Son la aplicación cero y la aplicación identidad.

La aplicación cero es aquella que al actuar sobre cualquier funcion la transforma en la función cero.

$$o[f(x)] = o$$

La aplicación identidad es la que transforma a toda función en ella misma.

$$I\, f(x) = f(x)$$

Conviene observar, que no todas las funciones admiten diferencias de todas las ordenes. Dado el planteamiento de la ecuación , es necesario que las funciones que consideramos admitan las difrerncias de orden K.

El espacio funcional está formado por todas las funciones que admiten la aplicación diferencia hasta un orden determinado que vendra impuesto por la ecuación.

ESTRUCTURACION DE LOS CONJUNTOS OBTENIDOS.

Aún no hemos llegado a dar una separación que nos precise en la ecuación lineal que es.Lo propiamente operacional de la misma y que es la parte funcional, pero nos encontramos en condiciones de hacer una estructuración tanto del conjunto operante como del funcional.

Estructura del conjunto funcional.

Consideramos el conjunto de funciones que admiten en un intervalo (a,b) las aplicaciones diferencias hasta el orden K.

Definimos una suma de funciones que anotamos por el símbolo $\dotplus$, como la función que resulta de obtener en cada punto la suma de los valores correspondientes a cada una de las funciones.

Anotado este conjunto por F(x) consideremos dicha suma con las propiedades:

I. $S(x) = f_1(x) \dotplus f_2(x) \qquad [f_1(x), f_2(x), S(x)] \in F(x)$

II. $f_1(x) \dotplus [f_2(x) \dotplus f_3(x)] = [f_1(x) \dotplus f_2(x)] \dotplus f_3(x) = f_1(x) \dotplus$
$\dotplus f_2(x) \dotplus f_3(x)$

III. $f(x) \dotplus 0 = 0 \dotplus f(x) = f(x)$

IV. $f(x) \dotplus [-f(x)] = [-f(x)] \dotplus f(x) = 0$

V. $f_1(x) \dotplus f_2(x) = f_2(x) \dotplus f_1(x)$

Las propiedades de las que goza el conjunto F(x) con esta suma es la de grupo abeliano.

De igual forma anotamos con el símbolo x y definimos un producto de funciones, como la función que resulta de considerar en cada punto el producto de los valores que toma cada función:

VI. $P(x) = f_1(x) \times f_2(x) \qquad [f_1(x), f_2(x), P(x)] \in F(x)$

VII. $f_1(x) \times [f_2(x) \times f_3(x)] = f_1(x) \times [f_2(x) \times f_3(x)] = f_1(x) \times$
$\times f_2(x) \times f_3(x)$

VIII. $f(x) \times 1 = 1 \times f(x) = f(x)$

IX. $f_1(x) \times f_2(x) = f_2(x) \times f_1(x)$

En general el elemento inverso de una función no existe. En el caso de existir estaría definido en donde la función toma valores distintos de cero

X. $f_1(x) \times [f_2(x) + f_3(x)] = f_1(x) \times f_2(x) + f_1(x) \times f_3(x)$

Estas diez propiedades le confieren al conjunto F(x), la estructura de anillo unitario conmutativo sin divisores de cero.

Ampliemos la estructura eligiendo al cuerpo de los reales con las leyes que anotamos $+_r$, $\times_r$ y definamos el producto de un número real por una función. Este producto lo anotamos .

XI. $\lambda \otimes f(x) = \lambda \times f(x)$ En el primer término, se considera como número real. En el segundo como función constante.

XII. $(\lambda_1 +_r \lambda_2) \otimes f(x) = \lambda_1 \times f(x) + \lambda_2 \times f(x)$

XIII. $\lambda \otimes [f_1(x) + f_2(x)] = \lambda \times f_1(x) + \lambda \times f_2(x)$

XIV. $(\lambda_1 \times_r \lambda_2) \otimes f(x) = \lambda_1 \otimes [\lambda_2 \times f(x)]$

XV. $1 \otimes f(x) = 1 \times f(x) = f(x)$

Las quince propiedades le confieren al conjunto F(x) la estructura de un álgebra. En particular las propiedades I, II, III, IV, V, XI, XII, XIII, XIV, XV, le dan estructura de espacio vectorial.

Estructura del conjunto operacional.

Vamos a darle estructura al conjunto $(0, I, \Delta, \Delta^2, \ldots, \Delta^k, \ldots)$. Para esto vamos a definir una suma y un producto que anotaremos respectivamente con los símbolos $\dot{+}$ y $\dot{\times}$

la suma de dos operadores queda definida:

I. $(\Delta^k \dot{+} \Delta^p) f(x) = \Delta^k f(x) + \Delta^p f(x)$

II. $\Delta^k \dot{+} (\Delta^p \dot{+} \Delta^q) = (\Delta^k \dot{+} \Delta^p) \dot{+} \Delta^q = \Delta^k \dot{+} \Delta^p \dot{+} \Delta^q$

III. $\Delta^k \dot{+} 0 = 0 \dot{+} \Delta^k = \Delta^k$

IV. $\Delta^k \dot{+} (\dot{-} \Delta^k) = (\dot{-} \Delta^k) \dot{+} \Delta^k = 0$

$(\dot{-} \Delta^k) f(x) = \Delta^k [- f(x)] = -[\Delta^k f(x)]$

V. $(\Delta^k \dot{+} \Delta^p) = (\Delta^p \dot{+} \Delta^k)$

la suma definida le confiere al conjunto las propiedades de un grupo abelinano

La multiplicación goza de las siguientes propiedades:

VI. $(\Delta^k \dot{\times} \Delta^p) f(x) = \Delta^k(\Delta^p \; f(x)) = \Delta^{k+p} f(x)$

VII. $\Delta^k \dot{\times} (\Delta^p \dot{\times} \Delta^q) = (\Delta^k \dot{\times} \Delta^p) \dot{\times} \Delta^q = \Delta^k \dot{\times} \Delta^p \dot{\times} \Delta^q$

VIII. $\Delta^k \dot{\times} I = I \dot{\times} \Delta^k = \Delta^k$

Introduciremos la existencia del elemento inverso, aunque su justificación requiere de la obtención de una solución particular de ecuaciones en diferencias finitas. El hecho de que no lo introduzcamos ahora es porque aún no hemos llegado al planteamiento de tales ecuaciones.

IX. $\Delta^k \dot{\times} \Delta^{-k} = \Delta^{-k} \times \Delta^k = I$

X. $\Delta^k \dot{\times} \Delta^p = \Delta^p \dot{\times} \Delta^k$

Según la ecuación propuesta, en ella no entran las diferencias de orden negativo. Prescindamos por ahora en cambiarle al conjunto $\{\Delta^k\}$ la propiedad IX.

XI. $\Delta^k \dot{\times} (\Delta^p \dot{+} \Delta^q) = \Delta^k \dot{\times} \Delta^p \dot{+} \Delta^k \dot{\times} \Delta^q$

Las once propiedades prescindiendo de la IX, le dan a $\{\Delta^k\}$ estructura de anillo unitario conmutativo sin divisores de cero.

Elijamos el anillo de las funciones, con las leyes anotadas por $+, \times$ y definamos un producto de elementos de F(x) por elementos de $\{\Delta^k\}$, a esta nueva ley la anotamos por $\boxtimes$

XII. $[a_0(x) \boxtimes \Delta^k] f(x) = a_0(x) \times [\Delta^k f(x)]$

XIII. $[a_0(x) + b(x)] \boxtimes \Delta^k = a_0(x) \boxtimes \Delta^k \dot{+} b(x) \boxtimes \Delta^k$

XIV. $a(x) \boxtimes (\Delta^k + \Delta^p) = a(x) \boxtimes \Delta^k \dot{+} a(x) \boxtimes \Delta^p$

XV. $[a(x) \times b(x)] \boxtimes \Delta^k = a(x) \boxtimes [b(x) \boxtimes \Delta^k]$

XVI. $1 \boxtimes \Delta^k = \Delta^k \boxtimes 1 = \Delta^k$

Las dieciseis propiedades le dan estructura de álgebra.

En particular las I, II, III, IV, V, XII, XIII, XIV, XV, XVI, las de un módulo.

Si en vez de haber utilizado el anillo de las funciones hubiésemos elegido el cuerpo de los reales, la estructura obtenida habría sido la de un espacio vectorial.

## BASE Y DIMENSION DEL ESPACIO OPERACIONAL.

Por tratarse de un módulo el conjunto admitirá una base según la cual todos los elementos del espacio engendrados por dicha base se expresarán como combinación lineal de ellos.

Diremos que dos elementos $\Delta^k$ y $\Delta^p$ son independientes cuando para que sea nula la suma:

$$a_k(x)\boxtimes\Delta^k + a_p(x)\boxtimes\Delta^p = 0$$

Aplicada a cualquier función f(x) es necesario que sean nulas las funciones $a_k(x)$ y $a_p(x)$.

De este hecho resulta que el conjunto formado por los elementos $(I,\Delta,\Delta^2,\ldots,\Delta^k,\ldots)$ son linealmente independientes. Por consiguiente constituyen una base de dicho espacio. Por ser el número de elementos linealmente independientes infinito numerable, esta será la dimensión del espacio.

Según esto, todo elemento del módulo se expresará en la forma:

$$P_k(\Delta) = a_0(x)\boxtimes\Delta^k \dotplus a_1(x)\boxtimes\Delta^{k-1} \dotplus \ldots \dotplus a_k(x)\boxtimes I$$

Después de haber estructurado el espacio operacional y el funcional podemos precisar en la ecuación propuesta al comienzo, cual es la parte operacional y cual la funcional de la misma.

La ecuación propuesta era:

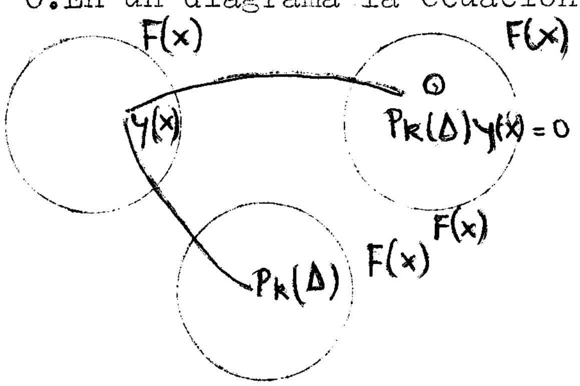
$$a_0(x)\times\Delta^k y(x) + a_1(x)\times\Delta^{k-1}\, y(x) + \ldots + a_k(x)\times y(x) = 0$$

Separando parte operacional y parte funcional

$$[a_0(x)\boxtimes\Delta^k]\, y(x) + (a_1(x)\boxtimes\Delta^{k-1})\, y(x) + \ldots + (a_k(x)\boxtimes I)\, y(x) = 0$$

$$(a_0(x)\boxtimes\Delta^k \dotplus a_1(x)\boxtimes\Delta^{k-1} \dotplus \ldots \dotplus a_k(x)\boxtimes I)\, y(x) = 0 \quad P_k(\Delta)y(x) = 0$$

La parte operacional de la ecuación es el $P_k(\Delta)$, las funciones y(x) y 0. En un diagrama la ecuación quedaría planteada así:



Conferida a la ecuación su carácter propiamente operacional funcional nos encontramos en condiciones de tener un estudio detallado del álgebra del espacio operacional.

## INDEPENDENCIA LINEAL EN EL ESPACIO OPERACIONAL

En términos generales, tomados los elementos del espacio operacional:

$$P_1(\Delta) = a_0^1(x)\boxtimes \Delta^k \dotplus a_1^1(x)\boxtimes\Delta^{k-1}\dotplus\ldots\dotplus a_k^1(x)\boxtimes I$$
$$\vdots$$
$$P_p(\Delta) = a_0^p(x)\boxtimes \Delta^m \dotplus a_1^p(x)\boxtimes\Delta^{m-1}\dotplus\ldots\dotplus a_m^p(x)\boxtimes I$$

Diremos que los elementos $P_1(\Delta),\ldots,P_p(\Delta)$ son linealmente independientes cuando para que sea nula la suma:

$$\lambda_1(x)\boxtimes P_1(\Delta)\dotplus\ldots\dotplus\lambda_p(x)\boxtimes P_p(\Delta) = 0$$

Aplicada a cualquier función $y(x)$ es necesario que sean nulas las funciones $\lambda_1(x) = \ldots = \lambda_p(x) = 0$

Como consecuencia de la independencia surge que los elementos, $P_1(\Delta),\ldots,P_p(\Delta)$ podrían constituir una base del espacio operacional. Una base del espacio ya escogida es la $\mathcal{B}(I,\Delta,\Delta^2,\ldots,\Delta^k,\ldots)$.

Es interesante elegir otras bases $\mathcal{B}(P_1(\Delta),\ldots,P_k(\Delta),\ldots)$, para resolver de una manera práctica el problema de la independencia funcional.

Estas bases serán seleccionadas en el momento oportuno, es decir en el capítulo tercero, en donde requerimos de una base tomada en els espacio funcional para darle solución a un problema de ecuaciones funcionales.

## INDEPENDENCIA FUNCIONAL.

Dadas las funciones $f_1(x),\ldots,f_k(x)$ decimos que son linealmente independientes, cuando para que sea nula la suma:

$$\lambda_1 \blacktriangle f_1(x)+\ldots+\lambda_k \blacktriangle f_k(x) = 0 \qquad \lambda_j \in R, \quad \blacktriangle \text{ ley externa}$$

Esta ecuación según la definición de ley externa se puede expresar en la forma:

$$\lambda_1 \times f_1(x)+\ldots+\lambda_k f_k(x) = 0$$

En donde cada $\lambda_j$ es una elemento perteneciente al conjunto de las funciones que pueden ser consideradas como funciones constantes

Es necesario que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$

Resolvamos de una manera práctica la independencia funcional.

Para esto traemos un concepto utilizado por Wronski, cuando el espacio operacional, está constituído por operadoras derivadas.

Si una función depende linealmente de otras, las diferencias consecutivas de dicha función también dependen en la misma combinación lineal de esas funciones.

Este teorema lo podíamos enunciar de otra forma basándonos en la separación del espacio operacional y funcional.

Si varias funciones son linealmente independientes, también lo son las funciones que resultan de aplicarle un operador del espacio operacional con tal que dicho operador no haga nulas a las funciones a que se aplica.

Utilicemos este concepto, y elijamos previamente un sistema de operadores independientes, $I, \Delta, \Delta^2, \ldots, \Delta^{k-1}$.

$\lambda_1 \times f_1(x) + \ldots + \lambda_k \times f_k(x) = 0$

Necesitamos de las propiedades lineales de los operadores, para realizar las operaciones en la ecuación propuesta.

Estas propiedades que vamos a definir son propiedades que consideramos como fundamentales y además las consideramos como el objeto del planteamiento de las ecuaciones funcionales de tipo lineal.

I. $\Delta^k\left(\lambda_1 \times f_1(x) + \lambda_2 \times f_2(x)\right) = \lambda_1 \times \Delta^k f_1(x) + \lambda_2 \times \Delta^k f_2(x) \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in R$

II. $P_k(\Delta)\left(\lambda_1 \times f_1(x) + \lambda_2 \times f_2(x)\right) = \lambda_1 \times P_k(\Delta)\, f_1(x) + \lambda_2 \times P_k(\Delta) f_2(x)$

$\lambda_1\ \lambda_2$ funciones constantes

La demostración de estas propiedades es elemental después de haber hecho el estudio del álgebra de los operadores.

Apliquemos al sistema de operadores elegido, a la ecuación propuesta.

$\lambda_1 \times f_1(x) + \ldots + \lambda_k\ f_k(x) = 0$

$\lambda_1 \times \Delta f_1(x) + \ldots + \lambda_k \times \Delta f_k(x) = 0$ aplicando $\Delta$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

aplicando $\Delta^{k-1}$: $\lambda_1 \times \Delta^{k-1} f_1(x) + \ldots + \lambda_k \times \Delta^{k-1} f_k(x) = 0$

para que este sistema admita solución única, es necesario:

$$C(\Delta) = \begin{vmatrix} f_1(x) & \ldots & f_k(x) \\ \Delta f_1(x) & \ldots & \Delta f_k(x) \\ \Delta^{k-1} f_1(x) & \ldots & \Delta^{k-1} f_k(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

En cuyo caso, la solución única sería $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$

En este caso las funciones $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ serían linealmente independientes.

Hay un sistema clásico de operadores independientes, para la determinación de la independencia funcional.

Introducimos la definición del operador elevador:

$E = (I + \Delta)$ como combinación del operador Identidad y del operador diferencia. Según esto:

$E\, f(x) = (I + \Delta)\, f(x) = f(x) + \Delta f(x) = f(x) + f(x+h) - f(x) =$

$= f(x+h)$

$E\, f(x) = f(x+h)$

Reiterando el proceso, damos la definición de los operadores $E^2$, $\ldots, E^k, \ldots$

$E^2 f(x) = (I + \Delta)^2 f(x) = (I + 2\Delta + \Delta^2)\, f(x) = f(x+2h)$

$E^k f(x) = (I + \Delta)^k f(x) = (I + \binom{k}{1}\Delta + \ldots + \binom{k}{k}\Delta^k)\, f(x) = f(x+kh)$

Los operadores, $(I, E, E^2, \ldots, E^k \ldots)$ son linealmente independientes.

Por consiguiente constituyen una base del espacio operacional.

Aplicando el sistema de operadores $(I, E, E^2, \ldots, E^{k-1})$ a la ecuación y teniendo en cuenta los conceptos enunciados

$$\lambda_1 \times f_1(x) + \ldots + \lambda_k f_k(x) = 0$$

aplicando $E$: $\lambda_1 \times E f_1(x) + \ldots + \lambda_k E f_k(x) = 0$

$\vdots$

aplicando $E^{k-1}$: $\lambda_1 \times E^{k-1} f_1(x) + \ldots + \lambda_k E^{k-1} f_k(x) = 0$

Para que admita solución única el sistema es necesario que:

$$C(E)=\begin{vmatrix} f_1(x)\dots f_k(x) \\ E\, f_1(x)\dots E f_k(x) \\ \vdots \\ E^{k-1} f(x)\dots E^{k-1} f_k(x)\end{vmatrix} \neq 0$$

Este determinante es conocido con el nombre de Cassoratiano y su no anulación inplica la independencia de las funciones $f_1(x),\dots,$ $f_k(x)$. Como problemas clásicos, en lo que respecta a ecuaciones funcionales de tipo lineal en diferencias finitas, suelen plantearse bien como la aplicación de un elemento engendrado por operadores E a la función o bien como aplicación de un elemento engendradogendrado por operadores $\Delta$. Tanto en un caso como en otro conviene la resolución directa de la ecuación en función de dichos operadores.

De una forma general si consideramos los sistemas de operadores independientes $\left[P_1(\Delta),\dots,P_{k-1}(\Delta)\right]$ y $\left[Q_1(E),\dots,Q_{k-1}(E)\right]$ diremos que las funciones $f_1(x),\dots,f_k(x)$ son independientes cuando uno de los determinantes:

$$C[P(\Delta)]=\begin{vmatrix} f_1(x)\dots f_k(x) \\ P_1(\Delta)f_1(x)\dots P_1(\Delta)f_k(x) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ P_{k-1}(\Delta)f_1(x)\dots P_{k-1}(\Delta)f_k(x)\end{vmatrix}\neq 0 \qquad C[P(E)]=\begin{vmatrix} f_1(x)\dots f_k(x) \\ Q_1(E)f_1(x)\dots Q_1(E)f_k(x) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ Q_{k-1}(E)f_1(x)\dots Q_{k-1}(E)f_k(x)\end{vmatrix}\neq 0$$

sea distinto de cero.

A estos determinantes les daremos el nombre de determinantes funcionales operacionales, y su no anulación inplica la independencia funcional.

Hagamos un estudio sobre el álgebra de los operadores $P_k(\Delta)$.

ALGEBRA DE LOS OPERADORES $P_k(\Delta)$.

A partir del conjunto de operadores $\{\Delta^k\}$, llegamos a definir los elementos $P_k(\Delta)$ por introducción de una ley externa y de un anillo adicional al de las funciones.

Los elementos $P_k(\Delta)$ vimos que eran de la forma:

$P_k(\Delta) = a_0(x)\boxtimes\Delta^k \dot{+} a_1(x)\boxtimes\Delta^{k-1} \dot{+}\ldots\dot{+} a_k(x)\boxtimes I$

Definimos como leyes de composición $\dot{+}$ y $\dot{x}$, las mismas que utilizamos para estructurar el conjunto $\{\Delta^k\}$

Las propiedades de que gozan esta suma y este producto son

I. $P_k(\Delta)\dot{+}P_p(\Delta) = S_k(\Delta) \quad k>p \qquad (P_k(\Delta), P_p(\Delta), S_k(\Delta)) \in \{P(\Delta)\}$

II. $P_k(\Delta)\dot{+}(P_p(\Delta)\dot{+}P_q(\Delta)) = (P_k(\Delta)\dot{+}P_p(\Delta))\dot{+}P_q(\Delta) = P_k(\Delta)\dot{+}P_p(\Delta)\dot{+}P_q(\Delta)$

III. $P_k(\Delta)\dot{+}0 = 0\dot{+}P_k(\Delta) = P_k(\Delta)$

IV. $P_k(\Delta)\dot{+}(\dot{-}P_k(\Delta)) = (-P_k(\Delta))\dot{+}P_k(\Delta) = 0$

V. $P_k(\Delta)\dot{+}P_p(\Delta) = P_p(\Delta)\dot{+}P_k(\Delta)$

Con respecto a la multiplicación

VI. $P_k(\Delta)\dot{x}\, P_p(\Delta) = P_{k+p}(\Delta) \qquad (P_k(\Delta), P_p(\Delta), P_{k+p}(\Delta)) \in \{P(\Delta)\}$

VII $P_k(\Delta)\dot{x}(P_p(\Delta)\dot{x}P_q(\Delta)) = (P_k(\Delta)\dot{x}P_p(\Delta))\dot{x}P_q(\Delta) = P_k(\Delta)\dot{x}P_p(\Delta)\dot{x}P_q(\Delta)$

Esta propiedad la demostraremos mas adelante.

VIII. $P_k(\Delta)\ \dot{x}\ I = I\ \dot{x}\ P_k(\Delta) = P_k(\Delta)$

La existencia del elemento inverso, al igual que en la de los operadores $\Delta^k$ requiere del estudio de las soluciones de una ecuación en diferencias.

La definición que dará justificada con posteridad. Por ahora solo admitiremos su existencia.

IX. $P_k(\Delta)\ \dot{x}\ (P_k(\Delta))^{-1} = (P_k(\Delta))^{-1}\dot{x}\ P_k(\Delta) = I$

Los operadores $\{P(\Delta)\}$ no poseen la propiedad conmutativa en un caso general. En el proximo apartado estudiaremos en que casos dos operadores son conmutativos.

Introducimos una ley externa que será la misma que definimos para los operadores $\Delta^k$. Para esto eligimos el anillo de las funciones que admiten los operadores $\{P(\Delta)\}$ hasta un orden preciso seguimos utilizando la suma y el producto de funciones con los simbolos + y x. Para la ley externa el simbolo $\boxtimes$

$$P_k(\Delta) = a_0(x) \boxtimes \Delta^k \dot{+} a_1(x) \boxtimes \Delta^{k-1} \dot{+} \dots \dot{+} a_k(x) \boxtimes I$$

X. $a(x) \boxtimes P_k(\Delta) = (a(x) \times a_0(x)) \boxtimes \Delta^k \dot{+} (a(x) \times a_1(x)) \boxtimes \Delta^{k-1} \dot{+} \dots \dot{+}$
$\dot{+} (a(x) \times a_k(x)) \boxtimes I$

XI. $(a(x) + b(x)) \boxtimes P_k(\Delta) = a(x) \boxtimes P_k(\Delta) \dot{+} b(x) \boxtimes P_k(\Delta)$

XII. $a(x) \boxtimes (P_k(\Delta) \dot{+} P_p(\Delta)) = a(x) \boxtimes P_k(\Delta) \dot{+} a(x) \boxtimes P_p(\Delta)$

XIII. $(a(x) \times b(x)) \boxtimes P_k(\Delta) = a(x) \boxtimes (b(x) \boxtimes P_k(\Delta))$

XIV. $1 \boxtimes P_k(\Delta) = P_k(\Delta)$

Con estas propiedades ha quedado definida el álgebra de los operadores $\{P(\Delta)\}$.

OPERADORES EN FORMA CANONICA.FACTORIZACION EN EL ALGEBRA $\{P(\Delta)\}$

Es necesario que al plantear una ecuación en el anillo operacional y pretender darle una solución, busquemos las soluciones más elementales de dicha ecuación.La factorización conduce a la búsqueda de factores en la forma más elemental.A estas formas elementales le daremos el nombre de operadores en forma canónica.

Vamos a introducir dos conceptos para distinguir las formas de los operadores básicos.

Orden de un operador lineal, es el que corresponde al de la diferencia máxima que interviene para definirlo.

Base de un operador lineal, es el número de funciones arbitrarias que necesita para ser definido.

Utilizaremos como formas canónicas operadores de clase 1, base 1 y operadores de clase 1 base 2.

Operador de base 1, clase 1 $\quad B = \Delta \dot{-} r(x)$

Operador de base 1, clase 2 $\qquad B' = a(x) \boxtimes \Delta \underset{\cdot}{-} b(x)$

## ASOCIATIVIDAD Y CONMUTATIVIDAD DE LOS OPERADORES BASICOS.

### ASOCIATIVIDAD.

El caso correspondiente a los operadores de base 1, puede considerarse como particular de los de base 2, clase 1, sin más que hacer la función a (x), constantemente igual a 1.

Estudiemos, pues, la asociatividad de los operadores B´.

$$(a_1(x) \boxtimes \Delta \underset{\cdot}{-} b_1(x)) \underset{\cdot}{\times} \left[(a_2(x) \boxtimes \Delta \underset{\cdot}{-} b_2(x)) \underset{\cdot}{\times} (a_3(x) \boxtimes \Delta \underset{\cdot}{-} b_3(x))\right] y =$$
$$= \left[(a_1(x) \boxtimes \Delta \underset{\cdot}{-} b_1(x)) \underset{\cdot}{\times} (a_2(x) \boxtimes \Delta \underset{\cdot}{-} b_2(x))\right] \underset{\cdot}{\times} (a_3(x) \boxtimes \Delta \underset{\cdot}{-} b_3(x)) y$$

Esta propiedade es larga de demostrar. Conviene expresar el operador $\Delta$ en función del operador elevador, y realizar la verificación por este método. Cada producto canónico quedaría de esta forma:

$$( a_k(x) \boxtimes \Delta \underset{\cdot}{-} b_k(x)) = a_k(x) \boxtimes (E \underset{\cdot}{-} I) \underset{\cdot}{-} b_k(x) = a_k(x) \boxtimes E \underset{\cdot}{-} (a_k(x) + b_k(x)) =$$
$$= (a_k(x) \boxtimes E \underset{\cdot}{-} c_k(x))$$

Demostremos la asociatividad de los operadores en la forma canónica $(a_k(x) \boxtimes E \underset{\cdot}{-} c_k(x))$

$$(a_1(x) \boxtimes E \underset{\cdot}{-} c_1(x)) \underset{\cdot}{\times} \{(a_2(x) \boxtimes E \underset{\cdot}{-} c_2(x)) \underset{\cdot}{\times} (a_3(x) \boxtimes E \underset{\cdot}{-} c_3(x))\} y \;\dot{=}$$

$a(x) \boxtimes E - (a\ (x) + b\ (x) = (a\ (x)\ E - c\ (x))$

$$= (a_1(x) \boxtimes E \underset{\cdot}{-} c_1(x)) \underset{\cdot}{\times} (a_2(x)\, a_3(x+h)\, E^2 y - (c_2(x)\, a_3(x) + a_2(x)\, c_3(x+h))$$
$$Ey + c_2(x) c_3(x) y\} =$$
$$= a_1(x)\, a_2(x+h)\, a_3(x+2h)\, E^3 y - (c_1(x) a_2(x) a_3(x+h) + a_1(x)\, c_2(x+h)$$
$$a_3(x+h) + a_1(x)\, a_2(x+h)\, c_3(x+2h))\, E^2 y + (c_1(x)\, c_2(x)\, a_3(x) +$$
$$+ c_1(x)\, a_2(x)\, c_3(x+h) + a_1(x)\, c_2(x+h)\, c_3(x+h)\, E\, y - c_1(x)\, c_2(x)$$
$$c_3(x)\, y = \{(a_1(x) \boxtimes E \underset{\cdot}{-} c_1(x)) \underset{\cdot}{\times} (a_2(x) \boxtimes E \underset{\cdot}{-} c_2(x))\} \underset{\cdot}{\times} (a_3(x) \boxtimes E \underset{\cdot}{-} c_3(x)) =$$
$$= \{(a_1(x)\, a_2(x+h)) \boxtimes E^2 \underset{\cdot}{-} (c_1(x)\, a_2(x) + a_1(x)\, c_2(x+h)) \boxtimes E \underset{\cdot}{+} b_1(x) b_2(x)\}$$
$$(a_3(x) \boxtimes E \underset{\cdot}{-} c_3(x))$$

Con lo cual queda probada la asociatividad de los operadores en la forma canónica $(a\ (x) \boxtimes E \underset{\cdot}{-} c\ (x))$ y por consiguiente la de los operadores $(a\,(x)\Delta \dot{-}\, b\,(x))$

CONMUTATIVIDAD.

De igual forma veremos que condiciones se requieren para que dos operadores básicos sean conmutativos. Elegiremos los operadores básicos de clase 1 y base 2, puesto que los de base 1 y clase 1 se pueden considerar como un caso particular de ellos.

$$\big(a_1(x)\Delta \dot{-}\, b_1(x)\big)\dot{\times}\big(a_3(x)\Delta - b_2(x)\big)y = \big(a_1(x)\Delta \dot{-}\, b_1(x)\big)\big(a_2(x)\Delta y - b_2(x)y\big) =$$
$$= a_1(x)\, a_2(x+h)\Delta^2 y + \big(a_1(x)\Delta a_2(x) - b_1(x)a_2(x) - a_1(x)b_2(x+h)\big)\Delta y +$$
$$+ \big(b_1(x)\, b_2(x) - a_1(x)\Delta\, b_2(x)\big)y \quad \big(a_2(x)\Delta \dot{-}\, b_2(x)\big)\dot{\times}\big(a_1(x)\Delta \dot{-}\, b_2(x)\big)y =$$
$$\big(a_2(x)\Delta \dot{-}\, b_2(x)\big)\big(a_1(x)\Delta y - b_1(x)y\big) = a_2(x)a_1(x+h)\Delta^2 y + \big(a_2(x)\Delta a_1(x) - b_2(x)$$
$$a_1(x) - a_2(x)\, b_1(x+h)\big)\Delta y + \big(b_2(x)b_1(x) - a_2(x)\Delta b_1(x)\big)y$$

Identificando coeficientes en ambas igualdades obtenemos:

$$a_1(x)\, a_2(x+h) = a_2(x)\, a_1(x+h)$$

$$a_1(x)\Delta a_2(x) - b_1(x)\, a_2(x) - a_1(x)b_2(x+h) = a_2(x)\Delta a_1(x) - b_2(x)a_1(x) -$$
$$- a_2(x)b_1(x+h)$$

$$b_1(x)\, b_2(x) - a_1(x)\Delta b_2(x) = b_2(x)b_1(x) - a_2(x)\Delta b_1(x)$$

Ecuaciones que reducidas quedan en la forma:

$$\Delta\, \frac{a_1(x)}{a_2(x)} = 0$$

$$a_1(x)\big(\Delta a_2(x) - \Delta\, b_2(x)\big) = a_2(x)\big(\Delta a_1(x) - \Delta\, b_1(x)\big)$$

$$a_1(x)\Delta\, b_2(x) = a_2(x)\Delta b_1(x)$$

De la segunda y tercera nos resulta sumando

$$a_1(x)\Delta\, a_2(x) = a_2(x)\Delta a_1(x)$$

en definitiva las tres ecuaciones quedarían en la forma:

$$\Delta\, \frac{a_1(x)}{a_2(x)} = 0$$
$$a_1(x)\Delta a_2(x) = a_2(x)\Delta\, a_1(x)$$
$$a_1(x)\Delta b_2(x) = a_2(x)\Delta\, b_1(x)$$

La segunda es consecuencia de la primera.

Por consiguiente las ecuaciones que había que resolver serían:

$$\Delta \frac{a_1(x)}{a_2(x)} = 0$$

$$\Delta b_1(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)} \Delta b_2(x)$$

la solución correspondiente a la ecuación :

$\Delta y(x) = 0$, sabemos que admite como solución una función cualquiera periódica de período h multiplicada por una constante K

Según esto la solución de $\Delta \frac{a_1(x)}{a_2(x)} = 0$ sería :

$\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = K\Pi(x)$ en donde $\Pi(x+h) = \Pi(x)$

Las funciones periódicas tienen la siguiente propiedad con respecto al operador $\Delta$

$\Pi(x)\Delta y(x) = \Delta \Pi(x).y(x)$

Resolviendo la segunda ecuación después de haber sustituido el valor de $\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = K\Pi(x)$

$\Delta b_1(x) = K\Pi(x)\Delta b_2(x) = \Delta K\Pi(x)\ b_2(x)$

$\Delta\left(b_1 - K\Pi(x)\ b_2(x)\right) = 0 \Rightarrow b_1 = K\Pi(x)b_2(x) + K'\Pi'(x)$

En donde $\Pi'(x+h) = \Pi'(x)$

En resumen si tenemos un operador básico en la forma $(a(x) \boxtimes \Delta \dotplus b(x))$ todos los operadores que conmutan con él son de la forma

$$\boxed{\left((a(x) \times \Pi_k(x)) \boxtimes \Delta \dotplus \Pi_k(x) \times b(x) \dotplus \lambda_k \Pi_k'(x)\right)}$$

en donde $\Pi_k(x+h) = \Pi_k(x)$ y $\Pi_k'(x+h) = \Pi_k'(x)$

Como caso particular de éste, tenemos el caso en que el operador da de base 1 y clase 1. Todos los operadores que conmutan a $(\Delta \dotplus r(x))$, son de la forma

$$\boxed{\left(\Pi_k(x) \boxtimes \Delta \dotplus \Pi_k(x) \times r(x) \dotplus \lambda_k \Pi_k'(x)\right)}$$

FACTORIZACION EN EL ALGEBRA $\{P(\Delta)\}$ DE UN POLINOMIO OPERACIONAL.

Prescindiendo de la existencia del elemento inverso, en la multiplicación habíamos llegado a la estructura en general de anillos no conmutativo.

Planteamos ahora una ecuación algebráica en el anillo operacional

$P_k(\Delta) = a_0(x) \boxtimes \Delta^k \dot{+} a_1(x) \boxtimes \Delta^{k-1} \dot{+} \dots \dot{+} a_k(x) = 0$

Esta ecuación cuando admite soluciones, expresables mediante las funciones conocidas, dichas soluciones expresadas mediante operadores elementales, en general no conmutan

Supuestas encontradas K factores elemntaales en una determinada descomposición y estos factores son de orden 1 clase 1, anotando por $(\Delta \dot{-} r(x))$ un factor en general, el polinomio quedaría expresado en la sìguiente forma:

$P_k(\Delta) = a_0(x) \boxtimes \Delta^k \dot{+} \dots \dot{+} a_k(x) = a_0(x) \boxtimes \{(\Delta \dot{-} r_1(x)) \dot{\times} (\Delta \dot{-} r_2(x)) \dot{\times} \dots \dot{\times} (\Delta - r_k(x))\}$

Si la factorización se hace en función de operadores de base 2 y clase 1 :

$P_k(\Delta) = a_0(x) \boxtimes \Delta^k \dot{+} \dots \dot{+} a_k(x) = (a_1(x) \boxtimes \Delta \dot{-} b_1) \dot{\times} (a\ (x) \boxtimes \Delta \dot{-} b_2) \dot{\times} \dots \dot{\times} (a_k(x) \boxtimes \Delta \dot{-} b_k(x))$

Ambas factorizaciones gozan de la propiedad asociativa.

Habíamos expresado las condiciones para que un operador básico conmutara. Es decir, los operadores que conmutan con $(a\ (x) \boxtimes \Delta - b(x))$ tenían la forma:

$\{(a(x)\Pi_k(x)) \boxtimes \Delta \dot{-} \Pi_k(x) \times b\ (x) \dot{-} \lambda_k \Pi'_k(x)\}$

Dividiendo la expresión por $\Pi_k(x)$:

$\Pi_k(x) \boxtimes (a\ (x) \boxtimes \Delta \dot{-} b\ (x) \dot{-} \lambda_k \Pi''_k(x)) \qquad \Pi''_k(x) = \frac{\Pi'_k(x)}{\Pi_k(x)}$

Y consideramos la expresión $(a(x) \boxtimes \Delta \dot{-} b(x) \dot{-} \lambda_k \Pi''_k\ (x))$ como forma reducida de los factores que conmutan con el operador dado.

Según esto un anillo que admite una factorización conmutativa en función de operdadores de orden 1 base 1 quedaría expresado:

$$P_k(\Delta) = a_0(x) \boxtimes \left(\Delta \dot{-} r(x) \dot{-} \lambda_1 \Pi_1(x)\right) \dot{x} \left(\Delta \dot{-} r(x) \dot{-} \lambda_2 \Pi_2(x)\right) \dot{x} \dots \dot{x}$$
$$\dot{x} \left(\Delta \dot{-} r(x) \dot{-} \lambda_k \Pi_k(x)\right)$$

En donde $\Pi_j(x+h) = \Pi_j(x)$

Si en vez de haber utilizado operadores basicos de orden 1 basel hubiesemos utilizado operadores de orden 1 base 2, la factorización quedaria:

$$P_k(\Delta) = \left(a(x) \boxtimes \Delta \dot{-} b(x) \dot{-} \lambda_1 \Pi_1(x)\right) \dot{x} \left(a(x) \boxtimes \Delta \dot{-} b(x) \dot{-} \lambda_2 \Pi_2(x)\right) \dot{x} \dots \dot{x}$$
$$\dot{x} \left(a(x) \boxtimes \Delta \dot{-} b(x) \dot{-} \lambda_k \Pi_k(x)\right)$$

Las condiciones que habia que establecer para que dado un anillo operacional,en función de los coeficientes pudiesemos expresar la posibilidad de admitir una factirización conmutativa, tendriamos que detemerlas del desarrollo de los factores elementales e identificando coeficientes y en general prescindiendo de las funciones periodicas en los factores elementales.

La descomposición en factores elementales en un caso general, es un problema dificil de resolver. Propongamos por ejemplo factorizar un polinomio operacional de segundo grado .

$$\left(E^2 + a_1(x) \boxtimes E \dot{+} a_2(x)\right) y = \left(E \dot{-} r_1(x)\right) \dot{x} \left(E \dot{-} r_2(x)\right) y =$$
$$= \left(E \dot{-} r_1(x)\right)\left(E\, y \dot{-} r_2 y\right) = E^2 y - \left(r_1(x) + r_2(x+h)\right) E\, y + r_1(x)$$
$$r_2(x)\, y = E^2 y + a_1(x)\, E\, y + a_2(x)\, y$$

Identificando coeficientes:

$$r_1(x) \times r_2(x) = a_2(x)$$
$$r_1(x) + r_2(x+h) = -\, a_1(x)$$

Sustituyendo en la segunda $\quad r_1(x) = \dfrac{a_2(x)}{r_2(x)}$

$$\frac{a_2(x)}{r_2(x)} + r_2(x+h) + a_1(x) = 0$$
$$r_2(x+h)\, r_2(x) + a_1(x)\, r_2(x) + a_2(x) = 0$$
$$\boxed{r_2(x)\, E\, r_2(x) + a_1(x)\, r_2(x) + a_2(x) = 0}$$

y expresada en funciones del operador $\Delta$.

$$\boxed{r_2(x) \Delta r_2(x) + r_2^2(x) + a_1(x)\, r_2(x) + a_2(x) = 0}$$

Ecuación analoga a la de Riccatti, pero en diferencias finitas de la que se sabe que conociendo una solución particular es posible determinar la solución general de la ecuación.

La forma mas general de presentar la ecuación de Riccatti en diferencias finitas es:

$$Ey(x) = y(x+h) = \frac{a(x)y(x) + b(x)}{c(x)y(x) + d(x)} \quad \text{en donde} \quad \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

Como vemos dicha factorización en general es imposible de separar. Pero este problema es el mismo que presenta la resolución de las ecuaciones en diferencias finitas, lineales.

Si hubiesemos tomado factores elementales, utilizando operadores basicos en función del operador E, las factorizaciones del anillo operacional seria:

$$P_k(E) = a_0(x) \boxtimes E^k \dotplus a_1(x) \boxtimes E^{k-1} \dotplus \dots \dotplus a_k(x) \boxtimes I$$

Si la factorización es asociativa solamente y son de base 2 clase 1.

$$P_k(E) = \left(a_1(x) \boxtimes E \dotminus b_1(x)\right) \dot{x} \left(a_2(x) \boxtimes E \dotminus b_2(x)\right) \dot{x} \dots \dot{x} \left(a_k(x) \boxtimes E \dotminus b_k(x)\right)$$

y la factorización es conmutativa:

$$P_k(E) = \left(a(x) \boxtimes E \dotminus b(x) \dotminus \lambda_1 \Pi_1(x)\right) \dot{x} \left(a(x) \boxtimes E \dotminus b(x) \dotminus \lambda_2 \Pi_2(x)\right) \dot{x} \dots \dot{x} \left(a(x) \boxtimes E \dotminus b(x) \dotminus \lambda_k \Pi_k(x)\right)$$

En resumen. Todo anillo operacional puede admitir una descomposición en factores elementales de orden 1 y base 2, que puede ser bien asociativa o asociativa y conmutativa. La descomposición a factores elementales de orden 1 y base 1 se puede considerar como caso particular de esta.

Las formas que pueden adoptar la facorización serian:

$$\boxed{P_k(\Delta) = \left(a_1(x) \boxtimes \Delta \dotminus b_1(x)\right) \dot{x} \left(a_2(x) \boxtimes \Delta \dotminus b_2(x)\right) \dot{x} \dots \dot{x} \left(a(x) \boxtimes \Delta \dotminus b_k(x)\right)} \quad \text{Asociativa.}$$

Factorización asociativa y conmutativa.

$$P_k(\Delta) = \left(a(x) \boxtimes \Delta \,\underset{\cdot}{-}\, b(x) \,\underset{\cdot}{-}\, \lambda_1 \Pi_1(x)\right) \underset{\cdot}{\times} \left(a(x) \boxtimes \Delta \,\underset{\cdot}{-}\, b(x) \,\underset{\cdot}{-}\, \lambda_2 \Pi_2(x)\right) \underset{\cdot}{\times} \ldots \underset{\cdot}{\times}$$
$$\underset{\cdot}{\times} \left(a(x) \boxtimes \Delta \,\underset{\cdot}{-}\, b(x) \,\underset{\cdot}{-}\, \lambda_k \Pi_k(x)\right)$$

Si el polinomio operacional está construido con el operador E:

Factorización asociativa.

$$P_K(E) = \left(a_1(x) \boxtimes E \,\underset{\cdot}{-}\, b_1(x)\right) \underset{\cdot}{\times} \left(a_2(x) \boxtimes E \,\underset{\cdot}{-}\, b_2(x)\right) \underset{\cdot}{\times} \ldots \underset{\cdot}{\times} \left(a_k(x) \boxtimes E \,\underset{\cdot}{-}\right.$$
$$\left.\underset{\cdot}{-}\, b_k(x)\right)$$

Factorización asociativa y conmutativa.

$$P_K(E) = \left(a(x) \boxtimes E \,\underset{\cdot}{-}\, b(x) \,\underset{\cdot}{-}\, \lambda_1 \Pi_1(x)\right) \underset{\cdot}{\times} \left(a(x) \boxtimes E \,\underset{\cdot}{-}\, b(x) \,\underset{\cdot}{-}\, \lambda_2 \Pi_2(x)\right) \underset{\cdot}{\times}$$
$$\underset{\cdot}{\times} \ldots \underset{\cdot}{\times} \left(a(x) \boxtimes E \,\underset{\cdot}{-}\, b(x) \,\underset{\cdot}{-}\, \lambda_K \Pi_k(x)\right)$$

Como sintesis de lo espuesto hasta ahora, hemos procurado construir un modelo de espacio operacional y funcional para proceder mas adelante y en abstracto a la resolución de ecuaciones funcionales planteadas mediante operadores lineales, es esta la razon por la que hemos procurado detallar cada uno de los pasos que utilizaremos en el planteamiento de una ecuación funcional lineal, asi como de la estructuración de los espacios funcionales y operacionales con sus algebras.

En lo que respecta al orden seguido, seha procedido: En primer lugar separar el espacio funcional del espacio operacional. En segundo lugar definir la autonomia de los operadores para entrar mas adelante en las estructuras.

Haciendo uso de las estructuras resolvemos el concepto de dependencia funcional y operacional y ayudado de las propiedades de los operadores, le damos un resultado practico a la determinación de la dependencia funcional. Por ultimo, estudiamos los operadores en forma canonica y buscamos las condiciones de asociatividad y conmutatividad, de esta forma, factorizaciamos los polinomios operacionales, distinguiendo los casos de que admitan factorización bien asociativa o factorización asociativa y conmutativa.

ESTRUCTURAS DE LOS ESPACIOS FUNCIONALES Y OPERACIONALES EN GENERAL.

Tomando como antecedente el espacio estudiado, partiremos, de dos conjuntos, uno que constituira la base para definir las aplicaciones, y el otro el conjunto de las aplicaciones del espacio base en si misma.

Como vamos a definir una aplicación base, en dicho conjunto, lo primero que le exigiremos al conjunto de partida es que las funciones que lo constituyen, admitan dicha aplicación. A partir de la aplicación elemental definida, sobre dicho conjunto, definiremos el conjunto de operaciones, obteniendolas por reiteración. Es decir aplicandole el resultado que se obtiene de aplicar la operación elemental a una función, el mismo operador elemental. Es por esta razon que el conjunto de funciones que pretendemos establecer, está caracterizado por el conjunto de funciones que admiten la realización de la operación basica en ellos un número K de veces, siendo K un número natural.

Definido el conjunto de funciones con esta propiedad, procedemos a darle una estructura a dicho conjunto definiendo dos leyes que anotaremos con los signos + y X, y que supondremos que gozan de las siguientes propiedades.

Antes de establecer, detallaremos que dicho conjunto, el de funciones puede estar definido tomando como variable en el caso mas general una compleja, y en casos mas restringidos, una real y en otros entera. A dicha variable la anotaremos por x, y el conjunto de tales funciones por F(x).

Propiedades.

I. $f_1(x) + f_2(x) = S(x) \qquad [f_1(x), f_2(x)\ S(x)] \in F(x)$

II. $f_1(x) + [f_2(x) + f_3(x)] = [f_1(x) + f_2(x)] + f_3(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$

III. $f_1(x) + 0 = 0 + f\ (x) = f\ (x)$

IV. $f\ (x) + (-f(x)) = (-f(x)) + f(x) = 0$

V. $f_1(x) + f_2(x) = f_2(x) + f_1(x)$

VI. $f_1(x) \times f_2(x) = P(x) \qquad (f_1(x), f_2(x), P(x)) \in F\ (x)$

VII. $f_1(x) \times (f_2(x) \times f_3(x)) = (f_1(x) \times f_2(x)) \times f_3(x) = f_1(x) \times f_2(x) \times f_3(x)$

VIII. $f_1(x) \times 1 = 1 \times f(x) = f(x)$

IX. $f_1(x) \times (f_2(x) + f_3(x)) = f_1(x) \times f_2(x) + f_1(x) \times f_3(x)$

Estas propiedades las tomaremos como generales en el conjunto funcional. En otras palabras la estructura que debe de poseer el conjunto de funciones dotado de dos leyes, es de anillo unitario.

La existencia de los elementos inversos en la multiplicación así como la de la propiedad conmutativa, serán específicas de determinados espacios funcionales que admiten dichas propiedades.

Tenemos el cuerpo de los reales, anotando las leyes definidas en él por $+_r$, $\times_r$ y definamos un producto de elementos del cuerpo por elementos del conjunto de funciones. Anotamos por  esta multiplicación y la definimos por:

X. $\lambda_1 \blacktriangle f\ (x) = \lambda_1 \times f(x) \qquad \lambda_1 \in R$ En el 2º miembro es considerada como función constante.

XI. $(\lambda_1 + \lambda_2) \blacktriangle f(x) = \lambda_1 \times f(x) + \lambda_2 \times f(x)$

XII. $\lambda_1 \blacktriangle (f_1(x) + f_2(x)) = \lambda_1 \times f_1(x) + \lambda_2 \times f_2(x)$

XIII. $(\lambda_1 \times_r \lambda_2) \blacktriangle f(x) = \lambda_1 \blacktriangle [\lambda_2 \times f(x)]$

XIV. $1 \blacktriangle f(x) = f(x)$

Con lo cual hemos obtenido una estructura de espacio vectoral.

ESTRUCTURA DEL ESPACIO OPERACIONAL.

En el conjunto de las aplicaciones $F(x)^{F(x)}$ definimos una aplicación L cuya característica fundamental es la de ser una aplicación lineal

La aplicación L, actuar sobre un elemento del espacio funcional , por regla general no tiene por que cambiar de anotación a la variable, pero en otros casos suele presentarse este tipo de transformación. Este no es problema porque en el caso de querer utilizar la misma variable, se pueden tomar recursos especiales y no cambiar de anotación al conjunto final.

Según esto, definimos la aplicación L

$$L\, f(x) = g(x) \qquad \begin{array}{l} f(x),\ g(x) \in F(x) \\ L \in F(x)^{F(x)} \end{array}$$

De una forma general construimos las aplicaciones $L^2, L^3, \ldots, L^k$, ... de la siguiente forma:

$$L^2 f(x) = L(L\, f(x)) = L\, g(x) = h(x)$$

y las aplicaciones $L^k$

$$L^k f(x) = L(L^{k-1} f(x))$$

Si añadimos las aplicaciones identidad y aplicación nula:

$$0\, f(x) = 0 \qquad I\, f(x) = f(x)$$

Hemos llegado a formar un subconjunto dentro de las aplicaciones de $F(x)^{F(x)}$. Este subconjunto está formado por los elementos:

$(0, I, L, L^2, \ldots, L^k, \ldots)$ prescindiendo de cero aplicación, adaptamos simbolicamente el conjunto con $\{L^k\}$

Definimos a continuación una suma y una multiplicación que irán anotadas por los símbolos $\dot{+}$ y $\dot{\times}$. Estas leyes definidas en el conjunto poseen las siguientes propiedades:

I. $(L^k \dot{+} L^p)\, f(x) = L^k f(x) + L^p f(x)$

II. $L^k \dot{+} (L^p \dot{+} L^q) = (L^k \dot{+} L^p) \dot{+} L^q = L^k \dot{+} L^p \dot{+} L^q$

III. $L^{k} \underset{\cdot}{+} 0 = 0 \underset{\cdot}{+} L^{k} = L^{k}$

IV. $L^{k} \underset{\cdot}{+} (\dot{-}L^{k}) = (\dot{-}L^{k}) + L^{k} = 0$

$(\dot{-}L^{k})\, f(x) = L^{k}(-f(x)) = -(L^{k} f(x)$

V. $L^{k} + L^{p} = L^{p} + L^{k}$

Con respecto al producto:

VI. $(L^{k} \underset{\cdot}{\times} L^{p}) * f(x) = L^{k}(L^{p} f(x)) = L^{k+p} f(x)$

VII. $L^{k} \underset{\cdot}{\times} (L^{p} \underset{\cdot}{\times} L^{q}) = (L^{k} \underset{\cdot}{\times} L^{p}) \underset{\cdot}{\times} L^{q} = L^{k} \underset{\cdot}{\times} L^{p} \underset{\cdot}{\times} L^{q}$

VIII. $L^{k} \underset{\cdot}{\times} I = I \underset{\cdot}{\times} L^{k} = L^{k}$

IX. $L^{k} \underset{\cdot}{\times} L^{-k} = L^{-k} \underset{\cdot}{\times} L^{k} = I$

La existencia del elemento $L^{-k}$, requiere de la solución de una ecuación funcional. Su introducción aquí es meramente formal.

Su justificación se hará más adelante.

X. $L^{k} \underset{\cdot}{\times} L^{p} = L^{p} \underset{\cdot}{\times} L^{k}$

XI. $L^{k} \underset{\cdot}{\times} (L^{p} \underset{\cdot}{+} L^{q}) = L^{k} \underset{\cdot}{\times} L^{p} \underset{\cdot}{+} L^{k} \underset{\cdot}{\times} L^{q}$

Estas propiedades, le confieren al conjunto L con las leyes $\underset{\cdot}{+}$ y $\underset{\cdot}{\times}$ la estructura de un cuerpo conmutativo.

Definimos un producto de elementos del anillo $F(x)$ por elementos del cuerpo y anotamos dicho producto con el símbolo $\otimes$.

Este producto goza de las siguientes propiedades:

XII. $(f(x) \otimes L\ )\ y(x) = f(x) \times L\ \ y(x)$

XIII. $f(x) \otimes (L^{k} \underset{\cdot}{+} L^{p}) = f(x) \otimes L^{k} + f(x) \otimes L^{p}$

XIV. $(f_{1}(x) + f_{2}(x)) \otimes L^{k} = f_{1}(x) \otimes L^{k} + f_{2}(x) \otimes L^{k}$

XV. $(f_{1}(x) \times f_{2}(x)) \otimes L^{k} = f_{1}(x) \times (f_{2}(x) \otimes L^{k})$

XVI. $1 \otimes L^{k} = L^{k}$

Con estas propiedades hemos obtenido el álgebra de los operadores L . Cabe resaltar como propiedades fundamentales la linealidad:

$$L^{k}(\lambda_{1} f_{1}(x) + \lambda_{2} f_{2}(x)) = \lambda_{1} L^{k} f_{1}(x) + \lambda_{2} L^{k} f_{2}(x)$$

Como estructura dentro del álgebra hemos obtenido, la de un módulo.

Independencia operacional. Base y dimención del espacio operacional.

Diremos que los operadores $L^k$ y $L^p$ son independientes cuando para que sea nula la suma:

$$\lambda_k(x) \otimes L^k + \lambda_p(x) \otimes L^p = 0$$

Aplicada a cualquier función, es necesario que sean nulas las funciones.

$$\lambda_k(x) = \lambda_p(x) = 0$$

De este hecho resulta que los operadores, $(1, L, L^2, \ldots, L^k, \ldots)$ son independientes, y por consiguiente constituyen una base del módulo.

Por consiguiente cualquier elemento del espacio se podrá ~~separar~~ expresar como una combinación lineal de ellos:

$$P_k(L) = a_0(x) \otimes L^k + a_1(x) \otimes L^{k-1} + \ldots + a_k(x) \otimes I$$

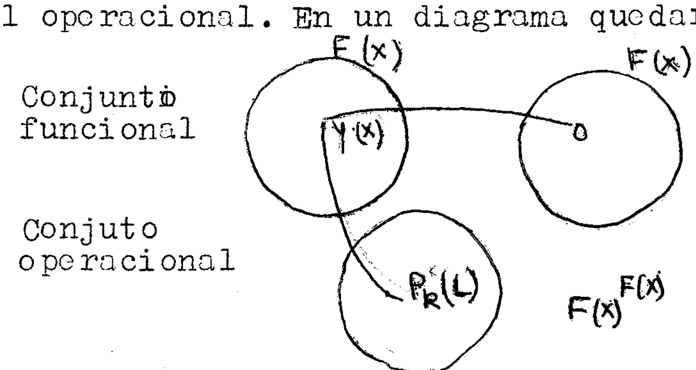
Elegidos ahora dos elementos cualquiera $P_k(L)$ y $P_p(L)$ podemos averiguar cuando son independientes, sin mas que obtener la suma de ellos multiplicada por elementos del anillo y ver si es posible que aplicada dicha suma a una función cualquiera sea cero sin necesidad de que lo seam las funciones por las que van multiplicadas los operadores.

$$a_k(x) \otimes P_k(L) + a_p(x) \otimes P_p(L) = 0$$

Seran independientes si es necesario que $a_k(x) = a_p(x) = 0$

Una base del espacio operacional está formada por los operadores $(I, L, L^2, \ldots, L^k, \ldots)$. Otra base podria ser elegida mediante operadores $(P_1(L), P_2(L), \ldots, P_k(L), \ldots)$. La dimension del módulo e infinita numerable.

Nos resulta como un hecho trivial el planteamiento de una ecuación funcional operacional. En un diagrama quedaria así:




$$P_k(L)\, y(x) = 0$$

## Algebra de los operadores $P(L)$.

En el conjunto construido con los operadores $L^k$, hemos llegado a formar el de los operadores $P_k(L)$. Utilizando las mismas leyes definidas en el conjunto $\{L^k\}$ ,anotadas con los simbolos $\underset{\cdot}{+}$ y $\underset{\cdot}{x}$

I. $P_k(L) \underset{\cdot}{+} P_h(L) = S_k(L) \qquad k > h$

$\left[P_k(L) \underset{\cdot}{+} P_h(L)\right] y(x) = P_k(L)\, y(x) + P_h(L)\, y(x)$

II. $P_k(L) \underset{\cdot}{+} \left(P_p(L) \underset{\cdot}{+} P_q(L)\right) = \left(P_k(L) \underset{\cdot}{+} P_p(L)\right) + P_q(L) = P_k(L) \underset{\cdot}{+} P_p(L) \underset{\cdot}{+}$
$\underset{\cdot}{+} P_q(L)$

III. $P_k(L) + 0 = 0 \underset{\cdot}{+} P_k(L) = P_k(L)$

IV. $P_k(L) \underset{\cdot}{+} \left(\underset{\cdot}{-} P_k(L)\right) = \left(\underset{\cdot}{-} P_k(L)\right) \underset{\cdot}{+} P_k(L) = 0$

V. $P_k(L) \underset{\cdot}{+} \{P_h(L)\} = \{P_h(L)\} \underset{\cdot}{+} P_k(L)$

Con respecto a la múltiplicación

VI. $P_k(L) \underset{\cdot}{x} P_h(L) = P_{k+h}(L) \qquad \left(P_k(L) \underset{\cdot}{x} P_h(L)\right) y(x) = P_k(L) \left(P_h(L)\, y(x)\right) = P_{k+h}(L)\, y(x)$

VII. $P_k(L) \underset{\cdot}{x} \left(P_p(L) \underset{\cdot}{x} P_q(L)\right) = \left(P_k(L) \underset{\cdot}{x} P_p(L)\right) \underset{\cdot}{x} P_q(L) =$
$\equiv P_k(L) \underset{\cdot}{x} P_p(L) \underset{\cdot}{x} P_q(L)$

VIII. $P_k(L) \underset{\cdot}{x} 1 = 1 \underset{\cdot}{x} P_k(L) = P_k(L)$

IX. $P_k(L) \underset{\cdot}{x} \left(P_k(L)\right)^{-1} = \left(P_k(L)\right)^{-1} \underset{\cdot}{x} P_k(L) = 1.$

La existencia, requiere de la solución de una ecuación funcional. El planteamiento es meramente formal.

La propiedad conmutativa en general no la posee. Hay que definir en primer lugar operadores básicos y estudiar las condiciones de permutabilidad de dichos factores elementales.

Definimos una multiplicación de elementos del anillo por elementos del conjunto $\{P(L)\}$ y seguimos anotando dicha ley por $\otimes$

X. $a(x) \otimes \left(a_0(x) \otimes L^k \underset{\cdot}{+} \ldots \underset{\cdot}{+} a_k(x) \otimes I\right) = \left(a(x) \times a_0(x)\right) \otimes L^k \underset{\cdot}{+} \ldots \underset{\cdot}{+}$
$\underset{\cdot}{+} \left(a(x) \times a_k(x)\right) \otimes I$

XI. $a(x) \otimes \left[P_k(L) \underset{\cdot}{+} P_h(L)\right] = a(x) \otimes P_k(L) \underset{\cdot}{+} a(x) \otimes P_h(L)$

XII. $\left(a(x) + b(x)\right) \otimes P_k(L) = a(x) \otimes P_k(L) \underset{\cdot}{+} b(x) \otimes P_k(L)$

XIII. $[a(x) \times b(x)] \otimes P_k(L) = a(x) \otimes [b(x) \otimes P_k(L)]$

XIV. $1 \otimes P_k(L) = P_k(L)$

Con lo cual hemos obtenido el algebra del conjunto $P(L)$

Conviene destacar la linealidad de los operadores.

$$P_k(L)[\lambda_1 \times f_1(x) + \lambda_2 \times f_2(x)] = \lambda_1 \times P_k(L)\, f_1(x) + \lambda_2 \times P_k(L)\, f_2(x)$$

Independencia funcional. Resolución práctica de la misma.

Decimos que las funciones $f_1(x), \ldots, f_k(x)$, son linealmente independientes, cuando en la ecuación:

$$\lambda_1 \times f_1(x) + \ldots + \lambda_k \times f_k(x) = 0$$

Solo es posible encontrar los escalares $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$, para que la ecuación admita solución

Establecemos el siguiente teorema:

Si una función depende linealmente de otras, las funciones que resultan de aplicarle un sistema de operadores independientes son también dependientes y en la misma combinación lineal.

La demostración de este teorema, es consecuencia de la linealidad de los operadores.

Vamos a elegir dos sistemas básicos de operadores independientes $S_1\ (I, L, L^2, \ldots, L^{k-1})$, $\quad S_2(I, P_1(L), P_2(L), \ldots, P_{k-1}(L))$

Apliquemos el teorema a la ecuación propuesta:

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \ldots + \lambda_k \times f_k(x) = 0$$

Aplicando el primer sistema de operadores, tendríamos el siguiente de ecuaciones:

aplicando $I$ $\quad \lambda_1 \times I\, f_1(x) + \lambda_2 \times I\, f_2(x) + \ldots + \lambda_k \times I\, f_k(x) = 0$

aplicando $L$ $\quad \lambda_1 \times L\, f_1(x) + \lambda_2 \times L\, f_2(x) + \ldots + \lambda_k \times L\, f_k(x) = 0$

$\vdots$

aplicando $L^{k-1}$ $\quad \lambda_1 \times L^{k-1} f_1(x) + \lambda_2 \times L^{k-1} f_2(x) + \ldots + \lambda_k \times L^{k-1} f_k(x) = 0$

Este sistema admite solución única $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ solamente en el caso de que el determinante:

$$\Delta(L) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_k(x) \\ L\, f_1(x) & L\, f_2(x) & \dots & L\, f_k(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ L^{k-1} f_1(x) & L^{k-1} f_2(x) & \dots & L^{k-1} f_k(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

La condición suficiente para que las funciones $f_1(x), \dots, f_k(x)$, sean independientes, es que el determinante $\Delta(L) \neq 0$

Si utilizamos como sistema de operadores independientes, el sistema dos aplicando reiteradamente, cada uno de los operadores a la ecuación resultaría como sistema:

aplicando $I$ $\quad \lambda_1 \times I\, f_1(x) + \lambda_2 \times I\, f_2(x) + \dots + \lambda_k I\, f_k(x) = 0$

aplicando $P_1(L)$ $\quad \lambda_1 \times P_1(L)\, f_1(x) + \lambda_2 \times P_1(L)\, f_2(x) + \dots +$

$+ \lambda_k \times P_1(L)\, f_k(x) = 0$

$\vdots$

aplicando $P_{k-1}(L)$ $\quad \lambda_1 \times P_{k-1}(L)\, f_1(x) + \lambda_2 \times P_k(L)\, f_2(x) + \dots +$

$+ \lambda_k \times P_{k-1}(L)\, f_k(x) = 0$

Este sistema admite solución única cuando:

$$\Delta P(L)) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_k(x) \\ P_1(L)\, f_1(x) & P_1(L)\, f_2(x) & \dots & P_1(L)\, f_k(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{k-1}(L)\, f_1(x) & P_{k-1}(L)\, f_2(x) & \dots & P_{k-1}(L)\, f_k(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

Los dos determinantes, que daremos el nombre de funcionales operacionales, su no anulación implican la independencia lineal de las funciones.

Operadores básicos.Factorización en el anillo operacional.

A partir del operador L, condideramos los operadores elementales o en forma canónica, construídos a partir de él.

En estos operadoresdistinguiremos dos conceptos para poder caracterizarlos. Base de un operador canónico, construído a partir de un operador lineal **L**, es el número de funciones que necesita para ser definido. El orden de un operador básico es el que corresponde , al del operador L, que interviene para definir.

Operadores de orden 1 y base 1.

Como forma canónica de dichos operadores adoptaremos la:

$$L_1 = L \top r_1(x)$$

y como forma canónica de los de base 2 y orden 1 :

$$L'_1 = a_1(x) \otimes L \top b_1(x)$$

Como se ve claramente, los operadores básicos de base 1 orden 1 pueden considerarse como un caso particular, de los de base 2 y orden 1 sin más que hacer constantemente igual a 1 la función $a_1(x)$.

Después de haber definido los conceptos correspondientes a los operadores en forma canónica, proponemos el estudio de la asociatividad y conmutatividad de los mismos.

Para esto elegimos los operadores en la forma canónica de base 2 y orden 1.

$$(a_1(x) \otimes L \top b_1(x)) \underset{\cdot}{\times} ((a_2(x) \otimes L \top b_2(x)) \underset{\cdot}{\times} (a_3(x) \otimes L \top b_3(x)) =$$

$$= ((a_1(x) \otimes L \top b_1(x)) \underset{\cdot}{\times} (a_2(x) \otimes L \top b_2(x)) \underset{\cdot}{\times} (a_3(x) \otimes L \top b_3(x))$$

Esta propiedad podrá admitirse como general, pero por no ser una consecuencia de la linealidad de los operadores elementales es necesario verificarla para cada caso particular.

En cuanto a lo que se refiere a la conmutatividad de operadores básicos, el problema es más complicado.

El procedimiento para verificarla es bien sencillo.

Se trata de comprobar si:

$$(a_1(x) \otimes L \top b_1(x)) \underset{\cdot}{\times} (a_2(x) \otimes L \top b_2(x)) = (a_1(x) \otimes L \top b_1(x))$$

$(a_2(x) \otimes L \dotplus b_2(x))$

Para esto se desarrolla las aplicaciones según la definición dada al operador L. Utilizando las propiedades del espacio vectorial, por resultar una ecuación en la forma:

$$a(x) \otimes L^2 + b(x) \otimes L + c(x) \otimes I = 0$$

y ser linealmente independientes, los operadores I, L y $L^2$ tendrían que ser $a(x) = b(x) = c(x) = 0$

De estas ecuaciones deduciríamos las condiciones que tendrían que poseer los operadores básicos para que conmutaran.

De una forma general y por los resultados obtenidos en los operadores elementales, cuando el operador L es un operador derivada o un operador diferencia, podíamos admitir de una manera formal que los operadores elementales que conmutan con el operador $(a(x) \otimes L \dotplus b(x))$ son de la forma $(a(x) \otimes L \dotplus b\ (x) \dotplus \lambda)$, en donde $\lambda$, puede ser una función variable o una función constante. Insistimos en que esta manera de separar es meramente formal. En el caso de que se tratase de operadores en forma matricial, en donde a $(x)$ es una matriz así como $b(x)$ y $\lambda$, y L es el operador D o el $\Delta$, requeriría la permutabilidad de las tres matrices.

Una vez encontradas las condiciones de asociatividad y conmutatividad, distinguiríamos en una ecuación algebráica tomada en el anillo operacional, dos tipos de factorización:

Factorización solo asociativa:

$$P_k(L) = a_0(x) \otimes L^k + a\ (x) \otimes L^{k-1} + \ldots + a_k(x) \otimes I = 0$$

$$P_k(L) = (a_1(x) \otimes L \dotplus b_1(x)) \dot{\times} (a_2(x) \otimes L \dotplus b_2(x)) \dot{\times} \ldots \dot{\times} (a_k(x) \otimes L \dotplus b_k(x))$$

y de una manera formal expresamos la factorización asociativa y conmutativa en la forma:

$$P_k(L) = (a(x) \otimes L \dotplus b\ (x) \dotplus \lambda_1) \dot{\times} (a(x) \otimes L \dotplus b\ (x) \dotplus \lambda_2) \dot{\times} \ldots \dot{\times} (a\ (x) \otimes L \dotplus b(x) \dotplus \lambda_3)$$

Donde sería necesario previamente buscar las condiciones de conmutatividad de los factores elementales, estudiándola junto a la conmutatividad del anillo funcional.

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, pueden ser funciones variables, con algunas restricciones.

## TEMA 2

### TIPOS CLASICOS DE ECUACIONES FUNCIONALES LINEALES.-

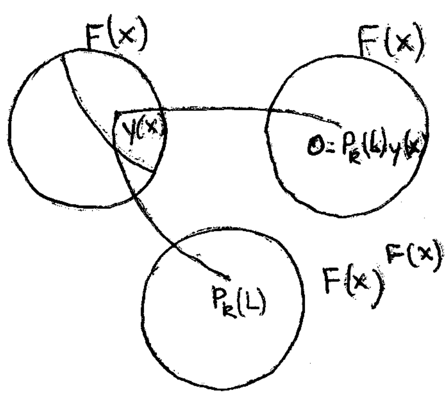
### TEOREMAS FUNDAMENTALES PARA LA RESOLUCION DE LAS ECUACIONES FUNCIONALES.-

### PLANTEAMIENTO DE ECUACIONES FUNCIONALES.-

Ya hemos tratado en el primer capítluo, un aspecto de este problema con el fin de hacer una separación de las partes funcional y operacional en una ecuación que clásicamente era conocida como ecuación lineal y homogénea.

Bajo un punto de vista operacional, así es como se nos plantean las ecuaciones funcionales.

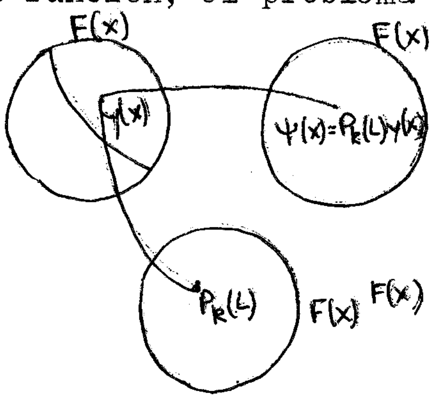
PRIMER PROBLEMA.- Conocido un operador $P_k(L)$, considerado como elemento del espacio operacional, se pide hallar todas las funciones tales que al aplicarle el operador $P_k(L)$, las transformen en la función cero.



la ecuación queda planteada en la forma $\boxed{P_k(L)\ y(x) = 0}$

En el diagrama por y(x) hemos expresado cualquiera de las funciones que pueden satisfacer a estas ecuaciones. En términos operacionales, sería equivalente a encontrar el núcleo del operador $P_k(L)$ que actúa sobre un espacio funcional ya definido. En otros términos el conjunto de funciones que satisfacen a la ecuación funcional, constituyen el núcleo del operador $P_k(L)$. A esta ecuación se le conoce con el nombre de ecuación funcional lineal homogénea, de orden K, siendo K el orden máximo del operador L, que interviene en la definición del operador $P_k(L)$.

<u>SEGUNDO PROBLEMA.-</u> Dado un operador $P_k(L)$, se pide encontrar todas las funciones y(x), tales que al aplicarle el operador se transformen en una función conocida del espacio funcional. Si expresamos por $\psi(x)$ esta función, el problema mediante un diagrama quedaría así:

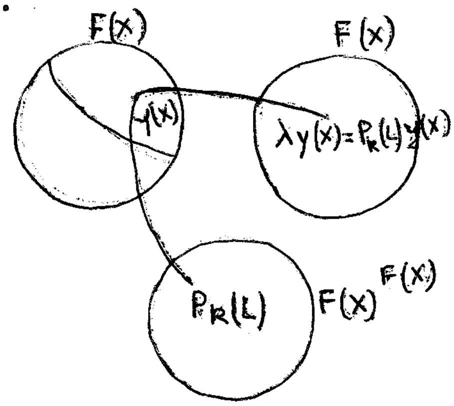



De una manera analítica, la ecuación se expresaría $\boxed{P_k(L)\ y(x) = \psi(x)}$

Esta ecuación es conocida con el nombre de ecuación funcional lineal completa. Aquí el conjunto de funciones que son solución de la ecuación están caracterizadas por el hecho de que aplican en una función determinada.

Los espacios solución de las ecuaciones planteadas, son de gran interés, pero el análisis de los mismos requiere del planteamiento de unos teoremas previos.

TERCER PROBLEMA.- Conocido un operador $P_k(L)$, se pide encontrar todas las funciones $y(x)$, tales que al aplicarle el operador $P_k(L)$ se transforman en la misma función multiplicada por una constante. A tales funciones se les conoce con el nombre de autofunciones del operador y a los valores constantes, autovalores correspondientes, a las autofunciones.



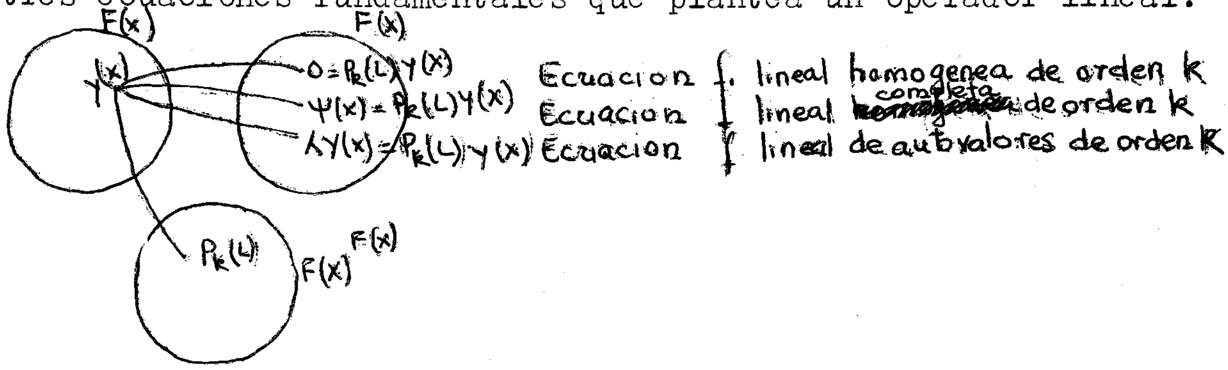

De una forma análitica el problema queda planteado así:

$$\boxed{P_k(L)\ y(x) = \lambda\ y(x)}$$

Este problema es conocido con el nombre de problema de los autovalores.

Si se escoge un sistema numerable de autovalores $(\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\ldots)$, y correspondiendo a dicho sistema uno de autofunciones obtenidas como solución de la ecuación funcional $(y_1(x),\ldots,y_k(x),\ldots)$, si se introduce además una métrica en el espacio engendrado por las autofunciones que es de carácter vectorial, da origen a un modelo de espacio, para estudiar los espacios de Bavach. Este problema,por otro lado, es el que ha dado origen al estudio de las funciones ortogonales, cuando el operador L es el operador derivada D, y cuando la métrica se obtiene a partir de una forma hermítica introducida mediante una integral. Este problema ha dado origen a una rama del análisis que corresponde al estudio de las autofunciones y de los autovalores de un operador lineal.

Como sintesis podríamos recoger en un diagrama el planteamiento de las tres ecuaciones fundamentales que plantea un operador lineal.




Teoremas fundamentales para la resolución de las ecuaciones funcionales lineales.

TEOREMA 1.- Sobre las soluciones de la ecuación funcional lineal homogénea.

Si $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_k(x)$ son soluciones particulares de la ecuación $P_k(L)\ y(x) = 0$ también es solución de la ecuación una combinación lineal de ellos, es decir, $y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y(x) + \ldots + \lambda_k y_k(x)$.

En virtud de que $P_k(L)$ es un operador lineal:

$P_k(L)\ (\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \ldots + \lambda_k y_k(x)) = \lambda_1 P_k(L)\ y_1(x) +$
$+ \lambda_2 P_k(L)\ y_2(x) + \ldots + \lambda_k P_k(L)\ y_k(x) = 0$

y por consiguiente $y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \ldots + \lambda_k y_k(x)$ es solución de la ecuación.

TEOREMA 2.- Sobre las soluciones de la ecuación funcional lineal completa.

Si por $y_H(x)$ entendemos la solución general de la ecuación $P_k(L)\ y(x) = 0$ y por $y_p(x)$ representamos una solución particular de la ecuación $P_k(L)\ y(x) = \psi(x)$ entonces $y(x) = y_H(x) + y_p(x)$ es la solución general de la ecuación $P_k(L)\ y(x) = \psi(x)$.

En efecto, utilizando la linealidad del operador $P_k(L)$:

$P_k(L)\ y(x) = P_k(L)\ (y_H(x) + y_p(x)) = P_k(L)\ y_H(x) + P_k(x)\ y_p(x) =$
$= 0 + \psi(x) = \psi(x)$.

Hemos partido de que $P_k(L)\ y_H(x) = 0$ y $P_k(L)\ y_p(x) = \psi(x)$

TEOREMA 3.- Sobre las soluciones particulares de la ecuación funcio nal completa.

Teorema de la superposición.

Sean $y_{1p}(x)$, $y_{2p}(x), \ldots, y_{mp}(x)$ soluciones particulares de las ecuaciones $P_k(L)\, y_{1p}(x) = \psi_1(x)$, $P_k(L)\, y_{2p}(x) = \psi_2(x), \ldots, P_k(L)\, y_{mp}(x) =$ $= \psi_m(x)$

En este caso $y_p(x) = y_{1p}(x) + y_{2p}(x) + \ldots + y_{mp}(x)$ es una solución particular de la ecuación $P_k(L)\, y(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) + \ldots + \psi_m(x)$

Basta con utilizar la linealidad del operador $P_k(L)$.

$P_k(L)\ (y_p(x)) = P_k(L)\ (y_{1p}(x) + y_{2p}(x) + \ldots + y_{mp}(x)) = P_k(L)\, y_{1p}(x) +$ $+ P_k(L)\, y_{2p}(x) + \ldots + P_k(L)\, y_{mp}(x) = \psi_1(x)\ \psi_2(x) + \ldots + \psi_m(x).$

TEOREMA 4.- Sobre la estructura del conjunto de soluciones de una ecuación funcional lineal homogénea. El conjunto de soluciones constituye un espacio vectorial de dimensión K, siendo K el orden de la ecuación.

En efecto: sea la ecuación funcional:

$$a_0(x) \times L^k y(x) + a_1(x) \times L^{k-1} y(x) + \ldots + a_k(x) \times y(x) = 0$$

Supongamos que hemos determinado K, soluciones particulares de la ecuación $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_k(x)$, de forma que dichas soluciones son linealmente independientes, es decir, cumplen con la condición:

$$\Delta(L) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_k(x) \\ L y_1(x) & L y_2(x) & \ldots & L y_k(x) \\ \vdots & & & \\ L^{k-1} y_1(x) & L^{k-1} y_2(x) & \ldots & L^{k-1} y_k(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

En este caso, cualquier otra solución es dependiente de las funciones $y_1(x), \ldots, y_k(x)$, y por consiguiente se expresa como combinación lineal de ellas, además, la ecuación planteada queda determinada de mabera única por las soluciones. En otras palabras, solo existe una ecuación funcional lineal en el operador L, de orden K que posee soluciones particulares $y_1(x) \ldots y_k(x)$.

En efecto, por ser soluciones particulares de la ecuación deberán de verificarla

$$a_0(x)\, L^k y\,(x) + a_1(x)\times L^{k-1}y(x)+\dots+a_k(x)\times y(x) = 0$$
$$a_0(x)\, L^k y_1(x) + a_1(x)\times L^{k-1}y_1(x)+\dots+ a_k(x)\times y_1(x) = 0$$
$$a_0(x)\, L^k y_2(x) + a_1(x)\times L^{k-1}y_2(x)+\dots+ a_k(x)\times y_2(x) = 0$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$a_0(x)\, L^k y_k(x) + a_1(x)\times L^{k-1}y_k(x)+\dots+ a_k(x)\times y_k(x) = 0$$

Si eliminamos $a_0(x),\dots,a_1(x)$ para expresar una función de las soluciones particulares la ecuación funcional, obtendremos:

$$\Delta(L) = \begin{vmatrix} L^k y(x) & L^{k-1}y(x) & \dots & y(x) \\ L^k y_1(x) & L^{k-1}y_1(x) & \dots & y_1(x) \\ L^k y_2(x) & L^{k-1}y_2(x) & \dots & y_2(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L^k y_k(x) & L^{k-1}y_k(x) & \dots & y_k(x) \end{vmatrix} = 0$$

Del hecho de que este determinante sea nulo se deduce que las funciones $y(x), y_1(x)\; y_2(x), \dots, y_k(x)$ son dependientes y por consiguiente cualquier otra solución de la ecuación se expresaría: $y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \dots + \lambda_k y_k(x)$ como combinación lineal de las K soluciones independientes.El sistema de soluciones constituye un espacio vectorial de dimensión K, en donde la base puede ser escogida considerando K soluciones independientes , la verificación de que es un espacio vectorial de dimensión K, es inmediata y prescindimos de ellla.

TEOREMA 5.- Sobre el conjunto de soluciones de una ecuación funcional lineal completa. El conjunto de soluciones constituye un espacio afín de dimensión K.

En efecto, sea la ecuación:

$$a_0(x)\times L^k y(x) + a_1(x)\times L^{k-1}y(x)+\dots+a_k(x)\, y(x) = \Psi(x)$$

Según el teorema anterior

Supongamos conocida una solución particular de dicha ecuación $y_p(x)$

$$a_0(x) \times L^k y_p(x) + a_1(x) \times L^{k-1} y_p(x) + \ldots + a_k(x)\, y_p(x) = \psi(x)$$

Restando ambas ecuaciones y haciendo el cambio de función $y(x) - y_p(x) = u(x)$ obtendríamos una ecuación funcional lineal homogénea de grado K en la función $u(x)$:

$$a_0(x) \times L^k u(x) + a_1(x) \times L^{k-1} u(x) + \ldots + a_k(x)\, u(x) = 0$$

Según el teorema anterior el conjunto de soluciones de esta ecuación es un espacio vectorial de dimensión K. Si consideramos K soluciones linealmente independientes de esta ecuación la solución general, la expresaríamos:

$$u(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \ldots + \lambda_k y_k(x)$$

En donde $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_k(x)$ es un sistema de soluciones independientes de la ecuación $a_0(x)\, L^k u(x) + \ldots + a_k(x)\, u(x) = 0$

Deshaciendo el cambio obtendríamos la solución de la ecuación completa:

$$y(x) - y_p(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \ldots + \lambda_k y_k(x)$$

Y como vemos por la forma de expresar la solución se trata de añadir al espacio vectorial un nuevo punto. Por consiguiente se trata de un espacio afín.

CAPITULO 3

RESOLUCION DE ECUACIONES FUNCIONALES LINEALES.

SOLUCION DE LAS ECUACIONES FUNCIONALES LINEALES HOMOGENEAS Y COMPLETAS DE PRIMER ORDEN.

SOLUCION DE LA ECUACION HOMOGENEA DE GRADO K. CASO PARTICULAR DE

DE CONDICIONES INICIALES.

SOLUCION DE LA ECUACIÓN COMPLETA DE GRADO K. CASO PARTICULAR DE CONDICIONES INICIALES.

EL TEOREMA DE TAYLOR COMO SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL LOS RESTOS EN LA SERIE DE TAYLOR.

LA GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE TAYLOR, MEDIANTE LA SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN FUNCIONAL LINEAL COMPLETA.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES FUNCIONALES LINEALES.

Dada una ecuación funcional lineal, bien sea homogenea o completa despues de utilizar las propiedades del algebra del conjunto operacional, la ecuación podria quedar planteada:

$$P_k(L)\ y(x) = \left(a_0(x) \otimes L^k \dotplus a_1(x) \otimes L^{k-1} \dotplus \dots \dotplus a_k(x) \otimes I\right) y(x) = \psi(x)$$

$$P_k(L)\ y(x) = \left[\left(a_1(x) \otimes L \dotplus b_1(x)\right) \times \left(a_2(x) \otimes L \dotplus b_2(x)\right) \times \dots \times \left(a_k(x) \otimes L \dotplus b_k(x)\right)\right] y(x) = \psi(x)$$

En otros terminos, lo que hemos planteado la ecuación haciendo una factorización del anillo operacional, descomponiendolo en producto de factores elementales de orden uno y base dos.

Como es natural, la primera ecuación que habia que resolver seria la que plantea un operador lineal de primer orden.

SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES FUNCIONALES LINEALES DE PRIMER ORDEN:

Ecuación homogenea.

$$\left(a(x) \otimes L \dotplus b(x)\right) y(x) = 0$$

$$a(x) \times Ly - b(x) \times y(x) = 0$$

La solución de esta ecuación habrá que tratarla en cada caso particular segun sea la definición del operador lineal L.

Supongamos resuelto el problema y llamamos $B(x)$ a la solución que para $x = x_0$, toma el valor 1. Es decir $B(x_0) = 1$.

En virtud de los teoremas todas las soluciones de la ecuación funcional constituyen un espacio vectorial de dimención 1. Por consiguiente la solución general de la ecuación se expresaria:

$y(x) = K.\ B(x).$ en donde K es una función constante o aun mas preciso un escalar.

Procedamos a resolver la ecuación completa:

$$a(x) \times Ly - b(x) \times y(x) = \psi(x)$$

Segun demostramos en el teorema 2, del capitulo 2, la solución de esta ecuación se compone, de la solución de la ecuación homogenea, añadiendole una solución particular de la ecuación completa.

para buscar una solución particular de la ecuación completa, se procede de la siguiente forma.

Se multiplica la ecuación por un factor r(x) de tal forma que la separación del primer miembro pueda expresarse así

$$r(x) \times a(x) \times L\,y - r(x) \times b(x) \times y(x) = r(x)\,\psi(x)$$

$$a(x) \times L\,y(x) \times R(x) = r(x) \times \psi(x)$$

$$L\,y(x) \times r(x) = r(x) \times \frac{\psi(x)}{a(x)}$$

Encontrado este factor y reducida la ecuación, queda por resolver la ecuación fundamental del operador L, es decir

$$L\,y(x) = \psi(x) \Rightarrow y(x) = L^{-1}\psi(x)$$

A esta ecuación hay que darle solución segun el planteamiento del operador L.

Una vez determinada la operación inversa del operador L, queda resuelta la ecuación completa. Eligimos de todas las soluciones particulares aquella que para el punto $x=x_0$ toma el valor cero. Tal solución particular introduce una operación, que denominaremos operacion asociada al operador L.

La expresaremos la solución particular en la forma:

$$y_p(x) = B(x) \times \psi(x).$$

En donde B(x) era la solución obtenida anteriormente.

De esta forma la solución general de la ecuación quedaria expresada en la forma:

$$\boxed{y(x) = K \times B(x) + B(x) \circ v(x)}$$

Existe otro procedimiento para encontrar la solución particular de la ecuación. Consiste en hacer un cambio de función. $y(x) = u(x) \times v(x)$. Despues de obtener el resultado de aplicarle el operador L, el primer miembro de la igualdad se descompone en dos ecuaciones . Una de ellas se anula, y se obtiene la función incógnita v (x). Conocida esta solución la ecuación queda reducida a una cuya solución es fácil de encontrar. Esta solución está expresada en función de u (x). Una vez obtenida multiplicando las dos obtendríamos la solución general. Como regla puede considerarse la fu función v (x) como factor multiplicativo de la ecuación, aun cuando esto debe de verificarse.

A continuación estudiamos las propiedades de la operación asociada al operador L.

I. $B_1(x) \circ B_2(x) = B(x) \quad (B_1(x),\ B_2(x),\ B(x)) \in F(x)$

II. $B_1(x) \circ (B_2(x) \circ B_3(x)) = (B_1(x) \circ B_2(x)) \circ B_3(x) = B_1(x) \circ B_2(x) \circ B_3(x)$ ?

III. $B(x) \circ B_e(x) = B_e(x) \circ B(x) = B(x)$ ?

IV. $B_1(x) \circ (B_1(x))' = (B_1(x))' \circ B_1(x) = B_e(x)$ ?

V. $B_1(x) \circ B_2(x) = B_2(x) \circ B_1(x)$ ?

VI. $B_1(x) \circ (B_2(x) + B_3(x)) = B_1(x) \circ B_2(x) + B_1(x) \circ B_3(x)$

Encontradas las propiedades de que goza la operación asociada al operador L, se pueden buscar casos particulares en los que si no se han dado las propiedades asociativa y conmutativa para qué tipo de funciones puede ser verificada.

Definidas estas propiedades fundamentales y resueltas tanto la ecuación funcional lineal homogénea como la completa nos encontramos en condiciones de resolver la ecuación homogénea de orden K, en el supuesto caso de que haya sido posible factorizar el anillo operacional, problema que como anteriormente dijimos es en general difícil de resolver y en la mayoría de los casos imposible.

## SOLUCION DE LA ECUACION FUNCIONAL LINEAL HOMOGENEA DE ORDEN K.-

Sea la ecuación

$$P_k(L)\, y(x) = a_0(x) \otimes L^k y(x) + a_1(x) \otimes L^{k-1} y(x) + \dots + a_k(x)\, y(x) =$$
$$= \left(a_0(x) \otimes L^k + a_1(x) \otimes L^{k-1} + \dots + a_k(x) \otimes I\right) y(x) = 0$$

Supuesta encontrada una factorización del anillo operacional, la ecuación quedaría expresada en la siguiente forma:

$$P_k(L)\, y(x) = \Big(\big(a_k(x)\, L - b_k(x)\big) \times \big(a_{k-1}(x) \otimes L - b_{k-1}(x)\big) \times \dots \times \big(a_2(x) \otimes L - b_2(x)\big) \times \big(a_1(x) \otimes L - b_1(x)\big)\Big)\, y(x) = 0$$

Evidentemente si consideramos una solución, obteniéndola anulando el operador que aplica a $y(x)$, es decir, $a_1(x) \times L\, y - b_1(x)\, y = 0$, al aplicarle el operador que resta, se obtiene la función cero. Por consiguiente la solución obtenida de esta ecuación es solución de la ecuación.

Llamaremos $B_1(x)$ la solución que se obtiene de la ecuación $a_1(x)\, L\, y - b_2(x)\, y(x) = 0$ y tal que el punto $x = x_0$ tiene el valor 1. Es decir $B_1(x_0) = 1$.

Buscamos otras soluciones de la ecuación. Si separamos dos de los factores elementales y buscamos la función que aplica en cero el operador propuesto, también sería solución de la ecuación:

$$\big(a_2(x) \otimes L - b_2(x)\big) \times \big(a_1(x) \otimes L - b_1(x)\big)\, y(x) = 0$$

Resolvamos esta ecuación:

Llamemos $y_1(x) = a_1(x) \otimes L\, y - b_1(x)\, y(x)$

Tendríamos entonces:

$a_2(x)\ L\, y_1(x) - b_2(x)\, y_1(x) = 0 \quad y_1(x) = B_2(x)$ Tomamos $B_2(x_0) = 1$

Una vez obtenida la solución de esta ecuación homogénea podremos a resolver:

$$a_1(x) \times L\, y(x) - b_1(x)\, y(x) = y_1(x) = B_2(x)$$

Esta ecuación es una ecuación funcional lineal completa de primer orden. La solución particular de esta ecuación que para $x = x_0$ la expresamos con ayuda de la operación asociada.

$$y(x) = B_1(x) \boxtimes B_2(x)$$

Siendo $B_1(x)$ la solución anteriormente encontrada.

Reiterando el procedimiento obtendríamos la tercera solución resolviendo la ecuación:

$$(a_3(x) \boxtimes L \div b_3(x)) \times \underbrace{\boxed{(a_2(x) \boxtimes L \div b_2(x)) \times (a_1(x) \boxtimes L \div b_1(x))\, y}}_{y_2(x)} = 0$$

$$(a_3(x) \boxtimes L \div b_3(x))\, y_2(x) = a_3(x) \times L\, y_2(x) - b_3(x)\, y_2(x) = 0$$

$$y_2(x) = B_3(x), \qquad B_3(x_0) = 1$$

$$(a_2(x) \boxtimes L \div b_2(x)) \times \underbrace{\boxed{(a_1(x) \boxtimes L \div b_1(x))\, y(x)}}_{y_1(x)} = y_2(x) = B_3(x)$$

$$a_2(x) \times L\, y_1(x) - b_2(x)\, y_1(x) = B_3(x) \Rightarrow y_1(x) = B_2(x) \boxtimes B_3(x)$$

$$a_1(x) \times L\, y(x) - b_1(x)\, y(x) = y_1(x) = B_2(x) \boxtimes B_3(x)$$

$$y(x) = B_1(x) \boxtimes (B_2(x) \boxtimes B_3(x))$$

Hemos llegado a prescindir de las otras dos soluciones adicionales que requeriría la solución general. Pero no olvidemos que estamos buscando una solución particular de la ecuacipn.

De igual forma encontraríamos como soluciones de la ecuación:

$$y_1(x) = B_1(x) \quad y_2(x) = B_1(x) \boxtimes B_2(x) \quad y_3(x) = B_1(x) \boxtimes (B_2(x) \boxtimes B_3(x))$$

$$y_4(x) = B_1(x) \boxtimes (B_2(x) \boxtimes (B_3(x) \boxtimes B_4(x))) \ldots \; y_k(x) = B_1(x) \boxtimes (B_2(x) \boxtimes \ldots \boxtimes (B_{k-1}(x) \boxtimes B_k(x)) \ldots )).$$

Vamos a comprobar que este sistema de soluciones son linealmente independientes.

Para verificarlo de una manera práctica elijamos un sistema de operadores independientes.

$$P_1(L) = (a_1(x) \boxtimes L \div b_1(x))$$

$P_2(L) = \left(a_2(x) \otimes L \mp b_2(x)\right) \times \left( a_1(x) \otimes L \mp b_1(x)\right)$

$\vdots$

$P_{k-1}(L) = \left(a_{k-1}(x) \otimes L - b_{k-1}(x)\right) \times \ldots \times \left(a_2(x) \otimes L \mp b_2(x) \times \left(a_1(x) \otimes L \mp\right.\right.$
$\left.\left.\mp b_1(x)\right)\right)$

Apliquemos este sistema de operadores a la determinación de la independencia de las funciones en la ecuación:

$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \lambda_3 y_3(x) + \ldots + \lambda_k y_k(x) = 0$

$\lambda_1 B_1(x) + \lambda_2 B_1(x) \otimes B_2(x) + \lambda_3 B_1(x) \otimes \left( B_2(x) \otimes B_3(x)\right) + \ldots + \lambda_k B_1(x) \otimes$
$\otimes \left(B_2(x) \otimes \ldots \otimes \left(B_{k-1}(x) \otimes B_k(x)\right) \ldots\right)) = 0$

aplicando $P_1(L)$ $0 + \lambda_2 B_2(x) + \lambda_3 B_2(x) \otimes B_3(x) + \ldots + \lambda_k B_2(x) \otimes (\ldots \otimes (B_{k-1}$
$(x) \otimes B_k(x)) \ldots)) = 0$

aplicando $P_2(L)$ $0 + 0 + \lambda_3 B_3(x) + \ldots + \lambda_k B_3(x) \otimes (\ldots \otimes (B_{k-1}(x) \otimes B_k(x))$
$\ldots)) = 0$

$\vdots$

aplicando $P_{k-1}(L)$ $0 + 0 + 0 + \ldots + \lambda_k B_k(x) = 0$

La condición para que este sistema admita solución única $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 =$
$= \lambda_4 = \ldots = \lambda_k = 0$, es que el determinante:

$$\Delta(P(L)) = \begin{vmatrix} B_1(x) & B_1(x) \otimes B_2(x) & B_1(x) \otimes \left(B_2(x) \otimes B_3(x)\right) & \ldots & B_1(x) \otimes \left(\ldots \otimes \left(B_{k-1}(x) \otimes B_k(x)\right) \ldots\right) \\ 0 & B_2(x) & B_2(x) \otimes B_3(x) & \ldots & B_2(x) \otimes \left(\ldots \otimes \left(B_{k-1}(x) \otimes B_k(x)\right) \ldots\right) \\ 0 & 0 & B_3(x) & \ldots & B_3(x) \otimes \left(\ldots \otimes \left(B_{k-1}(x) \otimes B_k(x)\right) \ldots\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & B_k(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

El valor de este determinante $\Delta\left(P(L)\right) = B_1(x) \times B_2(x) \times \ldots \times B_k(x) \neq 0$ por consiguiente el sistema de soluciones considerado es linealmente independiente y constituye una base del espacio solución.

La solución general de la ecuación se obtendría como combinación lineal del sistema de soluciones independientes.

$$Y_H(x) = \lambda_1 B_1(x) + \lambda_2 B_1(x) \otimes B_2(x) + \lambda_3 B_1(x) \otimes (B_2(x) \otimes B_3(x)) + \ldots + \lambda_k B_1(x) \otimes (\ldots \otimes (B_{k-1}(x) \otimes B_k(x)) \ldots))$$

Supongamos que nos piden encontrar una solución particular de la ecuación, que cumpla unas condiciones determinadas.

Sean estas condiciones, las de tomar en el punto $x_0$, respectivamente los valores $y(x_0)$, $L\,y(x_0)$, $L^2 y(x_0), \ldots, L^{k-1} y(x_0)$.

Vamos a tratar de determinar los valores de $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ para que la solución cumpla con estas condiciones.

Si en los dos miembros de la igualdad

$$y_H(x) = \lambda_1 B_1(x) + \lambda_2 B_1(x) \otimes B_2(x) + \lambda_3 B_1(x) \otimes (B_2(x) \otimes B_3(x)) + \ldots + \lambda_k B_1(x)\,(\ldots \otimes (B_{k-1}(x) \otimes B_k(x)) \ldots))$$

le damos a $x$ el valor $x_0$ obtendríamos:

$$y(x_0) = \lambda_1 \times 1 + \lambda_2 \times 0 + \lambda_3 0 + \ldots + \lambda_k 0 = \lambda_1$$

Aplicando a los dos miembros el operador $(a_1(x) \otimes L - b_1(x))$ y dándole a $x = x_0$

$$\left(a_1(x) \otimes L\,y(x) - b_1(x)\,y(x)\right)_{x=x_0} = \lambda_2 1 + \lambda_3 0 + \ldots + \lambda_k 0 \Rightarrow \lambda_2 = \left(a_1(x) L\,y(x) - b_1(x)\,y(x)\right)_{x=x_0}$$

Otra forma y más cómoda de escribir sería:

$$\lambda_2 = (a_1(x) \otimes L - b_1(x))\,y(x_0)$$

En donde se entiende que realizada la operación con $y(x)$, se debe de sustituir $x$ por $x_0$.

Aplicando el operador $(a_2(x) \otimes L - b_2(x))\,(a_1(x) \otimes L - b_1(x))$ a los dos miembros y dándole a $x$ el valor $x_0$, tendremos:

$$\left((a_2(x) \otimes L - b_2(x)) \times (a_1(x) \otimes L - b_1(x))\,y(x)\right)_{x=x_0} = 1 + 0 + \ldots + 0$$

$$= ((a_2(x) \otimes L - b_2(x)) \times (a_1(x) \otimes L - b_1(x))\,y(x_0)$$

y así sucesivamente llegaríamos a obtener:

$\lambda_k = ((a_{k-1}(x) \otimes L \mp b_{k-1}(x)) \times \dots \times (a_2(x) \otimes L \mp b_2(x)) \times (a_1(x) \otimes L \mp b_1(x))) y(x_0)$

Así podríamos expresar la solución particular pedida en la forma:

$$y_1(x) = y(x_0) B_1(x) + (a_1(x) \otimes L \mp b_1(x)) y(x_0) \times B_1(x) \otimes B_2(x) + \dots + (a_{k-1}(x) \otimes L - b_{k-1}(x)) \times (a_{k-2}(x) \otimes L - b_{k-2}(x)) \times \dots \times (a_1(x) \otimes L \mp b_1(x)) y(x_0) B_1(x) \otimes (\dots \otimes (B_{k-1}(x) \otimes B_k(x)), \dots))$$

SOLUCION DE LA ECUACION FUNCIONAL LINEAL COMPLETA DE ORDEN K.-

Nuestro problema se reduce a buscar una solución particular de la ecuación completa, puesto que la solución general de la ecuación se obtiene añadiéndole a la solución general de la ecuación homogénea una solución particular de la completa.

Procedamos a resolver la ecuación:

$$(a_k(x) \otimes L \mp b_k(x)) \times [\underbrace{(a_{k-1}(x) \otimes L \mp b_{k-1}(x)) \times \dots \times (a_1(x) \otimes L \mp b_1(x)) y_c(x)}_{y_1(x)}] = \psi(x)$$

llamemos $y_1(x)$ al resultado de aplicarle a la solución particular el operador $(a_{k-1}(x) \times L \mp b_{k-1}(x)) \times \dots \times (a_1(x) \otimes L \mp b_1(x)) y(x) = y_1(x)$

De esta forma nos quedaría planteada la ecuación lineal completa de primer orden:

$$a_k(x) x L y_1(x) - b_k(x) y(x) = \psi(x)$$

Obtenemos la solución que para $x = x_0$ toma el valor cero

$$y_1(x) = B_k(x) \otimes \psi(x)$$

Con lo cual hemos reducido la ecuación a :

$$(a_{k-1}(x) \otimes L - b_{k-1}(x)) \dots (a_1(x) \otimes L \mp b_1(x)) y(x) = B(x) \otimes \psi(x)$$

Reiterando el procedimiento llegaríamos a:

$$y(x) = B_1(x) \otimes (B(x) \otimes \dots \otimes (B_k(x) \otimes \psi(x)) \dots ))$$

De esta forma la solución general de la completa quedaría en la forma:

$$y_c(x) = \lambda_1 B_1(x) + \lambda_2 B_1(x) \otimes B_2(x) + \dots + \lambda_k B_1(x) \otimes (B_2(x) \otimes \dots \otimes (B_{k-1}(x) \otimes B_k(x)) \dots )) + B_1(x) \otimes (B_2(x) \otimes \dots \otimes (B_k \otimes \psi(x)) \dots ))$$

En el caso de que nos pidiesen una solución particular de la ecuación que tome los valores $y(x_0)$, $Ly(x_0)$,... $L^{k-1}y(x_0)$, dicha solución sería:

$$y_p(x) = y(x_0)\,B_1(x) + \big(a_1(x)\otimes L - b_1(x)\big)\,y(x_0)\,B_1(x)\otimes B_2(x)+\dots+$$
$$+\Big(\big(a_{k-1}(x)\otimes L - b_{k-1}(x)\big)\times\dots\times\big(a_2(x)\otimes L - b_2(x)\big)\times\big(a_1(x)\otimes L - b_1(x)\big)\Big)\,y(x_0)$$
$$B_1(x)\otimes(\dots\otimes(B_{k-1}(x)\otimes B_k(x))\dots) + B_1(x)\otimes(B_2(x)\otimes\dots\otimes(B_{k-1}(x)\otimes(B_k(x)$$
$$\otimes\psi(x)))\dots))$$

## RELACION ENTRE LAS RAICES DE DOS FACTORIZACIONES DE UN ANILLO OPERACIONAL NO CONMUTATIVO.-

Todo anillo no conmutativo admite más de una descomposición en factores elementales. Nos proponemos estudiar la relación que existe entre los factores elementales de dos descomposiciones del anillo operacional.

Supongamos que el polinomio:

$a_0(x)\otimes L^k + a_1(x)\otimes L^{k-1}+\dots+a_k(x)\otimes I = P_k(L)$, admite las factorizaciones:

$$P_k(L) = \big(a_k(x)\otimes L - b_k(x)\big)\times\dots\times\big(a_2(x)\otimes L - b_2(x)\big)\times\big(a_1(x)\otimes L - b_1(x)\big)$$
$$P_k(L) = \big(a'_k(x)\otimes L - b'_k(x)\big)\times\dots\times\big(a'_2(x)\otimes L - b'_2(x)\big)\times\big(a'_1(x)\otimes L - b'_1(x)\big)$$

Si obtenemos la solución de la homogénea que plantea la primera factorización, es decir el núcleo del operador en la primera factorización, obtendríamos:

$$y_H(x) = \lambda_1 B_1(x) + \lambda_2 B_1(x)\otimes B_2(x) +\dots+\lambda_k B_1\otimes(\dots\otimes(B_{k-1}(x)\otimes B_k(x))\dots))$$

Si obtenemos un sistema de soluciones independientes correspondiente a la segunda factorización, expresaríamos:

$$y'_1(x) = B'_1(x) \quad y'_2(x) = B'_1(x)\otimes B'_2(x) \;\dots\; y'_k(x) = B'_1(x)\otimes(\dots\otimes(B'_{k-1}(x)\otimes B'_k(x))\dots)).$$

Como el conjunto de soluciones de la ecuación $P_k(L)\,y(x) = 0$ es un espacio vectorial de dimensión K, todas las soluciones correspondientes a la segunda factorización se expresaría como combinación lineal de las correspondientes a la primera factorización y podremos escribir por consiguiente:

$B_1^1(x) = \lambda_1^1 B_1(x) + \lambda_2^1 B_1(x) \boxtimes B_2(x) + \dots + \lambda_k^1 B_1(x) \boxtimes (\dots \boxtimes (B_{k-1}(x) \boxtimes B_k(x)) \dots ))$.

$B_1^1(x) \boxtimes B_2^1(x) = \lambda_1^2 B_1(x) + \lambda_2^2 B_1(x) \boxtimes B_2(x) + \dots + \lambda_k^2 B_1(x) \boxtimes (\dots \boxtimes (B_{k-1}(x) \boxtimes B_k(x)) \dots ))$

⋮

$B_1^1(x) \boxtimes (\dots \boxtimes (B_{k-1}^1(x) \boxtimes B_k^1(x)) \dots )) = \lambda_1^k B_1(x) + \lambda_2^k B_1(x) \boxtimes B_2(x) + \dots + K_k^k B_1(x) \boxtimes (\dots \boxtimes (B_{k-1}(x) \boxtimes B_k(x) \dots ))$

Con lo cual quedaría expresada mediante la operación asociada a cada factor elemental y la estructura del núcleo la relación entre los factores elementales correspondientes a dos descomposiciones del anillo operacional.

<u>OPERACION ASOCIADA A UN OPERADOR L.-CASOS PARTICULARES MAS NOTABLES</u>

<u>Caso 1.</u>El operador L coincide con el operador D, los factores elementales son de la forma $(D-\lambda)$, siendo $\lambda$ una función constante.

Procedamos a resolver las ecuaciones lineales correspondientes al operador D de primer orden. Es decir:

$$(D-\lambda)\, y(x) = 0 \qquad (D-\lambda)\, y(x) = \psi(x)$$

$$D\, y(x) - \lambda y(x) = 0 \qquad \frac{D\, y(x)}{y(x)} = \lambda \quad y(x) = K e^{\lambda x}$$

la solución particular que para $x = x_0$ toma el valor 1 es :

$$B(x) = e^{(x-x_0)\lambda}$$

Resolvamos ahora la ecuación completa. Para esto multiplicamos los dos miembros de la igualdad por un factor $r(x)$, para que la ecuación pueda escribirse en la siguiente forma

$D\, y(x) - \lambda\, y(x) = \psi(x) \qquad\qquad r(x)\, D\, y(x) - \lambda\, r(x)\, y(x) = r(x)\, \psi(x)$

$$D\, r(x)\, y(x) = r(x)\, \psi(x)$$

Desarrollando en esta última expresión

$r(x)\, D\, y(x) + D\, r(x) \cdot y(x) = r(x)\Psi(x)$

Identificando las dos ecuaciones resulta:

$D\, r(x) = -\lambda r(x) \Rightarrow \frac{D\, r(x)}{r(x)} = -\lambda \Rightarrow r(x) = e^{-\lambda(x-x_0)}$

Sustituyendo el valor del factor integrante:

$D\, e^{-\lambda(x-x_0)} y(x) = e^{-\lambda(x-x_0)} \Psi(x) \Rightarrow e^{-(x-x_0)\lambda} y(x) = \int_{x_0}^{x} e^{-\lambda(t-x_0)} \Psi(t)dt$

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} e^{\lambda(x-t)} \Psi(t)dt = B(x) \ast \Psi(x) = B(x) \ast \Psi(x)$$

En este caso la operación asociada toma el nombre de convolución entre funciones

$$e^{\lambda(t-x_0)} \ast \Psi(t) = \int_{x_0}^{x} e^{\lambda(x-t)} \cdot \Psi(t)\, dt$$

Generalmente se suele tomar el punto $x_0$, coincidiendo con el punto cero. Además este problema está resuelto mediante una traslación.

Para dos funciones cualesquiera, la expresión de la convolución es:

$$\boxed{f(x) \ast g(x) = \int_{x_0}^{x} f(x-t)\, g(t)\, dt}$$

Caso 2. El operador L coincide con el operador $\Delta$. Los factores elementales son de la forma $(\Delta - \lambda)$, $\lambda$ es una función constante.

Seguiremos utilizando el método general y procedemos a resolver las ecuaciones lineales de primer grado :

$(\Delta - \lambda)\, y(x) = 0 \qquad (\Delta - \lambda)\, y(x) = \Psi(x)$

$\Delta y(x) = y(x+1) - y(x) \qquad \Delta y(x) - \lambda y(x) = 0$

$y(x+1) - y(x) - \lambda y(x) = 0 \qquad y(x+1) = (\lambda + 1)\, y(x)$

la solución de esta ecuación es inmediata:

$y(x) = K(\lambda + 1)^x$. La solución particular que en el punto $x = x_0$ toma el valor 1, es $y(x) = (\lambda + 1)^{x-x_0} = B(x)$

Resolvamos la ecuación completa

$(\Delta - \lambda)\, y(x) = \Psi(x) \qquad y(x+1) - (\lambda + 1)\, y(x) = \Psi(x)$

Hagamos un cambio de función $y(x) = u(x)\, v(x)$

$\Delta y(x) = \Delta u(x)\, v(x) = u(x+1)\Delta v + v(x)\Delta u$

Sustituyendo en la ecuación $\Delta y(x) - \lambda y(x) = \Psi(x)$ quedaría:

$$u(x+1)\Delta v + v(x)\Delta u(x) - \lambda u(x)\, v(x) = \Psi(x)$$

$$u(x+1)\Delta v + v(x)\underbrace{[\Delta u(x) - \lambda u(x)]}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} = \Psi(x)$$

$$\Delta u(u) = \lambda u(x) \Rightarrow \qquad u(x) = (\lambda+1)^{x-x_0}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$(\lambda+1)^{x+1-x_0}\Delta v = \Psi(x) \qquad \Delta v = \Psi(x)\,(\lambda+1)^{-x-1+x_0}$$

$$v(x) = \Delta^{-1}\Psi(x)\,(\lambda+1)^{-x-1+x_0} = \sum_{k=x_0}^{x-1}\Psi(k)\,(\lambda+1)^{-k-1+x_0}$$

$$y(x) = u(x)\cdot v(x) = (\lambda+1)^{x-x_0}\sum_{k=x_0}^{x-1}\Psi(k)\,(\lambda+1)^{-k-1+x_0} =$$

$$= \sum_{k=x_0}^{x-1}(\lambda+1)^{x-1-k}\,\Psi(k) = B(x)\otimes\Psi(x)$$

Esta es, pues, la definición de operación asociada correspondiente al operador . Toma el nombre de convolución entre sucesiones.

Su definición:

$$(\lambda+1)^{x-x_0}\otimes\Psi(x) = \sum_{k=x_0}^{x-1}(\lambda+1)^{x-1-k}\Psi(k)$$

Generalmente se elige el punto x = 0 y la definición para dos sucesiones cualesquiera en general es:

$$\boxed{f(x)\otimes g(x) = \sum_{k=0}^{x-1} f(x-1-k)\, g(k)}$$

Bajo otro punto de vista las dos operaciones definidas han sido estudiadas por Mikusinski ´s con sus álgebras respectivas.

Pude consultarse la obra del mismo autor, titulada Operational Calculus. En la tesina que antecede a este trabajo, se pueden ver los resultados obtenidos al trabajar con la convolución en sucesiones para la resolución de ecuaciones en diferencias finitas de coeficientes constantes.

Caso 3. El operador L coincide con el operador D. Los factores elementales son de la forma: $(a(x)\,D - b(x))$; $a(x)$ y $b(x)$ son funciones variables.

Resolvamos las ecuaciones que plantean los factores elementales. Es decir $(a(x)\otimes D - b(x))y(x) = 0 \qquad (a(x)\otimes D - b(x))y(x) = \Psi(x)$

$$a(x)\times Dy(x) - b(x)\,y(x) = 0 \quad \frac{Dy(x)}{y(x)} = \frac{b(x)}{a(x)} \Rightarrow y(x) = K\, e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}$$

la solución particular que para $x = x_0$ toma el valor 1 es:

$$B(x) = e^{\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)} dt}$$

Procedamos a dar solución a la completa:

$$a(x) \times D\, y(x) - b(x)\, y(x) = \psi(x)$$

Multipliquemos por una función $r(x)$ los dos miembros de la igualdad para que la ecuación pueda escribirse en la siguiente forma:

$$a(x)\, r(x)\, D\, y(x) - b(x)\, r(x)\, y(x) = \psi(x)\cdot r(x)$$

$$a(x)\, Dr(x)\cdot y(x) = \psi(x)\, r(x)$$

Desarrollando la segunda expresión:

$$a(x)\, r(x)\, D\, y(x) + a(x)\, Dr(x)\, y(x) = \psi(x)\, r(x)$$

Identificando coeficientes en las dos expresiones queda:

$$a(x)\, Dr(x) = -b(x)\, r(x) \Rightarrow \frac{Dr(x)}{r(x)} = -\frac{b(x)}{a(x)}$$

$$r(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)} dt}$$

Sustituyendo en la expresión reducida:

$$a(x)\, D\, e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)} dt} \cdot y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)} dt}\, \psi(x)$$

$$D\, e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)} dt}\, y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)} dt}\, \frac{\psi(x)}{a(x)}$$

$$e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)} dt} \cdot y(x) = \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)} dt}\, \frac{\psi(x)}{a(x)}\, dx$$

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} e^{\int_{u}^{x} \frac{b(t)}{a(t)} dt}\, \frac{\psi(u)}{a(u)}\, du = B(x) \boxtimes \psi(x)$$

$$\boxed{e^{\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)} dt} \boxtimes \psi(x) = \int_{x_0}^{x} e^{\int_{u}^{x} \frac{b(t)}{a(t)} dt}\, \psi(u)\, \frac{du}{a(u)}}$$

La definición para dos funciones cualesquiera sería:

$$f(x) \boxtimes g(x) = f(x_0)\, e^{\ln f(x) - \ln f(x_0)} \boxtimes g(x) = f(x_0) \int_{x_0}^{x} e^{\ln f(x) - \ln f(u)}\, g(u)\, \frac{du}{a(u)} =$$

$$= f(x_0) \int_{x_0}^{x} \frac{f(x)}{f(u)}\, g(u)\, \frac{du}{a(u)} = f(x)\, f(x_0) \int_{x_0}^{x} \frac{g(u)}{f(u)} \cdot \frac{du}{a(u)}$$

$$\boxed{f(x) \boxtimes g(x) = f(x)\, f(x_0) \int_{x_0}^{x} \frac{g(u)}{f(u)}\, \frac{du}{a(u)}}$$

<u>Caso **4.**</u> El operador L coincide con el operador $\Delta$. Los factores elementales son de la forma $(a(x) \otimes \Delta - b(x)\, y(x) = 0 \;/\; f a(x) \; b(x))$

son funciones variables.

Planteamos las dos ecuaciones fundamentales.

$$\left[a(x)\Delta - b(x)\right] y(x) = 0 \qquad \left(a(x)\Delta - b(x)\right) y(x) = \Psi(x)$$

Resolvamos la primera ecuación

$$a(x)\Delta y(x) - b(x)\,y(x) = 0 \qquad a(x)\left(y(x+1) - y(x)\right) - b(x)\,y(x) = 0$$

$$a(x)\,y(x+1) = \left(a(x) + b(x)\right) y(x) \Rightarrow y(x+1) = \left(1 + \frac{b(x)}{a(x)}\right) y(x)$$

La solución correspondiente a esta ecuación que para $x = x_0$ toma el valor 1, es:

$$y(x) = \prod_{x_0}^{x-1} \left(1 + \frac{b(k)}{a(k)}\right)$$

Debemos de hacer una observación con respecto a la obtención de esta solución. En terminos generales, realizamos el producto, entendiendo que los valores que toma x, son enteros, luego sustituiriamos en la función que resulta, de una variable natural por una real y habiamos obtenido el resultado requerido. Pero esta situación carece de valor formal. Puede que la expresión que resulte tenga sentido para una variable natural pero no para una real.

Entramos por consiguiente en un problema de interpolación. En este caso se trata de interpolar la función factoral de una función:

En otros terminos sabiendo que :

$$f(5)\,! = f(5)\,.\,f(4).\,f(3).\,f(2).\,f(1).$$

Cual seria el valor de $f(3/4)\,!$ por ejemplo.

Este problema esta aun sin resolver y como vemos es de trascendental importancia en la teoria de ecuaciones en diferencias finitas. Las soluciones por consiguiente que damos son meramente formales.

Resolvamos la ecuación completa.

$$a(x)\Delta y(x) - b(x)\,y(x) = \Psi(x)$$

Hagamos el cambio de función $y(x) = u(x) \times v(x)$

$$\Delta y(x) = \Delta u(x) \times v(x) = u(x+1)\Delta v(x) + v(x)\Delta u(x)$$

$$a(x)\,u(x+1)\,\Delta v(x) + a(x)\,v(x)\Delta u(x) - b(x)\,u(x) \times v(x) = \Psi(x)$$

$$a(x)\,u(x+1)\Delta v(x) + v(x)\underbrace{\left[a(x)\Delta u(x) - b(x)\,u(x)\right]}_{0} = \Psi(x)$$

$$a(x)\Delta u(x) - b(x)\,u(x) = 0 \Rightarrow u(x) = \prod_{x_0}^{x-1}\left(1+\frac{b(k)}{a(k)}\right)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación

$$a(x)\prod_{x_0}^{x}\left(1+\frac{b(k)}{a(k)}\right)\Delta v(x) = \Psi(x)$$

$$\Delta v(x) = \frac{1}{\prod_{x_0}\left(1+\frac{b(k)}{a(k)}\right)}\cdot\frac{\Psi(x)}{a(x)}$$

$$v(x) = \sum_{x_0}^{x-1}\frac{1}{\prod_{x_0}\left(1+\frac{b(k)}{a(k)}\right)}\cdot\frac{\Psi(\ell)}{a(\ell)}$$

La solución correspondiente a y(x) la obtendriamos multiplicando las dos funciones obtenidas.

$$y(x) = \prod_{x_0}^{x-1}\left(1+\frac{b(k)}{a(k)}\right)\sum_{x_0}^{x-1}\frac{1}{\prod_{x_0}\left(1+\frac{b(k)}{a(k)}\right)}\cdot\frac{\Psi(\ell)}{a(\ell)} =$$

$$= \sum_{x_0}^{x-1}\frac{\prod_{x_0}^{x-1}\left(1+\frac{b(k)}{a(k)}\right)}{\prod_{x_0}\left(1+\frac{b(k)}{a(k)}\right)}\cdot\frac{\Psi(\ell)}{a(\ell)} = \sum_{x_0}^{x-1}\left(\prod_{\ell}^{x-1}\left(1+\frac{b(k)}{a(k)}\right)\right)\cdot\frac{\Psi(\ell)}{a(\ell)} = B(x)\boxtimes\Psi(x)$$

$$\boxed{\left(\prod_{x_0}^{x-1}\left(1+\frac{b(k)}{a(k)}\right)\right)\boxtimes\Psi(x) = \sum_{x_0}^{x-1}\left(\prod_{\ell}^{x-1}\left(1+\frac{b(k)}{a(k)}\right)\right)\frac{\Psi(\ell)}{a(\ell)}}$$

Veamos la expresión de la operación asociada para las funciones cualesquiera. Para esto trsformemos la expresión correspondiente a B(x)

$$B(x) = \prod_{x_0}^{x-1}\left(1+\frac{b(k)}{a(k)}\right) = e^{\sum_{0}^{x-1}\ln\left(1+\frac{b(k)}{a(k)}\right) - \sum_{0}^{x_0}\ln\left(1+\frac{b(k)}{a(k)}\right)} = e^{H(x)-H(x_0)}$$

$$B(x)\boxtimes\Psi(x) = \sum_{x_0}^{x-1} e^{H(x)-H(\ell)}\cdot\frac{\Psi(\ell)}{a(\ell)}$$

Para dos funciones f(x) y g(x)

$$f(x)\boxtimes g(x) = f(x_0)\,e^{\ln f(x)-\ln f(x_0)}\boxtimes g(x) = f(x)\sum_{x_0}^{x-1}e^{\ln f(x)-\ln f(\ell)}\frac{g(\ell)}{a(\ell)} = f(x)f(x_0)\sum_{x_0}^{x-1}\frac{g(\ell)}{f(\ell)}\frac{1}{a(\ell)}$$

$$\boxed{f(x)\boxtimes g(x) = f(x)\,f(x_0)\sum_{x_0}^{x-1}\frac{g(\ell)}{f(\ell)}\cdot\frac{1}{a(\ell)}}$$

Caso5. El operador L coincide con el operador D.U. los factores elementales son de la forma (UD-A). A es una mtriz constante las ecuaciones fundamentales.

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}D - \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}D - \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Psi_1(x)\\ \Psi_2(x)\\ \vdots\\ \Psi_n(x)\end{pmatrix}$$

La solución correspondiente a la primera ecuación es:

$$\begin{pmatrix} x_1(x) \\ \vdots \\ x_n(x) \end{pmatrix} = e^{A(x-x_0)} = B(x)$$

y la correspondiente a la completa.

$$\begin{pmatrix} x_1(x) \\ \\ x_n(x) \end{pmatrix} = \int_{x_0}^{x} e^{A(x-t)} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \vdots \\ \psi_n(t) \end{pmatrix} dt$$

La definición, pues, de la operación asociada

$$B(x) \circledast \psi(x) = e^{A(x-x_0)} \circledast \psi(x) = \int_{x_0}^{x} e^{A(x-t)} \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \psi_n(t) \end{pmatrix} dt$$

<u>Caso 6.</u> El operador L coincide con el operador $u\Delta$. Los factores elementales son de la forma $(u\Delta - A)$. A matriz constante.

La ecuaciones que habia que resolver en este caso serian.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \Delta - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(x) \\ x_2(x) \\ \vdots \\ x_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \Delta - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(x) \\ x_2(x) \\ \vdots \\ x_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_n(x) \end{pmatrix}$$

La solución correspondiente a la 1ª:

$$\begin{pmatrix} x_1(x) \\ \vdots \\ x_n(x) \end{pmatrix} = (U + A)^{x-x_0} = B(x)$$

La solución correspondiente a la completa:

$$\boxed{B(x) \circledast \psi(x) = \sum_{x_0}^{x-1} (U + A)^{x-1-k} \psi(k) = (U + A)^{x-x_0} \circledast \psi(x)}$$

$U$ es la matriz unidad.

<u>Caso 7.</u> El operador L coincide con el operador D. Los factores elementales son de la forma $\left(A_1(x) \circledast D + B_1(x)\right)$. $A_1(x)$ y $B_1(x)$ son matrices variables.

Consideramos las ecuaciones:

$$\left( \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} D + \begin{pmatrix} b_{11}(x) & b_{12}(x) & \cdots & b_{1n}(x) \\ b_{21}(x) & b_{22}(x) & \cdots & b_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(x) & b_{n2}(x) & \cdots & b_{nn}(x) \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1(x) \\ x_2(x) \\ \vdots \\ x_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución de esta ecuación, la obtenemos suponiendo en primer lugar que la matriz $A_1(x)$ es una matriz regular, multiplicando a la izquierda por $A_1^{-1}$

La ecuación quedaría:

$(UD - A_1^{-1}B_1)\, X(x) = 0 \quad \Rightarrow B(x) = e^{\int_{x_0}^{x} A_1^{-1}(t)\, B_1(t)\, dt}$

Para resolver la completa :

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} D - \begin{pmatrix} b_{11}(x) & b_{12}(x) & \dots & b_{1n}(x) \\ b_{21}(x) & b_{22}(x) & \dots & b_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(x) & b_{n2}(x) & \dots & b_{nn}(x) \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} x_1(x) \\ x_2(x) \\ \vdots \\ x_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_n(x) \end{pmatrix}$$

multiplicando a la izquierda por $A_1^{-1}(x)$ quedaría:

$(UD - A_1^{-1}(x)\, B_1(x))\, X = A_1^{-1}(x)\, \psi(x)$

La solución particular que para $x = x_0$ toma el valor cero:

$$\boxed{B(x)\, \psi(x) = \int_{x_0}^{x} e^{\int_{u}^{x} A_1^{-1}(t)\, B_1(t)\, dt} \cdot A_1^{-1}(u)\, \psi(u)\, du}$$

## EL TEOREMA DE TAYLOR COMO SOLUCION DE UNA ECUACION DIFERENCIAL LINEAL COMPLETA.-

Proponemos el siguiente problema:

Encontrar una función, tal que sea solución de la ecuación diferencial.

$$D^{n+1}\, y(x) = \psi(x)$$

y tal que en el punto $x = x_0$ tome respectivamente los valores:

$f(x_0)$, $Df(x_0)$, $D^2f(x_0), \dots,$ $D^n f(x_0)$

Este problema queda resuelto en cuanto determinamos la solución de la ecuación diferencial y busquemos una solución particular que satisfaga a las condiciones propuestas.

Resolvamos en primer lugar la ecuación homogénea:

$D^{n+1}\, Y(x) = 0 \Rightarrow D\, \dfrac{(D^n y(x))}{y_1(x)} = 0 \Rightarrow Dy_1(x) = 0 \Rightarrow y_1(x) = k$

Elegimos la solución que toma el valor 1, para $x = x_0$, $y_1(x) = 1$

$D^n y(x) = 1 \qquad D\, \dfrac{(D^{n-1}\, y(x))}{y_2(x)} = 1 \Rightarrow Dy_2(x) = 1$. La solución particular de esta ecuación, con ayuda de la operación asociada que en este caso es la convolución que para $x = x_0$ toma el valor cero es:

$y_2(x) = 1 * 1 = 1 * 1 = \int_{x_0}^{x} 1.1\, dx = x - x_0$

$D^{n-1}\, y(x) = y_2(x) = x - x_0$

$D \dfrac{(D^{n-1} y(x))}{y_3(x)} = x - x_0 \qquad D\, y_3(x) = x - x_0 \quad y_3(x) = 1 * (x-x_0) = \dfrac{(x-x_0)^2}{2!}$

de igual forma llegaríamos a $y_{n+1}(x) = \dfrac{(x-x_0)^n}{n!}$

la solución de la ecuación homogénea sería pues:

$y_H(x) = \lambda_0 1 + \lambda_1 (x-x_0) + \lambda_2 \dfrac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \lambda_n \dfrac{(x-x_0)^n}{n!}$

y la solución particular $y_p(x) = \dfrac{(x-x_0)^n}{n!} * \Psi(x) = \int_{x_0}^{x} \dfrac{(x-t)^n}{n!} \Psi(t)\,dt$

Buscando la solución particular que cumpla con las condiciones indicadas nos encontramos con:

$\lambda_0 = f(x_0) \quad \lambda_1 = Df(x_0) \quad \lambda_2 = D^2 f(x_0) \dots \lambda_n = D^n f(x_0)$

Sustituyendo los valores de $\lambda$, encontradas y teniendo en cuenta que $\Psi(t) = D^{n+1}\, y(x) = f^{n+1}(x)$, la solución se expresaría:

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)\,(x-x_0) + D^2 f(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + D^n f(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

EL TEOREMA DE TAYLOR EN TERMINOS DE DIFERENCIAS FINITAS.-

Se trata de resolver el siguiente problema:

Determinar la solución particular de la ecaución:

$$\Delta^{n+1} y(x) = \Psi(x)$$

y que en el punto $x = x_0$ tome los valores:

$f(x_0)\ ,\Delta f(x_0)\ ,\ \Delta^2 f(x_0)\ ,\dots,\Delta^n f(x_0)$

Busquemos la relación de la ecuación en diferencias y procedamos a continuación a la determinación de la particular que cumple con las condiciones propuestas:

Comencemos por resolver la ecuación homogénea.

$$\Delta^{n+1} y(x) = 0$$

$\Delta \dfrac{(\Delta^n y(x))}{y_1(x)} = 0 \quad \Delta y_1(x) = 0 \qquad y_1(x) = k$ . La solución que para $x = x_0$ toma el valor 1 es $y_1(x) = 1$

$$\Delta\frac{(\Delta^{n-1}y(x))}{y_2(x)}=1 \Rightarrow \Delta y_2(x) = 1 \qquad y_2(x) = \sum_{x_0}^{x-1} 1 = x-x_0 = \binom{x-x_0}{1}$$

$$\Delta\frac{(\Delta^{n-2}y(x))}{y_3} = \binom{x-x_0}{1} \qquad \Delta y_3(x) = \binom{x-x_0}{1} \qquad y_3(x) = \binom{x-x_0}{1} = \sum_{x_0}^{x-1}\binom{k-x_0}{1} =$$

$$= \binom{x-x_0}{2}$$

Por el mismo procedimiento llegaríamos a $y_{n+1}(x) = \binom{x-x_0}{n}$

Con lo cual la solución de la ecuación homogénea se expresaría:

$$y_H(x) = \lambda_0 1 + \lambda_1\binom{x-x_0}{1} + \lambda_2\binom{x-x_0}{2} + \dots + \lambda_n\binom{x-x_0}{n}$$

y la solución particular de la completa

$$y_p(x) = \sum_{x_0}^{x-1}\binom{x-k}{n}\psi(k)$$

Si buscamos la solución particular que cumple con las condiciones propuestas por el problema obtendríamos:

$$\lambda_0 = f(x_0) \qquad \lambda_1 = \Delta f(x_0) \qquad \lambda_2 = \Delta^2 f(x_0) \quad \dots \lambda_n = \Delta^n f(x_0)$$

y la solución final sería llamando $\psi(x) = \Delta^{n+1} f(x)$

$$f(x) = f(x_0) + \Delta f(x_0)\binom{x-x_0}{1} + \Delta^2 f(x_0)\binom{x-x_0}{2} + \dots + \Delta^n f(x_0)\binom{x-x_0}{n} + \sum_{x_0}^{x-1}\binom{x-k}{n}\Delta^{n+1}f(k)$$

$+$

EL TEOREMA DE TAYLOR PARA UN OPERADOR L EN GENERAL.-

El problema que nos planteamos es el siguiente. Dada una ecuación:

$$L^{n+1}y(x) = \psi(x)$$

funcional lineal completa de orden $n+1$, se pide encontrar la solución particular de la ecuación que en el punto $x = x_0$ toma los valores $f(x_0)$, $Lf(x_0)$, $L^2f(x_0)$, ..., $L^nf(x_0)$

Para esto comenzamos resolviendo la ecaución homogénea

$$L^{n+1}y(x) = 0$$

$$L\frac{(L^n y(x))}{y_1(x)} = 0 \qquad Ly_1(x) = 0 \qquad y(x) = B(x) \qquad B(x_0) = 1$$

$$L\frac{(L^{n-1}y(x))}{y_2(x)} = y_1(x) = B(x) \Rightarrow Ly_1(x) = B(x) \qquad y_2(x) = B(x) \boxtimes B(x)$$

$$L\frac{[L^{n-2}y(x)]}{y_3(x)} = y_2(x) = \overset{2}{\boxtimes} B(x) \Rightarrow L y_3(x) = \boxtimes B(x) \Rightarrow y_3(x) = B(x)\overset{2}{\boxtimes} B(x)$$

$$y(x) = \frac{B(x)}{B(x)}$$

$$y_3(x) = \overset{3}{\boxtimes} B(x)$$

Y de igual forma obtendríamos $y_{n+1}(x) = \overset{n+1}{\boxtimes} B(x)$

Adoptaremos el siguiente convenio simbólico:

$y_1(x) = B(x) \quad y_2(x) = \overset{2}{\boxtimes} B(x) = B(x)^2 \ldots \; y_{n+1}(x) = \overset{n+1}{\boxtimes} B(x) = B(x)^{n+1}$

Con lo cual obtendríamos la solución de la ecuación homogénea

$y_H(x) = \lambda_1 B(x) + \lambda_2 B(x)^2 + \lambda_3 B(x)^3 + \ldots + \lambda_{k+1} B(x)^{k+1}$

La solución particular de la ecuación completa sería en este caso

$y_p(x) = B(x) \overset{n+1}{\boxtimes} \varphi(x)$

Si buscamos la solución que cumpla con las condiciones propuestas, ésta sería:

$$\boxed{f(x) = f(x_0)\, B(x) + Lf(x_0)\, B(x)^2 + L^2 f(x_0)\, B(x)^3 + \ldots + L^n f(x_0)\, B(x)^{n+1} + B(x)^{n+1} \boxtimes L^{n+1} f(x)}$$

En donde se entiende $B(x)^k = \overset{k}{\boxtimes} B(x) = \underbrace{B(x) \boxtimes B(x) \boxtimes \ldots \boxtimes B(x)}_{k}$

Este teorema es una generalización del teorema de Taylor e introduce nuevos desarrollos en serie asociados al operador lineal L.

Un ejemplo lo hemos obtenido en el apartado anterior.

## <u>EXPRESION GENERAL DEL RESTO EN LA SERIE DE TAYLOR, CON INTRODUCCION DE UNA FUNCION ARBITRARIA Y DE UN PARAMETRO. CASOS PARTICULARES, RESTOS EN FORMA CLASICA.-</u>

Sea $f(x)$ una función que admite derivadas contínuas hasta el orden $(n+1)$ inclusive en el intervalo abierto $]a,b[$ y $g(x)$ una función que admite derivadas contínuas hasta el orden $(p+1)$ inclusive en el intervalo abierto $]a,b[$. Sean $x, x_0$ tales que $x, x_0 \in ]a,b[$ / Si $x_0 < \xi < x$, se verifica

$$\frac{f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x-x_0) - \ldots - D^n f(x_0) \dfrac{(x-x_0)^n}{n!}}{g(x) - g(x_0) - D g(x_0)(x-x_0) - \ldots - D^p g(x_0) \dfrac{(x-x_0)^p}{p!}} = \frac{D^{n+1} f(\xi)}{D^{p+1} g(\xi)} (x-\xi)^{n-p} \frac{p!}{n!}$$

En efecto. Construyamos una función como sigue:

$$H(t) = \left(f(x) - f(t) - Df(t)(x-t) - \ldots - D^n f(t) \frac{(x-t)^n}{n!}\right)\left(g(x) - g(x_0)\right) -$$

$$- Dg(x_0)(x - x_0) - \dots - D^p g(x_0)\frac{(x-x_0)^p}{p!}\Big) - \Big(f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x-x_0) - \dots - D^n f(x_0)$$
$$\frac{(x-x_0)^n}{n!}\Big)\Big(g(x) - g(t) - Dg(t)(x-t) - \dots - D^p g(t)\frac{(x-t)^p}{p!}\Big)$$

$$\left.\begin{array}{l} H(x) = 0 \\ H(x_0) = 0 \end{array}\right\} \text{ T. Rolle } \exists\, \xi \text{ tal } x_0 < \xi < x \Rightarrow DH(\xi) = 0$$

$$DH(t) = -D^{n+1}f(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\Big(g(x) - g(x_0) - Dg(x_0)(x-x_0) - \dots - D^p g(x_0)$$
$$\frac{(x-x_0)^p}{p!} + D^{p+1}g(t).\frac{(x-t)^p}{p!}\Big(f(x) - f(x_0) - Df(x_0) - \dots - D^n f(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

$$DH(\xi) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x-x_0) - \dots - D^n f(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}}{g(x) - g(x_0) - Dg(x_0)(x-x_0) - \dots - D^p g(x_0)\frac{(x-x_0)^p}{p!}}} =$$

$$\boxed{= \frac{p!\, D^{n+1}f(\xi)}{n!\, D^{p+1}g(\xi)}(x-\xi)^{n-p}}$$

Busquemos una función $g(x)$ que nos simplifique la expresión.

Para esto vamos a resolver la ecuación diferencial $D^{p+1}g(x) = \psi(x)$ y tomando como condiciones inicales: $(g(x_0) = Dg(x_0) = D^2 g(x_0) = \dots = D^p g(x_0) = 0$

La solución particular de esta ecuación diferencial es:

$$g(x) = \int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^p}{p!}\psi(t)\,dt$$

Sustituyendo el valor de $g(x)$ obtenido en la ecuación anterior tendríamos:

$$f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x-x_0) - \dots - D^n f(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} = \frac{D^{n+1}f(\xi)}{\psi(\xi)}(x-\xi)^{n-p}\frac{p!}{n!}$$
$$\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^p}{p!}\psi(t)\,dt$$

Con lo cual la expresión general del resto sería:

$$\boxed{R(\xi, x_0, n, p, f(x), \psi(x)) = \frac{D^{n+1}f(\xi)}{\psi(\xi)}(x-\xi)^{n-p}\frac{p!}{n!}\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^p}{p!}\psi(t)\,dt}$$

Casos particulares clásicos:

<u>Schölomilt:</u>

$$R(x, \xi, x, n, p, f(x), h(x-x_0)) = \frac{D^{n+1}f(\xi)}{n!}(x-\xi)^{n-p}\frac{(x-x_0)^{p+1}}{p+1}$$

$h(x)$ es la función de Heaviside.

Lagrange:

$$R(x_0,\xi,x,n,n,f(x),h(x-x_0)) = D^{n+1}f(\xi)\,\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Cauchy:

$$R(x_0,\xi,x,n,o,f(x),h(x-x_0)) = \frac{D^{n+1}f(\xi)}{n!}\,(x-\xi)^{n}(x-x_0)$$

Euler:

$$R(x_0,\xi,x,n,n,f(x),D^{n+1}f(x)) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n}}{n!}\,D^{n+1}f(t)\,dt$$

Euler - Schölomilt:

$$R(x_0,\xi,x,n,p,f(x),D^{n+1}f(x)) = (x-\xi)^{n-p}\,\frac{p!}{n!}\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{p}}{p!}\,D^{n+1}f(t)\,dt$$

## CAPITULO IV.

Espacios solución correspondientes a las autofunciones de un operador lineal. Estudio concreto, cuando el operador lineal es el operador D. La teoria de polinomios ortogonales, como solución a un problema de autofunciones de operadores de 2º orden. Propiedades mas importantes de los mismos.

Generalización de la teoria de polinomios ortogonales. Polinomios funcionales ortogonales.

Generalización de funciones armonicas mediante el de la laplaciana en operadores lineales para funciones de dos variables.

ESPACIOS SOLUCION CORRESPONDIENTES A LAS AUTOFUNCIONES DE UN OPERADOR LINEAL.

El tercer problema que consideramos como fundamental, era el encontrar las autofunciones y los autovalores correspondiente a un operador. Recordamos que el problema quedaba planteado mediante la ecuación $P_k(L)\,y(x) = \lambda y(x)$. Los valores de $\lambda$ eran conocidas con el nombre de autovalores y las soluciones correspondientes a cada autovalor como autofunciones.

Estos problemas tuvieron su origen en la teoria de derivados par-

ciales unos y otros en la teoria de interpolación. El problema ha podido ser planteado con independencia de las genesis del mismo gracias a la teoria de espacios operacionales y funcionales.
No conviene olvidar a veces la genesis del mismo, para poder estructurar las soluciones.
En principio conviene seleccionar un sistema de autovalores que sea numerable por ejemplo $\lambda_1 \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots \to \{\lambda_k\}$ a continuación para cada autovalor elegir una de las infinitas autofuncionales que satisfacen a la ecuación correspondiente, que cumpla algunas condiciones determinadas. De esta forma hemos seleccionado un sistema de autofunciones $y_1(x)$, $Y_2(x), \ldots, y_k(x), \ldots$ , $\{y_k(x)\}$ correspondiendo con los autovalores. Este sistema de autofunciones generados para distintos autovalores tienen la propiedad de ser linealmente independientes. En efecto verifiquemoslo. Para esto vamos a elegir como sistema de operadores independientes $P_k(L)$, $P_k(L)^2, \ldots$, $P_k(L)^{k-1}$ y vamos a probar que k de estas soluciones son independientes.

Elijamos el sistema .

$$\mu_1 y_1(x) + \mu_2 y_2(x) + \ldots + \mu_k y_k(x) = 0$$

Estas funciones tienen la propiedad :

$$P_k(L)\, y_1(x) = \lambda_1 y_1(x),\quad P_k(L)\, y_2(x) = \lambda_2 y_2(x), \ldots, P_k(L)\, y_k = \lambda_k y_k(x)$$

Apliquemos a la ecuación el sistema independientes

$$\mu_1 y_1(x) + \mu_2 y_2(x) + \ldots + \mu_k y_k(x) = 0$$

Aplicando $P_k(L)$ $\mu_1\lambda_1 y_1(x) + \mu_2\lambda_2 y_2(x) + \ldots + \mu_k\lambda_k y_k(x) = 0$

$\vdots$

Aplicando $P_k(L)^2$ $\mu_1\lambda_1^2 y_1(x) + \mu_2\lambda_2^2 y_2(x) + \ldots + \mu_k\lambda_k^2 y_k(x) = 0$

$\vdots$

Aplicando $P_k(L)^{k-1}$ $\mu_1\lambda_1^{k-1} y_1(x) + \mu_2\lambda_2^{k-1} y_2(x) + \ldots + \mu_k\lambda_k^{k-1} y_k(x) = 0$

Este sistema admitirá solución única cuando el determinante :

$$\# \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_k(x) \\ \lambda_1 y_1(x) & \lambda_1 y_2(x) & \ldots & \lambda_k y_k(x) \\ \lambda_1^2 y_1(x) & \lambda_2^2 y_2(x) & \ldots & \lambda_k^2 y_k(x) \\ \lambda_1^{k-1} y_1(x) & \lambda_2^{k-1} y_2(x) & & \lambda_k^{k-1} y_k(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Delta = y_1(x)\, y(x) \dots y_k(x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = y_1(x)\, y_2(x) \dots y_k(x) \prod_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{k} (\lambda_i - \lambda_j)$$

Como $\lambda_i \neq \lambda_j$ $\Delta \neq 0 \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = 0$

Con lo cual el conjunto de funciones $\{ y_1(x), y_2(x), \dots y_k \}$ es un sistema de funciones linealmente independientes. Si lo hubiesemos hecho con el sistema $\{ y_k(x) \}$ nos habria salido igualmente la independencia funcinal.

Una vez escogido el sistema de funciones independientes nos proponemos estudiar el espacio que engendran. En otras palabras, encontrar las funciones que se expresan como combinación lineal de ellas.

$$f(x) = \mu_1 y_1(x) + \mu_2 y_2(x) + \dots + \mu_k y_k(x) + \dots = \sum_1^{\infty} \mu_k y_k(x)$$

Para esto es necesario introducir en el espacio un concepto nuevo que nos de idea de convergencia. Este concepto requiere del estudio de una topologia en el mismo. Segun la forma de introducir la topología aparecen espacios con distintas denominaciones. Cuando un abierto se hace coincidir con una bola y esta, está determinada por el conjunto de puntos y, tales que $\|y-y_0\| < R$ siendo $y_0$ el centro de la misma entonces la distancia entre dos puntos está determinada mediante la introducción de una norma en él. Si ademas cualquier sucesión de puntos tomada en el espacio converge hacia uno que pertenece al mismo se dice que el espacio es completo. Un espacio vectorial de dimension infinita,normado y completo recibe el nombre de espacio de Banach. Estos espacios son de gran interes en la teoria de operadores continuosy son por lo general el tipo de espacio que suele requerir los problemas de la Fisica aplicada y del analisis funcional. Otro tipo de espacio que tiene un gran interes es el de Hibbert. Se considera como un caso particular del de Banach. Esta particularización se debe al tipo de norma considerada. En un espacio de Hibbert, la norma procede de una forma hermítica. Una condi ción necesaria y suficiente para que un espacio de Banach sea de Hibbert, que presentaba en el congreso que se celebró en Granada en Noviembre del año 1.968. Este trabajo figura en la revista que surgió con motivo del congreso.

CASO PARTICULAR EL OPERADOR L ES EL OPERADOR D. LOS OPERADORES BASICOS SON DE SEGUNDO ORDEN.

Nos proponemos hacer el estudio de los autovalores y autofunciones correspondientes a un operador de segundo orden, tomando como operador basico el operador D. En otros terminos buscamos las autofunciones de : $P_k(D) = \left(a_0(x) \otimes D^2 \dotplus a_1(x) \otimes D \dotplus a_2(x) \otimes I\right)$

Definamos previamente una operación en el conjunto de funciones y veamos que esta responde a la de una forma hermítica.

$$\left(f(x), g(x)\right) = \int_a^b r(x)\, f(x).\, \overline{g(x)}\, dx.$$

Propiedades.

$$\text{I. } \left(f(x), g_1(x)+g_2(x)\right) = \int_a^b p(x)\, f(x)\, \overline{\left(g_1(x)+g_2(x)\right)}\, dx = \int_a^b p(x)\, f(x).\overline{g_1(x)}\, dx + $$
$$+\int_a^b p(x) f(x).\overline{g_2(x)}\, dx = \left(f(x), g_1(x)\right) + \left(f(x).g_2(x)\right)$$

$$\text{II. } \left(f(x), g_1(x)\right) = \int_a^b p(x) f(x) \overline{g(x)} dx = \overline{\int_a^b p(x) g(x).\overline{f(x)}\, dx} =$$
$$= \overline{\int_a^b p(x) g(x).\overline{f(x)}\, dx} = \overline{\left(g(x), f(x)\right)}$$

$$\text{III. } \left(f(x), \lambda g(x)\right) = \int_a^b p(x) f(x).\overline{\lambda g(x)}\, dx = \int_a^b p(x)\, \bar{\lambda}\, f(x).\overline{g(x)}\, dx =$$
$$= \bar{\lambda} \int_a^b p(x) f(x) \overline{g(x)}\, dx = \left(\bar{\lambda} f(x), g(x)\right) = \bar{\lambda} \left(f(x), g(x)\right)$$

Por consiguiente la operación $\left(f(x), g(x)\right) = \int_a^b p(x)\, f(x).\, \overline{g(x)}\, dx$ corresponde a la definición de un forma hermética.

Si ademas exigimos que $\int_a^b p(x).|f(x)|^2 dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ y que $\int_a^b p(x)\, |f(x)|^2 dx > 0$ , la forma hermítica seria no degenerada y positiva.

Una forma hermítica corresponde a la generalización del producto escalar de dos vectores. Diremos que dos funciones son ortogonales respecto a la función peso p(x) cuando la forma hermítica correspondiente a ellos es nula. Es decir $f(x) \perp g(x)$ si $\left(f(x), g(x)\right) = 0$

siendo $f(x)$ y $g(x) \neq 0$

Busquemos ahora las autofunciones correspondientes a los operadores de segundo orden.

$$\left(a_0(x) \otimes D^2 \dot{+} a_1(x) \otimes D \dot{+} a_2(x) \otimes 1\right) y(x) = \lambda y(x)$$

$$a_0(x) \times D^2y(x) + a_1(x) \times Dy(x) + a_2(x) \times y(x) = \lambda y(x)$$

Multipliquemos los dos miembros por un factor $r(x)$ de forma que el coeficiente que resulta despues de multiplicar por $r(x)$, en $Dy(x)$ coincida con la derivada del coeficiente que multiplica a $D\,y(x)$

$$a_0(x) \times r(x) D^2 y(x) + a_1(x) \times r(x)\, Dy + a_2(x) \times r(x)\, y(x) = \lambda r(x)\, y(x)$$

$$a_1(x)\, r(x) = D\left[a_0(x)\, r(x)\right] = Da_0(x)\, r(x) + a_0(x)\, Dr(x)$$

Dividiendo por $a_0(x) \cdot r(x)$

$$\frac{Dr(x)}{r(x)} + \frac{Da_0(x)}{a_0(x)} = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}$$

Integrando los dos miembros resulta :

$$r(x).\ a_0(x) = e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} \Rightarrow r(x) = \frac{1}{a_0(x)} e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}$$

Si llamamos a $r(x).a_0(x) = p(x)$ y $r(x) \times a_2(x) = g(x)$.

La ecuación quedaria.

$$p(x) \times D^2y(x) + Dp(x)\, Dy(x) + g(x)\, y(x) = \lambda r(x)\, y(x)$$

$$D\left[p(x)\, Dy(x)\right] + g(x)\, y(x) = \lambda r(x)\, y(x)$$

Veamos que propiedades tienen las soluciones correspondientes a autovalores distintos.

$$D\left(p(x)\, Dy_1(x)\right) + g(x)\, y_1(x) = \lambda_1 r(x)\, y_1(x)$$
$$D\left(p(x)\, Dy_2(x)\right) + g(x)\, y_2(x) = \lambda_2 r(x)\, y_2(x)$$

Multipliquemos la primera de las ecuaciones por $y_2(x)$ la segunda por $y_1(x)$ y restemos :

$$y_2(x)\, D\left(p(x)\, Dy_1(x)\right) - y_1(x) D\left(p(x)\, Dy_2(x)\right) = (\lambda_1 - \lambda_2) r(x)\, y_1(x)\, y_2(x)$$

Si integramos entre los limites $(a,b)$ de un intervalo.

$$\int_a^b y_2(x)\, D\left(p(x) Dy_1(x)\right) dx - \int_a^b y_1(x) D\left(p(x) Dy_2(x)\right) dx = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b r(x) y_1(x) y_2(x)\, dx$$

$$\left[p(x) y_2(x) Dy_1(x)\right]_a^b - \int_a^b p(x) Dy_1(x) Dy_2(x) dx - \left[p(x) y_1(x)\, Dy_2(x)\right]_a^b + \int_a^b p(x)\, Dy_1(x) Dy_2(x) dx =$$

$$= \left[ p(x) \begin{vmatrix} y_2(x) & y_1(x) \\ Dy_2(x) & Dy_1(x) \end{vmatrix} \right]_a^b = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b r(x)\, y_1(x)\, y_2(x)\, dx.$$

$$p(b) \begin{vmatrix} y_2(x) & y_1(b) \\ Dy_2(b) & Dy_1(b) \end{vmatrix} - p(a) \begin{vmatrix} y_2(a) & y_1(a) \\ Dy_2(a) & Dy_1(a) \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b r(x) y_1(x) y_2(x)\, dx$$

Si obligamos a que $p(a) = p(b) = 0$ las funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ serian ortogonales en el intervalo $(a, b)$ respecto a la función peso $r(x)$.

TEORIA DE POLINOMIOS ORTOGONALES. PROPIEDADES MAS IMPORTANTES.

Los polinomios clásicos, solución de una ecuación de autofunciones o mejor, planteados como autofunciones de un operador son :

Soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales.

Polinomios de Jacobi:

$$(1-x^2)D^2y - (\alpha-\beta+(\alpha+\beta+2)\ x)\ Dy = -n(n+\alpha+\beta+1)\ y$$

Polinomios de Gegenlaner o ultraesfericos.

$$(1-x^2)\ D^2y-2\ (\alpha+1)\ x\ Dy = -n\ (n+2a+1)\ y$$

Polinomios de Legendre o esfericos.

$$(1-x^2)\ D^2y-2x\ Dy = -n(n+1)\ y$$

Polinomisode Tschebyched.

$$(1-x^2)\ D^2y-x\ Dy = -n^2y$$

Polinomios de Hermite.

$$D^2y-2\ x\ Dy = -\ 2ny$$

Polinomios de Laguerre.

$$x\ D^2y + (1-x)\ Dy = -\ ny$$

Todas estas ecuaciones diferenciales admiten como solución un polinomio de grado u. Vamos a estudiar algunas propiedades que son comunes a todas ellas.

Propiedad 1. Todos los polinomios satisfacen una relación de recurrencia de la forma:

$$Hn(x) = (An + xBn)\ Hn-1(x) + Cn\ Hn-2(x)$$

En efecto.

Multipliquemos el polinomio $H_{n-1}(x)$ por $x\,B_n$ para que los terminos de mayor grado sean iguales y realicemos la diferencia entre ambos polinomios.

$$H_n(x) - x\,B_n H_{n-1}(x) = P_{n-1}(x)$$

Dicha dieferencia srá un polinomio de grado $(n-1)$. Llamemos a este polinomio $P_{n-1}(x)$ y dxpresemoslo en función de polinomios de $H_n(x)$.

Será : $$P_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} H_k(x).\lambda_k$$

$$H_n(x) - x\,B_n\,H_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} H_k(x)\,\lambda_k$$

Tratemos de calcular los valores de $\lambda_k$.

Para esto, como $(H_k(x), H_p(x)) = 0 \quad k \neq p$ por ser ortogonales

$$(H_n(x) - x\,B_n H_{n-1}(x),\ H_k(x)) = \lambda_k \|H_k(x)\|^2 =$$

$$= -B_n(x\,H_{n-1}(x),\ H_k(x)) = \lambda_k\|H_k(x)\|^2$$

$$\lambda_k \|H_k(x)\|^2 = -B_n(H_{n-1}(x), x\,H_k(x)) = -B_n(H_{n-1}(x), \sum_{m=0}^{k+1} \lambda_m H_m(x))$$

Ahora bien: $$(H_{n-1}(x), \sum_{m=0}^{k+1} \lambda_m H_m(x)) = \begin{cases} 0 \text{ si } k+1 < u-1 \\ \neq 0 \text{ si } k+1 \geq u-1 \end{cases}$$

Luego los unicos valores que son distintos de cero son $\lambda_{n-1}$ y $\lambda_{n-2}$

Por consiguiente $P_{n-1}(x) = \lambda_{n-1} H_{n-1}(x) + \lambda_{n-2} H_{n-2}(x) = A_n H_{n-1}(x) + C_n H_{n-2}$

Sustituyendo nos quedaria.

$$\boxed{H_n(x) = (A_n + x\,B_n)\,H_{n-1} + C_n H_{n-2}}$$

Propiedad 2. Los polinomios ortogonales satisfacen una formula analoga a la de Rodriguez para los polinomios de Legendre.

Esta formula es del tipo :

$$\boxed{H_n(x) = K_n \cdot g(x)\,D^n f(x)}$$

Vamos a hacer una demostración constructiva tomando como caso particular los polinomios de Jacobi.

$$(1-x^2)D^2y - (\alpha-\beta+(\alpha+\beta+2)x)Dy + n(n+\alpha+\beta+1)\,y = 0$$

Apliquemos $D$ $(1-x^2)D^3y - (\alpha-\beta+(\alpha+1+\beta+1+2)\,x)D^2y + (n-1)(n+\alpha+1+\beta+1)Dy = 0$

Apliquemos $D^2$ $(1-x^2)D^4y - (\alpha-\beta+(\alpha+2+\beta+2+2)x)D^3y + (n-2)(n-1+\alpha+2+\beta+2)D^2y = 0$

Aplicando $D^3$ $(1-x^2)D^5y - (\alpha-\beta+(\alpha+3+\beta+3+2)x)D^4y + (u-3)(n-2+\alpha+3+\beta+3)D^3y = 0$

Aplicando $D^{n-1}(1-x^2)D^{n+1}y-(a-B+(a+n+1+B+n-1+2)x)D^{n}y+1.(2+a+n-1+B+n-1)D^{n-1}y=0$

Haciendo el cambio $D^{n-1}y = u$, la ecuación quedaria:

$$(1-x^2)\,D^2u-(a-B+(a+n+B+n))\,Du+(a+n+B+n)\,u = 0$$

Busquemos un factor $r(x)$ para que el coeficiente en Du sea la derivada del coeficiente de $D^2u$.

$$r(x)=\frac{1}{1-x^2}\,e^{\int\frac{B-a}{1-x^2}dx-\int\frac{a+n+B+n}{1-x^2}x} = \frac{(1-x)^{a+n}(1+x)^{B+n}}{1-x^2}$$

Multiplicandd la ecuación por este factor queda :

$$(1-x)^{a+n}(1+x)^{\beta+n}D^2u-(1+x)^{a+\beta-1}(1-x)^{n+a-1}(a-B+(a+n+B+n)x)Du=-(a+n+B+n)(1+x)^{\beta+n-1}(1-x)^{a+n}u$$

$$D\left[(1-x)^{a+n}(1+x)^{\beta+n}Du\right]=-(a+n+B+n)(1-x)^{a+n-1}(1+x)^{\beta+n-1}\,u.$$

Deshaciendo el cambio:

$$D\left[(1-x)^{a+n}(1+x)^{\beta+n}D^{n}y(x)\right]=-(a+n+B+n)(1-x)^{a+n-1}(1+x)^{\beta+n-1}D^{n-1}y(x)$$

Aplicando a los dos miembros $D^{n-1}$

$$\boxed{D^{n}\left[(1-x)^{a+n}(1+x)^{\beta+n}D^{n}y(x)\right]=-(a+n+B+n)D^{n-1}\left[(1-x)^{a+n-1}(1+x)^{\beta+n-1}D^{n-1}y(x)\right]}$$

Aplicando esta formula reiteradamente obtendriamos.

$$D^{n}\left((1-x)^{a+n}(1+x)^{\beta+n}D^{n}y(x)\right)=(-1)^{n}(a+n+B+n)\ldots(a+B).(1-x)^{a}(1+x)^{\beta}y(x)=K_n(1-x)^{a}(1+x)^{\beta}y(x)$$

$$y(x)=\frac{1}{K_n}(1-x)^{-a}(1+x)^{-\beta}D^{n}\left((1-x)^{a+n}(1+x)^{\beta+n}D^{n}y(x)\right) =$$

Como $y(x)$ es un polinomio de grado n. $D^{n}y(x)=K'_n$

$$y(x)=\frac{K'_n}{K_n}(1-x)^{-a}(1+x)^{-\beta}D^{n}\left[(1-x)^{a+n}(1+x)^{\beta+n}\right]$$

a $\frac{K'_n}{K_n}$ se le suele dar el valor $\frac{K'_n}{K_n}=\frac{(-1)^{n}}{2^{n}.n!}$

$$y(x)=\frac{(-1)^{n}}{2^{n}.n!}(1-x)^{-a}(1+x)^{-\beta}D^{n}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right]$$

Formula de Rodriguez para los polinomios de Jacobi.

Propiedad 3.Función generatriz.

Se trata de encontrar una función de dos variables, tal que al desarrollar en serie de Mac-Laurin los coeficientes sean los polinomios ortogonales.

$$\boxed{G(x,t) = \sum_{0}^{\infty} H_n(x)\,t^{n}.}$$

Para determinar la función generatriz haremos uso de la relación de recurrencia, transformando la ecuación en diferencias finitas que verifican los mismos, en la ecuacion diferencial lineal, y resolviendo dicha ecuación con las condiciones iniciales impuestas por los polinomios.

Propiedad 4. Ortonormalización de los polinomios.

A partir de la relación de recurrencia.

$$H_n(x) = (A_n + B_n x)\, H_{n-1}(x) + C_n H_{n-2}(x)$$

Multiplicando escalarmente por $H_{n-2}(x)$

$$(H_n(x), H_{n-2}(x)) = \left((A_n+B_n x)\, H_{n-1}, H_{n-2}(x)\right) + C_n \|H_{n-2}\|^2$$

$$0 = B_n (H_{n-1}(x), x\, H_{n-2}(x)) + C_n \|H_{n-2}(x)\|^2$$

$$xH_{n-2}(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \lambda_m H_m(x)$$

$$0 = B_n \lambda_{n-1} \|H_{n-1}\|^2 + C_n \|H_{n-2}\|^2 \qquad \lambda_{n-1} = D_n$$

$$\boxed{\|H_{n-1}(x)\|^2 = (-1)\cdot\frac{C_n}{B_n D_n} \|H_{n-2}(x)\|^2}$$

Aplicando esta formula de recurrencia, obtendriamos la norma en funcion de $\|H_0\|^2$ y habriamos llegado a conocer el valor de la norma en un caso general.

Propiedad 5. Formula de ChristoffelDarlouse.

$$H_0(x)H_0(y)+H_1(x)H_1(y)+\dots+H_n(x)\, H_n(y) = \frac{1}{B_{n+1}}\left(\frac{H_{n+1}(x)H_n(y)-H_{n+1}(y)H_n(x)}{x-y}\right)$$

Partiendo de la formula de recurrencia.

$$H_{n+1}(x)H_n(y)-H_{n+1}(y)H_n(x) = \left[(A_{n+1}+B_{n+1}x)H_n(x)+C_{n+1}H_{n-1}(x)\right] H_n(y) -$$

$$- \left[(A_{n+1}+B_{n+1}(y))H_n(y)+C_{n+1}\, H_{n-1}(y)\right]\, H_n(x) =$$

$$= B_{n+1}(x-y)H_n(x)H_n(y) - C_{n+1}\left(H_n(x)H_{n-1}(y) - H_n(y)\, H_{n-1}(x)\right)$$

$$\frac{1}{B_{n+1}}\, \frac{H_{n+1}(x)H_n(y)-H_{n+1}(y)H_n(x)}{x-y} = H_n(x)H_n(y) - \frac{C_{n+1}}{B_{n+1}}\left(\frac{H_n(x)H_{n-1}(y)-H_n(y)H_{n-1}(x)}{x-y}\right) =$$

$$= H_n(x)H_n(y) + \frac{1}{B_n}\, \frac{H_n(x)H_{n-1}(y)-H_n(y)H_{n-1}(x)}{x-y}$$

Reiterando el procedimiento llegariamos.

$$\boxed{\frac{1}{B_{n+1}}\, \frac{H_{n+1}(x)H_n(y)-H_{n+1}(y)H_n(x)}{x-y} = H_n(x)H_n(y)+H_{n-1}(x)H_{n-1}(y)+\dots+H_0(x)H_0(y)}$$

como caso particular, se obtiene, cuando $y = x$

$$\frac{1}{B_{n+1}}\, (DH_{n+1}(x)\cdot H_n(x)-H_{n+1}(x)DH_n(x)) = H_0(x)^2 + H_1(x)^2 + \dots + H_n(x)^2$$

$$\boxed{\frac{1}{B_n} \begin{vmatrix} H_n(x) & H_{n+1}(x) \\ DH_n(x) & DH_{n+1}(x) \end{vmatrix} = H_0(x)^2 + H_1(x)^2 + \ldots + H_n(x)^2}$$

## Estudio particular de los polinomios. Polinomios de Jacobi.

$$I_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} D^n \left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right] =$$

$$= \frac{1}{2^n n!} (x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta} D^n \left[(x-1)^{\alpha+n}(x+1)^{\beta+n}\right]$$

1-Relación de recurrencia,

$$(x-1)^{-\alpha} = x^{-\alpha} + \alpha x^{-\alpha-1} + \frac{a(a+1)}{2} x^{-\alpha-2} + \ldots$$

$$(x+1)^{-\beta} = x^{-\beta} - \beta x^{-\beta-1} + \frac{B(B+1)}{2} x^{-\beta-2} + \ldots$$

$$(x+1)^{-\beta}(x-1)^{-\alpha} = x^{-\alpha-\beta} + (\alpha-B)x^{-\alpha-\beta-1} + \frac{(a-B)^2+a+B}{2} x^{-\alpha-\beta-2} + \ldots$$

$$(x+1)^{\beta+n}(x-1)^{\alpha+n} = x^{2n+\alpha+\beta} + (B-\alpha)x^{2n+\alpha+\beta-1} + x^{2n+\alpha+\beta-2}\left[\frac{(a-\beta)^2-(2n+a+\beta)}{2}\right] + \ldots$$

$$J_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left(x^{-\alpha-\beta} + (a-B)x^{-\alpha-\beta-1} + \frac{(a-B)^2+(a+\beta)}{2} + \ldots\right) D^n \left[(x+1)^{\beta+n}(x-1)^{\alpha+n}\right] =$$

$$J_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\Gamma(2n+a+B+1)}{\Gamma(n+a+B+1)} x^n + \frac{(a-B)}{2^n(n-1)!}\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} x^{n-1} + \frac{1}{2^n(n-2)!}\frac{(\alpha-\beta)^2-(2n+\alpha+\beta)}{2}\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta-1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} x^{n-2} + \ldots$$

$$I_{n-1}(x) = \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta-1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta)} x^{n-1} + \frac{(a-\beta)}{2^{n-1}(n-2)!}\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta-2)}{\Gamma(n+\alpha+\beta)} x^{n-2} + \frac{1}{2^{n-1}(n-3)!}\frac{(\alpha-\beta)^2-(2n+\alpha+\beta-2)}{2}\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta)} x^{n-3} + \ldots$$

$$I_{n-2}(x) = \frac{1}{2^{n-2}(n-2)!}\frac{\Gamma(2n+a+B-3)}{\Gamma(n+a+B-1)} x^{n-2} + \ldots$$

$$\boxed{B_n = \frac{1}{2n} \cdot \frac{(2n+a+B)(2n+a+B-1)}{(n+a+B)}} \qquad \boxed{A_n = \frac{(a^2-B^2)(2n+a+B-1)}{2n(n+a+B)(2n+a+B-2)}}$$

$$\boxed{C_n = -\frac{2(2n+a+B)(n+a-1)(n+B-1)}{2n(n+a+B)(2n+a+B-2)}}$$

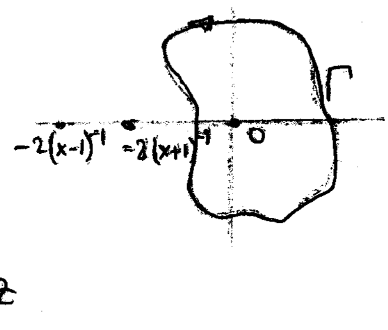
Sustituyendo y quitando denominadores queda.

$$\boxed{\begin{gathered} 2n(n+a+B)(2n+a+B-2)\, J_n(x) = \\ = (2n+a+B-1)\left[(2n+a+B)(2n+a+B-2)x + a^2-B^2\right] J_{n-1}(x) - 2(n+a-1)(n+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)\, J_{n-2}(x) \end{gathered}}$$

## FUNCIÓN GENERATRIZ.

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k}\binom{n+\beta}{k}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{\left[1+\left(\frac{x+1}{2}\right)z\right]^{n+\alpha}\left[1+\left(\frac{x-1}{2}\right)z\right]^{n+\beta}}{z^{n+1}}\,dz$$




$$G(x,t) = \sum_{0}^{\infty} t^n J_n(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \sum_{0}^{\infty} \frac{\left(1+\left(\frac{x+1}{2}\right)z\right)^{n+\alpha}\left(1+\left(\frac{x-1}{2}\right)z\right)^{n+\beta}}{z^{n+1}} t^n\, dz$$

$$\cancel{= \frac{1}{2\pi i}\oint \ldots}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{\left(1+\frac{x+1}{2}z\right)^{\alpha}\left(1+\frac{x-1}{2}z\right)^{\beta}}{z-t\left(1+\frac{x+1}{2}z\right)\left(1+\frac{x-1}{2}z\right)}\,dz=$$

$$=\frac{2^{\alpha+\beta}}{(1-2xt+t^2)^{1/2}(1-t+(1-2xt+t^2)^{1/2})^{\alpha}(1+t+(1-2xt+t^2)^{1/2})^{\beta}}$$

(1)

Ecuaciones diferencial. Función peso. Intervalo de Ortogonelidad.

$(1-x^2)D^2y+(a-B+(a+B+2)x)Dy+n(n+a+B+1)y=0$

$$r(x)=\frac{1}{1-x}e^{-\int\frac{\alpha-\beta}{1-x^2}dx-\int\frac{\alpha+\beta+2}{1-x^2}x\,dx}=\frac{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}}{1-x^2}=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$$

$$p(x)=(1-x^2)r(x)=(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\begin{cases}p(a)=0 & p(1)=0\\ p(b)=0 & p(-1)=0\end{cases}\quad \text{si } a>-1,\ B>-1$$

Luego el sistema de funciones.

$$\{Jn(x)\}=\left\{\frac{(-1)^n}{2^n.u!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}D^n\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right]\right\}$$

Son ortogonales en el intervalo $(-1,1)$ respecto a la función peso.

$r(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$

Ortonormalización de los polinomios.

$$\|In-1\|^2=\frac{(2n+a+B-3)}{(2n+a+B-1)}\cdot\frac{(n+\alpha-1)(n+B-1)}{(n-1)(n+\alpha+B-1)}\|In_{-2}(x)\|^2$$

$$\|In(x)\|^2=\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+a+B+1}\cdot\frac{\Gamma(n+a+1)\Gamma(u+B+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(u+a+B+1)}$$

POLINOMIOS DE GEGENLANER O ULTRAESFERICOS.

Son un caso particular de los polinomios de Jacobi, en donde $a=B$.

Formula de Rodriguez para los polinomios.

$$Gn(x)=\frac{(-1)^n}{2^n.u!}(1-x^2)^{-\alpha}D^n\left[(1-x^2)^{\alpha+n}\right]$$

Relación de recurrencia.

$m(n+2\alpha)Gn(x)=(2n+2\alpha-1)(u+\alpha)x\,G_{n-1}(x)-(u+\alpha-1(u+\alpha)\,G_{n-2}(x)$

FUNCION GENERATRIZ.

Multiplicando la ecuación por t y sumando desde cero a $\infty$ y llamando G(x,t) a la función generatriz de los polinomios de Gegenlaner nos plantearíamos la siguiente ecuación diferencial.

(1) $$G(x,t)=\sum_{0}^{\infty}J_n(x)t^n=\frac{2^{\alpha+\beta}}{(1-2xt+t^2)^{1/2}(1-t+(1-2xt+t^2)^{1/2})^{\alpha}(1+t+(1-2xt+t^2)^{1/2})^{\beta}}$$

$$t\, D_t^2 G\, (1-2xt+t^2) + \left((2a+1)-(u+a+5).xt+2(a+2)t^2\right) DG +$$
$$+G(t)\left((a+1)(a+2)t-(a+1)(2a+1)x\right) = 0$$

Si buscamos la solución particular tal que $G(x,0) = 1$ $DG'(x,0) = (a+1)x$ reduciendola previamente a una de Riccatti, obtendriamos como solución.

$$\boxed{G(x,t) = \sum_0^{\infty} Gn(x).t^n = \frac{2^{2\alpha}}{(1-2xt+t^2)^{1/2}(t-t+(1-2xt+t^2)^{1/2}(1+t+(1-2xt+t^2)^{1/2})}}$$

ECUACION DIFERENCIAL. FUNCION PESO. INTERVALO DE ORTOGONALIDAD.

$$(1-x^2)\, D^2 y - 2(a+1)\, x\, Dy + n(u+2a+1)\, y = 0$$

$$r(x) = \frac{1}{1-x^2}\, e^{-\int \frac{2(\alpha+1)x}{1-x^2}} = \frac{(1-x^2)^{\alpha+1}}{1-x^2} = (1-x^2)^{a}$$

$$p(x) = (1-x^2)r(x) = (1-x^2)^{a+1} \quad \begin{cases} p(a) = 0 \Rightarrow p(-1) = 0 \\ p(b) = 0 \Rightarrow p(1) = 0 \end{cases} \quad \text{Si } a > -1$$

Por consiguiente el sistema de funciones :

$$\boxed{\{Gn(x)\} = \left\{\frac{(-1)^n}{2^n.n!} (1-x^2)^{-a}\, D^n (1-x^2)^{\alpha+n}\right\}}$$

Son ortogonales en el intervalo $[-1,1]$ respecto a la función peso.

$$\boxed{r(x) = (1-x^2)^{\alpha}}$$

Ortonormalización de los polinomios.

$$\|Gn_{-1}(x)\|^2 = \frac{2n+2a-3}{2n+2a-1} \cdot \frac{(u+a-1)^2}{(u-1)(u+2a-1)} \|G_{n-2}(x)\|^2$$

$$\boxed{\|Gn(x)\|^2 = \frac{2^{2a+1}}{2n+2a+1} \cdot \frac{[\Gamma(u+a+1)]^2}{\Gamma(u+1)\Gamma(u+2a+1)}}$$

POLINOMIOS DE LEGENDRE O ESFERICOS.

Son un caso particular de los ultraesfericos cuando $a = 0$

Formula de Rodriguez para los polinomios de Legendre.

$$\boxed{Ln(x) = \frac{(-1)}{2^n.n!} \quad D^n\left[(1-x\ )^n\right]}$$

Relación de recurrencia.

$$\boxed{n\,Ln(x) = (2n-1)\, x\, L_{n-1}(x) - (n-1)\, L_{n-2}(x)}$$

FUNCION GENERATRIZ.

Partiendo de la relación de recurrencia.

$$(u+2)L_{n+2}(x) = (2n+3)\, x\, L_{n+1}(x) - (n+1)\, L_n(x)$$

Multiplicando por $t^{n+2}$ y sumando desde cero a $\infty$, teniendo en cuenta que $L_0(x)=1$, $L_1(x)=x$ y que $G(x,t)=\sum_0^\infty L_n(x)t^n$

$$\sum_0^\infty (n+2)t^{n+2}L_{n+2}(x)=2xt\sum_0^\infty t^{n+1}(n+1)L_{n+1}(x)+tx\sum_0^\infty t^{n+1}L_{n+1}(x)-t^2\sum_0^\infty nt^n L_n(x)-$$
$$-t^2\sum_0^\infty t^n L_n(x)$$

$$tDG(x,t)-t\,L_1(x)=2xt.tDG(x,t)+xt\left[G(x,t)-L_0(x)\right]-t^2.t.DG(x,t)-t^2 G(x,t)$$

$$(1-2xt+t^2)\,D\,G(x,t) = G(x,t)(x-t)$$

$$G(x,t) = \frac{1}{(1-2xt+t^2)^{1/2}} \qquad G(x,0) = 1$$

ECUACION DIFERENCIAL. FUNCION PESO, INTERVALO DE ORTOGONALIDAD.

$$(1-x^2)\,D^2y-2xDy+n(n+1) = 0$$

$$r(x) = \frac{1}{1-x^2}\,e^{-\int\frac{2x}{1-x^2}dx} = 1$$

$$p(x)=(1-x^2)r(x) = 1-x^2 \quad \begin{cases} p(a) = 0 \Rightarrow p(-1) = 0 \\ p(b) = 0 \Rightarrow p(1) = 0 \end{cases}$$

Lo que equivale a que el sistema de funciones.

$$\boxed{\left\{Ln(x)\right\} = \left\{\frac{(-1)}{2^n.n!}\quad D^n\,(1-x^2)^n)\right\}}$$

Son ortogonales en el intervalo $\{-1\ 1\}$ respecto de la funciones peso.

$$\boxed{r(x) = 1}$$

ORTONORMALIZACION DE LOS POLINOMIOS.

$$\|G_{n-1}(x)\|^2 = \frac{2n-3}{2n-1} \qquad \|G_{n-2}(x)\|^2$$

$$\boxed{\|Gn(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1}}$$

POLINOMIOS DE TSCHEBYCHEO.

Caso particular de los ultraesfericos cuando $a = -\frac{1}{2}$

Formula de Rodriguez para los polinomios de Tschebycheo.

$$\boxed{Tn(x) = \frac{(-1)}{2^n\,n!}\quad (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,D^n\left[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right]}$$

RELACION DE RECURRENCIA.

$$\boxed{4n(n-1)\,T_n(x) = 4(2n-1)(n-1)\,x\,T_{n-1}(x) - (2n-1)(2n-3)\,T_{n-2}(x)}$$

FUNCION GENERATRIZ.

De la relación de recurrencia obtenemos, despues de multiplicar por $t^{n+2}$ existiendo la igualdad desde cero a $\infty$ y teniendo en cuenta que $G(x,t) = \sum_0^{\infty} Tn(x).t^n$

$$4(n+2)(n+1)\, T_{n+2}(x) = 4(2n+3)(u+1)\, x\, T_{n+1}(x) - (2n+3)(2n+1)\, T_n(x)$$

Multiplicando por $t^{n+2}$

$$4\sum_0^{\infty}(u+2)(u+1)T_{n+2}(x)t^{n+2} = 4xt\sum_0^{\infty}(2n+3)(u+1)T_{n+1}(x)t^{n+1} - t^2\sum_0^{\infty}(2u+3)(2u+1)T_n(x$$

$$4\, D^2G(x,t)(1-2xt+t^2)+12(t-x)D\, G(x,t)+3\, G(x,t) = 0$$

La solución particular que toma los valores $\begin{cases} G(x,0) = 1 \\ DG(x,0) = \frac{x}{2} \end{cases}$

$$\boxed{G(x,t) = \frac{1}{2}\left(\frac{(1-t(x-\sqrt{x^2-1}))^{\frac{1}{2}}+(1-t(x+\sqrt{x^2-1}))^{\frac{1}{2}}}{(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}$$

$$\boxed{G(x,t) = \frac{1}{2}\quad \frac{1}{(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}(1-t+(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}(1+t+(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}}}$$

Otra expresión de $Tn(x) = \cos(n \arccos x)$

ECUACION DIFERENCIAL. FUNCION PESO. INTERVALO DE ORTOGONALIDAD.

$$(1-x^2)\, D^2y - x\, Dy + n^2y = 0$$

$$r(x) = \frac{1}{1-x^2}\, e^{-\int\frac{x}{1-x^2}dx} = \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$p(x) = (1-x^2)r(x) = (1-x^2)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \quad \begin{cases} p(a) = 0 \Rightarrow p(-1) = 0 \\ p(b) = 0 \Rightarrow p(1) = 0 \end{cases}$$

El sistema de funciones.

$$\boxed{\{Tn(x)\} = \{\cos(n \arccos x)\} = \left\{\frac{(-1)^n}{2^n.n!}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}D^n((1-x\quad)^{n-\frac{1}{2}}\right\}}$$

Es ortogonal en el intervalo $[-1,1]$ respecto a la función peso

$$\boxed{r(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}$$

ORTONORMALIZACION DE LOS POLINOMIOS.

$$\|T_{n-1}(x)\|^2 = \frac{2n-4}{(2n-2}\cdot\frac{(2n-3)^2}{4(u-1)(u-2)}\|T_{n-2}(x)\|^2$$

$$\boxed{\|Tn(x)\|^2 = \frac{1}{2n}\quad\frac{[\Gamma(u+1-\frac{1}{2}\quad)]^2}{\Gamma(u+1)\,\Gamma(u)}}$$

POLINOMIOS DE HERMITE.

Formula de Rodriguez para los polinomios de Hermite.

$$\boxed{H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{x^2} D^n(e^{-x^2})}$$

RELACION DE RECURRENCIA.

$$\boxed{nH_n(x) = 2x\, H_{n-1}(x) - 2\, H_{n-2}(x)}$$

FUNCION GENERATRIZ.

$$(n+2)t^{n+2} H_{n+2}(x) = 2xt\ t^{n+1} H_{n+1}(x) - 2t^2\ t^n\ H_n(x)$$

$$\sum_0^{\infty} (n+2)t^{n+2} H_{n+2}(x) = 2xt \sum_0^{\infty} t^{n+1} H_{n+1}(x) - 2t^2 \sum_0^{\infty} t^n H_n(x)$$

$$DG(x,t) = G(x,t)(2x-2t)$$

$$\boxed{G(x,t) = e^{2xt-t^2} = \sum_0^{\infty} H_n(x).t^n}$$

ECUACION DIFERENCIAL. FUNCION DE PESO/INTERVALO DE ORTOGONALIDAD.

$D^2 y - 2x\ Dy + 2ny = 0$

$$r(x) = e^{\int -2x\,dx} = e^{-x^2}$$

$$p(x) = r(x) = e^{-x^2} \quad \begin{cases} p(a) = 0 \Rightarrow p(-\infty) = 0 \\ p(b) = 0 \Rightarrow p(+\infty) = 0 \end{cases}$$

El conjunto de funciones.

$$\boxed{\{Hn(x)\} = \left\{\frac{(1)^n}{n!} e^{x^2} D^n(e^{-x^2})\right\}}$$

constituye un sistema ortogonal en el intervalo $(-\infty, +\infty)$ respecto a la función peso :

$$\boxed{r(x) = e^{-x^2}}$$

ORTONORMALIZACION DE LOS POLINOMIOS.

$$\|H_{n-1}(x)\|^2 = \frac{2}{n-1} \|H_{n-2}\|^2$$

$$\boxed{\|H_n\|^2 = \frac{2^n}{n!} \sqrt{\pi}}$$

POLINOMIOS DE LAGUERRE.

Formula de Rodriguez para los polinomios de Laguerre.

$$\boxed{L_n^a(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^x \quad D^n(x^n e^{-x})}$$

FUNCION GENERATRIZ.

$$\boxed{G(x,t) = \frac{1}{t+1} \cdot e^{\frac{xt}{t+1}}}$$

RELACION DE RECURRENCIA.

$$\boxed{n\, L_n^{\alpha}(x) = (x+1-2n)\, L_{n-1}^{\alpha}(x) + (1-n)\, L_{n-2}^{\alpha}(x)}$$

ECUACION DIFERENCIAL. FUNCION PESO. INTERVALO DE ORTOGONALIDAD.

$$x\, D^2 y + (1-x)\, Dy + 2ny = 0$$

$$r(x) = \frac{1}{x}\, e^{\int\left(\frac{1}{x}-1\right)dx} = \frac{x\, e^{-x}}{x} = e^{-x}$$

$$p(x) = x\, e^{-x} \qquad \begin{cases} p(a) = 0 \Rightarrow p(0) = 0 \\ p(\infty) = 0 \Rightarrow p(\infty) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\left\{L_n^{\alpha}(x)\right\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n!}\, e^{x}\, D^n(x^n e^{-x})\right\}}$$

El sistema es ortogonal en el intervalo $(0,\infty)$ respecto a la funcuion peso.

$$\boxed{r(x) = e^{-x}}$$

ORTONORMALIZACION DE LOS POLINOMIOS.

$$\|L_{n-1}^{\alpha}(x)\|^2 = \|L_{n-2}^{\alpha}\|^2$$

$$\|L_n^{\alpha}(x)\|^2 = 1$$

POLINOMIOS FUNCIONALES ORTOGONALES.

Vamos a hacer una generalización de la teoria de polinomios ortogonales, por la de las ecuaciones diferenciales que satisfacen.

En principio comenzabamos por estudiar las autofunciones correspondi-dientes a un operador de segundo orden en donde el operador L lo identificamos con el operador D.

En definitiva estudiamos las autofunciones correspondientes a un operador :

$$P_2(D) = a_0(x) \otimes D^2 + a_1(x) \otimes D + a_2(x) \otimes I.$$

Vamos a generalizar este resultado, proponiendo como operador L un factor de orden uno y base dos.

$$P_2(a(x) \otimes D - b(x)) = a_0(x) \otimes ((a(x) \otimes D - b(x)) \times (a(x) \otimes D - b(x)) + a_1(x) \otimes (a(x) \otimes D - b(x)) + a_2(x) \otimes I$$

Vamos a tomar los factores elementales en la forma Aleph; es decir.

p $a(x) = \frac{1}{F(x)}$ $B(x) = \frac{\varphi(x)}{f(x)}$, con lo cual quedaria.

$$P_2 \frac{D-\varphi(x)}{f(x)} = a_0(x) \otimes \left(\frac{D-\varphi(x)}{f(x)}\right) x \left(\frac{D-\varphi(x)}{f(x)}\right) + a_1(x) x \left|\frac{D-\varphi(x)}{f(x)}\right| + a_2(x) \otimes I$$

Anotando este factor lineal de primer orden y de base 2 por :

$$a\left[f(x), \varphi(x)\right] = \frac{D-\varphi(x)}{f(x)} = a$$

$$\boxed{P_2(a) = a_0(x) \otimes a^2 + a_1(x) \otimes a\, a_2(x) \otimes I}$$

Busquemos las autofunciones correspondientes a este operador :

$$P_2(a)y = a_0(x)\ x\ a^2 y + a_1(x)\ x\ ay + a_2(x)\ x\ y = \lambda\ y(x)$$

Llevemos la ecuación a la forma de Sturm-Liouville generalizada.

Multiplicamos la ecuación por un factor r(x)

$$\frac{a_0(x) x r(x)}{p(x)}\ x\ a^2 y + a_1(x) x r(x)\ xay + \frac{a_2(x)\ x\ r(x)\ y}{q(x)} = \lambda\ r(x)\ y(x)$$

Queremos expresar la ecuación en la forma :

$$a\left[p(x)\ ay\right] + q(x)y = \lambda\ r(x)y(x)$$

Si tenemos en cuenta que :

$$a\ (u.v) = u\, a\ v + \frac{DU}{f}.\ v$$

Desarrollando obtendriamos :

$$p(x)\ a^2 y + \frac{Dp(x)}{f(x)}\ a\ y + q(x)\ y = \lambda\ r(x)\ y(x)$$

$$\frac{Dp(x)}{f(x)} = a_1(x)\ x\ r(x) = \frac{D\, a_0(x).r(x) + a_0(x)\ Dr(x)}{f(x)}$$

$$\frac{Dr(x)}{r(x)} + \frac{Da_0(x)}{a_0(x)} = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\ .\ f(x)$$

$$p(x) = r(x).a_0(x) = e^{\int \frac{a_1(x_0)}{a_0(x_0)} f(x_0)\, dx_0}$$

$$\boxed{r(x) = \frac{1}{a_0(x)}\ e^{\int \frac{a_1(x_0)}{a_0(x_0)} f(x_0)\, dx_0}}$$

Propuesta la ecuación en la forma generalizada de Sturm-Liouville nos proponemos estudiar las propiedades correspondientes a dos autofunciones.

$$a\left[p(x)\ a\ y_1(x)\right] + q(x)\ y_1(x) = \lambda_1\ r(x)\ y_1(x)$$

$$a\left[p(x)\ ay_2(x)\right] + q(x)\ y\ (x) = \lambda_2 r(x)\ y_2(x)$$

Multiplicando la primera por $y_2(x)$ la 2ª por $y_1(x)$ y restando quedaria :

$$y_2 a\left(p(x)\ ay_1(x)\right) - y_1 a\left(p(x)\ ay_2(x)\right) = (\lambda_1 - \lambda_2) r(x) y_1(x)\ y_2(x)$$

Multipliquemos los dos miembros por $e^{-\Phi(x)}$ siendo $\Phi(x) = \int \phi(x)\,dx$

$$e^{-\Phi} y_2(x) a\left(p(x).ay_1(x)\right) - e^{-\Phi} y_1(x) a(p(x) a y_2(x)) = (\lambda_1 - \lambda_2) r(x) e^{-\Phi} y_1(x) y_2(x)$$

aplicando a los dos miembros $a^{-1}$

Sabiendo que $a^{-1}g(x) = \int_{t_0}^{x} e^{\Phi(x)-\Phi(u)}\ f(u) g(u)\,du$

$$\int_{t_0}^{t_1} e^{\Phi(t_1)-\Phi(u)}\ f(u)\ y_2(u)\ e^{-\Phi(u)} a(p(u)\ a\ y_1(u)\ du -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} e^{\Phi(t_1)-\Phi(u)} f(u) y_1(u) e^{-\Phi(u)} a(p(u) a y_2(u))du = (\lambda_1 - \lambda_2)\int_{t_0}^{t_1} e^{\Phi(t_1)-\Phi(u)}\ f(u) e^{-\Phi(u)} r(u) y_1(u)\ y_2(u) du$$

$$\int_{t_0}^{t_1} e^{-\Phi(u)} f(u) e^{-\phi(u)} y_2(u) a(p(u) a y_1(u) du - \int_{t_0}^{t_1} e^{-\phi(u)}\ f(u) e^{-\phi(u)} y_1(u) a(p(u) a y_2(u))du =$$

$$= (\lambda_1 - \lambda_2) \int_{t_0}^{t_1} f(u)\ r(u)\ e^{-\phi(u)} y_1(u).\ e^{-\phi(u)} y_2(u)\ du$$

$$\left[e^{-\phi(u)} p(u) \begin{vmatrix} y_2(u) & y_1(u) \\ ay_2(u) & ay_1(u) \end{vmatrix}\right]_{t_0}^{t_1} = (\lambda_1 - \lambda_2)\int_{t_0}^{t_1} f(u) r(u) e^{-\phi(u)} y_1(u) e^{-\phi(u)} y_2(u)\ du$$

Si hacemos que $\begin{matrix} p(t_1) = 0 \\ p(t_0) = 0 \end{matrix}$ las funciones $e^{-\phi(u)} y_1(u)$, $e^{-\phi(u)} y_2(u)$ serian ortogonales en el intervalo $(t_0, t_1)$ respecto de la función peso $f(u)\ r(u)$

GENERALIZACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES CLÁSICAS:

Ecuación de Jacobi generalizada. $F(x) = \int f(x)\,dx$

$$(1-F(x)^2)a^2 y - (\alpha - \beta + (\alpha + \beta + 2)F(x))\ ay + n(n + \alpha + \beta + 1)\ y = 0$$

Ecuación de Gegenbauer generalizada

$$(1-F(x)^2)a^2 y - 2(\alpha+1)\ F(x)\ ay + n(n+2\alpha+1)\ y = 0$$

Ecuación generalizada de Legendre.

$$(1-F(x)^2)a^2 y - 2F(x) ay + n(n+1)\ y = 0$$

Ecuación de Tschebycheo generalizada.

$$(1-F(x)^2)a^2 y - F(x)\ ay + n^2 y = 0$$

Ecuación de Hermite generalizada.

$a^2 y - 2\,F(x)\,ay + 2n\,y = 0$

Ecuación de Laguerre generalizada.

$F(x)\,a^2 y + (1-F(x))\,ay + ny = 0$

Todas las ecuaciones diferenciales admiten como solución un polinomio funcional en potencias de F(x) de grado u, multiplicada por una función $e^{\phi(x)}$.

PROPIEDADES DE LOS POLINOMIOS FUNCIONALES.

Propiedad 1.

Los polinimios funcionales satisfacen una relación de recurrencia.

$$H_n(F(x)) = (A_n + B_n F(x))H_{n-1}(F(x)) + C_u\, H_{u-2}(F(x))$$

Propiedad 2. Formula de Rodriguez generalizada.

Tomemos como ejemplo los polinomios de Jacobi.

Sea la ecuación diferencial generalizada de Jacobi.

$$(1-F^2(x))a^2 y - (\alpha-\beta+(\alpha+\beta+2)F(x))ay + n(n+\alpha+\beta+1)\,y = 0$$

Aplicando a $(1-F^2(x))a^3 y - (\alpha-\beta+(\alpha+1+\beta+1+2)F(x))a^2 y + (u-1)(u+\alpha+1+\beta+1)ay = 0$

aplicando $a^2$ $(1-F^2(x))a^4 y - (\alpha-\beta+(\alpha+2+\beta+2+2)F(x))a^3 y + (u-2)(u-1+\alpha+2+\beta+2)a^2 y = 0$

$\vdots$

Aplicando $a^{u-1}$ $(1-F^2(x))a^{n+1} y - (\alpha-\beta+(\alpha+u+\beta+n)F(x))a^n y + (\alpha+n+\beta+n)a^{n-1} y = 0$

Haciendo el cambio de función : $a^{n-1} y(x) = \mu$

$$(1-F^2(x))a^2 \mu - (\alpha-\beta+(\alpha+n+\beta+n)F(x))a\mu + (\alpha+n+\beta+n)\,\mu = 0$$

Busquemos el factor r(x).

$$r(x) = \frac{1}{1-F(x)^2}\, e^{\int \frac{\beta-\alpha}{1-F^2(x)} F'(x)\,dx - \int \frac{(\alpha+n+\beta+n)F(x)F'(x)}{1-F^2(x)}\,dx} = [1-F(x)]^{\alpha+n-1}[1+F(x)]^{\beta+n-1}$$

Multiplicando por este factor la ecuación puede escribirse.

$$a\left[(1-F(x))^{\alpha+n}(1+F(x))^{\beta+n} a\mu\right] = -(\alpha+n+\beta+n)(1-F(x))^{\alpha+n-1}(1+F(x))^{\beta+n-1}\mu$$

Deshaciendo el cambio de función.

$$a\left[(1-F(x))^{\alpha+u}(1+F(x))^{\beta+u} a^n y\right] = -(\alpha+n+\beta+n)(1-F(x))^{\alpha+u-1}(1+F(x))^{\beta+u-1} a^{n-1} y$$

Aplicando a los miembros $a^{n-1}$

$$\boxed{a^n\left[(1-F(x))^{\alpha+u}(1+F(x))^{\beta+u} a^n y\right] = -(\alpha+n+\beta+n)\,a^{n-1}\left[(1-F(x))^{\alpha+u-1}(1+F(x))^{\beta+u-1} a^{n-1} y\right]}$$

Resulta que $A^n y = K'_n \cdot e^{\Phi(x)}$

Reiterando el procedimiento llegariamos.

$$A^n\left[(1-F(x))^{\alpha+n}(1+F(x))^{\beta+n} a y\right] = (-1)^n(\alpha+n+\beta+n)\dots(\alpha+\beta)(1+F(x))^{\alpha}(1+F(x))^{\beta}y(x) =$$
$$= K_n\,(1-F(x))^{\alpha}(1+F(x))^{\beta}y(x)$$

$$y(x) = \frac{K'_n}{K_n}(1-F(x))^{-\alpha}(i+F(x))^{-\beta}a^n\left[e^{\Phi(x)}(1-F(x))^{\alpha+n}(1+F(x))^{\beta+n}\right]$$

Si tomamos en particular $\frac{K'_u}{K_u} = \frac{(-1)^u}{2^n n!}$, obtendriamos la formula generalizada de Rodriguez para los polinomios de Jacobi.

$$\boxed{y(x) = \frac{(-1)^u}{2^n n!}(1-F(x))^{-\alpha}(1+F(x))^{-\beta}a^u\left[e^{\Phi(x)}(1-F(x))^{\alpha+u}(1+F(x))^{\beta+n}\right]}$$

Propiedad 3. Función generatriz generalizada.

Las soluciones que resultan de las ecuaciones diferenciales, son polinomios funcionales multiplicados por $e^{\Phi(x)}$

Si las soluciones las multiplicamos por $e^{-\Phi(x)}$, obtenemos unos polinomios funcionales, que resultan ser los coeficientes en el desarrollo en potencias subordinado por el operador $a$.

$$G(F(x),F(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\Phi(x)} H_n(F(x))\,F(t)^n$$

Para determinar la función generatriz hacemos uso de la relación de recurrencia.

ESTUDIO PARTICULAR DE LOS POLINOMIOS FUNCIONALES.

Estudiaremos las propiedades de los polinomios funcionales de Jacobi, los de Legenlaner, Legendre y Tschebycheo se obtienen como un caso particular de ellos.

FUNCION GENERATRIZ Y RELACION DE RECURRENCIA.

$$2n(u+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)I_n(F(x)) =$$
$$= (2n+\alpha+\beta-1)\left[(2u+\alpha+\beta)(2u+\alpha+\beta-2)F(x)+\alpha^2-\beta^2\right]I_{n-1}(F(x)) - 2(u+\alpha-1)(u+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)I_{n-2}(F(x))$$

Función generatriz.

$$G(F(x),F(t)) = \sum_{0}^{\infty} e^{-\Phi(x)} I_n(x)F(x))F(t)^n = \frac{2^{\alpha+\beta}}{(1-2F(x)F(t)+F(t)^2)^{\frac{1}{2}}\left(1-F(t)+(1-2F(t)F(x)+F(t)^2)^{\frac{1}{2}}\right)^{\alpha}(1+F(t)+(1-2F(x)F(t)\dots}$$

FUNCION PESO. INTERVALO DE ORTOGONALIDAD. ECUACION DIFERENCIAL.

$$(1-F(x)^2)a^2y-(\alpha-\beta+(\alpha+\beta+2)F(x))ay+n(u+\alpha+\beta+1)y = 0$$

$$r(x)=\frac{1}{1-F(x)^2}\, e^{-\int \frac{\alpha-\beta}{1-F(x)^2}f(x)dx-\int\frac{(\alpha+\beta+2)F(x)f(x)}{1-F(x)^2}dx}=(1-F(x))^{\alpha}(1+F(x))^{\beta}$$

$$p(x)=(1-F(x)^2)r(x)=(1-F(x))^{\alpha+1}(1+F(x))^{\beta+1}\begin{cases}p(x_0)=0\Rightarrow F(x_0)=1\\ p(x_1)=0\Rightarrow F(x_1)=-1\end{cases}$$

El sistema de funciones.

$$\boxed{\left\{e^{-\varphi(x)}J_n(F(x))\right\}=\frac{(-1)^u}{2^n n!}e^{-\varphi(x)}(1-F(x))^{-\alpha}(1+F(x))^{\beta}\partial^n\left[(1-F(x))^{\alpha+u}(1+F(x))^{\beta+u}e^{\varphi(x)}\right]}$$

Son ortogonales en el intervalo $(x_0,x_1)$ respecto a la función peso

$$\boxed{r(x).f(x)=f(x)(1-F(x))^{\alpha}(1+F(x))^{\beta}}$$

Los polinomios funcionales de Hermite.

Formula de Rodriguez para los polinomios de Hermite.

$$\boxed{H_n(F(x))=\frac{(-1)^n}{n!}e^{F(x)^2}\partial^n\left(e^{\varphi(x)}e^{-F(x)^2}\right)}$$

RELACION DE RECURRENCIA Y FUNCION GENERATRIZ.

$$\boxed{n\,H_n(F(x))=2F(x)\,H_{n-1}(F(x))-2H_{n-2}(F(x))}$$

Función generatriz.

$$\boxed{G(F(x),F(t))=\sum_0^{\infty}H_n(F(x))e^{-\varphi(x)}F(t)^n=e^{2F(x)F(t)-F(t)^2}}$$

ECUACION DIFERENCIAL. FUNCION PESO. INTERVALO DE ORTOGONALIDAD.

$$\partial^2 y-2F(x)\partial y+2uy=0$$

$$r(x)=e^{\int -2F(x)f(x)\,dx}=e^{-F(x)^2}$$

$$p(x)=r(x)=e^{-F(x)^2}\begin{matrix}p(x_0)=0\Rightarrow F(x_0)=\infty\\ p(x_1)=0\Rightarrow F(x_1)=\infty\end{matrix}$$

El sistema de funciones.

$$\boxed{\left\{e^{-\varphi(x)}H_n(F(x))\right\}=\frac{(-1)^u}{n!}e^{-\varphi(x)+F(x)^2}\partial^u\left[e^{\varphi(x)-F(x)^2}\right]}$$

Constituye un sistema ortogonal en el intervalo $[x_0,x_1)$, respecto de la función peso.

$$\boxed{r(x).f(x)=f(x).e^{-F(x)^2}}$$

LOS POLINOMIOS FUNCIONALES DE LAGUERRE/

Formula de Rodriguez para los polinomios funcionales de Laguerre.

$$\boxed{L_n(F(x))=\frac{(-1)^u}{n!}e^{F(x)}\partial^u\left(F(x)^u e^{-F(x)+\varphi(x)}\right)}$$

Relación de recurrencia y función generatriz.

$$G(F(x), F(t)) = \sum_{0}^{\infty} e^{-f(x)} Ln(F(x))F(t)^{u} = \frac{1}{1+F(t)} \; e^{\frac{F(t)F(x)}{1+F(t)}}$$

RELACION DE RECURRENCIA.

$$n\,L\,(F(x)) = (F(x)+1-2u)L_{n-1}(F(x)) + (1-u)L_{n-2}(F(x))$$

Ecuación diferencial. Función peso. Intervalo de ortogonalidad.

$$F(x)a^2 y + (1-F(x))ay + 2u\,y = 0$$

$$r(x) = \frac{1}{F(x)} e^{\int \left(\frac{1}{F(x)}-1\right) f(x)dx} = e^{-F(x)}$$

$$p(x) = F(x)\,e^{-F(x)} \quad \begin{cases} p(x_0) = 0 \Rightarrow F(x_0) = 0 \\ p(x_1) = 0 \Rightarrow F(x_1) = \infty \end{cases}$$

El sistema :

$$\left\{ e^{-\phi(x)} Lu(F(x)) \right\} = \left\{ \frac{(-1)^n}{n!} e^{-\phi(x)+F(x)} a^u\left(F(x) \; e^{\phi(x)-F(x)}\right) \right\}$$

Es ortogonal en el intervalo $(x_0, x_1)$ respecto a la función peso

$$r(x) = e^{-F(x)}$$

GENERALIZACION DELA LAPLACIANA PARA FUNCIONES DE DOS VARIABLES MEDIANTE LA TEORIA DE OPERADORES.

Mediante el concepto de drivada parcial, vamos a introducir el concepto de operador basico elemental engendrado por los operadores elementales Dx y Dy.

$$\delta_1 z(x,y) = \frac{Dx - \varphi_1(x,y)}{f_1(x,y)} z \qquad \delta_1 = \frac{Dx - \varphi_1(x,y)}{f_1(x,y)}$$

$$\delta_2 z(x,y) = \frac{Dy - \varphi_2(x,y)}{f_2(x,y)} z \qquad \delta_2 = \frac{Dy - \varphi_2(x,y)}{f_2(x,y)}$$

Busquemos las condiciones de permutabilidad de los operadores.

$$\delta_1(\delta_2 z) = \frac{1}{f_1 f_2}\left[ Dxy\,z - \left(\varphi_2 + \frac{Dy f_1}{f_1}\right)(Dx z - \varphi_1 Dy z + \left(\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1 \frac{Dx f_1}{f_1} - Dy\,\varphi_2\right) z \right]$$

$$\delta_2(\delta_1 z) = \frac{1}{f_2 f_1}\left[ Dyx\,Z - \left(\varphi_1 + \frac{Dxf2}{f2}\right) Dy z - \varphi_2 Dx z + \left(\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2 \frac{Dx f_2}{f_2} - Dx\,\varphi_1\right) z \right]$$

Para que $\delta_1\delta_2 = \delta_2\delta_1$ se dberá de verificar :

a) $Dxy\,z = Dyx z$

b) $\varphi_1 + \frac{Dxf2}{f2} = \varphi_1 \quad \varphi_2 + \frac{Dyf_1}{f_1} = \varphi_2$

c) $Dy\,\varphi_2 = Dx\,\varphi_1$

Resulta por consiguiente
$$f_1(x,y) = f_1(x)$$
$$f_2(x,y) = f_2(y)$$
$$\nabla \Phi(x,y) = (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y))$$

Siendo $z \in$ a las funciones continuas que cumple la igualdad de Schwarz.

Consideramos entonces los operadores permutables.

$$\delta_1 z = \frac{Dx - Dx\,\Phi}{f_1(x)}\,z \qquad \delta_2\, z = \frac{Dy - Dy\,\Phi}{f_2(y)}$$

A Partir de estos operadores podemos definir los:

$$\delta_1\delta_1 = \delta_{11} \qquad \delta_1\delta_2 = \delta_2\delta_1 = \delta_{12} \qquad \delta_2\delta_2 = \delta_{22}$$

Si planteamos buscas las funciones que satisfacen a la ecuación $(\delta_{11} + \delta_{22})z = 0$ , Habremos obtenido una generalización de la laplaciana basada en la de los operadores.

A las funciones que aparezcan solución de esta ecuación las llamaremos funciones armónicas generalizadas, y su definición estará ligada a que la laplaciana generalizada las transforme en cero.

El concepto pues de la placiana generalizada queda establecido:

$$\Delta_a = \delta_{11} + \delta_{22}$$

Si hubiesemos tratado de hacerlo para $n$- variables:

$$\delta_1 = \frac{D_1 - D_1\Phi}{f_1(x_1)} \qquad \delta_2 = \frac{D_2 - D_2\Phi}{f_2(x_2)} \quad \cdots \quad \delta_n = \frac{D_n - D_n\Phi}{f_n(x_n)}$$

$$\Delta_a = \delta_{11} + \delta_{22} + \cdots + \delta_{nn}$$

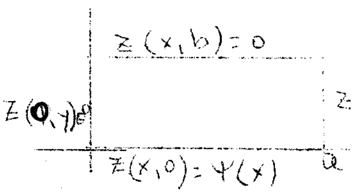
La condición para que una función de $n$, variables sea armónica generalizada es que:

$$\Delta_a\, z(x_1, \ldots x_n) = (\delta_{11} + \cdots + \delta_{nn})\, z(x_1, \ldots x_n) = 0$$

Propongamos determinar una base de funciones para cuando las condiciones del problema vienen expresadas mediante un contorno rectangular.

El problema queda planteado asi.

Encontrar una función $z(x,y)$ tal que $\Delta_a z = 0$ para todo punto interior al rectangulo de la figura y que sobre el contorno tome los valores.




$$Z(x,y)\ \begin{cases}(\delta_{11}+\delta_{22})Z=0 \\ Z(x,y)=\begin{cases}Z(x,0)=\Psi(x)\\ Z(0,y)=0\\ Z(x,b)=0\\ Z(a,y)=0\end{cases}\end{cases}$$

BBusquemos soluciones de la ecuación en la forma de Barmilli generalizada.

$$Z_K(x,y)=e^{\varphi(x,y)}X_K(F_1(x))\,Y_K(F(y))$$
$$\delta_1 Z_K(x,y)=e^{\varphi(x,y)}D_x X_K(F_1(x))\,Y_K(F_2(y))$$
$$\delta_{11} Z_K(x,y)=e^{\varphi(x,y)}D_{xx} X_K(F_1(x))\,Y_K(F_2(y))$$
$$\delta_2 Z_K(x,y)=e^{\varphi(x,y)}X_K(F_1(x))\,D_y Y_K(F_2(y))$$
$$\delta_{22} Z_K(x,y)=e^{\varphi(x,y)}X_K(F_1(x))\,D_{yy} Y_K(F_2(y))$$

Sustituyendo en $\underset{\alpha}{\Delta}$ z=0 queda.

$$e^{\varphi(x,y)}\left[D_{xx}X_K(F_1(x))\,Y_K(F_2(y))+X_K(F(x))\,D_{yy}(F_2(y))\right]=0$$

lo que implica:

$$D_{xx}X_K(F_1(x))\,Y_K(F_2(y))+D_{yy}Y_K(F_2(y))\cdot X_K(F_1(x))=0$$

Dividiendo por $X_K(F_1(x))\,Y_K(F_2(y))$ los dos miembros resulta.

$$\underbrace{\frac{D_{xx}X_K(F_1(x))}{X_K(F_1(x))}}_{-K^2}+\underbrace{\frac{D_{yy}Y_K(F_2(y))}{Y_K(F_2(y))}}_{K^2}=0$$

$$D_{xx}X_K(F_1(x))+K^2X_K(F_1(x))=0\Rightarrow X_K(F_1(x))=A_K\operatorname{sen}(KF_1(x)+\alpha_K)$$
$$D_{yy}Y_K(F_2(x))-K^2Y_K(F_2(x))=0\Rightarrow Y_K(F_2(y))=B_K\,SH(KF_2(y)+\beta_K)$$

Por consiguiente una solución de la ecuación seria:

$$Z_K(x,y)=C_K\,e^{\varphi(x,y)}\operatorname{sen}(KF_1(x)+\alpha_K)\,SH(KF_2(y)+\beta_K)$$

Obliguemos a que la sulución satisfaga las condiciones de contorno

$$\mu(0,y)=0\Rightarrow\operatorname{sen}(KF_1(0)+\alpha_K)=0\Rightarrow\alpha_K=-KF_1(0)$$
$$Z[a,y]=0\Rightarrow\operatorname{sen}(K(F_1(a)-F_1(0)))=0\Rightarrow K=\frac{n\pi}{F_1(a)-F_1(0)}$$
$$Z[x,b]=0\Rightarrow SH(KF_2(b)+\beta_K)=0\Rightarrow\beta_K-KF_2(b)$$
$$Z_n(x,y)=C_n e^{\varphi(x,y)}\operatorname{sen} n\pi\frac{F_1(x)-F_1(0)}{F_1(a)-F_1(0)}\,SH\,n\pi\frac{F_2(y)-F_2(b)}{F_1(a)-F_1(0)}$$

Con lo cual hemos obtenido una base de funciones armónicas para el rectangulo $\{Z_n(x,y)\}$

Una suma infinita convergente de funciones $z_n(x,y)$ tambien es solución de la ecuación. Por consiguiente.

$$Z=\sum_0^{\infty}Z_n(x,y)=\sum_0^{\infty}C_n e^{\varphi(x,y)}\operatorname{sen} n\pi\frac{F_1(x)-F_1(0)}{F_1(a)-F_1(0)}\,SH\,n\pi\frac{F_2(y)-F_2(b)}{F_1(a)-F_1(0)}$$

es la solución general que cumple con tres condiciones propuestas.

$$Z[x,0]=\sum_0^{\infty}C_n e^{\varphi(x,0)}SH\,n\pi\frac{F_2(0)-F_2(b)}{F_1(a)-F_1(0)}\operatorname{sen} n\pi\frac{F_1(x)-F_1(0)}{F_1(a)-F_1(0)}=\Psi(x)$$

$$=\sum_0^{\infty}M_n e^{+\varphi(x,0)}\operatorname{sen} n\pi\frac{F_1(x)-F_1(0)}{F_1(a)-F_1(0)}=\Psi(x)$$

$$M_4 = \frac{8\ 2}{F_1(a)-F_1(0)} \int_0^a e^{-\varphi(x,0)} f_1(x)\,\psi(x)\ \mathrm{seu}\ n\pi\,\frac{F_1(x)-F_1(0)}{F_1(a)-F_1(0)}\,dx$$

$$\boxed{C = \frac{2}{(F_1(a)-F_1(0))\left[\mathrm{SHu}\,n\,\frac{F_2(0)-F_2(b)}{F_1(a)-F_1(0)}\right]} \int_0^a e^{-\varphi(x,0)} F_1(x)\,\psi(x)\,\mathrm{seu}\ n\pi\,\frac{F_1(x)-F_1(0)}{F_1(a)-F_1(0)}\,dx}$$

SERIES DE FOURIER GENERALIZADAS.

Propongamos determinar las autofunciones correspondientes al operador

$$\boxed{a^2 y = \frac{-4\pi^2 n^2}{(F(b)-F(a))^2}\,y}$$

Nos resulta como sistema de autofunciones:

$$\boxed{\left\{ e^{\varphi(x)},\ e^{\varphi(x)}\,\mathrm{seu}\ 2n\pi\,\frac{F(x)-F(a)}{F(b)-F(a)},\ e^{\varphi(x)}\cos 2n\pi\,\frac{F(x)-F(a)}{F(b)-F(a)} \right\}}$$

Este sistema es ortogonal en el intervalo $(a,b)$, respecto a la función peso. $\boxed{r(x) = e^{-2\varphi(x)} f(x)}$

Dada una función $\psi(x)$.

$$\psi(x) = a_0 e^{\varphi(x)} + e^{\varphi(x)} \sum a_n\ \mathrm{seu}\ 2n\pi\,\frac{F(x)-F(a)}{F(b)-F(a)} + b_n \cos 2n\pi\,\frac{F(x)-F(a)}{F(b)-F(a)}$$

$$a_n = \frac{2}{F(b)-F(a)} \int_a^b e^{-\varphi(x)} f(x)\,\psi(x)\ \mathrm{seu}\ 2n\pi\,\frac{F(x)-F(a)}{F(b)-F(a)}\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{F(b)-F(a)} \int_a^b e^{-\varphi(x)} f(x)\,\psi(x)\ \cos 2n\pi\,\frac{F(x)-F(a)}{F(b)-F(a)}\,dx$$

$$a_0 = \frac{1}{F(b)-F(a)} \int_a^b e^{-\varphi(x)} f(x)\,\psi(x)\,dx$$

Con lo cual habriamos obtenido una generalización correspondiente a las series de Fourier.

## BIBLIOGRAFIA.


John Todd: Introduction to the constructive the ony of funtions California 1963.

Louis Brand: Differential and difference equations. Houston 1966.

Vamle y Trauter: Differential equations Shnwenham 1964.

F. G. Tricomi: Vorle sungen über orthogonal reiheu. Turin 1955

G. Doestch: Handrich der laplace transformation Freilurg 1950.

Farrel and Ross: Solved Problems Gamma and Beta Funtions. Neu York. 1963.

Jan Mikusihski: Operational Caleulus.Varsovia 1959.

Keuneth S. Miller: The calculus of finite differences and difference equations.Columbia 1960.

S. Goldberg: Difference equations Dberlin College New York 1961.

G. H. Hardy: Dorichlet sseues Cambridge 1964.

M. Riesz: Estocolmo.

Nör Lund: Differenzeu rechnung/ Copenague 1954

Jordan: Calculus of finite difference Budapest 1939.

R. Campbell: Les integrales eulériciones y leurs applicatíons Caen 1966.

BelaSz. Nagy Introduction to Real Functions and Orthogonal Expansions Szeged 1965.

Szegö:Orthogonal Polynomiale Stanford 1959.

I. Aldanondo: Metodos de solución de ecuaciones y sistemas diferenciales lineales en aleph (Granada,1968)

A. de Castro: Complementos de Matematicas. Madrid 1963.

Tesis 88

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE CIENCIAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. Jose Juan Rodriguez Cano titulada "Resolución de ecuaciones funcionales planteadas mediante operadores lineales" acordó otorgarle la calificación de Sobresaliente cum Laude

Sevilla, 9 de Noviembre 1.970

El Vocal, | El Vocal, | El Vocal,

El Presidente, | El Secretario, | El Doctorado