

## CONTROL PREDICTIVO-ITERATIVO BASADO EN MODELO Y APLICADO A PROCESOS POR LOTES

J. R. Cueli y C. Bordons

*Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla.  
Camino de los Descubrimientos, s/n. 41092  
Sevilla, España  
cueli@cartuja.us.es, bordons@esi.us.es*

Resumen: Este artículo presenta una solución al control de procesos por lotes basado en un esquema predictivo no lineal. El controlador propuesto incluye características propias de control iterativo, como es la capacidad de cancelar las perturbaciones que se repiten. El controlador se basa en un modelo del proceso, y es capaz de aprender de un lote al siguiente. Se demuestra que el controlador propuesto es capaz de estabilizar sistemas lineales, y también cualquier planta no lineal y afín en el control con función de salida lineal. Una aplicación experimental sobre una planta real de laboratorio corrobora los resultados teóricos esperados.  
*Copyright ©2006 CEA-IFAC*

Palabras clave: Control de procesos por lotes, control óptimo, control predictivo, algoritmos de aprendizaje.

### 1. INTRODUCCIÓN

Este artículo trata sobre el control de procesos de duración limitada, cuya característica principal es la periodicidad, bien de las trayectorias de referencia o bien de las perturbaciones a las que se ven sometidos. Como tales, el control de este tipo de procesos presenta dificultades inherentes, entre las cuales cabe nombrar la ausencia de un punto de operación determinado, la fuerte no linealidad propia de los mismos, o la falta de sensores en tiempo real para medir algunas de las variables decisivas para determinar la calidad del producto fabricado.

La finalidad de este trabajo es presentar también ciertos artificios que permiten un mejor control de estos procesos, para así solventar las dificultades encontradas. En efecto, se pueden formular controladores específicos, lineales o no lineales, que consiguen un seguimiento óptimo de las trayec-

torias de referencia, para los cuales se pueden encontrar pruebas de estabilidad y convergencia.

Gran número de procesos industriales poseen naturaleza discontinua, y, entre ellos, son muchos los que se caracterizan por la similitud de las trayectorias entre diferentes lotes del proceso. En concreto, cualquier cadena de fabricación genera a gran escala productos que deben cumplir ciertas especificaciones de calidad, lo cual implica que se pueden usar en los mismos controladores iterativos o de aprendizaje. Se pueden encontrar ejemplos en robótica, pero también en control de procesos químicos o bioquímicos, como pueden ser la industria farmacéutica, alimentaria, de fabricación de polímeros, semiconductores, etc.

El aumento de capacidad de cálculo en los equipos de control, y la mayor disponibilidad de tiempo que existe en los procesos químicos (que típicamente se caracterizan por tener una dinámica más lenta que los sistemas mecánicos o eléctricos) y la necesidad de una mejora en la eficiencia de los

procesos y la competitividad de los productos fabricados en los mismos conllevan a concentrar esfuerzos en el ámbito de algoritmos de optimización no lineales que sean capaces de realizar mejoras en los sistemas de producción.

En este punto, los procesos por lotes o tipo *batch* (Bonvin 1998) ofrecen posibilidades importantes en cuanto a la flexibilidad de los productos fabricados. Los procesos por lotes son aquellos procesos industriales de duración limitada y posiblemente, aunque no siempre, constante, en los cuales el material se incorpora al proceso completamente en una fase inicial, se procesa, y finalmente se obtiene un lote (que es cierta cantidad determinada) del producto preparado.

Comúnmente, si el producto fabricado no cambia durante un intervalo de tiempo prolongado, y además se produce en cantidades importantes, se opta por procesos de fabricación continuos, que, en oposición a los procesos por lotes, generan un flujo constante de producto a la salida. La razón de este uso de procesos continuos es una mejora del rendimiento industrial de los mismos. Pero este hecho sólo se traduce en beneficios económicos para producciones elevadas. Los procesos por lotes son más ventajosos en entornos muy flexibles y competitivos, en los cuales se debe reutilizar en poco tiempo la maquinaria existente para fabricar productos novedosos.

Existe otra clase intermedia entre procesos por lotes y continuos, cuya traducción literal sería semilote (*semibatch*) y que posee características intermedias entre ambos. En éstos, se permite la entrada de materia prima una vez comenzado el proceso, la cual se puede emplear como una variable adicional de control. El resultado obtenido es que se mantiene la flexibilidad de los procesos por lotes, mientras que se mejora en cierta medida el rendimiento industrial.

En la elección del tipo de controlador es importante conocer las condiciones iniciales del proceso. Si éstas se mantienen constantes para todo lote, y además la duración del proceso está fijada, es preferible usar controladores iterativos a controladores no lineales diseñados para seguimiento de consignas. El incorporar información de lotes anteriores del proceso posibilita la obtención de controladores con mejores prestaciones que los que no tienen en cuenta este hecho.

En el caso de que las condiciones iniciales sólo se impongan en el primer lote de todos, cabe hablar de controladores repetitivos. En algunos casos, las leyes de control de control repetitivo e iterativo son muy parecidas e incluso coinciden, pero en la realidad el hecho de mantener las condiciones iniciales hace que las propiedades de los mismos sean muy diferentes. En concreto, las demostraciones de estabilidad y las propiedades de los sistemas controlados son muy diferentes entre sí. El con-

trol repetitivo tiene más que ver con seguir una trayectoria periódica que con procesos con lotes reales.

El artículo se organiza de la siguiente forma. La sección 2 muestra el estado del arte de controladores iterativos. En sección 3 se presenta una solución de naturaleza combinada predictiva-iterativa para el control óptimo de plantas no lineales por lotes. En la sección 4 se muestra una aplicación, que permite comprobar el funcionamiento del controlador descrito en la sección 3 en una planta piloto de laboratorio. Finalmente se indican las conclusiones generales obtenidas.

En cuanto a la notación utilizada en este trabajo para procesos por lotes, se toma la convención siguiente. El subíndice se refiere al instante discreto de tiempo dentro del lote, mientras que el superíndice se emplea para denotar el número de lote ( $u_t^k$  es la señal de control aplicada en el tiempo  $t$  del lote  $k$ ). El índice de número de lote será omitido en caso de que éste corresponda con el lote en curso y no haya lugar a confusión. Si las variables están definidas en tiempo continuo, éste se denotará entre paréntesis:  $u(t)$ .

## 2. CONTROLADORES ITERATIVOS

Considérese una planta descrita mediante las ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} \dot{x}^k(t) = f(x^k(t)) + g(x^k(t)) u^k(t) \\ y^k(t) = h(x^k(t)) \end{cases} \quad (1)$$

con las condiciones iniciales

$$x(0) = x^k(0) = x_0 \quad (2)$$

y que se conocen las trayectorias para todos los lotes anteriores al actual

$$(u^i(t), x^i(t), y^i(t)) \quad i = 1 \dots (k-1)$$

Los controladores iterativos (Moore 1998) tratan principalmente de refinar la ley de control de cada lote. Para ello, calculan el control basándose en el aplicado durante el lote anterior, más un término de corrección que teóricamente debe proporcionar una mejora en el comportamiento del sistema en cada nuevo lote. Es decir, de forma bastante general, se puede decir que la ley de control iterativa está dada por

$$u^k(t) = u^{k-1}(t) + K(r(t), x^k(t), x^{k-1}(t) \dots) \quad (3)$$

Dependiendo de la elección del término de realimentación se tendrá un esquema de control iterativo u otro. Por ejemplo, si  $K$  sólo depende de  $x^{k-1}(t)$ , se obtiene un controlador que se puede decir que está en bucle abierto estrictamente hablando. La importancia de esto es que se permite así que la tarea de incluir un retardo en el sistema de control sea directa, pues la realimentación se lleva a cabo usando una variable

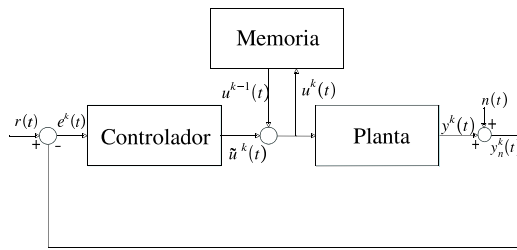


Figura 1. Esquema de un controlador iterativo

cuya evolución es ya conocida con antelación. Por supuesto, sigue existiendo realimentación en el sistema, pero esta información se pasa de un lote al siguiente (hay que esperar al final del lote para corregir los errores que se producen en el actual).

Así, hay muchas clases diferentes de controladores, que se diseñan con el mismo fin, que es conseguir el mejor ajuste a la trayectoria de referencia. Es importante que el controlador converja en pocas iteraciones, ya que el comportamiento transitorio puede influir en costos asociados al proceso. No obstante, en algunos procesos es posible realizar algunas iteraciones del proceso real para que el controlador obtenga la trayectoria óptima, pero sin usar la materia prima real, sino algún otro material de menor costo y similares características. También es posible el uso de herramientas de simulación para llegar a trayectorias iniciales admisibles. En este punto se puede decir que las técnicas iterativas se pueden emplear también para la obtención de trayectorias de referencia óptimas en bucle abierto y la inversión de la planta mediante aproximaciones sucesivas.

Para plantas continuas se pueden usar los siguientes algoritmos ILC (Iterative Learning Control), conocidos como *tipo-P* (proporcional)

$$u^{k+1}(t) = u^k(t) + Ke^k(t) \quad (4)$$

o *tipo-D* (derivativo)

$$u^{k+1}(t) = u^k(t) + Ke^k(t) \quad (5)$$

La condición suficiente que garantiza la estabilidad del sistema controlado mediante la ley de control (5) en un sistema lineal descrito por

$$\begin{cases} \dot{x}^k(t) = Ax^k(t) + Bu^k(t) \\ y^k(t) = Cx^k(t) \end{cases} \quad (6)$$

resulta ser, según (Arimoto y Naniwa 2000), la siguiente

$$\|I - CBK\|_i < 1 \quad (7)$$

para alguna norma matricial inducida. La norma inducida indica que al aplicar la transformación lineal dada por la matriz correspondiente a un conjunto determinado, éste se expande, como mucho, según un factor dado por el valor de esta norma inducida. Exactamente la misma condición se aplica a sistemas en tiempo discreto (Moore 1993). En cuanto a la estabilidad del ILC de tipo-P, debe consultarse (Kawamura *et al.* 1988).

En el caso de plantas discretas no lineales, existen controladores que mantienen una estructura lineal. Un ejemplo entresacado de entre el gran número existente se tiene en (Moore 2000), el cual se puede usar en plantas no lineales monovariadas, pero con función de salida lineal. Si la planta viene dada por

$$\begin{cases} x_{t+1}^k = f(x_t^k) + g(x_t^k)u_t^k \\ y_t^k = h(x_t^k) \end{cases} \quad (8)$$

donde  $h(x_t^k) = Cx_t^k$  el controlador en tiempo discreto está especificado por

$$u_t^{k+1} = u_t^k + Ke_{t+1}^k \quad (9)$$

Si la función de salida de la planta es lineal, la condición suficiente que debe cumplirse es la siguiente

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} |I - Cg(x)K| < 1 \quad (10)$$

También existen resultados de estabilidad para plantas no afines y no lineales controladas mediante leyes lineales. Tal como sucede en varias ocasiones en los procesos por lotes, los resultados son, cuando menos, sorprendentes, como se describe a continuación. En concreto (Xu y Y.Tan 2003) trabajan con sistemas continuos de la forma, totalmente general, siguiente

$$\begin{cases} \dot{x}^k(t) = f(x^k(t), u^k(t)) \\ y^k(t) = h(x^k(t), u^k(t)) \end{cases} \quad (11)$$

Si se cumple que la condición de que existen dos números positivos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  tales que

$$0 < \alpha_1 \leq \partial h / \partial u \leq \alpha_2 \quad (12)$$

entonces se puede aplicar la ley de control dada por ecuación (4). La condición suficiente de convergencia, descrita en (Xu y Y.Tan 2003) es

$$\max_{h_u} |1 - Kh_u| < 1 \quad (13)$$

Como se decía anteriormente, estos resultados son sorprendentes en cuanto que no son equivalentes de ninguna manera las expresiones (10) y (13). Ello es posible perfectamente, pues son condiciones suficientes. En cualquier caso, debe tenerse precaución al controlar procesos por lotes, pues pueden aparecer resultados no convencionales.

En efecto, la condición de estabilidad dada por (Xu y Y.Tan 2003) asume que la función de salida depende explícitamente de la entrada. Un sistema común no presenta esta característica ( $\partial h / \partial u = 0$ ) con lo cual el criterio no es aplicable en todos los casos. De cualquier modo, (Xu y Y.Tan 2003) proponen diferentes leyes de control robusta, lineal y no lineal para sistemas de la forma (11) que cumplan la condición (12).

Bajo condiciones de continuidad Lipschitz de la planta, las demostraciones de estabilidad fijando el instante inicial  $t = 0$ , son extensibles a cualquier instante de tiempo. En concreto, si la

planta presenta trayectorias con tiempo de escape finito, la demostración de estabilidad es de mayor dificultad. En estos sistemas, el estado va a infinito en tiempo finito, pudiéndose verificar algorítmicamente la existencia de estas trayectorias según (Goriely y Hyde 2000). Lógicamente, en los controladores diseñados en tiempo discreto para plantas reales no aparece este problema.

Por estos motivos se debe tener precaución en el control de procesos por lotes mediante controladores iterativos, pues el hecho de tener dos grados de libertad facilita la solución del problema de control, pero también puede ser un obstáculo si no se conoce adecuadamente el funcionamiento de estos algoritmos.

Así pues, nuestro objetivo es mostrar un controlador para sistemas de tipo afín, descrito por ecuaciones dinámicas (1) y condiciones iniciales (2), que sea capaz de estabilizar el sistema. Este tipo de ecuaciones se da más comúnmente en aplicaciones reales que la ecuación (11) con las condiciones sobre la función de salida (12). En muchos casos prácticos es también posible transformar un sistema en forma general (11) a la forma (1).

Si se emplea el punto de vista de teoría de operadores no lineales (por ejemplo la planta se describe por  $y = f_H(u)$ , donde  $f_H$  es un operador no lineal), también se pueden encontrar condiciones de estabilidad más generales aún (Albertos y Piqueras 2002), aunque también más difíciles de verificar.

### 2.1 Controladores iterativos basados en modelo

En el caso de plantas lineales, se han diseñado diversos controladores basados en modelo y de naturaleza iterativa y que se basan en un modelo. Casi todos plantean un problema de optimización, de cuya solución se obtiene la ley de control óptima.

La necesidad adicional de optimalidad en los controladores iterativos proviene del hecho de que la estabilidad garantizada no implica un comportamiento transitorio adecuado (Longman 2000). Así surge el controlador QILC (Quadratic ILC) (Amann *et al.* 1996), del cual posteriormente (Lee *et al.* 2000a) surge cierto número de variantes (ver esquema en la figura 2), dependiendo de si hay restricciones en el problema, si se emplean observadores, si el modelo es determinista, o si se incluye realimentación de la variable de salida en el lote en curso.

Los modelos de plantas lineales de la forma

$$\begin{cases} x_{t+1}^k = A_t x_t^k + B_t u_t^k \\ y_t^k = C_t x_t^k \end{cases} \quad (14)$$

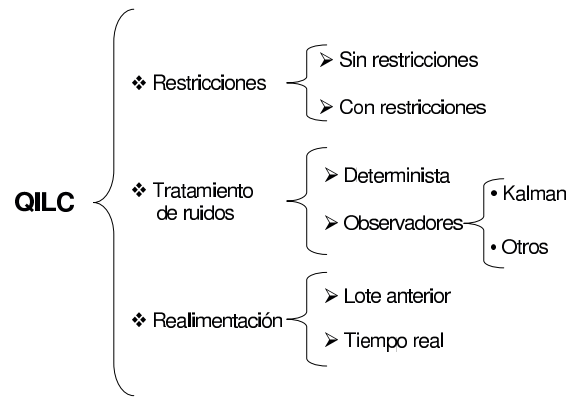


Figura 2. Controladores basados en modelo QILC

donde los coeficientes son variables en tiempo, pueden ponerse en la forma matricial siguiente

$$y = y_0 + Gu \quad (15)$$

donde  $u$  e  $y$  son vectores que recogen información de un lote completo.

El algoritmo de Amann (Amann *et al.* 1996, Lee *et al.* 2000a), propone usar la ley de control siguiente, que se calcula al inicio de cada lote para todo instante de tiempo:

$$u_{k+1} = u_k + (G^T Q G + R)^{-1} G^T Q e_k \quad (16)$$

donde  $u_k = (u_0^k \ u_1^k \ \dots \ u_{N-1}^k)^T$  es el vector de señales de control,  $e_k$  el vector de errores en el último lote completado, y  $Q, R$  son matrices que ponderan el error y el esfuerzo de control en la función objetivo.

Así, empleando leyes de control del tipo (16), se obtienen controladores que estabilizan sistemas lineales dados por las ecuaciones (14).

## 3. EL CONTROLADOR INMPC

En secciones anteriores se ha revisado una parte de los algoritmos iterativos, incluyendo los que se basan en un modelo de la planta. En este trabajo se ha pretendido extender las técnicas de control iterativo basado en modelo a plantas no lineales que se puedan describir mediante la ecuación (8).

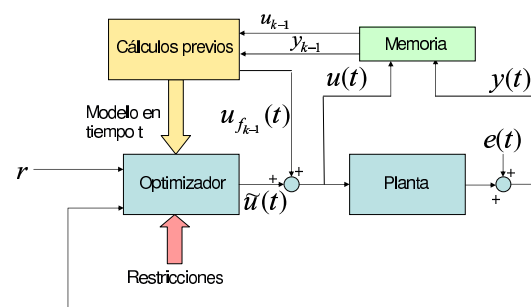


Figura 3. Esquema del controlador INMPC

El controlador INMPC (Iterative Nonlinear Model Predictive Control) (Cueli 2004) trata de combinar las capacidades de aprendizaje de los controladores iterativos descritos en secciones anteriores y la optimalidad del control predictivo basado en modelo MPC (Camacho y Bordons 2004), sin perder de vista las nociones de estabilidad y optimalidad del algoritmo.

El modelo del controlador se formula en función de las llamadas variables incrementales, que para un proceso por lotes vienen dadas por

$$\tilde{x}_t = x_t - x_t^{k-1} \quad (17)$$

Se asume que el modelo de la planta no lineal se puede poner en la forma aproximada matricial siguiente

$$\tilde{y} = G\tilde{u} \quad (18)$$

Aparentemente, en procesos no lineales, la ecuación (18) no puede emplearse como modelo de los mismos, pero en procesos por lotes la situación cambia. El modelo incremental permite que se cancelen, de forma exacta, las perturbaciones repetitivas, que son aquéllas cuyo valor se mantiene constante para el mismo instante de tiempo en diferentes lotes. Además, se puede elegir una trayectoria base (Keyser 1997), que no se corresponde con un punto de equilibrio de (8), sobre la cual linealizar el sistema. De esta forma la aproximación lineal puede ser suficientemente buena, y se plantea un controlador similar al EPSAC (Extended Prediction Self-adaptive Control) (Keyser y Cuawenberghe 1985) en lo que respecta al uso de trayectorias base para el control de plantas no lineales. En procesos por lotes, esta trayectoria base es perfectamente conocida, pues corresponde con la trayectoria seguida por el sistema en el lote anterior.

Conocido el modelo incremental de la planta (18), se puede plantear un problema de optimización con la función objetivo (cuadrática) siguiente

$$J = \sum_{i=1}^p \left( \tilde{y}_{t+i}^k - \tilde{r}_{t+i}^k \right)^2 + \lambda \sum_{i=1}^m \left( \tilde{u}_{t+i-1}^k \right)^2 \quad (19)$$

donde la trayectoria de referencia viene dada por

$$\tilde{r}_t^k = r_t^k - y_t^{k-1} \quad (20)$$

y

$$r_t^k = \begin{cases} r_t^{k-1} & \text{si } |e_t^{k-1}| \geq |e_t^{k-2}| \\ (1-\alpha)sp_t + \alpha y_t^{k-1} & \text{e.o.c} \end{cases} \quad (21)$$

La expresión (21) se construye de forma que se garantice que la trayectoria de referencia tenga un comportamiento monótono. El parámetro  $\alpha \in [0, 1)$  es análogo al factor de *roll-off* en MPC. En este controlador, además de suavizar las trayectorias obtenidas, este parámetro tiene una utilidad adicional. Si la planta es muy no lineal,  $\alpha$  debe

tener valores altos, consiguiendo así un controlador más lento, pero en el cual las variables del modelo son más pequeñas. De esta forma se tiene cierto control sobre el error de la linealización. En plantas casi lineales se puede usar un  $\alpha$  pequeño.

La predicción en bucle cerrado se calcula teniendo en cuenta que se puede aplicar el principio de superposición, de forma que se puede realizar por hipótesis la división clásica entre respuesta forzada y libre

$$\mathbf{y}_t^k = G_t \mathbf{u}_t^k + f_t \quad (22)$$

donde  $\mathbf{u}_t^k$  e  $\mathbf{y}_t^k$  son vectores futuros con las variables manipuladas y controladas, respectivamente, con  $m$  y  $p$  componentes.

La respuesta libre  $f_t$  se calcula iterando bien el modelo lineal (14), o bien el no lineal (8), donde el estado puede ser medido u observado. La entrada al modelo debe ser la señal de control del lote anterior  $u_{t+i}^{k-1}$ . En  $f_t$  se ha de incluir también el término que se debe a las perturbaciones repetitivas, el cual desaparece si se usa el modelo incremental. De hecho, las perturbaciones repetitivas pueden estimarse en función de la discrepancia entre la predicción del modelo no lineal y las medidas de sensores.

Por otra parte,  $G_t$  es la matriz dinámica del sistema en el instante de tiempo  $t$ , que se calcula ignorando los términos repetitivos en el modelo. La extensión al caso multivariable requiere el uso de matrices construidas por bloques, y se realiza de manera análoga a cualquier controlador predictivo multivariable (Camacho y Bordons 2004), con la salvedad de que se puede incluir un nuevo tipo de restricciones.

Así, se pueden formular las mismas restricciones que en cualquier controlador predictivo:

$$\begin{aligned} y_{\min} &\leq y \leq y_{\max} \\ u_{\min} &\leq u \leq u_{\max} \\ \Delta u_{\min} &\leq u_t - u_{t-1} \leq \Delta u_{\max} \end{aligned} \quad (23)$$

y adicionalmente un nuevo tipo que permite restringir el cambio de la secuencia entre dos lotes:

$$\delta u_{\min} \leq u_t^k - u_t^{k-1} \leq \delta u_{\max}$$

Sustituyendo la ecuación (22) en la función objetivo (19), y en las posibles restricciones (23), se puede plantear en cada instante de tiempo un problema de optimización QP con restricciones cuya solución permite obtener la ley de control. La técnica de horizonte deslizante también se utiliza en este controlador, de forma que sólo se aplica a la planta el primer elemento del vector de señales de control futuras calculado.

La diferencia principal de este controlador con QILC estriba en la existencia de un modelo variante en tiempo que además cambia en cada lote, puesto que al inicio de cada lote se calcula el

modelo linealizado en torno a la última trayectoria conocida.

### 3.1 Convergencia para plantas multivariantes y horizontes pequeños

En esta sección se trata de mostrar algunas condiciones suficientes bajo las cuales el controlador INMPC converge a las trayectorias de referencia. En concreto, bajo condiciones de regularidad del sistema de control y con horizonte unitario, el controlador basado en el modelo nominal converge a las trayectorias de referencia siempre que la función de salida de la planta sea lineal (Cueli y Bordons 2005b). De esta forma, la no linealidad en esta función de salida (y no en la función de transición de estados) puede hacer que la región de convergencia sea finita.

Así, el objetivo de esta sección es caracterizar el efecto de la no linealidad de la función de salida sobre las propiedades de convergencia del algoritmo, derivando unas condiciones que deben verificarse para garantizar estabilidad con el modelo nominal. En la sección 3.2 se ilustran estas propiedades con un ejemplo sencillo.

El sistema (8) particularizado en el primer instante de tiempo se escribe

$$\begin{cases} x_1^k = f_0 + g_0 u_0^k \\ y_1^k = h(x_1^k) \end{cases} \quad (24)$$

con  $f_0 = f(x_0)$  y  $g_0 = g(x_0)$ . El controlador INMPC formula una predicción del tipo (22), en la cual la respuesta libre se anula por tratarse del primer instante de tiempo y cumplirse que el estado inicial se mantiene constante en toda iteración (2). La matriz dinámica en este instante viene dada por

$$G = \left. \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right|_{x=x_1^{k-1}} g_0 \quad (25)$$

La ley de control, en ausencia de restricciones, se puede obtener analíticamente, derivando la función objetivo (19) respecto a la señal de control

$$\tilde{u}_0^k = (G^T G + \Lambda)^{-1} G^T [r_1 - y_1^{k-1}] \quad (26)$$

donde, en el caso de existir una sólo variable manipulada,  $\Lambda = \lambda I$ .

El sistema en bucle cerrado, puesto en forma incremental, resulta ser del tipo mostrado en la figura 4, y descrito por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1^k = x_1^k - x_1^{k-1} = g_0 \tilde{u}_0^k \\ \tilde{u}_0^k = (G^T G + \Lambda)^{-1} G^T [r_1 - h(x_1^{k-1})] \end{cases} \quad (27)$$

El sistema equivale a una planta dinámica lineal ( $\Sigma$ ) la cual se realimenta mediante una función estática no lineal ( $\Phi$ ). Puesto que la planta es lineal, se puede realizar la transformación de lazo

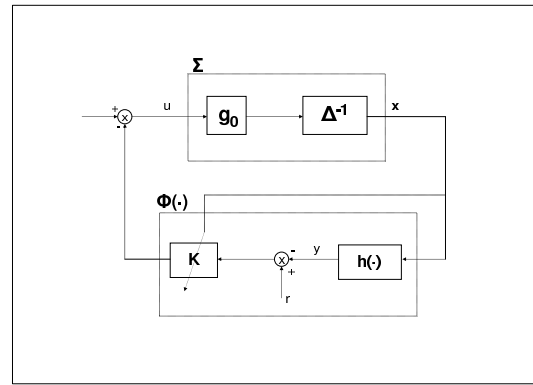


Figura 4. Diagrama de bloques de planta y controlador INMPC en el instante inicial

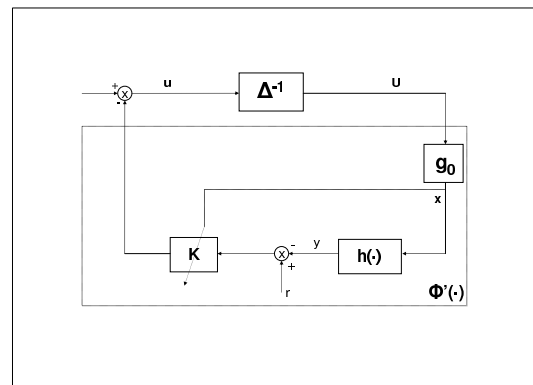


Figura 5. Diagrama de bloques equivalente

(Popov 1973) mostrada en la figura 5, de forma que el bloque  $g_0$  se incluya en la función no lineal de realimentación. Las ecuaciones se transforman en

$$\begin{cases} U_1^k = U_1^{k-1} + \tilde{u}_0^k \\ \tilde{u}_0^k = (G^T G + \Lambda)^{-1} G^T [r_1 - h(g_0 U_1^{k-1})] \end{cases} \quad (28)$$

siendo la relación entre  $x_1^k$  y  $U_1^k$  la siguiente

$$x_1^k = g_0 U_1^k = f_0 + g_0 u_0^k \quad (29)$$

Lógicamente,  $U_1^k$  no corresponde exactamente con la señal de control absoluta  $u_0^k$ , tal como cabe pensar al ver (28), sino que está desplazada un valor constante.

Agrupando las dos últimas ecuaciones en una sola, y aplicando la transformación anterior, las ecuaciones del sistema resultan ser de la forma de la iteración de punto fijo siguiente:

$$F(x) = x + (G^T G + \Lambda)^{-1} G^T [r - h(g_0 x)] \quad (30)$$

donde  $x = U_1^k$ .

La iteración (30) tiene, por hipótesis, al menos un punto fijo  $x = F(x)$ , dado por  $r = h(g_0 x)$ . Se trata de comprobar si el punto fijo, localmente, es estable y único. Para ello hay que aplicar el teorema de mapas contractivos o del punto fijo de Banach (Vidyasagar 1993).

En primer lugar, hay que verificar que si  $x \in B$ , también  $F(x) \in B$ , donde  $B$  es un subconjunto

del espacio de estados<sup>1</sup>, que en este caso es un entorno del equilibrio especificado por

$$B = \{x : \|x - x^*\| \leq r\} \quad (31)$$

A continuación, se denota  $\|\delta x\| = \|x - x^*\|$  y se asume que el desarrollo en serie (30) en torno al punto de equilibrio  $x^*$  se puede escribir en la forma:

$$F(x) = x^* + (G^T G + \Lambda)^{-1} \Lambda \delta x + H(x) \delta x \quad (32)$$

donde  $H(x) \delta x$  contiene los términos no lineales. Por consiguiente:

$$\|F(x) - x^*\| \leq \left\| (G^T G + \Lambda)^{-1} \Lambda + H(x) \right\|_i \|\delta x\| \quad (33)$$

luego, para que se cumpla la primera condición del teorema de Banach y aplicando la desigualdad triangular, se tiene,

$$\left\| (G^T G + \Lambda)^{-1} \Lambda \right\|_i + \max_{x \in B} \|H(x)\|_i \leq 1 \quad (34)$$

En segundo lugar, hay que verificar que

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \rho \|x - y\|, \quad \forall x, y \in B \quad (35)$$

Puesto que  $F(x)$  es una función no lineal, se trata de obtener los coeficientes  $\rho_L$  y  $\rho_H$  tales que

$$\|F(x) - F(y)\| \leq [\rho_L + \rho_H(r)] \|x - y\| \quad (36)$$

donde el término  $\rho_L$  es debido a la parte lineal, mientras que  $\rho_H$  se debe a la parte no lineal y dependerá en general del radio de la región de convergencia.

Para obtener estos coeficientes,  $H(x)$  debe expandirse a su vez en serie de Taylor de primer orden:

$$H(y) = H(x) + \partial H / \partial x|_{\xi} (y - x) \quad (37)$$

Teniendo en cuenta (32) y (37), se llega a:

$$F(x) - F(y) = (G^T G + \Lambda)^{-1} \Lambda (x - y) + \left[ H(x) + \partial H / \partial x|_{\xi} (y - x^*) \right] (x - y) \quad (38)$$

y, calculando la norma de esta expresión, se concluye que

$$\rho_L = \left\| (G^T G + \Lambda)^{-1} \Lambda \right\|_i \quad (39)$$

$$\rho_H \leq \max_{x \in B} \|H(x)\|_i + \max_{x \in B} \left\| \frac{\partial H}{\partial x} \right\|_i r \quad (40)$$

**3.1.1. Cálculo del coeficiente  $\rho_L$**  Tal como se ha explicado en la sección anterior, la matriz  $F = (G^T G + \Lambda)^{-1} \Lambda$  determina las propiedades de convergencia del algoritmo INMPC. En concreto, la

convergencia muy cerca del equilibrio es exponencial con coeficiente  $\rho_L = \|F\|_i$ .

Se puede comprobar que aplicando propiedades básicas de las matrices, la matriz  $F$  se puede poner en la forma:

$$F = (P \Omega P^T + \Lambda)^{-1} \Lambda = [P (\Omega + \Lambda) P^T]^{-1} \Lambda \quad (41)$$

donde  $P$  es una matriz ortonormal y los autovalores de  $G^T G$  son reales y positivos, es decir,  $\Omega_i > 0$ . Esto se cumple cuando la matriz  $G$  es de rango completo, lo cual equivale a decir que es necesario asumir que el sistema es controlable. Se cumplirá, además

$$F = P (\Omega + \Lambda)^{-1} P^T \Lambda = P (\Omega + \Lambda)^{-1} \Lambda P^T \quad (42)$$

Para más detalles acerca de los pasos seguidos para llegar a la ecuación (42), ver el capítulo relativo a matrices simétricas del libro (Lay 1994). En este caso se encuentra una cota de la norma de la matriz  $F$ , dada por la expresión:

$$\rho_L = \frac{1}{1 + \Omega_{\min} / \lambda_{\max}} \in (0, 1) \quad (43)$$

con  $\Omega_{\min}$  el autovalor mínimo de la matriz  $G^T G$ , y  $\lambda_{\max}$  el máximo peso del esfuerzo de control en la función objetivo.

### 3.2 Ejemplo de cálculo de la región de convergencia

Para la siguiente planta el objetivo es comprobar que el controlador es estable en la región de convergencia.

$$x_{t+1} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,7 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} x_t + \begin{pmatrix} 0,3 \\ -0,1 \end{pmatrix} u_t \quad (44)$$

$$y_t = 2 + 3x_1 + 2x_1^2 + 15x_1^3 \quad (45)$$

En primer lugar se debe calcular la región de convergencia en torno a un punto de equilibrio de (44). Se han calculado el radio de la región de convergencia y el coeficiente  $\rho_L$ . Este coeficiente se obtiene directamente calculando la matriz dinámica  $G$  del sistema linealizado en el punto de equilibrio.

El radio de la región de convergencia  $r$  se debe calcular mediante un procedimiento iterativo. En primer lugar se elige un valor de  $r$  suficientemente grande. A continuación se obtiene la parte no lineal  $H(x)$  igualando (30) y (32). El máximo de  $H(x)$  y de su derivada se puede calcular para la región de radio  $r$  dado. En este punto se puede calcular  $\rho$  sumando la parte lineal (39) y la no lineal (40).

En el caso  $\rho > 1$ , se disminuye el radio de convergencia mediante un factor, y se repite el procedimiento. Éste acaba en cierto tiempo, pues la parte no lineal  $H(x)$  se anula en el equilibrio.

<sup>1</sup> Nótese que  $B$  es una región definida en el espacio de estados  $U$  transformado (figura 5) mediante ecuación (29). No obstante, esta región se convierte en otra de igual radio en el espacio de señales de entrada  $u$ .

Para que este algoritmo converja es condición indispensable que  $\rho_L < 1$ .

El resultado de estos cálculos viene mostrado en el cuadro 1, con el punto de equilibrio correspondiente al set point dado, el coeficiente  $\rho_L$  y el radio de la región de convergencia en  $u$ , para  $\lambda_{inmpc} = 1$ . Repitiendo los mismos cálculos para  $\lambda_{inmpc} = 0,001$  (cuadro 2), se comprueba que si bien  $\rho_L$  disminuye,  $\rho_H$  aumenta mucho más, haciendo en conjunto que la región de convergencia se haga más pequeña.

Cuadro 1. Región de convergencia,  $\lambda_{inmpc} = 1$

$u^*$	$x_1^*$	$sp$	$\rho_L$	$r$
0	0	2	0.5525	2.54
0.2226	0.3562	4	0.0976	0.16
0.4324	0.6918	10	0.0147	0.02

Cuadro 2. Región de convergencia,  $\lambda_{inmpc} = 0,001$

$u^*$	$x_1^*$	$sp$	$\rho_L$	$r$
0	0	2	0.001233	0.002997
0.2226	0.3562	4	0.000108	0.000127
0.4324	0.6918	10	0.000015	0.000032

Ahora se muestra en la figura 6 la región de convergencia (gráfica inferior en trazo grueso) supuesto que el set point varía entre 2 y 4, e interpolando linealmente en la zona intermedia. En la figura 7 se han simulado un par de iteraciones del controlador INMPC con  $\lambda = 1$  y  $\alpha = 0$ . Restringiendo la señal de control a esta región, el sistema en bucle cerrado será estable.

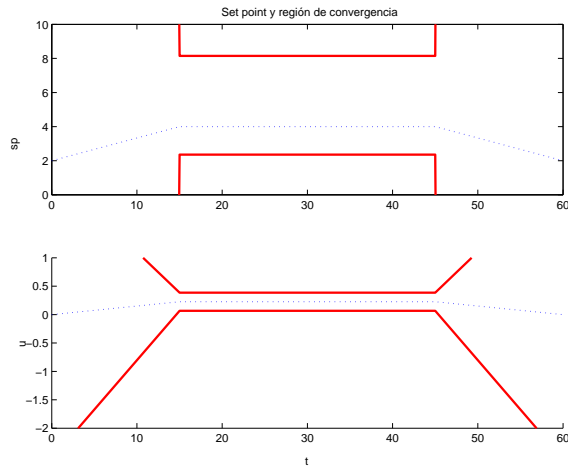


Figura 6. Región de convergencia

Evidentemente, al aumentar el set point (ver cuadro 1) la no linealidad es mayor y por lo tanto, la región de convergencia se hace menor. En la figura 8 se muestra cómo el mismo controlador se hace inestable al aumentar el set point de 4 a 10. Está claro que la disminución de la región de convergencia provoca la inestabilidad del sistema.

Puesto que la región de convergencia se define en un entorno de la trayectoria de equilibrio, hay

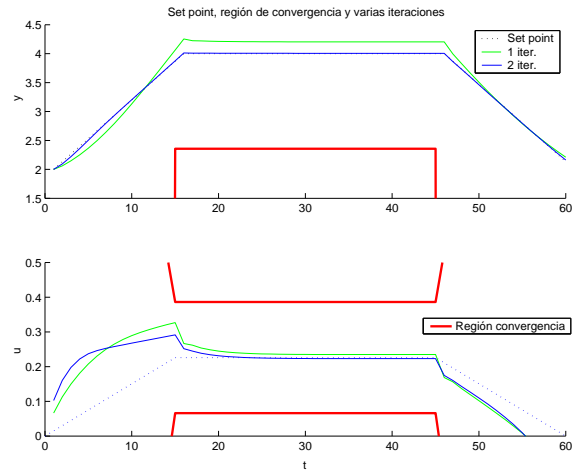


Figura 7. Simulación dentro de la región de convergencia

una forma de estabilizar este sistema haciendo uso del parámetro  $\alpha$  a costa de ralentizar la convergencia. Se puede modificar el mismo para que la transición se realice de forma más suave. La región de convergencia se define respecto a la trayectoria suavizada, y así se consigue mantener la señal de control dentro de esta región, aunque la misma sea pequeña. La figura 9 se ha obtenido con  $\alpha = 0,5$ , mostrando un comportamiento estable.

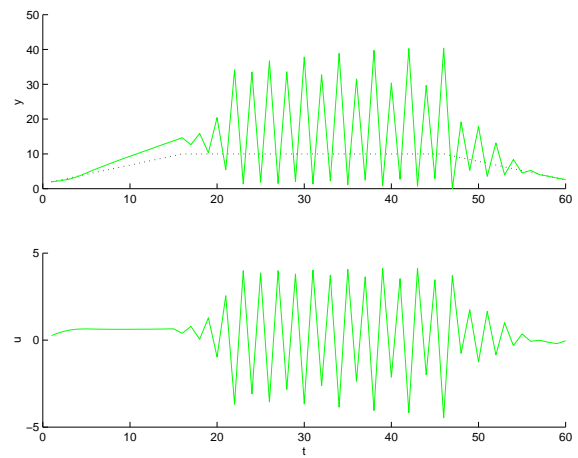


Figura 8. Inestabilidad al aumentar el set point

### 3.3 Mejoras

Como se ha comprobado, el controlador descrito converge bajo ciertas condiciones bastante generales. No obstante, en aplicaciones prácticas pueden aparecer incertidumbres en el modelo, así como ruidos en la planta. Siendo así, se pueden introducir algunas mejoras en el controlador, que no deben modificar de forma notable el comportamiento nominal, y que aumentan el grado de robustez del controlador.

En los procesos por lotes se puede usar una serie de filtros específicos, que se aplican en tiempo



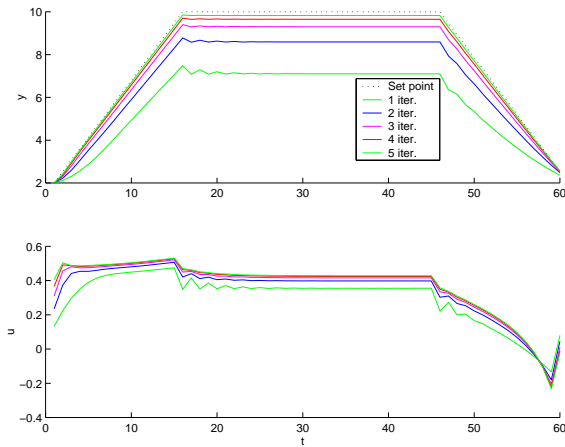


Figura 9. Estabilización suavizando trayectoria de referencia

real o bien antes de iniciarse el nuevo lote. El filtro EWMA (Moyne *et al.* 2001) pertenece al primer tipo, y ha sido usado en industria de semiconductores. Dada la entrada al filtro  $x$ , el valor obtenido viene dado por la expresión

$$y^k(t) = \lambda_f x^k(t) + (1 - \lambda_f) y^{k-1}(t) \quad (46)$$

Los filtros de mediana se aplican al principio del lote a la secuencia completa, y su objetivo es suavizar las variables (Mezghani *et al.* 2002) para evitar en lo posible un aumento de varianza en presencia de incertidumbres sin deteriorar el comportamiento nominal.

Estos filtros permiten que el controlador funcione bien en entornos con mayor nivel de ruido que en su ausencia, lo cual hace su uso adecuado en algunas aplicaciones prácticas. Adicionalmente se puede incluir en el controlador predictivo una verificación de la predicción interna del algoritmo de control, que asegure que el funcionamiento es correcto y que el modelo es adecuado.

#### 4. APLICACIÓN A UNA PLANTA REAL

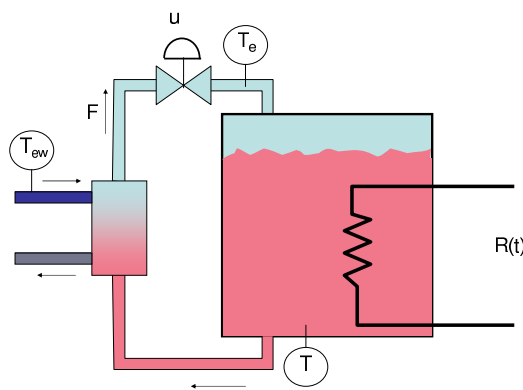


Figura 10. Reactor piloto

En esta sección se muestra una aplicación práctica del controlador en una planta piloto que emula un

reactor exotérmico. En (Cueli y Bordons 2005a) se muestra otra aplicación a una planta de pH.

La planta piloto consta de un depósito de agua, en el cual está inmersa una resistencia, y un bucle de recirculación equipado con un intercambiador de calor (figura 10). El objetivo es mantener un perfil de temperaturas especificado, usando para ello el caudal de recirculación. La idea es simular la reacción química exotérmica mediante el calor aportado por la resistencia, tal como se hace por ejemplo en (Santos *et al.* 2000). El calor se genera siguiendo el patrón dado por las ecuaciones no lineales de una reacción química de segundo orden (Lee *et al.* 2000b):

$$\begin{cases} dC_A/dt = -k_0 e^{-E/RT} C_A^2 \\ Q(t) = (-\Delta H) V k_0 e^{-E/RT} C_A^2 \end{cases} \quad (47)$$

donde  $T$  es la temperatura absoluta dentro del reactor y la concentración inicial del reactivo es  $C_A(0) = C_{a_0}$ .

Mediante aplicación de balance de materia de y energía se puede obtener un modelo dinámico para control, que viene dado por las ecuaciones:

$$mC\dot{T} = FC(T_e - T) + Q(t) \quad (48)$$

y

$$T_e - T = \beta(T_{e_w} - T) \quad (49)$$

donde  $\beta$  es el rendimiento del intercambiador, que en este caso se asume de la forma

$$\beta = a_e F + b_e(T_{e_w} - T) + c_e \quad (50)$$

y  $Q(t)$  es el calor generado en la reacción exotérmica, calculado según la ecuación (47).

Los parámetros de la planta se muestran en el cuadro 3, donde  $T_m$  es el tiempo de muestreo.

Cuadro 3. Parámetros de la planta

Parámetro	Valor	Unidades
$T_{e_w}$	25	$^{\circ}\text{C}$
$m$	29,6	Kg
$a_e$	$-879 \cdot 10^{-6}$	h/Kg
$b_e$	$-243 \cdot 10^{-6}$	$^{\circ}\text{C}^{-1}$
$c_e$	0,964	-
$T_0$	35	$^{\circ}\text{C}$
$F_0$	0	Kg/h
$T_m$	15	s

En los controladores iterativos no es necesario modelar la parte repetitiva del proceso, puesto que al realizar la diferencia con el lote anterior, ésta se cancela. En este trabajo consideramos que  $Q(t)$  es una perturbación repetitiva, de forma que el modelo en el que se basará el controlador se obtiene agrupando (48-50) y cancelando el término repetitivo:

$$\dot{T} = \frac{T_{e_w} - T}{m} \{ [b_e(T_{e_w} - T) + c_e] F + a_e F^2 \} \quad (51)$$

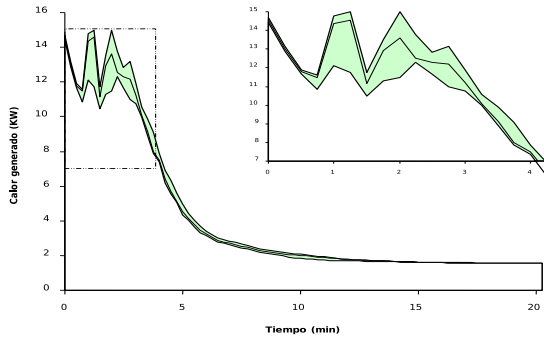


Figura 11. Incertidumbre en el calor generado

No obstante, el calor generado en los diferentes experimentos es variable, puesto que las temperaturas también cambian. En la figura 11 se puede ver el rango del calor generado en cada instante de tiempo, donde la incertidumbre es mayor durante los instantes iniciales de la iteración. El controlador iterativo basado en este modelo está asumiendo, de forma implícita, que este calor generado sigue el mismo perfil en todas las iteraciones. Esta simplificación en el modelo provoca una incertidumbre en la descripción de la planta que es correctamente compensada por el controlador propuesto.

El modelo de la planta (51) aún no está en la forma deseada (1). La prueba de estabilidad sólo es válida para sistema de la forma indicada, así que, aunque el controlador se puede aplicar directamente a la planta (51), es conveniente transformar la planta en la forma que sigue:

$$x_1 = T, \quad x_2 = F, \quad u = \dot{F} \quad (52)$$

y el sistema transformado queda:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{T_{e_w} - x_1}{m} [a_e x_2 + b_e (T_{e_w} - x_1) + c_e] x_2 \\ \dot{x}_2 = u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (53)$$

con las condiciones iniciales

$$x_1(0) = T(0), \quad x_2(0) = F(0) \quad (54)$$

El caudal de agua inicial  $F(0)$  debe fijarse, puesto que queda indeterminado al realizar la transformación (52). Tras discretizar el sistema (53), se comprueba que la temperatura también queda fijada en  $t = 1$ . El controlador así diseñado puede seguir trayectorias definidas a partir del segundo instante de tiempo.

Si bien el sistema (53-54) en su versión en tiempo discreto controlado mediante INMPC será estable (ver sección 3.1), en la realidad existen ruidos e incertidumbres, que unidos a las aproximaciones realizadas, hacen posible la aparición de fuentes de inestabilidad en el sistema. El objetivo de esta sección, visto que el controlador funciona teóricamente en el sistema transformado (53), el

cual es equivalente al original (51), es comprobar el funcionamiento en la planta real.

Cuadro 4. Parámetros del controlador

Parámetro	Símbolo	Valor
Horizonte de control	$m$	20
Horizonte de predicción	$p$	20
Peso de la señal de control	$\lambda$	0.005
Parámetro de <i>roll-off</i>	$\alpha$	0.05

De esta forma, se ha aplicado en los laboratorios el controlador INMPC (cuyos parámetros se muestran en la tabla 4) con restricciones en el caudal de agua al reactor piloto descrito. Es de destacar que con el controlador descrito se llega a un buen resultado en pocas iteraciones, mientras que en las pruebas reales con un ILC básico, se requerían muchas más iteraciones para acercarse con cierta precisión a la trayectoria de referencia. En las pruebas realizadas no ha sido necesario el uso de filtros para la mejora en la robustez del sistema, pues el funcionamiento ha sido correcto.

En las figuras 12 y 13 se muestran las primeras iteraciones de ambos controladores (la línea fina es la referencia y la gruesa es la salida). Estas gráficas en tres dimensiones ilustran el concepto de las dos variables de tiempo que aparecen en los procesos tipo *batch*: un eje corresponde al tiempo y el otro al índice de lote. En base a los experimentos resulta evidente que, tras cuatro iteraciones, el controlador ILC sólo alcanza la referencia en la última parte, mientras que el INMPC se comporta correctamente durante todo el experimento. El motivo es que el INMPC hace uso de un modelo LTV recalculado cada lote, resultando en una ganancia de control variable mientras que el ILC tiene ganancia fija.

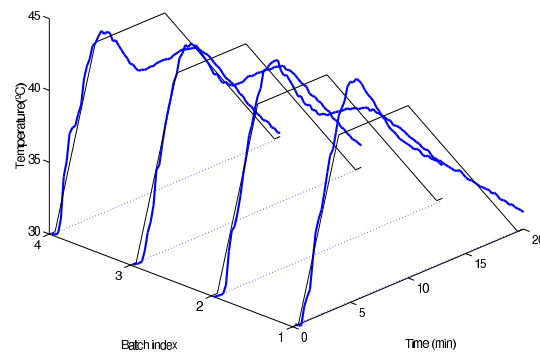


Figura 12. ILC, cuatro iteraciones

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha mostrado un pequeño resumen del conjunto de controladores disponibles aplicables a procesos por lotes, tanto basados en modelos como no. Se ha diseñado un controlador basado en modelo para plantas no lineales, incluyendo en el artículo una demostración de estabilidad del algoritmo diseñado basado en el modelo nominal.

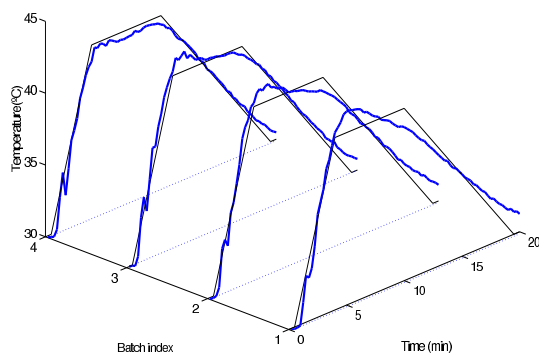


Figura 13. INMPC, cuatro iteraciones

Pensando en aplicaciones prácticas, se propone el uso de filtros específicos que deben mejorar la robustez del controlador frente a ruidos en entornos industriales. Finalmente se ha comprobado el funcionamiento real del algoritmo en una planta piloto que emula una reacción química exotérmica, mostrando mejores prestaciones en cuanto a velocidad de convergencia que un controlador básico no óptimo.

El estudio de plantas con restricciones en los actuadores o bien en las variables controladas se ha dejado como trabajo futuro. No obstante, se ha comprobado en estudios preliminares en simulación que cuando la trayectoria de referencia es alcanzable mediante actuaciones admisibles no se presentan problemas adicionales en la convergencia. En caso de que la trayectoria de referencia sea no factible, es posible que el algoritmo converja a diferentes soluciones según sean la trayectoria inicial y los parámetros del controlador.

## 6. AGRADECIMIENTOS

Los autores quieren expresar su agradecimiento al grupo de control predictivo de la Universidad de Sevilla, en especial a D. Limón y T. Álamo por su ayuda en la consecución de la prueba de estabilidad del algoritmo de control. Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto del Ministerio de Ciencia y Tecnología de España DPI2004-07444-C04-01.

## REFERENCIAS

- Albertos, P. y A. Salas Piqueras (2002). *Iterative Identification and Control*. Advances in Theory and Applications. Springer-Verlag.
- Amann, N., D. H. Owens y E. Rogers (1996). Iterative learning control for discrete-time systems with exponential rate of convergence. *IEE Proc. on Control Theory and Applications* **143**(2), 217–224.
- Arimoto, S. y T. Naniwa (2000). Equivalence relations between learnability, output-dissipativity and strict positive realness. *International Journal of Control, Special Issue*

- on Iterative Learning Control* **73**(10), 824–831.
- Bonvin, D. (1998). Optimal operation of batch reactors - a personal view. *Journal of Process Control* **8**, 355–368.
- Camacho, E. F. y C. Bordons (2004). *Model Predictive Control 2<sup>nd</sup> edition*. Springer-Verlag. London.
- Cueli, J. R. (2004). Iterative predictive control for batch processes. In: *Third Junior European Meeting on Control, Optimization, and Computation*. University of Aveiro.
- Cueli, J. R. y C. Bordons (2005a). Application of iterative nonlinear model predictive control to a batch pilot reactor. In: *IFAC Congress, Praga*.
- Cueli, J. R. y C. Bordons (2005b). Iterative nonlinear control of a semibatch reactor. Stability analysis. In: *44th Conference on Decision and Control y European Control Conference, ECC-CDC'05, Sevilla*
- Goriely, A. y C. Hyde (2000). Necessary and sufficient conditions for finite time blow-up in ordinary differential equations. *J. Diff. Eq.* (161), 422–448.
- Kawamura, S., F. Miyazaki y S. Arimoto (1988). Realization of robot motion based on a learning method. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* **18**(1), 126–134.
- Keyser, R. (1997). A gentle introduction to model based predictive control. In: *Proc. Int. Conf. on Control Engineering and Signal Processing*. Lima.
- Keyser, R. y A. R. Van Cuawenberghe (1985). Extended Prediction Self-adaptive Control. In: *IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation, York, UK*. pp. 1317–1322.
- Lay, D. C. (1994). *Linear Algebra and Its Applications*. Addison-Wesley.
- Lee, J. H., K. S. Lee y W. C. Kim (2000a). Model-based iterative learning control with a quadratic criterion for time-varying linear systems. *Automatica* **36**, 641–657.
- Lee, J. H., K. S. Lee y W. C. Kim (2000b). Model-based iterative learning control with a quadratic criterion for time-varying linear systems. *Automatica* **36**, 641–657.
- Longman, R. W. (2000). Iterative learning control and repetitive control for engineering practice. *Int. Journal of Control* **73**(10), 930–954.
- Mezghani, M., G. Roux, M. Cabassud, M.V. Le Lann, B. Dahhou y G. Casamatta (2002). Application of iterative learning control to an exothermic semibatch chemical reactor. *IEEE Trans. Contr. Syst. Technol.* **10**(6), 822–834.
- Moore, K. L. (1998). Iterative learning control - An expository overview. *Applied and Computational Controls, Signal Processing and Circuits* **1**, 425–488.

- Moore, K. L. (1993). *Iterative Learning Control for Deterministic Systems*. Springer-Verlag. London.
- Moore, K. L. (2000). A non-standard iterative learning control approach to tracking periodic signals in discrete-time non-linear systems. *Int. Journal of Control* **73**(10), 955–967.
- Moyne, J., del Castillo, E. y Hurwitz, A. M., Eds.) (2001). *Run-to-run control in semiconductor manufacturing*. CRC Press LLC. Boca Raton, Florida.
- Popov, V. M. (1973). *Hyperstability of control systems*. Springer-Verlag. London.
- Santos, L., P. Afonso, J. Castro, N. Oliveira y L. Bielgler (2000). On-line implementation of nonlinear MPC: an experimental case study. In: *Preprints ADCHEM*. Pisa, Italy.
- Vidyasagar, M. (1993). *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice-Hall International.
- Xu, J. X. y Y. Tan (2003). *Linear and Nonlinear Iterative Learning Control*. Springer-Verlag. London.