

METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO EN ALGUNOS PROBLEMAS DE INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA

José Domínguez Abascal <sup>1</sup>

Enrique Alarcón Alvarez <sup>2</sup>

<sup>1</sup> E.T.S. Ing. Industriales de Sevilla

<sup>2</sup> E.T.S. Ing. Industriales de Madrid

Resumen . Los problemas del comportamiento sísmico de estructuras masivas de gran responsabilidad y edificios de gran altura así como el clásico problema del cimiento de las máquinas vibrantes, hacen que el estudio de la interacción suelo-estructura adquiera una gran actualidad.

Estos problemas, que implican formas y propiedades complicadas, suponen siempre la necesidad de utilizar un modelo numérico del medio considerado.

Aquí se emplea el método de los elementos de contorno que dadas sus características resulta una alternativa muy sugestiva para modelar el suelo y que hace posible el estudio de problemas tridimensionales a un precio razonable.

Se introduce un tipo de elementos para problemas bidimensionales, que incluye una singularidad de tipo logarítmico en uno de sus extremos. Se muestran distribuciones de tensiones obtenidas con este tipo de elementos.

EL PROBLEMA DE INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA

Un problema dinámico que tradicionalmente ha interesado a los especialistas en mecánica del suelo ha sido el del diseño de cimentaciones para máquinas cuyo funcionamiento induce vibraciones. El problema fue abordado originalmente de modo experimental, o utilizando modelos simples, como el de una serie de resortes que simulaban el comportamiento del suelo .

A partir de los años sesenta, con la instalación de centrales nucleares, la ingeniería sísmica adquirió un gran auge y con ella los problemas de comportamiento dinámico del suelo. Aunque originalmente se consideraron estructura y suelo como dos sistemas a estudiar independientemente, pronto se apreció la importancia que en la respuesta de estructuras masivas o de grandes dimensiones ante un terremoto, tenía la naturaleza del suelo . Ello llevó a considerar suelo y estructura como un solo sistema o dicho de otro modo dos sistemas que se interaccionan.

El problema es en general tridimensional y dado que la geometría de la cimentación puede ser muy diversa y las propiedades de los materiales muy variables, su resolución solo puede ser abordada por métodos numéricos.

Solo existe solución analítica para casos particulares como el resuelto por Veletsos y Wei (1971). De los métodos numéricos, el más extendido con diferencia es el de los elementos finitos.

Existen en la actualidad dos enfoques distintos del estudio del sistema suelo-estructura . Uno que puede ser llamado método directo y que se basa en la resolución mediante elementos finitos de el problema completo incluyen

do tanto el suelo como la estructura. El otro, conocido por método de las subestructuras que estudia, en el dominio de la frecuencia, el comportamiento del suelo para luego estudiar la estructura soportada sobre un medio con una matriz de rigidez cuyos términos dependen de la frecuencia. En este segundo método una fase importante es la obtención de las rigideces correspondientes a distintos movimientos para distintas frecuencias, lo cual a su vez resuelve el problema del cimiento de máquinas vibrantes.

El empleo de elementos finitos en este problema se ha extendido ampliamente, pero se han encontrado inconvenientes como la necesidad de introducir límite a un medio infinito, para lo cual Waas (1972) desarrolló los contornos absorbentes. Además, el gran número de elementos necesarios hace inabordable de una forma económica los problemas tridimensionales. Debido a estos inconvenientes, se han desarrollado otros métodos que sobre todo tratan de resolver el problema tridimensional con un costo razonable.

La mayoría de los métodos están basados en la función de Green para carga dinámica en la superficie de un semi espacio elástico obtenida por Lamb (1904). Wong (1975) propuso un método para la obtención de rigideces de cimentaciones superficiales de forma cualquiera aunque por utilizar la solución de Lamb, presenta el inconveniente de no ser válido para cimentaciones enterradas e implicar una integración para cada término de una función con un polo que ha de ser integrada de una forma numérica con un consumo importante de tiempo de ordenador.

EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO EN -  
PROBLEMAS ELASTODINAMICOS

Las primeras ideas sobre el metodo fueron -  
presentadas por Jawson y Ponter(1963) para -  
problemas de potencial.Rizzo (1967) lo formu-  
lo para problemas elasticos y Cruse y Rizzo  
(1968) lo hicieron para el caso dinámico.

El metodo esta basado en elasticidad, en el -  
teorema de reciprocidad:

$$\int_S t_i u_i^* ds + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = \int_S t_i^* u_i ds + \int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega \quad (1)$$

siendo:

- S el contorno
- Ω el dominio en estudio
- t<sub>i</sub> el vector de tracciones en el contorno
- u<sub>i</sub> el vector de movimientos en el contorno
- b<sub>i</sub> el vector de fuerzas por unidad de volu-  
men.

El super indice "\*" indica un estado y las -  
variables sin super indice pertenecen al -  
otro.

Tomando como estado "\*" el correspondiente a  
una carga concentrada unidad en un medio in-  
finito, y suponiendo b<sub>i</sub>=0, se obtiene la -  
identidad de Somigliana.

$$u_j^P + \int_S T_{ji} u_i ds = \int_S U_{ji} t_i ds \quad (2)$$

donde u<sub>j</sub><sup>P</sup> es el movimiento segun j del punto  
P y T<sub>ji</sub> y U<sub>ji</sub> se obtienen de t<sub>i</sub><sup>\*</sup>=T<sub>ji</sub>l<sub>j</sub> y u<sub>i</sub><sup>\*</sup>=  
=U<sub>ji</sub>l<sub>j</sub> siendo l<sub>j</sub> el vector unitario segun -  
la dirección j de aplicación de la carga.

T<sub>ji</sub> y U<sub>ji</sub> se obtienen de la solución del pro-  
blema de Kelvin.

La ecuación(2) puede ser escrita para puntos  
del contorno, en cuyo caso tiene la forma:

$$\underline{C} \underline{u}^P + \int_S \underline{T} \underline{u} ds = \int_S \underline{U} \underline{t} ds$$

donde C es una matriz de coeficientes que -  
es diagonal si el contorno es suave.

Para problemas dinámicos, se puede estable-  
cer la misma relación (1) entre las Transfor-  
madas de Fourier de dos estados.Se obtendrán  
las mismas ecuaciones (2) y(3) siendo T<sub>ij</sub> y  
U<sub>ij</sub> los correspondientes a la solución fun-  
damental que es en este caso la respuesta de  
un medio elastico infinito a una carga armo-  
nica concentrada de valor unidad.Esta solu-  
ción que fue obtenida por Cruse y Rizzo(1968)  
en base a los Trabajos de Doyle (1966), tiene  
la forma:

$$U_{ji} = \frac{1}{\alpha \pi \rho C_s^2} \{ \psi \delta_{ji} - \chi r_{,i} r_{,j} \} \quad (4)$$

$$T_{ji} = \frac{1}{\alpha \pi} \left\{ \left( \frac{d\psi}{dr} - \frac{1}{r} \chi \right) (\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial \eta} + r_{,i} \eta_j) - \right. \\ \left. - \frac{2}{r} \chi (\eta_i r_{,j} - 2r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial \eta}) - 2 \frac{d\chi}{dr} r_{,i} r_{,j} \right. \\ \left. \frac{\partial r}{\partial \eta} + \left( \frac{C_p^2}{C_s^2} - 2 \right) \left( \frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{\alpha}{2r} \chi \right) r_{,j} \eta_i \right\} \quad (5)$$

donde:α es un número entero que vale 2 si -  
el problema es bidimensional y 4 si  
es tridimensional  
γ es la distancia al punto de aplica-  
ción de la carga  
η es la normal exterior al contorno.  
χ y ψ son dos funciones que para tres  
dimensiones tienen los valores si -  
guientes;

$$\chi = \left( -\frac{3C_s^2}{\omega^2 r^2} + \frac{3C_s}{i\omega r} + 1 \right) \frac{e^{-i\omega r/C_s}}{r} - \left( \frac{C_s^2}{C_p^2} \right) \left( -\frac{3C_p^2}{\omega^2 r^2} + \right. \\ \left. + \frac{3C_p}{i\omega r} + 1 \right) \frac{e^{-i\omega r/C_p}}{r} \quad (6)$$

$$\psi = \left( 1 - \frac{C_s^2}{\omega^2 r^2} + \frac{C_s}{i\omega r} \right) \frac{e^{-i\omega r/C_s}}{r} - \left( \frac{C_s^2}{C_p^2} \right) \left( -\frac{C_p^2}{\omega^2 r^2} + \right. \\ \left. + \frac{C_p}{i\omega r} \right) \frac{e^{-i\omega r/C_p}}{r} \quad (7)$$

mientras que para dos dimensiones valen:

$$\chi = k_2 \left( \frac{i\omega r}{C_s} \right) - \frac{C_s^2}{C_p^2} k_2 \left( \frac{i\omega r}{C_p} \right) \quad (8)$$

$$= k_0 \left( \frac{i\omega r}{C_s} \right) + \frac{C_s}{i\omega r} \left[ k_1 \left( \frac{i\omega r}{C_s} \right) - \frac{C_s}{C_p} k_1 \left( \frac{i\omega r}{C_p} \right) \right] \quad (9)$$

siendo k<sub>0</sub>, k<sub>1</sub> y k<sub>2</sub> las funciones de Bessel  
modificadas.

La ecuación(3) puede establecerse para cada  
punto del contorno y obtener así un sistema  
de ecuaciones integrales.Para poder resol-  
ver este, se discretiza el contorno en ele-  
mentos en los que se supone un valor de t<sub>i</sub>  
y u<sub>i</sub> constante o con variación lineal cua-  
drática etc.De ese modo cada ecuación(3) se  
se transforma en:

$$\underline{C} \underline{k} \underline{U} \underline{k} + \sum_{n=1}^N \left[ \int_{S_n} \underline{N} \underline{T} ds \right] \underline{U}_n = \sum_{n=1}^N \left[ \int_{S_n} \underline{N} \right. \\ \left. \underline{U} ds \right] \underline{t}_n \quad (10)$$

siendo N la matriz de funciones de forma.

El conjunto de las ecuaciones para todos -  
los modos en el contorno sera:

$$\underline{G} \underline{t} = \underline{H} \underline{u} \quad (11)$$

En general habra datos e incognitas en  $\underline{t}$  y  $\underline{u}$ . Con una reordenacion de (11) se obtiene:

$$\underline{k} \underline{x} = \underline{F} \quad (12)$$

donde el vector  $\underline{x}$  contiene las incognitas - mientras que  $\underline{F}$  vector conocido y  $\underline{K}$  la matriz de coeficientes.

La resoluci3n (12) permite obtener los valores de  $\underline{u}$  y  $\underline{t}$  que no se conocían, y por medio de (2) y sus derivadas se pueden obtener el movimiento y las tensiones en cualquier punto interno.

RIGIDECES DE CIMENTACIONES

El metodo de los elementos de control puede ser aplicado, tal como ha sido formulado anteriormente, a la obtenci3n de rigideces dinámicas de cimentaciones sobre un suelo que se supone elastico e isotropo. El metodo en comparaci3n con elementos finitos, presenta para este tipo de problemas la ventaja de reducir en un orden la dimensi3n del problema, siendo preciso discretizar unicamente la interfase entre suelo y estructura y la superficie libre del mismo. Así pues, frente al metodo de Wong ofrece la posibilidad de tratar cimentaciones enterradas y produce unas integrales cuyo valor es mucho más facilmente obtenido numericamente. En su contra habria que decir que requiere la discretizaci3n de la superficie libre del suelo aunque en el caso de cimentaciones superficiales, si se hace la hipotesis usual de "smooth footing" tan solo es preciso discretizar la interfase entre suelo y estructura. Esto último es facilmente demostrable analizando la naturaleza de los terminos  $H_{ij}$  y  $U_{ij}$ .

En problemas de cimentaciones enterradas, aunque es preciso discretizar la superficie libre del suelo, con solo considerar la zona proxima al cimientto se obtienen buenos resultados. En la figura 1 se puede apreciar la rapida convergencia al incrementar la cantidad de superficie libre discretizada.

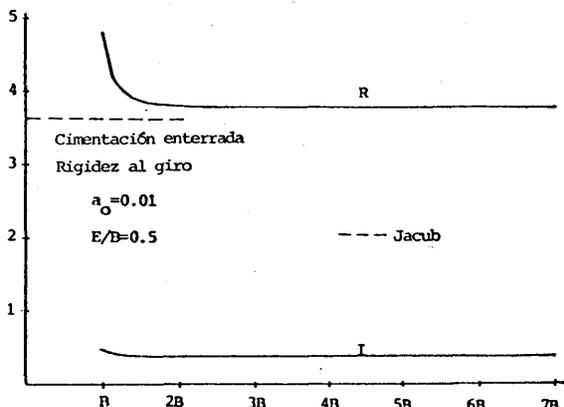


fig. 1 Importancia de la cantidad de suelo libre discretizado

Utilizando el metodo con elementos constantes en el caso tridimensional, uno de los autores (Dominguez 1977) obtuvo los que creemos son los primeros resultados de variaci3n con frecuencia de las rigideces dinámicas para cimentaciones rectangulares enterradas.

En los problemas de rigideces de cimentaciones aparecen tensiones de valor infinito en las esquinas, los elementos constantes dan un valor medio de la tensi3n y es por ello por lo que para obtener una mejor representaci3n de la distribuci3n de las tensiones en las proximidades de las esquinas, se ha implementado un elemento singular para dos dimensiones. El caso tridimensional conceptualmente no presenta diferencias de consideraci3n.

ELEMENTOS LOGARITMICOS

Estos elementos incluyen, con la utilizaci3n de una funci3n de forma de tipo logaritmico, la existencia de una singularidad en tensiones en uno de sus extremos.

En la figura 2 se representa un elemento con un nodo en el centro y una coordenada natural  $\xi$ .

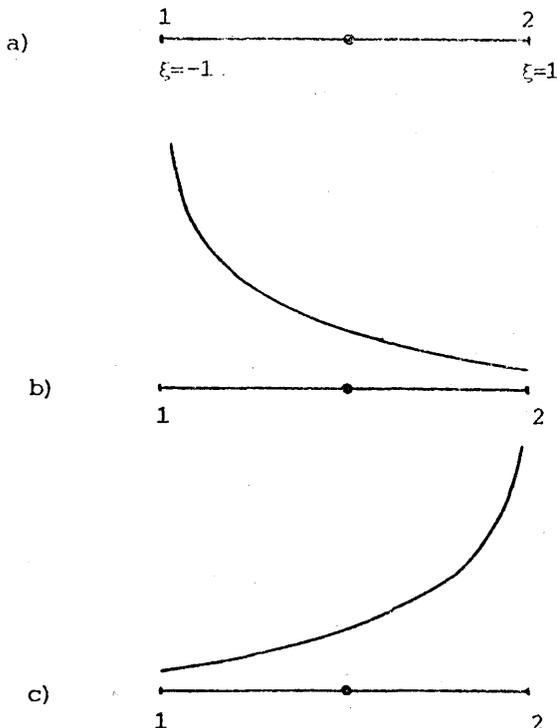


Figura 2. Elemento logaritmico

La tensi3n, ya sea normal o tangencial, sobre el elemento se representa de la forma:

$$t_i = [1 + \ln(\frac{1}{1+\xi})] t'_i \quad (13)$$

cuando la singularidad se encuentra en el extremo 1 (figura 2.b) y de la forma:

$$t_i = [1 + \ln(\frac{1}{1-\xi})] t'_i \quad (14)$$

cuando la singularidad esta en el extremo 2 (figura 2.C), siendo  $t'_i$  constante a lo largo del elemento. En forma general:

$$t_i = N t'_i \quad (15)$$

La integral a lo largo de estos elementos sera:

$$\int_{S_n} U_{ij} t_i = \int_{S_n} [U_{ij} N] t'_i \quad (16)$$

con lo que el programa de calculo no trabaja en estos elementos con  $t_i$ , sino con el "factor de concentración"  $t'_i$ .

El problema de implementación es ahora la integración a lo largo de los elementos, de terminos como el de la ecuación 16 que implican una singularidad en un extremo en el caso general y dos una en un extremo y otra en el centro si se esta integrando en el elemento donde se ha aplicado la carga. Las integraciones se hacen por una combinación de integrales analíticas y numéricas cuando la carga esta aplicada en el propio elemento donde se integra y de forma numérica cuando se integra sobre un elemento distinto al que se ha aplicado la carga. Las integraciones numéricas llevan a cabo utilizando la forma propuesta por Stroud y Secrest (1966) para funciones subintegrando que incluyen un logaritmo con una singularidad. Es precisamente el poder utilizar estas formulas lo que llevo a utilizar como función de forma singular un logaritmo en vez de  $(1+\xi)^{-1/2}$  y  $(1-\xi)^{-1/2}$  que se ajustan más a la evolución real de las tensiones en los extremos de la cimentación.

#### RESULTADOS

En trabajos previos, se ha evaluado la influencia de la cantidad de superficie libre del suelo discretizada sobre la rigidez obtenida; siendo esta muy pequeña para cimentaciones superficiales. Consecuentemente solo se ha considerado la discretización de la interfase suelo-estructura para la obtención de la rigidez y distribución de tensiones bajo cimentaciones superficiales y alargados que pueden ser estudiados con un modelo bidimensional.

Utilizando dos elementos logarítmicos en los extremos, se ha obtenido la distribución de tensiones bajo una cimentación superficial.

En la figura 3 se representa la distribución de la parte real de la tensión bajo el cimiento cuando se le da a este un movimiento vertical con frecuencia 0.5 rad/seg.

Puesto que el modelo de elementos con un solo nodo en el centro es incompatible, aparecen escalones entre los distintos elementos constantes así como entre estos y los singulares de los extremos. En esta figura así como en la 4 donde se representa la distribución de la parte real de las tensiones cuando la frecuencia es 2. rad/seg, se pue-

de apreciar como los elementos singulares se ha obtenido una representación de esta más próxima a la realidad.

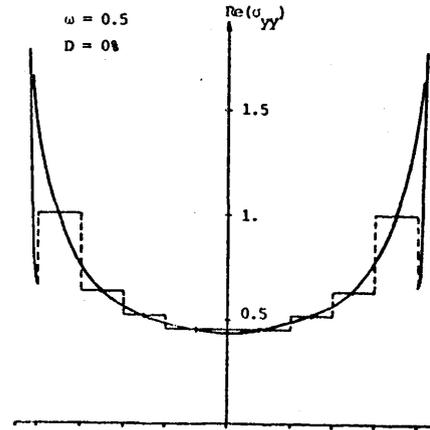


Fig.3. Tensiones correspondientes a un movimiento vertical.

Los resultados previos han sido obtenidos considerando el suelo como un medio isotropo y elastico.

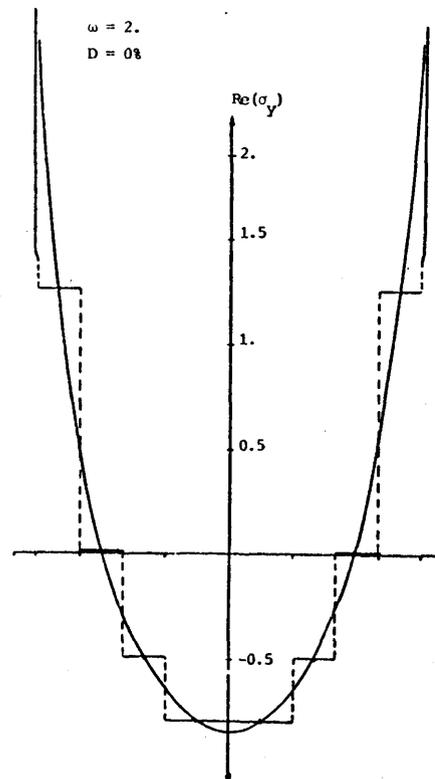


Fig.4. Tensiones correspondientes a un movimiento vertical.

Debido a que todo el cálculo implica el trabajo con números complejos, pues siempre existe un amortiguamiento por radiación, la presencia de un amortiguamiento histerético del material se considera con solo utilizar un módulo de elasticidad transversal complejo.

La utilización de los elementos singulares, no solo permite una mejor representación de las tensiones, sino que consecuentemente hace posible obtener unos valores de la rigidez muy próximos a los reales como un número muy pequeño de elementos. En la Tabla 1 se presentan los valores obtenidos para la rigidez de giro considerando 8 y 4 elementos; dos de ellos singulares o todos constantes. Se puede apreciar una mucho menor variación de la rigidez al reducir a 4 el número de elementos en el caso en que dos de estos sean singulares.

Tabla 1 . Rigidez Vertical

8 elementos	4 elementos	
2.189+0.453i	1.965+0.387i	- Todos los elementos constantes
2.27+0.478i	2.249+0.472i	- Dos elementos singulares

$\omega=0.5$  rad/seg  $G=1+0.1i$

En la figura 5 se representa la distribución de las tensiones bajo la cimentación cuando se da a esta un giro unidad.

#### CONCLUSIONES

Se ha implementado un tipo de elementos singulares que mejora sensiblemente la representación de las tensiones bajo el cimiento.

Se ha comprobado que la representación es buena aún cuando los elementos singulares sean grandes; estando limitado su tamaño como en el caso constante por la representación del movimiento en el caso de que este sea de giro y por la longitud de onda.

#### REFERENCIAS

- Cruse, T.A. y Rizzo, F.J., "A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem. I", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 22, 1968.
- Dominguez, J. Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations". Report R 78-20 .Department of Civil Engineering.MIT.1978
- Jawson, M.Ponter,A."An Integral Equation Solution of the Torsion Problem". Proc. Roy.Soc. Ser.A, 273-1963
- Lamb,H., "On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid,"Philosophical Trans,Royal Society of London, Series A,203,1904
- Stroud,A. y Secret."Gaussian Quadrature Formulas" Prentice Hall.N.Y.-1966
- Veletsos,A.S. y Wei, Y.T., "Lateral and Rocking Vibration of Footing,"Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 97,1971.
- Wass,G.:"Linear two-dimensional of soil dynamics problems in semi-infinite layer," Tesis,U. of cal., Berkeley,1972
- Wong,H.L., "Dynamic Soil-structure Interaction,"EERL-75-01, Tesis, California -

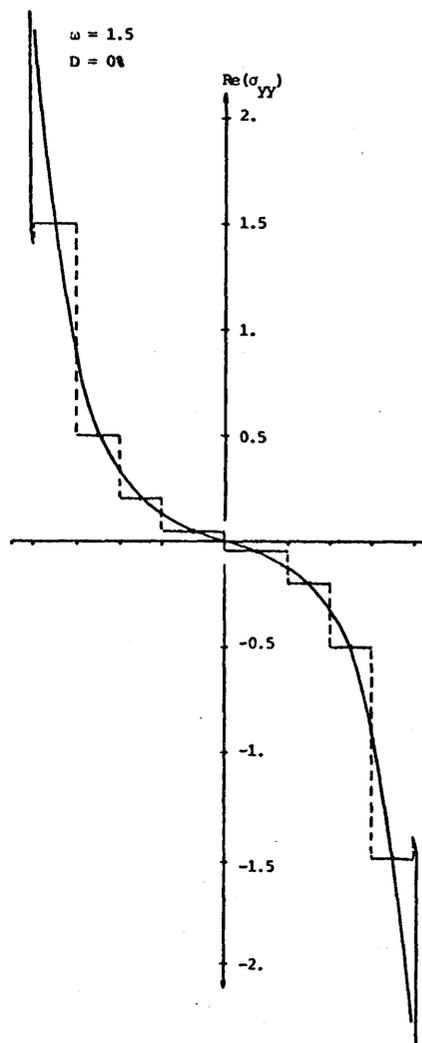


Figura 5.Tensiones Correspondientes a un movimiento de giro.

--- Institute of Technology, 1975

#### SUMMARY

In the present paper, the application of the Boundary Integral Equation Method to the computation of dynamic foundation stiffnesses is considered. Results are obtained using a special type of element, including a singularity, that has been implemented. Some stress distributions under the foundations are shown.