

EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO EN PROBLEMAS DINAMICOS

E. Alarcón*, J. Domínguez**

* E.T.S. Ingenieros Industriales de Madrid.

** E.T.S. Ingenieros Industriales de Sevilla.

1. Introducción

En esta nota se presentan algunas posibilidades de aplicación de las técnicas de contorno a los problemas dinámicos. El desarrollo hace especial hincapié en la situación estacionaria puesto que es el -- área en la que tenemos más experiencia. Ello no significa ninguna limitación del método ya que el uso de transformaciones integrales es una clara posibilidad de obtener soluciones transitorias (CRUSE, 1975). Uno de los ejemplos presentados se refiere al estado estacionario de una laja sometida a tracción cíclica, con y sin fisuras. El siguiente está relacionado con el cálculo de las impedancias del suelo, necesarias para los estudios de interacción terreno-estructura y, finalmente, se presenta el efecto de ondas incidentes sobre cimientos rígidos.

2. Ecuaciones del problema

Como es bien sabido las ecuaciones de equilibrio en elasticidad lineal son:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i \quad \dots (1)$$

donde

σ_{ij} es el tensor de tensiones.

X_i es el vector de fuerzas por unidad de volumen.

u_i el vector de desplazamientos.

ρ la densidad del medio.

y las derivadas espaciales son simbolizadas por comas

mientras las temporales se representan con puntos.

La ley de comportamiento viene representada por las ecuaciones de LAME

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij} \quad \dots (2)$$

donde

λ y G son las constantes elásticas.

$$\theta = \text{div } \underline{u}$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \dots (3)$$

El conjunto de las ecuaciones anteriores se resume en las llamadas ecuaciones de NAVIER, que utilizan como variables los movimientos \underline{u} :

$$(\lambda+G) \text{ grad. div } \underline{u} + G \text{ lap } \underline{u} + \underline{X} = \rho \ddot{\underline{u}} \quad \dots (4)$$

La integración de (4) conduce, tras la aplicación de las condiciones de contorno del problema, a la solución deseada.

3. Respuesta temporal

Es posible conseguir una fórmula de representación de la solución \underline{u} similar a la que se utiliza en teoría del potencial:

Para ello se pueden seguir dos caminos distintos:

- a) Uso de la respuesta a un impulso $P(t)$ actuando en dirección \underline{a} en el punto $\underline{\xi}$.

$$\underline{f}(\underline{x}, t) = \underline{a} P(t) \delta |\underline{x} - \underline{\xi}| \quad \dots (5)$$

- b) Uso de la respuesta a la excitación armónica $\underline{P}(\omega)$.

$$\underline{f}(\underline{x}, t) = \underline{P}(\omega) e^{i\omega t} \quad \dots (6)$$

En ambos casos la solución se refiere al espacio completo debiendo, a posteriori, ajustarse al contorno particular y a las condiciones en él establecidas. Para ello es clave la aplicación de la identidad dinámica de reciprocidad, conocida en la literatura (ACHENBACH 1973) con los nombres de BETTI y RAYLEIGH y que establece:

$$\int_{\partial\Omega} \tilde{T}^{\vee} * \tilde{u}' + \rho \int_{\Omega} |\tilde{f}' * \tilde{u}' + \dot{\tilde{u}}' \tilde{u}' + \tilde{u}' \dot{\tilde{v}}'| =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \tilde{T}'^{\vee} * \tilde{u} + \rho \int_{\Omega} |\tilde{f}' * \tilde{u} + \dot{\tilde{u}} \tilde{u}' + \tilde{u} \dot{\tilde{v}}'| \quad \dots (7)$$

Aquí \tilde{T}^{\vee} , \tilde{f} y \tilde{u} son, respectivamente, el vector "tracción" en el contorno, el vector de fuerzas por unidad de volumen y el vector de movimientos de un estado dinámico tal que las condiciones iniciales son:

$$\tilde{u}(\underline{x}, 0) = \dot{\tilde{u}}$$

$$\dot{\tilde{u}}(\underline{x}, 0^+) = \dot{\tilde{v}} \quad \dots (8)$$

mientras que las primas indican un estado tensional auxiliar.

Los asteriscos representan productos de convolución; así, por ejemplo, dadas dos funciones $g(\underline{x}, t)$ y $h(\underline{x}, t)$:

$$g * h = \int_0^t g(\underline{x}, t-s) \cdot h(\underline{x}, s) \quad \dots (9)$$

3.1. Respuesta al impulso

La respuesta de un medio infinito a un impulso $P(t)$ localizado en el origen del sistema de coordenadas:

$$\tilde{f} = \tilde{a} P(t) \delta(\underline{x}) \quad \dots (10)$$

puede obtenerse a través de una representación de HELMHOLTZ. En efecto, si

$$\tilde{f} = \text{grad}F + \text{rot} \tilde{F}^* \quad \dots (11)$$

la ecuación (4) se reduce al par

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{C_p^2} \ddot{\phi} = -\frac{1}{C_p^2} F$$

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{C_s^2} \ddot{\psi} = -\frac{1}{C_s^2} \tilde{F}^* \quad \dots (12)$$

En nuestro caso puede demostrarse que:

$$F = -P(t) \text{div} \frac{\tilde{a}}{4\pi r}$$

$$\underline{F}^* = P(t) \text{ rot } \frac{\underline{a}}{4\pi r} \quad \dots(13)$$

y, tras la sustitución

$$\begin{aligned} \underline{\varphi} &= \text{div } \underline{\phi} & \underline{\phi} &= \phi \underline{a} \\ \underline{\psi} &= - \text{rot } \underline{\Psi} & \underline{\Psi} &= \Psi \underline{a} \end{aligned} \quad \dots(14)$$

las ecuaciones (12) se convierten en

$$\begin{aligned} \nabla^2 \underline{\phi} - \frac{1}{C_p^2} \ddot{\underline{\phi}} &= \frac{P(t)}{C_p^2} \frac{1}{4\pi r} \\ \nabla^2 \underline{\Psi} - \frac{1}{C_s^2} \ddot{\underline{\Psi}} &= \frac{P(t)}{C_s^2} \frac{1}{4\pi r} \end{aligned} \quad \dots(15)$$

donde C_p y C_s son las celeridades de las ondas P y S, respectivamente, del medio.

Las ecuaciones (15) admiten la solución:

$$\begin{aligned} 4\pi \underline{\phi}(\underline{x}, t) &= \frac{1}{r} \int_0^{t-r/c_p} c P[t - (\frac{r}{c_p} + c)] dc - \frac{1}{r} \int_0^t c P(t-c) dc \\ 4\pi \underline{\Psi}(\underline{x}, t) &= \frac{1}{r} \int_0^{t-r/c_s} c P[t - (\frac{r}{c_s} + c)] dc - \frac{1}{r} \int_0^t c P(t-c) dc \end{aligned} \quad \dots(16)$$

Usando una descomposición semejante del vector de movimientos:

$$\underline{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \underline{\psi} \quad \dots(17)$$

es evidente que:

$$\underline{u} = \nabla^2 \underline{\phi} - \text{rot rot } \underline{\Psi} = \nabla^2 (\underline{\phi} - \underline{\Psi}) + \nabla^2 \underline{\Psi} \quad \dots(18)$$

ACHENBACH usa la notación:

$$4\pi u_i(\underline{x}, t) = D_i^k | \underline{O}, P(t) | \quad \dots(19)$$

para expresar (18) mediante (16) cuando la carga se dirige según el eje x_k ($\underline{a} = \underline{e}_k$). Tras las correspondientes sustituciones:

$$\begin{aligned}
 D_{,i}^k [0, P(t)] = & \left(\frac{3x_i x_k}{r^3} - \frac{\delta_{ik}}{r} \right) \int_{1/c_p}^{1/c_s} c P(t-r\alpha) d\alpha + \\
 & + \frac{x_i x_k}{r^3} \left[\frac{1}{c_p^2} \dot{P}(t-\frac{r}{c_p}) - \frac{1}{c_s^2} \dot{P}(t-\frac{r}{c_s}) \right] + \\
 & + \frac{\delta_{ik}}{c_s^2} \frac{1}{r} \ddot{P}(t-\frac{r}{c_s}) \quad \dots (20)
 \end{aligned}$$

Las tensiones se obtienen inmediatamente a través de la ley de HOOKE, pudiendo representarse como:

$$4\pi \sigma_{ij}(\underline{x}, t) = S_{ij}^k |0, P(t)| \quad \dots (21)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 \bar{\rho}^{-1} S_{ij}^k [0, P(t)] = & -6c_s^2 \left[\frac{5x_i x_j x_k}{r^5} - \frac{\delta_{ij} x_k + \delta_{ik} x_j + \delta_{jk} x_i}{r^3} \right] \cdot \\
 & \int_{1/c_p}^{1/c_s} c P(t-r\alpha) d\alpha + \\
 & + 2 \left[\frac{6x_i x_j x_k}{r^5} - \frac{\delta_{ij} x_k + \delta_{ik} x_j + \delta_{jk} x_i}{r^3} \right] \left[\dot{P}(t-\frac{r}{c_s}) - \left(\frac{c_p}{c_s}\right)^2 \dot{P}(t-\frac{r}{c_p}) \right] + \\
 & + 2 \frac{x_i x_j x_k}{r^4 c_s} \left[\ddot{P}(t-\frac{r}{c_s}) - \left(\frac{c_s}{c_p}\right)^3 \ddot{P}(t-\frac{r}{c_p}) \right] - \\
 & - \frac{x_k \delta_{ij}}{r^3} \left[1 - 2 \left(\frac{c_s}{c_p}\right)^2 \right] \left[\dot{P}(t-\frac{r}{c_p}) + \frac{r}{c_p} \ddot{P}(t-\frac{r}{c_p}) \right] - \\
 & - \frac{\delta_{ik} x_j + \delta_{jk} x_i}{r^3} \left[\dot{P}(t-\frac{r}{c_s}) + \frac{r}{c_s} \ddot{P}(t-\frac{r}{c_s}) \right] \\
 & \dots (22)
 \end{aligned}$$

Si el punto de aplicación del impulso se encuentra en ξ , obviamente:

$$\begin{aligned}
 4\pi u_i &= D_i^k | \xi, P(t) | \\
 4\pi \sigma_{ij} &= S_{ij}^k | \xi, P(t) | \\
 r &= | \underline{x} - \underline{\xi} | \\
 \underline{f} &= \underline{a} P(t) \delta(\underline{x} - \underline{\xi}) \quad \dots (23)
 \end{aligned}$$

La sustitución de estas expresiones en la relación de reciprocidad (7) conduce a la fórmula de -- WHEELER & STERNBERG:

$$\begin{aligned}
 4\pi \rho u_k(\underline{x}, t) &= \sum_{i=1}^3 \int_{\partial\Omega} \left\{ D_i^k \left[\underline{\xi}, \frac{\nu}{T_i}(\underline{x}, t) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \nu S_{ij}^k \left[\underline{\xi}, u_i(\underline{x}, t) \right] \right\} + \\
 &\quad + \rho \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \left\{ D_i^k \left[\underline{\xi}, f_i(\underline{x}, t) \right] \right\} \quad \dots (24)
 \end{aligned}$$

que es válida para una situación inicial de reposo. Teniendo en cuenta las condiciones iniciales y tras algunas simples transformaciones (DOMINGUEZ y ALARCON 19) se obtiene, tras hacer tender el punto al contorno,

$$4\pi \rho c \underline{u}(\underline{r}, t) = \int_{t_0=0}^{\infty} \int_{\partial\Omega} \left| \underline{DT} - \underline{uSv} \right| ds_0 dt_0 + \underline{R}(\underline{r}, t) \quad \dots (25)$$

$\underline{r} \in \partial\Omega$

donde c es una matriz que depende de las características locales de $\partial\Omega$ en \underline{r} , y en \underline{R} se encuentran integrales que dependen de las condiciones iniciales.

El paso al límite está bien documentado en COLE et al. (1978).

3.2. Respuesta armónica

Cuando la transformación de FOURIER se aplica a las ecuaciones de campo (4) se obtiene:

$$(C_p^2 - C_s^2) U_{i,ij}^* + C^2 U_{j,ii}^* + X^* j + \omega^2 u_j^* = 0 \quad \dots (26)$$

La definición del vector tracción es igualmente

$$T_i^* = \sigma_{ij}^* v_j \quad \dots (27)$$

y la relación de reciprocidad se reduce a una forma completamente análoga a la estática, ya que los productos de convolución en el tiempo se transforman en productos normales en la frecuencia. De este modo, con condiciones iniciales nulas:

$$\int_{\partial\Omega} \tilde{T}^* \cdot \tilde{u}'^* + \rho \int_{\partial\Omega} f^* \cdot \tilde{u}'^* = \int_{\partial\Omega} T'^* \cdot \tilde{u}^* + \rho \int_{\partial\Omega} f'^* \cdot \tilde{u}^* \quad \dots (28)$$

siendo posible mediante el uso de la solución especial (') establecer la identidad de SOMIGLIANA. En particular se utiliza el método BIEM clásico, con la solución tipo KELVIN, tal como fue presentado por -- DOYLE o CRUSE.

Escribiendo las componentes a lo largo de los vectores unitarios e_i es posible definir la respuesta a la carga unidad. $\sim i$

$$U'_{ij} = \frac{1}{\alpha \pi \rho c_s^2} [\psi \delta_{ij} - \chi r_i r_j]$$

$$\begin{aligned} T'_{ij} = \frac{1}{\alpha \pi} & \left[\left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{1}{r} \chi \right) (\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial \nu} + r_j \nu_i) - \right. \\ & - \frac{2}{r} \chi (\nu_j r_i - 2 r_i r_j \frac{\partial r}{\partial \nu}) - 2 \frac{\partial \chi}{\partial r} r_i r_j \frac{\partial r}{\partial \nu} \\ & \left. + \left[\left(\frac{c_p}{c_s} \right)^2 - 2 \right] \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{\alpha}{2r} \chi \right) r_i \nu_j \right] \quad \dots (29) \end{aligned}$$

donde ψ y χ son:

$$\psi = k_0 \left(\frac{i\omega r}{c_s} \right) + \frac{c_s}{kr} \left[k_1 \left(\frac{i\omega r}{c_s} \right) - \frac{c_s}{c_p} k_1 \left(\frac{i\omega r}{c_p} \right) \right]$$

$$\chi = k_2 \left(\frac{i\omega r}{c_s} \right) - \left(\frac{c_s}{c_p} \right)^2 k_2 \left(\frac{i\omega r}{c_1} \right)$$

$\alpha = 2$ para problemas bidimensionales.

$\alpha = 4$ para problemas tridimensionales.

Recientemente, y con objeto de calcular las frecuencias propias NARDINI (1982) ha planteado el teorema de reciprocidad para el problema:

$$\sigma_{ij,j} + \omega^2 \rho u_i = 0 \quad \dots(31)$$

utilizando la solución fundamental al problema estático lo que implica la aparición de una integral de volumen que, a su vez, se calcula de forma aproximada

4. Discretización

El procedimiento de discretización en el caso estacionario es semejante al de los problemas estáticos, mientras que la solución transitoria se obtiene mediante integración paso a paso.

4.1. Respuesta transitoria

La base del método es la ecuación 25. La discretización se puede realizar de diversas formas, siendo la más sencilla la transformación de las integrales en sumas mediante la adopción de un intervalo de tiempo y la hipótesis de evolución constante de las variables básicas en escámas selectas del contorno.

COLE et al. por ejemplo toman J nodos en el contorno y un conjunto $\{t_n = n\Delta t, n=1, \dots, N\}$ de intervalos igualmente espaciados, a la vez que las hipótesis:

$$\begin{aligned} u(\tilde{r}, t) &= \sum_j \sum_n U_j^n(\tilde{r}, t) u_j^n \\ v \\ T(\tilde{r}, t) &= \sum_j \sum_n T_j^n(\tilde{r}, t) T_j^n \quad \dots(32) \end{aligned}$$

con las hipótesis habituales

$$\begin{aligned} u(\tilde{r}_i, t_m) &= u_i^m \\ v \\ T(\tilde{r}_i, t_m) &= T_i^m \quad \dots(33) \end{aligned}$$

que, al sustituir en 25 conduce al sistema:

$$4\pi\rho c u_j^n = \sum_{m=1}^N \sum_{j=1}^J \left\{ G_{ji}^{mm} T_i^m + K_{ji}^{mm} u_i^m \right\} + F(r_j, t_n)$$

$$j = 1, \dots, J$$

$$n = 1, \dots, N \quad \dots (34)$$

donde

$$G_{ji}^{mm} = \int_0^{t_0} \int_{\partial\Omega} D(r_j, t_n, \xi, t_0) \cdot \dot{t}_i(\xi, t_0) ds dt_0$$

$$K_{ji}^{mm} = \int_0^{t_0} \int_{\partial\Omega} m \cdot \nabla_0 D(r_j, t_n, \xi, t_0) U_i^m(\xi, t_0) ds dt_0 \quad \dots (35)$$

Debido a las propiedades de simetría solo es preciso calcular NJ^2 núcleos.

4.2. Solución estacionaria

En ausencia de fuerzas de volumen, la identidad de SOMIGLIANA correspondiente a (28), (29) y (30) es:

$$c_{p\sim p} u = \int_{\partial\Omega} \dot{U} t ds - \int_{\partial\Omega} T \cdot u ds \quad \dots (36)$$

Sustituyendo:

$$u_i = N^j u_i^j$$

$$t_i = N^j t_i^j$$

$$ds = |J| d\xi \quad \dots (37)$$

con los significados habituales,

$$c_{R\sim R} u_k + \sum_{m=1}^N \left[\int_{S_n} \dot{T} N^n / |J| d\xi \right] u_n^m =$$

elemento

$$= \sum_{m=1}^N \left[\int_{S_n} U \cdot N^n / |J| d\xi \right] t_n^m$$

elementos

que puede reducirse a un sistema:

$$\underline{A} \underline{u} = \underline{B} \underline{k} \quad \dots(39)$$

donde al aplicar las condiciones de contorno en tensiones y movimientos es posible obtener la solución buscada.

Los ejemplos que se muestran corresponden a casos en que se ha supuesto un valor constante dentro de cada elemento.

En el caso plano los términos T_{ij} y U_{ij} dependen de las funciones modificadas de Bessel con argumento complejo, $K_0(Z)$, $K_1(Z)$ y $K_2(Z)$, y de sus derivadas respecto a Z .

La variable Z es $(i\omega r/C_s)$ ó $(i\omega r/C_p)$.

Los valores de $K_0(Z)$ y $K_1(Z)$ en la integración se han calculado utilizando sus desarrollos en serie.

En el caso tridimensional se ha utilizado preferentemente el elemento rectangular constante.

En algunos casos bidimensionales se ha desarrollado un "elemento singular" que es especialmente -- útil en la zona de transición de condiciones en movimientos a condiciones en tensiones como sucede en el caso de cimientos rígidos.

Se supone que las tensiones varían en la forma:

$$t_i = \left| 1 + \ln\left(\frac{1}{1+\xi}\right) \right| t_i' \quad \dots(40)$$

y ello implica el cálculo de integrales del tipo

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{x}\right) U_{ij} dx \quad \dots(41)$$

que se han obtenido mediante fórmulas desarrolladas por STROUD & SECREST.

En otras ocasiones, cuando aparece una superficie libre, se ha desarrollado una solución compuesta por dos cargas simétricas (Domínguez, et al. 1982) - que reducen la discretización de la citada superficie.

5. Ejemplos Bidimensionales

El primer ejemplo se refiere al cálculo de la rigidez dinámica de una zapata indeformable, esto es, las cargas necesarias para producir un movimiento --

armónico unidad de la zapata sin masa. El semiespacio se considera lineal y elástico con la posibilidad de introducir amortiguamiento tipo VOIGT mediante un módulo G complejo. (Fig. 1)

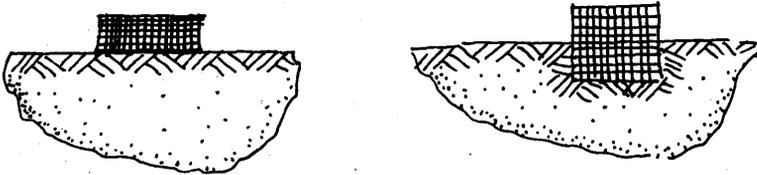


Fig. 1

Si se utiliza la solución fundamental correspondiente al espacio completo el contorno a discretizar debe incluir también la superficie libre, obteniéndose que, en general, basta truncar la discretización a una distancia relativamente corta para conseguir buenos resultados. (Véase Fig. 2)

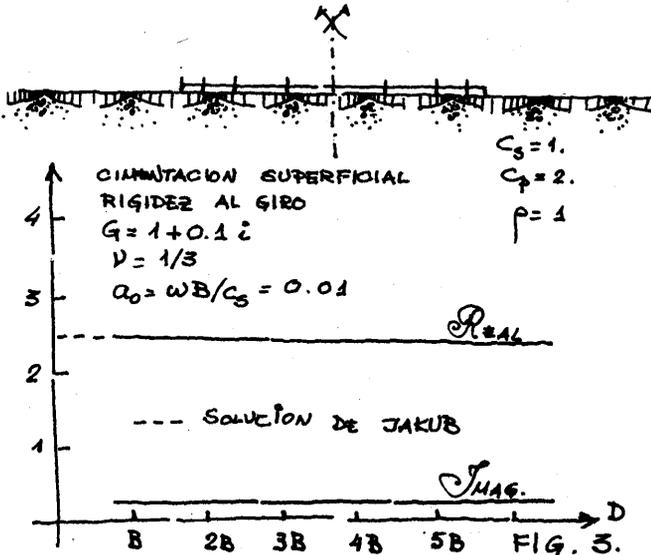
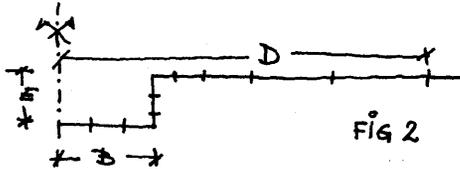
En el caso en que la cimentación descansa directamente en la superficie se puede obtener una solución muy buena sin ningún elemento fuera de la interfase. Puede mostrarse que en este caso todos los términos que representa la influencia de los elementos exteriores son 0, excepto los que son responsables de la influencia de la carga vertical en el producto A_y horizontal y viceversa. Sin embargo esta influencia es pequeña y usualmente se desprecia en los problemas de interacción terreno-estructura cuando además se suponen condiciones de tipo sin rozamiento. En la Fig. 3 se ha dibujado el valor de la rigidez al giro para una superficie y para un cimiento superficial en términos de la distancia discretizada y para una frecuencia de vibración muy baja. la interfase sobre el cimiento se discretizó mediante ocho elementos y como era de esperar la influencia es despreciable. Lo mismo puede observarse para frecuencias altas. En la figura el resultado es comparado con el presentado por JAKUB.

En la figura siguiente se muestran los mismos resultados para una cimentación empotrada. Primero se representa la rigidez al giro pero con un empotramiento $E/B=0.5$. En este caso la cantidad de discretización exterior tiene una importante influencia. El campo discretizado llega a una distancia aproximadamente doble del tamaño de la zapata. En las figuras siguientes las mismas curvas se dibujan para la rigidez horizontal y los valores de la frecuencia dimensional A_0 . La figura 5 muestra la amplitud del

movimiento en superficie libre cuando un movimiento armónico unidad de frecuencia $\omega_0 = 0.5$ se aplica a la superficie o a una cimentación enterrada.

Como se dijo en el apartado previo se han preparado elementos singulares logarítmicos para casos como el presente donde aparecen singularidades de tensión en los extremos del cimientto. Dos elementos singulares en estos extremos permitirán no solo una mejor representación en la distribución de tensiones bajo la zapata, sino también buenos resultados para las componentes de rigidez con respecto a un número pequeño de elementos de contorno. La tabla 1 presenta algunos de los valores obtenidos usando elementos singulares comparados al caso donde elementos constantes normales sirven para modelar la interfase.

Puede verse que con 8 elementos ambos resultados son muy cercanos, pero cuando el número se reduce a 4 el valor de la rigidez vertical es mucho mejor cuando se usan elementos singulares. En la Fig. 6 se incluyen la distribución de tensiones bajo el cimientto para el caso de movimiento armónico unidad. La segunda aplicación del método de los elementos de contorno dinámico corresponden a un cuerpo finito. Se -



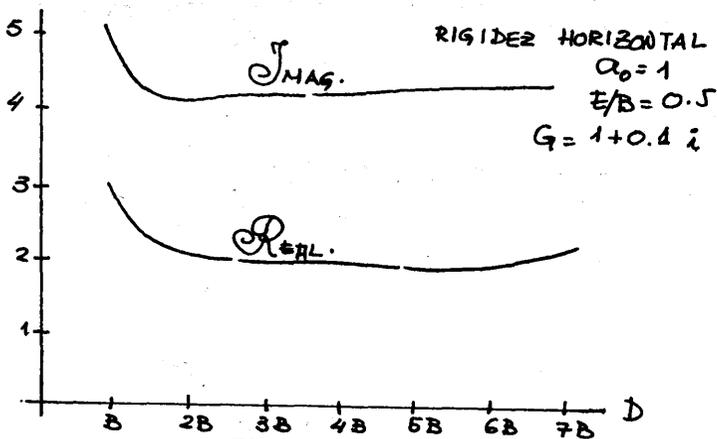
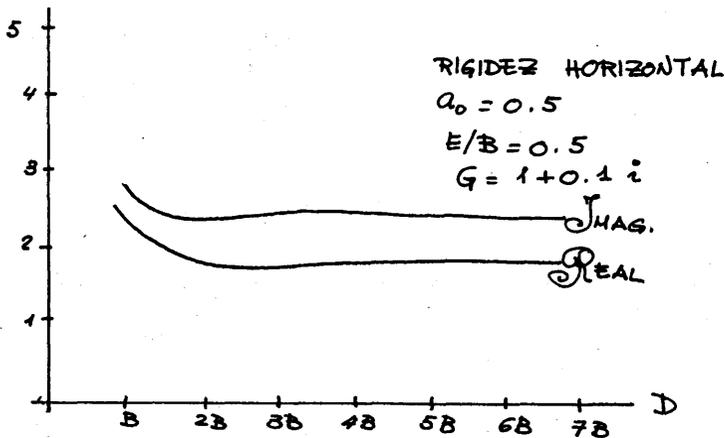
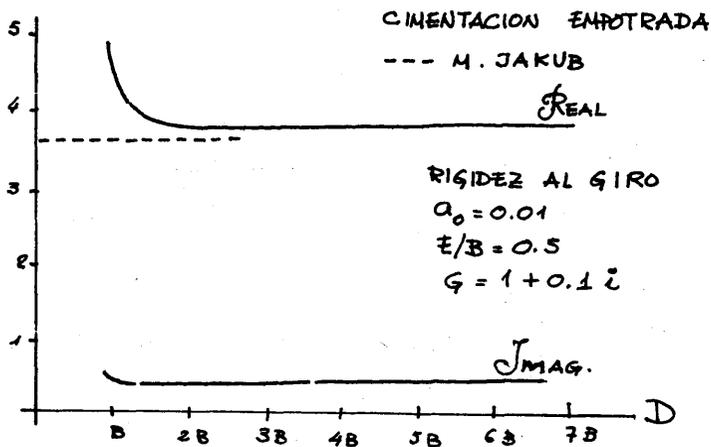


FIGURA 4.

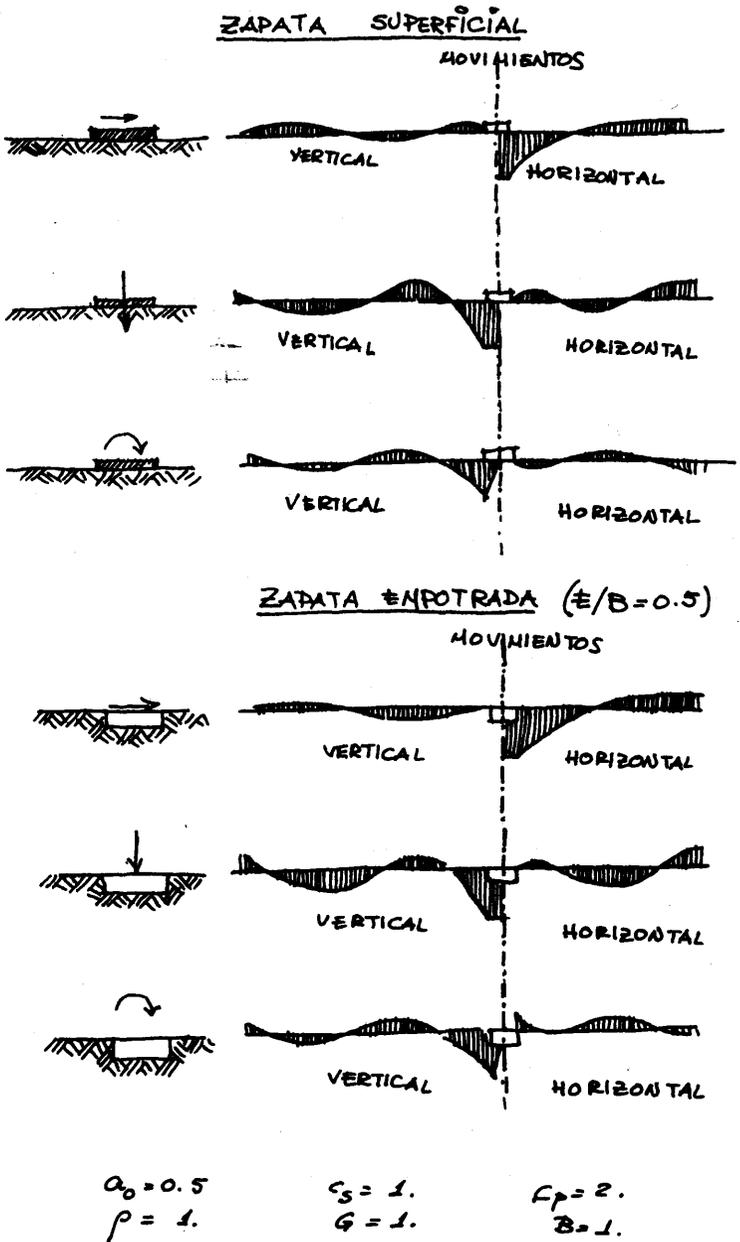


FIGURA 5

	8 ELEMENTOS	4 ELEMENTOS
ELEMEN. CONSTANTES	2.189 + +0.453 i	1.965 + +0.387 i
ELEM. CONST + 2 ELE. SINGUL.	2.27 + +0.478 i	2.249 + +0.472 i
$\omega = 0.5 \text{ rad. seg}^{-1}$		
$G = 1 + 0.1 i$		

TABLA 1.

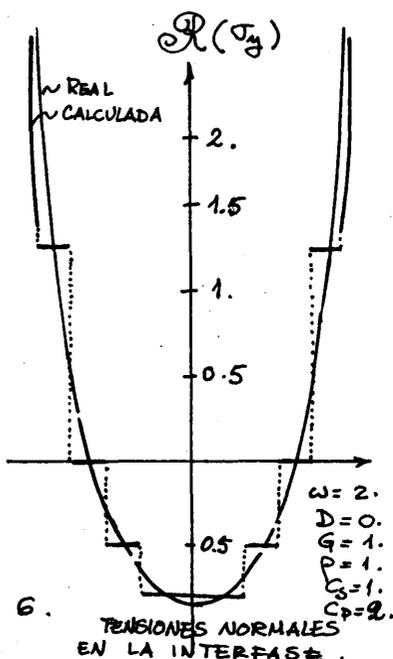


FIGURA 6.

trata de una laja cuadrada sometida a cargas dinámicas y diferentes condiciones de contorno. Las dimensiones y el material de la placa se muestran en la figura 7. En la figura 8 se recogen tres de los problemas que fueron tratados: 1) placa bajo una tracción uniforme en dos lados opuestos sin posible movimiento transversal; 2) placas bajo una carga uniforme en dos lados opuestos y libertad en los restantes; 3) placa con las mismas condiciones de 2) pero con una fisura transversal tal como se indica en 8.c.

La discretización usada fue la misma en todos los casos para obtener las mismas matrices A y B. Se tuvo en cuenta las simetrías y debido a ello solo fue

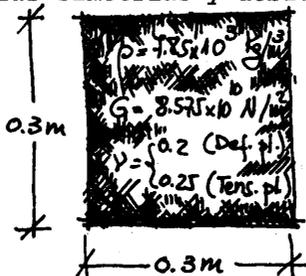


FIGURA 7

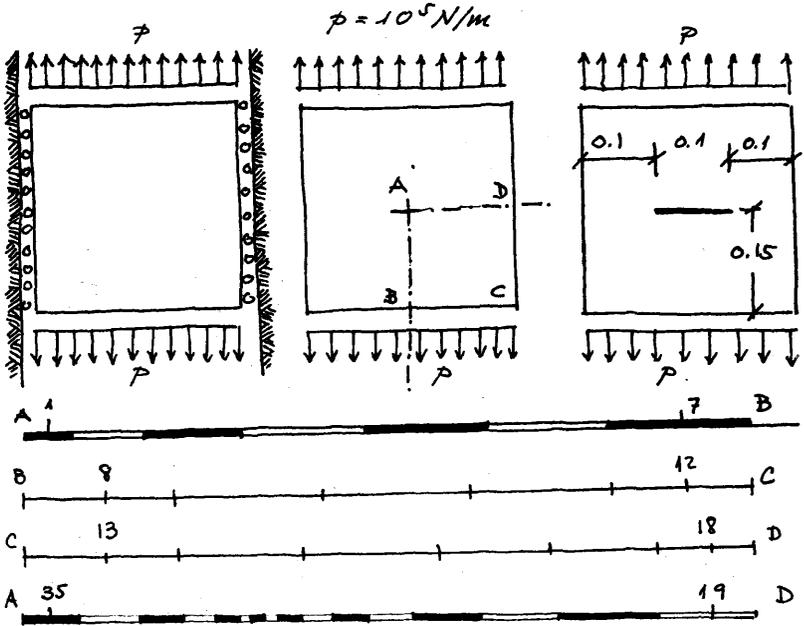


FIGURA 8

necesario analizar un cuarto de placa que se discretizó con 35 elementos constantes.

Debido a las condiciones de contorno del problema número 1 sólo se generan ondas P. Todos los puntos en una línea horizontal tendrán el mismo movimiento y las mismas tensiones y los resultados obtenidos están muy acordes con esta idea. En los restantes casos se presentan defasajes tal como se indica en la figura.

6. Ejemplos Tridimensionales

De la misma forma que en problemas de interacciones bidimensionales puede aplicarse el B.I.E.M. a problemas tridimensionales. Es sin embargo ahora donde las ventajas del Método son realmente importantes. El coste de un análisis con Elementos Finitos para un problema tridimensional que incluye a un semiespacio es muy alto. Debido a ello se han desarrollado otros procedimientos que usualmente trabajan con la solución de LAMB y son solamente adecuados para cimentaciones de superficie. En lo que sigue se muestran algunos resultados para cimientos empotrados y superficiales.

Las rigideces dinámicas de los cimientos se han calculado usando elementos constantes rectangulares.

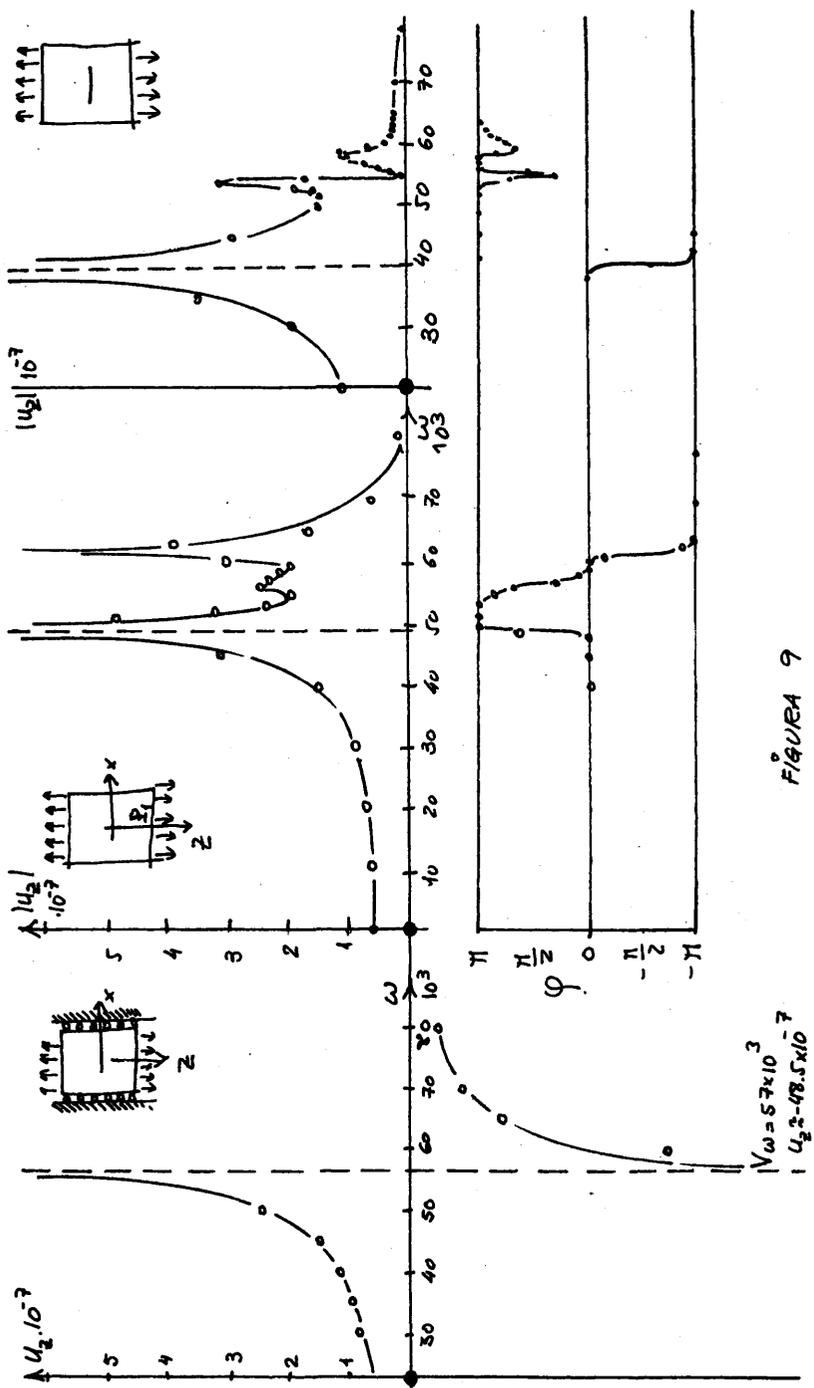


FIGURE 9

En la figura 10a y 10b se muestran dos discretizaciones: una con 64 elementos de contorno para una cimentación cuadrada en superficie y otra con 37 elementos, algunos de ellos en la interfase y otros en la superficie exterior. La primera de las dos discretizaciones es suficiente para el problema a menos que la frecuencia a_0 sea muy alta.

El suelo se supone lineal elástico y otra vez existen hipótesis simplificadoras. Si los dos movimientos horizontales se consideran acoplados pero independientes del vertical puede demostrarse fácilmente que para el caso de cimentación en superficie no se necesitan elementos en el exterior de la interfase puesto que no influye en los resultados. En el caso de cimentaciones empotradas es preciso recurrir a ellos; sin embargo se pueden obtener resultados muy buenos con una discretización muy somera.

Para estudiar la variación de los componentes rígidos con la frecuencia se expresaron en la forma típica:

$$K_{ij} = k_{ij}^0 (k_{ij} + i a_0 c_{ij})$$

donde K_{ij}^0 es el valor estático; k_{ij}^0 son coeficientes que dependen de la frecuencia; $i a_0 c_{ij}$ es una frecuencia adimensional; B es el semiancho de la cimentación cuadrada; O el semiancho del lado más pequeño del cimiento rectangular; C_s es la velocidad de las ondas del suelo. En las figuras 11 y 12 se recogen los coeficientes correspondientes a movimientos horizontales de giro. Los resultados que se obtienen con condiciones relajadas o no relajadas se comparan con los valores correspondientes a cimentaciones cuadradas obtenidos de la cimentación cuadrada equivalente a la zapata circular; valores estos últimos obtenidos por Veletsos y Wei.

Mostraremos ahora otra aplicación del método para problemas de interacción suelo-estructura.

A menudo se supone que el movimiento de la base se aplica uniformemente en todos los puntos del cimiento. Esta hipótesis sería correcta sólo para el caso de ondas P ó S que se propagasen verticalmente a lo largo del suelo y para cimiento superficial. El efecto de ondas inclinadas en el movimiento del cimiento da lugar a una diferencia de fase entre los movimientos vecinos y como consecuencia movimientos de giro y de torsión. El problema puede tratarse usando métodos todos de Elementos de Contorno.

La interfase sobre la estructura y el campo --

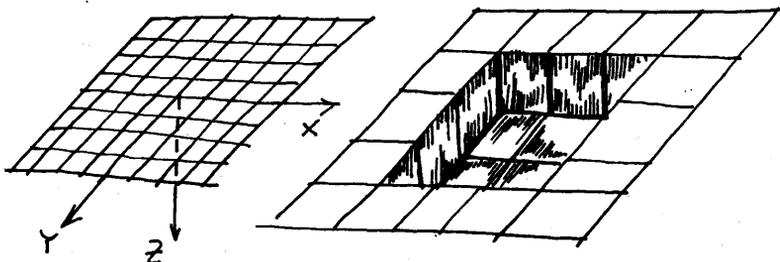


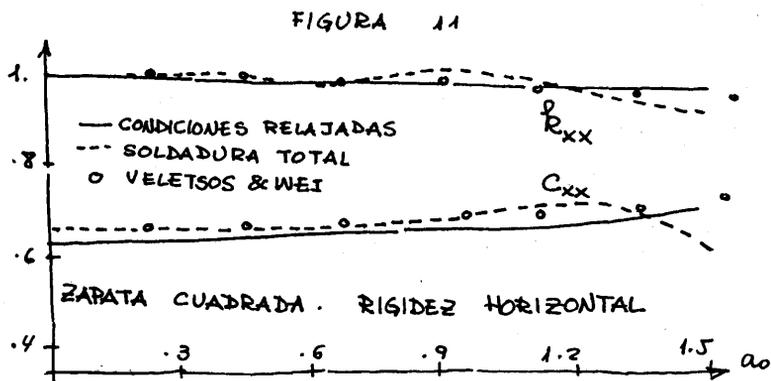
FIGURE 10

libre de tensiones pueden discretizarse en la misma forma que hemos indicado anteriormente. El sistema de ecuaciones se escribe para movimientos relativos y las tracciones con respecto a los valores de campo libre en la forma:

$$a(A(t-t_{ff})) = B(u-u_{ff})$$

donde t_{ff} y u_{ff} son los valores del campo libre de las variables en los puntos nodales.

Considerando que la cimentación es rígida todos los movimientos nodales pueden escribirse en función de 6 grados de libertad. Por otro lado puesto que no hay fuerzas exteriores aplicadas se pueden escribir seis ecuaciones para los grados de libertad y como las fuerzas resultantes son cero se pueden obtener las seis componentes del movimiento. Como ejemplo la



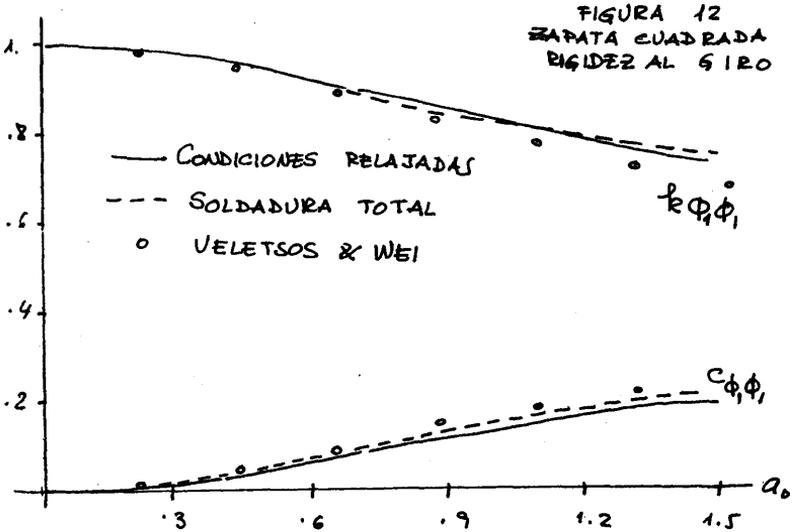
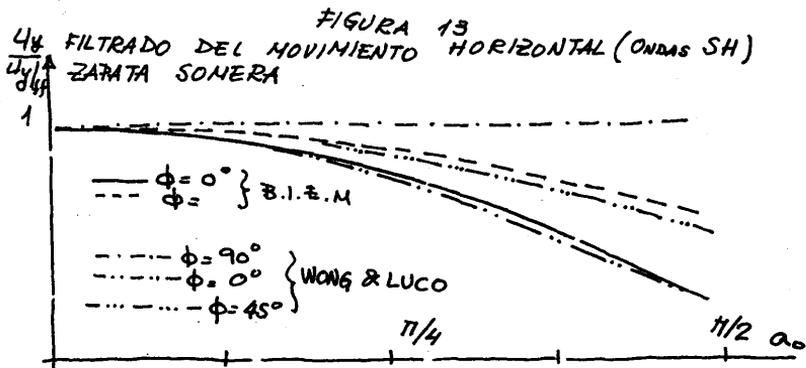


figura 13 muestra la amplitud del movimiento horizontal obtenido para una superficie cuadrada y para una cimentación superficial cuadrada cuando se propagan ondas SH con ángulos 0, 45 y 90 con el eje X. Los resultados se encuentran comparados con los presentados por Wong y Luco para los mismos ángulos, usando un procedimiento numérico muchísimo más caro. Como se ve los resultados son muy buenos.



REFERENCIAS

1. T.A.Cruse and F.J.Rizzo (Eds) (1975): Boundary-Integral equation method: Computational applications in applied mechanics. ASME, New York.
2. M.A.Jaswon and G.T.Symm (1977): Integral equation methods in potential theory and elastostatics. Academic Press.
3. C.A.Brebbia (1978): The boundary element method - for engineers. Pentech Press.
4. R.Butterfield and Banerjee (1981): The boundary - element method in engineering science. McGraw Hill.
5. E.Alarcón and J.Domínguez (1978): Boundary methods in soil-structure interaction. 2nd Int. Conf. on Microzonation. S.Francisco.
6. E.Alarcón and J.Domínguez (1980): Impedance of -- foundations using the boundary integral equation method. Conf. on Innovative Numer. Anal. for Eng. Sci. Univ. Press Virginia.
7. J.Domínguez (1981): Use of the method of images in B.E.M. for elastodynamics. Communication at the NATO seminar on "Numerical Methods in Geomechanics" Vimeiro.
8. J.Domínguez and R.Abascar (1982): The use of a composed fundamental solution in the computation of foundation impedances with B.E.M. (in Spanish). Anales de Ingeniería Mecánica 1.
9. J.D.Achenbach (1973): Wave propagation in elastic solids. North-Holland.
10. J.Domínguez and E.Alarcón (1981): Elastodynamics in "Progress in B.E.M." ed by Brebbia, Pentech Press.
11. D.M.Cole and D.D.Kosloff (1978): A numerical boundary integral equation for elastodynamics. Seism.Lab. Cal. Inst. of Tech. Pasadena.
12. J.Domínguez (1978): Dynamic stiffness of rectangular foundations. M.I.T. Res. Rep. R 78-20. Dept. Civ. Eng.
13. J.Domínguez (1978): Response of embedded foundations to travelling waves. M.I.T. Res. Rep. R 78-24. Dept. Civ. Eng.