

EL USO DE UNA SOLUCION FUNDAMENTAL COMPUESTA PARA EL CALCULO DE RIGIDECE DE CIMENTACIONES MEDIANTE EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

José Domínguez<sup>1</sup>

Ramón Abascal<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Profesor Agregado de Estructuras de la E.T.S.I.I. de Las Palmas

<sup>2</sup>Profesor Ayudante de la Cátedra de Estructuras de la E.T.S.I.I. de Sevilla

Resumen.- El problema de las rigideces dinámicas de cimentaciones enterradas puede ser abordado por diversos métodos analíticos y numéricos más o menos aproximados. Se presenta en primer lugar la formulación dinámica del Método de los Elementos de Contorno para este tipo de problemas. Se estudia cómo el empleo de una solución fundamental compuesta disminuye el número de términos despreciados al truncar la discretización de la superficie libre.- Se estudian algunos de los valores de las rigideces estáticas y dinámicas, obtenidos con la solución fundamental compuesta, y se comparan con los correspondientes a la simple. Se aprecia que en la mayor parte de los casos, con la solución compuesta, se produce una reducción del error debido al truncamiento en la discretización de la superficie libre del suelo.

INTRODUCCION

El estudio de la propagación de ondas en medios elásticos, y viscoelásticos en general, constituye un área de interés y actualidad permanente dentro de la mecánica de los medios continuos. Si bien los avances han sido importantes desde el lejano 1766 cuando EULER publicó su nota "De Sano Campanarum" sobre las vibraciones en las campanas, nos encontramos aún lejos de disponer de soluciones explícitas para la mayor parte de los problemas reales planteados. No obstante la existencia de computadores, ha permitido en los últimos años la puesta a punto de métodos numéricos mediante los cuales se obtienen soluciones aproximadas para muchos de estos problemas. Uno de los métodos es el de los Elementos de Contorno, que aunque no ha alcanzado el grado de desarrollo del de los Elementos Finitos, resulta muy adecuado en determinadas situaciones, como por ejemplo aquellas que implican el estudio de grandes dominios.

Un problema que ha ocupado tradicionalmente a los sismólogos, y con posterioridad también a los ingenieros civiles, es el de la propagación de ondas en un semiespacio elástico, el cual constituye la base del modelo para el

estudio del comportamiento del suelo y las construcciones enterradas en él, o en su superficie, cuando se produce un movimiento sísmico o una excitación dinámica de otro tipo.

A continuación se plantea en primer lugar y muy brevemente, la formulación del método de los elementos de contorno (M.E.C.) en problemas dinámicos, y se presenta el problema de interacción suelo estructura. Posteriormente, se estudia cómo el empleo de una solución fundamental derivada a partir de la del problema de KELVIN, permite una mejora en la consideración de la superficie infinita de un semiespacio. Por último se presentan valores de rigideces estáticas y dinámicas de cimentaciones, obtenidos con la solución fundamental propuesta, y se comparan con los que se obtienen empleando la solución de una carga armónica concentrada.

EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO EN PROBLEMAS ELASTODINAMICOS

La formulación del M.E.C., de manera semejante a la del caso estático, puede hacerse a partir del teorema de reciprocidad de BETTI-RAYLEIGH (demostrado, por

ejemplo en  $i1J$  que establece que:

$$\int_{SI} \dot{u} \cdot u' dS + \int_V \dot{f} \cdot u' + \dot{U} \cdot \nabla u' + \dot{u}' \cdot \nabla u' dV \quad (1)$$

donde  $\dot{f}$ ,  $\dot{U}$  son respectivamente los vectores de tensión en el contorno, fuerzas de volumen y movimientos, de un cierto estado dinámico. El punto indica derivada respecto al tiempo. Las condiciones iniciales para tal estado son:

$$\begin{aligned} u(\cdot, 0) &= \dot{u} \\ \dot{u}(\cdot, 0) &= \ddot{u} \end{aligned} \quad (2)$$

Las variables primas  $\dot{f}$ ,  $\dot{U}$ ,  $\dot{u}$ ,  $\dot{u}'$  tienen el mismo significado, para otro estado diferente.

El signo  $*$  representa el producto de convolución, que para dos funciones  $g(\cdot, t)$  y  $h(\cdot, t)$  viene dado por:

$$g * h = \int_0^t h(\cdot, t-s) h(\cdot, s) ds \quad (3)$$

Si empleamos una transformada integral sobre la ecuación (1), por ejemplo la de FOURIER, y suponemos condiciones iniciales nulas, la relación de reciprocidad se transforma en:

$$\dot{u}' \cdot \dot{u}' ds + \int_V \dot{f}' \cdot \dot{u}' dV = \int_S \dot{t}' \cdot \dot{u}' dS + \int_V \dot{u}'' dV \quad (4)$$

donde el superíndice (\*) indica transformada de FOURIER.

Podemos tomar como estado prima (\*) el dinámico análogo al problema de KELVIN que corresponde a la carga armónica en un punto y cuya solución en movimientos y tensiones fué obtenida por DOYLE [2] y CRUSE [3].

En el caso tridimensional, el movimiento y la tensión en un punto sobre una superficie de normal  $n$  cuando la carga está dirigida en dirección  $J$  tienen la forma:

$$u_{J1} = \frac{1}{4\pi P C_S^2} [1/J_1] \cdot X r_{,i} r_{,j} \quad (5)$$

$$T_{J1} = \frac{1}{4\pi} \left[ C \frac{di}{dr} - \frac{1}{r} x H \dot{o} \frac{or}{on} + r_{,i} n_{,j} \right] - \frac{2}{r} x C n_{,i} r_{,j} - 2 r_{,i} r_{,j} \frac{or}{on} - 2 r_{,i} r_{,j} \frac{dx}{dr} \frac{or}{on} + \frac{d^2}{C_S^2} - 2 \left( \frac{dl_{jJ}}{dr} - \frac{dl_{jJ}}{dr} \right) r_{,i} \quad (6)$$

donde el término  $e^{i\omega t}$  ha sido suprimido y las funciones  $x$  y  $l_{jJ}$  son de la forma:

$$X = \left( -\frac{3C^2}{\omega^2 L^2} + \frac{3C}{i\omega r} + 1 \right) \frac{e^{-i\omega r}}{r} - \left( \frac{C}{C_p} \right)^2 \left( -\frac{3C_p^2}{\omega^2 r} + \frac{3C}{i\omega r} + 1 \right) \frac{e^{-i\omega r}}{r} \quad (7)$$

En las expresiones anteriores  $r, C$  y  $C_s$  son respectivamente la distancia al punto de aplicación de la carga y las velocidades de las ondas  $p$  y  $s$ .

Con el uso de esta solución fundamental y suponiendo las fuerzas de volumen  $f = 0$  se obtiene para cualquier punto  $p$  del interior de  $V$ , una ecuación del tipo de la identidad de SOMIGLIANA.

$$u_p = \int_S \underline{U} \underline{t} ds - \int_S \underline{T} \underline{u} ds \quad (8)$$

donde los superíndices (\*) han sido suprimidos por comodidad.

En el caso de considerar un punto del contorno  $S$  aparece una singularidad en las integrales y la ecuación se transforma en:

$$\frac{C_p}{C_S} u_p = \int_S \underline{U} \underline{t} ds - \int_S \underline{T} \underline{u} ds \quad (9)$$

Ecuación en la que las integrales no incluyen el punto singular y la parte no integrable ha dado lugar a la matriz de

coeficientes,  $C$ , que depende de la geometría de  $s$ -Pen  $p$ .

La aplicación de las condiciones de contorno sobre la ecuación (9) da lugar a una ecuación integral. La solución de esta nos permite conocer  $u$  y  $t$  en todo el contorno. Mediante (8) puede calcularse  $u$  en cualquier punto del dominio y por derivación el tensor de tensiones.

Para resolver la ecuación integral, se realiza una discretización del contorno en  $n$  elementos, expresándose las tensiones y movimientos sobre estos en términos de sus valores en ciertos puntos ("Nodos") y de unas funciones de interpolación de tipo polinómico ("funciones de Forma").

$$\begin{aligned} u_1 &= N^1 u_1^1 + N^2 u_1^2 + \dots + \sum_{l=1}^n N^l u_1^l = N^l u_1^l \\ t_1 &= N^1 t_1^1 + N^2 t_1^2 + \dots + \sum_{l=1}^n N^l t_1^l = N^l t_1^l \end{aligned} \quad (10)$$

siendo  $N^J$  la función de forma asociada al nodo  $J$  y  $u_1^J, t_1^J$  las componentes del movimiento y vector tensión en dicho nodo.

De acuerdo con la discretización anterior, la ecuación (9) puede ser escrita para cada nodo  $K$ , en la forma:

$$g_{Kl} : K^+ \begin{bmatrix} \int_{elem.} \dots \end{bmatrix} u(n) = \dots \quad (11)$$

siendo

$$\begin{aligned} N(n) &= \begin{bmatrix} N^1 & N^2 & \dots & N^M \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \\ \underline{u}(n) &= (u_1^1 \ u_2^1 \ u_3^1 \ u_1^2 \ u_2^2 \ u_3^2 \ \dots \ u_1^M \ u_2^M \ u_3^M)^T \\ \underline{t}(n) &= (t_1^1 \ t_2^1 \ t_3^1 \ t_1^2 \ t_2^2 \ t_3^2 \ \dots \ t_1^M \ t_2^M \ t_3^M)^T \end{aligned}$$

$M$  = número de nodos por elemento

La ecuación (11) implica sumatorios sobre todos los nodos del contorno, de

manera que se puede escribir:

$$g_{1K} : K^+ \begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix} = \dots \quad (12)$$

donde  $u$  y  $t$  son los vectores de movimientos y tensiones en el nodo  $J$ .  $\sum_{k \in J}$  es una suma extendida a los elementos  $k$  que pertenece  $J$ , de integrales de la forma:

$$\int_{S_n} \underline{T} \underline{N}^L ds$$

siendo  $N^L = I N^L$  y  $L$  la posición del nodo  $J$  dentro del elemento  $n$ . Los términos  $G_{1K}$  tienen significado semejante.

Haciendo,

$$\begin{aligned} H_{KJ} &= H_{KJ}'' \quad K \neq J \\ H_{KJ} &= H_{KJ}'' + C_K \quad K = J \end{aligned} \quad (13)$$

la ecuación (12) se transforma en

$$E \begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix} \quad (14)$$

Estableciendo (14) para todos los nodos del contorno se obtiene un sistema de ecuaciones;

$$\underline{H} \underline{u} = \underline{G} \underline{t} \quad (15)$$

cuya solución nos resuelve el problema de contorno. La solución en cualquier punto interno puede obtenerse a través de la ecuación (8) una vez discretizada.

Si el problema dinámico que se trata de resolver no es de tipo armónico, previamente al proceso de solución mediante el M.E.C. habrá de obtenerse la transformada de Fourier de los valores conocidos y finalmente la transformada inversa de la solución obtenida mediante (15).

#### INTERACCION DINAMICA SUELO-ESTRUCTURA

Las características propias del suelo sobre el que se encuentra una estructura, tienen una influencia muy apreciable sobre su respuesta dinámica, particularmente cuando está sometida a una sollicitación sísmica. Este hecho ha dado lugar a procedimientos de cálculo sofisticados



datos que han originado a su vez complejos programas de computador. Existen fundamentalmente dos métodos de cálculo para tener en cuenta la influencia de las características del suelo sobre la respuesta dinámica de una estructura; el método directo y el método de los tres pasos. En el primero, el sistema suelo-estructura conjuntamente, es modelado mediante Elementos Finitos y analizada su respuesta ante una sollicitación. En el método de los tres pasos, se determinan separadamente: el movimiento al nivel de un cimiento rígido y sin masa, la matriz de rigidez (impedancia) de la cimentación ante una sollicitación armónica. por último, se realiza el análisis dinámico de la estructura sometida al movimiento calculado en el primer paso y sobre un cimiento con la rigidez calculada en el segundo. En [4] puede encontrarse un estudio comparativo de ambos métodos,

El análisis de la rigidez dinámica de cimentación con diversa geometría es no sólo uno de los tres pasos del método indirecto, sino que constituye en sí mismo un problema de interés para el diseño de cimientos de máquinas. Este problema ha sido abordado con éxito de forma analítica por VELETSOS y WEI [5] para el caso particular de un cimiento circular superficial. La existencia de enterramiento o formas arbitrarias ha sido tomada en cuenta mediante variados métodos numéricos, habida cuenta de que el más extendido de los métodos numéricos, el de los Elementos Finitos, resulta muy caro en los casos tridimensionales. WONG y LUI [6] calcularon índices de cimentaciones en la superficie de un semiespacio elástico integrando la solución fundamental de LAMB; lo cual implica gran cantidad de tiempo de computador dado que la solución no se encuentra en forma explícita sino en función de una doble integral sobre un dominio infinito. También emplearon este método para resolver el problema de difracción [7]. Un procedimiento semejante ha sido empleado por KITAMURA y SAKURAI en [8]. De tenerse en cuenta además, que los métodos que hacen uso de la solución de LAMB solo son válidos para cimientos superficiales.

En el presente artículo se calculan rigideces dinámicas de cimentaciones cuadradas con distintos grados de enterramiento en un semiespacio elástico, haciendo uso del método de los elementos de contorno. Esto permite el empleo de la solución fundamental de DOYLE y CRUSE que puede ser integrada con facilidad sobre los elementos. La existencia de amortiguamiento histerético en el suelo puede ser tomada en cuenta con solo considerar el módulo de elasticidad transversal con una componente

imaginaria.

El uso de una solución fundamental, para el espacio completo obliga a integrar sobre la superficie infinita del semiespacio, lo cual implicaría una discretización de dicha superficie. Esta da lugar a aproximaciones obtenidas discretizando únicamente una parte de la superficie próxima al cimiento. Si dispusiéramos de una solución fundamental para el semiespacio que fuera fácilmente integrable, no sería precisa la discretización de la superficie libre del suelo. Aunque APSEL [9] ha establecido una para el semiespacio estratificado, resulta muy laboriosa ya que hace uso de un desarrollo del movimiento de los estratos, en el dominio de los números de ondas de los modos propios de vibración, lo que da lugar a que la solución fundamental quede en función de integrales extendidas sobre un dominio infinito y que la evaluación e integración de dicha solución consume mucho tiempo de computador.

En las referencias [10, 11] ya se obtuvieron rigideces de cimentaciones haciendo uso del Método de los Elementos de Contorno. En [12] uno de los autores empleó el Método para problemas de difracción. A continuación se presenta, una forma combinada, mediante el método de las imágenes, de la solución fundamental de DOYLE y CRUSE, que permite reducir los errores cometidos por la eliminación de parte de la superficie sobre la que se extienden las integrales de contorno.

#### EMPLEO DEL METODO DE LAS IMAGENES PARA LA OBTENCION DE UNA NUEVA SOLUCION FUNDAMENTAL

En los problemas de rigideces de cimentaciones, la superficie S del dominio, que debe ser discretizada, se compone de dos partes (Figura 1): S1 de interfase entre semiespacio elástico y cimiento, y S2 que corresponde a la superficie libre del suelo y se extiende hasta el infinito. Dado que se cumplen las

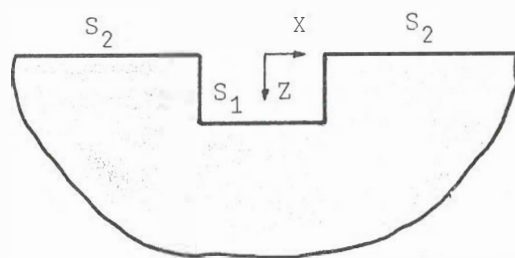


Figura 1. Dominio

condiciones de regularidad, las integra-

les sobre la superficie de radio infinito que cerraría el dominio, son nulas.

En este caso, la ecuación (9) puede ser escrita en la forma:

$$e_p u_p = \int_{S_1} \underline{T} \underline{u} dS - \int_{S_2} \underline{T} \underline{u} dS \quad (16)$$

ya que  $\underline{T} = \underline{Q}$  sobre S2.

La ecuación para un nodo k una vez discretizada, será de la forma:

$$k + \sum_{n=1}^N [ \int_{S_1} \underline{T} \underline{N}^{(n)} ds ] u_k^{(n)} - \sum_{n=N_1}^N [ \int_{S_2} \underline{T} \underline{N}^{(n)} ds ] u_k^{(n)} = \int_{S_1} \underline{N}^{(k)} \underline{t} ds \quad (17)$$

donde N1 es el número de elementos en S1, y el segundo sumatorio se extiende hasta infinito, supuesto que los elementos de contorno son finitos. Este sumatorio es el que ha de ser truncado, introduciendo así un error, además del ya inherente al proceso de discretización. La matriz  $\underline{T}$  tiene la forma:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Es fácil comprobar en la ecuación (6), que si el nodo k se encuentra sobre el plano z = 0, la matriz T para un elemento en ese mismo plano, tiene cinco de sus elementos nulos, siendo de la forma:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & T_{13} \\ 0 & 0 & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Este hecho arroja luz sobre los problemas correspondientes a cimentaciones superficiales, en los que sobre todos los elementos, la matriz T es de la forma (19), y para los que se obtienen buenos resultados a Gn considerando muy pocos elementos sobre la superficie S2,

Cuando se trata de cimentaciones en

terradas, en las ecuaciones correspondientes a nudos de la interfase suelo-estructura, la matriz T para los elementos de S2 es llena. Ahora bien, si en vez de utilizar la solución fundamental de DOYLE y CRUSE, empleamos, para puntos de z ≠ 0, la compuesta por, una carga armónica unidad concentrada en el punto (xp, Yp, Zp)  $\underline{f}$  otra igual en módulo dirección y sentido, aplicada en el punto (xp, Yp, -zp) como se indica en la figura 2, la matriz T,

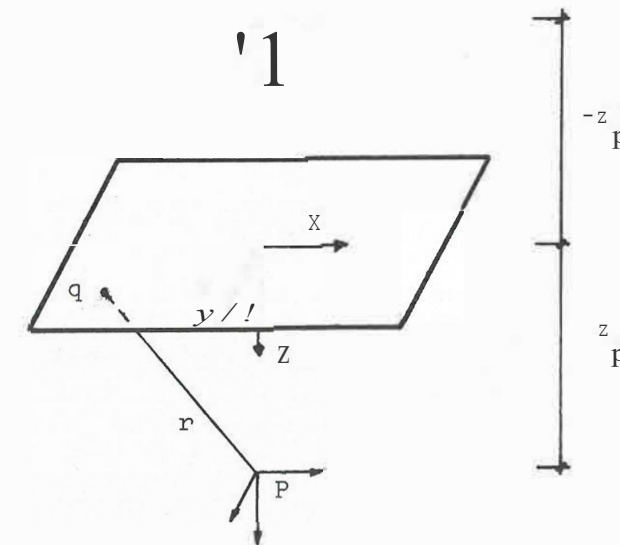


Figura 2. Solución Fundamental

en los puntos de la superficie z = 0, tiene sus términos T11 = T22 = T12 = T21 = T33 = 0 y los restantes son de la forma:

$$T_{13} = A [-2c \langle n_3 r_{,1} - 2r_{,1} r'_{,3} \frac{\partial r}{\partial n} -$$

$$- 2D r_{,1} r_{,3} \frac{\partial r}{\partial n} + 2E r_{,1} n_3 J$$

$$T_{23} = A [-2c \langle n_3 r'_{,2} - 2r_{,2} r_{,3} \frac{\partial r}{\partial n} -$$

$$- 2D r'_{,2} r_{,3} \frac{\partial r}{\partial n} + 2E r_{,2} n_3 J$$

$$T_{31} = A [2B r_{,1} n_3 + (4C - 2D) r_{,1} r_{,3} \frac{\partial r}{\partial n}]$$

$$T_{32} = A [2B r'_{,2} n_3 + (4C - 2D) r_{,2} r_{,3} \frac{\partial r}{\partial n}]$$

donde:

$$A = \frac{1}{4\pi} \quad (20) \quad (21a)$$



$$B = \left( -\frac{i\omega}{c_s} - \frac{3}{r} \right) \frac{e^{-i\omega r}}{r} + \frac{C}{c_p} \left( \frac{C}{i\omega r} - \frac{C^2}{\omega r} \right) + \frac{2}{r} \frac{e^{-i\omega r}}{r}$$

$$c = \frac{2x}{r}$$

$$D = 2 \frac{c\omega}{dr}$$

$$E = [c:P]_{s}^2 \left[ \frac{ct_{ij}J}{dr} - \frac{c\omega}{dr} - c \right] \quad (21b)$$

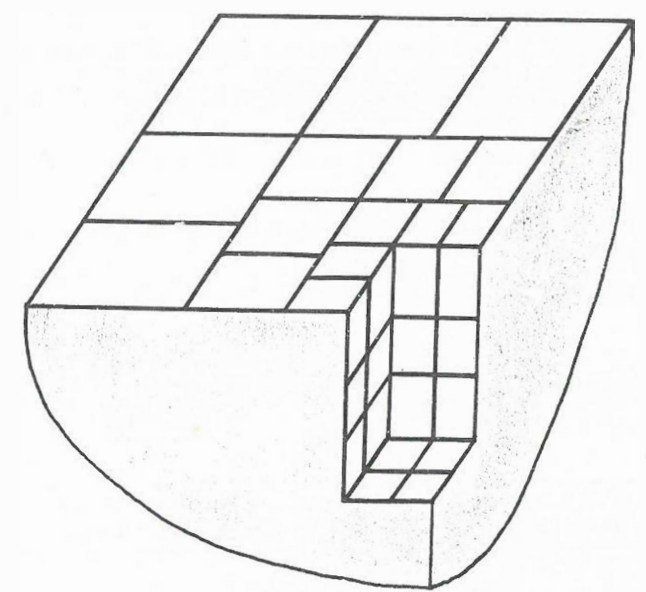


Figura 3. Discretización

las imágenes. (Solución (2)). Además, para los dos tipos de solución fundamental se abordó también el problema en la hipótesis de que la coordenada z es independiente de x e y, las cuales por su parte, sí están acopladas entre sí. Llamaremos Solución (G) a la correspondiente a la solución fundamental simple y (R) a la compuesta.

En la figura 4 pueden apreciarse ejemplos de como varia el valor de las componentes de la rigidez estática (w = 0, 01), dependiendo de la cantidad de superficie S2 discretizada. Debe destacarse cómo las soluciones (2) y (R) mantienen, desde una discretización nula de S2, un valor próximo a aquél que finalmente tienden (G) y (R). Este hecho concuerda de manera excelente con lo que cabía esperar del uso de la solución fundamental compuesta. Cuando E/B = 0, las soluciones (G) y (R) coinciden lógicamente con las (2) y (R) respectivamente.

Para el estudio de la variación de la rigidez con la frecuencia, los términos de K son escritos en la forma típica

$$K_{1j} = K_{1j}^0 (k_{1j} + i a_0 c_{1j}) \quad (22)$$

donde a0 = B/Cs es la frecuencia adimensional.

Comentaremos brevemente, de entre los resultados obtenidos, algunos que consideramos representativos. En las figuras 5 y 6, puede apreciarse como varían

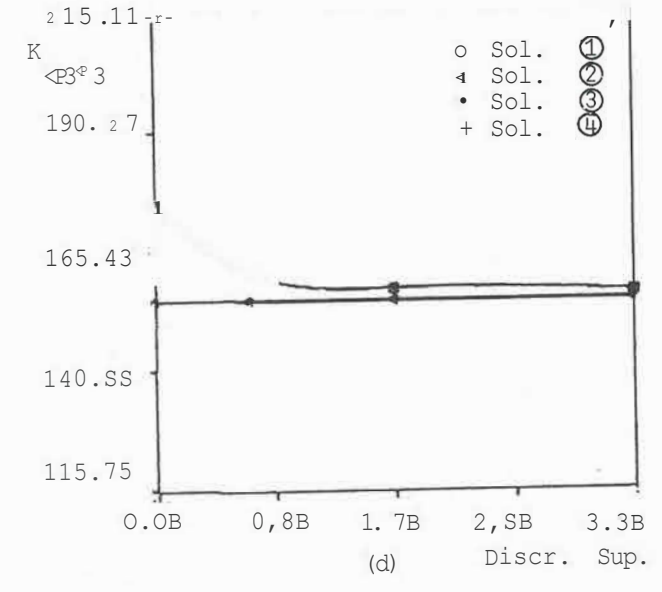
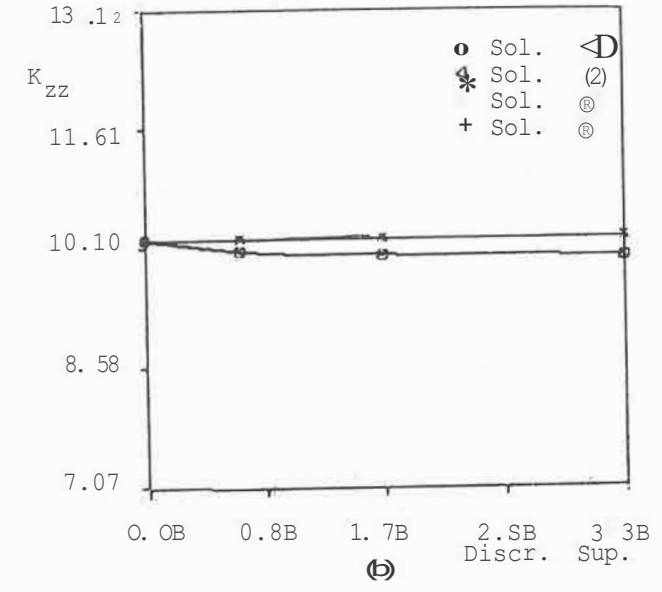
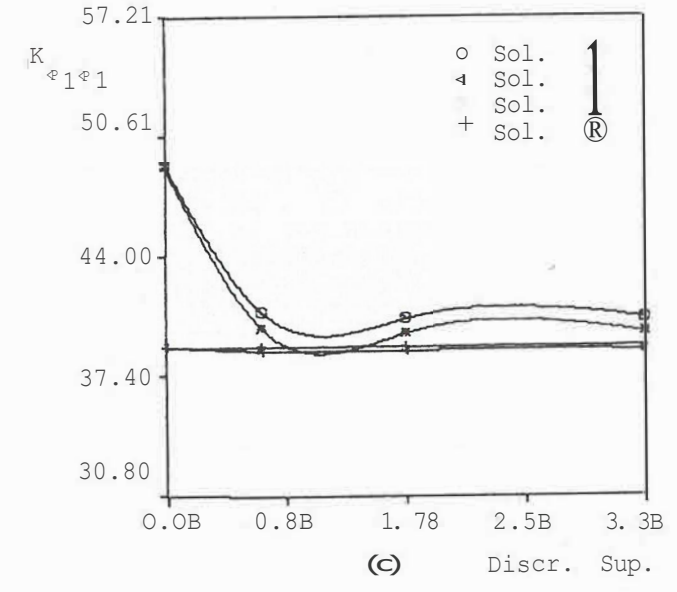
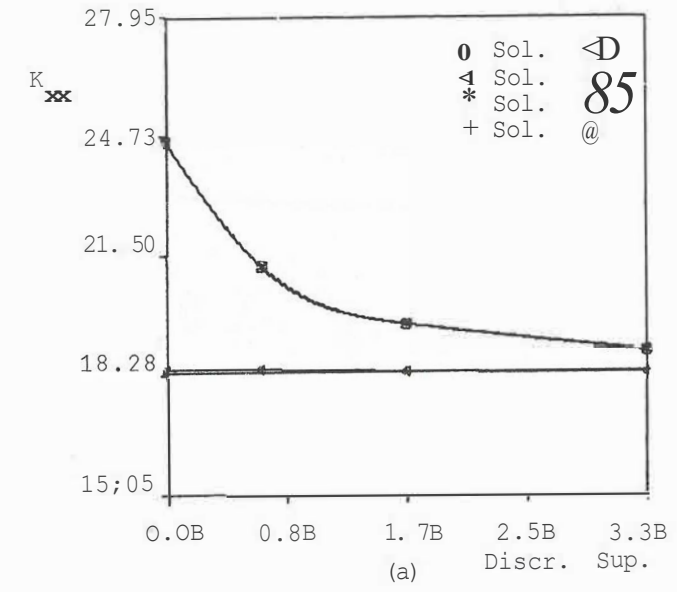


Fig. 4.- Rigideces estáticas.

y cxx con la frecuencia, en un movimiento con E/B = 2, cuando se toma una discretización nula de S2 (fig. 5) y cuando se discretiza S2 hasta una distancia 3.3 B del borde del cimiento (fig. 6). Puede apreciarse como para kxx se tienen en todos los casos resultados de precisión aceptable, mientras que para Cxx, al aumentar la discretización, las soluciones (j) y (R) se aproximan a (2) y (R) que varía poco. En las figuras 7 y 8, puede apreciarse una evolución semejante para kzz y Czz en un cimiento con grado de enterramiento menor (E/B = 2/3). En el caso de c, siendo E/B = 4/3, presentado en las figuras 9b y 10b, los resultados varían poco de una solución a otra. El término k1e1, figura 9a y 10a, sin embargo, se comporta de manera muy semejante para las soluciones (1) y (2) en la mejor de las discre-

cretizaciones quedando las soluciones (R) y (G) separadas de forma apreciable. Los valores de las soluciones (G) y (2) se modifican con la reducción de la discretización de S2 de forma semejante aunque en sentido contrario. Este dato que se aprecia para la rigidez de balanceo en cimentaciones muy enterradas, no muestra ninguna mejora en los resultados por el hecho de emplear la solución compuesta. Sin embargo el grado de enterramiento es menor, por ejemplo E/B = 2/3, claramente se obtiene menor variación en los resultados, al reducir la cantidad de S2 discretizada, con la solución (2) que con la (1). La falta de mejora en los resultados antes citada, puede ser debida al hecho de que en el movimiento de balanceo de cimentaciones muy enterradas, los movimientos horizontales y verticales son de magnitud semejante y los términos de fuera-

Con el uso de dos cargas antimétricas se ha conseguido que, también en cimentaciones enterradas, la matriz T para los elementos sobre la superficie S2, tome la forma indicada en (19). Notese que todos los términos de la diagonal son nulos y que cuando se dé un movimiento, por ejemplo según x, al cimiento el movimiento de la superficie será fundamentalmente según x, siendo de menor importancia u; que es precisamente el que multiplica a la componente de no nula en la superficie libre del suelo. Cabe esperar pues, que el error cometido al despreciar términos del segundo sumatorio de (17) a partir de un cierto número de elementos, disminuya sensiblemente por el hecho de emplear la solución compuesta en vez de la simple.

RIGIDEZES DINAMICAS DE CIMENTACIONES TRIDIMENSIONALES ENTERRADAS

A continuación, se analizan algunos de los resultados obtenidos haciendo uso de la solución compuesta, y se comparan con los de la simple. Se han tratado cimentaciones de planta cuadrada con distinto grado de enterramiento. Las dimensiones de las mismas fueron 2 B x 2 B x E, y se tomaron distintas relaciones E/B. Se emplearán elementos de contorno con forma rectangular, con un sólo nodo en su centro y función de forma constante. En la figura 3, puede apreciarse el tipo de discretización de la superficie empleado. (Se muestra 1/4 debido a la simetría existente).

Se obtuvieron resultados, haciendo uso de la solución fundamental de DOYLE y CRUSE. (Solución (G)) y empleando la solución compuesta mediante el método de-

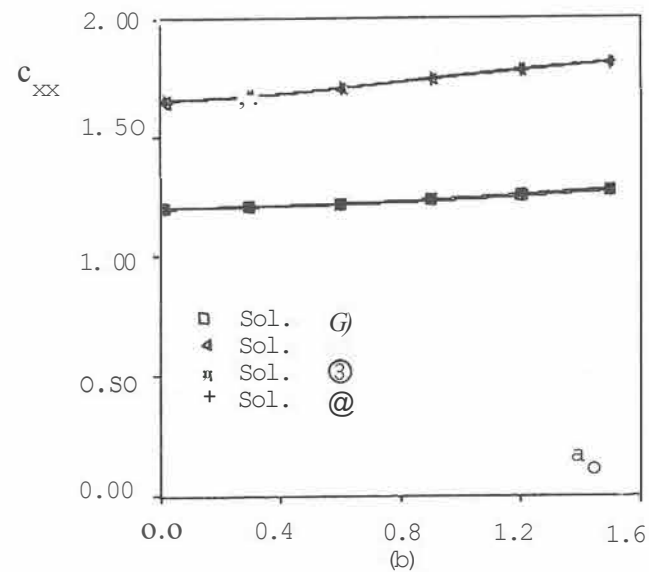
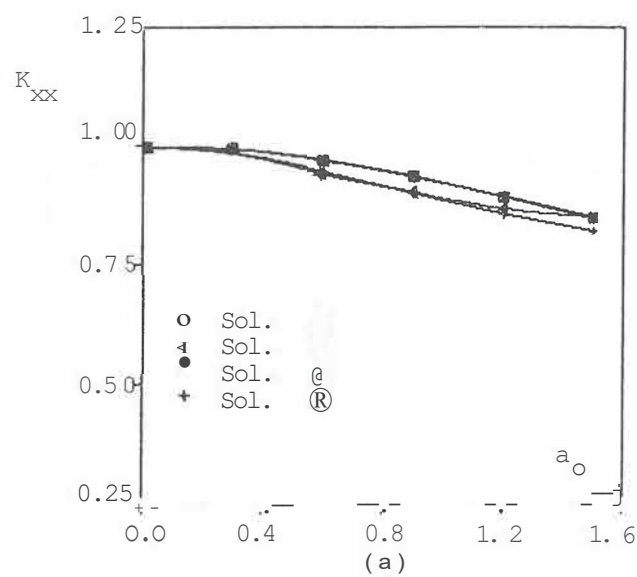


Fig. 5.- Influencia del tipo de solución empleada sobre  $K_{xx}$  y  $C_{xx}$  ( $E/B=2$ . Sin discr. superficial)

de la diagonal de T adquieren mayor importancia relativa. En tal caso, los resultados obtenidos con la solución (2), mejorarán considerando como problemas independientes los de aplicar sucesivamente las componentes horizontal y vertical, del movimiento de las paredes del cimiento.

En las figuras 11 y 12, puede apreciarse claramente como, en el caso de

la rigidez horizontal, la solución fundamental compuesta (2), se ve sensiblemente menos afectada por la cantidad de superficie  $S_2$  discretizada que la G. Por último, la figura 13 muestra la influencia prácticamente nula de la cantidad de superficie libre discretizada, sobre la rigidez dinámica de torsión cuando se emplea la solución fundamental compuesta. Esta influencia, si bien no es muy grande, es apreciable en

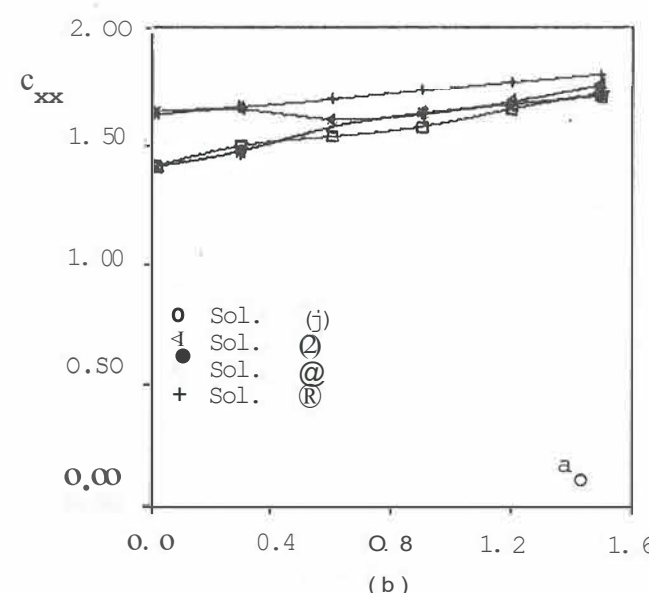
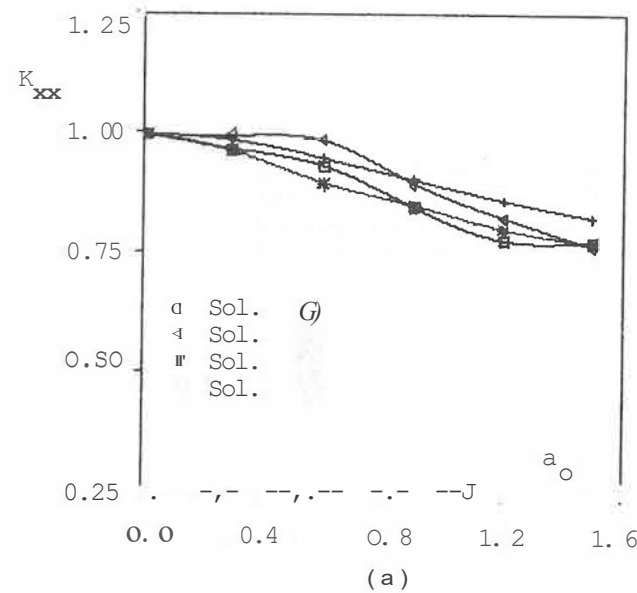


Fig. 6.- Influencia del tipo de solución empleada sobre  $K_{xx}$  y  $C_{xx}$  ( $E/B=2$ . Discr. superficial 3.3 B)

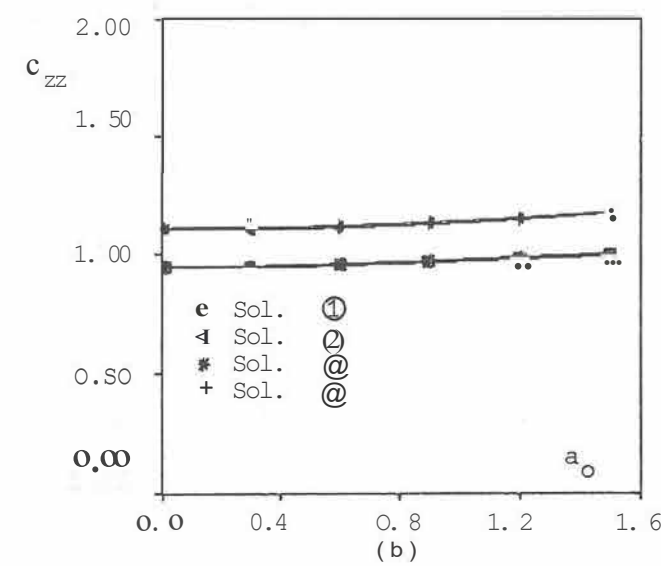
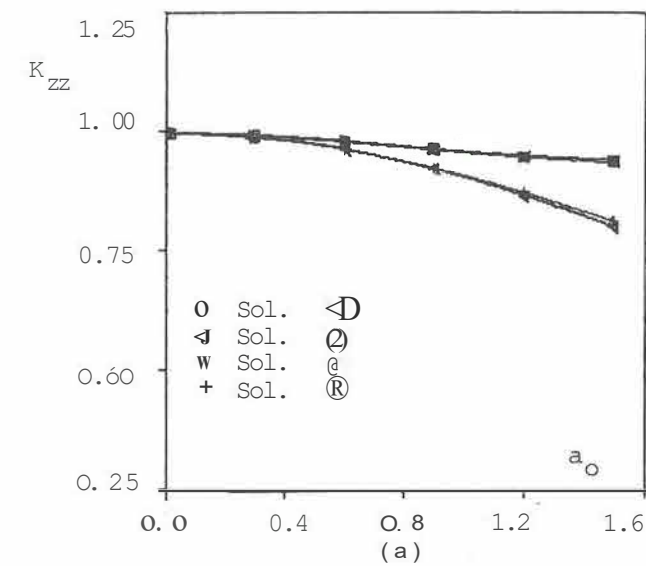


Fig. 7.- Influencia del tipo de solución empleada sobre  $K_{zz}$  y  $C_{zz}$  ( $E/B=2/3$ . Sin discr. superficial)

cimentaciones enterradas, cuando se emplea la solución simple.

#### CONCLUSIONES

Se ha presentado en primer lugar, como mediante el método de las imágenes se puede obtener una solución fundamental que reduce sensiblemente, en los problemas de cimentaciones, el número

de componentes no nulas sobre la superficie libre del suelo, de los vectores tensión producidas por las cargas concentradas según las tres direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Este hecho ha permitido obtener buenos resultados para las rigideces estáticas aún con un número muy reducido de elementos en la superficie libre del suelo. También ha permitido disminuir la influencia del truncamiento de la discretización de la superficie libre

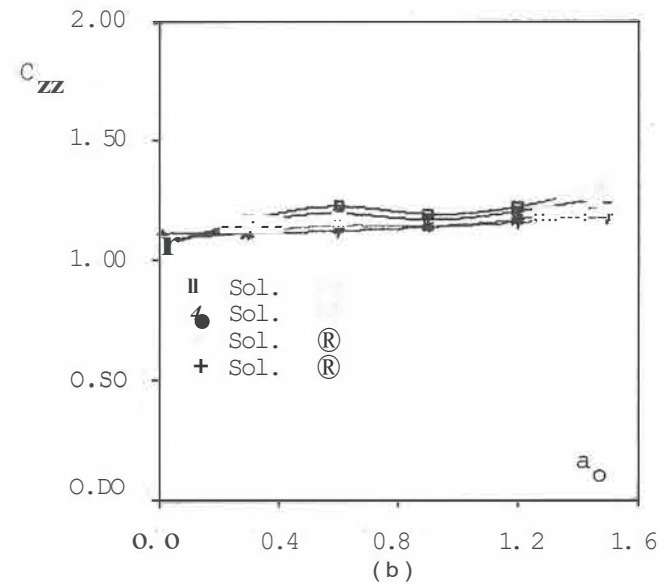
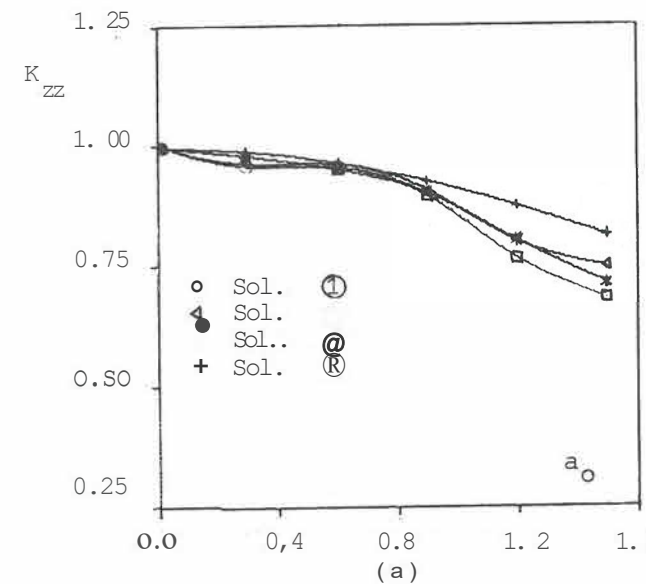


Fig. 8.- Influencia del tipo de solución empleada sobre  $K_{zz}$  y  $C_{zz}$  ( $E/B=2/3$ . Discr. superficial 3.3B)



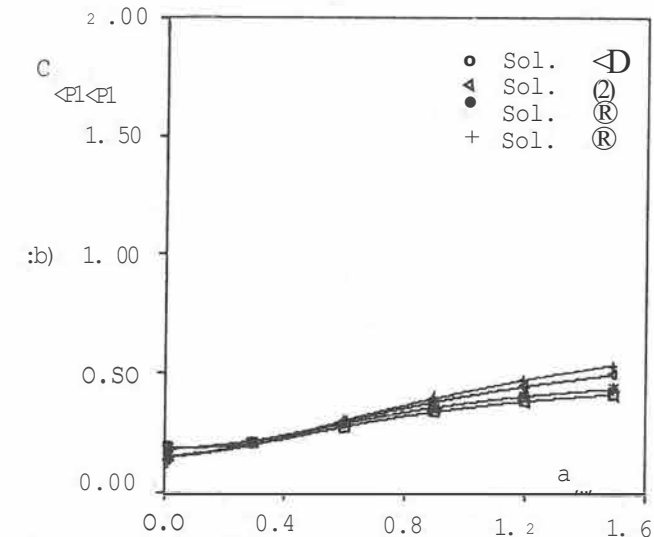
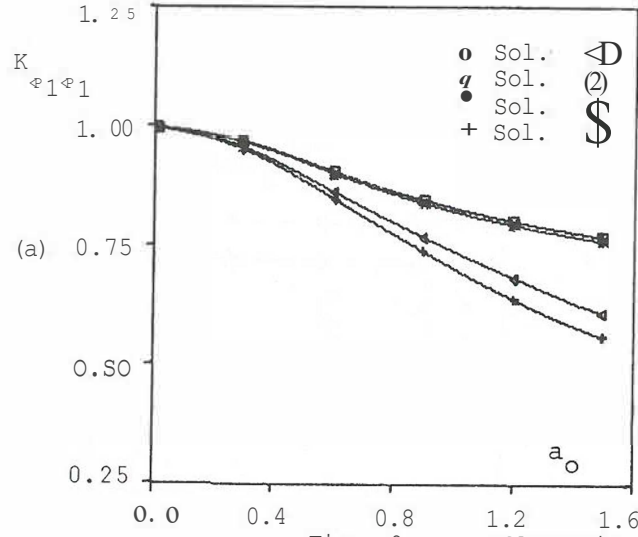


Fig. 9.- Influencia del tipo de solución empleada sobre  $K_{\phi_1 \phi_1}$  y  $C_{\phi_1 \phi_1}$  ( $E/S=4/3$ . Sin discr. superficial)

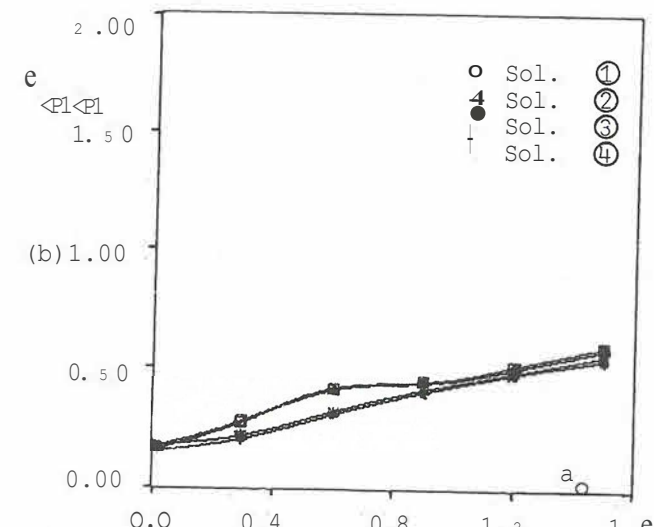
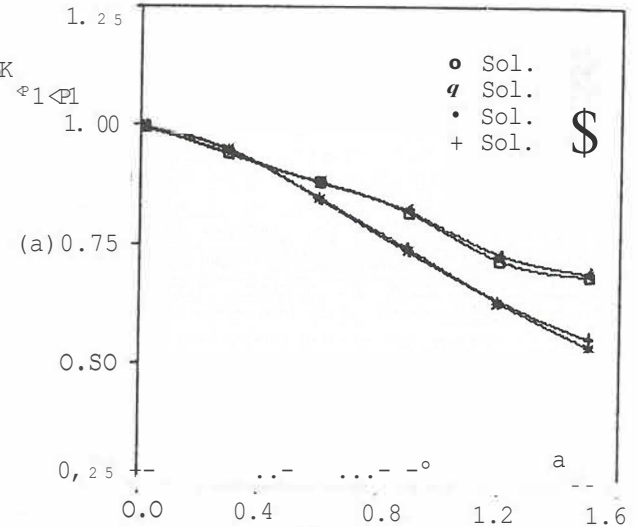


Fig. 10.- Influencia del tipo de solución empleada sobre  $K_{\phi_1 \phi_1}$  y  $C_{\phi_1 \phi_1}$  ( $E/S=4/3$ . Discr. superficial 3.3B)

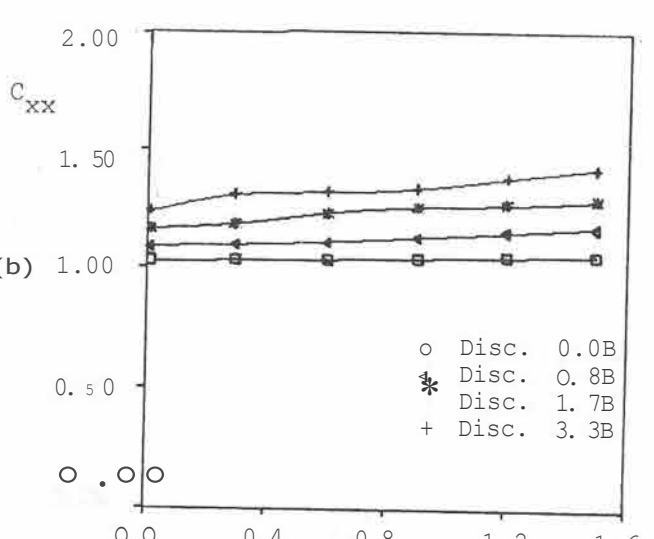
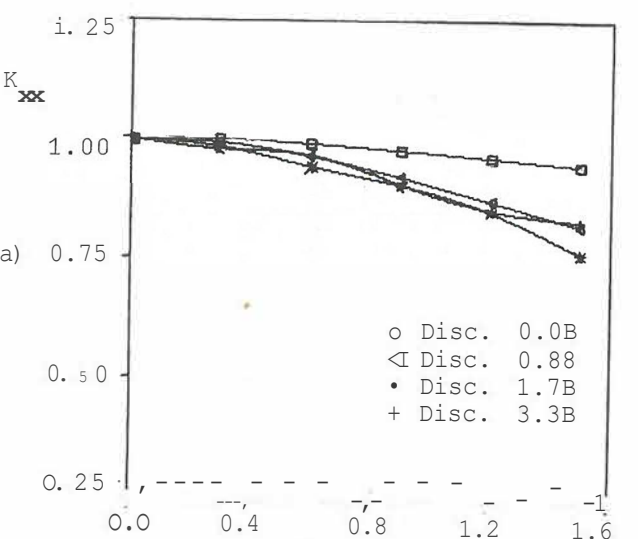


Fig. 11.- Influencia de la cantidad de superficie libre discretizada sobre  $K_{xx}$  y  $C_{xx}$  (Sol. 1)

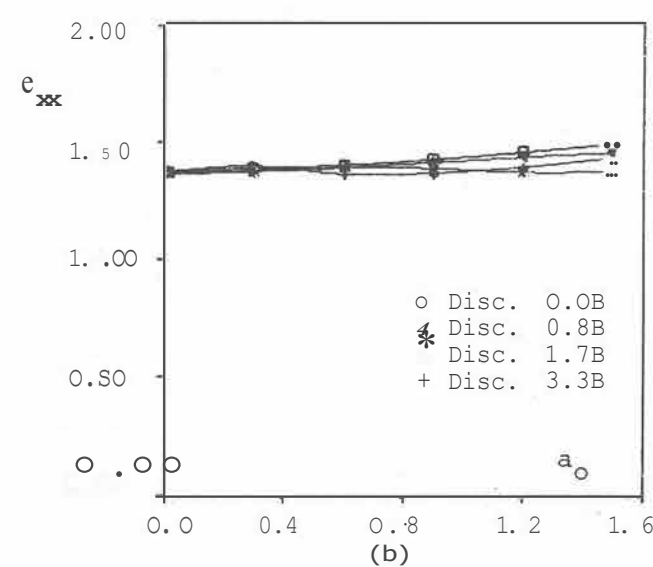
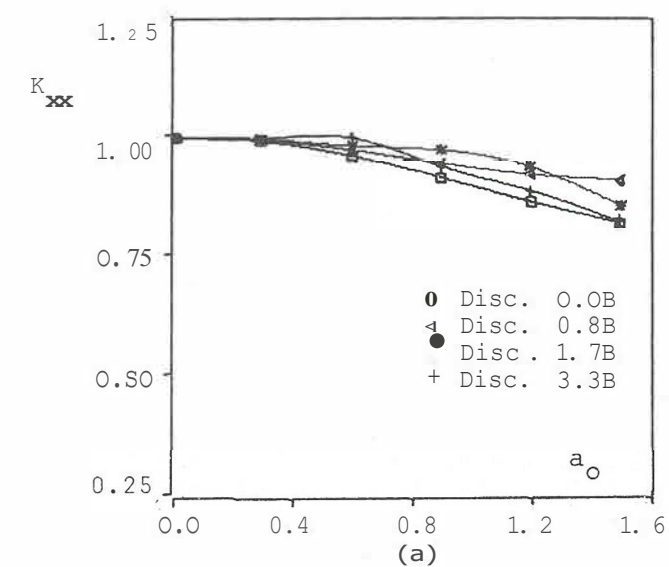


Fig. 12.- Influencia de la cantidad de superficie libre discretizada sobre  $K_{xx}$  y  $C_{xx}$  (Sol. 2)

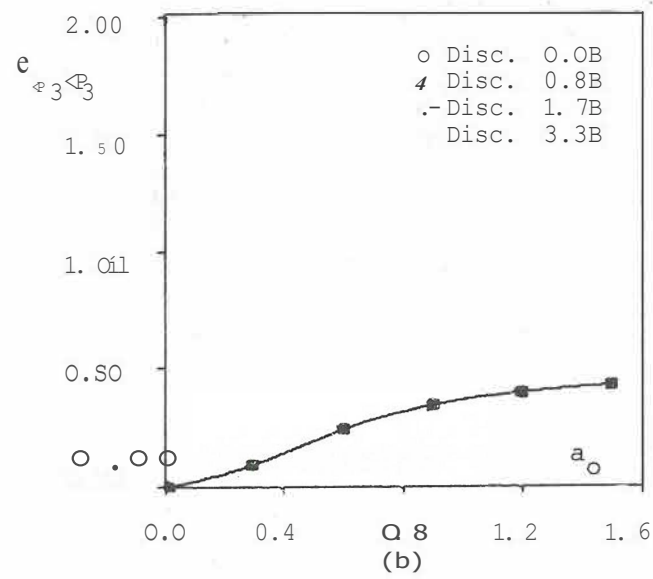
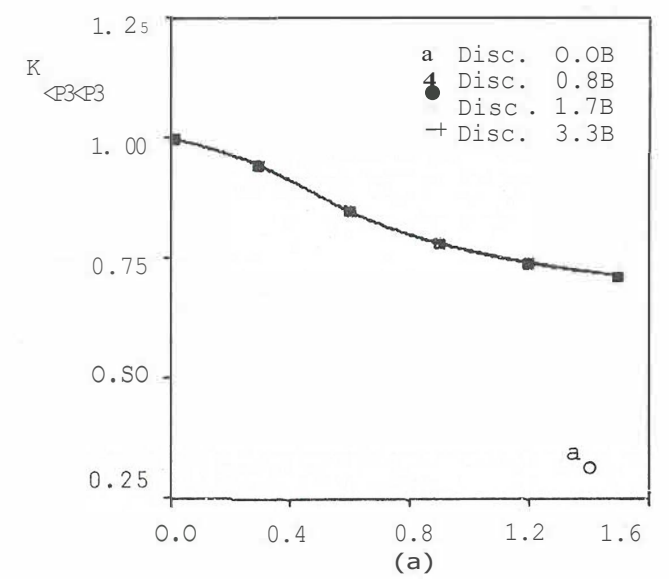


Fig. 13.- Influencia de la cantidad de superficie libre discretizada sobre  $K_{\phi_3 \phi_3}$  y  $C_{\phi_3 \phi_3}$  (Solución 2)

del suelo, sobre los coeficientes dinámicos de las rigideces, en la mayor parte de los casos.

REFERENCIAS

1. Achenbach J.D. wave Propagation in Elastic Solids, North-Holland, 1973.
2. Doyle J.M. "Integration of the Laplace Transformed Equations of Classical Elastokinetics, Journ. of Math. Anal. and Appl., 13, 1966.
3. Cruse T.A. y Rizzo F.J. "A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem I", Journ. of Math. Anal. and Appl., 22, 1968.

of the General Transient Elastodynamic Problem I", Journ. of Math. Anal. and Appl., 22, 1968.

4. Kausel E. y Roesset J.M. "Soil Structure Interaction Problems for Nuclear Containment Structures", ASCE Power Division Specialty Conference, Boulder, Colorado, 1974.
5. Veletsos A.S. y Wei Y.T. "Lateral and Rocking Vibration of Footings", Journ. of Solil Mech. and Found Division, ASCE, 97, 1971.
6. Wong H.L. and Luco J.E: "Dynamic Response of Rigid Foundations on Soil", Journ. of Geotechnical Engineering, ASCE, 100, 1974.

trary Shape", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 4, 1976.

7. Wong H.L. and Luco J.E. "Dynamic Response of Rectangular Foundations to Obliquely Incident Seismic Waves", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 6, 1978.
8. Kitamura Y y Sakurai S. "Dynamic Stiffness for Rectangular Rigid Foundations on a Semi-infinite Elastic Medium", Int. Journ. of Numerical Meth. in Geomechanics, 1978.
9. Apsel R. J. "Dynamic Green's Functions for Layered Media and Applications to Boundary-Value Problems". Tesis para el título de Ph. D., University of California, San Diego, 1979.
10. Dornínguez J. "Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations", M.I.T. Research Report R 78-20, Dept. of Civil Engineering, 1978.
11. Alarcón E. y Dornínguez J. "Impedance of Foundations Using the Boundary Integral Equation Method". Proceedings of the Conference on Innovative Numerical Analysis for Engineering Sciences. University Press of Virginia, 1980.
12. Domínguez J. "Response of Embedded Foundations to Travelling Waves", M. I.T. Research Report R 78-24, Dept. of Civil Engineering, 1978.