

# Trabajo Fin de Grado

## Ingeniería Aeroespacial

### Análisis de un diseño de amortiguador mecánico basado en los principios de frenos magnéticos

Autor: Alberto José Molina Molero

Tutor: Antonio de la Cruz González Fernández

**Dpto. Física Aplicada III**  
**Escuela Técnica Superior de Ingeniería**  
**Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2019





Trabajo Fin de Grado  
Ingeniería Aeroespacial

# **Análisis de un diseño de amortiguador mecánico basado en los principios de frenos magnéticos**

Autor:

Alberto José Molina Molero

Tutor:

Antonio de la Cruz González Fernández

Profesor Titular de Universidad

Dpto. de Física Aplicada III  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2019



Trabajo Fin de Grado: Análisis de un diseño de amortiguador mecánico basado en los principios de frenos magnéticos

Autor: Alberto José Molina Molero

Tutor: Antonio de la Cruz González Fernández

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2019

El Secretario del Tribunal



*A mi madre*





# Agradecimientos

---

Me gustaría agradecer a todas las personas que con su ayuda, han hecho posible superar esta etapa que culmina con el desarrollo de este proyecto. Gracias a mi familia, amigos y compañeros que me han permitido superar este desafío.

También, me gustaría agradecer especialmente al Dr. D. Antonio de la Cruz González Fernández, mi tutor, por toda su ayuda y dedicación en el desarrollo de este trabajo.

*Alberto José Molina Molero*

*Sevilla, 2019*



El objetivo de este trabajo es el estudio de un amortiguador formado por un dipolo magnético unido al extremo de un resorte que se mueve por el interior de un tubo conductor y frente a dos superficies circulares conductoras situadas en los extremos del tubo.

El movimiento del imán en las proximidades de las superficies induce corrientes de Foucault que permiten disipar la energía del dipolo, frenándolo. Las acciones del resorte junto a la fuerza magnética generada por las corrientes inducidas permiten desarrollar un sistema que actúa como un amortiguador. En este trabajo, se caracteriza la fuerza magnética desarrollada por el amortiguador y la respuesta del sistema. Además, se estudia la influencia de las dimensiones de los materiales conductores en la fuerza magnética.

En un primer análisis, se aborda el estudio de un amortiguador formado por un imán moviéndose por el interior de un tubo conductor. Posteriormente, se caracteriza la fuerza magnética desarrollada por un amortiguador constituido por superficies planas conductoras y finalmente, se estudia un amortiguador que consta de un tubo y dos superficies circulares en sus extremos.



# Abstract

---

The aim of this project is the study of a damper formed by a magnetic dipole connected to the end of a spring that moves inside a conductive tube facing two conductive circular surfaces located at the ends of the tube.

The movement of the magnet in the vicinity of the surfaces induces eddy currents that allow to dissipate the energy of the dipole, slowing it down. The joint action between the spring and the magnetic force generated by the induced currents allow to develop a system that acts as a current eddy damper. In this project, the magnetic force developed by the damper and the system response are characterized. In addition, the influence of the dimensions of conductive materials on magnetic force is studied.

In a first analysis, the study of a damper formed by a magnet that moves inside a conductive tube is discussed. Subsequently, the magnetic force developed by the damper consisting of flat conductive surfaces is characterized and finally, a damper consisting of a tube and two circular surfaces located at the ends of the tube is studied.



# Índice

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>ix</b>
<b>Resumen</b>	<b>xi</b>
<b>Abstract</b>	<b>xiii</b>
<b>Índice</b>	<b>xv</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>xvii</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>xix</b>
<b>1 INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1 <i>El oscilador amortiguado</i>	1
1.2 <i>Corrientes de Foucault: aplicación en frenos y amortiguadores magnéticos</i>	4
<b>2 DESCRIPCIÓN GENERAL DEL SISTEMA Y FUNDAMENTOS FÍSICOS</b>	<b>7</b>
2.1 <i>Descripción del sistema</i>	7
2.2 <i>Inducción electromagnética</i>	8
2.3 <i>Dipolo magnético: Modelos y campo magnético B generado</i>	9
2.4 <i>Fuerza magnética que actúa sobre el imán: Potencia disipada por el elemento conductor</i>	10
2.5 <i>Dinámica del sistema</i>	11
<b>3 DIPOLO EN MOVIMIENTO POR EL INTERIOR DE UN TUBO CONDUCTOR</b>	<b>15</b>
3.1 <i>Fuerza magnética responsable del amortiguamiento: potencia disipada por el tubo conductor</i>	16
3.2 <i>Tubo de pared delgada: Fuerza magnética y potencia disipada</i>	16
3.2.1 <i>Tubo de pequeña longitud. Anillo</i>	17
3.2.2 <i>Tubo de longitud infinita</i>	18
3.2.3 <i>Tubo de longitud finita</i>	19
3.3 <i>Dinámica del amortiguador</i>	23
3.3.1 <i>Amortiguador con tubo de pared delgada y de longitud infinita</i>	23
3.3.2 <i>Amortiguador con tubo de pared delgada y de longitud finita</i>	25
3.4 <i>Tubo grueso: el efecto del espesor</i>	26
3.4.1 <i>Tubo de longitud infinita</i>	26
3.4.2 <i>Tubo de longitud finita</i>	29
<b>4 DIPOLO EN MOVIMIENTO SOBRE SUPERFICIES PLANAS CONDUCTORAS</b>	<b>31</b>
4.1 <i>Fuerza magnética responsable del amortiguamiento: potencia disipada por la superficie plana conductora</i>	32
4.2 <i>Superficie plana delgada: Fuerza magnética y potencia disipada</i>	32

4.2.1	Plano infinito	34
4.2.2	Superficie circular	35
4.3	<i>Superficie gruesa: el efecto del espesor</i>	36
4.3.1	Plano infinito	36
4.3.2	Superficie circular	38
4.4	<i>Dinámica del amortiguador</i>	39
4.4.1	Superficie plana conductora infinita	40
4.4.2	Superficie plana conductora circular	40
4.4.3	Dipolo entre dos placas circulares	41
<b>5</b>	<b>AMORTIGUADOR FORMADO POR UN TUBO Y SUPERFICIES CIRCULARES PLANAS CONDUCTORAS</b>	<b>45</b>
5.1	<i>Factores que influyen en el diseño</i>	45
5.2	<i>Intervalos de posiciones del dipolo con coeficiente de fricción constante</i>	47
5.3	<i>Amortiguador sometido a oscilaciones de pequeña amplitud</i>	48
5.3.1	Amortiguador sin efecto de la posición del dipolo	48
5.3.2	Efecto de la posición del dipolo en oscilaciones de pequeña amplitud	51
5.4	<i>Oscilaciones de gran amplitud. Respuesta del amortiguador</i>	53
5.5	<i>Caracterización numérica del amortiguador</i>	55
5.5.1	Parámetros y variables del amortiguador	55
<b>6</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>61</b>
	<b>Referencias</b>	<b>63</b>



# ÍNDICE DE TABLAS

---

Tabla 3-1. <i>Porcentaje de potencia disipada según intervalos del tubo</i>	17
Tabla 4-1. <i>Potencia disipada en <math>\rho/a \in [0, 0.6]</math></i>	34
Tabla 4-2. <i>Condiciones según el tipo de amortiguamiento para el plano infinito</i>	40
Tabla 4-3. <i>Amortiguamiento desarrollado por el movimiento de un dipolo entre dos placas circulares</i>	43
Tabla 5-1. <i>Rangos de <math>z_0</math> con <math>\gamma</math> constante para dipolo moviéndose entre dos superficies circulares</i>	47
Tabla 5-2. <i>Rangos de <math>z_0</math> con <math>\gamma</math> constante para dipolo moviéndose por el interior de un tubo</i>	47
Tabla 5-3. <i>Porcentaje de potencias disipadas por el tubo y las tapas según la esbeltez</i>	49
Tabla 5-4. <i>Intervalos de posiciones del dipolo con coeficiente de fricción constante</i>	53
Tabla 5-5. <i>Caracterización del amortiguador con <math>m=1g</math> y <math>\delta/a=0.1</math></i>	57
Tabla 5-6. <i>Caracterización del amortiguador con <math>m=10g</math> y <math>\delta/a=0.1</math></i>	58
Tabla 5-7. <i>Caracterización del amortiguador con <math>m=1g</math> y <math>\delta/a=0.2</math></i>	58
Tabla 5-8. <i>Caracterización del amortiguador con <math>m=10g</math> y <math>\delta/a=0.2</math></i>	59
Tabla 5-9. <i>Caracterización del amortiguador con <math>m=10g</math> y <math>\delta/a=0.4</math></i>	59
Tabla 5-10. <i>Caracterización del amortiguador con <math>m=100g</math> y <math>\delta/a=0.4</math></i>	60



# ÍNDICE DE FIGURAS

---

Figura 1-1. <i>Amortiguador de coche</i>	1
Figura 1-2. <i>Esquema del interior de un amortiguador fluido</i>	1
Figura 1-3. <i>Sistema críticamente amortiguado y sobreamortiguado</i>	3
Figura 1-4. <i>Respuesta subamortiguada, <math>\beta/\omega_0=0.375</math></i>	3
Figura 1-5. <i>Disco de frenos del tren bala japonés</i>	5
Figura 2-1. <i>Esquema de un amortiguador magnético</i>	7
Figura 2-2. <i>Modelo de dipolo de Ampère y Gilbert</i>	9
Figura 2-3. <i>Variables de longitud en el resorte elástico</i>	12
Figura 3-1. <i>Esquema de un amortiguador electromagnético formado por un tubo conductor</i>	15
Figura 3-2. <i>Densidad de potencia</i>	17
Figura 3-3. <i>Potencia disipada por un anillo de espesor <math>\epsilon</math></i>	18
Figura 3-4. <i>Potencia disipada en función de la longitud del tubo con <math>z_0=0</math></i>	20
Figura 3-5. <i>Potencia disipada en función de la posición del dipolo y de la longitud del tubo</i>	21
Figura 3-6. <i>Potencia disipada según la posición del dipolo con <math>L</math> fija</i>	21
Figura 3-7. <i>Detalle de potencia disipada según posición del dipolo</i>	23
Figura 3-8. <i>Potencia disipada para tubo de longitud infinita según el espesor del tubo</i>	27
Figura 3-9. <i>Cociente de potencias para un tubo infinito</i>	28
Figura 3-10. <i>Potencia disipada en función de <math>a</math> para distintos espesores del tubo</i>	28
Figura 3-11. <i>Potencia disipada por un tubo finito en función del espesor con <math>z_0=0</math></i>	29
Figura 3-12. <i>Cociente de potencias disipadas para tubos finitos</i>	30
Figura 4-1. <i>Dipolo frente a una superficie plana</i>	31
Figura 4-2. <i>Densidad de potencia radial con <math>d_0/a=1</math></i>	33
Figura 4-3. <i>Densidad de potencia radial con posición del dipolo fija</i>	33
Figura 4-4. <i>Potencia disipada en una superficie circular plana</i>	35
Figura 4-5. <i>Potencia disipada en función de <math>d_0</math> con <math>a</math> fijo</i>	36
Figura 4-6. <i>Potencia disipada por un plano infinito en función del espesor</i>	37
Figura 4-7. <i>Cociente de potencias para un plano infinto</i>	38
Figura 4-8. <i>Potencia disipada por una superficie circular plana en función del espesor</i>	39
Figura 4-9. <i>Cociente de potencias disipadas para superficies circulares</i>	39
Figura 4-10. <i>Dipolo moviéndose entre dos superficies conductoras circulares</i>	41
Figura 4-11. <i>Dipolo moviéndose frente a una superficie conductora superior</i>	41
Figura 4-12. <i>Coefficiente de fricción asociado a un dipolo entre dos superficies circulares</i>	42

Figura 5-1. <i>Masa del amortiguador en función de la esbeltez</i>	46
Figura 5-2. <i>Porcentajes de masas asociadas al tubo y a las tapas respecto a la masa total</i>	46
Figura 5-3. <i>Potencia total disipada por el amortiguador</i>	48
Figura 5-4. <i>Potencia disipada por el amortiguador para <math>L/a \in [0, 1.2]</math></i>	49
Figura 5-5. <i>Potencia disipada por el amortiguador para <math>L/a \in [2.7, 5]</math></i>	50
Figura 5-6. <i>Potencia disipada por el amortiguador para <math>L/a \in [1.2, 2.7]</math></i>	50
Figura 5-7. <i>Potencia disipada por el amortiguador en función de <math>z_0</math> con <math>L/a \in [1, 2]</math></i>	51
Figura 5-8. <i>Potencia disipada por el amortiguador en función de <math>z_0</math> con <math>L/a \in [2.5, 3.5]</math></i>	52
Figura 5-9. <i>Potencia disipada por el amortiguador en función de <math>z_0</math> con <math>L/a \in [4, 5]</math></i>	52
Figura 5-10. <i>Respuesta del amortiguador con <math>L/a=1</math></i>	54
Figura 5-11. <i>Respuesta del amortiguador con <math>L/a=5</math></i>	54
Figura 5-12. <i>Amplitud máxima de las oscilaciones en función de la esbeltez</i>	56
Figura 5-13. <i>Respuesta del sistema con <math>L/a=2</math>, <math>\delta/a=0.1</math>, <math>m=1g</math>, <math>z_0=0</math> y <math>v_0=0.5cm/s</math></i>	57
Figura 5-14. <i>Energía cinética con <math>L/a=2</math>, <math>\delta/a=0.1</math>, <math>m=1g</math>, <math>z_0=0</math> y <math>v_0=0.5cm/s</math></i>	58
Figura 5-15. <i>Respuesta del sistema con <math>L/a=20</math>, <math>\delta/a=0.4</math>, <math>m=10g</math>, <math>z_0=0</math> y <math>v_0=30cm/s</math></i>	59
Figura 5-16. <i>Energía cinética con <math>L/a=20</math>, <math>\delta/a=0.4</math>, <math>m=10g</math>, <math>z_0=0</math> y <math>v_0=30cm/s</math></i>	60





# 1 INTRODUCCIÓN

*Hay una fuerza motriz más poderosa que el vapor, la electricidad y la energía atómica: la voluntad.*

Albert Einstein

Cualquier sistema mecánico puede verse sometido a excitaciones que originen respuestas vibratorias. Las vibraciones pueden afectar al rendimiento del sistema, tener efectos desestabilizares, provocar daños estructurales o favorecer la fatiga de los materiales, disminuyendo la vida útil del sistema. Para diseñar cualquier máquina o estructura, se debe tener en cuenta el fenómeno vibratorio. Una forma de proceder consiste en actuar sobre las características del sistema, de manera que su respuesta ante una excitación origine menos vibraciones [1].

El amortiguamiento es un proceso que permite disipar energía de un sistema vibratorio. Generalmente, la energía se disipa en forma de calor. En caso de vibraciones libres (estas se originan cuando el sistema se desplaza de su posición de equilibrio o este recibe un impacto), el amortiguamiento reduce la amplitud de las vibraciones a las que está sometido el sistema mecánico. Los principales tipos de amortiguamiento son: el amortiguamiento fluido, el amortiguamiento seco o de Coulomb y el amortiguamiento estructural. El amortiguamiento fluido puede ser viscoso o turbulento. El tipo de amortiguamiento que genera un amortiguador basado en corrientes de Foucault es de tipo viscoso, como se comprueba en los capítulos posteriores [1].

## 1.1 El oscilador amortiguado



Figura 1-1. *Amortiguador de coche*  
Imagen tomada de [2]

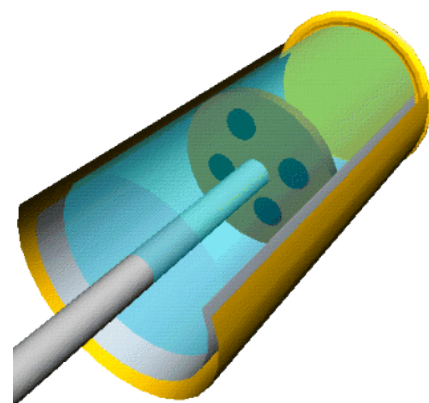


Figura 1-2. *Esquema del interior de un amortiguador fluido*  
Imagen tomada de [3]

En las figuras 1-1 y 1-2, se muestra un amortiguador fluido y un esquema de su interior. Cualquier amortiguador fluido típico posee un resorte y un pistón con orificios, contenido en un cilindro. A su vez, este

cilindro contiene al fluido.

Ante cualquier perturbación que reciba el amortiguador, el resorte comenzaría a oscilar. El pistón, que está ligado al resorte, también se movería y por tanto, obliga al fluido a atravesar los orificios del pistón. La fricción generada al pasar el fluido por el pistón provoca que se disipe la energía en forma de calor. Como consecuencia del movimiento del fluido, se genera una diferencia de presiones a ambos lados del pistón responsable de la aparición de una fuerza que se opone al movimiento relativo entre el pistón y el cilindro que lo contiene.

Se dice que el amortiguamiento es viscoso cuando el fluido se mueve por los orificios en régimen laminar. Suponiendo que uno de los extremos del amortiguador está fijo y el otro es móvil (el extremo móvil se mueve con velocidad  $\mathbf{v}$ ), la fuerza de amortiguamiento,  $\mathbf{F}_a$ , viene dada por

$$\mathbf{F}_a = -\gamma\mathbf{v}, \quad (1.1)$$

donde  $\gamma$  es el coeficiente de fricción y depende de la geometría interna del amortiguador (cilindro, orificios y pistón) y de la viscosidad del fluido.

En el caso del movimiento rectilíneo y empleando la variable  $x$  para describir la posición del extremo móvil del amortiguador, cuyo origen se toma en la posición de equilibrio estático, la fuerza de amortiguamiento es

$$F_a = -\gamma\dot{x}. \quad (1.2)$$

El resorte elástico, el cual forma parte del amortiguador, ejerce una fuerza que se puede modelar con la ley de Hooke [3]. En el caso de considerar un movimiento unidimensional, la fuerza elástica es

$$F_e = -kx. \quad (1.3)$$

La combinación del amortiguamiento viscoso con un oscilador (modelado por un resorte de constante elástica  $k$ ) permite obtener un oscilador amortiguado. El resorte es el responsable de que se produzcan oscilaciones ante perturbaciones del sistema y el amortiguamiento viscoso actúa como una fuerza de fricción que reduce la amplitud de las oscilaciones y por tanto, el sistema de masa  $m$ , que está conectado al amortiguador, tenderá a su posición de equilibrio estático ante cualquier perturbación.

Para resolver la dinámica del sistema, se aplica la segunda ley de Newton y se obtiene que

$$m\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + kx(t) = 0. \quad (1.4)$$

Dividiendo la ecuación (1.4) por la masa y aplicando que  $\beta = \gamma/2m$  (coeficiente de amortiguamiento) y  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  (frecuencia natural del sistema) se obtiene que

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = 0, x(0) = x_0 \text{ y } \dot{x}(0) = v_0. \quad (1.5)$$

Esta ecuación, junto a las condiciones de posición y velocidad, permiten obtener la respuesta del sistema.

A continuación, se explican de manera cualitativa, los distintos casos de amortiguamiento en función de valores de los parámetros que intervienen en el sistema y se muestra la respuesta del sistema mediante representaciones gráficas con el fin de ilustrar las situaciones posibles. En el siguiente capítulo, se hace una descripción más detallada de la solución a esta ecuación, expresando las soluciones analíticas correspondientes a las gráficas representadas en este primer capítulo.

En función del valor de la relación  $\beta/\omega_0$ , el sistema responderá de tres formas distintas:

- Si  $\beta/\omega_0 > 1$  se dice que el sistema está sobreamortiguado (expresión analítica en (2.22)).
- Si  $\beta/\omega_0 = 1$  se dice que el sistema está críticamente amortiguado (expresión analítica en (2.23)).



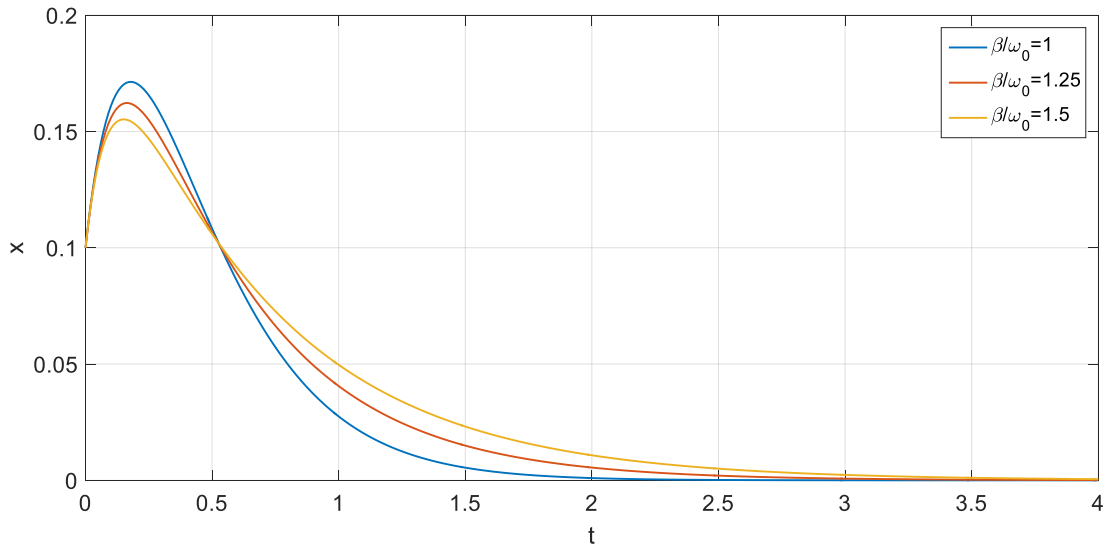


Figura 1-3. Sistema críticamente amortiguado y sobreamortiguado

Se puede observar en la figura 1-3, que para el caso críticamente amortiguado y sobreamortiguado, el sistema regresa a su posición de equilibrio sin oscilar. También, se observa que al aumentar la relación de amortiguamiento  $\beta/\omega_0$ , se consigue que el máximo de la amplitud se reduzca, pero al aumentar dicha relación el sistema responde de una forma más lenta y tarda más tiempo en alcanzar la posición de equilibrio.

- Si  $\beta/\omega_0 < 1$  se dice que el sistema está subamortiguado (expresión analítica en (2.24)).

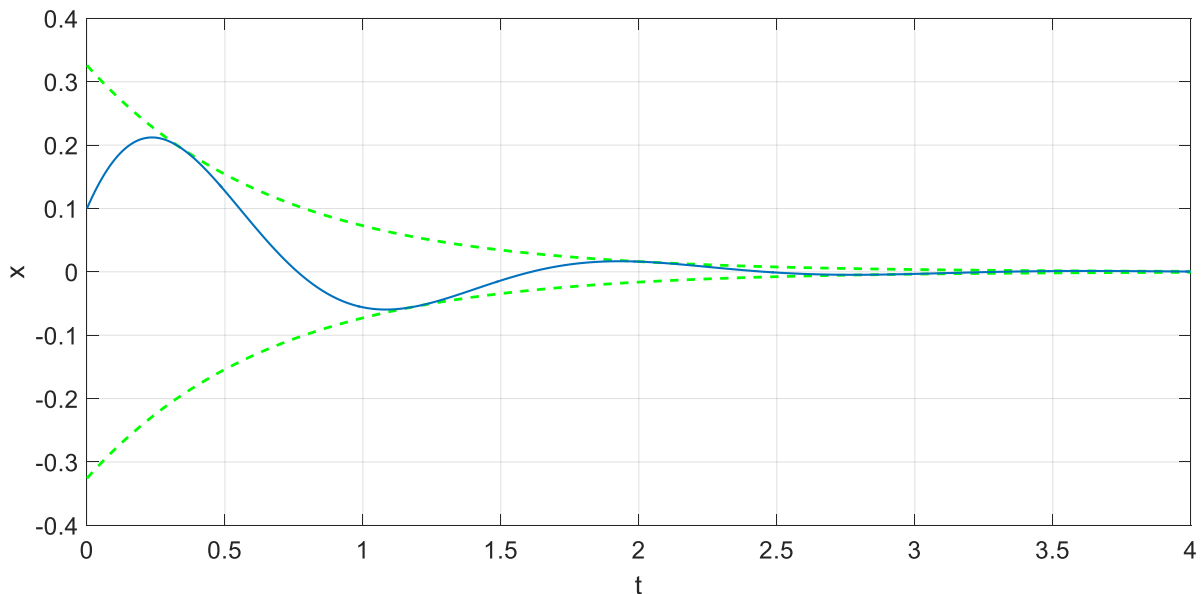


Figura 1-4. Respuesta subamortiguada,  $\beta/\omega_0=0.375$

Las condiciones iniciales empleadas para las representaciones de las respuestas anteriormente dibujadas son:  $x(0) = 0.1\text{m}$  y  $\dot{x}(0) = 1\text{ms}^{-1}$ .

De los tres tipos de respuestas posibles, el caso subamortiguado es el que permite al sistema regresar a su posición de equilibrio de la forma más rápida posible.

En algunas aplicaciones de amortiguadores mecánicos, como los utilizados en los coches de pasajeros, es necesario llegar a un compromiso entre el control que se tiene sobre el vehículo y el confort que experimentan los pasajeros. Una relación de amortiguamiento  $\beta/\omega_0$  comprendida entre 0.3 y 0.4 es la que se usa

habitualmente en estos coches y proporciona un nivel de confort óptimo. En cambio, para coches de carreras se suele usar una relación de amortiguamiento próxima a la unidad, ya que prima el control sobre el confort [4]. Además, para relaciones de amortiguamiento comprendidas entre 0.3 y 0.4, se consigue que el sistema regrese a su posición de equilibrio de forma más rápida, disminuyendo la posibilidad de que el sistema sea perturbado nuevamente, antes de que haya regresado a su posición de equilibrio tras la primera perturbación.

## 1.2 Corrientes de Foucault: aplicación en frenos y amortiguadores magnéticos

Una alternativa a los amortiguadores viscosos fue propuesta hace dos décadas y son los amortiguadores basados en corrientes de Foucault (Eddy current damper, ECD). Los elementos principales de un amortiguador basado en corrientes de Foucault son un imán y un material conductor, existiendo un movimiento relativo entre ellos. Las ventajas que ofrecen estos amortiguadores son: ausencia de contacto entre el imán y el elemento conductor, ausencia de fugas (ya que este tipo de amortiguadores no usan fluidos) y su implementación sencilla [5].

En estos dispositivos, la fuerza responsable del amortiguamiento es de naturaleza magnética y esta surge debido al fenómeno de la inducción electromagnética.

Michael Faraday descubrió experimentalmente que al variar el flujo magnético sobre una espira, se induce en esta una corriente. Su descubrimiento permitió enunciar la ley de inducción electromagnética de Faraday. Esta ley establece que al variar el flujo magnético sobre el objeto conductor aparece una fuerza electromotriz inducida. Esta fuerza electromotriz hace que circule una corriente eléctrica. La ley de Lenz establece que el sentido de la corriente inducida es tal que se opone al flujo que la originó [6].

Las variaciones de flujo magnético se pueden conseguir cuando exista un movimiento relativo entre el elemento conductor en el que se inducen las corrientes y la fuente que genera un campo magnético o cuando exista un campo magnético externo variable con el tiempo.

Los frenos magnéticos son una de las aplicaciones del fenómeno de la inducción electromagnética. A continuación, se explica los principios básicos de los frenos magnéticos ya que los amortiguadores basados en corrientes de Foucault se fundamentan en estos.

Los frenos magnéticos permiten desacelerar o frenar un cuerpo en movimiento, convirtiendo la energía cinética en energía calorífica. A diferencia de los frenos de fricción en los que se consigue la fuerza a través de la fricción generada al presionar dos superficies entre sí, los frenos basados en corrientes de Foucault crean una fuerza magnética responsable del frenado. Esta fuerza aparece como consecuencia del movimiento relativo entre el imán y un objeto conductor cercano al imán. Al variar el flujo magnético sobre el objeto conductor, la ley de inducción electromagnética de Faraday establece que se generan unas corrientes eléctricas inducidas llamadas corrientes de Foucault. El sentido de la corriente viene determinado por la ley de Lenz, por lo que el sentido de la corriente es tal que se opone a la variación del flujo magnético. Como consecuencia de este fenómeno de inducción electromagnética, el cuerpo en movimiento (el disco de frenos) experimenta una fuerza de frenado proporcional a su velocidad, por lo que actúa de manera similar a la fricción viscosa de un líquido. Los discos de frenos magnéticos consiguen disminuir su energía cinética al transformarse esta en energía calorífica. La energía cinética se disipa en calor a través del efecto Joule (el calor se genera por la circulación de las corrientes inducidas por un elemento con resistencia eléctrica) [7].

Un ejemplo para ilustrar este fenómeno es el freno empleado por los trenes bala japoneses.

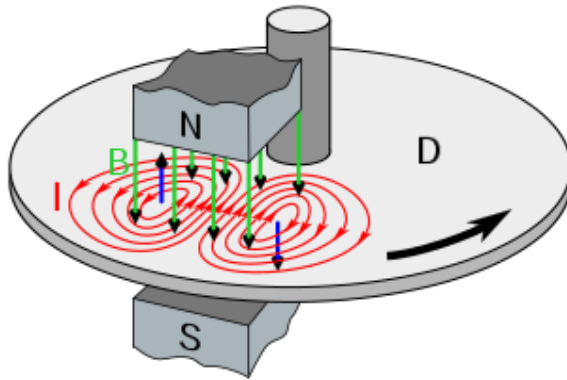


Figura 1-5. Disco de frenos del tren bala japonés

Imagen tomada de [7]

A medida que el disco se acerca al imán, el flujo magnético que atraviesa al disco varía (en el lado izquierdo del disco aumenta y en el derecho disminuye). Según la ley de inducción electromagnética de Faraday, se inducen corrientes cuyo sentido es tal que el campo magnético inducido por ellas se opone a la variación de flujo magnético. Como consecuencia, aparecerá una fuerza magnética de frenado que se opone al movimiento.



# 2 DESCRIPCIÓN GENERAL DEL SISTEMA Y FUNDAMENTOS FÍSICOS

*Si no conozco una cosa,  
la investigaré.*

Louis Pasteur

En este trabajo, se va a abordar el estudio de un amortiguador basado en el movimiento de un dipolo magnético puntual frente a un elemento conductor. El fundamento físico que explica el funcionamiento del amortiguador es el fenómeno de la inducción electromagnética.

Además, es necesario caracterizar el campo magnético generado por el dipolo en movimiento, para posteriormente, obtener la fuerza magnética que actúa sobre el dipolo y finalmente, resolver la ecuación del movimiento, una vez que se hayan caracterizado todas las fuerzas que actúan en el imán.

## 2.1 Descripción del sistema

En la siguiente figura, se muestra un esquema del amortiguador basado en un dipolo moviéndose por el interior de un tubo conductor.

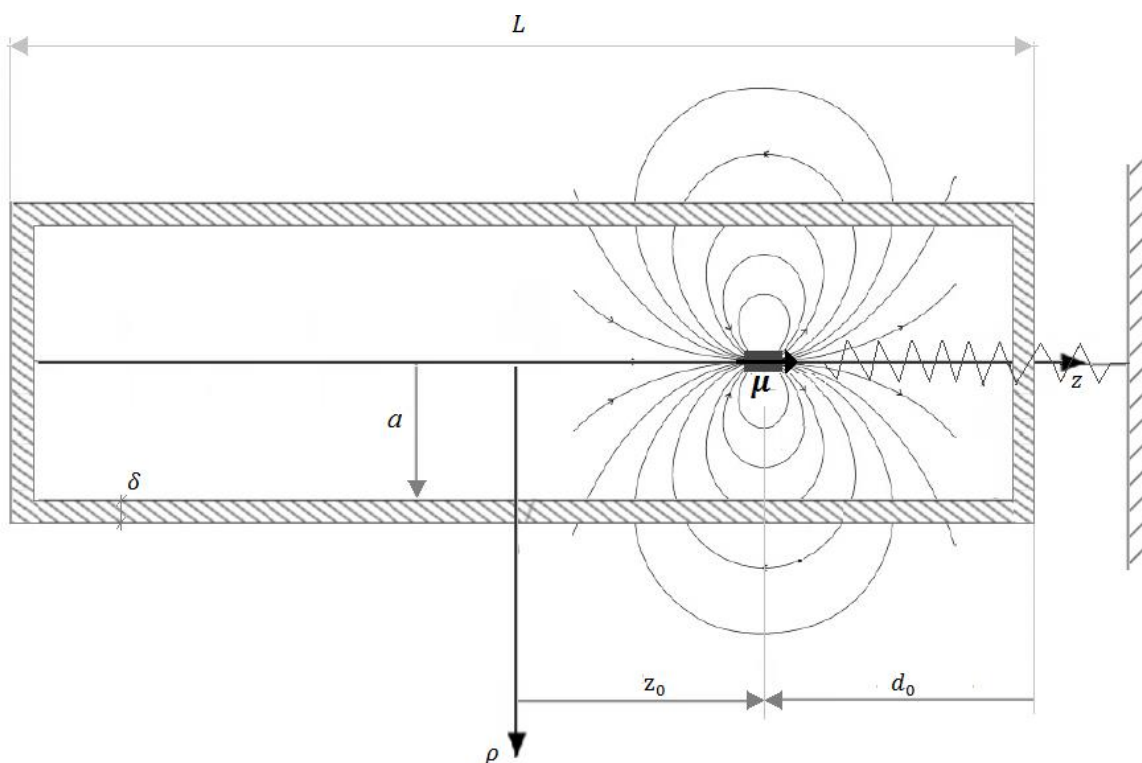


Figura 2-1. Esquema de un amortiguador magnético

El amortiguador está formado por:

- Un tubo cilíndrico de conductividad  $\sigma$ , de radio interior  $a$ , longitud  $L$  y espesor  $\delta$ .
- Dos tapas circulares en los extremos del tubo de conductividad  $\sigma$  y espesor  $\delta$ .
- Un muelle de constante elástica  $k$  y longitud natural  $l_0$ .
- Un dipolo magnético situado en el interior del tubo y unido al muelle. El dipolo está centrado según el eje del tubo por lo que su momento dipolar magnético coincide con el eje  $z$ . El dipolo tiene una masa  $m$ .

La variable  $z_0(t)$  mide la distancia a la que se encuentra el dipolo respecto a la sección central del tubo. Esta variable será positiva cuando su sentido coincida con el del eje  $z$  indicado en la figura. Se va a suponer que la posición del dipolo, cuando el sistema está en equilibrio estático, viene dada por  $z_0 = 0$  (el dipolo se encuentra en la sección media del tubo conductor).

En primer lugar, se va a analizar un amortiguador formado por un tubo y con sus extremos libres. En un capítulo posterior, se va a analizar el efecto que tendría sobre la capacidad de amortiguamiento, emplear superficies planas conductoras. Finalmente, en otro capítulo, se abordará si es conveniente considerar un diseño final de amortiguador que incluya el tubo y tapas circulares en los extremos del tubo.

## 2.2 Inducción electromagnética

Maxwell predijo teóricamente que la variación temporal de un campo eléctrico inducía un campo magnético y Faraday descubrió experimentalmente que un campo magnético variable con el tiempo, inducía un campo eléctrico. Ambos descubrieron que los campos eléctricos y magnéticos están relacionados y que es conveniente tratar ambos campos en su conjunto y referirse a ellos como campos electromagnéticos [8].

El comportamiento de los campos electromagnéticos viene descrito por las ecuaciones de Maxwell [8]. De las 4 ecuaciones que forman el conjunto de las ecuaciones de Maxwell, se emplearán para la realización de este trabajo la conocida como ley de Faraday y la ley de Gauss para el campo magnético.

La ley de Faraday [8] se deduce de la experiencia y establece que un campo magnético  $\mathbf{B}$  variable con el tiempo, que actúa sobre un circuito, origina un campo eléctrico inducido  $\mathbf{E}$  que satisface la siguiente relación:

$$\varepsilon = \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.1)$$

La ley de Faraday se aplica en un contorno  $\Gamma$  y en una superficie  $S$ . Para el tubo del amortiguador de la figura 2-1, el contorno  $\Gamma$  se corresponde con cada anillo circunferencial, que define cada sección transversal del tubo. Para las tapas circulares de los extremos del tubo, el contorno  $\Gamma$  es el asociado a las circunferencias concéntricas, cuyos centros son coincidentes con el de su respectiva tapa circular. El área encerrada por cada una de las curvas dadas por  $\Gamma$ , define el área  $S$ . Puesto que se va a considerar el circuito en reposo (la superficie  $S$  y el contorno  $\Gamma$  del circuito son fijos), la ley de Faraday puede expresarse como

$$\varepsilon = \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{d\phi_B}{dt}. \quad (2.2)$$

La ecuación (2.2) establece que la fuerza electromotriz inducida es proporcional a la velocidad con la que varía el flujo magnético en el circuito. La ley de Lenz establece que el sentido de la corriente inducida es tal que se opone a la variación de flujo que la originó.

Aplicando el teorema de Stokes en (2.2) se obtiene la formulación diferencial de esta ley:

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.3)$$

La ecuación (2.3) se conoce como la ley de Maxwell-Faraday.

Otra ley, que forma parte de las ecuaciones de Maxwell, es la Ley de Gauss [8] para el campo magnético y establece que

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{2.4}$$

Es una ecuación universal, la cual implica la imposibilidad de aislar los polos de un imán.

### 2.3 Dipolo magnético: Modelos y campo magnético $\mathbf{B}$ generado

Un dipolo magnético es un elemento puntual que produce un campo magnético dipolar [9]

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0))(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 \boldsymbol{\mu}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^5}. \tag{2.5}$$

- La cantidad que caracteriza el dipolo es el momento magnético dipolar,  $\boldsymbol{\mu}$  (en la figura 2-2 representada como  $\mathbf{m}$ ).
- $\mathbf{r}_0$  es el vector de posición del dipolo magnético y  $\mathbf{r}$  es el vector de posición que representa el punto en el que se evalúa el campo magnético. La expresión (2.5) es válida para todos los puntos, excepto para el punto en el que se encuentra el dipolo ( $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ ).

Al comparar esta ecuación con el campo eléctrico generado por un dipolo eléctrico, se observa que ambas expresiones son formalmente idénticas. Esto permite interpretar los dipolos según dos visiones [9]:

- **Modelo de Ampère:** visión en la cual, el dipolo es una pequeña espira de corriente.
- **Modelo de Gilbert:** el dipolo está formado por dos cargas magnéticas (conocidas como polo norte y polo sur)

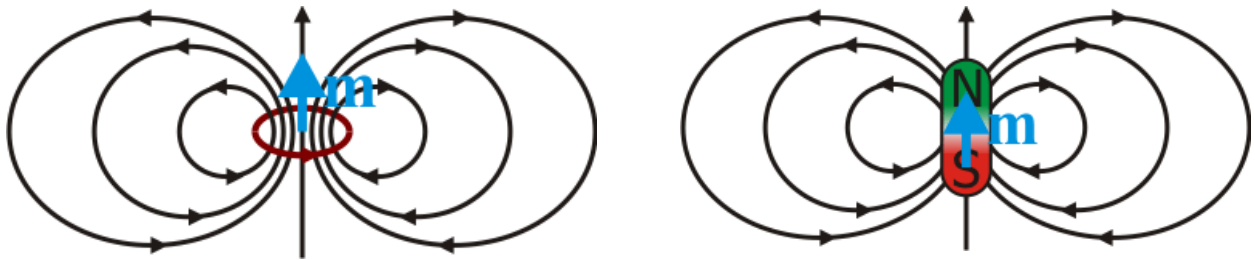


Figura 2-2. Modelo de dipolo de Ampère y Gilbert

Figura tomada de [9]

Para ambos modelos, los campos magnéticos que producen los dipolos magnéticos son idénticos salvo en el punto en el que se encuentra el dipolo (punto en el que no se puede caracterizar el campo magnético). Sin embargo, la experiencia muestra que todos los dipolos corresponden al modelo de Ampère y pueden ser considerados como espiras de corriente.

Debido a que la divergencia de  $\mathbf{B}$  es nula, el campo magnético  $\mathbf{B}$  se puede expresar como el rotacional de un campo vectorial. Este campo vectorial es el potencial magnético vector,  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{2.6}$$

Para un dipolo magnético, el potencial vector es [8]

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{\mu} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}. \tag{2.7}$$

En este trabajo, se va a considerar un sistema de referencia tal que el eje  $z$  coincide en dirección y sentido con  $\mu$ . Además, el eje  $z$  coincidirá con el eje del tubo y será perpendicular a las superficies planas que se consideren (plano o tapas circulares de material conductor colocadas en los extremos del tubo). Considerando estos ejes, se observa la existencia de simetría cilíndrica de los problemas que se van a abordar, por lo que es conveniente emplear un sistema de referencia cilíndrico para simplificar los cálculos.

El potencial vector dado por (2.7), expresado en coordenadas cilíndricas es

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu \rho \mathbf{e}_\theta}{(\rho^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}}. \quad (2.8)$$

Aplicando (2.6) sobre el potencial vector dado por (2.8) se obtiene que el campo magnético del dipolo expresado en coordenadas cilíndricas es

$$\mathbf{B} = \frac{3(z - z_0)\mu\mu_0\rho}{4\pi((z - z_0)^2 + \rho^2)^{5/2}} \mathbf{e}_\rho - \left( \frac{3\mu\mu_0\rho^2}{4\pi((z - z_0)^2 + \rho^2)^{5/2}} + \frac{\mu\mu_0}{2\pi((z - z_0)^2 + \rho^2)^{3/2}} \right) \mathbf{k}. \quad (2.9)$$

Se ha tenido en cuenta que los vectores de posición  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}_0$  expresados en coordenadas cilíndricas son

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \rho\mathbf{u}_\rho + z\mathbf{k}, \quad \text{con } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ y } \mathbf{r}_0 = z_0\mathbf{k}.$$

En las ecuaciones (2.7-2.8), se ha supuesto que el momento dipolar magnético va orientado en la dirección positiva del eje  $z$  (polo norte arriba y polo sur abajo). Si se considera el imán orientado de forma opuesta, las expresiones cambian de signo.

## 2.4 Fuerza magnética que actúa sobre el imán: Potencia disipada por el elemento conductor

El imán moviéndose en las proximidades de un elemento conductor, experimenta una fuerza magnética que es la responsable del amortiguamiento. En este apartado, se aborda el cálculo de esta fuerza. Para ello, se seguirá un procedimiento basado en la idea de que el imán se detiene al disipar su energía en forma de calor. Además, se sabe que la potencia disipada por el elemento conductor es el producto de la fuerza responsable del amortiguamiento por la velocidad del imán. Obteniendo la expresión de la potencia disipada y teniendo en cuenta que el factor que acompaña a la velocidad es la fuerza responsable del amortiguamiento, se puede obtener la fuerza de amortiguamiento de la expresión de la potencia.

La ley de Joule [6] establece que la potencia eléctrica disipada en forma de calor en un volumen  $V$  es

$$P = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV. \quad (2.10)$$

La densidad de corriente  $\mathbf{J}$  se relaciona con el campo eléctrico a través de la forma puntual de la ley de Ohm [6]. Esta ley establece que  $\mathbf{J}$  es

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (2.11)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (2.11), la potencia dada en (2.10) puede expresarse como una función de la geometría del elemento conductor y del campo eléctrico existente en dicho elemento, obteniéndose



$$P = \int_V \sigma E^2 dV = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho d\rho \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \sigma E(\rho, z)^2. \quad (2.12)$$

La ecuación (2.12) permite obtener la potencia disipada cuando se conozca el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  que aparece en todos los puntos del elemento conductor. Para calcular  $\mathbf{E}$  se va a emplear la ecuación (2.3) y (2.6):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t} \rightarrow \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mu, \rho, z, z_0)}{\partial t} - \nabla \phi. \quad (2.13)$$

La expresión general del campo eléctrico en función del potencial vector es la indicada en la ecuación (2.13). Debido a la simetría del problema que se va a abordar en este trabajo, es posible simplificar la ecuación (2.13) haciendo nulo el término del potencial  $\phi$ . La simetría del problema permite asegurar que las líneas del campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , fluyen a través del material conductor, de manera circunferencial sobre el material, considerando nulo el término del potencial. El campo eléctrico para este problema es

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mu, \rho, z, z_0)}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z_0} \frac{\partial z_0}{\partial t} = -v \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z_0}. \quad (2.14)$$

La ecuación (2.14) permite obtener el campo eléctrico en todos los puntos del conductor a partir de la velocidad a la que se mueve el imán y de su potencial vector. Introduciendo en (2.14), el potencial vector de un dipolo, se obtiene el campo eléctrico inducido en el tubo conductor

$$\mathbf{E} = -v \frac{3(z - z_0)\mu\mu_0\rho}{4\pi((z - z_0)^2 + \rho^2)^{5/2}} \mathbf{u}_\theta. \quad (2.15)$$

En la expresión anterior, se ha despreciado el efecto de la autoinducción de las corrientes eléctricas inducidas.

## 2.5 Dinámica del sistema

En este apartado, se pretende caracterizar las fuerzas que actúan sobre el dipolo, para posteriormente, plantear la ecuación que describe el movimiento del imán.

El imán está sometido a las siguientes acciones:

- Peso  $mg$ : el dipolo está sometido a la influencia de la gravedad, pero este efecto se absorbe con la fuerza elástica.
- Fuerza magnética  $F_r$ : Actúa como una fuerza de amortiguamiento viscoso, que se opone al movimiento y se expresa como el producto del coeficiente de fricción  $\gamma$ , y de la velocidad  $\dot{z}_0(t)$ . Esta fuerza queda caracterizada tras modelar el coeficiente de fricción, estudio realizado en capítulos posteriores.
- Fuerza elástica del resorte: el imán está unido a un muelle de longitud natural  $l_0$  y constante elástica  $k$ . Para describir la fuerza elástica ejercida por el resorte, se usa la variable  $z_0$ . Esta variable tiene su origen en la posición de equilibrio estático del sistema. Para determinar esta posición hay que tener en cuenta que la acción del peso del imán provoca que el muelle se alargue respecto a su longitud natural una distancia  $z_{eq} = mg/k$  y como  $z_0 = 0$  cuando el sistema está en su posición de equilibrio estático, se deduce que el extremo superior del muelle está a una distancia  $l_0 + z_{eq}$  del origen de  $z_0$ . Con esta variable, la fuerza elástica queda como

$$\mathbf{F}_e = k(l_0 + z_{eq} - z_0 - l_0)\mathbf{k} = k(z_{eq} - z_0)\mathbf{k}. \quad (2.16)$$

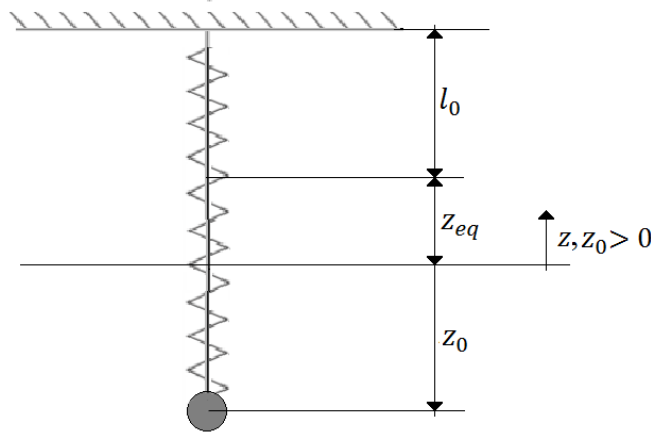


Figura 2-3. Variables de longitud en el resorte elástico

Definidas las fuerzas que actúan en el sistema, se puede aplicar la segunda ley de Newton,  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  y se obtiene que la ecuación del movimiento del imán es

$$-\gamma(z_0(t))\dot{z}_0(t)\mathbf{k} + k\left(\frac{mg}{k} - z_0(t)\right)\mathbf{k} - mg\mathbf{k} = m\ddot{z}_0(t)\mathbf{k} \rightarrow$$

$$m\ddot{z}_0(t) + \gamma(z_0(t))\dot{z}_0(t) + kz_0(t) = 0. \quad (2.17)$$

La ecuación (2.17) se debe resolver junto a dos condiciones iniciales ( $z_0(0)$  y  $\dot{z}_0(0)$  se supondrán conocidas).

En el caso general, el coeficiente de fricción  $\gamma$  es una función de la posición del imán y por tanto, habría que resolver numéricamente la ecuación (2.17) para obtener  $z_0(t)$ . Sin embargo, como se comprueba en capítulos posteriores, existen situaciones en las que el coeficiente de fricción permanece prácticamente constante y no varía con la posición del imán. Esto implica que (2.17) pasa a ser una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden en estos casos. A continuación, se van a desarrollar las soluciones de la ecuación (2.17) para los casos en los que  $\gamma$  se aproxima a un valor constante.

La ecuación (2.17) puede expresarse de forma análoga a la ecuación (1.5), aplicando la definición del coeficiente de amortiguamiento  $\beta$  y de la frecuencia natural del sistema  $\omega_0$ , obteniéndose

$$\ddot{z}_0(t) + 2\beta\dot{z}_0(t) + \omega_0^2 z_0(t) = 0. \quad (2.18)$$

La solución general a la ecuación (2.18) es del tipo

$$z_0(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (2.19)$$

con  $A_1$  y  $A_2$  constantes que dependen de las condiciones iniciales del problema.

Los valores de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son las raíces de la ecuación característica

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \quad (2.20)$$

Según el resultado obtenido en (2.20), la solución general (2.19) se puede expresar como

$$z_0(t) = e^{-\beta t} \left( A_1 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right). \quad (2.21)$$

Observando (2.21), se deduce que la forma de  $z_0(t)$  viene dada por el valor de  $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ . En función de esta raíz se tienen los siguientes casos:

- Si  $\beta > \omega_0$ , se dice que el sistema está sobreamortiguado. La posición  $z_0(t)$  viene dada por

$$z_0(t) = \frac{\lambda_2 z_0(0) - \dot{z}_0(0)}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1 z_0(0) - \dot{z}_0(0)}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t}. \quad (2.22)$$

- Si  $\beta = \omega_0$ , se dice que el sistema está críticamente amortiguado. La posición  $z_0(t)$  viene dada por

$$z_0(t) = [z_0(0) + (\dot{z}_0(0) + \beta z_0(0))t] e^{-\beta t}. \quad (2.23)$$

- Si  $\beta < \omega_0$ , se dice que el sistema está subamortiguado. La posición  $z_0(t)$  viene dada por

$$z_0(t) = e^{-\beta t} \left[ z_0(0) \cos(\omega t) + \frac{\dot{z}_0(0) + \beta z_0(0)}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \text{sen}(\omega t) \right] \text{ con } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (2.24)$$

En las ecuaciones (2.22-2.24), se ha expresado  $A_1$  y  $A_2$  en función de las condiciones iniciales del problema.

El amortiguamiento crítico proporciona la forma más rápida de volver a la posición de equilibrio del sistema sin que se produzcan oscilaciones. Con menor amortiguamiento (caso subamortiguado), se llega a la posición de equilibrio más rápidamente, pero oscila en torno a esta posición. En el caso sobreamortiguado, la llegada a la posición de equilibrio es más lenta.



# 3 DIPOLO EN MOVIMIENTO POR EL INTERIOR DE UN TUBO CONDUCTOR

*Inténtalo, aquel que nunca cometió un error jamás intentó nada nuevo.*

Albert Einstein

El objetivo de este capítulo es calcular la fuerza magnética que aparece sobre el dipolo del amortiguador de la figura 3-1, cuando el imán se encuentra en movimiento. Se va a proceder según lo explicado en el capítulo anterior, caracterizando la potencia disipada durante el movimiento para obtener, a partir de esta, la fuerza magnética y modelar dicha fuerza como el producto de la velocidad del dipolo y el coeficiente de fricción. En el desarrollo de este capítulo, se estudia las implicaciones que tienen sobre la potencia disipada la longitud del tubo conductor y la posición que ocupa el dipolo durante el movimiento, y en qué casos es posible considerar el coeficiente de fricción constante. Este capítulo finaliza con una descripción de las condiciones que deben cumplir los parámetros que intervienen en el sistema para conseguir un determinado tipo de amortiguamiento.

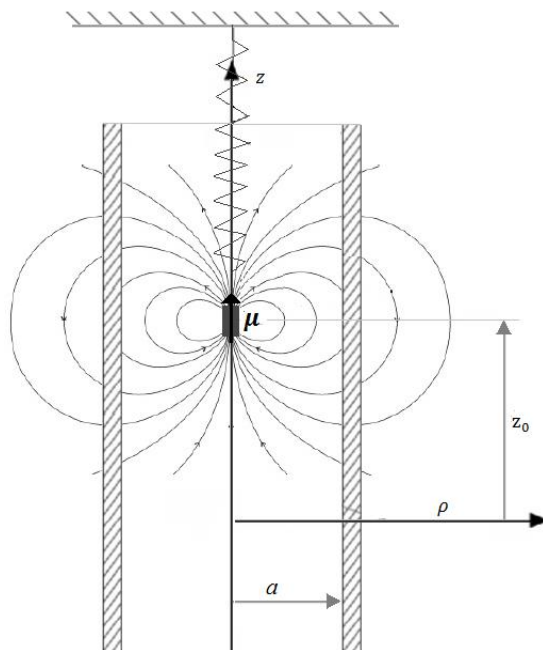


Figura 3-1. Esquema de un amortiguador electromagnético formado por un tubo conductor

### 3.1 Fuerza magnética responsable del amortiguamiento: potencia disipada por el tubo conductor

Como se ha detallado en el capítulo 2, la fuerza se va a calcular a partir de la potencia disipada. Para ello, se particulariza en (2.12) con la geometría del tubo y teniendo en cuenta el valor del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  dado en (2.15), se obtiene

$$P = \int_V \sigma E^2 dV = \int_a^{a+\delta} \rho d\rho \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz \int_0^{2\pi} d\theta \sigma \left( v \frac{3(z-z_0)\mu\mu_0\rho}{4\pi((z-z_0)^2 + \rho^2)^{5/2}} \right)^2. \quad (3.1)$$

De la potencia, se puede obtener la fuerza magnética que actúa en el imán, teniendo en cuenta que el producto de la fuerza por la velocidad es la potencia disipada por el tubo conductor.

A continuación, se considera que el espesor del tubo conductor es despreciable frente al radio interior  $a$ , lo que permite simplificar el cálculo de la integral que proporciona la potencia disipada por el tubo. En epígrafes posteriores, se estudiará cuál es el efecto del espesor en la potencia disipada y se expresará la relación que deben satisfacer el espesor y el radio interior para que el tubo pueda considerarse de pared delgada.

### 3.2 Tubo de pared delgada: Fuerza magnética y potencia disipada

Considerando un tubo cuyo espesor  $\delta$  es despreciable frente a su radio  $a$ , la expresión (3.1) queda como

$$P = 2\pi a \delta \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sigma \left( v \frac{3(z-z_0)\mu\mu_0 a}{4\pi((z-z_0)^2 + a^2)^{5/2}} \right)^2 dz. \quad (3.2)$$

De la ecuación (3.2) se puede obtener la potencia disipada por unidad de longitud

$$p = 2\pi a \delta \sigma E(a, z)^2 = \frac{9a^3 \delta \mu^2 \mu_0^2 v^2 \sigma (z-z_0)^2}{8\pi (a^2 + (z-z_0)^2)^5}. \quad (3.3)$$

La potencia disipada por unidad de longitud o densidad de potencia, dada en (3.3), permite cuantificar la contribución de cada sección que forma el tubo en el proceso de disipación de energía.

Para visualizar qué secciones contribuyen significativamente en la disipación de energía se va a llevar a cabo la representación gráfica de la densidad de potencia. Considerando el instante de tiempo en el cual el imán está situado en la parte central del tubo conductor ( $z_0(t) = 0$ ), la potencia disipada por cada sección, que forma el tubo, es

$$p = \frac{9a^3 \delta \mu^2 \mu_0^2 v^2 \sigma}{8\pi} \frac{z^2}{(a^2 + z^2)^5} = \frac{9a^3 \delta \mu^2 \mu_0^2 v^2 \sigma}{8\pi} \frac{\frac{z^2}{a^{10}}}{\left(\frac{a^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2}\right)^5} = \frac{9\delta \mu^2 \mu_0^2 v^2 \sigma}{8\pi a^5} \frac{\frac{z^2}{a^2}}{\left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right)^5} =$$

$$p = C \frac{\frac{z^2}{a^2}}{\left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right)^5}, \text{ donde } C = \frac{9\delta \mu^2 \mu_0^2 v^2 \sigma}{8\pi a^5}. \quad (3.4)$$

A continuación, se representa la potencia por unidad de longitud o densidad de potencia, dada por (3.4)

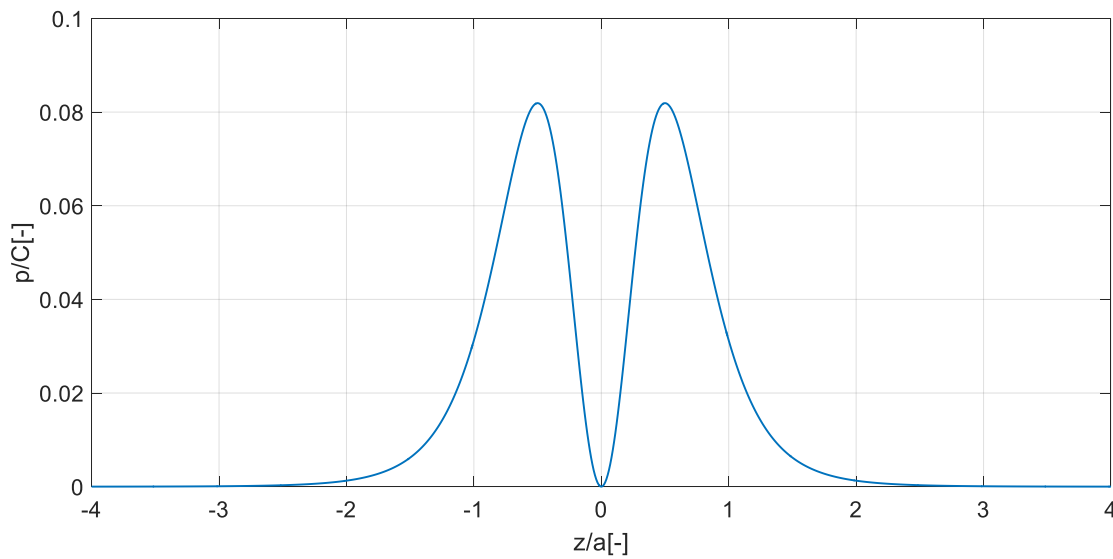


Figura 3-2. Densidad de potencia

De esta gráfica se pueden deducir las regiones del tubo en las que se disipa mayor energía. Estas zonas se corresponden con la parte superior e inferior del tubo respecto a la posición que en cada instante de tiempo tiene el imán, dada por  $\bar{z}_0$ . A continuación, se muestra el porcentaje de potencia que disipa el tubo según las secciones que se consideren de este.

Tabla 3-1. Porcentaje de potencia disipada según intervalos del tubo

Intervalo	Porcentaje de potencia disipada
$\frac{z}{a} \in [\bar{z}_0 - 0.5, \bar{z}_0 + 0.5]$	35.53%
$\frac{z}{a} \in [\bar{z}_0 - 1, \bar{z}_0 + 1]$	83.95%
$\frac{z}{a} \in [\bar{z}_0 - 2, \bar{z}_0 + 2]$	99.23%
$\frac{z}{a} \in [\bar{z}_0 - 4, \bar{z}_0 + 4]$	99.98%

Las secciones del tubo comprendidas en  $z_0/a \in [\bar{z}_0 - 2, \bar{z}_0 + 2]$ , se encargan de disipar el 99.23% de la energía cuando el imán se mueve por el interior del tubo.

La potencia disipada, dada por la ecuación (3.2), se obtiene al integrar en la longitud del tubo. Se van a estudiar los casos en los que el tubo tiene una longitud infinita y finita. Los resultados del estudio realizado para un tubo infinito permitirán detectar en qué situaciones, un tubo de longitud finita se comporta como un tubo infinito.

### 3.2.1 Tubo de pequeña longitud. Anillo

En primer lugar, se va a analizar un tubo de longitud  $\varepsilon \ll a$ , por lo que la forma de este tubo se asemejará a la de un anillo. Con esta consideración, es posible calcular la potencia disipada, considerando la densidad de potencia de todas las secciones que forman el anillo constante e igual a la que se obtiene en la sección media dada por  $z = 0$ . Con esta simplificación, se obtiene una potencia disipada

$$P = \frac{9\delta\mu^2\mu_0^2v^2\sigma\epsilon}{8\pi a^5} \frac{\frac{z_0^2}{a^2}}{\left(1 + \frac{z_0^2}{a^2}\right)^5} = C\epsilon \frac{\frac{z_0^2}{a^2}}{\left(1 + \frac{z_0^2}{a^2}\right)^5}. \quad (3.5)$$

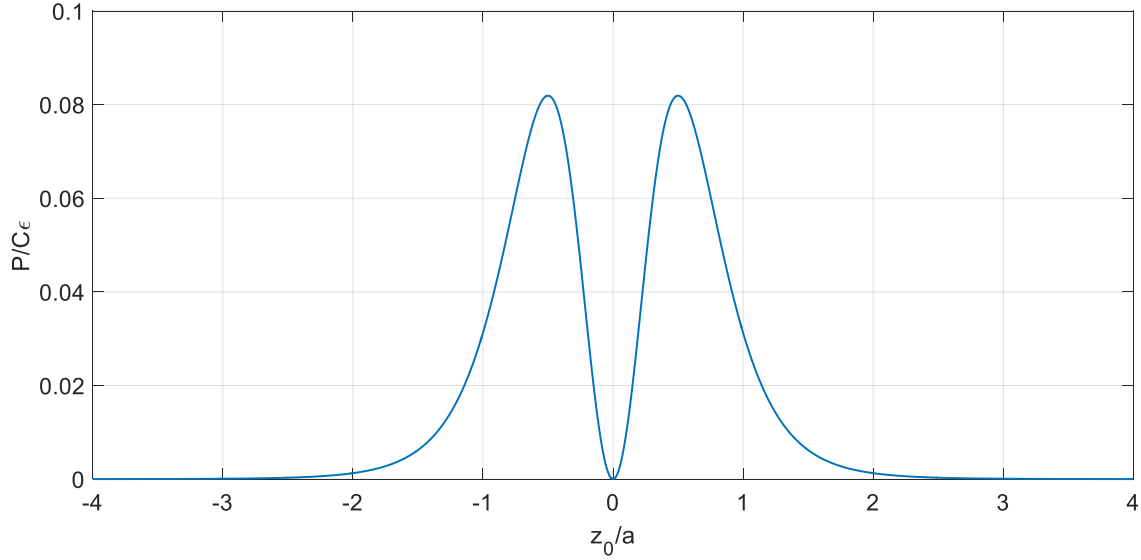


Figura 3-3. Potencia disipada por un anillo de espesor  $\epsilon$

De la gráfica anterior se deduce que el anillo disipa la máxima potencia posible cuando el dipolo está a una distancia  $z_0/a = \pm 0.5$  respecto al anillo. La potencia disipada por el anillo es nula cuando el dipolo se encuentra en la sección media del anillo y a distancias lejanas del anillo.

### 3.2.2 Tubo de longitud infinita

En este apartado, se va a considerar un tubo de longitud infinita. Se va a aplicar el cambio de variable

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{z - z_0}{a} \quad (3.6)$$

para simplificar el cálculo de la potencia dada por la ecuación (3.2), obteniéndose

$$\begin{aligned} P_{L \rightarrow \infty} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{9a^3\delta\mu^2\mu_0^2v^2\sigma(z - z_0)^2}{8\pi(a^2 + (z - z_0)^2)^5} dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{9a^3\delta\mu^2\mu_0^2v^2\sigma \text{tg}^2(\alpha) \cos^8(\alpha)}{8\pi a^7} d\alpha = \\ &= P_{L \rightarrow \infty} = \frac{45\delta\mu^2\mu_0^2\sigma v^2}{1024a^4}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

El cálculo de la integral anterior y las sucesivas en este trabajo, se realizan con el software Mathematica. Considerando la potencia disipada como el producto escalar de la fuerza magnética por la velocidad del imán

$$P = |\mathbf{F}_r \cdot \mathbf{v}| = -F_r v = \gamma v^2 \quad (3.8)$$

y comparando el resultado obtenido en (3.7) con la expresión en (3.8), se obtiene la fuerza magnética que actúa en el imán,



$$F_r = -\frac{45\delta\mu^2\mu_0^2\sigma v}{1024a^4} = -\gamma v. \quad (3.9)$$

De los resultados obtenidos en (3.7) y (3.9) se deduce que:

- Cuanto mayor sea el coeficiente de fricción  $\gamma$ , mayor es la potencia disipada y la fuerza de amortiguamiento que actúa sobre el imán.
- Interesaría emplear materiales con una conductividad alta y tubos con radios pequeños para aumentar el coeficiente de amortiguamiento.
- Ni la fuerza  $F_r$ , ni la potencia disipada dependen de la posición del imán,  $z_0(t)$ .

### 3.2.3 Tubo de longitud finita

En este apartado, se va a calcular la potencia disipada y la fuerza de amortiguamiento que actúa sobre el imán en movimiento por el interior de un tubo conductor de longitud finita. Para ello, se emplea el mismo procedimiento que el seguido en el apartado anterior para un tubo de longitud infinita.

De la ecuación (3.2) se obtiene que la potencia disipada por el tubo conductor de longitud  $L$  es

$$P = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} p dz = \frac{3v^2\mu^2\mu_0^2\sigma\delta}{1024a^4\pi} \left( 15\text{arctg}\left(\frac{L-2z_0}{2a}\right) + 15\text{arctg}\left(\frac{L+2z_0}{2a}\right) + \frac{a\left(\frac{L}{2}-z_0\right)\left(-15a^6 + \frac{73}{4}a^4(L-2z_0)^2 + \frac{55}{16}a^2(L-2z_0)^4 + \frac{15}{64}(L-2z_0)^6\right)}{\left(a^2 + \frac{1}{4}(L-2z_0)^2\right)^4} - \frac{a\left(-\frac{L}{2}-z_0\right)\left(-15a^6 + \frac{73}{4}a^4(L+2z_0)^2 + \frac{55}{16}a^2(L+2z_0)^4 + \frac{15}{64}(L+2z_0)^6\right)}{\left(a^2 + \frac{1}{4}(L+2z_0)^2\right)^4} \right). \quad (3.10)$$

Se puede comprobar que si la longitud del tubo tiende a infinito, se obtiene el resultado dado por (3.7):

$$\lim_{L \rightarrow \infty} P = \frac{3v^2\mu^2\mu_0^2\sigma\delta}{1024a^4\pi} \left( \frac{15\pi}{2} + \frac{15\pi}{2} + 0 + 0 \right) = \frac{45v^2\mu^2\mu_0^2\sigma\delta}{1024a^4}$$

La fuerza, que actúa sobre el dipolo, se obtiene de la misma manera que en el caso del tubo de longitud infinita,

$$F = -\frac{3v\mu^2\mu_0^2\sigma\delta}{1024a^4\pi} \left( 15\text{arctg}\left(\frac{L-2z_0}{2a}\right) + 15\text{arctg}\left(\frac{L+2z_0}{2a}\right) + \frac{a\left(\frac{L}{2}-z_0\right)\left(-15a^6 + \frac{73}{4}a^4(L-2z_0)^2 + \frac{55}{16}a^2(L-2z_0)^4 + \frac{15}{64}(L-2z_0)^6\right)}{\left(a^2 + \frac{1}{4}(L-2z_0)^2\right)^4} - \frac{a\left(-\frac{L}{2}-z_0\right)\left(-15a^6 + \frac{73}{4}a^4(L+2z_0)^2 + \frac{55}{16}a^2(L+2z_0)^4 + \frac{15}{64}(L+2z_0)^6\right)}{\left(a^2 + \frac{1}{4}(L+2z_0)^2\right)^4} \right). \quad (3.11)$$

Como puede observarse en la expresión anterior, el coeficiente de fricción deja de ser constante en el caso de considerar un tubo de longitud finita.

#### 3.2.3.1 Potencia disipada según la longitud del tubo. Imán en la sección central del tubo

Puesto que se ha considerado que el dipolo oscila en torno a la sección central del tubo, cuando el imán oscile con una amplitud muy pequeña o la longitud del tubo sea suficientemente grande para considerar que las

amplitudes de las oscilaciones son despreciables frente a  $L$ , el coeficiente de fricción  $\gamma$  puede aproximarse al que se obtiene al considerar el dipolo en la sección central del tubo. Por esta razón, se realiza en este apartado, un análisis en el cual, se considera que el imán se encuentra sobre la sección central del tubo conductor ( $z_0 = 0$ ). La potencia dada en (3.10) puede simplificarse y queda como

$$P = \frac{3v^2 \delta \mu^2 \mu_0^2 \sigma}{512a^4 \pi} \left( \frac{-1920a^7 L + 2336a^5 L^3 + 440a^3 L^5 + 30aL^7}{(4a^2 + L^2)^4} + 15 \operatorname{arctg} \left( \frac{L}{2a} \right) \right)$$

$$\rightarrow \frac{P(\bar{L})}{P_{L \rightarrow \infty}} = \frac{2}{15\pi} \left( \frac{-1920\bar{L} + 2336\bar{L}^3 + 440\bar{L}^5 + 30\bar{L}^7}{(4 + \bar{L}^2)^4} + 15 \operatorname{arctg} \left( \frac{\bar{L}}{2} \right) \right). \quad (3.12)$$

En (3.12), se ha adimensionalizado la longitud con el radio del tubo,  $\bar{L} = L/a$ , y la potencia se adimensionaliza con el valor obtenido para el caso de tubo infinito dado en la expresión (3.7). La variable  $\bar{L}$  se denomina esbeltez o relación de aspecto.

A continuación, se representa la potencia total disipada cuando el imán está en la sección central del tubo conductor en función de la longitud del tubo.

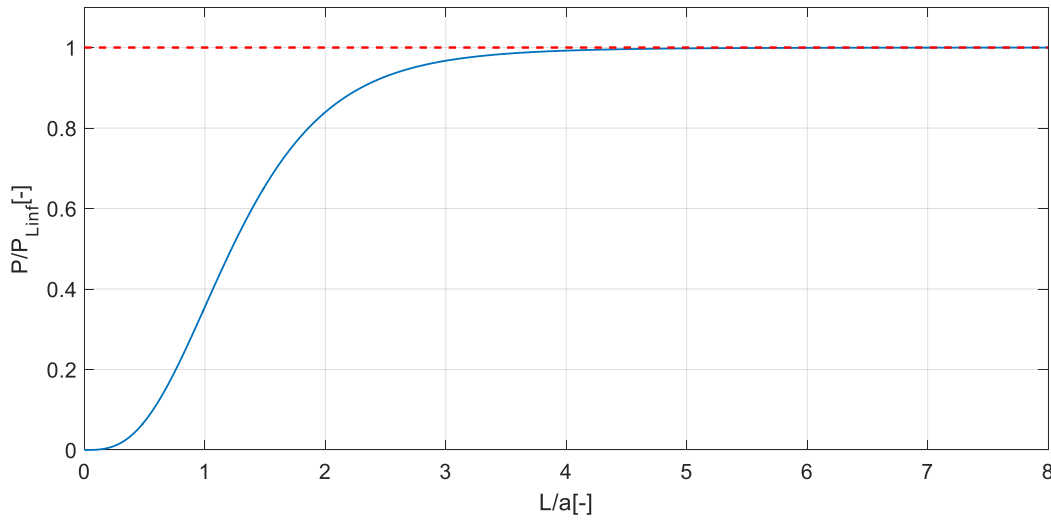


Figura 3-4. Potencia disipada en función de la longitud del tubo con  $z_0=0$

De la gráfica anterior, se deduce que la potencia disipada aumenta con la longitud del tubo y converge asintóticamente al valor de la potencia disipada en caso del tubo de longitud infinita.

### 3.2.3.2 Potencia disipada en función de la posición del imán $z_0$

En este epígrafe, se va a obtener la potencia disipada en función de la posición que ocupa el imán en cada instante de tiempo, considerando distintos valores de longitudes del tubo.

Por simplicidad en la representación gráfica, se adimensionaliza la fórmula obtenida en (3.10) con las variables adimensionales  $\bar{L} = L/a$ ,  $\bar{z}_0 = z_0/a$  y con el valor de la potencia calculado en (3.7), obteniéndose que

$$\frac{P}{P_{L \rightarrow \infty}} = \frac{1}{15\pi} \left( 15 \operatorname{arctg} \left( \frac{\bar{L} - 2\bar{z}_0}{2} \right) + 15 \operatorname{arctg} \left( \frac{\bar{L} + 2\bar{z}_0}{2} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\left( \frac{\bar{L}}{2} - \bar{z}_0 \right) \left( -15 + \frac{73}{4} (\bar{L} - 2\bar{z}_0)^2 + \frac{55}{16} (\bar{L} - 2\bar{z}_0)^4 + \frac{15}{64} (\bar{L} - 2\bar{z}_0)^6 \right)}{\left( 1 + \frac{1}{4} (\bar{L} - 2\bar{z}_0)^2 \right)^4} \right)$$

$$\frac{\left(-\frac{\bar{L}}{2} - \bar{z}_0\right) \left(-15 + \frac{73}{4}(\bar{L} + 2\bar{z}_0)^2 + \frac{55}{16}(\bar{L} + 2\bar{z}_0)^4 + \frac{15}{64}(\bar{L} + 2\bar{z}_0)^6\right)}{\left(1 + \frac{1}{4}(\bar{L} + 2\bar{z}_0)^2\right)^4}. \quad (3.13)$$

A continuación, se representa de forma tridimensional la expresión (3.13). También, se incluye una representación bidimensional, considerando la longitud del tubo constante.

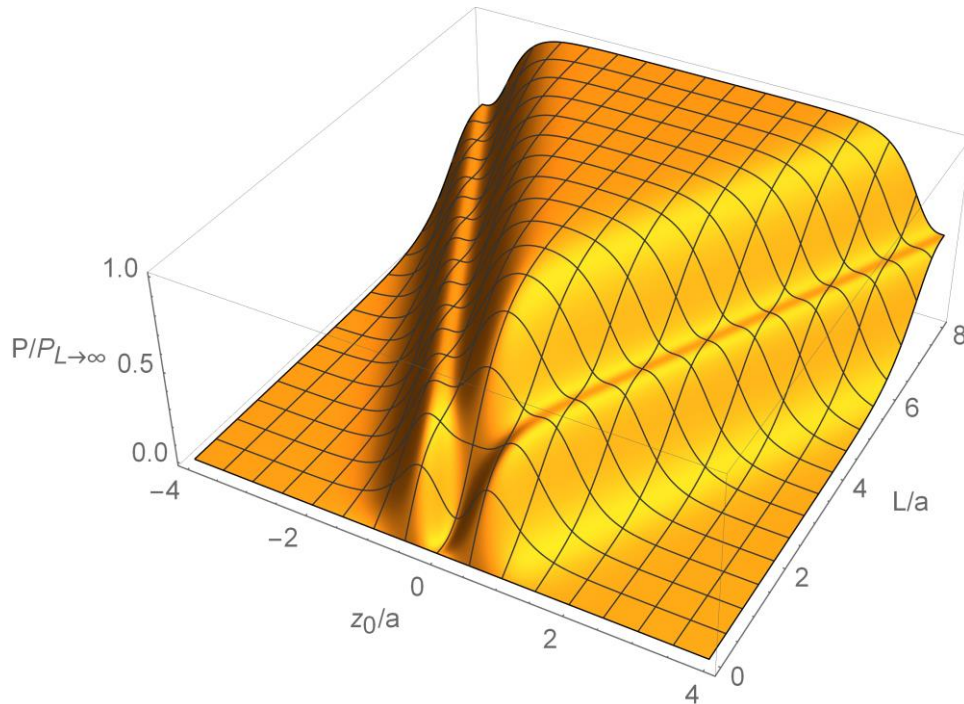


Figura 3-5. Potencia disipada en función de la posición del dipolo y de la longitud del tubo

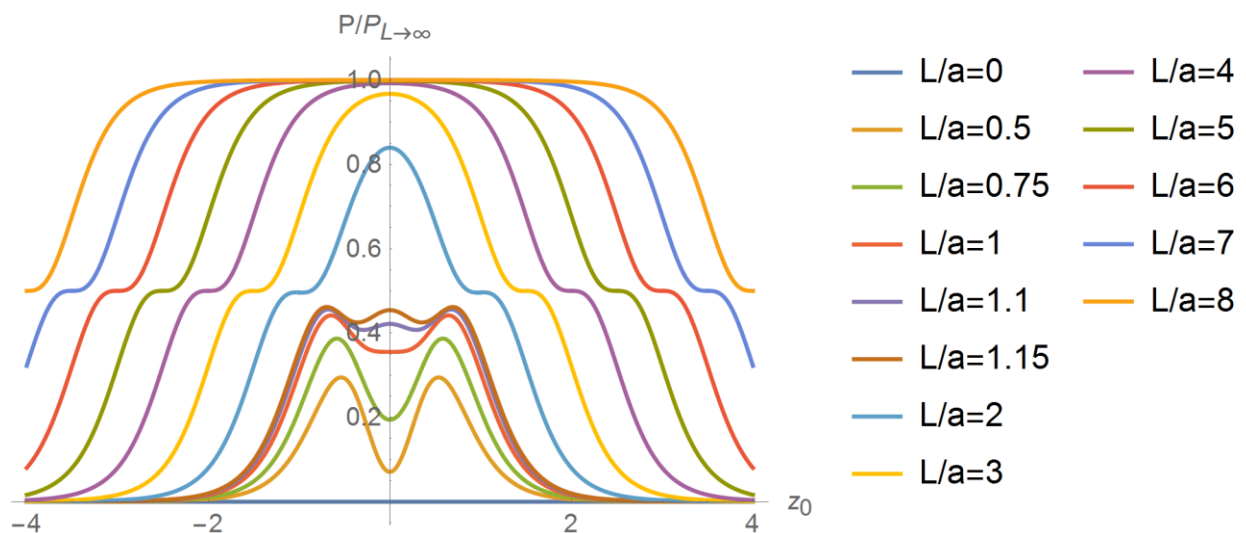


Figura 3-6. Potencia disipada según la posición del dipolo con  $L$  fija

De las gráficas representadas pueden obtenerse las siguientes conclusiones:

- La potencia disipada adimensional es proporcional a la longitud del tubo adimensional: al aumentar esta longitud, la potencia disipada aumenta mientras que al disminuir la longitud, la potencia adimensional disminuye, tendiendo a cero en caso de que la longitud del tubo también tienda a cero.

- La potencia adimensional disminuye y tiende a cero a medida que el dipolo se aleja del interior del tubo conductor,  $|\bar{z}_0| \gg \bar{L}/2$ .

La gráfica de la figura 3-2 es esencial para comprender la forma de las curvas que se han obtenido. La densidad de potencia establece cuáles son las secciones del tubo que disipan mayor cantidad de potencia según la posición que ocupe el dipolo. Los porcentajes de potencia que disipan las regiones del tubo según la posición que ocupe el imán están recogidos en la tabla 3-1. En esta gráfica, se observa que las zonas en las que se disipa principalmente potencia, son las zonas superior e inferior respecto a la posición del dipolo en cada instante de tiempo, siendo la densidad de potencia cero en la sección del tubo en la que se encuentre el imán en cada instante  $t$  y en secciones lejanas a la posición que ocupa el dipolo en dicho instante.

Teniendo en cuenta los resultados de la densidad de potencia se puede concluir que:

- Los valores máximos de potencia adimensional disipada de la figura 3-6, se consiguen cuando las regiones adyacentes a la posición que ocupa el imán en cada instante (regiones a las que les corresponde una densidad de potencia alta o máxima) se encuentran en el interior del tubo, por lo tanto, cuanto mayor sea la longitud del tubo, habrá más secciones a las que les corresponda las zonas de máxima densidad de potencia y por lo tanto, la disipación es mayor.
- En tubos de longitudes pequeñas, según la posición que ocupe el imán, las secciones que se encargarían de disipar la mayor parte de potencia pueden no corresponderse con secciones reales del tubo al tener este una longitud insuficiente. Al desplazar el dipolo de su posición de equilibrio se observa que se incrementa la potencia disipada. Esto se debe a que con el desplazamiento se consigue incrementar la densidad de potencia de las secciones del tubo.
- Para  $\bar{L} \geq 2$ , se observa que tras los máximos de potencia adimensional cuando el imán está en la sección media del tubo, y a medida que  $|\bar{z}_0|$  aumenta, existe una región constante en torno a  $P/P_{L \rightarrow \infty} = 0.5$ . Esto se debe a que solo una de las dos ramas de la gráfica de densidad de potencia tiene correspondencia con las secciones que forman el tubo. Si se siguiese desplazando el imán hacia los extremos del tubo, la contribución de cada sección en la disipación de potencia disminuye y la potencia adimensional tiende a cero.
- Cuando la longitud del tubo es suficientemente grande para que intervalos como  $[\bar{z}_0 - 2, \bar{z}_0 + 2]$  (con este intervalo se consigue una disipación de potencia del 99.23%) o de mayor amplitud, estén contenidos dentro del tubo, la potencia adimensional apenas varía con la posición del dipolo.

Se observa que, para tubos de longitud  $\bar{L} = 1$ , donde la derivada segunda de la potencia adimensional en  $\bar{z}_0 = 0$  es nula, la potencia adimensional es constante para un intervalo aproximado de posiciones  $\bar{z}_0$  del dipolo dado por  $(-0.5, 0.5)$ . También, se observa que en tubos de longitud muy próxima a  $\bar{L} = 1$ , como se muestra en la figura 3-7, les corresponde una potencia adimensional, que varía levemente con las posiciones del dipolo dadas en el intervalo anterior y por tanto, se puede aproximar el coeficiente de fricción constante cuando el dipolo ocupe las posiciones dadas por dicho intervalo. Estos tubos, los cuales no tienen una longitud suficiente para admitir la simplificación de tubo infinito, si permiten aproximar el coeficiente de fricción como un valor constante.

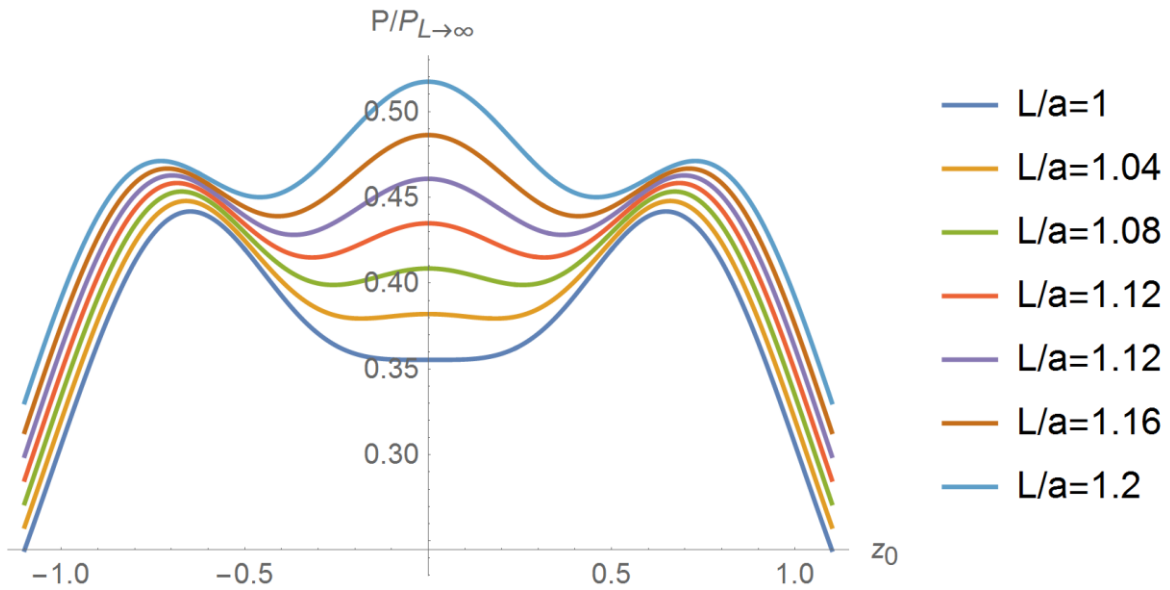


Figura 3-7. Detalle de potencia disipada según posición del dipolo

Para finalizar este apartado, se concluye que el coeficiente de fricción  $\gamma$  puede aproximarse a un valor constante, siempre y cuando la potencia adimensional no varíe con la posición del dipolo. Esto se tiene en los siguientes casos:

- Cuando se consideran oscilaciones de amplitud muy pequeñas en torno a la sección central (la amplitud máxima de las oscilaciones es mucho menor que las dimensiones características del amortiguador;  $|z_0^{max}| \ll a, d_0, L/2$ ).
- Cuando la amplitud de las oscilaciones sea despreciable frente a la longitud del tubo (aproximación a tubo infinito) y no se consideran oscilaciones pequeñas.
- Cuando los tubos que se consideran son de longitud  $\bar{L} \cong 1$ .

En estos casos, en los cuales el coeficiente de fricción es constante, la ecuación del movimiento del dipolo se convierte en una ecuación homogénea de segundo orden.

### 3.3 Dinámica del amortiguador

Tras la caracterización de la potencia disipada, es inmediato obtener la fuerza magnética que se ejerce sobre el dipolo. Definidas las fuerzas, es posible abordar la resolución de la ecuación del movimiento.

En el análisis de gran amplitud, la resolución de la ecuación del movimiento debe abordarse mediante la resolución numérica de la ecuación del movimiento, mientras que en el análisis de pequeña amplitud de las oscilaciones, es decir,  $|z_0^{max}| \ll a, L/2$ , o en las situaciones anteriormente detectadas con  $\gamma$  constante es posible obtener de manera analítica la respuesta del sistema.

En este apartado, se va a indicar la respuesta del amortiguador  $z_0(t)$  cuando se realice un análisis de pequeña amplitud, considerando tubos de longitud finita o infinita. Para ello, se particularizan las condiciones que determinan cada tipo de amortiguamiento con el fin de establecer la relación que deben cumplir los parámetros del amortiguador según los distintos tipos de amortiguamiento.

#### 3.3.1 Amortiguador con tubo de pared delgada y de longitud infinita

De la ecuación (3.9) se deduce que el coeficiente de fricción  $\gamma_\infty$  es:

$$\gamma_{\infty} = \frac{45\delta\mu^2\mu_0^2\sigma}{1024a^4} \quad (3.14)$$

De (3.14) se puede deducir que la ecuación del movimiento del dipolo es homogénea de segundo orden y por tanto,  $z_0(t)$  viene dada por las expresiones (2.22-2.24), según el tipo de amortiguamiento que posea el sistema.

A continuación, se va a particularizar las condiciones que definen cada tipo de amortiguamiento con el coeficiente de fricción dado por (3.14). Esto permite obtener la relación que deben cumplir los parámetros del sistema para conseguir cada tipo de amortiguamiento.

- **Sistema críticamente amortiguado:** De la condición que define este caso,  $\beta = \omega_0$ , se deduce:

$$\frac{\gamma_{\infty}}{2m} = \omega_0 \rightarrow \gamma_{\infty} = 2\sqrt{km} \rightarrow \frac{45\delta\mu^2\mu_0^2\sigma}{1024a^4} = 2\sqrt{km} \quad (3.15)$$

- **Sistema sobreamortiguado:** De la condición  $\beta > \omega_0$ , se obtiene:

$$\gamma_{\infty} > 2\sqrt{km} \rightarrow \frac{45\delta\mu^2\mu_0^2\sigma}{1024a^4} > 2\sqrt{km} \quad (3.16)$$

- **Sistema subamortiguado:** De la condición que define este caso,  $\beta < \omega_0$ , se obtiene:

$$\gamma_{\infty} < 2\sqrt{km} \rightarrow \frac{45\delta\mu^2\mu_0^2\sigma}{1024a^4} < 2\sqrt{km} \quad (3.17)$$

Las condiciones obtenidas en (3.15-3.17) permiten determinar el tipo de amortiguamiento del sistema en función de los valores de los siguientes parámetros:

- parámetros relacionados con la geometría del tubo y su conductividad.
- la constante elástica del muelle.
- la masa y el momento dipolar magnético del imán que oscila por el interior del tubo.

Suponiendo que se fijan todos los parámetros excepto el valor del radio del tubo se obtienen las relaciones que debe satisfacer  $a$  según el tipo de amortiguamiento:

- **Sistema críticamente amortiguado:**

$$\frac{\gamma_{\infty}}{2m} = \omega_0 \rightarrow \gamma_{\infty} = \frac{45\delta\mu^2\mu_0^2\sigma}{1024a^4} = 2\sqrt{km} \rightarrow a_{\infty}^{\text{critico}} = \sqrt[4]{\frac{45\delta\mu^2\mu_0^2\sigma}{2048\sqrt{km}}} \quad (3.18)$$

- **Sistema sobreamortiguado:**

$$\gamma_{\infty} > 2\sqrt{km} \rightarrow \frac{45\delta\mu^2\mu_0^2\sigma}{1024a^4} > 2\sqrt{km} \rightarrow a_{\infty} < \sqrt[4]{\frac{45\delta\mu^2\mu_0^2\sigma}{2048\sqrt{km}}} \quad (3.19)$$

- **Sistema subamortiguado:**

$$\gamma_{\infty} < 2\sqrt{km} \rightarrow \frac{45\delta\mu^2\mu_0^2\sigma}{1024a^4} < 2\sqrt{km} \rightarrow a_{\infty} > \sqrt[4]{\frac{45\delta\mu^2\mu_0^2\sigma}{2048\sqrt{km}}} \quad (3.20)$$

Como cabría esperar, el amortiguamiento se incrementa al disminuir el radio del tubo, ya que el campo magnético que afectaría al tubo sería de mayor magnitud, al estar el tubo más próximo al dipolo, y el

fenómeno de inducción electromagnética sería más intenso, obteniéndose una mayor fuerza de amortiguamiento.

### 3.3.2 Amortiguador con tubo de pared delgada y de longitud finita

A partir de la ecuación (3.11), que expresa la fuerza de amortiguamiento para tubos de longitud finita y según la posición del dipolo, se obtiene que el coeficiente de fricción para estos casos es

$$\gamma = \frac{3\mu^2\mu_0^2\sigma\delta}{1024a^4\pi} \left( 15\text{arctg}\left(\frac{L-2z_0}{2a}\right) + 15\text{arctg}\left(\frac{L+2z_0}{2a}\right) + \frac{a\left(\frac{L}{2}-z_0\right)\left(-15a^6 + \frac{73}{4}a^4(L-2z_0)^2 + \frac{55}{16}a^2(L-2z_0)^4 + \frac{15}{64}(L-2z_0)^6\right)}{\left(a^2 + \frac{1}{4}(L-2z_0)^2\right)^4} - \frac{a\left(-\frac{L}{2}-z_0\right)\left(-15a^6 + \frac{73}{4}a^4(L+2z_0)^2 + \frac{55}{16}a^2(L+2z_0)^4 + \frac{15}{64}(L+2z_0)^6\right)}{\left(a^2 + \frac{1}{4}(L+2z_0)^2\right)^4} \right). \quad (3.21)$$

En el caso general, como puede observarse en (3.21), el coeficiente de fricción es una función de la posición del dipolo por lo que la resolución de la ecuación del movimiento debe realizarse numéricamente.

Como se ha explicado anteriormente en el apartado 3.2.3.2, existen tres situaciones en las que el coeficiente de fricción es prácticamente constante cuando el tubo es de longitud finita: oscilaciones de pequeña amplitud, cuando  $L \gg a$  (aproximación a tubo infinito) o para  $L \cong a$ . Para estos casos, se puede aproximar el coeficiente de fricción al que se obtiene considerando el dipolo en la sección central del tubo. La ecuación (3.12) representa la potencia disipada por un tubo de longitud finita cuando el imán está en la sección media del tubo, que es el caso que se está analizando. De esta ecuación, se obtiene que el coeficiente de fricción  $\gamma$  para un tubo de longitud finita es:

$$\gamma(L) = \frac{3\delta\mu^2\mu_0^2\sigma}{512a^4\pi} \left( \frac{-1920a^7L + 2336a^5L^3 + 440a^3L^5 + 30aL^7}{(4a^2 + L^2)^4} + 15\text{arctg}\left(\frac{L}{2a}\right) \right) \quad (3.22)$$

$$\gamma(\bar{L}, a) = \frac{45\delta\mu^2\mu_0^2\sigma}{1024a^4} \frac{P(\bar{L})}{P_{L \rightarrow \infty}}$$

donde  $P(\bar{L})/P_{L \rightarrow \infty}$ , se obtiene de la expresión (3.12)

A continuación, se expresan las condiciones que deben cumplir los parámetros del sistema según los tipos de amortiguamiento:

- **Sistema críticamente amortiguado:** De la condición que define este caso,  $\beta = \omega_0$ , se deduce:

$$\frac{\gamma}{2m} = \omega_0 \rightarrow \gamma = 2\sqrt{km} \rightarrow \frac{45\delta\mu^2\mu_0^2\sigma}{1024a^4} \frac{P(\bar{L})}{P_{L \rightarrow \infty}} = 2\sqrt{km}. \quad (3.23)$$

- **Sistema sobreamortiguado:** De la condición  $\beta > \omega_0$ , se obtiene:

$$\gamma > 2\sqrt{km} \rightarrow \frac{45\delta\mu^2\mu_0^2\sigma}{1024a^4} \frac{P(\bar{L})}{P_{L \rightarrow \infty}} > 2\sqrt{km}. \quad (3.24)$$

- **Sistema subamortiguado:** De la condición que define este caso,  $\beta < \omega_0$ , se obtiene:

$$\gamma < 2\sqrt{km} \rightarrow \frac{45\delta\mu^2\mu_0^2\sigma}{1024a^4} \frac{P(\bar{L})}{P_{L\rightarrow\infty}} < 2\sqrt{km}. \quad (3.25)$$

Se puede comprobar que si se emplea para el diseño del amortiguador el radio  $a_{\infty}^{critico}$  calculado en (3.18), el sistema formado por un tubo de longitud finita se comporta como un oscilador subamortiguado:

$$\gamma = 2\sqrt{km} \frac{P(\bar{L})}{P_{L\rightarrow\infty}} \rightarrow \beta(\bar{L}) = \frac{P(\bar{L})}{P_{L\rightarrow\infty}} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3.26)$$

Según la gráfica de la figura 3-3,  $P(\bar{L})/P_{L\rightarrow\infty} < 1 \rightarrow \beta < \omega_0$  por lo que se deduce que el sistema se comporta como un oscilador subamortiguado.

Como se puede observar, las condiciones obtenidas difieren de las del tubo infinito en el factor  $P(\bar{L})/P_{L\rightarrow\infty}$ , que al ser menor que la unidad, reduce la capacidad de amortiguamiento del sistema respecto al caso del tubo infinito.

También, las condiciones anteriores se pueden particularizar para el caso de oscilaciones de gran amplitud ( $\gamma$  como función de  $z_0$ ) y se obtendría un coeficiente de fricción que dejaría de ser constante por lo que el amortiguador se dejaría de ser lineal.

### 3.4 Tubo grueso: el efecto del espesor

En todo el desarrollo anterior, se ha considerado que el tubo conductor es de pared delgada. En este apartado, se pretende estudiar el efecto que tiene el espesor del tubo en la potencia que se disipa y, por tanto, en la capacidad de amortiguamiento del sistema objeto de estudio. Además, se podrá cuantificar la relación que debe cumplir el espesor frente al radio interior del tubo para que este pueda considerarse de pared delgada. Para obtener la potencia disipada incluyendo el efecto del espesor, se integrará la expresión (3.1) en el espesor.

Primero, se analizará el caso del tubo de longitud infinita y a continuación, se abordará el estudio del efecto del espesor considerando tubos de longitud finita.

#### 3.4.1 Tubo de longitud infinita

De la ecuación (3.1) se obtiene

$$\begin{aligned} P_{L\rightarrow\infty}^{espesor} &= \int_a^{a+\delta} \rho d\rho \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\theta \sigma \left( v \frac{3(z-z_0)\mu\mu_0\rho}{4\pi((z-z_0)^2 + \rho^2)^{5/2}} \right)^2 = \\ &= \frac{45\mu^2\mu_0^2\sigma v^2}{1024a^3} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{3\left(1 + \frac{\delta}{a}\right)^3} \right) = C \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{3\left(1 + \frac{\delta}{a}\right)^3} \right) = \\ &= P_{L\rightarrow\infty} + C \frac{\delta}{a} \left( \frac{-2\frac{\delta}{a} - 8\left(\frac{\delta}{a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{a}\right)^3}{\left(1 + \frac{\delta}{a}\right)^3} \right) = P_{L\rightarrow\infty} - e. \end{aligned} \quad (3.27)$$

La expresión (3.27), representa la potencia disipada por un tubo de longitud infinita e incluye el efecto del espesor [10]. Nótese que ha sido posible expresar (3.27) como la diferencia de la potencia disipada por el tubo infinito delgado y el error  $e$  cometido al realizar la aproximación de tubo delgado.



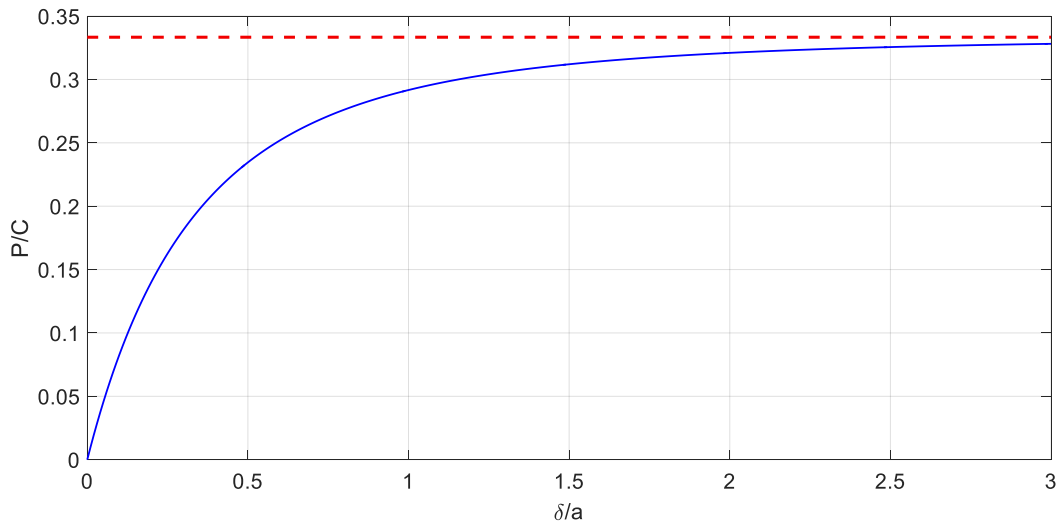


Figura 3-8. Potencia disipada para tubo de longitud infinita según el espesor del tubo

En la gráfica 3-8, se pone de manifiesto que al incrementar el espesor del tubo la potencia disipada aumenta. Con un mayor espesor, se dispone de más material conductor en el cual, es posible llevar a cabo el fenómeno de inducción electromagnética y en consecuencia, la fuerza magnética que experimenta el dipolo es más intensa, pero el aumento de la potencia no es ilimitado al incrementar el espesor. Se observa que, a partir de un cierto valor del espesor, no se consigue aumentar significativamente la fuerza que experimenta el dipolo (la potencia disipada posee una asintota horizontal y la potencia representada en la figura 3-8, tiende a  $1/3$ ). El carácter asintótico se debe a que la intensidad de campo magnético disminuye al alejarse del dipolo y, aunque se disponga de más material conductor para llevar a cabo el fenómeno de la inducción electromagnética, y por tanto, disipar más potencia, en regiones lejanas respecto a la posición del dipolo, el campo magnético es muy débil y tiende a cero al aumentar la distancia de separación con el dipolo. Por lo tanto, la zona externa de un tubo muy grueso apenas contribuye en la disipación de potencia y en cambio, incrementa el material empleado en el amortiguador y en consecuencia, su peso y coste.

Con el fin de cuantificar la relación que debe cumplir el espesor con el radio del tubo para que este pueda considerarse de pared delgada, se va a analizar el cociente entre la potencia dada en (3.27) y (3.7). El cociente de (3.27) y (3.7) es

$$\frac{P_{L \rightarrow \infty}^{\text{espesor}}}{P_{L \rightarrow \infty}} = \frac{\left( \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \left(1 + \frac{\delta}{a}\right)^3} \right)}{\frac{\delta}{a}} \quad (3.28)$$

A continuación, se representa el cociente entre la potencia disipada correspondiente a un tubo de longitud infinita, que tiene en cuenta el efecto del espesor, y la potencia disipada en un tubo delgado de longitud infinita.

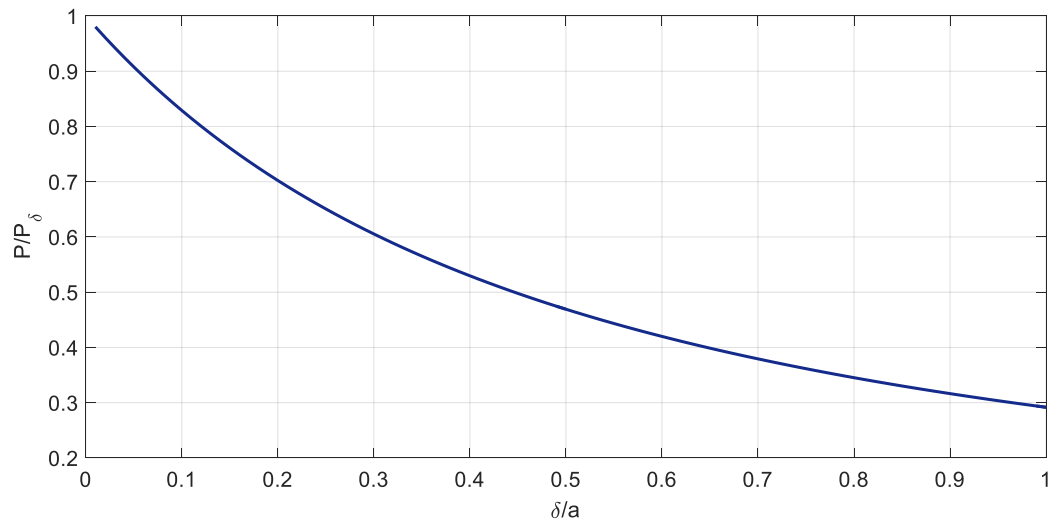


Figura 3-9. Cociente de potencias para un tubo infinito

En la figura 3-9, se observa que para espesores de  $\delta < 0.1a$ , es adecuado considerar la aproximación de pared delgada ya que la relación de potencias representada en la gráfica es superior a 0.8 y por tanto, próximo a la unidad.

Confirmada la validez de la aproximación de tubo delgado para espesores  $\delta < 0.1a$ , es importante destacar que en un tubo de gran espesor ( $\delta \rightarrow \infty$ ), la potencia disipada es  $15\mu^2\mu_0^2\sigma v^2/1024a^3$ . Comparando con la potencia disipada para un tubo delgado, dada en (3.7), se obtiene que la dependencia con el radio del tubo es distinta en ambos casos: para un tubo delgado e infinito, la potencia disipada es inversamente proporcional al radio elevado a cuatro, mientras que en un tubo grueso e infinito, la potencia disipada es inversamente proporcional al cubo del radio. Por tanto, modificaciones del radio en un tubo delgado, permiten mayores incrementos en la potencia respecto a tubos de gran espesor. Para visualizar el efecto del radio del tubo en la potencia disipada se va a representar la disipación en función de  $a$ , para distintos valores del espesor del tubo.

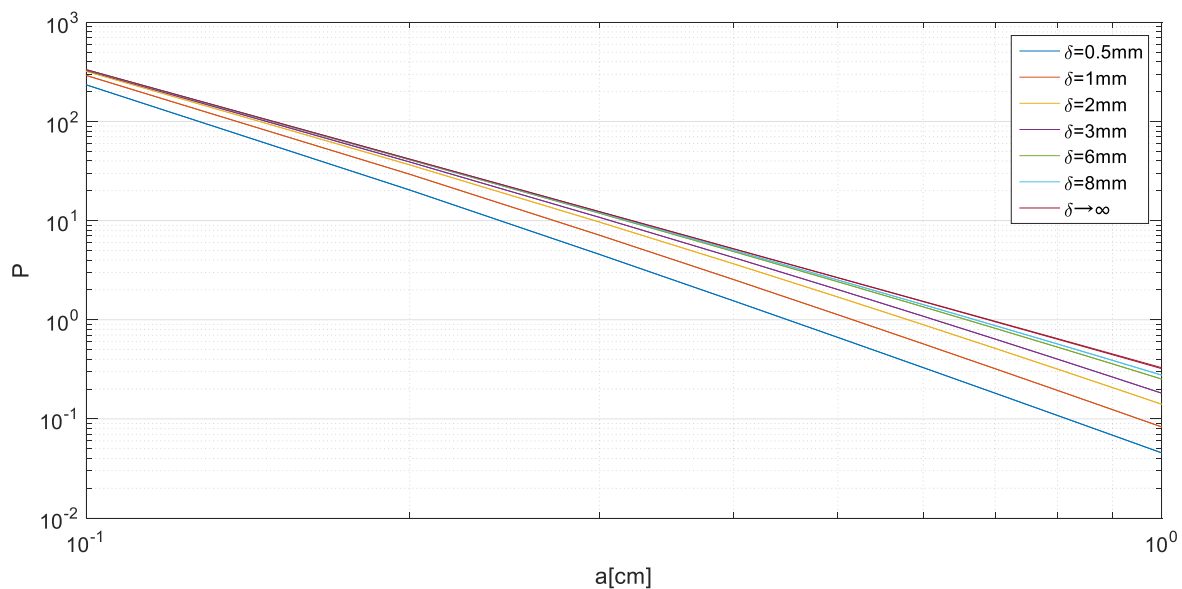


Figura 3-10. Potencia disipada en función de  $a$  para distintos espesores del tubo

En la gráfica, se observa que la disipación es más sensible al radio cuando se emplean tubos delgados. Además, se pone de manifiesto la independencia del espesor en la disipación, al considerar espesores del tubo muy elevados, ya que las curvas se hacen independientes del espesor en estos casos y se solapan.

### 3.4.2 Tubo de longitud finita

Expresando la ecuación (3.1) en función de la geometría de un tubo finito, sin considerar la aproximación de tubo delgado, se obtiene la potencia en función del espesor del tubo. Además, la potencia disipada dependerá de otras variables como la esbeltez o la posición del dipolo  $\bar{z}_0$ . Cuando se realice un análisis considerando pequeñas oscilaciones, se puede aproximar el valor de la potencia disipada al que se obtiene en  $\bar{z}_0 = 0$ , obteniéndose

$$P = \frac{3v^2\mu^2\mu_0^2\sigma}{1024a^3\pi} \left( \frac{20}{\bar{L}} + \frac{128\bar{L}^3}{(4 + \bar{L}^2)^3} - \frac{160\bar{L}}{(4 + \bar{L}^2)^2} - \frac{80}{\bar{L}(4 + \bar{L}^2)} - \frac{20}{\bar{L}\left(1 + \frac{\delta}{a}\right)^2} - \frac{128\bar{L}^3}{\left(\bar{L}^2 + 4\left(1 + \frac{\delta}{a}\right)^2\right)^3} + \frac{160\bar{L}}{\left(\bar{L}^2 + 4\left(1 + \frac{\delta}{a}\right)^2\right)^2} + \frac{80}{\bar{L}\left(\bar{L}^2 + 4\left(1 + \frac{\delta}{a}\right)^2\right)} + 10\text{arctg}\left(\frac{\bar{L}}{2}\right) - \frac{10\text{arctg}\left(\frac{\bar{L}}{2\left(1 + \frac{\delta}{a}\right)}\right)}{\left(1 + \frac{\delta}{a}\right)^3} \right). \quad (3.29)$$

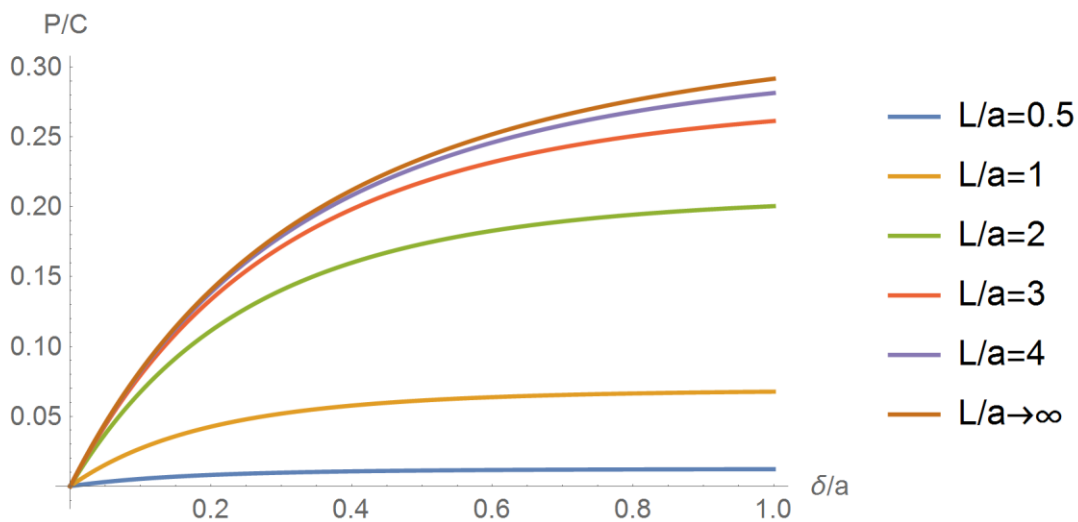


Figura 3-11. Potencia disipada por un tubo finito en función del espesor con  $z_0=0$

La forma cualitativa de la figura 3-11 es equivalente a la obtenida para un tubo infinito. La potencia aumenta con el espesor y la longitud del tubo y tiene una asíntota horizontal, por lo que un incremento excesivo del espesor no mejora la capacidad de amortiguamiento del sistema que se está analizando. La constante  $C$  empleada en la representación se ha definido en (3.27).

Para estimar el espesor a partir del cual se puede considerar la aproximación de tubo delgado, en el caso en el que sea válida la aproximación de considerar el dipolo en la sección central, se representa gráficamente el cociente de potencias dadas en las ecuaciones (3.29) y (3.12).

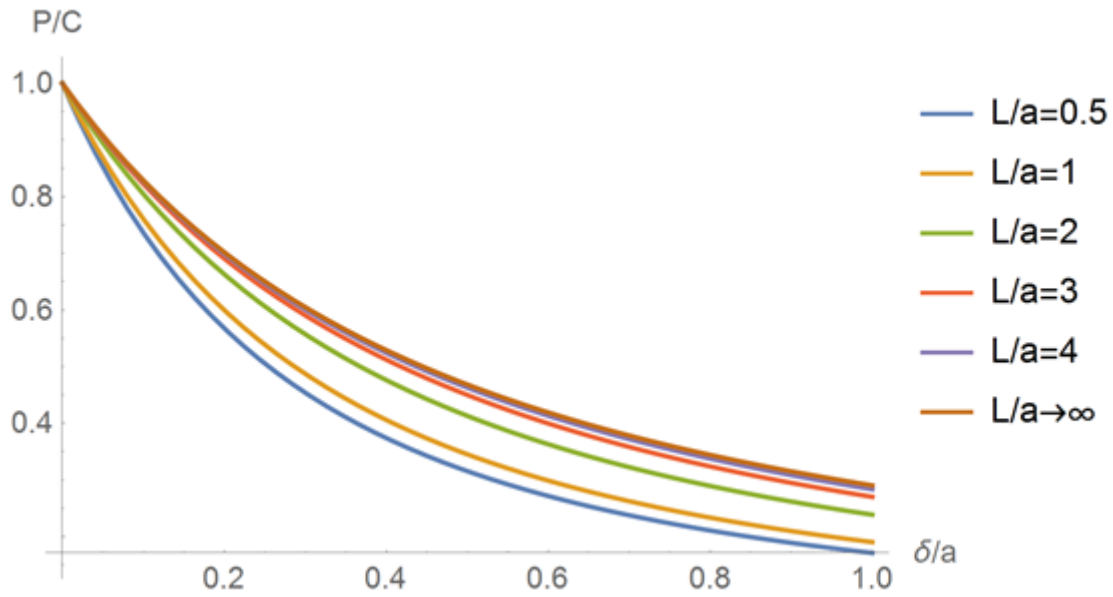


Figura 3-12. Cociente de potencias disipadas para tubos finitos

De la figura 3-12, se deduce que el rango de espesores, para los cuales se puede considerar válida la aproximación de pared delgada, aumenta con incrementos en la longitud del tubo. También, se deduce que tubos de longitudes  $L/a \geq 3$ , el cociente de potencias representado en la gráfica anterior es superior a 0.8 para valores del  $\delta/a \leq 0.1$ .

# 4 DIPOLO EN MOVIMIENTO SOBRE SUPERFICIES PLANAS CONDUCTORAS

---

*El secreto de la creatividad está en dormir bien y abrir la mente a las posibilidades infinitas. ¿Qué es un hombre sin sueños?*

Albert Einstein

En este capítulo, se va a caracterizar la fuerza magnética que actúa sobre un dipolo, al moverse en torno a una superficie plana conductora de espesor  $\delta_s$ . El dipolo se mueve según un eje perpendicular a la superficie que contiene su centro. Primero, se estudia la interacción del dipolo con un plano infinito y luego, se realiza el estudio considerando que la superficie conductora sobre la que se mueve el dipolo es una superficie circular de radio  $a_s$ . Para realizar el estudio del movimiento del dipolo se sigue el mismo procedimiento que se ha empleado en el capítulo anterior: calculando la potencia disipada durante el movimiento y obteniendo de esta la fuerza magnética y el coeficiente de fricción que caracteriza dicha fuerza.

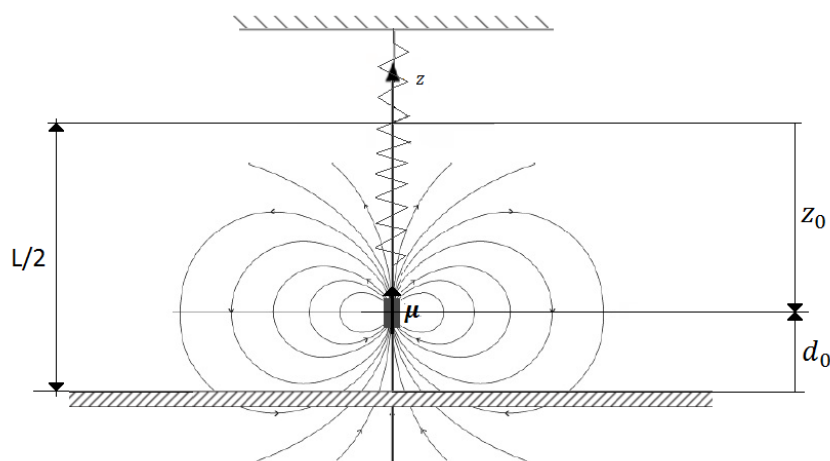


Figura 4-1. Dipolo frente a una superficie plana

El sistema de referencia empleado en este capítulo es un sistema cilíndrico con el origen de la variable  $z$  sobre la superficie plana, según lo indicado en la figura 4-1. La variable que mide la distancia existente entre el dipolo y la superficie es  $d_0$  cuyo origen coincide con el de  $z$ . La variable  $z_0$  tiene su origen a una distancia  $L/2$  de la superficie plana conductora considerada. Todas las variables empleadas,  $z$ ,  $z_0$  y  $d_0$ , se consideran positivas cuando estén dirigidas hacia arriba. De la figura 4-1, se deduce la relación existente entre la variable  $z_0$  y  $d_0$ :

$$d_0 = \frac{L}{2} + z_0. \quad (4.1)$$

#### 4.1 Fuerza magnética responsable del amortiguamiento: potencia disipada por la superficie plana conductora

El objetivo de este apartado es calcular la fuerza magnética que aparece en el imán al moverse en el entorno de una superficie plana conductora. Para calcularla, se comienza por el cálculo de la potencia disipada para obtener finalmente la fuerza magnética y el coeficiente de fricción.

Particularizando (2.12) para la geometría de la superficie conductora y teniendo en cuenta el valor del campo eléctrico  $E$  dado en (2.15), se obtiene que la potencia disipada es

$$P = \int_V \sigma E^2 dV = \int_0^{a_s} \rho d\rho \int_{-\delta_s}^0 dz \int_0^{2\pi} d\theta \sigma \left( v \frac{3(z - d_0)\mu\mu_0\rho}{4\pi((z - d_0)^2 + \rho^2)^{5/2}} \right)^2. \quad (4.2)$$

De la potencia, se puede obtener la fuerza magnética que actúa en el imán, teniendo en cuenta que el producto de la fuerza por la velocidad es la potencia disipada por la superficie conductora.

A continuación, se considera que la superficie conductora es muy delgada y por tanto, su espesor es despreciable frente a la dimensión radial que se considera.

#### 4.2 Superficie plana delgada: Fuerza magnética y potencia disipada

Considerando una superficie plana de espesor  $\delta_s$  muy delgado, la expresión (4.2) queda como

$$P = \int_0^{\rho_f} \frac{9\rho^3 \delta_s \mu^2 \mu_0^2 v^2 \sigma d_0^2}{8\pi(\rho^2 + d_0^2)^5} d\rho. \quad (4.3)$$

De la ecuación (4.3) se puede obtener la densidad de potencia radial que disipa cada espira circular que constituye la superficie conductora

$$p_r = \frac{9\delta_s \mu^2 \mu_0^2 v^2 \sigma \rho^3 d_0^2}{8\pi(\rho^2 + d_0^2)^5}. \quad (4.4)$$

Se va a adimensionalizar esta densidad de potencia radial con las variables

$$\bar{d}_0 = \frac{d_0}{a}, \bar{\rho} = \frac{\rho}{a}, \quad (4.5)$$

siendo  $a$  un radio de referencia característico de la superficie.

Empleando las variables definidas en (4.5), la densidad de potencia radial es

$$p_r = \frac{9\mu^2\mu_0^2v^2\sigma\delta_s}{8\pi a^5} \frac{\bar{\rho}^3\bar{d}_0^{-2}}{(\bar{\rho}^2 + \bar{d}_0^{-2})^5} = C_r \frac{\bar{\rho}^3\bar{d}_0^{-2}}{(\bar{\rho}^2 + \bar{d}_0^{-2})^5}. \quad (4.6)$$

A continuación, se representa la densidad de potencia radial con un mapa de color y de forma bidimensional.

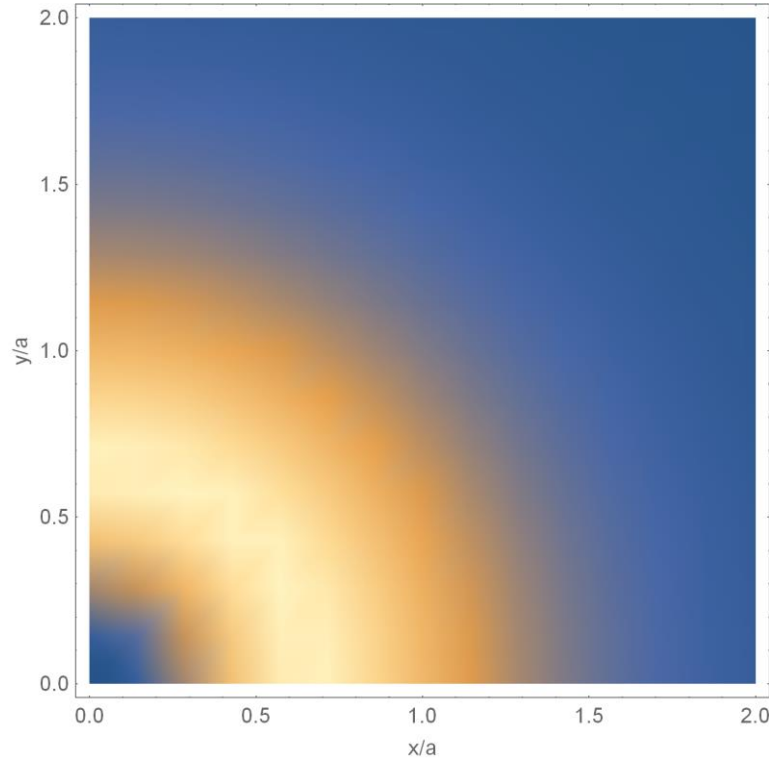


Figura 4-2. Densidad de potencia radial con  $d_0/a=1$

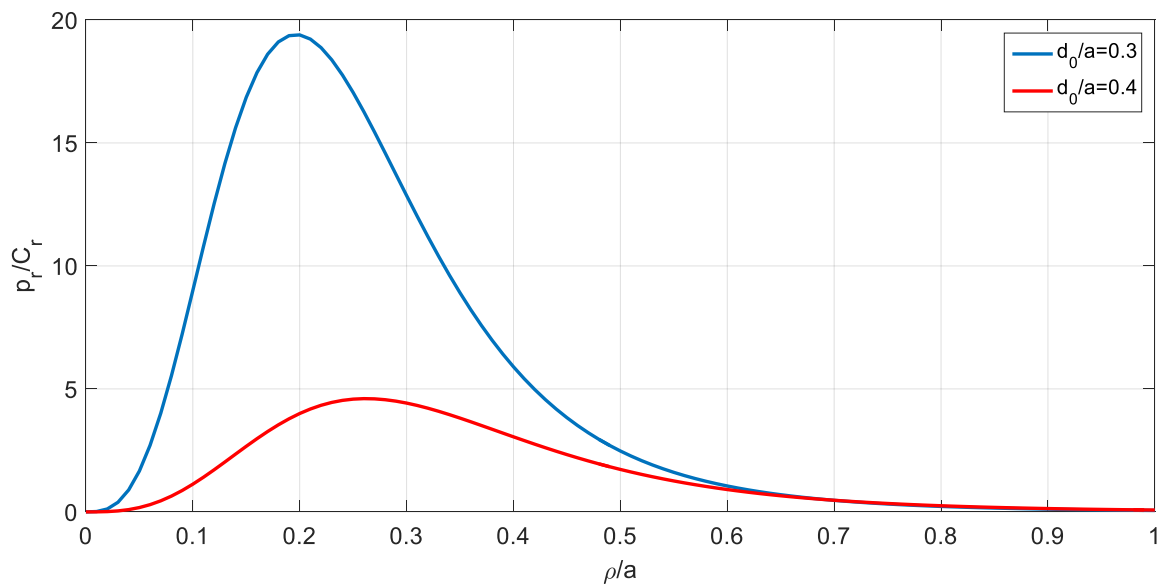


Figura 4-3. Densidad de potencia radial con posición del dipolo fija

De las figuras anteriores se deduce que:

- La parte central dada por  $\rho/a = 0$  y las regiones circunferenciales lejanas a dicha parte central, no contribuyen en la disipación de energía.
- El máximo de la densidad de potencia radial, según la posición del dipolo, es mayor cuanto más cerca

está el dipolo de la superficie conductora, tendiendo a infinito cuando la distancia de separación entre el elemento conductor y el dipolo tiende a cero. Dicho máximo se localiza en una región circunferencial, que se acerca a la parte central de la superficie a medida que disminuye la distancia de separación entre la superficie y el dipolo. Además, la distancia circunferencial para la cual se obtiene una densidad de potencia radial máxima, es directamente proporcional a la distancia de separación entre la superficie y el dipolo. La región que se encarga mayoritariamente de la disipación de potencia es la correspondiente a colores claros en el mapa de color de la figura 4-2 y se localiza en torno a este máximo.

Para ilustrar cuál es la zona de la superficie que contribuye principalmente en la disipación de potencia, se muestran en la siguiente tabla, los porcentajes de potencia disipados por la región de la superficie conductora dada por  $\rho/a \in [0, 0.6]$ .

Tabla 4-1. *Potencia disipada en  $\rho/a \in [0, 0.6]$*

Posición $d_0/a$	Porcentaje de potencia disipada
0.3	97.28%
0.4	91.03%

La región especificada se encarga de disipar más del 90% de la potencia.

#### 4.2.1 Plano infinito

En este apartado, se va a considerar un plano infinito. Particularizando la geometría de esta superficie en la ecuación (4.3), se obtiene que la potencia disipada es

$$P_{s \rightarrow \infty} = \int_0^\infty \frac{9\delta_s \mu^2 \mu_0^2 v^2 \sigma \rho^3 d_0^2}{8\pi(\rho^2 + d_0^2)^5} d\rho = \frac{3v^2 \mu^2 \mu_0^2 \sigma \delta_s}{64\pi d_0^4}. \quad (4.7)$$

Como se ha realizado en apartados anteriores, la fuerza magnética y el coeficiente de fricción se obtienen de la potencia disipada,

$$F_{s \rightarrow \infty} = -\gamma_{s \rightarrow \infty} v = -\frac{3\mu^2 \mu_0^2 \sigma \delta_s}{64\pi d_0^4} v, \quad (4.8)$$

y el coeficiente de fricción

$$\gamma_{s \rightarrow \infty} = \frac{3\mu^2 \mu_0^2 \sigma \delta_s}{64\pi d_0^4} = \frac{K}{d_0^4}. \quad (4.9)$$

De (4.9) se deduce que:

- Se consigue mayor capacidad de amortiguamiento (la potencia disipada es mayor y por tanto el coeficiente de fricción también lo es) cuanto más cerca de la superficie esté el dipolo. Se puede observar que tanto la potencia disipada como la fuerza de fricción y por tanto, el coeficiente de fricción son inversamente proporcionales a la distancia de separación entre el dipolo y la superficie a la cuarta, por lo que no se puede considerar que el coeficiente de fricción es constante como ocurría con el obtenido en el caso de un tubo de longitud infinita. Debido a esta relación con la distancia, el sistema solo disipa potencia cuando el dipolo se encuentre en las proximidades de la superficie.
- Interesaría emplear materiales con una conductividad alta para aumentar la capacidad de amortiguamiento.



### 4.2.2 Superficie circular

En este apartado, se va a calcular la potencia disipada y la fuerza de amortiguamiento que actúa sobre el imán en movimiento sobre una superficie circular de radio  $a_s$ . De manera análoga a los apartados anteriores, se obtiene que la potencia disipada es

$$P = \int_0^{a_s} \frac{9\delta_s \mu^2 \mu_0^2 v^2 \sigma \rho^3 d_0^2}{8\pi(\rho^2 + d_0^2)^5} d\rho = \frac{9v^2 \mu^2 \mu_0^2 \sigma \delta_s}{8\pi} \left( \frac{1}{24d_0^6} - \frac{4a_s^2 + d_0^2}{24(a_s^2 + d_0^2)^4} \right) d_0^2. \quad (4.10)$$

La expresión (4.10) se puede adimensionalizar con las variables definidas en (4.5) y con la potencia disipada por una superficie plana infinita, (4.7), obteniéndose

$$\frac{P}{P_{s \rightarrow \infty}} = 1 - \frac{4\bar{d}_0^{-6} + \bar{d}_0^{-8}}{(1 + \bar{d}_0^2)^4}. \quad (4.11)$$

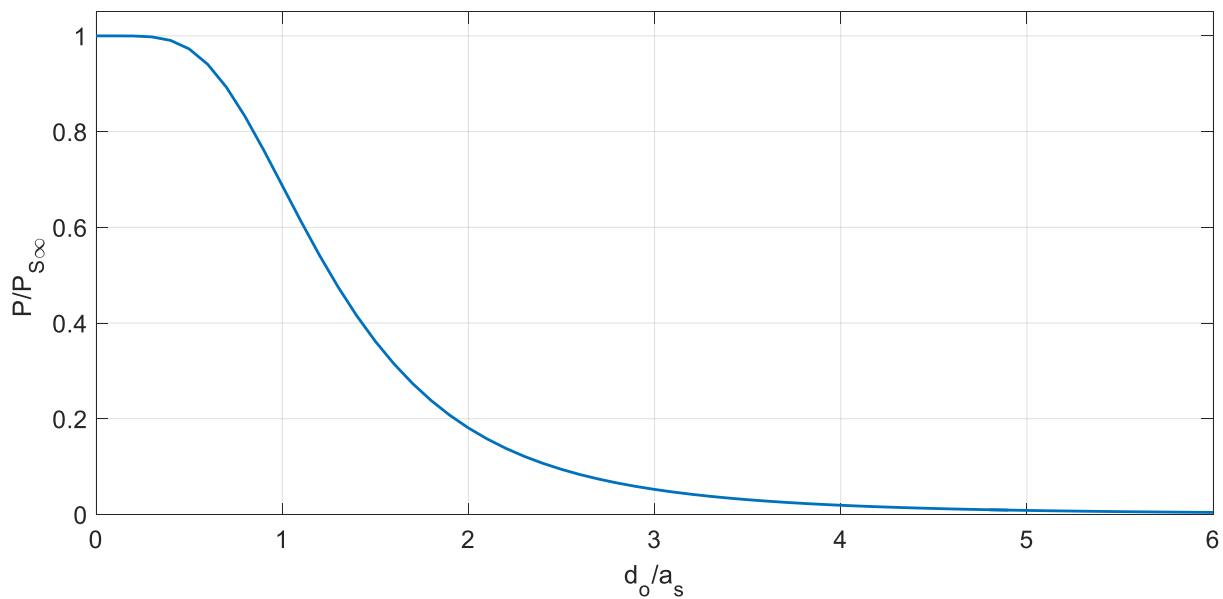


Figura 4-4. Potencia disipada en una superficie circular plana

De la gráfica anterior, se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- Cuando  $d_0/a_s \rightarrow 0$ , la potencia disipada en una superficie plana circular tiene el mismo comportamiento que la correspondiente a un plano infinito. El cociente  $d_0/a_s$  puede tender a cero en dos situaciones: una situación se corresponde a que  $d_0 \rightarrow 0$ , y por tanto, la disipación es muy intensa tendiendo a infinito, como ocurría en el caso del plano infinito; y otra situación en la que  $a_s \rightarrow \infty$ , por lo que la geometría de la superficie se asemeja a un disco infinito.
- Cuando  $d_0/a_s$  tiende a un valor alto, la disipación de potencia tiende a cero. El cociente  $d_0/a_s$  tiene un valor elevado en los siguientes casos: o bien porque la distancia de separación entre el dipolo y la superficie es muy elevada para que se pueda producir el efecto disipativo, o bien porque  $a_s$  tiende a cero y por tanto no existe superficie necesaria para llevar a cabo el fenómeno disipativo.

De (4.10) es inmediato obtener que la fuerza magnética que actúa sobre el imán es

$$F_s = -\frac{9\mu^2\mu_0^2\sigma\delta_s}{8\pi}\left(\frac{1}{24d_0^6} - \frac{4a_s^2 + d_0^2}{24(a_s^2 + d_0^2)^4}\right)d_0^2v \quad (4.12)$$

y que el coeficiente de fricción es

$$\gamma_s = \frac{9\mu^2\mu_0^2\sigma\delta_s}{8\pi a_s^4}\left(\frac{1}{24\bar{d}_0^4} - \frac{(4 + \bar{d}_0^{-2})\bar{d}_0^{-2}}{24(1 + \bar{d}_0^{-2})^4}\right) = C_{disco}\left(\frac{1}{24\bar{d}_0^4} - \frac{(4 + \bar{d}_0^{-2})\bar{d}_0^{-2}}{24(1 + \bar{d}_0^{-2})^4}\right). \quad (4.13)$$

Nótese que al realizar el límite a un disco de radio infinito en (4.13), se recupera el resultado dado en (4.9) para un plano infinito.

Para visualizar mejor el efecto del radio  $a$  sobre la potencia disipada por la superficie se va a representar la potencia disipada en función de la distancia  $d_0$  para distintos valores del radio  $a$ .

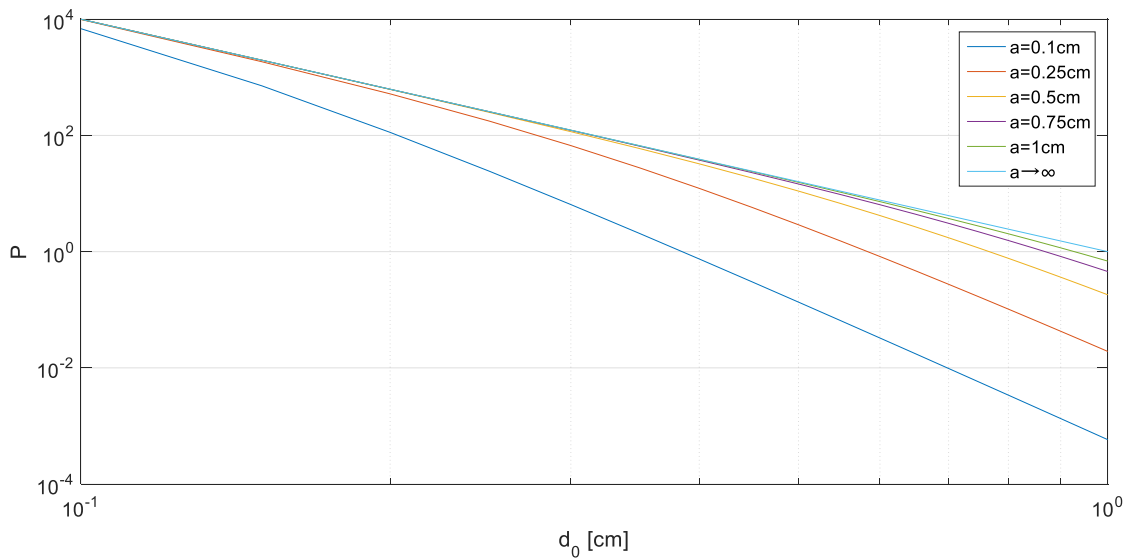


Figura 4-5. Potencia disipada en función de  $d_0$  con  $a$  fijo

- En esta gráfica, se pone de manifiesto la gran dependencia que tiene la potencia disipada con la distancia de separación entre el dipolo y la superficie.
- Además, cuando  $a \gg d_0$  las curvas coinciden y la potencia disipada se hace independiente del radio del disco, por lo que es posible aproximar el comportamiento de un disco de radio finito a la disipación asociada a uno de radio infinito.

### 4.3 Superficie gruesa: el efecto del espesor

Para analizar cómo influye el espesor en la fuerza magnética que experimenta un dipolo al moverse frente a una superficie plana, se va a analizar la potencia disipada sin realizar la simplificación de superficie delgada del apartado 4.2.

Primero, se abordará el caso del plano infinito y a continuación, se estudiará el caso de una superficie plana circular.

#### 4.3.1 Plano infinito

De la ecuación (4.2) y particularizando para un disco infinito se obtiene que

$$\begin{aligned}
 P_{S \rightarrow \infty}^{espesor} &= \int_0^{\infty} \rho d\rho \int_{-\delta_s}^0 dz \int_0^{2\pi} d\theta \sigma \left( v \frac{3(z-d_0)\mu\mu_0\rho}{4\pi((z-d_0)^2 + \rho^2)^{5/2}} \right)^2 = \\
 &= \frac{3v^2\mu^2\mu_0^2\sigma}{64\pi d_0^3} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{3\left(1 + \frac{\delta_s}{d_0}\right)^3} \right) = C_s \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{3\left(1 + \frac{\delta_s}{d_0}\right)^3} \right). \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

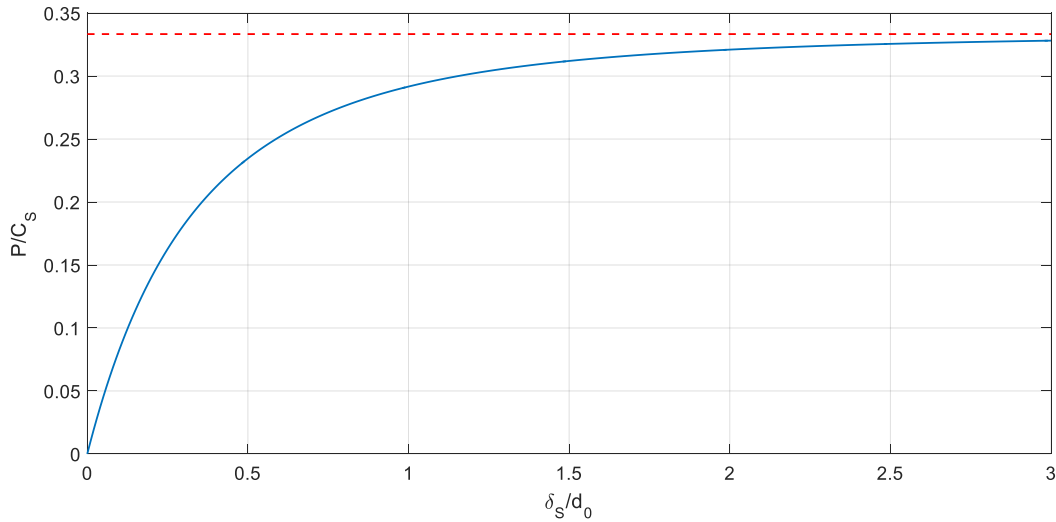


Figura 4-6. Potencia disipada por un plano infinito en función del espesor

En la figura 4-6, se puede observar que el efecto del espesor sobre la potencia disipada es igual que el explicado en el caso del tubo infinito y finito. La potencia disipada es una función creciente con el espesor y converge a la asíntota representada en rojo en la figura 4-6.

Para visualizar la validez de la aproximación de plano delgado, se representará el cociente entre la potencia disipada para un plano infinito que incluye el efecto del espesor y la potencia disipada por un plano infinito delgado. El cociente de potencias es

$$\frac{P_{S \rightarrow \infty}^{espesor}}{P_{S \rightarrow \infty}} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{3\left(1 + \frac{\delta_s}{d_0}\right)^3}}{\frac{\delta_s}{d_0}}. \quad (4.15)$$

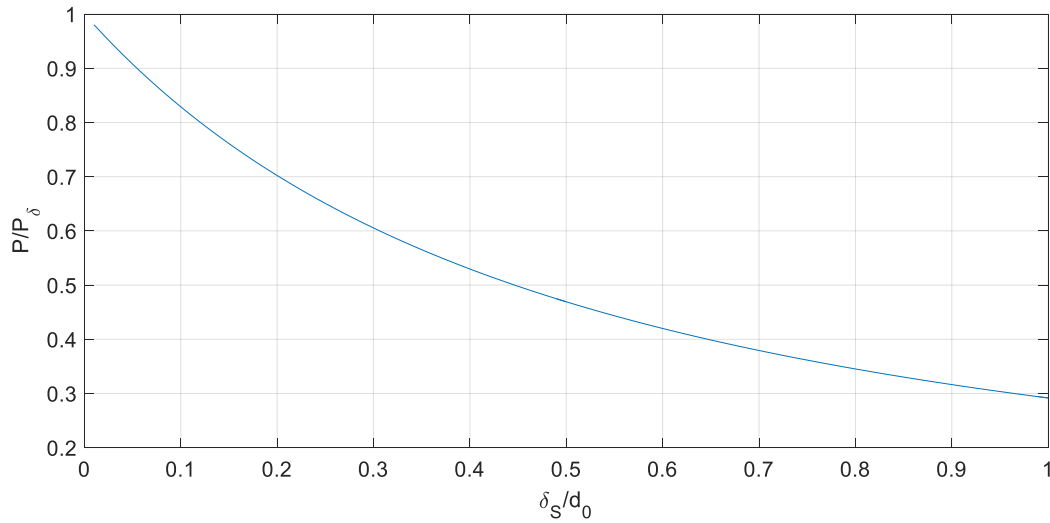


Figura 4-7. Cociente de potencias para un plano infinito

De la figura 4-7, se puede observar que para relaciones  $\delta_s/d_0 < 0.1$  el cociente de potencias es superior a 0.8 y es válido usar la aproximación de superficies delgadas.

Al igual que ocurría en el caso del tubo infinito, en planos gruesos ( $\delta \rightarrow \infty$ ), la potencia disipada es  $\mu^2 \mu_0^2 \sigma v^2 / 64\pi d_0^3$ . Comparando con la potencia disipada para un plano delgado, dada en (4.7), se obtiene que la dependencia con la distancia de separación entre la superficie y el dipolo es distinta en ambos casos: para un plano delgado e infinito, la potencia disipada es inversamente proporcional a la distancia elevado a cuatro, mientras que en un plano grueso e infinito, la potencia disipada es inversamente proporcional al cubo de la distancia. Por tanto, modificaciones de la distancia en un plano delgado, permiten mayores incrementos en la potencia respecto al plano de gran espesor.

### 4.3.2 Superficie circular

Particularizando para una superficie circular en la ecuación (4.2), se obtiene que la potencia disipada por la superficie conductora es

$$\begin{aligned}
 P_\delta = \int_0^{a_s} \rho d\rho \int_{-\delta_s}^0 dz \int_0^{2\pi} d\theta \sigma \left( v \frac{3(z-z_0)\mu\mu_0\rho}{4\pi((z-z_0)^2 + \rho^2)^{5/2}} \right)^2 = \frac{3v^2\mu^2\mu_0^2\sigma}{64\pi a^3} \frac{1}{48} \left( -\frac{16}{(\bar{d}_0 + \frac{\delta}{a})^3} \right. \\
 + \frac{16 + 48\bar{d}_0^{-2} + 33\bar{d}_0^{-4} + 40\bar{d}_0^{-6} + 15\bar{d}_0^{-8}}{\bar{d}_0^3(1 + \bar{d}_0^{-2})^3} + 15 \operatorname{arctg}(\bar{d}_0) + \frac{24(\bar{d}_0 + \frac{\delta}{a})}{\left(1 + (\bar{d}_0 + \frac{\delta}{a})^2\right)^3} + \\
 \left. + \frac{6(\bar{d}_0 + \frac{\delta}{a})}{\left(1 + (\bar{d}_0 + \frac{\delta}{a})^2\right)^2} - \frac{15(\bar{d}_0 + \frac{\delta}{a})}{1 + (\bar{d}_0 + \frac{\delta}{a})^2} - 15 \operatorname{arctg}\left(\bar{d}_0 + \frac{\delta}{a}\right) \right). \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

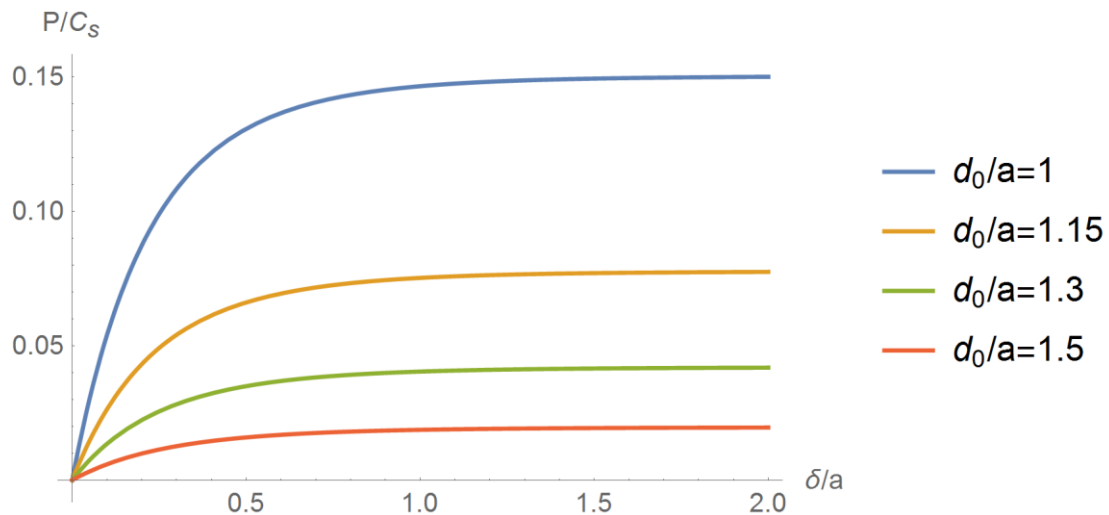


Figura 4-8. Potencia disipada por una superficie circular plana en función del espesor

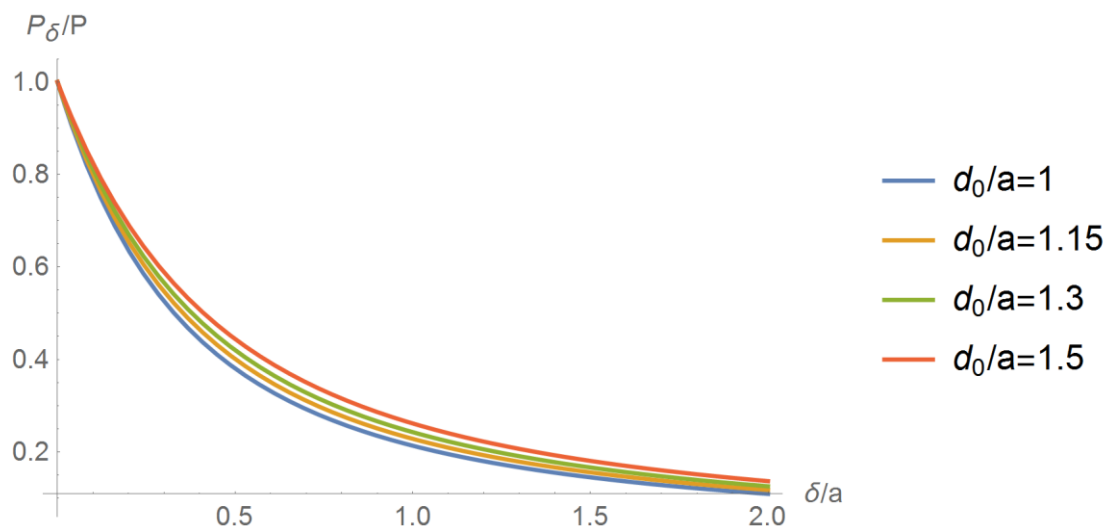


Figura 4-9. Cociente de potencias disipadas para superficies circulares

Las gráficas obtenidas en las figuras 4-8 y 4-9, muestran las mismas conclusiones que las obtenidas en las representaciones asociadas al plano infinito. La potencia disipada aumenta con el espesor y converge asintóticamente a un valor constante y el cociente de potencias es próximo a la unidad para relaciones aproximadas de  $\delta/a \leq 0.1$ .

#### 4.4 Dinámica del amortiguador

Como se ha desarrollado en los apartados anteriores, los coeficientes de fricción obtenidos para el caso del movimiento de un dipolo frente a superficies planas, dependen de manera muy significativa de la distancia de separación entre la superficie y el imán. Por esta razón, se pone de manifiesto que en esta situación no resulta muy realista aproximar el valor de los coeficientes de fricción por un valor constante.

En el caso general, la posición del dipolo es muy influyente sobre el coeficiente de fricción, por lo que la ecuación del movimiento dada en (2.18) siempre podrá resolverse numéricamente y se obtendría una solución de la respuesta del dipolo ante cualquier perturbación.

Sin embargo, es posible obtener la distancia crítica de separación entre el dipolo y la superficie conductora a partir de la cual se tiene cada uno de los tres tipos de amortiguamiento. Para el plano infinito es sencillo obtener una expresión analítica de esta distancia mientras que en el caso de una superficie circular habría que

emplear una resolución numérica. También, se aborda el cálculo de esta distancia en el caso de un dipolo moviéndose entre dos superficies conductoras circulares.

#### 4.4.1 Superficie plana conductora infinita

En este caso, es posible obtener las condiciones que deben cumplir los parámetros que definen el sistema para lograr cada tipo de amortiguamiento.

A continuación, se va a expresar cómo varía la respuesta del sistema según la distancia de separación entre el dipolo y el plano conductor.

De la condición  $\beta = \omega_0$ , teniendo en cuenta el coeficiente de fricción dado en (4.9), se obtiene la distancia, para la cual, el sistema se comporta de manera críticamente amortiguada:

$$d_0^{crítico} = \sqrt[4]{\frac{3\mu^2\mu_0^2\sigma\delta_s}{128\pi\sqrt{km}}} \quad (4.17)$$

Tabla 4-2. Condiciones según el tipo de amortiguamiento para el plano infinito

Tipo de amortiguamiento	Subamortiguado	Críticamente amortiguado	Sobreamortiguado
Condición	$d_0 > d_0^{crítico}$	$d_0 = d_0^{crítico}$	$d_0 < d_0^{crítico}$

Cuando la distancia de separación entre el dipolo y el plano sea menor a la distancia crítica obtenida, el amortiguamiento que experimenta el dipolo es sobreamortiguado. En cambio, cuando la distancia es mayor a la crítica, la respuesta del sistema es subamortiguada.

#### 4.4.2 Superficie plana conductora circular

Para el caso de una superficie plana circular, también se pueden obtener las condiciones que implican cada tipo de amortiguamiento, particularizando con el coeficiente de fricción dado en (4.13):

- **Sistema críticamente amortiguado:** De la condición que define este caso,  $\beta = \omega_0$ , se deduce:

$$\frac{\gamma}{2m} = \omega_0 \rightarrow \gamma = 2\sqrt{km} \rightarrow \frac{9\mu^2\mu_0^2\sigma\delta_s}{8\pi} \left( \frac{1}{24d_0^6} - \frac{4a_s^2 + d_0^2}{24(a_s^2 + d_0^2)^4} \right) d_0^2 = 2\sqrt{km}. \quad (4.18)$$

- **Sistema sobreamortiguado:** De la condición  $\beta > \omega_0$ , se obtiene:

$$\gamma > 2\sqrt{km} \rightarrow \frac{9\mu^2\mu_0^2\sigma\delta_s}{8\pi} \left( \frac{1}{24d_0^6} - \frac{4a_s^2 + d_0^2}{24(a_s^2 + d_0^2)^4} \right) d_0^2 > 2\sqrt{km}. \quad (4.19)$$

- **Sistema subamortiguado:** De la condición que define este caso,  $\beta < \omega_0$ , se obtiene:

$$\gamma < 2\sqrt{km} \rightarrow \frac{9\mu^2\mu_0^2\sigma\delta_s}{8\pi} \left( \frac{1}{24d_0^6} - \frac{4a_s^2 + d_0^2}{24(a_s^2 + d_0^2)^4} \right) d_0^2 < 2\sqrt{km}. \quad (4.20)$$

Las condiciones obtenidas en (4.18-4.20) permiten determinar el tipo de amortiguamiento del sistema en un caso general. Como puede observarse en estas expresiones, no es posible obtener directamente la distancia crítica que determina cada tipo de amortiguamiento para el caso de la placa circular y se deberían resolver numéricamente las expresiones anteriormente indicadas.

### 4.4.3 Dipolo entre dos placas circulares

Como el diseño del amortiguador puede incluir dos tapas circulares en los extremos del tubo, se va a abordar el caso de un dipolo moviéndose entre dos superficies planas circulares separadas una distancia  $L$ .

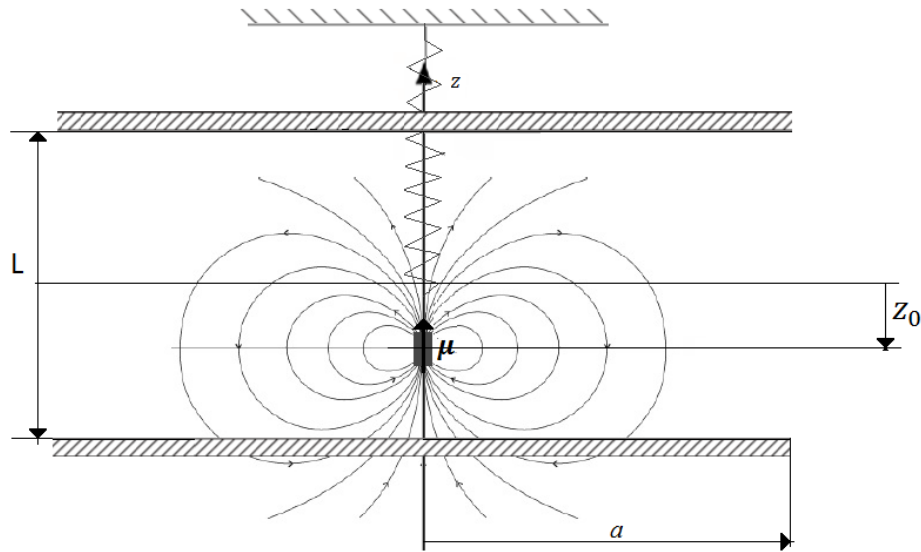


Figura 4-10. Dipolo moviéndose entre dos superficies conductoras circulares

El coeficiente de fricción total es la suma de los coeficientes correspondientes a cada una de las dos placas. Puesto que el coeficiente de fricción de cada una de las placas dado en (4.13) está expresado en función de la variable  $d_0$  y cuyo origen se encuentra en la propia superficie conductora, se necesita expresar la ecuación (4.13) en función de  $z_0$ , con origen a una distancia  $L/2$  de las superficies.

A continuación, se van a particularizar los coeficientes de fricción para las dos situaciones siguientes: la primera, en la que se considera el movimiento del dipolo frente a una superficie conductora inferior, y la segunda situación, en la que el dipolo se mueve frente a una superficie conductora superior, según la figura 4-11.

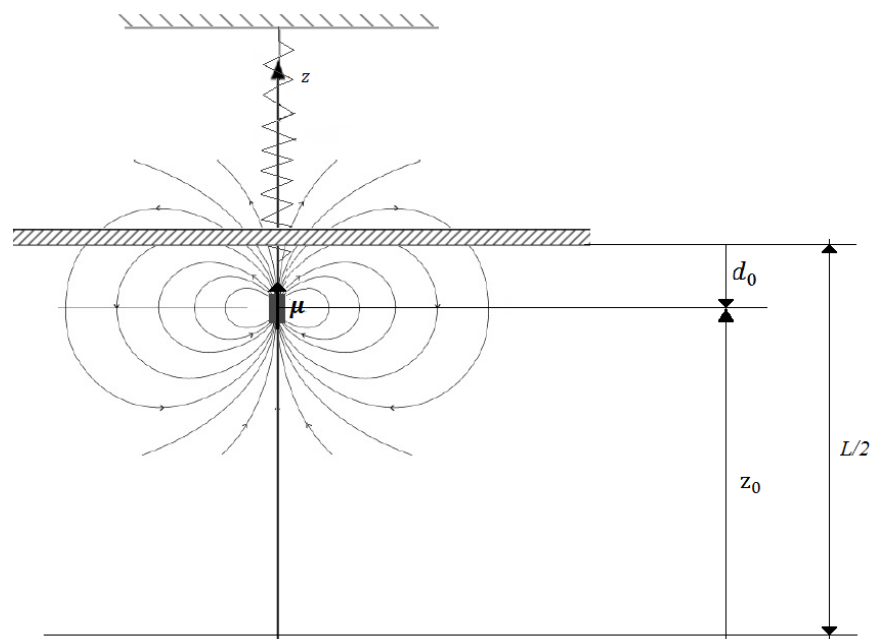


Figura 4-11. Dipolo moviéndose frente a una superficie conductora superior

De la figura 4-11, se puede deducir la relación

$$d_0 = \frac{L}{2} - z_0, \quad (4.21)$$

válida para el caso del dipolo moviéndose frente a la superficie superior. Esta expresión, junto a la dada en (4.1), permiten expresar los coeficientes de fricción correspondientes al movimiento de un dipolo en el entorno de una superficie plana conductora en función de  $z_0$ , obteniéndose

$$\gamma_{circular}^{inferior} = \frac{9\mu^2\mu_0^2\sigma\delta_s}{8\pi} \left( \frac{1}{24\left(\frac{L}{2} + z_0\right)^6} - \frac{4a_s^2 + \left(\frac{L}{2} + z_0\right)^2}{24\left(a_s^2 + \left(\frac{L}{2} + z_0\right)^2\right)^4} \right) \left(\frac{L}{2} + z_0\right)^2 \quad (4.22)$$

y

$$\gamma_{circular}^{superior} = \frac{9\mu^2\mu_0^2\sigma\delta_s}{8\pi} \left( \frac{1}{24\left(\frac{L}{2} - z_0\right)^6} - \frac{4a_s^2 + \left(\frac{L}{2} - z_0\right)^2}{24\left(a_s^2 + \left(\frac{L}{2} - z_0\right)^2\right)^4} \right) \left(\frac{L}{2} - z_0\right)^2. \quad (4.23)$$

Si se tiene un dipolo entre dos superficies circulares separadas una distancia  $L$ , oscilando en torno al punto medio de separación de las dos placas (situación representada en la figura 4-11), el coeficiente de fricción total viene dado por la suma de (4.22) y (4.23).

A continuación, se representa el coeficiente de fricción global debido a la acción conjunta de las dos superficies para  $L/a = 3$ .

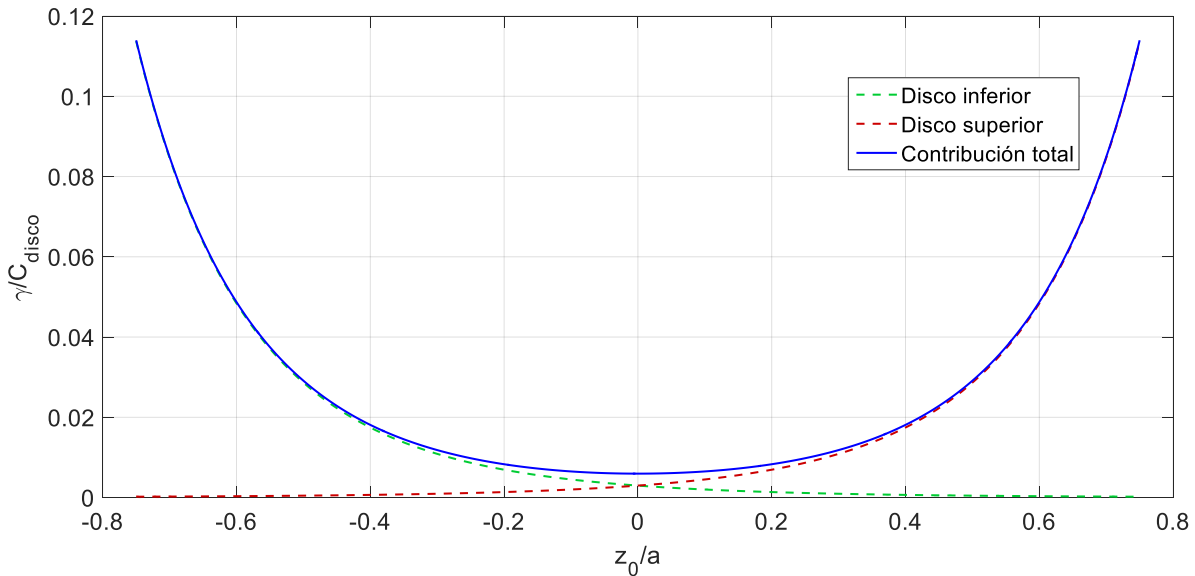


Figura 4-12. Coeficiente de fricción asociado a un dipolo entre dos superficies circulares

En la figura 4-12, se aprecia que existe un rango de posiciones en torno a  $z_0 = 0$  en el que la derivada es prácticamente nula.

Debido a la forma del coeficiente de fricción que se obtiene en esta situación, resulta válido aproximar el coeficiente de fricción con un polinomio de Taylor. Cuando se consideren oscilaciones sobre  $z_0 = 0$ , es posible aproximar el coeficiente de fricción realizando un desarrollo en serie de Taylor en torno a  $z_0^* = 0$ ,



$$\gamma(z_0) \cong \gamma(0) + z_0\gamma'(0) + \frac{z_0^2}{2}\gamma''(0). \quad (4.24)$$

Definida la aproximación del coeficiente de fricción según (4.24), se puede particularizar la condición de amortiguamiento crítico para obtener la distancia  $z_0^{crítica}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(z_0)}{2m} = \omega_0 \rightarrow \frac{z_0^2}{2}\gamma''(0) + z_0\gamma'(0) + \gamma(0) - 2\sqrt{km} = 0 \rightarrow \\ \rightarrow z_0^{crítica} = \frac{-\gamma'(0) \pm \sqrt{\gamma'(0)^2 - 2\gamma''(0)(\gamma(0) - 2\sqrt{km})}}{\gamma''(0)}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Para caracterizar el coeficiente de fricción de la expresión (4.25), se deben calcular la primera y segunda derivada del coeficiente de fricción.

Calculadas las derivadas y considerando la situación representada de la figura 4-10, se obtiene que  $\gamma'(0)=0$  y de (4.25) se obtiene

$$z_0^{crítica} = \pm \sqrt{\frac{2(-\gamma(0) + 2\sqrt{km})}{\gamma''(0)}}. \quad (4.26)$$

En la siguiente tabla, se muestra el tipo de amortiguamiento que se desarrolla al moverse un dipolo entre dos superficies circulares, en función de la distancia  $z_0$ .

Tabla 4-3. *Amortiguamiento desarrollado por el movimiento de un dipolo entre dos placas circulares*

Intervalo de $z_0$	Tipo de amortiguamiento
$ z_0  >  z_0^{crítica} $	Sobreamortiguado
$ z_0  =  z_0^{crítica} $	Críticamente amortiguado
$ z_0  <  z_0^{crítica} $	Subamortiguado

Como el mínimo del coeficiente de fricción se encuentra en  $z_0 = 0$ , en caso de que  $\gamma(0) > 2\sqrt{km}$ , el sistema de la figura 4-10 respondería de forma sobreamortiguada en todo momento y la distancia  $z_0^{crítica}$  no se definiría. Este análisis es válido en el caso de considerar oscilaciones de pequeña oscilaciones.



# 5 AMORTIGUADOR FORMADO POR UN TUBO Y SUPERFICIES CIRCULARES PLANAS CONDUCTORAS

---

*La verdadera grandeza de la ciencia acaba valorándose por su utilidad.*

Gregorio Marañón

El amortiguador que se pretende analizar en este capítulo, está compuesto por un tubo de longitud  $L$  y radio interior  $a$ , y dos tapas circulares colocadas en los extremos del tubo de radio  $a$ .

Como se ha desarrollado en los capítulos anteriores, el coeficiente de fricción depende de la posición del dipolo. En una primera aproximación, con el fin de eliminar esta dependencia, se va a considerar que el coeficiente de fricción desarrollado por el amortiguador es el que se tiene cuando el dipolo está situado en  $\bar{z}_0 = 0$ . Por tanto, se va a elegir como punto de diseño, la situación en la cual el dipolo se posiciona en la sección central del tubo a una distancia  $L/2$  de los extremos del tubo. Bajo este supuesto, se debe admitir que las oscilaciones que se desean atenuar, son tales que el coeficiente de fricción no varía significativamente durante el movimiento del dipolo. Estas situaciones (deducidas en los capítulos anteriores) se tienen cuando la amplitud máxima de las oscilaciones sea muy pequeña, de manera que permita aproximar el coeficiente de fricción de las tapas y del tubo, a su valor asociado en  $\bar{z}_0 = 0$ , y cuando el tubo sea suficientemente largo para aceptar la aproximación de tubo infinito, siempre y cuando las tapas no influyan significativamente en la potencia total disipada.

En un segundo análisis, se va a considerar en el coeficiente de fricción total, la dependencia de la posición del dipolo, considerando de manera exacta el coeficiente de fricción asociado a las superficies conductoras que constituyen el amortiguador objeto de estudio.

Finalmente, mediante la resolución numérica de la ecuación del movimiento, se analiza la respuesta del sistema considerando la dependencia de la posición del dipolo en el coeficiente de fricción y se concluye este capítulo, caracterizando numéricamente el amortiguador.

## 5.1 Factores que influyen en el diseño

- **Propiedades del material:** densidad  $\rho$  y conductividad  $\sigma$ . Se debe elegir un material con una conductividad alta para maximizar el coeficiente de fricción. Además, con una densidad baja se consigue minimizar la masa del amortiguador.

La masa de un amortiguador formado por un tubo y dos tapas circulares en sus extremos es

$$m_{\text{amortiguador}} = (2\pi a\delta L + 2\pi a^2\delta)\rho = 2\pi\rho a^3(\bar{L} + 1)\frac{\delta}{a} = C_m(\bar{L} + 1). \quad (5.1)$$

De la expresión (5.1) se deduce que para un radio  $a$  fijo, la masa se minimiza al reducir la esbeltez. A continuación, se representa la masa del amortiguador en función de la esbeltez.

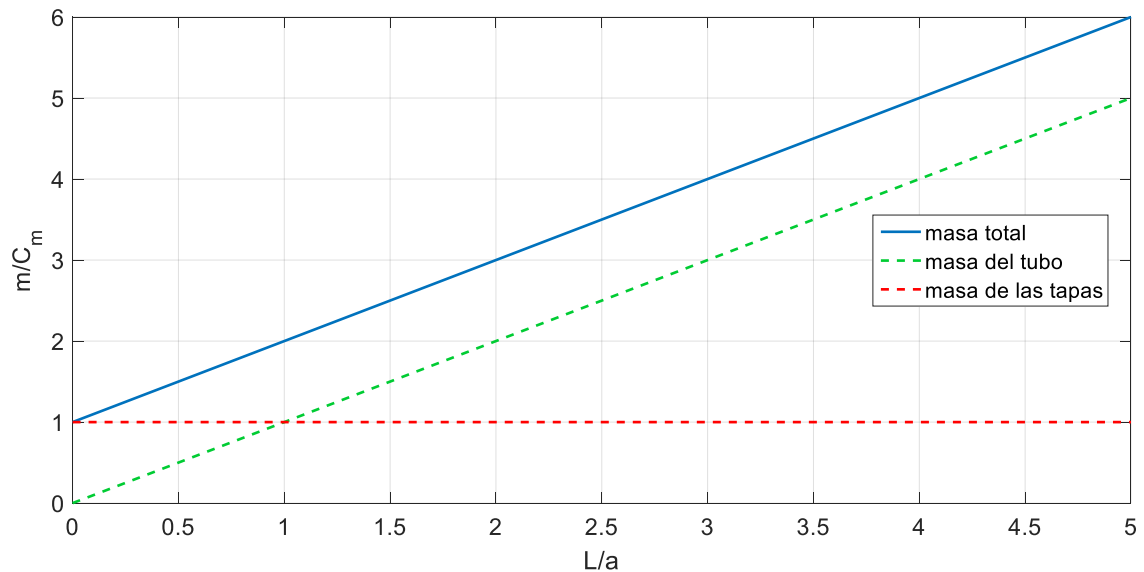


Figura 5-1. Masa del amortiguador en función de la esbeltez

Cuando  $\bar{L} < 1$ , la masa asociada a las tapas circulares representa una mayor contribución en la masa total del amortiguador. Con  $\bar{L} > 1$ , el tubo es el elemento más pesado del amortiguador.

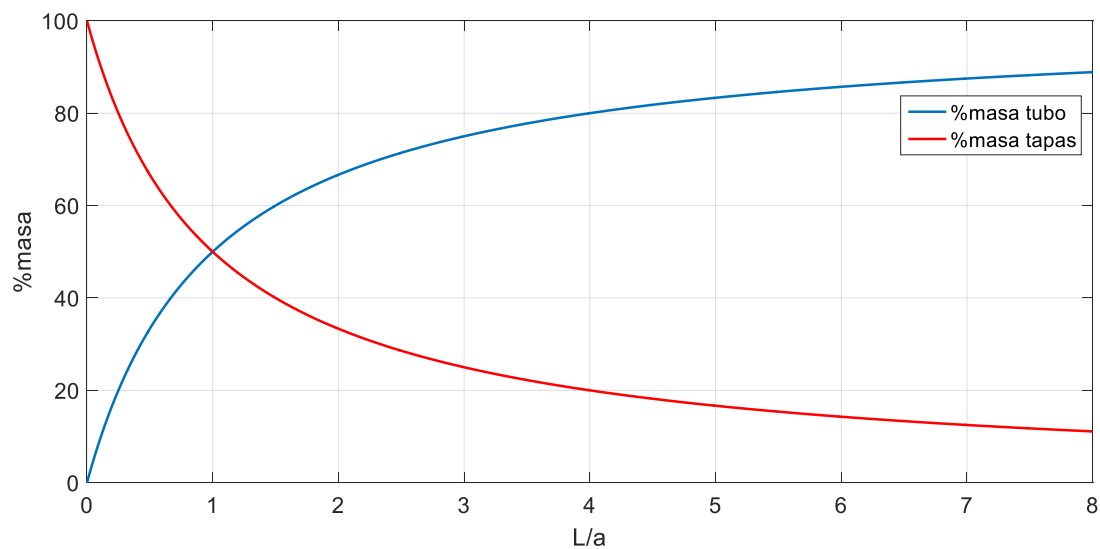


Figura 5-2. Porcentajes de masas asociadas al tubo y a las tapas respecto a la masa total

- **Esbeltez  $\bar{L}$ .** Para minimizar la masa del material conductor, se debe elegir la menor esbeltez posible.
- **Radio  $a$  del tubo y de las tapas circulares.** Elegida la esbeltez del amortiguador, se debe minimizar el radio para incrementar el coeficiente de fricción y minimizar la masa de las superficies que constituyen el amortiguador.
- **Espesor  $\delta$ .** Incrementos en el espesor, suponen una mejora en el coeficiente de fricción. Para espesores medianos ( $\delta/a \sim 0.5$ ), se podrían conseguir incrementos de potencia importantes (duplicar

o triplicar la potencia disipada respecto a la que se disipa en una superficie delgada) según los resultados obtenidos en las gráficas 3-11 y 4-8.

Respecto a la masa del amortiguador, existe una relación directamente proporcional con el espesor.

- **Momento dipolar magnético:** Se va a maximizar empleando imanes de neodimio.

## 5.2 Intervalos de posiciones del dipolo con coeficiente de fricción constante

En este apartado, se indican los intervalos de posiciones del dipolo para los cuales, el coeficiente de fricción es constante en función de la esbeltez. De las gráficas de la potencia o del coeficiente de fricción en función de la posición del dipolo (gráficas 3-6 y 4-12), representadas en los capítulos anteriores, se pueden obtener los rangos de  $z_0$  para los cuales existen variaciones menores al 10% respecto al valor nominal asociado a la posición  $z_0 = 0$ . Estos rangos se recogen en las tablas 5-1 y 5-2.

Tabla 5-1. Rangos de  $z_0$  con  $\gamma$  constante para dipolo moviéndose entre dos superficies circulares

$\bar{L}$	Rango $\bar{z}_0$	$\bar{L}$	Rango $\bar{z}_0$
0.5	[-0.0244, 0.0244]	3	[-0.1050, 0.1050]
1	[-0.0488, 0.0488]	3.5	[-0.1148, 0.1148]
1.5	[-0.0675, 0.0675]	4	[-0.1250, 0.1250]
2	[-0.0825, 0.0825]	4.5	[-0.1350, 0.1350]
2.5	[-0.0938, 0.0938]	5	[-0.1430, 0.1430]

Tabla 5-2. Rangos de  $z_0$  con  $\gamma$  constante para dipolo moviéndose por el interior de un tubo

$\bar{L}$	Rango $\bar{z}_0$	$\bar{L}$	Rango $\bar{z}_0$
0.5	[-0.058, 0.058]	2.5	[-0.467, 0.467]
1	[-0.470, 0.470]	3	[-0.646, 0.646]
1.1	[-0.935, 0.935]	3.5	[-0.861, 0.861]
1.15	[-0.909, 0.909]	4	[-1.091, 1.091]
1.2	[-0.873, 0.873]	4.5	[-1.331, 1.331]
1.5	[-0.267, 0.267]	5	[-1.576, 1.576]
2	[-0.333, 0.333]		

Como se desprende de las tablas anteriores, el tubo admite rangos de posiciones del dipolo más amplios en los que se puede considerar el coeficiente de fricción constante. En cambio, para el caso de un dipolo moviéndose entre dos superficies circulares separadas una distancia  $L$ , los rangos son muy limitados debido a la dependencia importante del coeficiente de fricción con la posición del dipolo.

En un amortiguador formado por un tubo y tapas circulares y según el aporte de cada uno de los elementos que constituyen el amortiguador a la potencia total disipada, el intervalo de posiciones en los que es posible considerar el coeficiente de fricción constante variará y se establece en el apartado 5.3.

### 5.3 Amortiguador sometido a oscilaciones de pequeña amplitud

En este epígrafe, se caracteriza la potencia disipada por un amortiguador formado por un tubo y dos tapas circulares, considerando que las oscilaciones que se desean atenuar son de pequeña amplitud.

#### 5.3.1 Amortiguador sin efecto de la posición del dipolo

En este apartado, se va a considerar que el coeficiente de fricción es contante e igual al que se obtiene en  $\bar{z}_0 = 0$ . Esta aproximación será válida cuando las oscilaciones se correspondan con los intervalos recogidos en las tablas anteriores.

Para el diseño en torno a  $\bar{z}_0 = 0$ , se debe particularizar las expresiones generales de la potencia disipada por el tubo y las tapas en  $\bar{z}_0 = 0$ . En el caso del tubo, la potencia disipada con el dipolo situado en la sección central, viene dada por (3.12). En el caso de las tapas, se particulariza en (4.10) para una  $\bar{d}_0 = \bar{L}/2$ , obteniéndose

$$P = \frac{3v^2\mu^2\mu_0^2\sigma\delta}{4a^4\pi} \left( \frac{1}{\bar{L}^4} - \frac{(16 + \bar{L}^2)\bar{L}^2}{(4 + \bar{L}^2)^4} \right). \quad (5.2)$$

Sumando la potencia disipada correspondiente a todos los elementos que constituyen el amortiguador, se obtiene la potencia total disipada por el amortiguador,

$$\begin{aligned} P_{total} &= P_{tapa}^{superior} + P_{tapa}^{inferior} + P_{tubo} = \frac{3v^2\mu^2\mu_0^2\sigma\delta}{2\pi a^4} \left( \frac{1}{\bar{L}^4} - \frac{(16 + \bar{L}^2)\bar{L}^2}{(4 + \bar{L}^2)^4} \right) + \\ &+ \frac{1}{256} \left( \frac{-1920\bar{L} + 2336\bar{L}^3 + 440\bar{L}^5 + 30\bar{L}^7}{(4 + \bar{L}^2)^4} + 15 \operatorname{arctg} \left( \frac{\bar{L}}{2} \right) \right) = \\ &= C_t \left( \frac{1}{\bar{L}^4} - \frac{(16 + \bar{L}^2)\bar{L}^2}{(4 + \bar{L}^2)^4} + \frac{1}{256} \left( \frac{-1920\bar{L} + 2336\bar{L}^3 + 440\bar{L}^5 + 30\bar{L}^7}{(4 + \bar{L}^2)^4} + 15 \operatorname{arctg} \left( \frac{\bar{L}}{2} \right) \right) \right). \quad (5.3) \end{aligned}$$

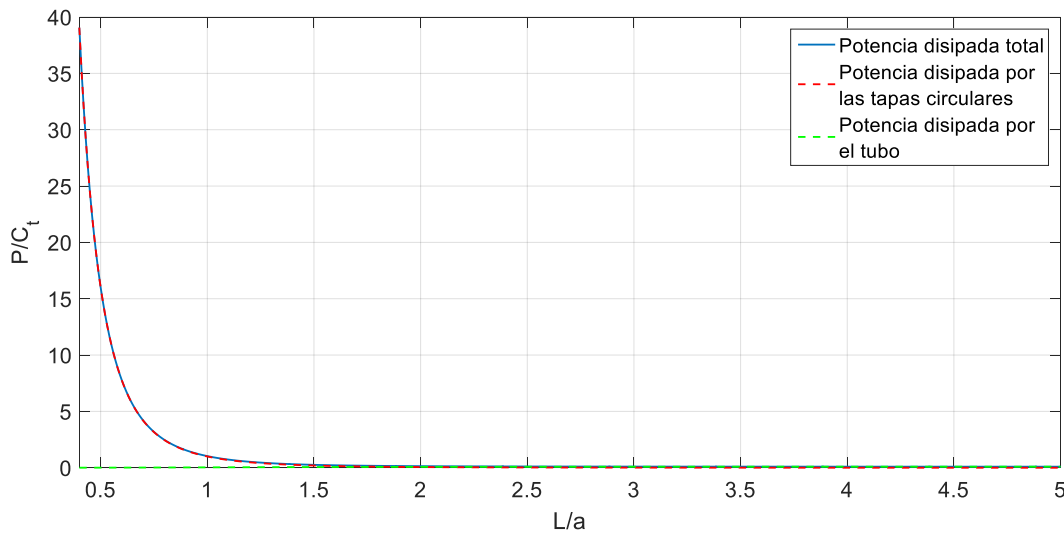


Figura 5-3. Potencia total disipada por el amortiguador

Según el resultado de la figura 5-3, para maximizar el coeficiente de fricción del amortiguador se debe emplear la menor esbeltez posible. Sin embargo, emplear una esbeltez baja limita las amplitudes máximas de las oscilaciones que puede atenuar el amortiguador. Por tanto, la relación de aspecto, también, debe elegirse teniendo en cuenta las oscilaciones que se pretenden atenuar.

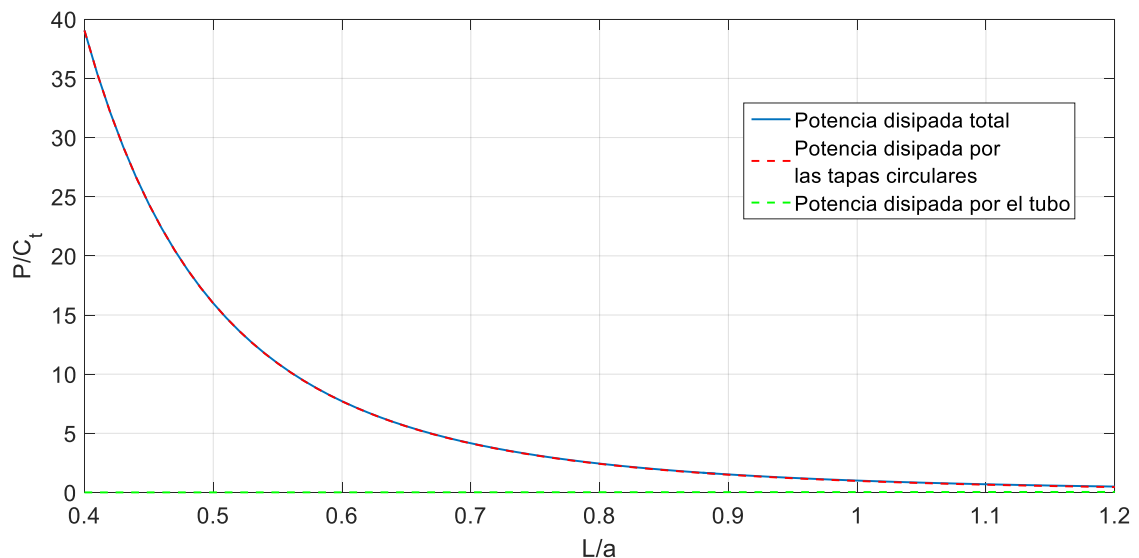
Tabla 5-3. Porcentaje de potencias disipadas por el tubo y las tapas según la esbeltez

Intervalo de esbeltez	Porcentaje de potencia disipada por las tapas	Porcentaje de potencia disipada por el tubo
$\bar{L} \in [0, 1.2]$	$> 91.02\%$	$< 8.98\%$
$\bar{L} \in [1.2, 2.7]$	$91.02\% - 8.75\%$	$8.98\% - 91.25\%$
$\bar{L} \in [2.7, \infty)$	$< 8.75\%$	$> 91.25\%$

Según los resultados de la tabla 5-3, el efecto de las tapas sobre la potencia total es inferior al 8.75% si la separación entre las tapas y el dipolo es superior a  $1.35a$ . Por tanto, siempre que el dipolo esté separado una distancia de  $2.7a/2$ , la potencia disipada por las tapas es menor al 9% respecto al total.

A continuación, se representa la gráfica 5-1 dividida en los intervalos definidos en la tabla 5-3 para una mayor comprensión de la figura 5-1.

- $\bar{L} \in [0, 1.2]$

Figura 5-4. Potencia disipada por el amortiguador para  $L/a \in [0, 1.2]$ 

En este rango de relaciones de aspecto, la principal contribución en la disipación total de potencia corresponde a las tapas circulares. El tubo contribuye menos del 9% al coeficiente de fricción total del amortiguador, pero su contribución en masa es muy significativa. Para una esbeltez unidad, el tubo contribuye en un 50% a la masa total del amortiguador. Por lo tanto, se deduce que con relaciones de aspecto menores a 1.2, no sería necesario incluir un tubo conductor en el amortiguador ya que este supone un incremento significativo en la masa total del amortiguador que no se ve compensado por incrementos importantes en el coeficiente de fricción.

Los intervalos de posiciones del dipolo en los cuales es válido este análisis se corresponden a los recogidos en la tabla 5-1.

- $\bar{L} \in [2.7, 5]$

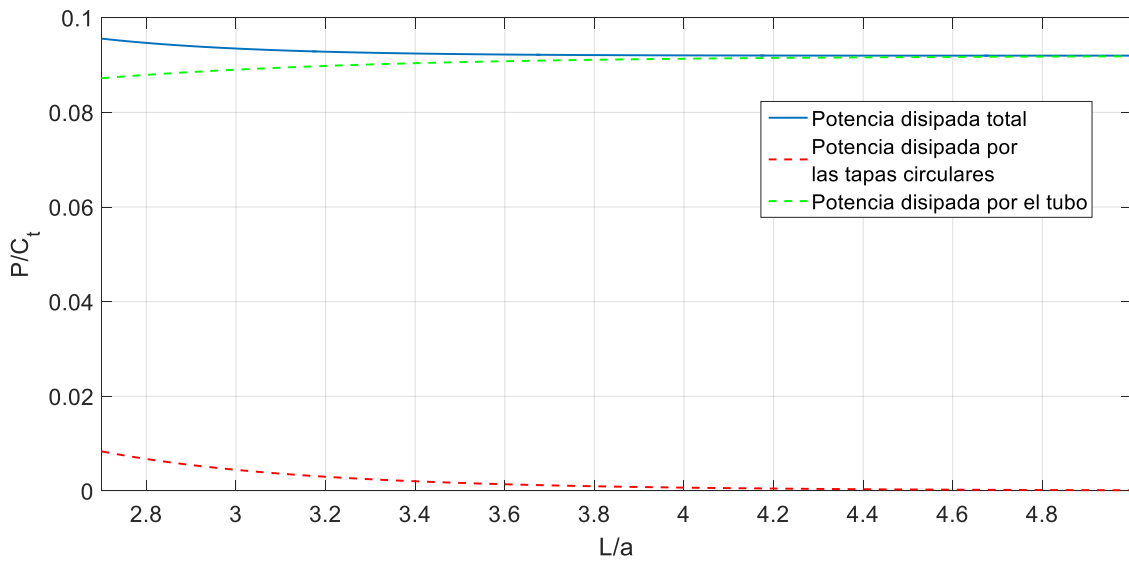


Figura 5-5. Potencia disipada por el amortiguador para  $L/a \in [2.7, 5]$

La contribución del tubo al coeficiente de fricción total es superior al 91%. El porcentaje de masa asociada a las tapas respecto al total es inferior al 30%. En este intervalo de relaciones de aspecto, la masa de las superficies circulares no influye de manera muy acusada en la masa total del sistema.

Cuando se utilicen relaciones de aspecto muy elevadas, las tapas no disiparían potencia por lo que se puede prescindir de ellas en el diseño del amortiguador, bajo el supuesto inicial de oscilaciones de pequeña amplitud.

Prescindiendo de las tapas circulares por su escaso aporte en la potencia total disipada, los intervalos de posiciones del dipolo en los que el coeficiente de fricción es constante, se corresponden a los de la tabla 5-2.

- $\bar{L} \in [1.2, 2.7]$

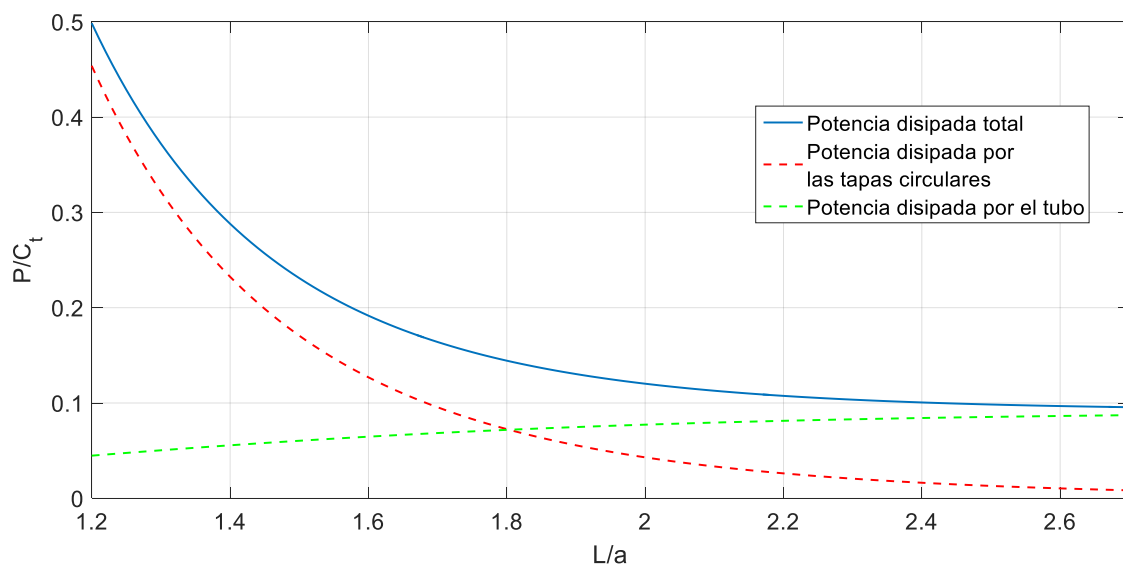


Figura 5-6. Potencia disipada por el amortiguador para  $L/a \in [1.2, 2.7]$

En este rango, las contribuciones del tubo y las tapas a la potencia disipada total son importantes y del



mismo orden.

El tubo es el elemento que más contribuye a la masa total del amortiguador aunque los porcentajes de masa del tubo y de las tapas sobre la masa total son similares. El intervalo de posiciones en este rango de esbeltez se establece en el apartado 5.3.2, donde se determinan las posiciones del dipolo con  $\gamma$  constante al considerar la acción conjunta de todos los elementos del amortiguador en oscilaciones de pequeña amplitud.

### 5.3.2 Efecto de la posición del dipolo en oscilaciones de pequeña amplitud

En este apartado, se van a utilizar las expresiones de potencia disipada total por el amortiguador considerando la potencia disipada por las tapas circulares en función de la posición del dipolo  $\bar{z}_0$  y la potencia disipada asociada al tubo cuando el dipolo se encuentra en  $\bar{z}_0 = 0$ .

Se van a recalcular los intervalos de posiciones  $\bar{z}_0$  en los que la variación de la potencia disipada total es menor del 10% respecto al valor nominal, al tener en cuenta el efecto combinado del tubo y las tapas.

Al considerar que la potencia disipada por el tubo es constante e igual a la obtenida en  $\bar{z}_0 = 0$ , los intervalos de posiciones que se obtengan en este apartado, no pueden ser más amplios que los establecidos en la tabla 5-2.

Sumando las expresiones de la potencia disipada por cada uno de los elementos, se obtiene la potencia total disipada por el amortiguador en función de la esbeltez y la posición del dipolo.

A continuación, se representa la potencia disipada del amortiguador en función de la posición del dipolo, considerando distintas esbelteces.

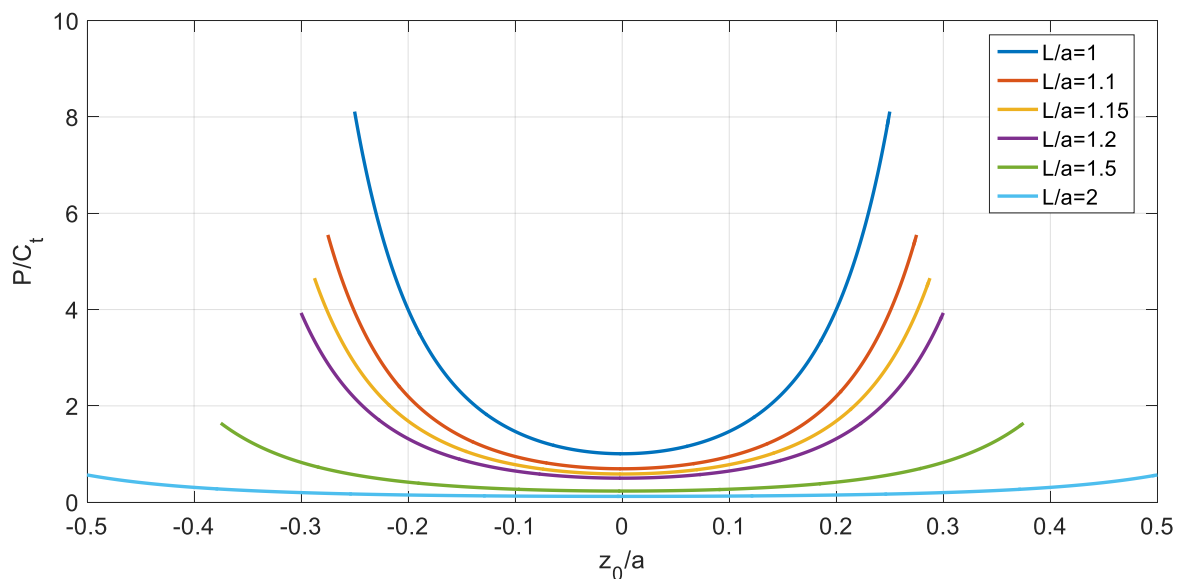


Figura 5-7. Potencia disipada por el amortiguador en función de  $z_0$  con  $L/a \in [1, 2]$

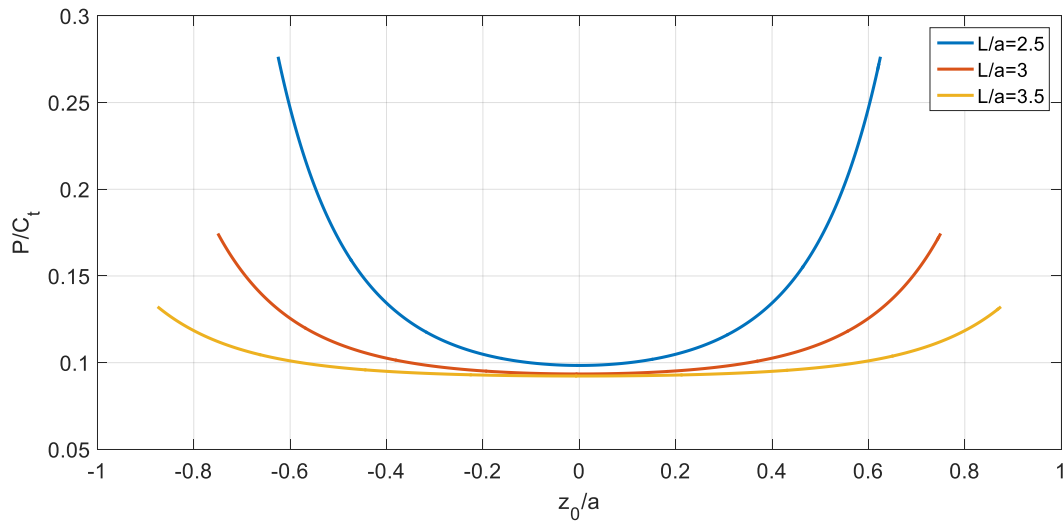


Figura 5-8. Potencia disipada por el amortiguador en función de  $z_0$  con  $L/a \in [2.5, 3.5]$

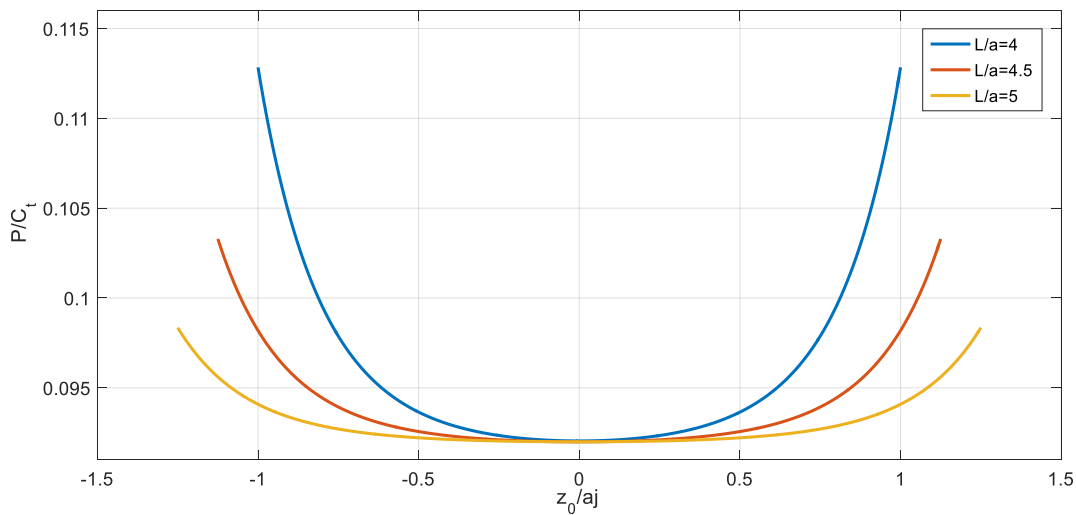


Figura 5-9. Potencia disipada por el amortiguador en función de  $z_0$  con  $L/a \in [4, 5]$

Al igual que en el análisis anterior, se observan en las gráficas obtenidas que para maximizar el coeficiente de fricción, se debe elegir la relación de aspecto más pequeña posible. Por tanto, la elección de una determinada esbeltez puede hacerse según la amplitud de las oscilaciones que se desea amortiguar.

A continuación, se muestran los intervalos de posiciones del imán asociados a un coeficiente de fricción constante.

Tabla 5-4. *Intervalos de posiciones del dipolo con coeficiente de fricción constante*

$\bar{L}$	Rango $\bar{z}_0$	$\bar{L}$	Rango $\bar{z}_0$
0.5	[-0.025, 0.025]	3	[-0.420, 0.420]
1	[-0.050, 0.050]	3.5	[-0.630, 0.630]
1.5	[-0.083, 0.083]	4	[-0.860, 0.860]
2	[-0.140, 0.140]	4.5	[-1.105, 1.105]
2.5	[-0.253, 0.253]	5	[-1.350, 1.350]

Obsérvese que para relaciones de aspecto  $\bar{L} \leq 1$ , el intervalo de posiciones coincide con los dados en la tabla 5-1, al ser despreciable la potencia que disipa el tubo frente a las tapas circulares, mientras que para  $\bar{L} \geq 3$ , los intervalos de posiciones del dipolo son similares a los dados en la tabla 5-2.

#### 5.4 Oscilaciones de gran amplitud. Respuesta del amortiguador

Cuando el amortiguador se somete a oscilaciones de pequeña amplitud (según las recogidas en la tabla 5-4), el sistema analizado responde como un oscilador amortiguado con  $\gamma$  constante. En cambio, el comportamiento del sistema difiere respecto a este oscilador cuando se consideran oscilaciones de mayor amplitud. Ante estas excitaciones, el amortiguador desarrolla un coeficiente de fricción variable con el tiempo y la resolución de la ecuación del movimiento se debe abordar mediante procedimientos numéricos.

En este apartado, para visualizar el comportamiento no lineal del sistema, se representa la respuesta del amortiguador obtenida numéricamente para distintas relaciones de aspecto, en situaciones en las que el coeficiente de fricción es variable.

Para visualizar el comportamiento de cada uno de los elementos del amortiguador, se representa la respuesta considerando un amortiguador formado por dos superficies circulares separadas una distancia  $L$ , un amortiguador formado por un tubo de longitud  $L$  y un amortiguador formado por el tubo y las superficies circulares en sus extremos.

La ecuación del movimiento que se resuelve para obtener la respuesta del amortiguador viene dada por

$$\ddot{z}_0(t) + \alpha f(z_0) \dot{z}_0(t) + z_0(t) = 0, \text{ con } \alpha f(z_0) = \frac{\mu^2 \mu_0^2 \sigma \delta}{a^4 m} f(z_0) = 2\beta(z_0). \quad (5.4)$$

- $L/a = 1, \alpha = 0.5, z_0(0) = 0.4m, \dot{z}_0(0) = 0m/s$

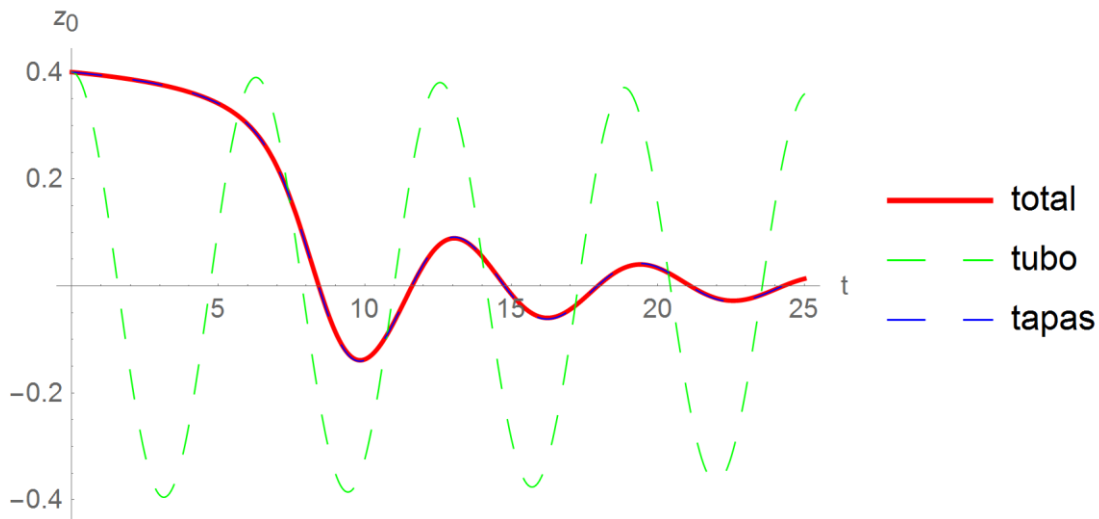


Figura 5-10. Respuesta del amortiguador con  $L/a=1$

Para esbelteces pequeñas, igual que se dedujo en el análisis de pequeña amplitud, las tapas circulares son las responsables de llevar a cabo el fenómeno disipativo, siendo despreciable el aporte del tubo a la disipación total. Además, para una relación de aspecto igual a la unidad, la masa del tubo se corresponde al 50% de la masa total, por lo que sería conveniente diseñar el amortiguador sin este elemento.

- $L/a = 5, \alpha = 20, z_0(0) = 0m, \dot{z}_0(0) = 5m/s$

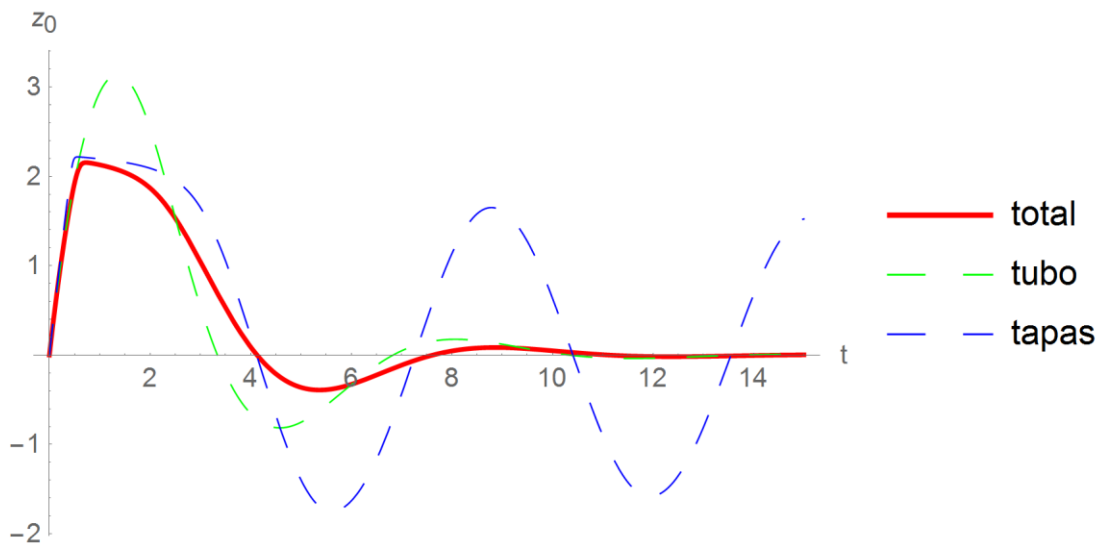


Figura 5-11. Respuesta del amortiguador con  $L/a=5$

Para todas las relaciones de aspecto, cuando  $|z_0^{max}| \cong L/2$  (oscilaciones de gran amplitud), la acción de las superficies circulares es importante. Estas superficies son las responsables de garantizar que  $|z_0^{max}| < L/2$  en todo instante de tiempo. Esto justificaría emplear las tapas para todas las esbelteces posibles, incluso para esbelteces grandes, ya que el aporte de masa sobre el total asociada a las tapas no es muy significativo.

## 5.5 Caracterización numérica del amortiguador

En todo el desarrollo anterior de este trabajo, se ha analizado un amortiguador formado por elementos conductores y un dipolo puntual.

Para analizar amortiguadores reales, es necesario caracterizar las variables empleadas en las expresiones obtenidas y cuantificar las dimensiones del imán que actúa como dipolo puntual. Al dimensionar el dipolo, se debe garantizar la ausencia de contacto entre el dipolo y las tapas circulares para evitar daños en los elementos del amortiguador (en caso de que el amortiguador real emplee estas superficies). Como se detalla posteriormente, esta condición limita las relaciones de aspecto mínimas que se pueden emplear.

Además, como se ha deducido en el análisis del coeficiente de fricción en función de la esbeltez, solo está justificado emplear las tapas cuando el aporte sobre la potencia disipada sea significativo sobre la potencia disipada total.

Otro factor que afecta a la esbeltez es la amplitud de las oscilaciones. En apartados anteriores, se ha especificado que al incrementar la relación de aspecto, el amortiguador puede admitir perturbaciones iniciales más intensas y por tanto tendría mayor versatilidad referida a una mayor amplitud de oscilaciones admisibles.

Todas estas indicaciones limitan en la mayoría de las situaciones, el empleo de superficies circulares en los extremos del tubo. Sin embargo, posteriormente, se analiza un diseño de amortiguador en el que es deseable el empleo de estas superficies.

### 5.5.1 Parámetros y variables del amortiguador

Los parámetros y variables que se deben caracterizar son:

- **Material conductor:** el material que se va a emplear es el cobre al ser este un material de conductividad alta y fácil de adquirir. Su conductividad eléctrica es  $\sigma = 5.96 \cdot 10^7 \text{ S/m}$  [11].
- **Espesor del tubo y de las superficies circulares:** el espesor de las superficies conductoras es  $\delta = 1 \text{ mm}$ .
- **Radio  $a$ :** se va a analizar la respuesta del amortiguador y el coeficiente de amortiguamiento que se desarrolla para  $a = 1 \text{ cm}$ ,  $a = 0.5 \text{ cm}$  y  $a = 0.25 \text{ cm}$ .
- **Esbeltez  $\bar{L}$ :** se analizarán distintos amortiguadores con esbelteces variables.

Un aspecto importante a considerar es que las oscilaciones máximas del imán están limitadas por su altura. Para evitar el contacto entre el imán y las superficies circulares de los extremos, se debe garantizar que

$$|z_0^{\max}| \leq \frac{\bar{L}}{2} - \frac{0.5 \text{ cm}}{a[\text{cm}]} \quad (5.5)$$

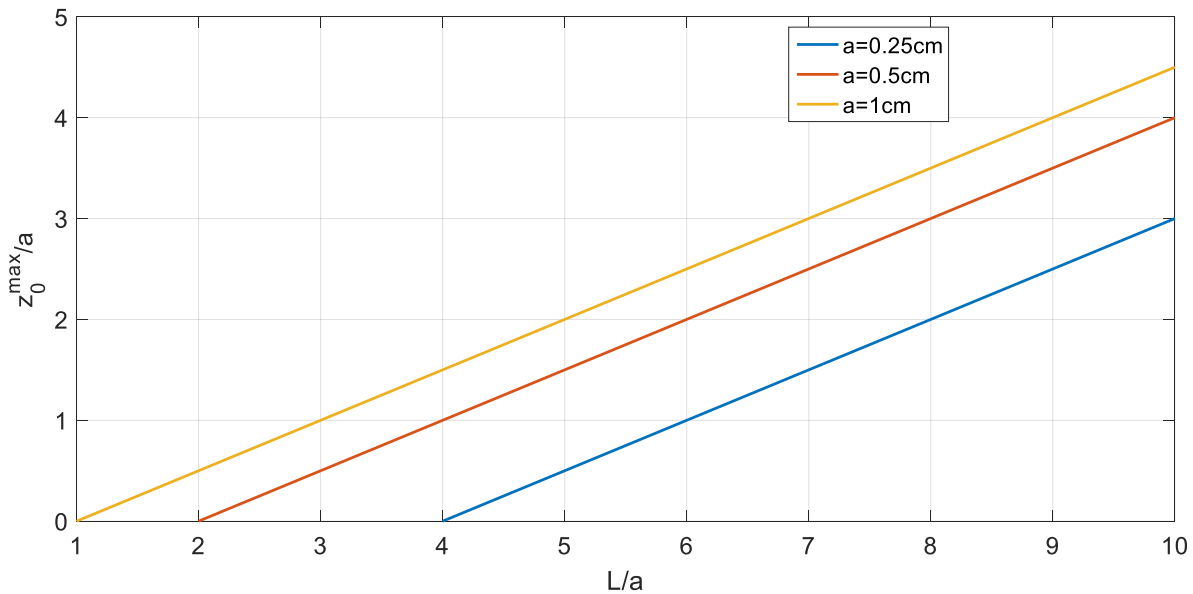


Figura 5-12. Amplitud máxima de las oscilaciones en función de la esbeltez

De la gráfica anterior, se deduce que las regiones superiores a las rectas dibujadas son zonas inadmisibles y que la condición de no contacto entre el imán y las tapas impone relaciones de aspecto mínimas según el radio del tubo.

- **Permeabilidad magnética en el vacío:**  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ [6].
- **Imán:** para aproximar un dipolo puntual a un imán real se va a considerar que el imán es cilíndrico, cuyo radio mide un milímetro y su altura es de un centímetro. El imán que se va a emplear es de neodimio con una imanación de saturación  $M_s = 1.27324 \cdot 10^6 \text{ A/m}$ [12]. Con estos datos, es posible caracterizar el momento dipolar magnético del imán como el producto de la imanación de saturación y el volumen del imán, obteniéndose que  $\mu = 0.04 \text{ Am}^2$ .
- **Masa del sistema  $m$  y constante elástica del muelle  $k$ :** se determinan durante el proceso de diseño para garantizar que la respuesta del amortiguador es subamortiguada con una relación  $\beta^*/\omega_0 = 0.4$ [4], la cual es típica en los amortiguadores mecánicos empleados habitualmente. ( $\beta^*$  corresponde al asociado en  $z_0 = 0$ ).

Fijando inicialmente la masa del sistema, para llevar a cabo el proceso de diseño del amortiguador (caracterización de  $\beta$ ,  $\omega_0$  y  $k$ , en función de la masa, esbeltez y radio del tubo), se va a proceder de la siguiente manera:

- Primero, para una masa fijada se calcula  $\beta$  según las expresiones del coeficiente de fricción obtenidas.
- Luego, se obtiene la frecuencia natural del sistema, manteniendo la relación de amortiguamiento constante e igual a 0.4.
- Tras el cálculo de la frecuencia natural del sistema, la constante elástica del muelle viene dada por la definición de la frecuencia natural.

Obsérvese que incrementos en la masa, reducen el valor de  $\beta$  y el sistema pierde capacidad de amortiguamiento, necesitando más tiempo para atenuar las vibraciones. En base a esta circunstancia, se pone de manifiesto la necesidad de llegar a un compromiso entre la masa máxima del sistema y el tiempo empleado en regresar a la posición de equilibrio.

A continuación, se procede a caracterizar el amortiguador para las siguientes relaciones de  $\delta/a$ : 0.1, 0.2 y 0.4.

### 5.5.1.1 Relación $\delta/a=0.1$

Para un radio  $a = 1\text{ cm}$ , se tiene que  $\delta/a = 0.1$ , por lo que se puede realizar la consideración de superficies delgadas.

Resolviendo la ecuación del movimiento para distintas masas del sistema se deduce que para masas superiores a un gramo, la respuesta del sistema es excesivamente lenta por lo que, para este radio se va a suponer que la masa debe ser igual o inferior a un gramo.

Tabla 5-5. Caracterización del amortiguador con  $m=1\text{ g}$  y  $\delta/a=0.1$

$\bar{L}$	$L[\text{cm}]$	$z_0^{\text{max}}[\text{cm}]$	$\beta^*[\text{s}^{-1}]$	$\omega_0[\text{rad s}^{-1}]$	$k[\text{Nm}^{-1}]$
2	2	0.5	0.42	1.05	$1.1025 \cdot 10^{-3}$
3	3	1	0.32	0.8	$6.40 \cdot 10^{-4}$
4	4	1.5	0.32	0.8	$6.40 \cdot 10^{-4}$

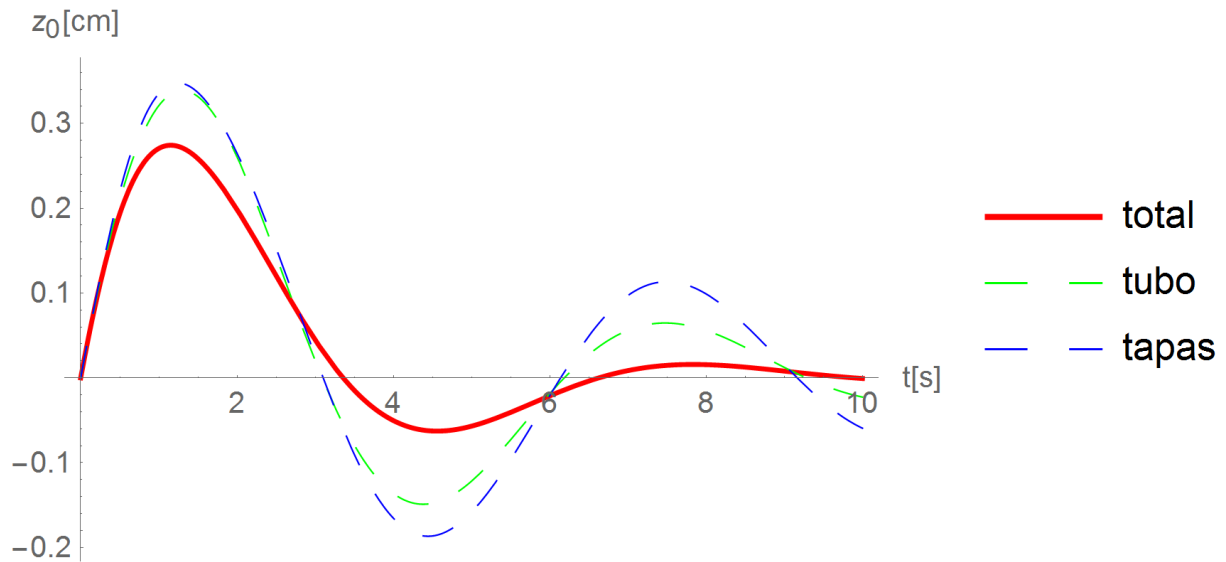


Figura 5-13. Respuesta del sistema con  $L/a=2$ ,  $\delta/a=0.1$ ,  $m=1\text{ g}$ ,  $z_0=0$  y  $v_0=0.5\text{ cm/s}$

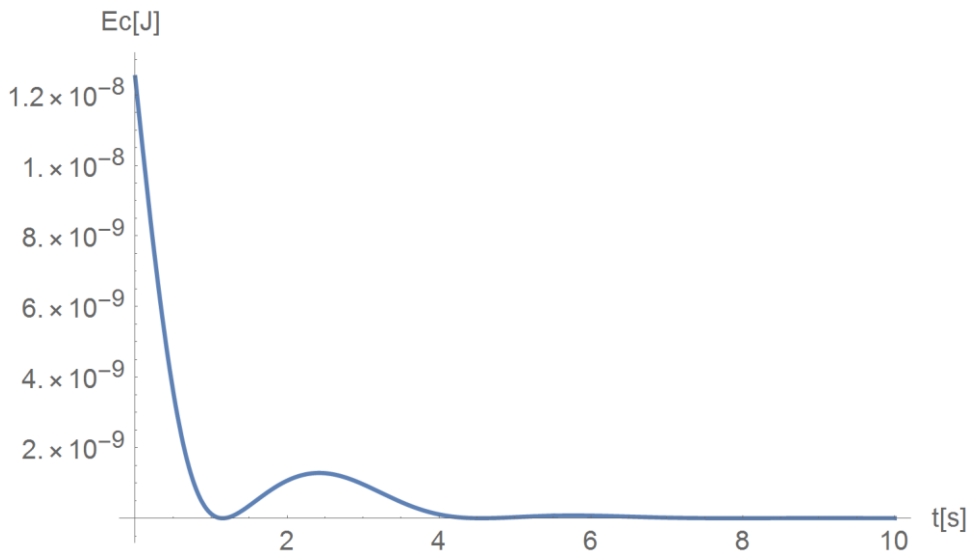


Figura 5-14. Energía cinética con  $L/a=2$ ,  $\delta/a=0.1$ ,  $m=1g$ ,  $z_0=0$  y  $v_0=0.5cm/s$

Tabla 5-6. Caracterización del amortiguador con  $m=10g$  y  $\delta/a=0.1$

$\bar{L}$	$L[cm]$	$z_0^{max}[cm]$	$\beta^*[s^{-1}]$	$\omega_0[rad s^{-1}]$	$k[Nm^{-1}]$
2	2	0.5	0.043	0.1075	$1.1556 \cdot 10^{-4}$
3	3	1	0.033	0.0825	$6.8063 \cdot 10^{-5}$
4	4	1.5	0.033	0.0825	$6.8063 \cdot 10^{-5}$

Para un masa del sistema de 10g, se necesitan aproximadamente 100 segundos para detener a la masa que vibra, por lo que solo se aconseja usar la relación  $\delta/a=0.1$  para aplicaciones con  $m \sim 1g$ . Con el fin de incrementar la masa del sistema para la cual es posible aplicar los amortiguadores basados en corrientes de Foucault, se propone aumentar la relación  $\delta/a$ .

### 5.5.1.2 Relación $\delta/a=0.2$

Con un espesor de un milímetro, se obtiene que  $a = 0.5cm$ .

En la resolución de la ecuación del movimiento, el coeficiente de fricción se caracteriza teniendo en cuenta el efecto del espesor según la relación  $\delta/a = 0.2$ . Además, variando la masa del sistema durante la resolución de la respuesta, se deduce que para masas superiores a 10 gramos (con esta masa se necesitan 10 segundos para detener el sistema tras una perturbación inicial), la respuesta del sistema es excesivamente lenta. Por tanto, se van a analizar los casos en los que la masa es 1 gramo y 10 gramos.

Tabla 5-7. Caracterización del amortiguador con  $m=1g$  y  $\delta/a=0.2$

$\bar{L}$	$L[cm]$	$z_0^{max}[cm]$	$\beta^*[s^{-1}]$	$\omega_0[rad s^{-1}]$	$k[Nm^{-1}]$
3	1.5	0.25	4.20	10.5	$1.1025 \cdot 10^{-1}$
4	2	0.5	4.14	10.35	$1.0712 \cdot 10^{-1}$
5	2.5	0.75	4.14	10.35	$1.0712 \cdot 10^{-1}$
6	3	1	4.14	10.35	$1.0712 \cdot 10^{-1}$



Tabla 5-8. Caracterización del amortiguador con  $m=10g$  y  $\delta/a=0.2$ 

$\bar{L}$	$L[cm]$	$z_0^{max}[cm]$	$\beta^*[s^{-1}]$	$\omega_0[rad\ s^{-1}]$	$k[Nm^{-1}]$
3	1.5	0.25	0.42	1.05	$1.1025 \cdot 10^{-2}$
4	2	0.5	0.41	1.025	$1.0506 \cdot 10^{-2}$
5	2.5	0.75	0.41	1.025	$1.0506 \cdot 10^{-2}$
6	3	1	0.41	1.025	$1.0506 \cdot 10^{-2}$

Para esbelteces superiores, se desarrolla el mismo coeficiente de amortiguamiento, ya que las tapas no contribuyen en la disipación de potencia.

### 5.5.1.3 Relación $\delta/a=0.4$

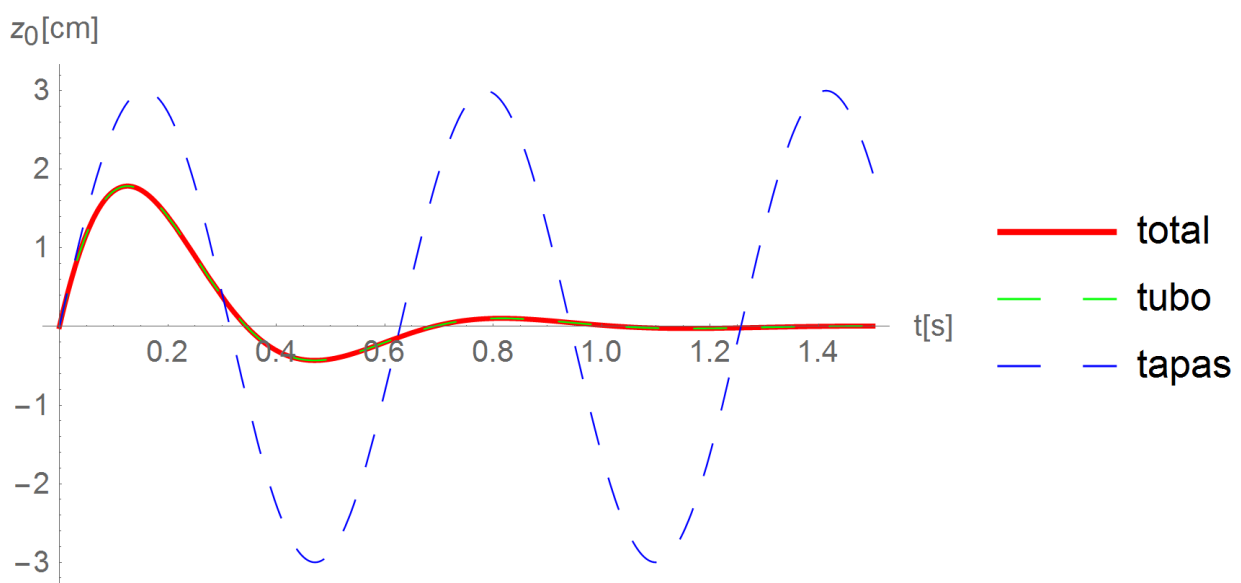
Para esta relación se obtiene un radio de 0.25cm y al igual que en la relación anterior la potencia disipada y el coeficiente de fricción se caracterizan teniendo en cuenta el efecto del espesor.

Calculando la respuesta para distintas masas, se deduce que se obtienen respuestas admisibles (respuestas no excesivamente lentas) para masas menores a 100 gramos.

De la gráfica 5-12, se deduce que la esbeltez mínima a considerar en este caso es 4, por lo que se concluye que las tapas no influyen en el amortiguamiento y por tanto, las características de amortiguamiento son independientes de la esbeltez.

Tabla 5-9. Caracterización del amortiguador con  $m=10g$  y  $\delta/a=0.4$ 

$\bar{L}$	$L[cm]$	$z_0^{max}[cm]$	$\beta^*[s^{-1}]$	$\omega_0[rad\ s^{-1}]$	$k[Nm^{-1}]$
10	2.5	0.75	4.11	10.275	1.05576
20	5	2	4.11	10.275	1.05576

Figura 5-15. Respuesta del sistema con  $L/a=20$ ,  $\delta/a=0.4$ ,  $m=10g$ ,  $z_0=0$  y  $v_0=30cm/s$

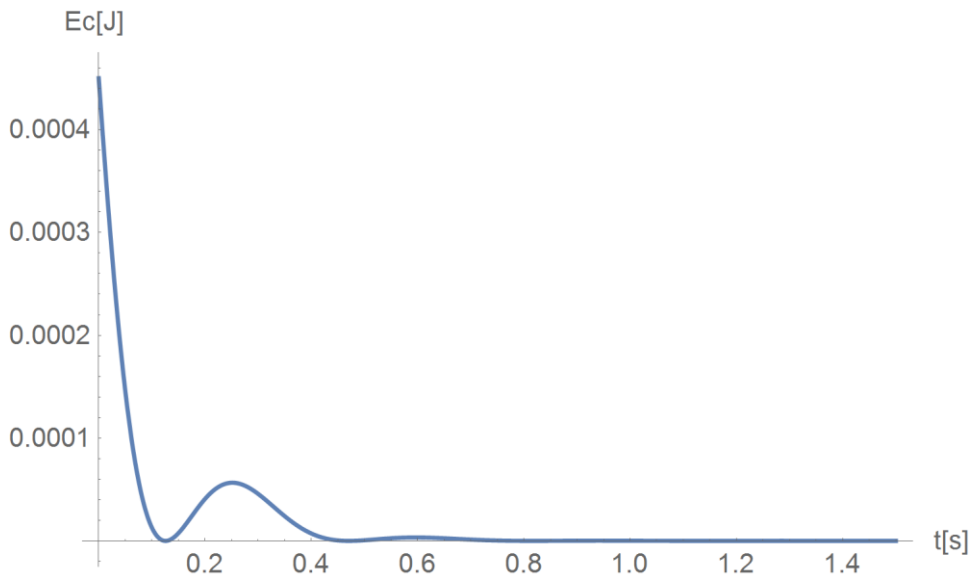


Figura 5-16. Energía cinética con  $L/a=20$ ,  $\delta/a=0.4$ ,  $m=10g$ ,  $z_0=0$  y  $v_0=30cm/s$

Con esta relación de espesor y radio, para un sistema de  $m = 10g$ , se consigue un respuesta casi instantánea (menos de un segundo), tras una perturbación inicial.

Tabla 5-10. Caracterización del amortiguador con  $m=100g$  y  $\delta/a=0.4$

$\bar{L}$	$L[cm]$	$z_0^{max}[cm]$	$\beta^*[s^{-1}]$	$\omega_0[rad\ s^{-1}]$	$k[Nm^{-1}]$
10	2.5	0.75	0.41	1.025	$1.0506 \cdot 10^{-1}$
20	5	2	0.41	1.025	$1.0506 \cdot 10^{-1}$

Para una masa de 100g, el sistema emplearía aproximadamente 10 segundos en detenerse el movimiento.

Como se ha puesto de manifiesto en las representaciones con  $L/a$  elevadas, se consigue una mayor carrera del imán por el interior del tubo y por tanto, un mayor rango de condiciones iniciales admisibles, haciendo más versátil el amortiguador. Además, el empleo de espesores medianos,  $\delta/a \sim 0.5$ , mejora enormemente las capacidades del amortiguador, permitiendo incrementar la masa del sistema que vibra y reduciendo el tiempo de detención.

Para incrementar la masa del sistema se podría diseñar un dispositivo que incluyese varios amortiguadores.

En definitiva, favorecer e incrementar el fenómeno de la inducción electromagnética para maximizar la potencia disipada.

# 6 CONCLUSIONES

---

*Solo sé que no se nada.*

Sócrates

En el capítulo 1, se ha puesto de manifiesto la existencia del fenómeno vibratorio en los sistemas mecánicos y la necesidad de atenuar las vibraciones mediante el uso de amortiguadores. Los amortiguadores más usuales son los amortiguadores hidráulicos. También, se indican los tipos de respuestas existentes en función de los parámetros del sistema, mostrando gráficamente las respuestas posibles. Una alternativa a los amortiguadores hidráulicos son los amortiguadores basados en corrientes de Foucault. Estos amortiguadores se fundamentan en la existencia de un movimiento relativo entre un imán y un elemento conductor, llevando a cabo un proceso de inducción electromagnética.

El capítulo 2 comienza con una descripción de un esquema de amortiguador que se va a analizar. El amortiguador está formado por un tubo conductor y/o dos superficies circulares conductoras situadas en los extremos del tubo. Además, el amortiguador posee un dipolo magnético unido a un resorte, que se mueve por el interior del tubo. La existencia del movimiento relativo entre los elementos conductores y el dipolo es la responsable del fenómeno de inducción electromagnética. Como consecuencia de este fenómeno, el dipolo experimenta una fuerza magnética, que se obtiene a partir de la potencia disipada por los elementos conductores. El conocimiento de la fuerza magnética conlleva una completa caracterización del coeficiente de fricción desarrollado por el amortiguador. Este capítulo finaliza con una descripción analítica de la respuesta del sistema para coeficientes de fricción constantes.

En el capítulo 3, se analiza el amortiguador formado por un tubo conductor y un dipolo magnético unido a un resorte. Para un tubo delgado, se ha analizado la potencia disipada según la longitud del tubo. Las situaciones analizadas son: tubo de longitud muy pequeña (anillo), tubo de longitud infinita y de longitud finita. Caracterizada la potencia disipada, es posible obtener la fuerza magnética que actúa en el sistema. De esta fuerza, es inmediata la obtención del coeficiente de fricción, que permite la resolución de la ecuación del movimiento y la obtención de las relaciones que deben satisfacerse según el tipo de amortiguamiento. Este capítulo finaliza con el estudio de la influencia del espesor sobre la potencia disipada.

En el capítulo 4, se analiza el amortiguador formado por una superficie plana conductora y un dipolo magnético unido a un resorte. En concreto, se analiza las situaciones en las que se emplea una superficie circular infinita y una superficie circular finita conductora, considerando la aproximación de superficies delgadas y estudiando el efecto del espesor sobre la potencia disipada. Caracterizada la potencia disipada, la fuerza magnética y el coeficiente de fricción, se analiza las condiciones para lograr cada tipo de amortiguamiento. La obtención de la respuesta del sistema se aborda en el siguiente capítulo.

En el capítulo 5, se analiza un amortiguador formado por un dipolo unido a un resorte que se mueve por el interior de un tubo conductor y frente a dos superficies circulares. Las tapas circulares están situadas en los extremos del tubo. Este capítulo se inicia explicando los factores que influyen en el coeficiente de fricción. Debido a la dependencia existente entre el coeficiente de fricción y la posición del dipolo, se comienza estableciendo los intervalos de posiciones en los que es posible aproximar  $\gamma$  por un valor constante. Después, se determina numéricamente la respuesta del sistema ante situaciones en las que el coeficiente de fricción desarrollado por el amortiguador es variable y depende de la posición del dipolo. Finalmente, se realiza una caracterización numérica realista de los parámetros relativos al amortiguador, describiendo la respuesta del

sistema en estos casos.

## REFERENCIAS

- [1] Juana María Mayo Núñez y Jaime Domínguez Abascal. “Mecánica de Máquinas y Vibraciones: Vibraciones de 1 gdl”, Sección de Publicaciones, Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Universidad de Sevilla, 2015
- [2] “Amortiguadores de coches grupo sadeco”: <https://www.gruposadeco.com/amortiguadores/>
- [3] Wiki Departamento de Física Aplicada III. “Oscilaciones amortiguadas (GIE)”. [http://laplace.us.es/wiki/index.php/Oscilaciones\\_amortiguadas\\_\(GIE\)](http://laplace.us.es/wiki/index.php/Oscilaciones_amortiguadas_(GIE))
- [4] Grzegorz ŚLASKI, "Damping parameters of suspension of passenger vehicle equipped with semi-active dampers with by-pass valve". Institute of Machines and Motor Vehicles, Poznan University of Technology, 2011
- [5] Qiang Pan, Tian He, Denghong Xiao, Xiandong Liu, "Design and Damping Analysis of a New Eddy Current Damper for Aerospace Applications". School of Transportation Science and Engineering, Beihang University, 2016
- [6] David K. Cheng, “Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería”. 1ª Edición. Addison-Wesley Iberoamericana, 1998
- [7] “Eddy current brake”: [https://en.wikipedia.org/wiki/Eddy\\_current\\_brake](https://en.wikipedia.org/wiki/Eddy_current_brake)
- [8] Marcelo Rodríguez Danta, Antonio González Fernández y Consuelo Bellver Cebreros, "Campos electromagnéticos”. 2ª edición. Universidad de Sevilla, 1999
- [9] Wiki Departamento de Física Aplicada III. “Dipolo magnético”: [http://laplace.us.es/wiki/index.php/Dipolo\\_magnético](http://laplace.us.es/wiki/index.php/Dipolo_magnético)
- [10] G Donoso, “Magnet fall inside a conductive pipe: motion and the role of the pipe wall thickness”. Eur. J. Phys. 2009
- [11] “Conductividad eléctrica”: [https://es.wikipedia.org/wiki/Conductividad\\_eléctrica](https://es.wikipedia.org/wiki/Conductividad_eléctrica)
- [12] “Neodymium magnets magnetic characteristics”: <http://www.magmamagnets.com/wp-content/uploads/2017/02/neodymium-magnetic-characteristics.pdf>