

# Trabajo Fin de Máster

Máster Universitario en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos

Análisis de secciones mixtas flectadas con conexión parcial. Desarrollo de una herramienta informática.

Autor: Rafael Sánchez Carrasco

Tutor: Héctor Cifuentes Bulté

**Dpto. Mecánica de Medios Continuos y T. de Estructuras**  
**Escuela Técnica Superior de Ingeniería**  
**Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2018





Trabajo Fin de Máster  
Máster en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos

# **Análisis de secciones mixtas flectadas con conexión parcial. Desarrollo de una herramienta informática.**

Autor:

Rafael Sánchez Carrasco

Tutor:

Héctor Cifuentes Bulté

Dpto. Mecánica de Medios Continuos y T. de Estructuras

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2018



Trabajo Fin de Máster: Análisis de secciones mixtas flectadas con conexión parcial. Desarrollo de una herramienta informática.

Autor: Rafael Sánchez Carrasco

Tutor: Héctor Cifuentes Bulté

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2018

El Secretario del Tribunal

*A mis vecinos,  
una amistad de toda la vida*



# Agradecimientos

---

El hecho que despertó en mí el interés por embarcarme en una tarea como esta se produjo en la asignatura Estructuras Metálicas II del Grado en Ingeniería Civil impartida por el profesor Héctor Cifuentes. El profesor explicaba que calcular el momento flector último de una sección asumiendo un comportamiento rígido-plástico de los materiales era una aproximación muy práctica porque se puede resolver de forma manual teniéndose una muy pequeña diferencia en los resultados respecto a aquellos obtenidos con otras leyes de comportamiento de los materiales más fieles a la realidad donde el cálculo manual es inabordable (elastoplástico para el acero y parábola-rectángulo para el hormigón, por ejemplo). Por curiosidad realicé un burdo algoritmo en Matlab que calculara este resultado de ambas formas aplicado a la sección mixta de losa de hormigón sin armadura sobre perfil metálico doble T solamente a flexión positiva. Efectivamente las diferencias no llegaban al 5%. Sin embargo, lo que de verdad disfruté fue conseguir una herramienta que proporciona de forma inmediata un resultado fundamental de una sección mixta.

Conforme avanzaba la asignatura teníamos que realizar de forma repetitiva siempre las mismas operaciones cada vez que calculábamos una sección, con lo que se me pasó por la cabeza seguir mejorando el pequeño programita que ya tenía elaborado implantando todos estos cálculos para mi uso personal y agilizar el proceso, pero resultaba una inversión inicial de tiempo difícil de disponer con la dedicación que iba requiriendo el cuatrimestre. Así que aparqué esa idea por el momento.

Más adelante elegí la asignatura optativa de Matemática Computacional, impartida por el profesor Fernando Fernández Sánchez. Trataba sobre aprendizaje de Matlab. Uno de los temas fue la programación de objetos de control por usuario y creación de interfaces gráficas para crear aplicaciones (botones, menús, menús pop-up, cuadros de introducción de datos, barras de estado...).

El próximo Trabajo Fin de Estudios que tenía que realizar es este Trabajo Fin de Máster. A la hora de elegir un tema me resultó tremendamente interesante la idea de desarrollar un programa informático de cálculo de secciones mixtas y cubrirlo con una interfaz intuitiva para que cualquier usuario lo pudiera utilizar. Se lo propuse al profesor Héctor Cifuentes. Le pareció muy conveniente y aceptó ser mi tutor de buena gana.

Por todo esto quiero agradecer en particular a Héctor Cifuentes y a Fernando Fernández y en general a la ETSI y la Universidad de Sevilla el haber propiciado que me halle aquí sentado culminando con la redacción del presente documento este TFM en el que he puesto toda mi ilusión y me ha formado tanto como Ingeniero.



Este documento es una memoria que acompaña al software de cálculo de secciones mixtas **MixtasCalc** que, en su conjunto, forman un Trabajo Fin de Máster para el Máster Universitario en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad de Sevilla impartido en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería.

Aquí se realiza un análisis del comportamiento de varias tipologías comunes de secciones mixtas.

MixtasCalc es una herramienta informática de cálculo de secciones mixtas a flexión pura. Permite calcular las principales propiedades resistentes a flexión (clasificación de la sección, momentos resistentes últimos elástico y plástico, rigidez a flexión, resistencia a cortante, etc.) para un abanico de tipologías de sección y clases resistentes de materiales. Además, incluye un módulo dedicado al cálculo del esfuerzo rasante y deformada de la viga teniendo en cuenta la interacción parcial hormigón-acero debida a la deformabilidad de la conexión.

El programa se ha desarrollado con Matlab en su versión R2015b. El cálculo se hace acorde a lo establecido en el Eurocódigo 4: Proyecto de estructuras mixtas de acero y hormigón (UNE-EN 1994-1-1). En los casos en los que se permiten ciertas libertades de procedimiento o valores a decidir por la autoridad nacional competente del Estado miembro (pues el ámbito de aplicación de esta normativa es a nivel europeo) se ha tomado lo establecido en el correspondiente anexo nacional o, en su defecto, lo establecido en las normativas nacionales EAE (Instrucción de acero Estructural) y EHE (Instrucción de Hormigón Estructural). El estudio de la influencia de la conexión mediante pernos sigue la metodología establecida en el manual de Julio Martínez Calzón.

En este documento, además de otros temas, se presenta el programa, su planteamiento y las instrucciones para manejarlo a través de una intuitiva interfaz. También se muestra la relación de resultados que se pueden obtener y los fundamentos de cálculo de los algoritmos implementados necesario para ello.

Por último, se recuerda que el motivo de este proyecto ha sido un Trabajo Fin de Máster, y que su elaboración ha sido llevada a cabo por un estudiante por lo que su propósito es plenamente académico. El autor da total libertad de copia, distribución y modificación tanto del programa informático como de esta memoria **eximiéndose de cualquier responsabilidad derivada del uso de los mismos.**



<b>Agradecimientos</b>	<b>ix</b>
<b>Resumen</b>	<b>xi</b>
<b>Índice</b>	<b>xiii</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>xv</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Introducción y objetivos</b>	<b>1</b>
<b>2 Descripción del programa</b>	<b>5</b>
2.1 <i>Instalación</i>	5
2.2 <i>Ventana principal</i>	6
2.3 <i>Materiales</i>	7
2.4 <i>Sección</i>	7
2.5 <i>Armadura</i>	9
2.6 <i>Conexión</i>	11
2.6.1 Definir pernos	11
2.6.2 Ley de flectores	12
2.7 <i>Resultados</i>	13
2.7.1 Calcular...	13
2.7.2 Análisis del esfuerzo rasante	15
2.8 <i>Info</i>	19
<b>3 Desarrollo y procesos de cálculo</b>	<b>21</b>
3.1 <i>Materiales</i>	21
3.1.1 Hormigón	21
3.1.2 Acero	24
3.1.3 Armadura	24
3.2 <i>Armadura</i>	25
3.2.1 Recubrimiento de hormigón	25
3.2.2 Separación entre barras	26
3.3 <i>Conexión</i>	27
3.3.1 Rigidez	27
3.3.1.1 Matriz de rigidez global	31
3.3.1.2 Sistema de fuerzas	32
3.3.1.3 Condiciones de contorno	32
3.3.1.4 Solución	33
3.3.2 Ley de flectores	34
3.4 <i>Resultados</i>	37
3.4.1 Clasificación de la sección	38
3.4.1.1 Secciones clase 1 y 2	41
3.4.1.2 Secciones clase 3	42
3.4.1.3 Secciones clase 4	42
3.4.2 Resistencia elástica a flexión	43
3.4.2.1 Fibra neutra	44

3.4.2.2	Curvatura de plastificación primera	44
3.4.2.3	Momento elástico	45
3.4.2.4	Módulo resistente elástico	45
3.4.2.5	Rigidez a flexión	47
3.4.2.6	Momento efectivo $M_{2ct}$	48
3.4.3	Esfuerzo cortante	49
3.4.3.1	Resistencia plástica a cortante	49
3.4.3.2	Resistencia a la abolladura por cortante	49
3.4.3.3	Resistencia plástica de cálculo a cortante	51
3.4.3.4	Interacción flector-cortante	51
3.4.4	Resistencia plástica a flexión	51
3.4.4.1	Fibra neutra	52
3.4.4.2	Momento plástico	52
3.4.4.3	Módulo resistente plástico	52
3.4.5	Resistencia elastoplástica a flexión (secciones clase 3 ó 4)	54
3.4.6	Conexión parcial	54
3.4.6.1	Resistencia individual de un perno	54
3.4.6.2	Distribución del esfuerzo rasante	55
3.4.6.3	Separación máxima de pernos	56
3.4.6.4	Grado de conexión	60
3.4.6.5	Momento último resistente	60
3.4.6.6	Reclasificación de la sección	65
3.5	<i>Análisis del esfuerzo rasante</i>	65
3.5.1	Rigidez de la conexión uniformemente distribuida	66
3.5.2	Ecuaciones básicas	66
3.5.3	Condiciones de contorno	69
3.5.4	Análisis Elástico	70
3.5.4.1	Esfuerzo rasante	76
3.5.4.2	Flecha	76
3.5.4.3	Tensiones en sección de $M_V$	78
3.5.5	Análisis Plástico con Conexión No Deformable	79
3.5.5.1	Esfuerzo rasante	79
3.5.5.2	Diagramas $M - X$ , $N_c - X$ y $M - N_c$	82
3.5.5.3	Simplificación según Eurocódigo 4	83
3.5.6	Análisis Plástico con Conexión Deformable	84
<b>4</b>	<b>Ejemplos de verificación</b>	<b>87</b>
4.1	<i>Ejemplo 1: Análisis elástico del esfuerzo rasante</i>	88
4.2	<i>Ejemplo 2: Sección reducida de un perfil metálico clase 4</i>	99
4.3	<i>Ejemplo 3: Análisis elastoplástico del esfuerzo rasante</i>	105
4.4	<i>Ejemplo 4: Resistencia plástica a flexión con interacción M-V</i>	120
<b>5</b>	<b>Análisis de secciones mixtas</b>	<b>129</b>
5.1	<i>Análisis paramétrico 1: Influencia de la geometría y materiales</i>	129
5.2	<i>Análisis paramétrico 2: Influencia de la conexión</i>	138
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>145</b>
<b>7</b>	<b>Futuras líneas de trabajo</b>	<b>147</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>149</b>

# Índice de tablas

---

Tabla 2-1 Clases resistentes de materiales implementados	7
Tabla 2-2 Notación en definición de armadura	10
Tabla 2-3 Notación definición pernos conectadores	12
Tabla 2-4 Notación definición ley de flectores	12
Tabla 3-1 Propiedades de resistencia y deformación para el hormigón	22
Tabla 3-2 Notación para propiedades de resistencia y deformación del hormigón	22
Tabla 3-3 Propiedades de resistencia para el acero	24
Tabla 3-4 Propiedades de resistencia para acero de armar	25
Tabla 3-5 Relaciones máximas anchura/espesor para elementos metálicos comprimidos	39
Tabla 3-6 Anchura reducida de elementos internos	40
Tabla 3-7 Anchura reducida de elementos volados	41
Tabla 4-1 Definición geométrica de sección y propiedades de materiales	88
Tabla 4-2 Ejemplo 1: valores de magnitudes previas	90
Tabla 4-3 Ejemplo 1: comparativa de resultados	96
Tabla 4-4 Ejemplo 2: valores de dimensiones y propiedades del material	99
Tabla 4-5 Ejemplo 2: valores de magnitudes previas	100
Tabla 4-6 Ejemplo 2: comparativa de resultados	104
Tabla 4-7 valores de dimensiones y propiedades de los materiales	105
Tabla 4-8 Ejemplo 3: valores de magnitudes previas	108
Tabla 4-9 Ejemplo 3: comparativa de resultados	117
Tabla 4-10 Ejemplo 4: valores de dimensiones y definición de los materiales	121
Tabla 4-11 Ejemplo 4: valores de magnitudes previas	123
Tabla 4-12 Ejemplo 4: comparativa de resultados	128
Tabla 5-1 Valores de dimensiones y armadura	130
Tabla 5-2 Análisis paramétrico sección A: variación del canto del alma	131
Tabla 5-3 Análisis paramétrico sección A: variación de ancho de ala inferior	131
Tabla 5-4 Análisis paramétrico sección A: variación de canto total de hormigón	131
Tabla 5-5 Análisis paramétrico sección A: variación de la clase resistente de hormigón	132
Tabla 5-6 Análisis paramétrico sección A: variación de la clase resistente de acero	132
Tabla 5-7 Análisis paramétrico sección B: variación del canto del alma	132
Tabla 5-8 Análisis paramétrico sección B: variación de ancho de ala inferior	134

Tabla 5-9 Análisis paramétrico sección B: variación de canto total de hormigón	134
Tabla 5-10 Análisis paramétrico sección B: variación de la clase resistente de hormigón	134
Tabla 5-11 Análisis paramétrico sección B: variación de la clase resistente de acero	134
Tabla 5-12 Sección A. Fracción de resistencia empleada en soportar peso propio según el canto de sección de hormigón 137	
Tabla 5-13 Sección B. Fracción de resistencia empleada en soportar peso propio según el canto de sección de hormigón 137	
Tabla 5-14 Sección A Resultados de variar la rigidez equivalente de la conexión	139
Tabla 5-15 Sección B Resultados de variar la rigidez equivalente de la conexión	139
Tabla 5-16 Conexión de referencia	141
Tabla 5-17 Rigidez de la conexión tomando como parámetro el diámetro del vástago	141
Tabla 5-18 Rigidez de la conexión tomando como parámetro la altura del vástago	141
Tabla 5-19 Rigidez de la conexión tomando como parámetro la separación longitudinal entre pernos	142
Tabla 5-20 Rigidez de la conexión tomando como parámetro el número de pernos colocados por sección	142
Tabla 5-21 Dos propuestas de conexión: Pocos pernos gruesos separados y más pernos delgados y juntos	143

# Índice de figuras

---

Fig. 2-1 Iniciar instalación	5
Fig. 2-2 Asistente de instalación	5
Fig. 2-3 Inicio del programa	6
Fig. 2-4 Ventana principal del programa	6
Fig. 2-5 Selección de materiales	7
Fig. 2-6 Selección de tipología de sección	8
Fig. 2-7 Ejemplo de selección de sección	8
Fig. 2-8 Aviso si no se selecciona sección	8
Fig. 2-9 Ventana principal una vez que se selecciona el tipo de sección	9
Fig. 2-10 Aviso para valor $N_{filas}$	9
Fig. 2-11 Definición de armadura ( $N_{filas} = 2$ )	10
Fig. 2-12 Avisos sobre recubrimientos y separación entre barras	10
Fig. 2-13 Definición de pernos conectadores	11
Fig. 2-14 Modelización de la rigidez de los pernos	12
Fig. 2-15 Definición de ley de flectores	13
Fig. 2-16 Aviso ley de flectores	13
Fig. 2-17 Salidas de resultados a) Archivo de texto con los resultados numéricos b) Sección reducida (si clase 4)	15
Fig. 2-18 Análisis del esfuerzo rasante	15
Fig. 2-19 Aviso análisis esfuerzo rasante	16
Fig. 2-20 Cuadros de espera para cálculo de esfuerzo rasante	17
Fig. 2-21 Barra de espera para rasante plástico con conexión deformable	17
Fig. 2-22 Algunos resultados de Análisis de esfuerzo rasante	18
Fig. 2-23 Ventana de información del programa	19
Fig. 3-1 Criterio de signos	21
Fig. 3-2 Representación esquemática de la relación $\varepsilon - \sigma$ para cálculo estructural	23
Fig. 3-3 Relación $\varepsilon - \sigma$ parábola-rectángulo y elastoplástico (bilineal)	23
Fig. 3-4 Relación $\varepsilon - \sigma$ para el acero estructural	24
Fig. 3-5 Relación $\varepsilon - \sigma$ para el acero de armar	25
Fig. 3-6 Separación horizontal entre barras	26
Fig. 3-7 Separación vertical entre barras	26
Fig. 3-8 Modelo de un perno aplicando elementos barra	27

Fig. 3-9 Sección circular	30
Fig. 3-10 Sistema de fuerzas sobre los pernos	32
Fig. 3-11 Condiciones de contorno para pernos	33
Fig. 3-12 Posibilidades para modelizar deformabilidad de los pernos	33
Fig. 3-13 Obtención de la ley de flectores	34
Fig. 3-14 Dos posibles soluciones de funciones parabólicas	36
Fig. 3-15 Geometría de secciones tipo	37
Fig. 3-16 Ley de tensiones elastoplástica en una sección clase 3 donde $\psi \leq -1$	38
Fig. 3-17 Cálculo de fibra neutra para secciones clase 1 ó 2	41
Fig. 3-18 Cálculo de fibra neutra para secciones clase 3	42
Fig. 3-19 Cálculo de secciones clase 4 reducidas	43
Fig. 3-20 Cálculo de fibra neutra en análisis elástico	44
Fig. 3-21 Cálculo de fibra neutra para resistencia plástica a flexión	52
Fig. 3-22 Relación bilineal entre axil en losa y momento flector	55
Fig. 3-23 Esfuerzo rasante en una longitud de cálculo	57
Fig. 3-24 Longitud de cálculo para esfuerzo rasante plástico	58
Fig. 3-25 Cambio en la posición de la fibra neutra por conexión parcial	65
Fig. 3-26 Efecto de la deformabilidad de la conexión	65
Fig. 3-27 Relación carga-desplazamiento de un perno	66
Fig. 3-28 Relación bilineal entre axil en losa y momento flector para establecer las condiciones de contorno	69
Fig. 3-29 Precisión entre puntos del diagrama	81
Fig. 3-30 Diagrama $M - N_c$ : a) Obtenido por procedimientos numéricos b) Comparativa con aproximación bilineal según Eurocódigo 4	83
Fig. 3-31 Derivada del axil en la losa de hormigón respecto del momento flector	83
Fig. 3-32 Forma intuitiva de la ley de rasantes según cálculo numérico y aproximación bilineal para el caso de viga biapoyada con carga uniformemente distribuida	84
Fig. 3-33 Análisis elastoplástico de la sección con deformación de la conexión	85
Fig. 3-34 Superficie $MN_c$	86
Fig. 4-1 Ejemplo 1: a) Sección tipo. Notación de dimensiones. b) Dibujo a escala de la sección	88
Fig. 4-2 Ejemplo 1: Otros datos a) Ley de flectores ELS b) Dimensiones de los pernos	89
Fig. 4-3 Ejemplo 1: tensiones en régimen plástico a flexión positiva y negativa	94
Fig. 4-4 Ejemplo 1: Análisis elástico del esfuerzo rasante a) Distribución del esfuerzo rasante b) Deformada de la viga c) Tensiones en sección de $M_v$	97
Fig. 4-5 Ejemplo 2: a) Notación para dimensiones b) Dibujo a escala de la sección	99
Fig. 4-6 Ejemplo 2: sección reducida a) Por cálculo manual b) Según programa MixtasCalc	104
Fig. 4-7 Ejemplo 3: a) Sección tipo y notación de dimensiones b) Dibujo a escala de la sección	105
Fig. 4-8 Ejemplo 3: dimensiones de los pernos conectadores	106
Fig. 4-9 Ejemplo 3: sección reducida a) Cálculo manual b) Según programa MixtasCalc	116
Fig. 4-10 Ejemplo 3: Esfuerzo rasante asumiendo a) Comportamiento elástico y conexión no deformable b)	

Comportamiento elastoplástico y conexión no deformable c) Comportamiento elastoplástico y conexión deformable	118
Fig. 4-11 Ejemplo 3: esfuerzo rasante asumiendo: a) Conexión deformable: comparativa de resultados según análisis elastoplástico y análisis elástico. b) Comportamiento elastoplástico: comparativa de resultados según conexión deformable y no deformable.	119
Fig. 4-12 Ejemplo 3: distribución del rasante en la longitud inelástica de la viga para distintas hipótesis de cálculo	120
Fig. 4-13 Ejemplo 4 a) Sección tipo y notación de dimensiones b) Dibujo a escala de la sección	120
Fig. 5-1 Sección A: a) Sección tipo y notación de dimensiones b) Dibujo a escala de la sección	130
Fig. 5-2 Sección B: a) Sección tipo y notación de dimensiones b) Dibujo a escala de la sección	130
Fig. 5-3 Análisis paramétrico sección A. Respecto a los parámetros escogidos, variación de: a) Rigidez a flexión frente a momento resistente elástico b) Rigidez a flexión frente a momento resistente plástico c) Momento resistente plástico frente a momento resistente elástico	133
Fig. 5-4 Análisis paramétrico sección B. Respecto a los parámetros escogidos, variación de: a) Rigidez a flexión frente a momento resistente elástico b) Rigidez a flexión frente a momento resistente plástico c) Momento resistente plástico frente a momento resistente elástico	135
Fig. 5-5 Sección A Resultados de variar la rigidez equivalente de la conexión	140
Fig. 5-6 Sección B Resultados de variar la rigidez equivalente de la conexión	140
Fig. 5-7 Resultados adimensionalizados respecto a valor de interacción completa	140
Fig. 5-8 Valores de rigidez $K_{q,1}$ para cada caso estudiado	143



# 1 INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

---

**A**nalizar el comportamiento y respuesta de cualquier elemento estructural consiste en determinar el valor de ciertas magnitudes definidas para ello. En particular, en este trabajo se realiza un análisis de las tipologías de secciones mixtas más frecuentes con las clases de materiales más comunes solicitadas a flexión pura.

Realizar un análisis manual requiere una serie de hipótesis que simplifiquen el desarrollo matemático para que sea abordable analíticamente, pero hace que los resultados sean aproximados, aunque en la mayoría de los casos estas aproximaciones sean asumibles. Si se quiere tener resultados más fieles a la realidad se deben realizar modelos de la sección más complejos teniendo en cuenta ciertos fenómenos. Sin embargo, se introducen unas condiciones en los cálculos que los hacen inabordables manualmente. Para la resolución de los mismos y así conseguir un análisis más profundo hay que utilizar métodos numéricos. Estos métodos se han implementado en una herramienta informática de desarrollo propio para este fin. Su nombre: MixtasCalc.

El objetivo principal de este programa de cálculo desarrollado con Matlab en su versión R2015b es servir como herramienta de fácil manejo para la rápida obtención del valor de ciertas magnitudes resistentes de una sección mixta solicitada a flexión pura acorde al Eurocódigo 4 (UNE-EN 1994-1-1). El fácil manejo se ha intentado conseguir escondiendo miles de líneas de código bajo una interfaz gráfica intuitiva para cualquier usuario y compilando todo el software en un archivo ejecutable que se instala en el ordenador como otro programa cualquiera. Así no se requiere tener conocimientos en programación ni tener preinstalado ningún otro programa.

Entre las magnitudes que se calculan destacamos la clasificación de la sección, el momento último elástico, momento último plástico (teniendo en cuenta la interacción cortante-flector), abolladura del alma por tensiones tangenciales y un profundo estudio de la influencia de la conexión hormigón-acero mediante pernos en el comportamiento global de la viga mixta.

La memoria está redactada y el programa informático está diseñado para lectores y usuarios que tienen al menos una base de conocimiento en el ámbito del cálculo de vigas a flexión equivalente a la adquirida en un curso de Resistencia de Materiales de un Grado en Ingeniería (Graciani, Picón y Cañas) (Ortiz Berrocal, 2007) y estar familiarizado con el cálculo de secciones de hormigón armado y mixtas. No se pretende enseñar al lector a calcular secciones mixtas, sino presentar el software y mostrar cómo se han calculado los resultados.

Por otra parte, MixtasCalc también sirve como herramienta de predimensionado. Todo diseño y cálculo estructural comienza por una fase de predimensionamiento en la que eligiendo la tipología del elemento estructural y el orden de magnitud de las dimensiones se van variando ciertos aspectos de dicho elemento hasta optimizar la estructura bajo unos criterios y necesidades dadas. El caso del diseño y cálculo de una viga mixta no es distinto. Teniendo una tipología de sección mixta se varían ciertas dimensiones y clases resistentes de material hasta encontrar la sección que maximiza las propiedades resistentes.

En cada iteración de este proceso se debe calcular el valor de las principales magnitudes resistentes de la sección. Estos valores pueden obtenerse fácilmente de forma manual, pero al ser tan repetitivo resulta tremendamente tedioso. Teniendo conocimientos en programación informática finalmente aparece la necesidad de realizar una herramienta que automatice el cálculo de estos resultados. Aunque suponga mayor inversión inicial de tiempo está se amortiza rápidamente en los cálculos venideros.

Respecto al contenido del documento, el primer capítulo que encontramos a continuación es Descripción del programa. Se dedica al manejo del programa a través de su interfaz gráfica. Todo el contenido es descriptivo. Los conceptos, fundamentos de cálculo, algoritmos y demás desarrollo teórico se muestran en el capítulo siguiente. Se indican las instrucciones para instalar el programa y, una vez instalado, se presenta su contenido. Vemos que el programa está estructurado en una ventana principal que es la que aparece al abrirlo. Esta ventana incluye una barra de menú donde definir los materiales, la sección y activar o desactivar las condiciones de conexión parcial. Si activamos el tener en cuenta en la resistencia a flexión de la sección la posible conexión parcial debida a la insuficiencia de pernos colocados se activará el menú que permite definir los pernos conectadores y la ley de flectores que solicita la viga.

También incluye el menú de resultados donde indicarle al programa que comience el cálculo y muestre los

resultados en un archivo de texto o que abra un módulo secundario de análisis de la influencia en la respuesta de la viga de la interacción parcial entre hormigón y acero debida a la deformabilidad de la conexión.

El capítulo siguiente es Desarrollo y procesos de cálculo. Es el grueso de este documento. Recoge primero las tipologías de secciones con la notación establecida para las dimensiones, el valor de las propiedades y leyes de comportamiento de los materiales implementados y la definición de la conexión (lo que determina su deformabilidad) y de la curva de distribución de flectores. Con ello, explica toda la formulación utilizada para obtener los resultados. El último apartado se dedica exclusivamente al módulo secundario de análisis del esfuerzo rasante.

Este módulo secundario calcula el esfuerzo rasante, la deformada de la viga y la ley de tensiones en la sección de máximo momento flector teniendo en cuenta la deformabilidad de la conexión. Estos resultados se comparan con los que se obtienen asumiendo interacción completa y otras simplificaciones que recoge el Eurocódigo. Se calculan distribuciones del esfuerzo rasante asumiendo varias hipótesis:

- Conexión deformable y comportamiento elástico-lineal de los materiales.
- Conexión no deformable y comportamiento elastoplástico de los materiales.
- Conexión deformable y comportamiento elastoplástico de los materiales.

Finalmente, en los dos últimos capítulos se realizan ejemplos de verificación del programa y análisis paramétricos. El propósito de los ejemplos de verificación es comprobar el buen funcionamiento del programa. Se plantean ejemplos en los que se calculan los valores de las magnitudes resistentes de forma manual y luego se comparan con los resultados devueltos por el programa. Además, cada ejemplo tiene unas características particulares que ponen a prueba distintas funcionalidades del programa. De forma particular, el primer ejemplo se dedica a la influencia de la deformabilidad de la conexión en régimen elástico de la sección. El segundo, al cálculo de la sección reducida de una sección metálica clase 4. El tercero, al cálculo del rasante con comportamiento elastoplástico de los materiales teniendo en cuenta o no la deformabilidad de la conexión. Por último, el cuarto es un ejemplo en el que se tiene interacción entre flector y cortante.

Los análisis paramétricos realizados han sido dos. En el primero se intenta establecer un protocolo de actuación en el predimensionamiento de una viga mixta. Se pretende ver qué dimensiones y materiales tienen mayor o menor influencia en la resistencia de la sección. Para ello se han tomado dos secciones mixtas de referencia, un conjunto de resultados y un conjunto de parámetros en los que se tienen dimensiones de la sección y clases resistentes de materiales. Variando uno a uno cada parámetro se visualiza por medio de gráficos su influencia en las propiedades resistentes. A través de los comportamientos que se dan en común para las dos secciones estudiadas se deducen las conclusiones.

Por último, el segundo análisis paramétrico se dedica a esclarecer la influencia de la deformabilidad de la conexión en la respuesta de la viga y la diferencia en el valor de los resultados que se tiene con los correspondientes a asumir la interacción completa entre hormigón y acero. Con la modelización llevada a cabo las dimensiones de los pernos y su disposición a lo largo de la viga determinan un valor asociado de rigidez equivalente que es el que se utiliza para calcular los resultados. Entonces, en vez de ver directamente cómo afectan las dimensiones de los pernos y su disposición en los resultados, primero se evalúa cómo afecta la rigidez asociada en los resultados y luego cómo afectan las dimensiones y colocación en dicha rigidez.

De este segundo análisis paramétrico se determina un valor de rigidez asociada a partir del cual los resultados de tener en cuenta la deformabilidad de la conexión son prácticamente los mismos a los que se tienen asumiendo interacción completa. Este valor marca la diferencia entre conexiones rígidas y flexibles. Se observa que este valor es el mismo propuesto por Martínez Calzón en su manual de Construcción Mixta.

Hemos conseguido desarrollar una herramienta de cálculo de considerable potencia con una interfaz gráfica intuitiva de fácil manejo y libre distribución para que la pueda utilizar cualquier usuario sin ningún tipo de conocimiento en lenguajes de programación informática o software preinstalado como requerimiento. Para conseguir esto se ha tenido que dedicar una gran cantidad de tiempo en programar la aplicación una vez realizado el código estrictamente necesario para obtener los resultados. Programar la interfaz gráfica de una aplicación no tiene nada que ver con el cálculo de las secciones mixtas, pero no por ello ha sido menos importante.

En este documento no ha quedado reflejado el esfuerzo que se ha realizado en programar MixtasCalc más que nada

porque se sale del propósito del mismo que ha sido el manejo del programa y sus fundamentos. Aun así, debería tenerse muy en cuenta. Como dato representativo, el código del software tiene más de treinta mil líneas que, para tener una idea, son más que palabras tiene este documento.

En varias ocasiones ha resultado tremendamente exasperante encontrar el algoritmo adecuado que funcione de manera correcta y para cualquier caso. Han sido necesarios muchos intentos hasta dar con la clave. Cuando creíamos haber implementado la función de forma correcta al poco tiempo se encontraba un fallo o bien algún valor o combinaciones de valores para los que el algoritmo se volvía inestable. Ahora el trabajo está terminado, pero se ha sufrido, y mucho.



## 2 DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA

Este capítulo se dedica a las instrucciones de instalación y manejo del programa a través de su interfaz gráfica. Todo el contenido es descriptivo. Los conceptos, fundamentos de cálculo, algoritmos y demás desarrollo teórico se muestran en el capítulo siguiente.

### 2.1 Instalación

Solamente es necesario disponer del archivo ejecutable MixtasCalc.exe. La compatibilidad y correcto funcionamiento del programa solamente están comprobados para el sistema operativo Windows 10 en un ordenador de 64 bits. Es necesario también disponer de conexión a Internet durante la instalación para descargar la biblioteca de funciones de Matlab Runtime.

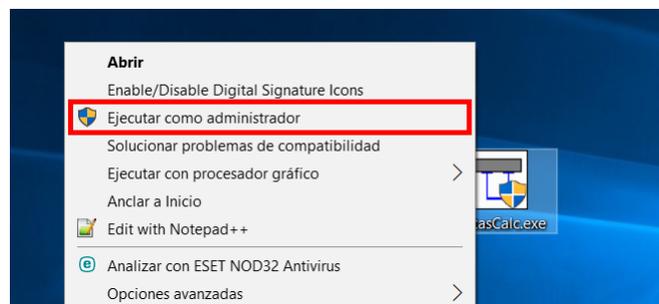


Fig. 2-1 Iniciar instalación

Para instalar el programa, lo primero es clicar con el botón derecho sobre el archivo ejecutable MixtasCalc.exe y marcar la opción “Ejecutar como administrador” (Fig. 2-1). Se inicia el asistente de instalación y seguimos los pasos que se indican.

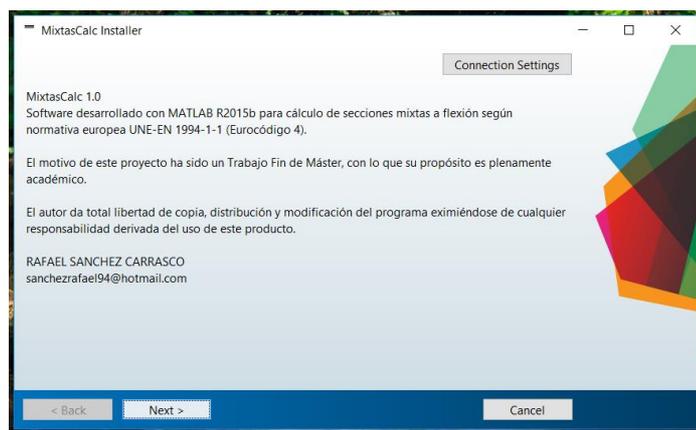


Fig. 2-2 Asistente de instalación

Una vez finalizada la instalación buscamos el programa en el buscador de Windows y lo abrimos. Podemos anclarlo a Inicio o crear un acceso directo en el Escritorio si el uso va a ser frecuente.

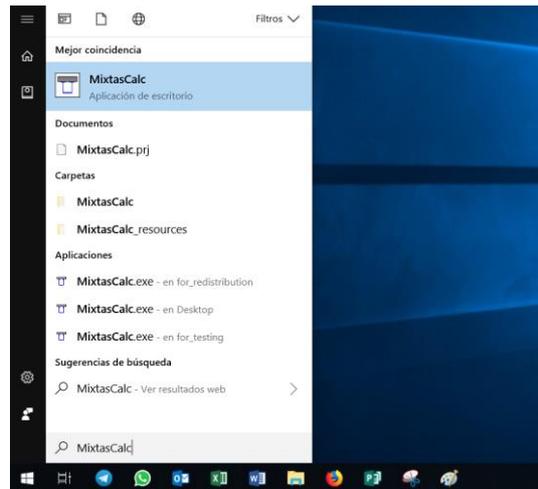


Fig. 2-3 Inicio del programa

## 2.2 Ventana principal

Cuando abrimos el programa lo primero que aparece es la ventana principal del mismo (Fig. 2-4). Es un espacio vacío con una barra de menús que contempla:

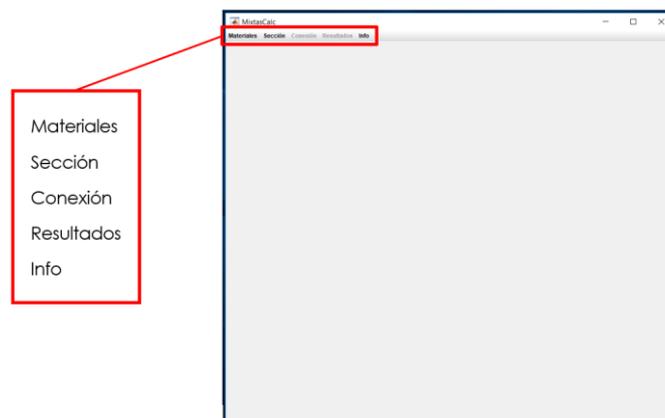


Fig. 2-4 Ventana principal del programa

- Materiales: Definición de materiales para hormigón, acero estructural y acero para armadura pasiva.
- Sección: Elección de la tipología de sección que se quiere calcular.
- Conexión: Permite especificar que se tenga en cuenta una posible conexión parcial en la sección. En este menú se definen los pernos conectadores y la ley de flectores en el vano. Este menú solamente está disponible cuando se seleccione un tipo de sección mixta.
- Resultados: En este menú se le ordena al programa que calcule y muestre los resultados. Este menú solamente está disponible cuando se seleccione una sección. Incluye además el acceso al módulo de análisis del esfuerzo rasante. Esta opción secundaria solamente está disponible cuando se seleccione un tipo de sección mixta y se active la conexión parcial.
- Info: Muestra información del software.

## 2.3 Materiales

Haciendo clic en la pestaña de materiales se abre la ventana de selección de materiales. Permite elegir el tipo de hormigón, acero estructural y armadura a emplear en la sección mixta y aplicarle un coeficiente parcial de seguridad definido por el usuario. Los valores propuestos son los mínimos recomendados por el Eurocódigo correspondiente para Estados Límite Últimos (ELU). El valor para el hormigón y las armaduras es 1,5 y 1,15 respectivamente. Se encuentran en el artículo 2.4.2.4 del Eurocódigo 2 parte 1-1. El valor para el acero estructural es 1,05. Se encuentra definido en el artículo 6.1 del Eurocódigo 3 parte 1-1 y el valor se especifica en el Anexo Nacional de dicho Eurocódigo.

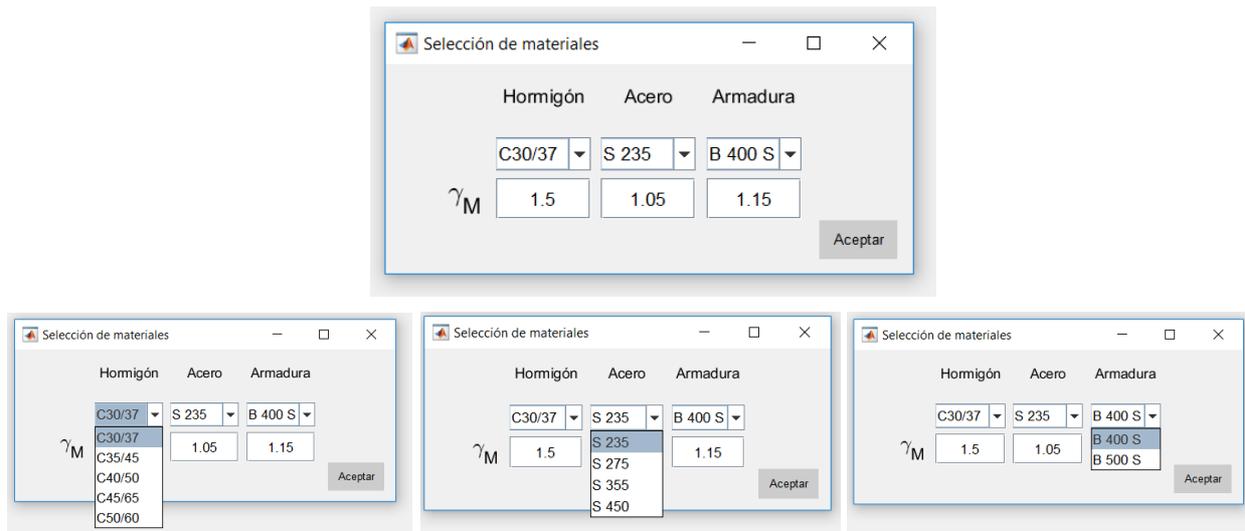


Fig. 2-5 Selección de materiales

Hormigón	C30/37, C35/45, C40/50, C45/65 y C50/60
Acero estructural	S235, S275, S355 y S450
Armadura pasiva	B400S y B500S

Tabla 2-1 Clases resistentes de materiales implementados

## 2.4 Sección

Haciendo clic en la pestaña de sección se abre la ventana de selección del tipo de sección. Los tipos de secciones implementados son:

- Perfil doble T: Sección metálica. Es el único tipo de sección no mixta.
- Losa rectangular sobre perfil doble T.
- Cajón mixto con losa rectangular.
- Losa peraltada sobre perfil doble T.
- Cajón mixto con losa peraltada.

Para seleccionar una sección hay que hacer clic sobre el correspondiente dibujo. La imagen de la sección cambiará a su negativo indicando que la selección ha resultado efectiva. Para finalizar, pulsamos el botón de Aceptar.

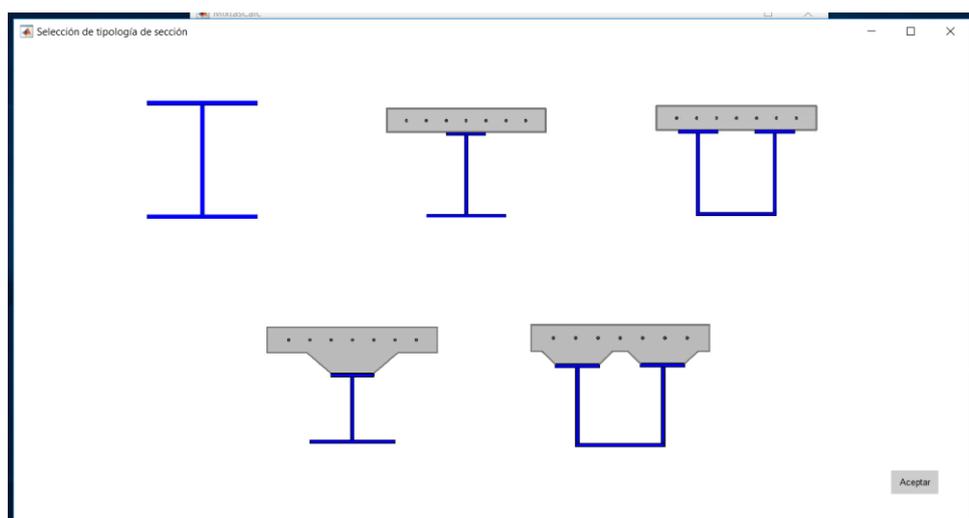


Fig. 2-6 Selección de tipología de sección

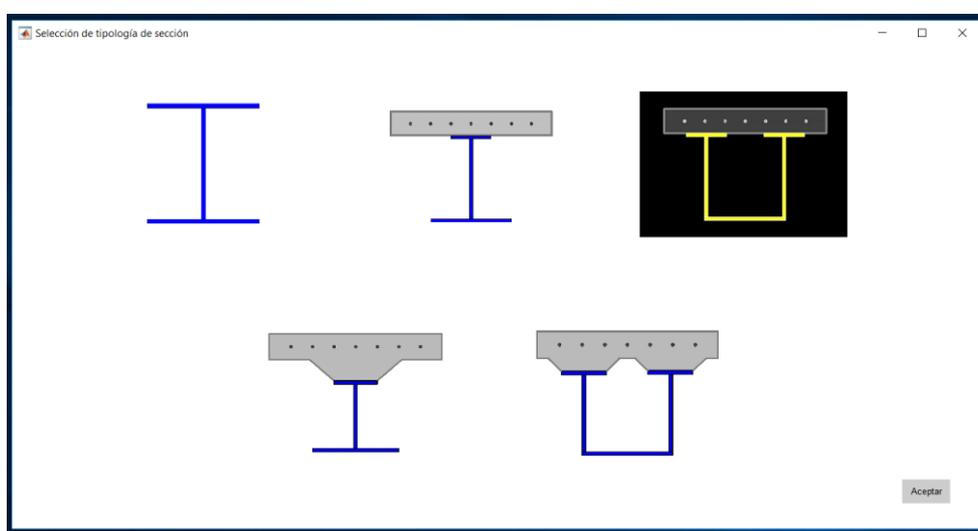


Fig. 2-7 Ejemplo de selección de sección



Fig. 2-8 Aviso si no se selecciona sección

Si no se ha producido ninguna selección, al pulsar el botón de Aceptar el programa nos avisará de que no se ha seleccionado ninguna sección. Para salir sin seleccionar sección debemos pulsar el botón superior derecho de cerrar ventana.

Una vez seleccionada la tipología de sección y pulsado el botón Aceptar se cierra la ventana de selección de sección. Automáticamente, el espacio vacío de la ventana principal se rellena con todo lo necesario para definir las dimensiones de la sección, la armadura y la solicitud de un esfuerzo cortante (si seleccionamos una sección no mixta no aparecerá la parte correspondiente a la definición de la armadura). La distribución se compone de:

- Imagen con la notación de cada dimensión.
- Cuadros de introducción de datos donde se define el valor de cada dimensión.
- Definición de armadura.
- Cuadro de introducción del valor del cortante actuante.
- Espacio de dibujo donde se representa a escala la geometría de la sección según los valores de dimensiones introducidos y la armadura. Se ha dedicado este espacio para ello por facilitar de forma cualitativa la interpretación de la sección mediante la relación de tamaño entre las partes.

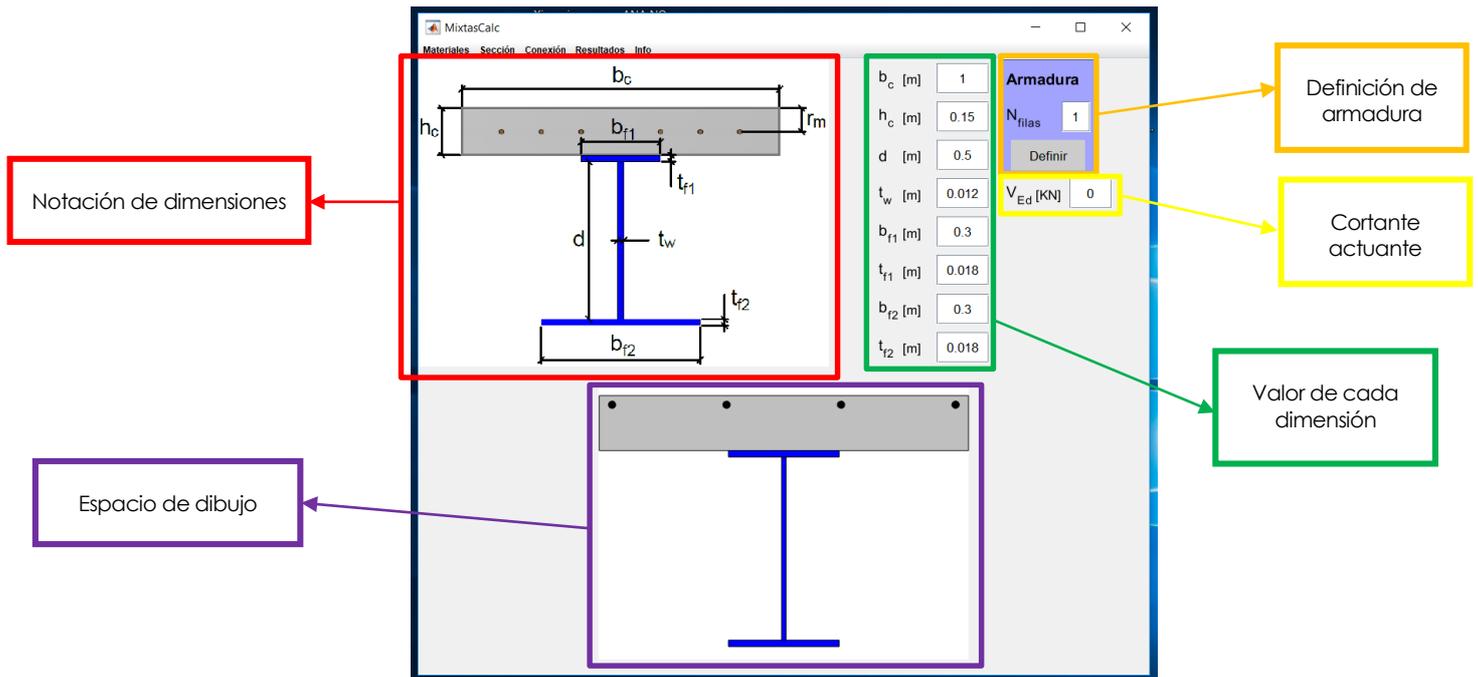


Fig. 2-9 Ventana principal una vez que se selecciona el tipo de sección

## 2.5 Armadura

Para definir armadura utilizamos el espacio “Definición de armadura” (Fig. 2-9). Solamente estará disponible si se selecciona una sección mixta. En  $N_{filas}$  indicamos el número de filas de armadura que queremos colocar. Este número deberá estar entre cero y ocho. Si introducimos otro valor, el programa nos avisará (Fig. 2-10). Si no queremos colocar armadura, introducimos el valor cero y pulsamos en Definir. Una vez establecido el número pulsamos el botón Definir. Se abre una nueva ventana para definir la armadura (Fig. 2-11).

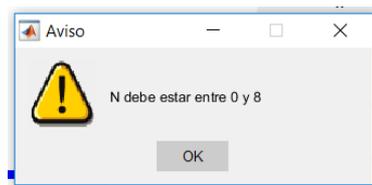


Fig. 2-10 Aviso para valor  $N_{filas}$

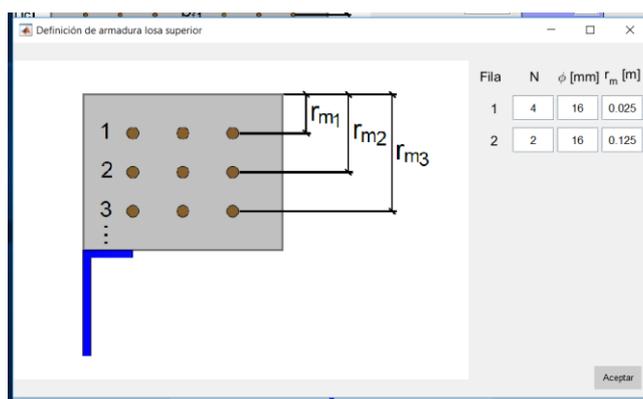


Fig. 2-11 Definición de armadura ( $N_{filas} = 2$ )

La ventana de definición de armadura consta a la izquierda de una imagen que muestra la disposición de cada fila de armadura en la losa según su numeración (de arriba hacia abajo). El valor  $r_{m-i}$  se refiere al recubrimiento mecánico vertical (desde superficie superior de hormigón hasta el baricentro de la barra). A la derecha de la ventana se tiene la tabla de introducción de valores. En esta tabla cada fila es una fila de armadura y cada columna corresponde a una magnitud de definición geométrica. Cuando terminemos de definir la armadura pulsamos el botón Aceptar.

$N$	Número de barras en la fila
$\phi$	Diámetro de las barras
$r_m$	Recubrimiento mecánico vertical

Tabla 2-2 Notación en definición de armadura

Al pulsar el botón Aceptar se realizan una serie de comprobaciones. Primero se comprueba que todas las filas tengan al menos dos barras. Luego se comprueba el recubrimiento de hormigón y la separación entre barras. La formulación de la comprobación se detalla en los apartados 3.2.1 y 3.2.2. Si todo es correcto, la ventana se cierra automáticamente y en la ventana principal se habrá actualizado el dibujo de la sección incluyendo la armadura. Si no es así, el programa da avisos como los indicados en Fig. 2-12.

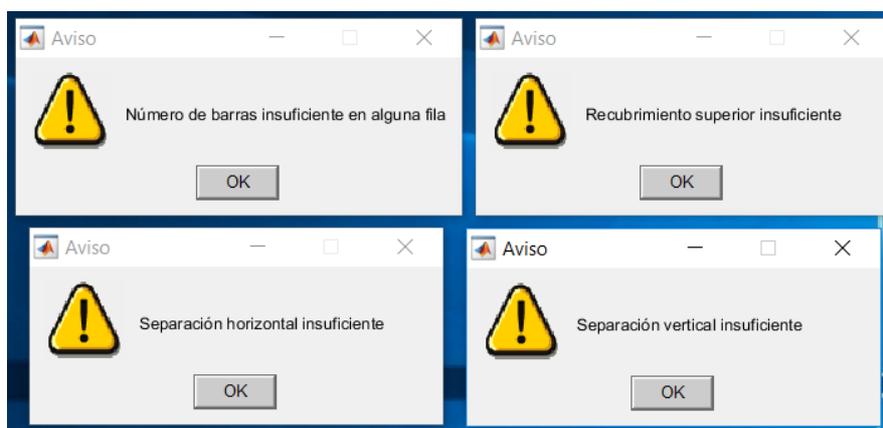


Fig. 2-12 Avisos sobre recubrimientos y separación entre barras

## 2.6 Conexión

Esta pestaña contempla:

- Activar conexión parcial. Marcar esta opción para tener en cuenta en los cálculos la posible conexión parcial entre losa de hormigón y sección de acero mediante pernos conectadores.
- Definir pernos. Opción reservada para la definición de los pernos (geometría, material y rigidez). Esta opción solamente está disponible cuando la conexión parcial esté activada. El contenido de esta opción se detalla en 2.6.1.
- Ley de flectores. Aquí se define la longitud de la viga y la ley de flectores que la solicita. Esta opción solamente está disponible cuando la conexión parcial esté activada. El contenido de esta opción se detalla en 2.6.2.

Mientras no activemos la conexión parcial los cálculos serán los correspondientes a interacción completa. Si tenemos activada la conexión parcial y queremos dejar de tenerla en cuenta en los resultados hay que entrar de nuevo en esta pestaña de conexión y hacer clic en Desactivar conexión parcial.

### 2.6.1 Definir pernos

Al hacer clic sobre esta opción se abre la ventana de definición de pernos conectadores como se muestra en Fig. 2-13. El tipo de elemento de conexión implementado en el programa es el perno conectador con cabeza. Los dispositivos de unión se rigen mediante el artículo 3.4 del Eurocódigo 4 parte 1-1. Su cálculo, mediante el artículo 6.6 del Eurocódigo 4 parte 1-1. En este programa solamente el cálculo se ha implementado acorde al Eurocódigo. Se desarrolla en el apartado 3.3 de este documento. El cumplimiento de 3.4 de del Eurocódigo 4 parte 1-1 (detalles, materiales y otros aspectos de índole constructivo) se deja a responsabilidad del usuario.

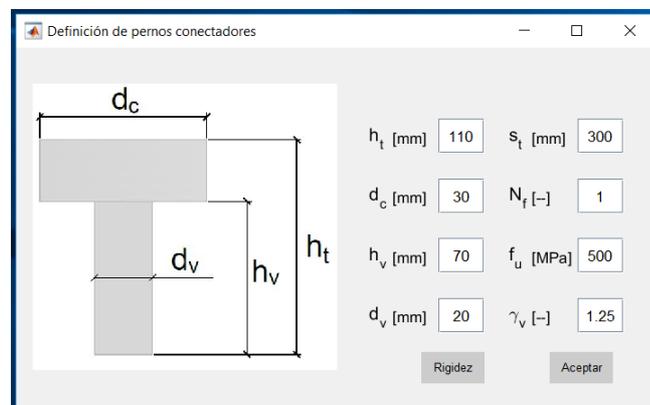


Fig. 2-13 Definición de pernos conectadores

En esta ventana se tiene a la izquierda la imagen de notación de dimensiones. A la derecha, los cuadros de introducción de valores de estas dimensiones y otras magnitudes como la separación entre secciones con pernos, el número de pernos por sección y las propiedades del material. Las propiedades del material dadas por defecto en el programa corresponden al artículo 6.6.3.1 de del Eurocódigo 4 parte 1-1. La notación se indica en Tabla 2-3.

En la parte inferior encontramos el botón Rigidez. Sirve para modelizar la rigidez de los pernos. Esta rigidez es la relación entre la fuerza aplicada y el desplazamiento de la cabeza. Es un aspecto fundamental en el estudio del esfuerzo rasante y su influencia en la respuesta de la viga. Al pulsarlo se abre la ventana Modelización de la rigidez de los pernos como se muestra en Fig. 2-14. Los pernos se han modelizado como elemento tipo barra de Timoshenko. Para la obtención de la rigidez se permite elegir entre dejar libre o impedir el giro de la cabeza y entre distribuir o concentrar la resultante del rasante en la longitud del perno. Los valores de rigidez para cada caso se indican debajo de la correspondiente imagen.  $K$  se refiere a la rigidez individual del perno. El cálculo de este valor se muestra en 3.3.1.4 (es el valor  $K_p$  de la ecuación (3.3.33)).

$h_t$	Altura total del perno
$d_c$	Diámetro de la cabeza
$h_v$	Altura del vástago
$d_v$	Diámetro del vástago
$s_t$	Separación longitudinal entre secciones con pernos
$N_f$	Número de pernos en la sección
$f_u$	Tensión última del material en el ensayo de tracción
$\gamma_v$	Coefficiente parcial de seguridad del material

Tabla 2-3 Notación definición pernos conectadores

$K_q$  se refiere a la equivalente rigidez uniformemente distribuida en la viga. El cálculo de este valor se muestra en 3.5.1. Es necesario tomar esta rigidez uniforme para el estudio del rasante. Si no queremos utilizar ningún valor de los propuestos también es posible introducir un valor de rigidez uniforme definido por usuario. La opción que queramos utilizar la elegimos marcando el radio-botón a la izquierda de cada título.

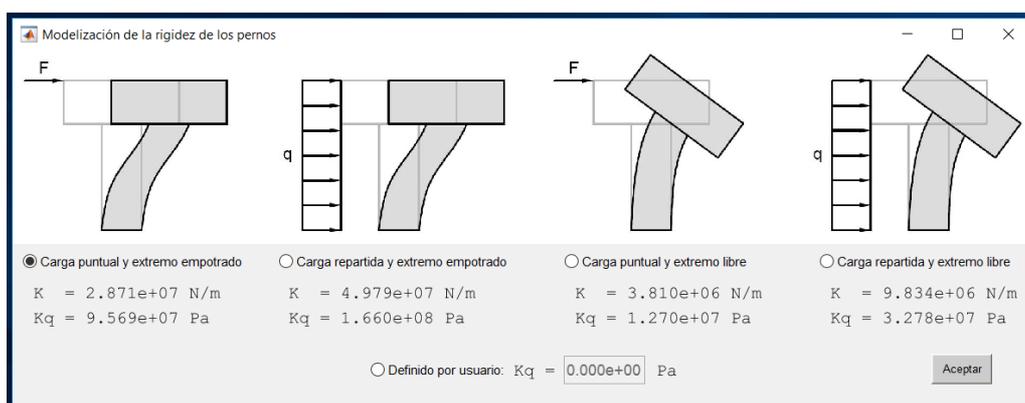


Fig. 2-14 Modelización de la rigidez de los pernos

Para finalizar, pulsamos botón Aceptar. Se cierra la ventana y se vuelve a la ventana de Definición de pernos conectadores. En esta ventana, cuando la geometría de los pernos, su disposición en la viga, el material empleado y la rigidez estén definidos pulsamos el botón Aceptar. La ventana se cierra y volvemos a la ventana principal del programa.

### 2.6.2 Ley de flectores

Haciendo clic en esta opción se accede a la ventana de definición de momentos flectores en la viga. Para el cálculo de los pernos es necesario conocer esta distribución. Se abre una ventana como se muestra en Fig. 2-15. En la mitad izquierda se tiene una ilustración que muestra la notación y el criterio de signos. La notación se indica en Tabla 2-4.

$L$	Longitud de la viga
$M_1$	Momento flector en apoyo izquierdo
$M_v$	Momento flector máximo en el vano
$M_2$	Momento flector en apoyo derecho

Tabla 2-4 Notación definición ley de flectores

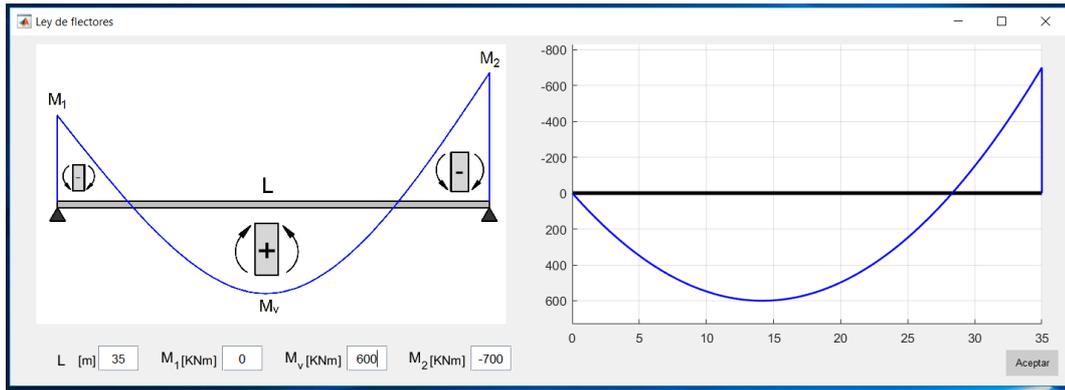


Fig. 2-15 Definición de ley de flectores

Introduciendo los cuatro valores la distribución de flectores se toma como la parábola (función polinómica de segundo grado) que cumple las condiciones de  $L$ ,  $M_1$ ,  $M_v$  y  $M_2$ . Los detalles del cálculo se muestran en 3.3.2. En la parte derecha de la ventana se dibuja esta distribución. El dibujo se actualiza automáticamente cada vez que modificamos algún valor. La parábola que buscamos sólo existe si se cumple la condición (2.6.1). Si no es así, el programa nos lo advierte mediante un aviso como el que vemos en Fig. 2-16.

$$\max \{M_1, M_v, M_2\} = M_v \quad (2.6.1)$$

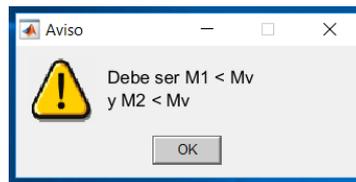


Fig. 2-16 Aviso ley de flectores

## 2.7 Resultados

Cuando los materiales, sección, armadura y conexión quedan definidos ya se está en condiciones de calcular los resultados. Para ello nos dirigimos a esta pestaña del menú de la ventana principal. Al hacer clic aquí nos aparecen dos opciones que describimos a continuación.

### 2.7.1 Calcular...

La primera es Calcular... Calcula todos los resultados implementados en el programa y los devuelve en un archivo de texto \*.txt que se muestra por pantalla. Es un archivo de texto que se comporta tal y como si lo hubiera escrito el usuario, aunque lo haya escrito el programa. Se puede editar libremente y, si se quiere conservar, guardarlo en el directorio que se quiera. Cada vez que se haga clic en Calcular... se genera un archivo nuevo, con lo que los archivos que guardemos no corren riesgo de sobrescritura. Los resultados implementados se enumeran en la siguiente lista. En todos se tiene en cuenta la distinción entre flexión positiva y negativa. Los cálculos que fundamentan cada uno se detallan en el capítulo 3 Desarrollo. El archivo contiene un encabezamiento donde se indican la fecha y la hora del cálculo.

- Áreas según materiales
  - Área de hormigón
  - Área de acero
  - Área de armadura

- Clasificación de la sección
  - Fibra neutra utilizada para clasificar la sección
  - Número de clase
  - Si es clase 4 muestra una figura acotada de la sección reducida
- Resistencia elástica a flexión
  - Fibra neutra de la sección en régimen elástico
  - Curvatura de plastificación primera
  - Rigidez a flexión de la sección (para cálculo de deformadas)
  - Momento efectivo  $M_{2ct}$  (valor límite de uso de sección no fisurada)
  - Módulo resistente elástico (solamente para secciones metálicas)
  - Momento elástico
- Sobre el esfuerzo cortante
  - Abolladura por cortante. Si existe abolladura por cortante muestra:
    - Coeficiente de minoración de abolladura por cortante
    - Resistencia a la abolladura por cortante
  - Resistencia plástica de cálculo a cortante
  - Interacción flector-cortante
    - Valor de cálculo del cortante actuante
    - Relación entre el cortante actuante y el resistente plástico
    - Coeficiente  $\rho$  de minoración de resistencia plástica del alma
- Resistencia plástica a flexión (solamente para secciones clase 1 ó 2)
  - Fibra neutra plástica
  - Momento último plástico
  - Módulo resistente plástico (solamente para secciones metálicas)
- Resistencia elastoplástica a flexión (solamente para secciones clase 3 ó 4)
  - Fibra neutra elastoplástica
  - Curvatura a la que se alcanza el momento último elastoplástico
  - Momento último elastoplástico
- Conexión parcial (solamente si se ha activado la conexión parcial. Ver apartado 2.6)
  - Resistencia a cortante de un perno
  - Separación máxima en análisis elástico

Los siguientes resultados corresponden a análisis plástico de pernos. Solamente se mostrarán si la ley de flectores tiene valores mayores a los momentos resistentes elásticos (Ver 2.6.2) y la sección es clase 1 ó 2.

  - Separación máxima en análisis plástico
  - Grado de conexión en análisis plástico
  - Momento último plástico según conexión parcial
  - Reclasificación de la sección según conexión parcial
- Lista de algunos avisos (warnings) detectados.

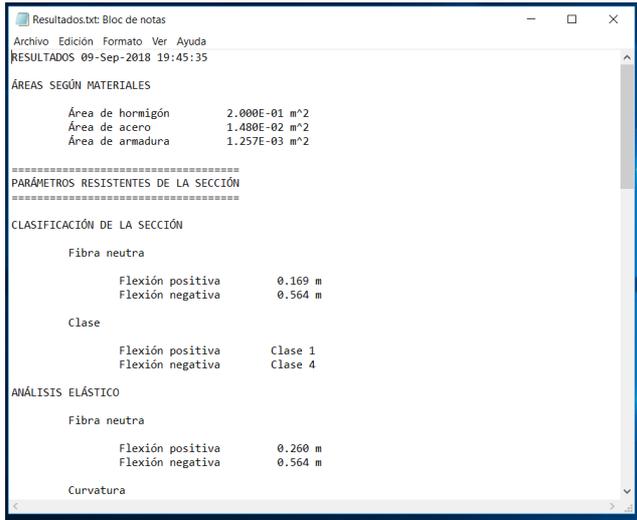


Fig. 2-17.a

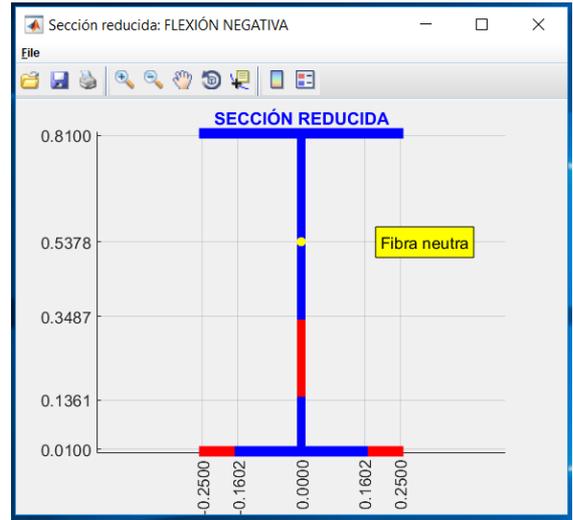


Fig. 2-17.b

Fig. 2-17 Salidas de resultados  
 a) Archivo de texto con los resultados numéricos  
 b) Sección reducida (si clase 4)

El dibujo de la sección reducida incluye posición de fibra neutra utilizada para clasificar la sección y acota las zonas (rojo) eliminadas de la sección bruta para tener la sección reducida (azul). El eje de abscisas está centrado en el alma de la sección. El eje de ordenadas comienza en la fibra inferior de la sección y el sentido positivo es hacia arriba. Pudiera ocurrir que los espesores mostrados no sean coherentes con la relación de tamaños respecto al resto de la sección y que se muestren mayores a lo que le correspondería, pero esto es solo para mejorar la claridad del dibujo.

## 2.7.2 Análisis del esfuerzo rasante

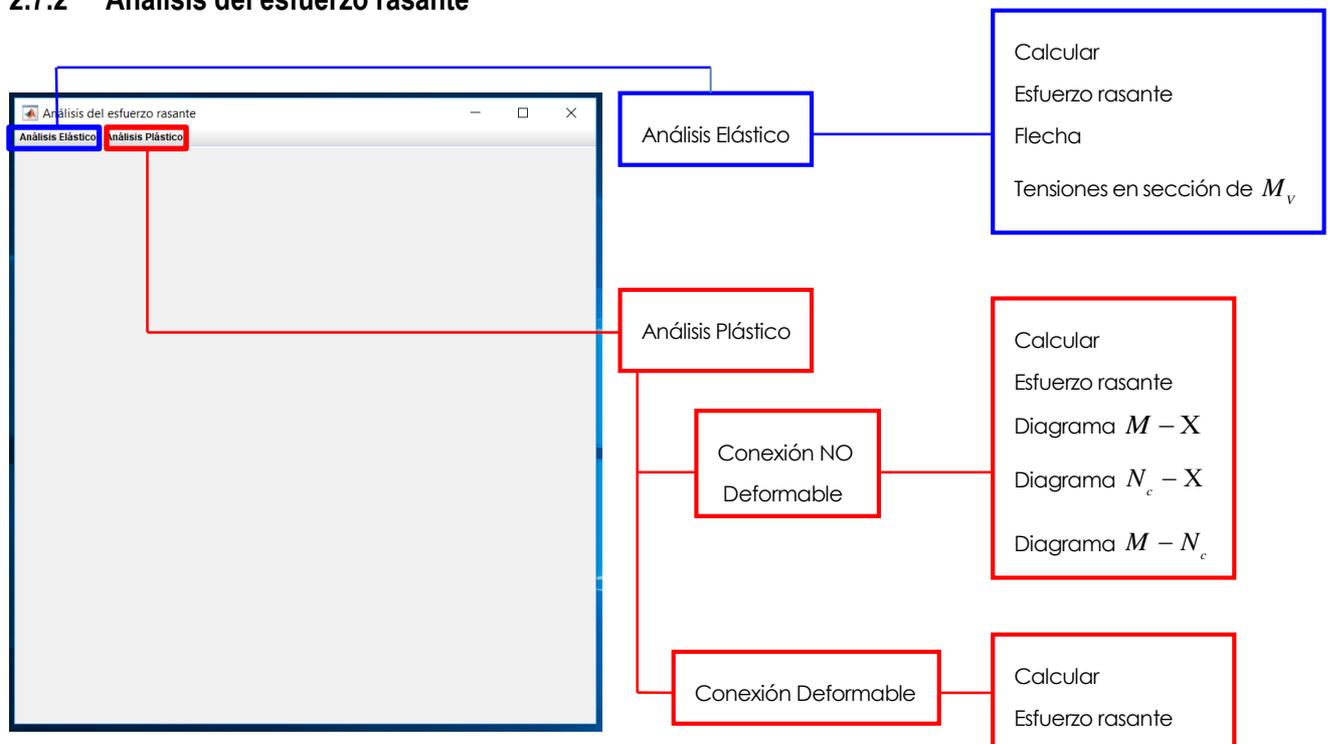


Fig. 2-18 Análisis del esfuerzo rasante

La segunda opción del menú de resultados accede a un módulo de análisis del esfuerzo rasante. Para la sección, conexión y ley de flectores definidos, se muestran en esta ventana resultados de distribución de esfuerzos rasantes en la viga en distintas hipótesis además de otros resultados interesantes relacionados en el cambio de respuesta que experimenta la sección al tener en cuenta la conexión. Solo está implementado asumiendo secciones de clase 1 ó 2. En caso de no ser así el programa nos lo avisará conforme a Fig. 2-19.

Lo primero que aparece es una ventana como la que se muestra en Fig. 2-18. Ofrece dos tipos de análisis: elástico y plástico. En cada pestaña se tiene la opción de calcular que inicia el cálculo de los resultados para cada hipótesis. El resto de opciones no estará disponible hasta que haya finalizado el cálculo. Mientras el cálculo se ejecuta tendremos cuadros de espera como se muestra en Fig. 2-20. Una vez que finalice el cálculo la opción de calcular de la pestaña no volverá a estar disponible.

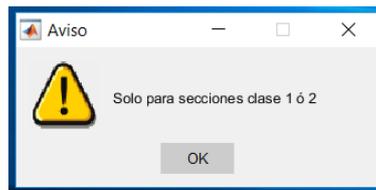


Fig. 2-19 Aviso análisis esfuerzo rasante

### Análisis Elástico

Asume comportamiento elástico tanto de la sección como de la conexión. Para que sus resultados sean válidos los valores de momentos según la ley definida no deben ser mayores al momento resistente elástico. Las opciones en este menú son:

- Calcular: calcula la distribución de esfuerzos rasantes.
- Esfuerzo rasante: muestra la distribución de esfuerzos rasantes. Para comparar se muestra también el esfuerzo rasante asumiendo comportamiento elástico y conexión no deformable (interacción completa).
- Flecha: muestra la deformada de la viga teniendo en cuenta la deformabilidad de la conexión. Para comparar, se muestra también la deformada asumiendo comportamiento elástico de la sección y conexión no deformable (interacción completa) que serían los resultados que se obtienen de aplicar la Teoría de Resistencia de Materiales a la sección mixta homogeneizada.
- Tensiones en sección de  $M_v$ : muestra la distribución de tensiones normales en la sección de máximo momento flector. Para comparar se muestra también esta distribución asumiendo comportamiento elástico y conexión no deformable (interacción completa) que serían los resultados que se obtienen de aplicar la Teoría de Resistencia de Materiales a la sección mixta homogeneizada.

### Análisis Plástico

Asume comportamiento elastoplástico de la sección y elástico de la conexión. Dentro de este caso se distinguen dos hipótesis de cálculo respecto a la deformabilidad de la conexión:

- Conexión NO Deformable: no se tiene en cuenta la deformabilidad de la conexión. Se supone infinitamente rígida. Estos resultados son los que se obtienen de definir un comportamiento elastoplástico de la sección y conexión infinitamente rígida (interacción completa). Las opciones de este menú son:
  - Calcular: calcula la distribución de esfuerzos rasantes.
  - Esfuerzo rasante: muestra la distribución de esfuerzos rasantes. Para comparar, se muestra también el esfuerzo rasante asumiendo comportamiento elástico y conexión no deformable (interacción completa). Es por ello que si no existe momento flector mayor al resistente elástico estas dos distribuciones de esfuerzo rasante deben coincidir.
  - Diagrama  $M - X$ : muestra el diagrama momento-curvatura de la sección.

- Diagrama  $N_c - X$  : muestra el diagrama axil en losa-curvatura de la sección.
- Diagrama  $M - N_c$  : muestra diagrama momento-axil en losa.
- **Conexión Deformable:** si se tiene en cuenta la deformabilidad de la conexión asumiendo una rigidez constante propia de un comportamiento elástico-lineal del perno individual. De lo implementado, es la modelización más fiel a la realidad en cuanto al cálculo del esfuerzo rasante. Un cálculo aún más cercano sería teniendo en cuenta la disminución de rigidez de la conexión con la deformación, pero esto se deja para futuras líneas de trabajo. Las opciones de este menú son:
  - Calcular: calcula la distribución de esfuerzos rasantes.
  - Esfuerzo rasante: muestra la distribución de esfuerzos rasantes. Para comparar, se muestra también el esfuerzo rasante asumiendo comportamiento elástico y conexión no deformable (interacción completa).

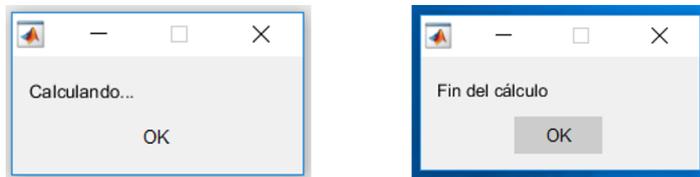


Fig. 2-20 Cuadros de espera para cálculo de esfuerzo rasante

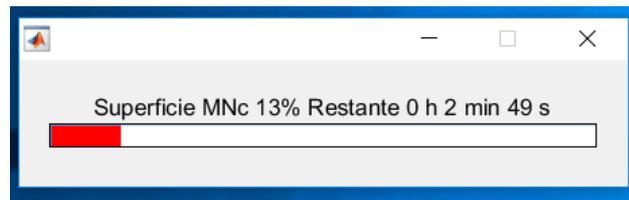


Fig. 2-21 Barra de espera para rasante plástico con conexión deformable

El algoritmo implementado para el cálculo plástico con conexión deformable tiene considerablemente mayor tiempo de ejecución que el resto porque se necesita calcular una “Superficie MNc” (ver 3.5.6) que tiene notable costo computacional. El tiempo de ejecución es de varios minutos, aunque dependerá de las características del ordenador. Es por ello que se ha incluido una barra de espera como la que muestra en Fig. 2-21 con el porcentaje completado y el tiempo estimado de espera para finalizar. Estos cálculos dependen únicamente de la sección, así que se ha implementado de forma que si cambiamos la conexión o la ley de flectores para realizar un nuevo análisis estos cálculos no se volverán a repetir.

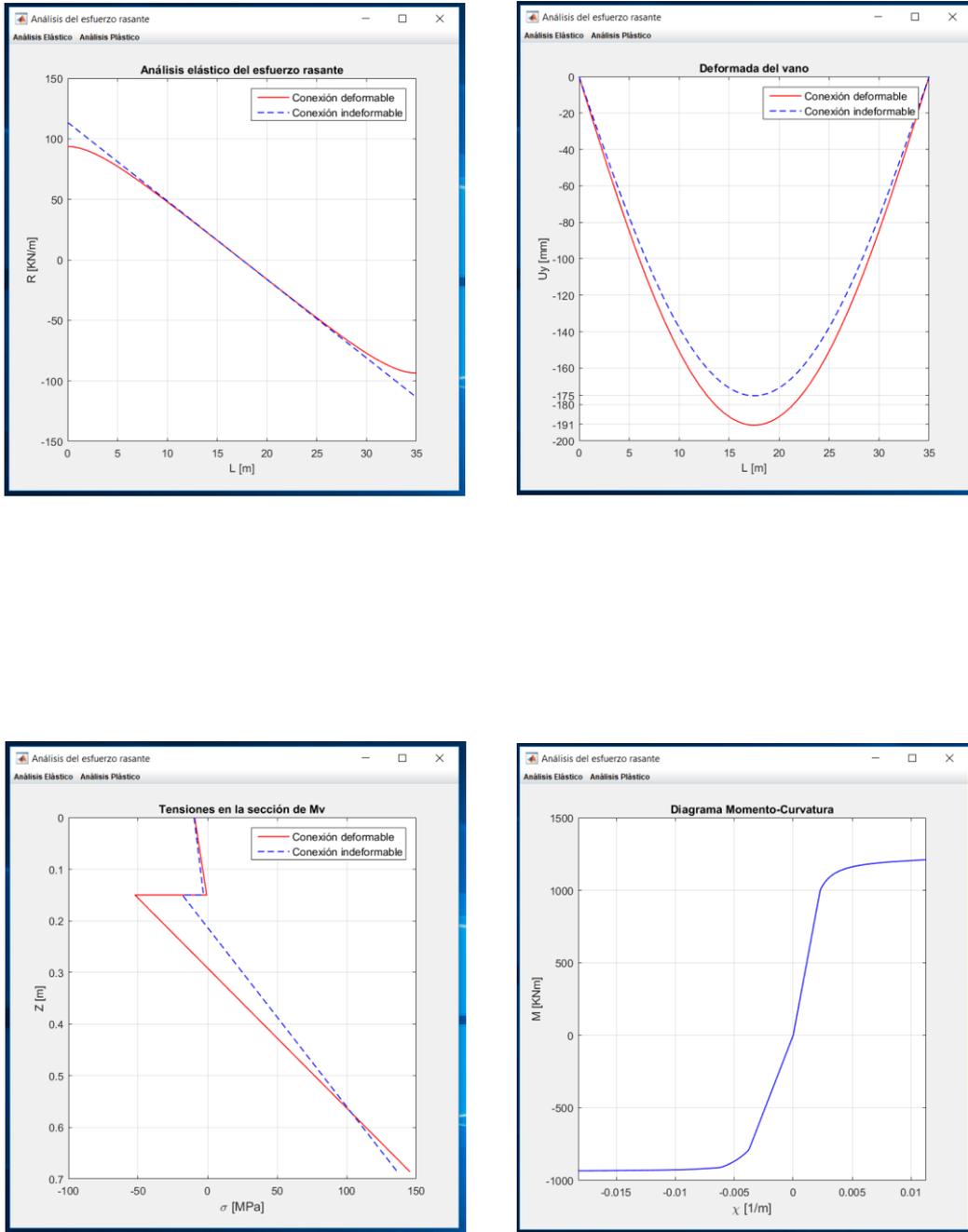


Fig. 2-22 Algunos resultados de Análisis de esfuerzo rasante

## 2.8 Info

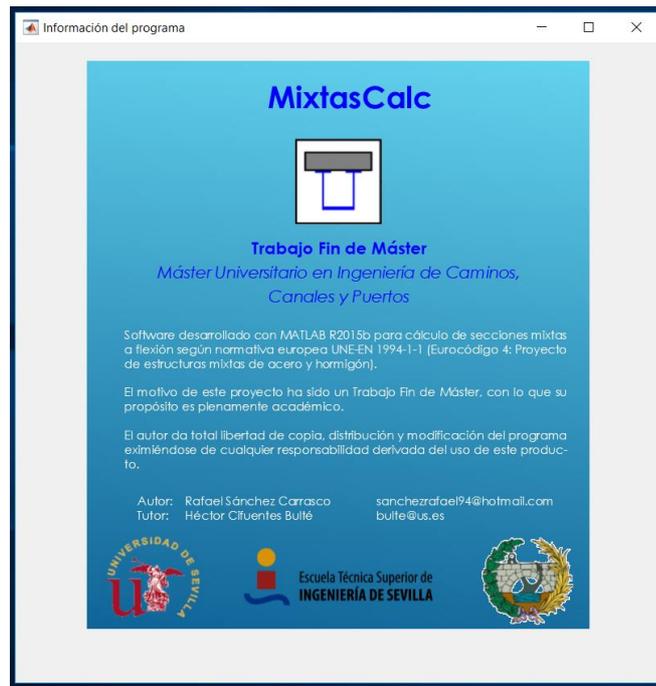


Fig. 2-23 Ventana de información del programa

Haciendo clic en esta pestaña del menú de la ventana principal se nos muestra en una nueva ventana información pertinente del programa en una imagen como la Fig. 2-23. En ella se indica el nombre del programa (MixtasCalc), el icono del programa y se especifica que es un Trabajo Fin de Máster y la titulación del mismo. En el texto leemos:

*“Software desarrollado con MATLAB R2015b para cálculo de secciones mixtas a flexión según normativa europea UNE-EN 1994-1-1 (Eurocódigo 4: Proyecto de estructuras mixtas de acero y hormigón).*

*El motivo de este proyecto ha sido un Trabajo Fin de Máster, con lo que su propósito es plenamente académico.*

*El autor da total libertad de copia, distribución y modificación del programa eximiéndose de cualquier responsabilidad derivada del uso de este producto.”*

Finalmente se tiene información de contacto del autor y tutor, así como el logo de las instituciones bajo las que se ha realizado este proyecto (Universidad de Sevilla y Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sevilla) y también del Colegio de Ingenieros de Caminos para señalar que pertenece a una titulación de esta rama de la ingeniería.



# 3 DESARROLLO Y PROCESOS DE CÁLCULO

Los fundamentos de cálculo, metodología y algoritmos empleados en los resultados del programa se detallan en este capítulo. Aquí se tiene todo el desarrollo matemático sobre el que se sustenta este proyecto. Como punto de partida primero se explica la caracterización de los materiales y la modelización de la conexión que se han elegido. Después se detallará uno a uno el cálculo de los resultados implementados. Aprovechamos estas líneas de introducción para establecer ciertos criterios de signos de carácter general presentes en todo el capítulo. Mientras no se diga lo contrario, en todos los cálculos se tiene:

- Las deformaciones y tensiones positivas serán de alargamiento y tracción, respectivamente. Por el contrario, el signo negativo corresponderá a acortamiento y compresión.
- Las curvaturas positivas son las que producen compresiones por encima de la fibra neutra y tracciones por debajo.
- Los momentos flectores positivos serán los que producen curvaturas positivas.
- La posición de una fibra en la sección estará determinada por un Eje Z con el cero en la fibra superior de la sección y sentido positivo hacia abajo.

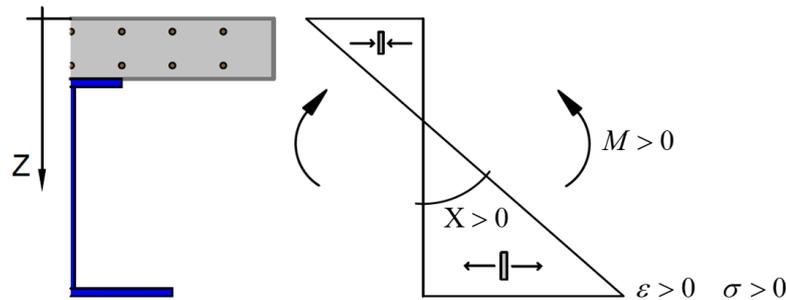


Fig. 3-1 Criterio de signos

En la Fig. 3-1 la notación corresponde a

- $M$  Momento flector
- $X$  Curvatura
- $\varepsilon$  Deformación longitudinal unitaria
- $\sigma$  Tensión normal longitudinal

## 3.1 Materiales

### 3.1.1 Hormigón

El valor de las propiedades de las clases de hormigones que se pueden elegir se muestran en la Tabla 3-1. El valor de cálculo de la resistencia  $f_{cd}$  se determina según 3.1.6 del Eurocódigo 2 parte 1-1:

$$f_{cd} = k_t \frac{f_{ck}}{\gamma_M} \quad (3.1.1)$$

Clases resistentes		C30/37	C35/45	C40/50	C45/55	C50/60
$f_{ck}$	MPa	30	35	40	45	50
$f_{ck,cube}$	MPa	37	45	50	55	60
$f_{cm}$	MPa	38	43	48	53	58
$f_{ctm}$	MPa	2,9	3,2	3,5	3,8	4,1
$f_{ctk,0.05}$	MPa	2	2,2	2,5	2,7	2,9
$f_{ctk,0.95}$	MPa	3,8	4,2	4,6	4,9	5,3
$E_{cm}$	GPa	33	34	35	36	37
$\epsilon_{c1}$	‰	2,2	2,25	2,3	2,4	2,45
$\epsilon_{cu1}$	‰	3,5				
$\epsilon_{c2}$	‰	2				
$\epsilon_{cu2}$	‰	3,5				
$n$	--	2				
$\epsilon_{c3}$	‰	$f_{cd} / E_{cm}$				
$\epsilon_{cu3}$	‰	3,5				

Tabla 3-1 Propiedades de resistencia y deformación para el hormigón

Los valores de las propiedades de resistencia y deformación de las distintas clases resistentes de hormigón están tomados según la Tabla 3.1 del Eurocódigo 2 parte 1-1, donde:

$f_{ck}$	Resistencia característica a compresión del hormigón ensayado en probeta cilíndrica a 28 días
$f_{ck,cube}$	Resistencia característica a compresión del hormigón ensayado en probeta cúbica a 28 días
$f_{cm}$	Valor medio de la resistencia a compresión del hormigón ensayado en probeta cilíndrica
$f_{ctm}$	Valor medio de la resistencia del hormigón a tracción
$f_{ctk,0.05}$	Fractil 5% de resistencia del hormigón a tracción
$f_{ctk,0.95}$	Fractil 95% de resistencia del hormigón a tracción
$E_{cm}$	Módulo de elasticidad secante del hormigón
$\epsilon_{c1}$	Deformación unitaria por compresión en el hormigón a la tensión máxima $f_{cm}$
$\epsilon_{cu1}$	Deformación unitaria última de compresión del hormigón
$\epsilon_{c2}$	Deformación unitaria a carga máxima con ley de comportamiento parábola-rectángulo
$\epsilon_{cu2}$	Deformación unitaria última con ley de comportamiento parábola-rectángulo
$n$	Exponente en la ley de comportamiento parábola rectángulo
$\epsilon_{c3}$	Deformación unitaria a carga máxima con ley de comportamiento elastoplástico
$\epsilon_{cu3}$	Deformación unitaria última con ley de comportamiento elastoplástico

Tabla 3-2 Notación para propiedades de resistencia y deformación del hormigón

donde

$k_t$  es el coeficiente que tiene en cuenta los efectos a largo plazo en la resistencia a compresión y los efectos desfavorables que resultan de la manera en que se aplica la carga. Se ha tomado 0,85 por ser el valor recomendado según artículo 3.1.2 del Eurocódigo 2 parte 1-1.

$\gamma_M$  es el coeficiente parcial de seguridad para el hormigón. Introducido por el usuario. Ver apartado 2.3

En cuanto a la modelización del comportamiento del material, para los cálculos se ha tomado la relación  $\varepsilon - \sigma$  parábola-rectángulo o bilineal, según corresponda. En todo caso se desprecia la resistencia a tracción del hormigón. En las siguientes figuras los valores de deformación se refieren a acortamiento y las tensiones a compresión.

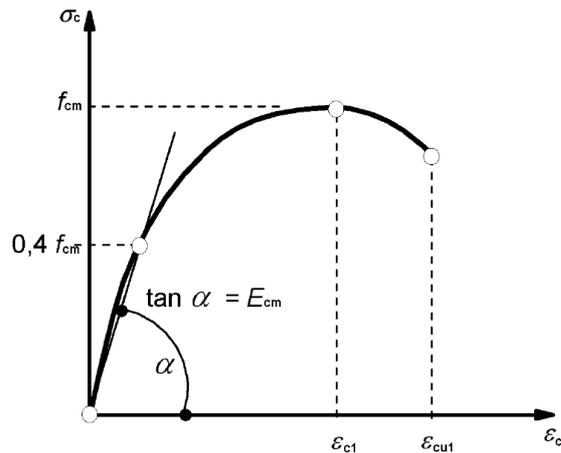


Fig. 3-2 Representación esquemática de la relación  $\varepsilon - \sigma$  para cálculo estructural

A continuación, se muestra la expresión analítica de la ley de comportamiento parábola-rectángulo.

$$\sigma_c(\varepsilon_c) = \begin{cases} f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] & \text{si } 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2} \\ f_{cd} & \text{si } \varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu2} \end{cases} \quad (3.1.2)$$

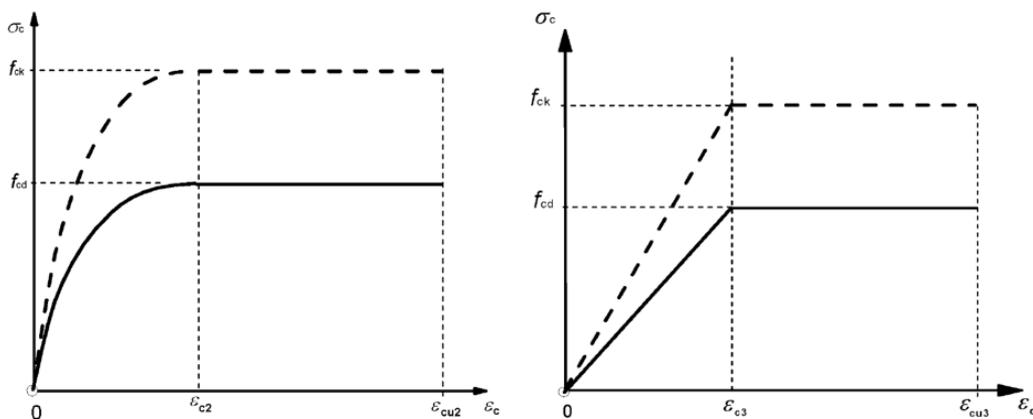


Fig. 3-3 Relación  $\varepsilon - \sigma$  parábola-rectángulo y elastoplástico (bilineal)

### 3.1.2 Acero

Los valores de las propiedades de las clases de acero estructural implementadas se muestran en la Tabla 3-3 donde

$f_{sk}$  Valor nominal del límite elástico para acero estructural laminado en caliente (espesores menores a 40 mm). Se obtiene de la Tabla 3.1 del Eurocódigo 3 Eurocódigo 3 parte 1-1.

$E_s$  Módulo elástico del material. Se obtiene del artículo 3.2.6 del Eurocódigo 3 parte 1-1.

Clases resistentes		S235	S275	S355	S450
$f_{sk}$	MPa	235	275	355	450
$E_s$	GPa	210			

Tabla 3-3 Propiedades de resistencia para el acero

El valor de cálculo del límite elástico  $f_{sd}$  se determina según 2.4.3 de Eurocódigo 3 parte 1-1:

$$R_d = \frac{R_k}{\gamma_M} \quad (3.1.3)$$

donde

$R_k$  es el valor característico de una magnitud de resistencia. En este caso usamos el valor  $f_{sk}$

$R_d$  es el valor de cálculo de una magnitud de resistencia. En este caso obtenemos  $f_{sd}$

$\gamma_M$  es el coeficiente parcial de seguridad para el acero. Introducido por el usuario. Ver apartado 2.3

En cuanto a la modelización del comportamiento del acero (relación  $\varepsilon - \sigma$ ) se ha tomado un comportamiento elastoplástico del material idéntico a tracción o compresión según se indica en los artículos 5.4.2 y 5.4.3 del Eurocódigo 3 parte 1-1 tal y como se muestra en Fig. 3-4.

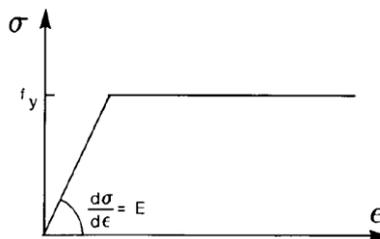


Fig. 3-4 Relación  $\varepsilon - \sigma$  para el acero estructural

### 3.1.3 Armadura

En el Eurocódigo 3 sobre hormigón no se han definido clases normalizadas de acero para armar. Entonces se han tomado las clases de acero soldable (sin características especiales de ductilidad) contempladas en la EHE-08.

Los valores de las propiedades de las clases de acero para armadura pasiva implementadas se muestran en la Tabla 3-4 donde

$f_{yk}$  Valor nominal del límite elástico para acero de armar. Se obtiene de la Tabla 32.2.a de la EHE-08

$E_y$  Módulo elástico del material. Se obtiene del artículo 3.2.7 del Eurocódigo 2 parte 1-1.

Clases resistentes		B 400 S	B 500 S
$f_{yk}$	MPa	400	500
$E_y$	GPa	200	

Tabla 3-4 Propiedades de resistencia para acero de armar

El valor de cálculo del límite elástico  $f_{yd}$  se determina según 2.4.3 de Eurocódigo 3 parte 1-1:

$$R_d = \frac{R_k}{\gamma_M} \quad (3.1.4)$$

donde

$R_k$  es el valor característico de una magnitud de resistencia. En este caso usamos el valor  $f_{yk}$

$R_d$  es el valor de cálculo de una magnitud de resistencia. En este caso obtenemos  $f_{yd}$

$\gamma_M$  es el coeficiente parcial de seguridad para el acero. Introducido por el usuario. Ver apartado 2.3

En cuanto a la modelización del comportamiento del acero (relación  $\varepsilon - \sigma$ ) se ha tomado un comportamiento elastoplástico del material idéntico a tracción o compresión según se indica en el artículo 3.2.7 del Eurocódigo 2 parte 1-1 tal y como se muestra en Fig. 3-5.

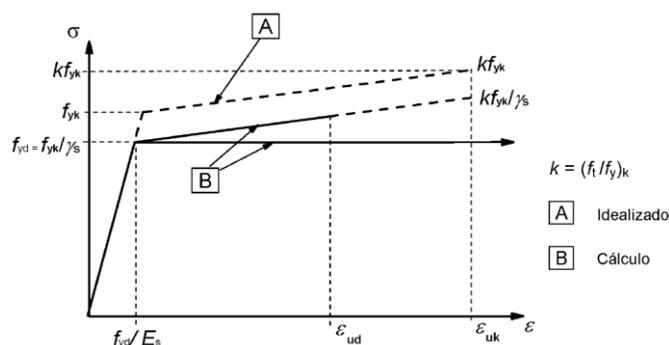


Fig. 3-5 Relación  $\varepsilon - \sigma$  para el acero de armar

## 3.2 Armadura

### 3.2.1 Recubrimiento de hormigón

El recubrimiento de hormigón es la mínima distancia entre la superficie de la barra de armar y la superficie de hormigón. Sea  $c$  este recubrimiento. Se debe disponer un valor mínimo que garantice tensiones de adherencia, protección frente a la corrosión y resistencia al fuego. Este valor mínimo lo encontramos en el artículo 4.4.1 de

Eurocódigo 2 parte 1-1. Depende de la clasificación estructural del elemento resistente, de la clase de exposición del hormigón y del diámetro  $\phi$  de la barra. Contemplar dicha variabilidad en esta comprobación se sale del alcance de este Trabajo Fin de Máster. Es por ello que se ha simplificado el cálculo de la comprobación de la manera siguiente.

$$c_{fk} = \begin{cases} 25 \text{ mm} & \text{si } f_{ck} \leq 40 \text{ MPa} \\ 20 \text{ mm} & \text{si } f_{ck} > 40 \text{ MPa} \end{cases} \quad (3.2.1)$$

$$c_{\min} = \max(c_{fk}, \phi) + 10 \text{ mm} \quad (3.2.2)$$

$$c \geq c_{\min} \quad (3.2.3)$$

### 3.2.2 Separación entre barras

La separación entre barras se define como la mínima distancia entre la superficie de dos barras. Sea  $s$  esta separación. Debe garantizar el desarrollo de la adherencia adecuada y el correcto vertido y compactado del hormigón. Esto se consigue disponiendo un valor de separación no menor al mínimo establecido en el artículo 8.2 de Eurocódigo 2 parte 1-1. Depende del diámetro  $\phi$  de la barra y del tamaño máximo del árido. Se ha asumido un tamaño máximo de árido no mayor a 20 mm con lo que la comprobación implementada en el programa queda:

$$s_{\min} = \max(\phi, 20 \text{ mm}) \quad (3.2.4)$$

$$s \geq s_{\min} \quad (3.2.5)$$

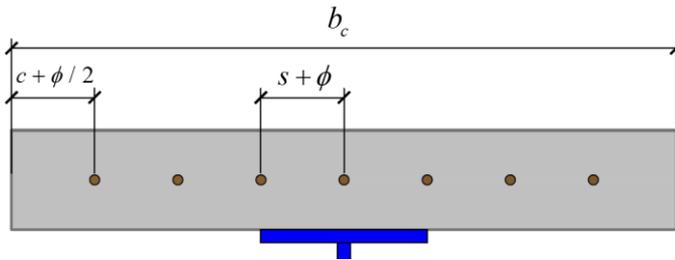


Fig. 3-6 Separación horizontal entre barras

La separación horizontal entre  $N$  barras se calcula a partir de la siguiente expresión deducida de Fig. 3-6.

$$2\left(c + \frac{\phi}{2}\right) + (N-1)(s + \phi) = b_c \quad (3.2.6)$$

$$s = \frac{b_c - 2c_{\min} - N\phi}{N_b - 1} \quad (3.2.7)$$

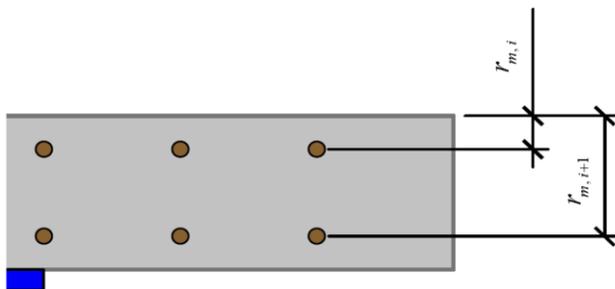


Fig. 3-7 Separación vertical entre barras

La separación vertical entre dos filas de barras se calcula a partir de la siguiente expresión deducida de Fig. 3-7.

$$r_{m,i+1} - r_{m,i} = s + \frac{\phi_i + \phi_{i+1}}{2} \quad (3.2.8)$$

$$s = r_{m,i+1} - r_{m,i} - \frac{\phi_i + \phi_{i+1}}{2} \quad (3.2.9)$$

Ambos valores de separación horizontal y vertical deben ser mayores al mínimo establecido según (3.2.5).

### 3.3 Conexión

En esta sección se desarrolla la modelización de la deformabilidad de los pernos y la obtención de la ley de flectores a partir de los valores introducidos por el usuario.

#### 3.3.1 Rigidez

Sea la rigidez de un perno la relación entre la carga aplicada y el desplazamiento máximo obtenido. Esta magnitud será fundamental en el cálculo del esfuerzo rasante. La deformabilidad de los pernos se ha modelizado como una barra empotrada en la que el empotramiento es la unión al perfil metálico. En barras con luz menor a diez veces el canto se debe tener en cuenta la deformación por cortante, por lo que se ha elegido la viga de Timoshenko. Para obtener la rigidez del perno vamos a utilizar el Método de los Elementos Finitos, donde el perno lo discretizamos en dos elementos (uno para el vástago y otro para la cabeza) y utilizamos el elemento barra de Timoshenko exacto de dos nodos. El desarrollo de este elemento puede verse en la sección 2.9 de Oñate, 2009 vol. 2.

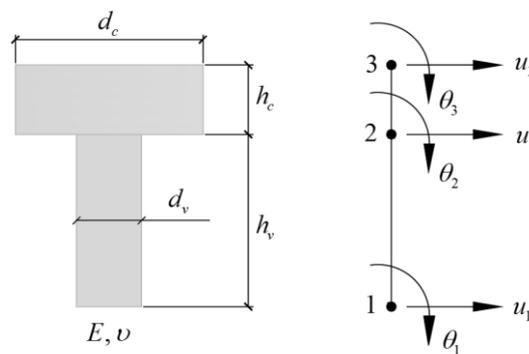


Fig. 3-8 Modelo de un perno aplicando elementos barra

Para un elemento barra de Timoshenko exacto de dos nodos  $i - j$  se tiene la matriz de rigidez  $K$  :

$$D_b = EI \quad (3.3.1)$$

$$D_s = GA^* \quad (3.3.2)$$

$$\beta = \frac{12D_b}{L^2 D_s} \quad (3.3.3)$$

$$K = \frac{D_b}{(1 + \beta)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ (4 + \beta)L^2 & -6L & (2 - \beta)L^2 & \\ & 12 & -6L & \\ & & & (4 + \beta)L^2 \end{bmatrix} \quad (3.3.4)$$

donde

$E$  módulo elástico del material

$\nu$  coeficiente de Poisson del material

$G$  módulo de rigidez transversal dado por  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$L$  longitud del elemento

$I$  inercia de la sección respecto a su baricentro

$A^*$  área transversal reducida con coeficiente  $k_z$  corrector por cortante

El coeficiente corrector por cortante  $k_z$  se define de la siguiente manera. En el comportamiento de la barra de Timoshenko se tiene en cuenta una deformación transversal de la sección de valor constante, aunque en realidad sea variable. Para mejorar la exactitud de los resultados se usa un coeficiente corrector cuyo objetivo es que la energía de deformación transversal de la sección de una barra de Timoshenko iguale a esta misma magnitud calculada por otros métodos más fieles a la realidad. Sea  $U_s$  la definición de energía transversal en la sección. Sea  $U_s^T$  la energía en la sección de una barra de Timoshenko.

$$U_s = \frac{1}{2} \int_A \frac{\tau_{xz}^2}{G} dA \quad U_s^T = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{k_z GA} \quad (3.3.5)$$

donde

$Q$  esfuerzo cortante en la sección

$\tau_{xz}$  tensión tangencial vertical en un punto de la sección

Igualando ambas expresiones se tiene la ecuación para  $k_z$  :

$$U_s = U_s^T \Rightarrow k_z = \frac{Q^2}{A \int_A \tau_{xz}^2 dA} \quad (3.3.6)$$

Aplicando un análisis elástico-lineal según la Teoría de Resistencias de Materiales la tensión tangencial en un punto de la sección provocada por un esfuerzo cortante es constante en la fibra que pasa por ese punto y de valor:

$$\tau_{xz}(z) = \frac{S(z) Q}{b(z) I} \quad (3.3.7)$$

donde

$S$  momento estático del área de la sección por encima de la fibra de posición  $z$  respecto del baricentro

$b$  ancho de la sección en la fibra de posición  $z$

Sustituyendo (3.3.7) en (3.3.6) se tiene:

$$k_z = \frac{I^2}{A \int_A \frac{S^2}{b^2} dA} \quad (3.3.8)$$

Además, para integrales de superficie de funciones  $\varphi$  que solamente dependen de la coordenada  $z$  se tiene:

$$\int_A \varphi(z) dA = \int_H \int_{b(z)} \varphi(z) dx dz = \int_H \varphi(z) \int_{b(z)} dx dz = \int_H \varphi(z) b(z) dz \quad (3.3.9)$$

donde

$H$  canto de la sección

Como el momento estático solamente depende de la coordenada  $z$  podemos aplicar (3.3.9) en (3.3.8) obteniendo:

$$\int_A S^2(z) dA = \int_H S^2(z) b(z) dz \Rightarrow k_z = \frac{I^2}{A \int_H \frac{S^2}{b} dz} \quad (3.3.10)$$

Para una sección transversal circular de radio  $R$  las magnitudes geométricas anteriores tendrían los siguientes valores:

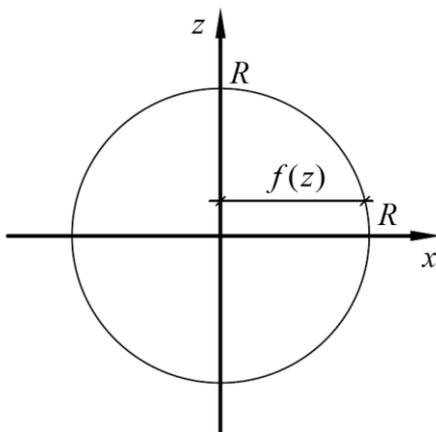
### Área transversal

$$A = \pi R^2 \quad (3.3.11)$$

### Inercia respecto a su baricentro

$$I = \int_A z^2 dA = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^3 \sin^2 \theta d\rho d\theta = \frac{1}{4} \pi R^4 \quad (3.3.12)$$

### Coefficiente corrector por cortante



La función  $f(z)$  está dada por:

$$f(z) = R \sqrt{1 - \left(\frac{z}{R}\right)^2} \quad (3.3.13)$$

Con lo que el ancho  $b(z)$  de la sección es:

$$b(z) = 2f(z) = 2R\sqrt{1 - \left(\frac{z}{R}\right)^2} \quad (3.3.14)$$

Fig. 3-9 Sección circular

El momento estático del área  $\hat{A}$  por encima de la fibra de posición  $z$  respecto al baricentro de la sección se calcula:

$$S(z) = \int_A z' dA = \int_z^R z' b(z') dz' = \int_z^R z' 2R\sqrt{1 - \left(\frac{z'}{R}\right)^2} dz' = \frac{2}{3} R^3 \left[ 1 - \left(\frac{z}{R}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \quad (3.3.15)$$

Introduciendo (3.3.15) en la integral de (3.3.10) se tiene:

$$\int_H \frac{S^2}{b} dz = 2 \int_R \frac{S^2}{b} dz = 2 \int_0^R \frac{\left( \frac{2}{3} R^3 \left( 1 - \left( \frac{z}{R} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right)^2}{2R\sqrt{1 - \left( \frac{z}{R} \right)^2}} dz = \frac{2^2}{3^2} R^5 \int_0^R \left( 1 - \left( \frac{z}{R} \right)^2 \right)^{\frac{5}{2}} dz \quad (3.3.16)$$

Aplicando el cambio de variable  $\frac{z}{R} = \sin \theta$  obtenemos:

$$\int_0^R \left( 1 - \left( \frac{z}{R} \right)^2 \right)^{\frac{5}{2}} dz = R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \theta d\theta = \frac{5}{32} \pi R \quad (3.3.17)$$

Sustituyendo (3.3.17) en (3.3.16) y el resultado en (3.3.10) finalmente se tiene el resultado de  $k_z$  :

$$k_z = \frac{\left( \frac{1}{4} \pi R^4 \right)^2}{\pi R^2 \frac{5}{2^3 \cdot 3^2} \pi R^6} = \frac{\frac{1}{2^4} \pi^2 R^8}{\frac{5}{2^3 \cdot 3^2} \pi^2 R^8} = \frac{9}{10} \quad (3.3.18)$$

En realidad,  $k_z$  depende del coeficiente de Poisson  $\nu$ . Para secciones circulares tiene la expresión:

$$k_z = \frac{6(1+\nu)}{7+6\nu} \quad (3.3.19)$$

Evaluando esta expresión para los valores límite  $\nu = 0$  y  $\nu = \frac{1}{2}$  resulta  $k_z = \frac{6}{7}$  y  $k_z = \frac{9}{10}$ , respectivamente. Es por ello que según la bibliografía que se consulte el valor puede ser distinto.

### 3.3.1.1 Matriz de rigidez global

Una vez definida la matriz de rigidez elemental, lo aplicamos al elemento vástago y al elemento cabeza. Ensamblamos las matrices para obtener la matriz de rigidez global.

#### Matriz elemento vástago

La matriz elemental para el elemento vástago de longitud  $h_v$  y sección circular de radio  $R_v$  quedaría:

$$D_b = EI = \frac{1}{4} \pi ER_v^4 \quad (3.3.20)$$

$$D_s = GA^* = Gk_z A = \frac{9}{10} \pi GR_v^2 \quad (3.3.21)$$

$$\beta = \frac{12D_b}{L^2 D_s} \quad (3.3.22)$$

$$K^v = \frac{D_b}{(1 + \beta)h_v^3} \begin{bmatrix} 12 & 6h_v & -12 & 6h_v \\ (4 + \beta)h_v^2 & -6h_v & (2 - \beta)h_v^2 & \\ & 12 & -6h_v & \\ & & (4 + \beta)h_v^2 & \end{bmatrix} \quad (3.3.23)$$

#### Matriz elemento cabeza

La matriz elemental para el elemento vástago de longitud  $h_c$  y sección circular de radio  $R_c$  quedaría:

$$D_b = EI = \frac{1}{4} \pi ER_c^4 \quad (3.3.24)$$

$$D_s = GA^* = Gk_z A = \frac{9}{10} \pi GR_c^2 \quad (3.3.25)$$

$$\beta = \frac{12D_b}{L^2 D_s} \quad (3.3.26)$$

$$K^c = \frac{D_b}{(1 + \beta)h_c^3} \begin{bmatrix} 12 & 6h_c & -12 & 6h_c \\ (4 + \beta)h_c^2 & -6h_c & (2 - \beta)h_c^2 & \\ & 12 & -6h_c & \\ & & (4 + \beta)h_c^2 & \end{bmatrix} \quad (3.3.27)$$

#### Matriz de rigidez global

Sea  $K^T$  la matriz de rigidez global. Resulta del ensamblaje de las matrices elementales anteriormente descritas según la numeración de los grados de libertad establecida en Fig. 3-8.

$$K^T = K^{(e)} \quad (3.3.28)$$

### 3.3.1.2 Sistema de fuerzas

La resultante de esfuerzo rasante que debe resistir cada perno en este Trabajo hemos propuesto aplicarla sobre el mismo como una carga uniformemente distribuida en toda su longitud o como una carga puntual en el extremo de la cabeza. Estas dos hipótesis se muestran en Fig. 3-10. El vector global de fuerzas del MEF sería como se describe a continuación para cada caso.

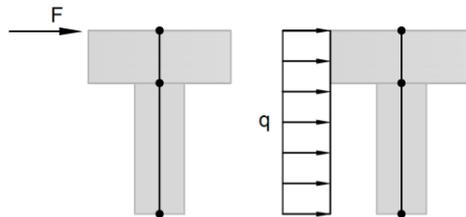


Fig. 3-10 Sistema de fuerzas sobre los pernos

#### Carga puntual en el extremo de la cabeza

$$\underline{F} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T \cdot F \quad (3.3.29)$$

#### Carga uniformemente repartida

Para un elemento barra de Timoshenko exacto de dos nodos el vector de fuerza elemental es:

$$\underline{F} = \left[ \frac{1}{2} \quad \frac{L}{12} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{L}{12} \right]^T \cdot qL \quad (3.3.30)$$

Para obtener el vector global de fuerzas se ensamblan el de la cabeza y vástago.

$$\underline{F} = \underset{(e)}{\mathbf{A}} F^{(e)} \quad (3.3.31)$$

### 3.3.1.3 Condiciones de contorno

Asumir el comportamiento de la unión del perno al perfil metálico como un empotramiento está claro. Sin embargo, no es tan obvio en el otro extremo. La realidad es que el perno está embebido en hormigón, así que el giro de la cabeza está parcialmente restringido. Esta restricción al giro se puede modelizar con un muelle torsional en la cabeza. En un análisis lineal este muelle aplicaría un momento proporcional al giro de la misma. El factor de proporcionalidad es la rigidez del muelle  $K_\theta$ . Por falta de métodos para obtener la rigidez asociada  $K_\theta = K^*$  de dicho muelle en este programa se ha optado por calcular la rigidez del perno en dos casos límite que generan un intervalo acotado en el que se encuentra el valor real. Estos dos casos son  $K_\theta = 0$  que sería giro completamente libre (con lo que el perno se comportaría como una ménsula corta) y  $K_\theta = +\infty$  que sería giro completamente restringido (condición de empotramiento al giro, pero no al desplazamiento). El usuario puede elegir cada caso y estudiar los resultados más desfavorables.

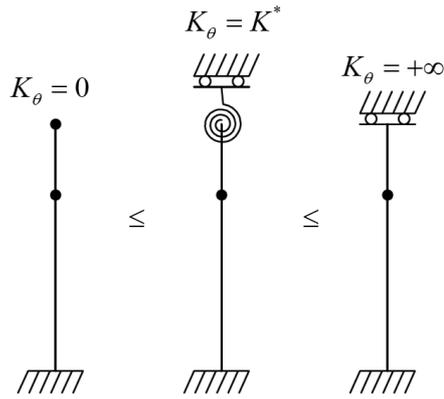


Fig. 3-11 Condiciones de contorno para pernos

### 3.3.1.4 Solución

Los dos tipos de sistemas de carga con las dos posibilidades de condiciones de contorno resultan en cuatro situaciones de las que el usuario puede elegir la que desee. Éstas se recogen en Fig. 3-12.

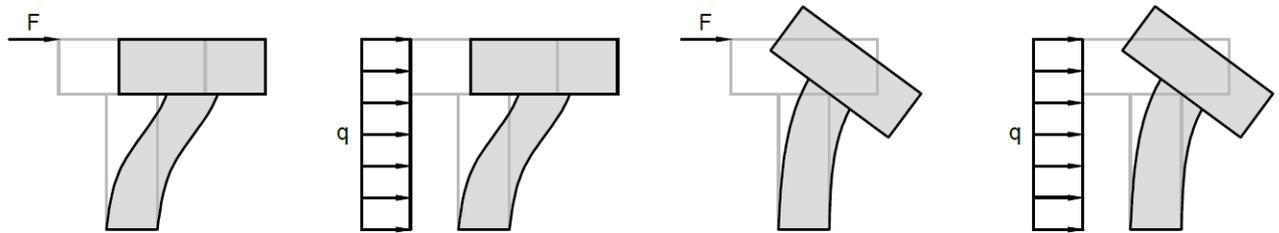


Fig. 3-12 Posibilidades para modelizar deformabilidad de los pernos

Teniendo el modelo definido, las matrices y vectores ensamblados y las condiciones de contorno aplicadas se monta el bien conocido sistema de ecuaciones:

$$\underline{K} \cdot \underline{u} = \underline{F} \tag{3.3.32}$$

Recordamos que estamos buscando calcular la rigidez del perno definida como la relación entre la fuerza aplicada y el desplazamiento de la cabeza. El desplazamiento  $u_3$  de la cabeza (Fig. 3-8) por ser un problema lineal es de la forma:

$$u_3 = S H_p \Rightarrow \frac{H_p}{u_3} = \frac{1}{S} = K_p \tag{3.3.33}$$

donde

$S$  valor constante que depende del material, dimensiones, sistema de fuerzas y condiciones de contorno elegidos. También denominado flexibilidad del perno.

$K_p$  rigidez del perno. Es el valor  $K$  que se muestra por pantalla en apartado 2.6.1 Fig. 2-14.

$H_q$  valor de la fuerza aplicada ( $F$  ó  $q \cdot L_p$  según sistema de fuerzas elegido).

$L_p$  longitud total del perno.

Para obtener numéricamente la rigidez del perno resolvemos el sistema (3.3.32) con una carga unidad  $H_p^* = 1$ , obtenemos un desplazamiento en cabeza  $u_3^*$  y la rigidez del perno es:

$$K_p = \frac{H_p}{u_3} = \frac{H_p^*}{u_3^*} = \frac{1}{u_3^*} \quad (3.3.34)$$

### 3.3.2 Ley de flectores

Se ha supuesto una ley de flectores polinómica de segundo grado (distribución parabólica) que tenga en el apoyo izquierdo, en el apoyo derecho a una longitud  $L$  y como máximo en el vano los valores  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_v$ , respectivamente, definidos por el usuario según se indica en el apartado 2.6.2. El objetivo es obtener la ley parabólica de flectores a partir de estos cuatro datos. El esquema del problema a solucionar se muestra en la Fig. 3-13.

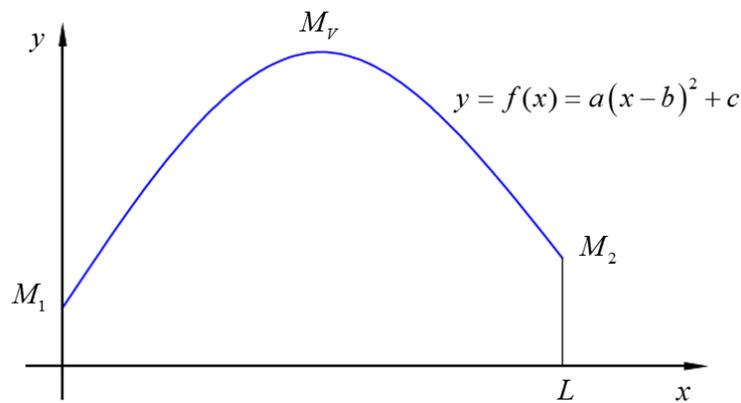


Fig. 3-13 Obtención de la ley de flectores

Definimos las siguientes variables:

$$M_i = M_1 - M_v \quad (3.3.35)$$

$$M_j = M_2 - M_v \quad (3.3.36)$$

$$M_k = \{M_i, M_j\} \quad (3.3.37)$$

Se definen estas variables porque todas son del mismo signo e igual al signo de  $a$ . Esto facilita los cálculos porque al tener todo el mismo signo se tienen productos que van a ser siempre positivos:

$$M_i M_j \geq 0 \quad \text{sgn}(a) = \text{sgn}(M_k) \quad a M_k \geq 0 \quad (3.3.38)$$

El valor extremo está en el vértice de la parábola situado en  $x = b$ , por lo que:

$$f(b) = c = M_v \quad (3.3.39)$$

En  $x = 0$  se tiene:

$$f(0) = ab^2 + M_v = M_1 \Rightarrow ab^2 - M_i = 0 \quad (3.3.40)$$

En  $x = L$  se tiene:

$$f(L) = a(L-b)^2 + M_v = M_2 \Rightarrow a(L-b)^2 - M_j = 0 \quad (3.3.41)$$

Desarrollamos esta última expresión y utilizando  $ab^2 = M_i$  de (3.3.40) se tiene:

$$\begin{aligned} aL^2 - 2abL + ab^2 - M_j &= 0 \\ aL^2 - 2abL + M_i - M_j &= 0 \\ b &= \frac{1}{2}L + \frac{M_i - M_j}{2aL} \end{aligned} \quad (3.3.42)$$

Ahora se calcula  $b^2$  y se introduce en (3.3.40):

$$a \left( \frac{1}{2}L + \frac{M_i - M_j}{2aL} \right)^2 - M_i = 0 \quad (3.3.43)$$

Desarrollando esta expresión se llega a:

$$(aL^2)^2 - 2(M_i + M_j)aL^2 + (M_i - M_j)^2 = 0 \quad (3.3.44)$$

Aplicamos  $(M_i - M_j)^2 = (M_i + M_j)^2 - 4M_iM_j$ , quedando:

$$\begin{aligned} (aL^2)^2 - 2(M_i + M_j)aL^2 + (M_i + M_j)^2 - 4M_iM_j &= 0 \\ (aL^2 - (M_i + M_j))^2 - 4M_iM_j &= 0 \\ aL^2 - (M_i + M_j) &= \pm 2\sqrt{M_iM_j} \\ a &= \frac{M_i + M_j \pm 2\sqrt{M_iM_j}}{L^2} \end{aligned} \quad (3.3.45)$$

Por (3.3.38) tenemos la seguridad de que la raíz va a ser siempre de un número positivo. Como vemos, resulta que la solución no es única: existen dos parábolas que cumplen las condiciones establecidas. Un ejemplo lo mostramos en Fig. 3-14 para  $L = 1$ ,  $M_1 = 1$ ,  $M_v = 3$  y  $M_2 = 2$ . A nosotros nos interesa para nuestro caso aplicado de ley de flectores donde el momento extremo esté dentro del vano. Matemáticamente, de las dos soluciones posibles nos

debemos quedar con la que cumpla  $b^2 \leq L^2$ .

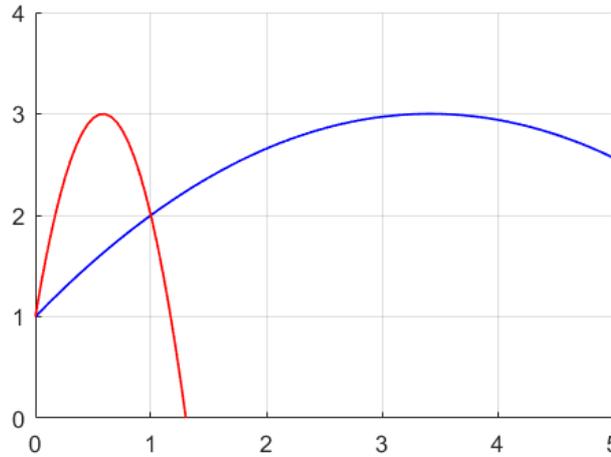


Fig. 3-14 Dos posibles soluciones de funciones parabólicas

De (3.3.40) se tiene:

$$b^2 = \frac{M_i}{a} \leq L^2 \Rightarrow \frac{aL^2}{M_i} \geq 1 \quad (3.3.46)$$

Introduciendo las posibles soluciones de  $a$  obtenidas en (3.3.45) se tiene:

$$\frac{aL^2}{M_i} = 1 \pm 2 \frac{\sqrt{M_i M_j}}{M_i} + \frac{M_j}{M_i} = 1 \pm \operatorname{sgn}(M_i) \cdot 2 \sqrt{\frac{M_j}{M_i}} + \frac{M_j}{M_i} = \left( 1 \pm \operatorname{sgn}(M_i) \sqrt{\frac{M_j}{M_i}} \right)^2 \geq 1 \quad (3.3.47)$$

Y se deduce que la solución que debemos tomar depende del signo de  $M_i$ . En el caso aplicado de ley de flectores en una viga lo usual es que el momento extremo en el vano sea de flexión positiva y en los apoyos se tengan momentos nulos o de flexión negativa, con lo que los momentos en los apoyos van a ser menores que el momento extremo en el vano.

$$M_v \geq M_1 \Rightarrow M_i = M_1 - M_v \leq 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(M_i) = -1 \quad (3.3.48)$$

Así que nos debemos quedar con la solución negativa de  $a$  para que se cumpla (3.3.46) y el momento extremo esté en el vano.

$$\frac{aL^2}{M_i} = \left( 1 - \operatorname{sgn}(M_i) \sqrt{\frac{M_j}{M_i}} \right)^2 = \left( 1 - (-1) \sqrt{\frac{M_j}{M_i}} \right)^2 = \left( 1 + \sqrt{\frac{M_j}{M_i}} \right)^2 \geq 1 \quad (3.3.49)$$

Finalmente, la solución buscada a nuestro problema es:

$$a = \frac{M_i + M_j - 2\sqrt{M_i M_j}}{L^2}$$

$$b = \frac{1}{2}L + \frac{M_i - M_j}{2aL}$$

$$c = M_v$$
(3.3.50)

### 3.4 Resultados

#### Geometría de secciones tipo

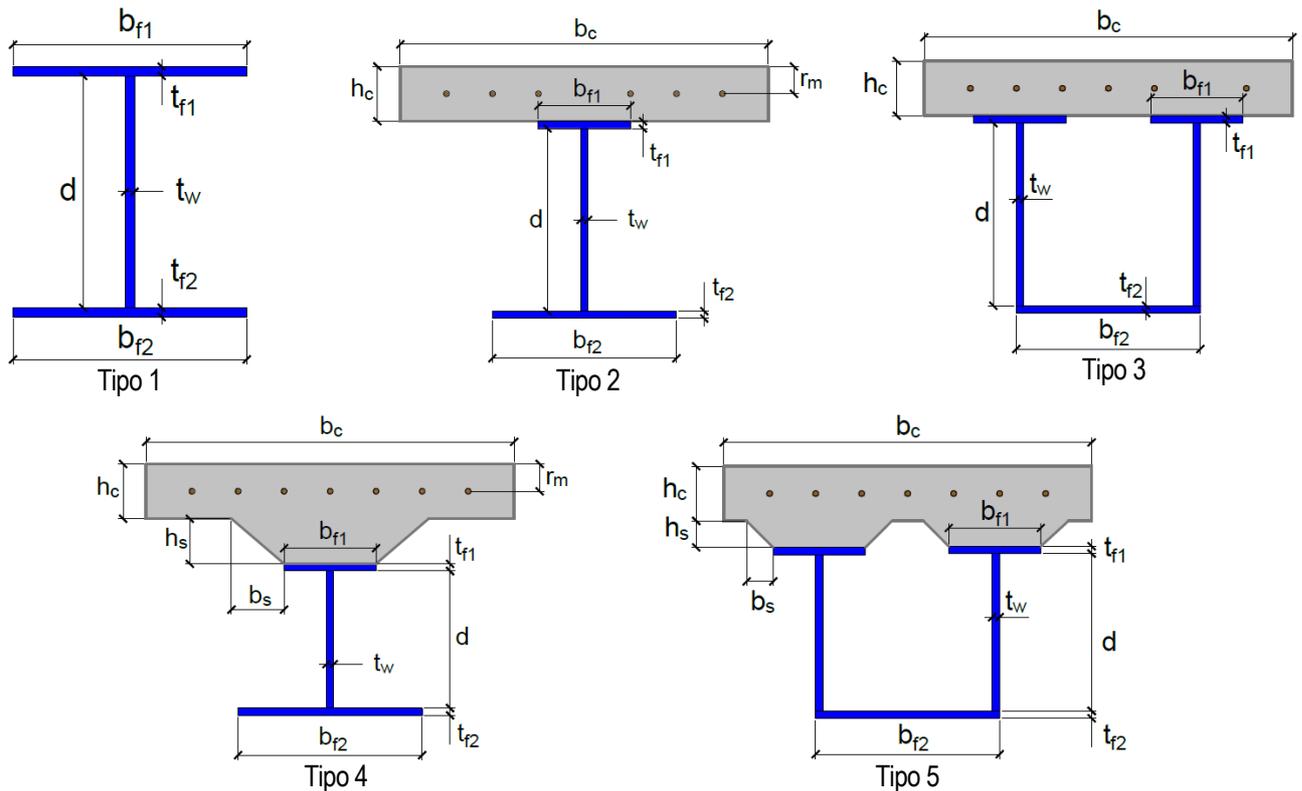


Fig. 3-15 Geometría de secciones tipo

Una magnitud recurrente en los cálculos es el ancho de la sección en función de la posición según el sistema de ejes definido en Fig. 3-1, con el eje empezando en la fibra superior y sentido positivo hacia abajo. En cada elemento (losa, ala, alma, panel inferior...) este ancho es de valor constante, salvo en los peraltes de la losa de hormigón de las secciones tipo 4 y 5.

En las secciones tipo 4 tiene el valor:

$$b(z) = b_{f1} + 2b_s \left( 1 + \frac{h_c - z}{h_s} \right) \quad \text{para } h_c \leq z \leq h_c + h_s$$
(3.4.1)

En las secciones tipo 5 tiene el valor:

$$b(z) = 2b_{f1} + 4b_s \left( 1 + \frac{h_c - z}{h_s} \right) \quad \text{para } h_c \leq z \leq h_c + h_s$$
(3.4.2)

Es fácil observar que esta expresión equivale a la correspondiente para secciones tipo 4 pero con  $b_{f1}^* = 2b_{f1}$  y  $b_s^* = 2b_s$  tal que:

$$b(z) = (2b_{f1}) + 2(2b_s) \left( 1 + \frac{h_c - z}{h_s} \right) = b_{f1}^* + 2b_s^* \left( 1 + \frac{h_c - z}{h_s} \right) \quad (3.4.3)$$

### 3.4.1 Clasificación de la sección

En el Eurocódigo 4 se establece en el artículo 5.5.2 que la clasificación de los elementos de acero comprimidos se efectúe según la tabla 5.2 del Eurocódigo 3. Las relaciones máximas de anchura/espesor para pertenecer a cada clase se muestran en Tabla 3-5. La clase de una sección será la clase del elemento con clase más desfavorable. Los elementos que no cumplan los requisitos para ser clase 3 se considerarán clase 4. Las secciones clase 4 pueden reducirse y calcularse como si fueran clase 3. La posición de la fibra neutra en una sección mixta es distinta para flexión positiva que negativa, así que hay que hacer el cálculo para cada caso y es usual que se tengan clasificaciones diferentes.

En este artículo 5.5.2 también se establece que las alas unidas a hormigón pueden considerarse clase 1 si se cumple con lo dispuesto en el artículo 6.6.5.5 de la misma porque si la unión es adecuada se evitan los fenómenos de inestabilidad y el material puede desarrollar toda su resistencia a compresión. Sin embargo, esto no se ha tenido en cuenta en el programa. No es grave el no haberlo tenido en cuenta porque los resultados obtenidos están del lado de la seguridad.

En secciones clase 1 se ha introducido el caso  $\alpha < 0$ . Es el que a flexión positiva corresponde cuando la fibra neutra está fuera del alma en la losa de hormigón. Entonces toda la sección metálica está traccionada, con lo que independientemente de sus dimensiones y relación anchura/espesor será clase 1 porque se puede desarrollar toda la capacidad resistente sin que se produzcan fenómenos de inestabilidad por compresiones, porque no las hay.

Para las secciones clase 3 por definición al menos la fibra más comprimida puede alcanzar el límite de elasticidad a compresión antes de producirse fenómenos de inestabilidad por tensiones normales. En las relaciones máximas de secciones clase 3 de elementos internos se contempla  $\psi \leq -1$ . Este caso es el que aplica cuando en la sección al ir aumentando la curvatura se alcanza primero el límite elástico en la zona traccionada. Por la definición de clase 3 no parece adecuado clasificar la sección con una ley de tensiones en la que no se ha alcanzado el límite elástico en la zona comprimida, pero si se aumenta la curvatura hasta que se alcance dicho valor entonces existirá una zona traccionada en régimen plástico y el cálculo de la sección pasará a ser elastoplástico. En el artículo 20.3 de la EAE se contempla permitir que la zona traccionada plastifique hasta alcanzar el límite elástico a compresión mientras la deformación máxima de tracción sea menor a  $6\varepsilon_s$ . Todo esto se ha tenido en cuenta en el programa. Un esquema de este comportamiento se muestra en Fig. 3-16.

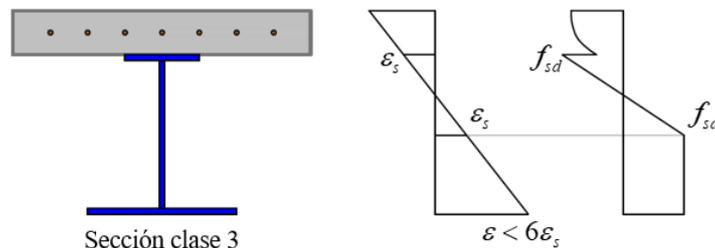


Fig. 3-16 Ley de tensiones elastoplástica en una sección clase 3 donde  $\psi \leq -1$

Clase	Elemento interno comprimido	Elemento interno flexo-comprimido	Elemento volado comprimido
-------	-----------------------------	-----------------------------------	----------------------------

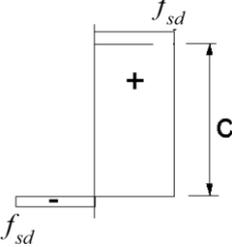
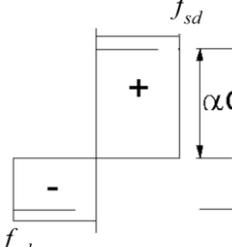
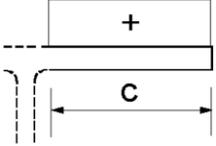
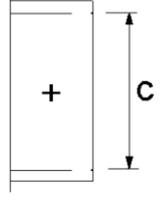
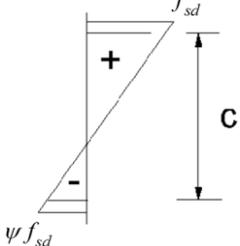
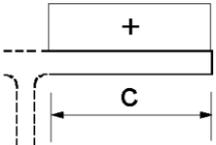
<p>Ley de tensiones en las chapas (compresión positiva)</p>			
<p>1</p>	$\frac{c}{t} \leq 33\varepsilon$	$\frac{c}{t} \leq \frac{396\varepsilon}{13\alpha - 1} \quad \text{si } \alpha > 0.5$ $\frac{c}{t} \leq \frac{36\varepsilon}{\alpha} \quad \text{si } \alpha \leq 0.5$ <p>Clase 1 si <math>\alpha &lt; 0</math></p>	$\frac{c}{t} \leq 9\varepsilon$
<p>2</p>	$\frac{c}{t} \leq 38\varepsilon$	$\frac{c}{t} \leq \frac{456\varepsilon}{13\alpha - 1} \quad \text{si } \alpha > 0.5$ $\frac{c}{t} \leq \frac{41.5\varepsilon}{\alpha} \quad \text{si } \alpha \leq 0.5$	$\frac{c}{t} \leq 10\varepsilon$
<p>Ley de tensiones en las chapas (compresión positiva)</p>			
<p>3</p>	$\frac{c}{t} \leq 42\varepsilon$	$\frac{c}{t} \leq \frac{42\varepsilon}{0.67 + 0.33\psi} \quad \text{si } \psi > -1$ $\frac{c}{t} \leq 62\varepsilon(1 - \psi)\sqrt{-\psi} \quad \text{si } \psi \leq -1$	$\frac{c}{t} \leq 14\varepsilon$

Tabla 3-5 Relaciones máximas anchura/espesor para elementos metálicos comprimidos

donde

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_{sk} [MPa]}}$$

$f_{sk}$  límite elástico característico del acero

$t$  espesor del elemento metálico

En elementos volados comprimidos sí se puede implementar solamente el caso  $\psi = 1$  porque no se va a tener ningún otro caso en lo que respecta a nuestro programa.

Si la sección resultara clase 4 se toman para calcularla anchos reducidos de los elementos metálicos (sección reducida) y se calcula como si fuera clase 3. El cálculo de los anchos reducidos de los elementos es el que se establece en el artículo 4.4 de Eurocódigo 3 parte 1-5. Se muestra en lo que sigue. Lo usual para los elementos internos verticales (almas) de clase 4 es el caso  $\psi < 0$  y para los horizontales (paneles inferiores de cajones) es el caso  $\psi = 1$ , pero se han implementado todas las posibilidades.

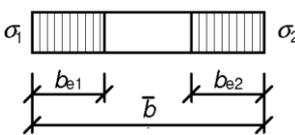
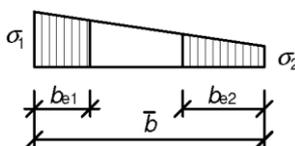
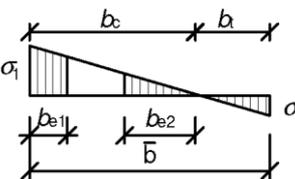
Distribución de tensiones (compresión positiva)				Anchura reducida $b_{eff}$		
				$\psi = 1$ $b_{eff} = \rho \bar{b}$ $b_{e1} = 0.5 b_{eff} \quad b_{e2} = 0.5 b_{eff}$		
				$1 > \psi \geq 0$ $b_{eff} = \rho \bar{b}$ $b_{e1} = \frac{2}{5 - \psi} b_{eff} \quad b_{e2} = b_{eff} - b_{e1}$		
				$\psi < 0$ $b_{eff} = \rho b_c = \rho \frac{\bar{b}}{1 - \psi}$ $b_{e1} = 0.4 b_{eff} \quad b_{e2} = 0.6 b_{eff}$		
$\psi = \sigma_2 / \sigma_1$	1	$1 > \psi > 0$	0	$0 > \psi > -1$	-1	$-1 > \psi$
$k_\sigma$	4.0	$\frac{8.2}{1.05 + \psi}$	7.81	$7.81 - 6.29\psi + 9.78\psi^2$	23.9	$5.98(1 - \psi)^2$

Tabla 3-6 Anchura reducida de elementos internos

donde

$$\bar{\lambda}_p = \frac{\bar{b} / t}{28.4 \varepsilon \sqrt{k_\sigma}}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_{sk} [MPa]}}$$

$$\rho = 1 \quad \text{para } \bar{\lambda}_p \leq 0.5 + \sqrt{0.085 - 0.055\psi}$$

$$\rho = \frac{\bar{\lambda}_p - 0.055(3 + \psi)}{\bar{\lambda}_p^2} \leq 1 \quad \text{para } \bar{\lambda}_p > 0.5 + \sqrt{0.085 - 0.055\psi}$$

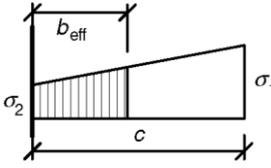
Distribución de tensiones (compresión positiva)	Anchura reducida $b_{eff}$
	$1 > \psi \geq 0$ $b_{eff} = \rho c \quad k_{\sigma}(\psi) = \frac{0.578}{\psi + 0.34}$ $k_{\sigma}(1) = 0.43$

Tabla 3-7 Anchura reducida de elementos volados

donde

$$\bar{\lambda}_p = \frac{c/t}{28.4\epsilon\sqrt{k_{\sigma}}}$$

$$\epsilon = \sqrt{\frac{235}{f_{sk} [MPa]}}$$

$$\rho = 1 \quad \text{para } \bar{\lambda}_p \leq 0.748$$

$$\rho = \frac{\bar{\lambda}_p - 0.188}{\bar{\lambda}_p^2} \leq 1 \quad \text{para } \bar{\lambda}_p > 0.748$$

A continuación, explicamos cómo clasifica el programa las secciones.

### 3.4.1.1 Secciones clase 1 y 2

Primero se asume que la sección es clase 1 ó 2. Se toma una ley de comportamiento rígido-plástico de los materiales y con ello se busca la posición de la fibra neutra. El cálculo de la posición de la fibra neutra se hace primero creando una función que dada esta posición devuelve la resultante de tensiones normales en la sección. La resultante se calcula asignando tracción o compresión según se esté por encima o por debajo de la fibra neutra. Conociendo también el comportamiento de los materiales se combinan ambas funciones y se tiene la ley de tensiones. Finalmente se calcula la resultante como la integral de las tensiones por el ancho en el canto de la sección. Luego, con un método numérico, se busca la posición para la que esta función se anula. Esquemáticamente se muestra en la figura siguiente.

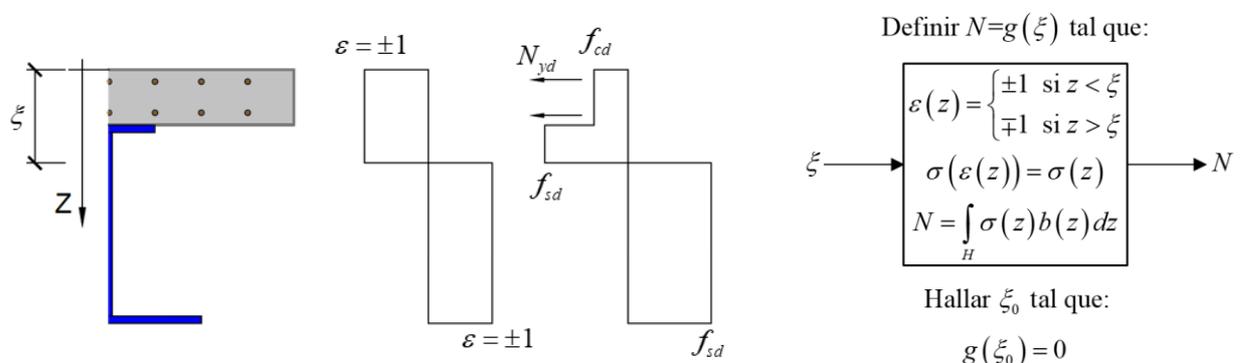


Fig. 3-17 Cálculo de fibra neutra para secciones clase 1 ó 2

Con la posición de la fibra neutra se comprueban los requisitos para ser clase 1 ó 2 según Tabla 3-5. Si no cumple los requisitos se calcula según clase 3.

### 3.4.1.2 Secciones clase 3

Se toma la ley de comportamiento elastoplástico de los materiales y con ello se busca la posición de la fibra neutra. El cálculo de la posición de la fibra neutra se hace creando una función que dada esta posición primero calcula la curvatura que produce bien el límite elástico en la fibra más comprimida o bien seis veces la deformación elástica en la fibra más traccionada. Con esta curvatura se tiene la ley de deformaciones. Con esta ley y el comportamiento de los materiales se tiene la ley de tensiones en la sección. Las tensiones se integran obteniendo la resultante y la función devuelve dicho valor. Luego, con un método numérico, se busca la posición para la que esta función se anula. Esquemáticamente se muestra el procedimiento en la siguiente figura.

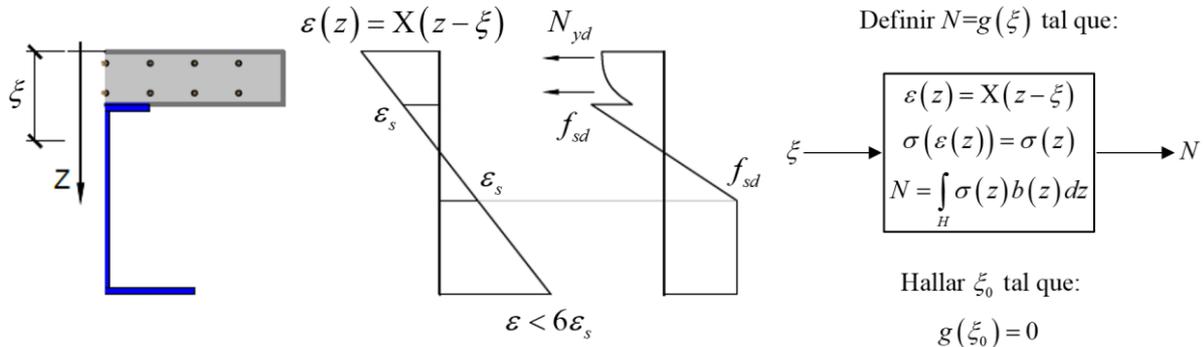


Fig. 3-18 Cálculo de fibra neutra para secciones clase 3

La curvatura que produce primero el límite elástico en la fibra más comprimida o seis veces la deformación elástica en la fibra más traccionada se calcula como sigue.

$$\varepsilon(z) = X(z - \xi) \tag{3.4.4}$$

$$\varepsilon(z_1) = X_1(z_1 - \xi) = -\varepsilon_s \Rightarrow X_1 = \frac{-\varepsilon_s}{z_1 - \xi} \tag{3.4.5}$$

$$\varepsilon(z_2) = X_2(z_2 - \xi) = 6\varepsilon_s \Rightarrow X_2 = \frac{6\varepsilon_s}{z_2 - \xi} \tag{3.4.6}$$

$$X = \min \{X_1, X_2\} \tag{3.4.7}$$

donde

$z_1$  posición de la fibra metálica más comprimida

$z_2$  posición de la fibra metálica más traccionada

Con la posición de la fibra neutra se comprueban los requisitos para ser clase 3 según Tabla 3-5. Si no cumple los requisitos será clase 4.

### 3.4.1.3 Secciones clase 4

Las secciones clase 4 se reducen y se calculan como si fueran clase 3. Para determinar la sección reducida se aplica

lo dispuesto en Tabla 3-6 y Tabla 3-7. La dificultad está en que la reducción depende de la posición de la fibra neutra que dependen a su vez de la sección reducida. En el artículo 20.7 de la EAE se dice que será suficiente con calcular las dimensiones reducidas de las alas con la sección bruta y las dimensiones reducidas del alma con las alas reducidas y alma bruta. Se establece así con propósito de facilitar el cálculo manual. Sin embargo, con el cálculo numérico computacional esta simplificación no es necesaria.

El cálculo de la posición de la fibra neutra y sección reducida se hace creando una función que dada esta posición primero calcula la curvatura que produce el límite elástico en la fibra más comprimida o seis veces la deformación elástica en la fibra más traccionada. Con esta curvatura se tiene la ley de deformaciones y también con la posición de la fibra neutra se efectúa la reducción de la sección según las tablas anteriores. Con la ley de deformaciones y el comportamiento de los materiales se tiene la ley de tensiones en la sección. Las tensiones se integran en la sección reducida obteniendo la resultante. La función devuelve dicho valor y también la sección reducida. Luego, con un método numérico, se busca la posición para la que la resultante de tensiones se anula. Esquemáticamente se muestra el procedimiento en la siguiente figura.

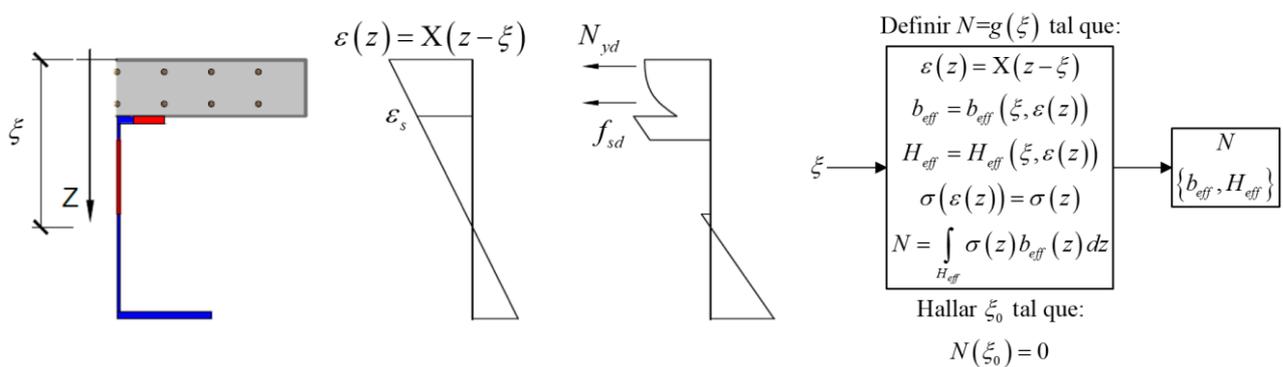


Fig. 3-19 Cálculo de secciones clase 4 reducidas

### 3.4.2 Resistencia elástica a flexión

El capítulo de artículos nº 7 del Eurocódigo 4 se dedica a los Estados Límite de Servicio (ELS). Se establece que las comprobaciones pueden hacerse tomando un comportamiento elástico de la sección a falta de algún tipo de análisis más preciso. El análisis elástico se rige mediante este capítulo y el artículo 5.4.2 del mismo documento. Se establecen los fenómenos que se deben tener en cuenta. Algunos de estos son:

- Arrastre por cortante
- Fluencia y retracción del hormigón
- Fisuración del hormigón y rigidización por la colaboración del hormigón entre fisuras
- Fases constructivas
- Aumento de la flexibilidad, producido por una significativa falta de interacción, debido al deslizamiento de la conexión

El alcance del programa es limitado y contemplar todo ello sobrepasaría con creces dicho límite. De todos los factores se ha decidido tener en cuenta únicamente el aumento de la flexibilidad debido a la conexión por ser un fenómeno característico de las secciones mixtas. Este fenómeno se ha tenido en cuenta de manera muy detallada en un módulo de cálculo secundario, independiente y también interactivo (ver apartado 2.7.2).

Por lo demás, el análisis elástico que hace el programa en su módulo principal y del que aparecen los resultados en el documento de texto se limita a calcular el valor de magnitudes resistentes de la sección necesarias para las comprobaciones de ELS asumiendo que los materiales son elástico-lineales asignando al hormigón el módulo elástico secante  $E_{cm}$ . El cálculo de estas propiedades resistentes se detalla en lo que sigue.

Las propiedades de secciones clase 4 se calculan sobre la sección reducida obtenida cuando se clasifica la sección (ver apartado 3.4.1).

### 3.4.2.1 Fibra neutra

El cálculo de la posición de la fibra neutra se hace primero creando una función que dada esta posición devuelve la resultante de tensiones normales en la sección. Luego, con un método numérico, se busca la posición para la que esta función se anula. Como la resultante es proporcional a la curvatura y buscamos anular la resultante, no importa qué valor se tenga de curvatura (a expensas del signo según se trate de flexión positiva o negativa porque determina si el hormigón está traccionado o comprimido). Es por ello que se toma un valor unidad para la misma. Sabiendo la curvatura y fibra neutra se conoce la ley de deformaciones en la sección. Conociendo también el comportamiento de los materiales se combinan ambas funciones y se tiene la ley de tensiones. Finalmente se calcula la resultante como la integral de las tensiones por el ancho en el canto de la sección. Esquemáticamente se muestra en la figura siguiente.

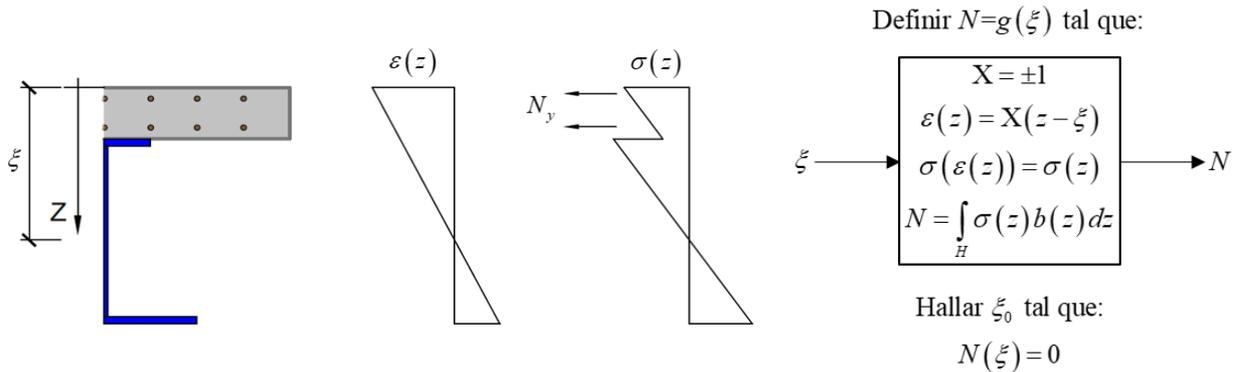


Fig. 3-20 Cálculo de fibra neutra en análisis elástico

Ahora mostramos que la resultante es proporcional a la curvatura de la sección, aunque haya distintos materiales con distinto módulo elástico. Para cada material la ley de comportamiento es de la forma:

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon \tag{3.4.8}$$

Combinando con la ley de deformaciones tenemos la ley de tensiones e integrando, la resultante. Vemos que el resultado es proporcional a la curvatura. Por ello el valor que se tome no influye (salvo el signo porque determina si el hormigón está traccionado o comprimido) si lo que se busca es anular la resultante.

$$\sigma(z) = \sigma(\varepsilon(z)) = E(z)X(z - \xi) \tag{3.4.9}$$

$$N = \int_H \sigma(z)b(z)dz = X \int_H E(z)(z - \xi)b(z)dz \tag{3.4.10}$$

$$N = 0 \Rightarrow \int_H E(z)(z - \xi)b(z)dz = 0 \tag{3.4.11}$$

### 3.4.2.2 Curvatura de plastificación primera

Teniendo establecida la posición de la fibra neutra, el comportamiento elástico de la sección es admisible mientras los materiales tengan unas tensiones por debajo de su límite de elasticidad. Buscamos el primer valor de la curvatura para el que algún material alcanza el límite de elasticidad. A este valor de curvatura se le llama curvatura de plastificación primera. Calculamos dicho valor para cada material y luego nos quedamos con el que se da primero, es decir, el mínimo. Para cada material se tiene:

$$\sigma(z_m) = E_m X_m (z_m - \xi) = f_d$$

$$X_m = \frac{f_d}{E_m (z_m - \xi)} = \frac{\varepsilon_m}{z_m - \xi}$$

$$X_{el} = \min \{X_m\} \quad (3.4.12)$$

donde

$E_m$  módulo elástico del material

$X_m$  curvatura para la que la fibra más solicitada de cada material alcanza el límite de elasticidad

$z_m$  posición de la fibra más solicitada de cada material

$f_d$  valor de cálculo del límite de elasticidad del material

$\varepsilon_m$  deformación para la que el material alcanza su límite de elasticidad

$X_{el}$  curvatura de plastificación primera

### 3.4.2.3 Momento elástico

Con la fibra neutra y la curvatura de plastificación primera queda determinada una ley de tensiones en la sección. El momento resultante de esta ley de tensiones se denomina momento flector de plastificación primera o, más simple, momento elástico. Es una propiedad fundamental porque es el máximo momento flector que puede soportar la sección antes de comenzar a plastificar. En el programa informático se ha calculado como la integral de las tensiones por su distancia al origen del eje. Como la resultante de tensiones es nula, el valor de referencia que se tome para medir la distancia no influye en el resultado.

$$\sigma(z) = E(z) X_{el} (z - \xi)$$

$$M_{el} = \int_H \sigma(z) z b(z) dz \quad (3.4.13)$$

donde

$M_{el}$  momento elástico de la sección

### 3.4.2.4 Módulo resistente elástico

Para secciones de un único tipo de material se tiene el mismo módulo de elasticidad en toda la sección. Entonces la posición de la fibra neutra es por (3.4.11):

$$\int_H E(z - \xi) b(z) dz = 0$$

$$\int_H (z - \xi) b(z) dz = 0 \quad (3.4.14)$$

Despejando  $\xi$  se obtiene:

$$\xi = \frac{\int_H z b(z) dz}{\int_H b(z) dz} = z_g \quad (3.4.15)$$

Y combinando (3.4.12) y (3.4.13) el momento elástico es:

$$\begin{aligned} M_{el} &= \int_H E X_{el} (z - z_g) z b(z) dz = \int_H E \frac{f_d}{E(z_m - z_g)} (z - z_g) z b(z) dz \\ &= f_d \int_H \frac{z - z_g}{z_m - z_g} z b(z) dz = f_d W_{el} \end{aligned}$$

$$W_{el} = \frac{M_{el}}{f_d} = \frac{1}{z_m - z_g} \int_H (z - z_g) z b(z) dz \quad (3.4.16)$$

Ahora simplificamos la integral de la siguiente forma aplicando para las inercias el teorema de Steiner:

$$\begin{aligned} \int_H (z - z_g) z b(z) dz &= \int_H z^2 b(z) dz - z_g \int_H z b(z) dz = \\ &= I_O - z_g A z_g = I_O - A z_g^2 = I_G \end{aligned}$$

Finalmente tenemos:

$$W_{el} = \frac{I_G}{z_m - z_g} \quad (3.4.17)$$

donde

$z_g$  centro de gravedad de la sección

$z_m$  posición de la fibra más solicitada de la sección

$I_O$  inercia de la sección respecto  $z = 0$

$I_G$  inercia de la sección respecto su centro de gravedad

$W_{el}$  módulo elástico de la sección

Es un valor que depende únicamente de la geometría de la sección. Este valor muy útil porque teniendo la geometría

y esta magnitud el cálculo del momento elástico es inmediato: solamente hay que multiplicarlo por el límite elástico del material. Notar que si la sección es reducida por tratarse de una clase 4 no será válido el empleo de esta propiedad porque al cambiar la resistencia del material cambia la reducción de la sección y se tendrían otras dimensiones distintas.

Esta propiedad se ha implementado exclusivamente para la sección tipo 1 (ver Fig. 3-15) porque es la única que es puramente metálica.

Numéricamente, en el programa informático, no es necesario calcular el momento elástico evaluando más integrales. Basta con dividir el momento elástico entre el límite elástico del material.

### 3.4.2.5 Rigidez a flexión

La ecuación diferencial de la deformada de una viga tipo Euler-Bernoulli es:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = X = \frac{M}{EI} \quad (3.4.18)$$

donde

$u$  desplazamiento vertical

$X$  curvatura de la sección

$M$  momento flector

$E$  módulo elástico del material

$I$  inercia de la sección respecto a su baricentro

El producto  $EI$  se denomina rigidez a flexión de la sección porque es la relación entre el momento y la curvatura. Secciones con alta rigidez a flexión tienen menos curvatura para el mismo momento flector.

$$EI = \frac{M}{X} \quad (3.4.19)$$

Para vigas mixtas se define la rigidez a flexión ( $EI$ ) como la relación entre el momento y la curvatura de la forma:

$$M = \int_H E(z) X(z - \xi) z b(z) dz$$

$$(EI) = \frac{M}{X} = \int_H E(z) (z - \xi) z b(z) dz = \frac{M_{el}}{X_{el}} \quad (3.4.20)$$

Las vigas mixtas en general tienen distinta rigidez a flexión según esta flexión sea positiva o negativa. Numéricamente, en el programa informático, no es necesario calcular la rigidez a flexión evaluando más integrales. Basta con dividir el momento elástico entre la curvatura elástica.

### 3.4.2.6 Momento efectivo $M_{2ct}$

A flexión positiva con hormigón comprimido se tiene una sección resistente llamada sección no fisurada. A flexión negativa, despreciando la colaboración del hormigón traccionado, se tiene una sección resistente llamada sección fisurada. El análisis de la sección no fisurada se denomina análisis no fisurado y el de la sección fisurada, análisis fisurado.

En el artículo 5.4.2.3 del Eurocódigo 4 se establece que, para la obtención en la viga de distribuciones de esfuerzos y deformaciones, la rigidez de la sección a flexión positiva (análisis no fisurado) es válida también a flexión negativa mientras la tensión en la fibra de hormigón más traccionada no supere el doble de la resistencia a tracción media. El momento a flexión negativa para el que se alcanza este valor límite es  $M_{2ct}$ . Si el momento negativo supera este valor se debe remodelizar la viga asignándole la rigidez a flexión negativa (análisis fisurado) en el tramo de flexión negativa.

El cálculo de este momento negativo en el programa se realiza de la siguiente manera. Se definen los siguientes valores de tensión y deformación:

$$\sigma_{2ct} = 2 f_{ctm}$$

$$\varepsilon_{2ct} = \frac{\sigma_{2ct}}{E_c}$$

Con la ley de deformaciones en la sección no fisurada se obtiene la curvatura para la que la deformación en la fibra de hormigón más traccionado es  $\varepsilon_{2ct}$ .

$$\varepsilon_{2ct} = X_{2ct} (z_0 - \xi) \Rightarrow X_{2ct} = \frac{\varepsilon_{2ct}}{z_0 - \xi} = -\frac{\varepsilon_{2ct}}{\xi} \quad (3.4.21)$$

Y el momento  $M_{2ct}$  es:

$$M = X(EI) \Rightarrow M_{2ct} = X_{2ct} (EI)^+ \quad (3.4.22)$$

donde

$f_{ctm}$  resistencia media a tracción del hormigón

$E_c$  módulo de elasticidad del hormigón

$z_0$  posición de la fibra de hormigón más traccionado a flexión negativa. Para losa superior es  $z_0 = 0$

$\xi$  fibra neutra en el análisis elástico a flexión positiva (análisis no fisurado)

$(EI)^+$  rigidez a flexión de la sección no fisurada

### 3.4.3 Esfuerzo cortante

#### 3.4.3.1 Resistencia plástica a cortante

El artículo 6.2.2.2 del Eurocódigo 4 se dice que la resistencia a cortante sea la resistencia de la sección metálica. Puede tenerse en cuenta una contribución del hormigón, pero en nuestro caso no se ha contemplado. La resistencia de la sección metálica se determina según el artículo 6.2.6 del Eurocódigo 3 Eurocódigo 3 parte 1-1. En dicho artículo se establece que la resistencia plástica a cortante de una sección metálica es:

$$V_{pl,Rd} = \frac{A_v f_{sk}}{\gamma_M \sqrt{3}} \quad (3.4.23)$$

donde

$V_{pl,Rd}$  resistencia plástica a cortante

$A_v$  área a cortante

$f_{sk}$  límite de elasticidad del acero

$\gamma_M$  coeficiente de seguridad para la resistencia del material

En secciones de perfiles laminados en I con cortante en la dirección del alma es válido tomar para el área a cortante el área del alma.

$$A_v = b t_w \quad (3.4.24)$$

donde

$b$  canto del alma

$t_w$  espesor del alma

#### 3.4.3.2 Resistencia a la abolladura por cortante

El artículo 6.2.2.3 del Eurocódigo 4 establece que la resistencia a la abolladura por cortante de las secciones mixtas debe ser la del alma a falta de un método más preciso y garantizando una conexión adecuada. La resistencia a la abolladura de almas no embebidas se determina de acuerdo al capítulo 5 del Eurocódigo 3 parte 1-5 de placas metálicas cargadas en su plano. El artículo 5.1 de este Eurocódigo indica que si se cumple la siguiente condición se deben colocar rigidizadores en los apoyos y comprobar abolladura.

$$\frac{b}{t_w} > \frac{72}{\eta} \varepsilon \quad (3.4.25)$$

con

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_{sk} [MPa]}}$$

donde

$\eta$  coeficiente definido en anexo nacional. Se ha tomado  $\eta = 1$

$f_{sk}$  límite de elasticidad característico del acero

La resistencia a la abolladura se calcula a partir de la resistencia plástica a cortante multiplicada por un coeficiente de reducción que depende de la esbeltez modificada del alma.

$$V_{b,Rd} = \chi(\bar{\lambda}_w)V_{pl,Rd} < V_{pl,Rd} \quad (3.4.26)$$

donde

$\chi$  coeficiente de reducción de abolladura por cortante no mayor a 1

$\bar{\lambda}_w$  esbeltez modificada del alma

$V_{pl,Rd}$  resistencia plástica a cortante

$V_{b,Rd}$  resistencia a la abolladura por cortante

Para secciones con rigidizadores únicamente en los apoyos la esbeltez modificada del alma se puede tomar igual a:

$$\bar{\lambda}_w = \frac{b}{86.4t_w\varepsilon} \quad (3.4.27)$$

La dependencia del coeficiente de reducción con la esbeltez modificada está dada por una función a trozos. Combinando (3.4.27) con (3.4.25) se tiene:

$$\bar{\lambda}_w = \frac{1}{86.4\varepsilon} \cdot \frac{b}{t_w} > \frac{1}{86.4\varepsilon} \cdot \frac{72}{\eta} \varepsilon = \frac{0.83}{\eta}$$

$$\bar{\lambda}_w > \frac{0.83}{\eta} \quad (3.4.28)$$

Para estos valores de esbeltez modificada y suponiendo rigidizadores extremos no rígidos (del lado de la seguridad) el coeficiente de reducción es:

$$\chi = \frac{0.83}{\bar{\lambda}_w} = \frac{0.83}{\frac{b}{86.4t_w\varepsilon}} = 0.83 \cdot 86.4 \cdot \varepsilon \frac{t_w}{b} = 72\varepsilon \frac{t_w}{b}$$

$$\chi = 72\varepsilon \frac{t_w}{b} < 1 \quad (3.4.29)$$

### 3.4.3.3 Resistencia plástica de cálculo a cortante

La resistencia plástica de cálculo a cortante es:

$$V_{Rd} = \min \{ V_{pl,Rd} ; V_{b,Rd} \} \quad (3.4.30)$$

donde

$V_{Rd}$  resistencia plástica de cálculo a cortante

$V_{pl,Rd}$  resistencia plástica a cortante

$V_{b,Rd}$  resistencia a la abolladura por cortante

### 3.4.3.4 Interacción flector-cortante

En el artículo 6.2.2.4 del Eurocódigo 4 se establece que si el esfuerzo cortante de cálculo supera la mitad de la resistencia a cortante se debe contemplar su influencia en el momento plástico resistente. Para secciones mixtas clase 1 ó 2 en el cálculo de la resistencia plástica a flexión se reduce la resistencia del acero en el alma de la forma:

$$f_{wd} = (1 - \rho) f_{sd} \quad (3.4.31)$$

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{V_{Ed}}{V_{Rd}} \leq \frac{1}{2} \\ \left( 2 \frac{V_{Ed}}{V_{Rd}} - 1 \right)^2 & \text{si } \frac{V_{Ed}}{V_{Rd}} > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.4.32)$$

donde

$f_{wd}$  resistencia de cálculo del acero en el alma de la sección metálica

$\rho$  coeficiente de interacción flector-cortante

$f_{sd}$  resistencia de cálculo del acero

$V_{Ed}$  cortante actuante

$V_{Rd}$  resistencia plástica de cálculo a cortante

La interacción flector-cortante para secciones clase 3 ó 4 no se ha implementado en el programa. En el apartado 6.2.2.4 del Eurocódigo 4 se dice que para las secciones clase 3 ó 4 se debería aplicar el artículo 7.1 del Eurocódigo 3 parte 1-5.

## 3.4.4 Resistencia plástica a flexión

La comprobación de Estados Límite Últimos (ELU) para secciones mixtas se recoge en el capítulo 6 del Eurocódigo 4. Debe comprobarse:

- Resistencia a flexión de las secciones críticas

- Resistencia a pandeo lateral
- Resistencia a la abolladura por cortante
- Resistencia a fuerzas transversales en las almas
- Resistencia al esfuerzo rasante

La resistencia última a flexión de las secciones clase 1 ó 2 se describe en este apartado. La de secciones clase 3 ó 4 en el apartado 3.4.5. No se ha implementado la resistencia a pandeo lateral ni la resistencia a fuerzas transversales en las almas. La resistencia a la abolladura por cortante se ha contemplado según se describe en el apartado 3.4.3.2. La resistencia al esfuerzo rasante se ha contemplado según se describe en el apartado 3.4.6.

El momento plástico resistente de secciones clase 1 ó 2 se calcula tomando un comportamiento rígido-plástico de los materiales y teniendo en cuenta la reducción de la resistencia del material en el alma si existe interacción con el esfuerzo cortante (ver apartado 3.4.3.4).

### 3.4.4.1 Fibra neutra

La posición de la fibra neutra se calcula definiendo una función que para cada valor de esta posición devuelve la resultante de tensiones. No le hace falta ningún otro argumento de entrada porque conociendo la posición se sabe qué parte está comprimida y cuál traccionada, a las que les corresponde un valor constante de tensión. Luego, se busca numéricamente para qué posición se anula la función. El cálculo de la fibra neutra se representa esquemáticamente en la figura siguiente. Este proceso de búsqueda de fibra neutra es igual al seguido para clasificar la sección, pero teniendo en cuenta la reducción de la resistencia del acero del alma si corresponde.

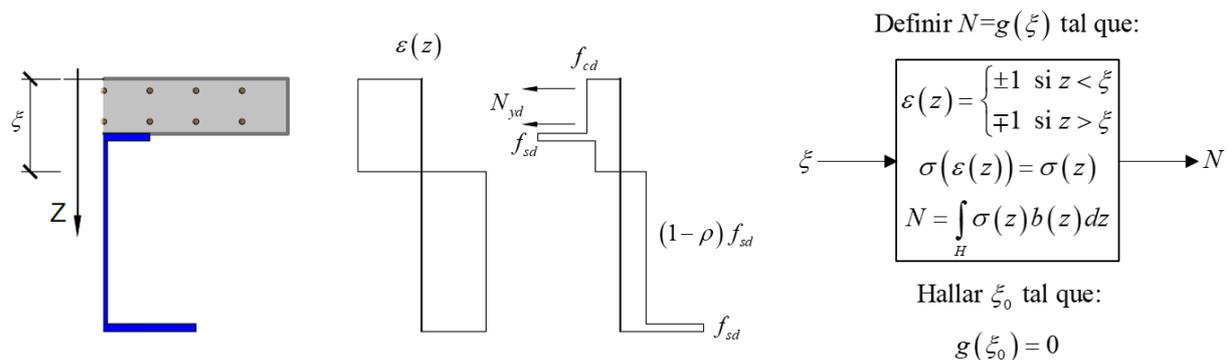


Fig. 3-21 Cálculo de fibra neutra para resistencia plástica a flexión

### 3.4.4.2 Momento plástico

Conociendo la fibra neutra queda determinada de forma inmediata la ley de tensiones al tener un comportamiento rígido-plástico de los materiales. Se integran las tensiones por la distancia a una fibra de referencia y se tiene el momento plástico resistente. No importa la fibra que tomemos de referencia para medir la distancia porque al ser flexión pura la resultante de tensiones es nula.

$$M_{pl,Rd} = \int_H \sigma(z) z b(z) dz \tag{3.4.33}$$

donde

$M_{pl,Rd}$  momento plástico resistente

### 3.4.4.3 Módulo resistente plástico

Para secciones con un único tipo de material en régimen rígido-plástico se tiene que la posición de la fibra neutra es:

$$N(\xi) = \int_H \sigma(z) b(z) dz = \int_{H_1(\xi)} f_d b(z) dz + \int_{H_2(\xi)} -f_d b(z) dz = f_d \left( \int_{H_1(\xi)} b(z) dz - \int_{H_2(\xi)} b(z) dz \right)$$

$$N(\xi_m) = 0 \Rightarrow \int_{H_1(\xi_m)} b(z) dz - \int_{H_2(\xi_m)} b(z) dz = A_1(\xi_m) - A_2(\xi_m) = 0$$

$$A_1(\xi_m) = A_2(\xi_m) \quad (3.4.34)$$

donde

$N$  resultante de tensiones en la sección

$\xi$  posición de la fibra neutra

$H_1$  parte traccionada del canto de la sección

$H_2$  parte comprimida del canto de la sección

$f_d$  resistencia del material

$A_1$  área de la parte de sección traccionada

$A_2$  área de la parte de sección comprimida

$\xi_m$  posición de fibra neutra que anula la resultante. Es el valor para el que queda igual área por encima que por debajo, esto es, divide el área en dos.

Y el momento plástico resistente es:

$$\begin{aligned} M_{pl,Rd} &= \int_H \sigma(z) z b(z) dz = \int_{H_1(\xi_m)} f_d z b(z) dz + \int_{H_2(\xi_m)} -f_d z b(z) dz = \\ &= f_d \left( \int_{H_1(\xi_m)} z b(z) dz + \int_{H_2(\xi_m)} z b(z) dz \right) = f_d (S_1 + S_2) = \\ &= f_d W_{pl} \end{aligned}$$

$$W_{pl} = \frac{M_{pl,Rd}}{f_d} S_1 + S_2 \quad (3.4.35)$$

donde

$W_{pl}$  módulo resistente plástico

$S_1$  momento estático del área traccionada de la sección

$S_2$  momento estático del área comprimida de la sección

Esta magnitud es muy práctica porque depende únicamente de la geometría de la sección y, una vez calculada, la obtención del momento plástico resistente es inmediata solamente multiplicando dicho valor por la resistencia de cálculo del material. Solamente es válido su uso para secciones de un único material. El único caso de este tipo de sección es la sección tipo 1 (ver Fig. 3-15) al ser puramente metálica.

### 3.4.5 Resistencia elastoplástica a flexión (secciones clase 3 ó 4)

En este caso, como no se ha tenido en cuenta la posible interacción entre flector y cortante, tanto la posición de la fibra neutra y la sección reducida (si clase 4) se toman directamente de lo obtenido al clasificar la sección (ver apartado 3.4.1). Se integra la ley de tensiones por la distancia a una fibra de referencia en la sección completa si es clase 3 (se aplica ecuación (3.4.33)) o en la sección reducida si es clase 4 y la ecuación queda:

$$M_{pl,Rd} = \int_{H_{eff}} \sigma(z) z b_{eff}(z) dz \quad (3.4.36)$$

### 3.4.6 Conexión parcial

Se contempla el cálculo de la resistencia de la conexión y la posible reducción de la resistencia a flexión de la sección en el caso de estar en condiciones de conexión parcial. Solamente implementado para secciones clase 1 ó 2. Asegurando la resistencia de la conexión, se tiene la condición de conexión parcial si la conexión dispuesta en la viga no es suficiente para resistir el esfuerzo rasante total necesario para que la sección desarrolle toda su resistencia a flexión. Se define primero la resistencia del perno individual y luego la distribución del esfuerzo rasante. Finalmente se establece la condición para asegurar la resistencia de la conexión y la relación entre resistencia del perno y distribución del rasante para la que se tiene o no condición de conexión parcial.

#### 3.4.6.1 Resistencia individual de un perno

El tipo de conexión implementado en el programa es el perno con cabeza embebido en hormigón. El valor de cálculo de la resistencia a cortante del perno individual lo encontramos en el artículo 6.6.3.1 del Eurocódigo 4.

$$P_{Rd,1} = \frac{0.8 f_u \pi \frac{d_v^2}{4}}{\gamma_v}$$

$$P_{Rd,2} = \frac{0.29 \alpha d_v^2 \sqrt{f_{ck} E_{cm}}}{\gamma_v}$$

$$P_{Rd} = \min \{ P_{Rd,1}; P_{Rd,2} \} \quad (3.4.37)$$

tomando para  $\alpha$  un valor de:

$$\alpha = \begin{cases} 0.2 \left( \frac{h_t}{d_v} + 1 \right) & \text{si } 3 \leq \frac{h_t}{d_v} \leq 4 \\ 1 & \text{si } 4 < \frac{h_t}{d_v} \end{cases} \quad (3.4.38)$$

donde

$P_{Rd,1}$  resistencia a cortante de la sección de circular de acero del vástago del perno

$P_{Rd,2}$  esfuerzo rasante de fractura del hormigón circundante al vástago

$f_u$  resistencia última del material del perno en el ensayo de tracción no mayor a 500 MPa

$d_v$  diámetro del vástago del perno

$h_t$  altura total del perno

$\gamma_v$  coeficiente parcial de seguridad para el material del perno

$f_{ck}$  resistencia característica del hormigón

$E_{cm}$  módulo de elasticidad medio del hormigón

### 3.4.6.2 Distribución del esfuerzo rasante

A partir de condiciones de equilibrio el esfuerzo rasante en la conexión hormigón-acero es la variación del esfuerzo axil en losa o perfil metálico a lo largo de la viga. Lo usual es calcularlo con el axil en la losa.

$$R = \frac{dN_c}{dx} \quad (3.4.39)$$

donde

$R$  esfuerzo rasante

$N_c$  esfuerzo axil en la losa de hormigón

En el apartado 6.1.4 del Eurocódigo 4 se establece que, a falta de un método más preciso, la relación entre el axil en la losa y el momento flector se puede obtener de la siguiente aproximación bilineal:

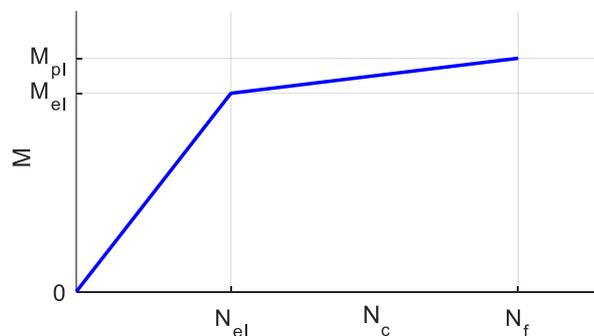


Fig. 3-22 Relación bilineal entre axil en losa y momento flector

donde

$M_{el}$  momento elástico de la sección

$N_{el}$  axil en la losa de hormigón para el momento elástico

$M_{pl}$  momento plástico de la sección

$N_f$  axil en la losa de hormigón para el momento plástico

Los momentos elástico y plástico ya se ha explicado cómo se han calculado. Con las respectivas leyes de tensiones, los correspondientes axiles en la losa se obtienen integrándolas en el canto de hormigón.

### Análisis elástico

Por la relación bilineal anterior, en régimen de comportamiento elástico de la sección se tiene:

$$N_c(x) = \frac{N_{el}}{M_{el}} M(x) \quad (3.4.40)$$

$$R(x) = \frac{dN_c}{dx} = \frac{N_{el}}{M_{el}} \frac{dM}{dx} = \frac{N_{el}}{M_{el}} V(x) \quad (3.4.41)$$

### Análisis no elástico

Por la relación bilineal anterior, en régimen de comportamiento no elástico de la sección se tiene:

$$N_c(x) = N_{el} + \frac{N_f - N_{el}}{M_{pl} - M_{el}} (M(x) - M_{el}) \quad (3.4.42)$$

$$R(x) = \frac{dN_c}{dx} = \frac{N_f - N_{el}}{M_{pl} - M_{el}} \frac{dM}{dx} = \frac{N_f - N_{el}}{M_{pl} - M_{el}} V(x) \quad (3.4.43)$$

donde

$M(x)$  ley de distribución de momentos flectores en la viga

$V(x)$  ley de distribución de esfuerzos cortantes en la viga

#### 3.4.6.3 Separación máxima de pernos

El apartado de artículos 6.6 del Eurocódigo 4 parte 1-1 está dedicado a la conexión en vigas mixtas. En el artículo 6.6.1 sobre bases de proyecto se establece el número mínimo de pernos a colocar para asegurar la resistencia de la conexión:

$$n_q \geq \frac{H_{Ed}}{P_{Rd}} \quad (3.4.44)$$

donde

$n_q$  número de pernos colocados en la longitud de cálculo

$H_{Ed}$  esfuerzo rasante total en la longitud de cálculo

$P_{Rd}$  resistencia individual de un perno

El esfuerzo rasante total es la integral del esfuerzo rasante en una longitud de cálculo que, por equilibrio, es igual a la diferencia de axiles en la losa entre las secciones extremas de esta longitud.

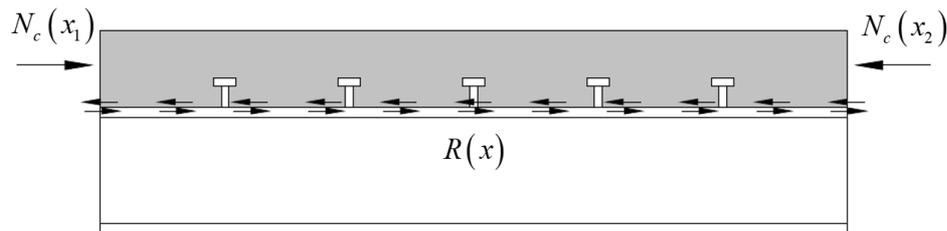


Fig. 3-23 Esfuerzo rasante en una longitud de cálculo

### Análisis elástico

En régimen de comportamiento elástico-lineal de la sección es válido asegurar la resistencia de la conexión si cada perno soporta el esfuerzo rasante total en su longitud efectiva. Se toma como esta longitud de cálculo la separación entre pernos.

La separación entre pernos es bastante menor a la longitud de la viga con lo que haciendo una aproximación de primer orden el esfuerzo rasante total se puede obtener como:

$$H_{Ed} = \int_{s_t} R(x) dx \approx R(x) s_t = \frac{N_{el}}{M_{el}} s_t V(x) \quad (3.4.45)$$

Se tiene que cumplir (3.4.44), donde el número de pernos colocados en una longitud de cálculo es el número de pernos colocados por sección:

$$n_q = n_f \geq \frac{\frac{N_{el}}{M_{el}} s_t V(x)}{P_{Rd}} \Rightarrow s_t \leq n_f P_{Rd} \frac{M_{el}}{N_{el}} \frac{1}{V(x)} = K \frac{1}{V(x)} \quad (3.4.46)$$

$$s_t \leq K \frac{1}{V(x)} \quad \text{con} \quad K = n_f P_{Rd} \frac{M_{el}}{N_{el}}$$

donde

$s_t$  separación entre pernos

$n_f$  número de pernos colocados por sección

$K$  valor que depende solamente de la sección y los pernos. Es el valor que se muestra en el archivo de texto

de resultados que genera el programa informático en el apartado de conexión parcial.

Se concluye que la separación máxima entre pernos en régimen elástico de la sección es inversamente proporcional a la ley de cortantes. Es por ello que en los apoyos sea donde los pernos se tengan que colocar más juntos al ser la separación máxima menor por tener cortantes más elevados

### Análisis plástico

Cuando la sección entra en comportamiento plástico se tienen unas deformaciones en la zona de contacto entre hormigón y acero lo suficientemente elevadas como para permitir una redistribución uniforme del rasante total entre los pernos. Así, en el artículo 6.6.2.2 del Eurocódigo 4 se dice que, a falta de un método más preciso, se tome como longitudes de cálculo del rasante las longitudes críticas de la viga y que se calcule el rasante total como diferencia entre los axiles de la losa en las secciones extremas de estas longitudes. Para garantizar la resistencia de la conexión este esfuerzo de cálculo debe ser menor a la resistencia en conjunto de todos los pernos colocados dentro de la longitud inelástica.

En el artículo 6.1.1 del Eurocódigo 4 se define la longitud crítica como la distancia entre secciones críticas, y se establece que las secciones críticas son:

- Secciones de máximo momento flector
- Apoyos
- Secciones sometidas a cargas concentradas
- Cambios bruscos en la geometría de la sección

En el programa no se han implementado ni secciones sometidas a cargas concentradas ni cambios bruscos en la geometría de la sección, con lo que las únicas secciones críticas que se tienen son las de máximo momento flector y los apoyos. Dentro del vano, entre apoyos, solamente se ha contemplado un valor extremo del momento flector con lo que se van a tener dos longitudes críticas en la viga: las longitudes entre el punto de máximo flector y los apoyos. Sin embargo, en el artículo 6.6.2.2 del Eurocódigo 4 parte 1-2 se indica un método más preciso y algo menos conservador en el que se establece que se puede reducir la longitud de cálculo al tramo de la longitud crítica donde el flector es mayor al resistente elástico. Es el método que se ha implementado en el programa.

En este artículo se establece que de longitud de cálculo de rasante plástico no se tome la longitud crítica completa, sino solamente el tramo en régimen inelástico (flector mayor al elástico). En dicho tramo se integra el esfuerzo rasante, obteniendo el total, y se deben colocar tantos pernos como haga falta para resistirlo asumiendo que la sollicitación se reparte uniformemente entre ellos.

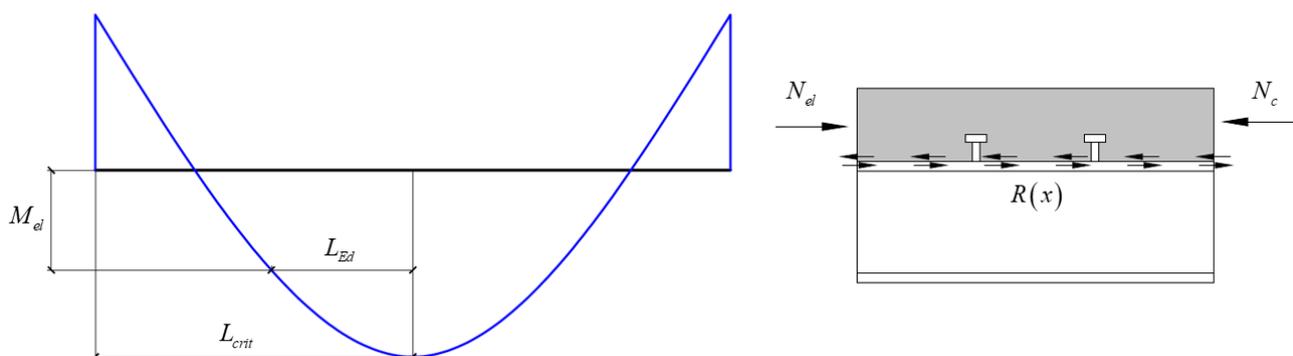


Fig. 3-24 Longitud de cálculo para esfuerzo rasante plástico

En la longitud de cálculo el esfuerzo rasante total tomando la distribución según (3.4.43) es:

$$\begin{aligned}
 H_{Ed} &= \int_{L_{Ed}} R(x) dx = \int_{L_{Ed}} \frac{N_f - N_{el}}{M_{pl} - M_{el}} V(x) dx = \frac{N_f - N_{el}}{M_{pl} - M_{el}} \int_{L_{Ed}} V(x) dx = \\
 &= \frac{N_f - N_{el}}{M_{pl} - M_{el}} (M(x_2) - M(x_1)) = \frac{N_f - N_{el}}{M_{pl} - M_{el}} (M_{Ed} - M_{el}) \\
 H_{Ed} &= \frac{N_f - N_{el}}{M_{pl} - M_{el}} (M_{Ed} - M_{el}) = N_c(M_{Ed}) - N_{el} \tag{3.4.47}
 \end{aligned}$$

Con lo que el número mínimo de pernos a colocar en la longitud de cálculo inelástica de la viga es:

$$\begin{aligned}
 n_q &\geq \frac{H_{Ed}}{P_{Rd}} = \frac{N_c(M_{Ed}) - N_{el}}{P_{Rd}} \\
 n_q &\geq \frac{N_c(M_{Ed}) - N_{el}}{P_{Rd}} = n_{q,\min} \tag{3.4.48}
 \end{aligned}$$

donde

- $n_q$  número de pernos colocados en la longitud inelástica de cálculo
- $n_{q,\min}$  número mínimo de pernos en la longitud de cálculo inelástica
- $N_c(M_{Ed})$  axil en losa de hormigón en función del momento máximo en el vano según expresión (3.4.42)
- $N_{el}$  axil en losa de hormigón cuando actúa el momento resistente elástico
- $P_{Rd}$  carga última de resistencia a cortante del perno individual dada por (3.4.37)

A partir del número mínimo de pernos obtenemos la separación máxima entre ellos:

$$\begin{aligned}
 s_t \left( \frac{n_q}{n_f} - 1 \right) &= L_{Ed} \Rightarrow n_q = n_f \left( \frac{L_{Ed}}{s_t} + 1 \right) \\
 n_q \geq n_{q,\min} &\Rightarrow n_f \left( \frac{L_{Ed}}{s_t} + 1 \right) \geq n_{q,\min} \Rightarrow s_t \leq \frac{L_{Ed}}{\frac{n_{q,\min}}{n_f} - 1} \approx n_f \frac{L_{Ed}}{n_{q,\min}} \\
 s_t &\leq n_f \frac{L_{Ed}}{n_{q,\min}} = s_{t,\max} \tag{3.4.49}
 \end{aligned}$$

### 3.4.6.4 Grado de conexión

Como se ha visto en los apartados anteriores el axil máximo que se puede dar en las secciones de una longitud inelástica está limitado por el esfuerzo rasante total que puede soportar la conexión en esa longitud.

$$N_{c,\max} = N_{el} + n_q P_{Rd} \quad (3.4.50)$$

donde

$N_{c,\max}$  axil máximo en la losa de hormigón según resistencia de la conexión

$N_{el}$  axil en la losa de hormigón para el momento elástico de la sección

$n_q$  número de pernos colocados en la longitud inelástica

$P_{Rd}$  carga última a cortante del perno individual

El grado de conexión de una sección mixta es la relación entre el axil máximo en la losa que se puede desarrollar por resistencia de la conexión y el axil máximo que se puede desarrollar por resistencia plástica de la sección a flexión. Si el grado de conexión es menor que la unidad se tendrán condiciones de conexión parcial.

$$\eta = \frac{N_{c,\max}}{N_f} \leq 1 \quad (3.4.51)$$

donde

$\eta$  grado de conexión

$N_f$  axil en losa de hormigón para el momento plástico

### 3.4.6.5 Momento último resistente

Si el esfuerzo axil máximo que se puede desarrollar en la losa según la resistencia de la conexión es menor que el necesario para que se pueda desarrollar toda la resistencia plástica de la sección a flexión (grado de conexión menor a la unidad) entonces el momento resistente último es menor al momento resistente plástico. Esto se debe a que la colaboración de la losa de hormigón es limitada.

En el caso extremo de que no se pudiera desarrollar esfuerzo axil en la losa, la resistencia a flexión sería la del perfil metálico, siendo el momento último el momento plástico de la sección metálica exclusivamente. En el artículo 6.2.1.3 del Eurocódigo 4 se propone que a falta de un método más preciso el momento plástico resistente de secciones con conexión parcial (grado de conexión menor a la unidad) se determine mediante:

$$M_{Rd} = M_{pl,a,Rd} + (M_{pl,Rd} - M_{pl,a,Rd})\eta \quad (3.4.52)$$

donde

$\eta$  grado de conexión. Ver apartado anterior

$M_{Rd}$  momento plástico resistente de la sección con conexión parcial

$M_{pl,a,Rd}$  momento plástico de la sección metálica aislada

$M_{pl}$  momento plástico de la sección completa

Se deduce que el momento resistente de la sección en condiciones de conexión parcial depende en última instancia de la ley de flectores al depender de la longitud inelástica de la viga (tramo donde el flector sea mayor al resistente elástico). Si la ley de flectores variara cambia la longitud inelástica, cambia el número de pernos en ella, cambia el máximo axil en losa y cambia el momento resistente. Se da por válido tomar la longitud inelástica de la envolvente de flectores para combinaciones de carga en ELU y comprobar que para esa ley el momento resistente, aunque sea en condiciones de conexión parcial, es mayor a la sollicitación.

Ahora vamos a desarrollar las consecuencias de esta dependencia entre la ley de flectores y el momento resistente que, pese a no haberse implementado en el programa, resulta bastante interesante.

Hasta ahora se ha establecido que para una distribución de flectores dada se tiene una longitud inelástica y un número de pernos en ella que determinan un axil máximo en la losa y una aproximación del momento resistente de la sección mediante (3.4.52). En ese caso, si la carga sobre la viga aumentara entonces aumenta la longitud inelástica, aumenta el número de pernos en esta longitud, aumenta el axil máximo en la losa y aumenta el momento resistente de la sección. Así que pudiera ser que existiera una distribución de flectores para la que la sección puede desarrollar más resistencia a flexión que la calculada.

El inconveniente de toda esta metodología viene en el caso contrario: pudiera ocurrir que existiera una ley de flectores para la que la sección no aguante siendo de hecho de menor sollicitación porque al tener menor longitud inelástica se tendría menor axil máximo que se puede desarrollar en la losa debido a que se tiene menor el número de pernos presentes para soportar el rasante.

El enunciado del problema que tratamos de resolver sería: determinar si existe una ley de flectores de menor sollicitación a la ley de flectores de cálculo para la que la sección no resistiría en condiciones de conexión parcial.

Supongamos que tenemos una combinación de cargas que determina una ley de flectores de cálculo y que la relación entre ellos es lineal: si la combinación de cargas se multiplica por un número la ley de flectores también lo hace. Supongamos también que la ley de flectores es parabólica. Entonces se tiene:

$$P \rightarrow M(x) = a(x-b)^2 + c \rightarrow M_{Ed}^*$$

$$\lambda P \rightarrow \lambda M(x) = \lambda(a(x-b)^2 + c) \rightarrow \lambda M_{Ed}^* \quad (3.4.53)$$

La longitud inelástica es:

$$L_{Ed} = x_v - x_{el} = b - x_{el} \quad (3.4.54)$$

donde

$L_{Ed}$  longitud inelástica ( $\lambda M(x) > M_{el}$ )

$M_{el}$  momento elástico de la sección

$x_v$  posición del máximo momento flector. Es el vértice de la parábola, por lo que  $x_v = b$

$x_{el}$  posición donde se alcanza el momento elástico  $\lambda M(x_{el}) = M_{el}$

La posición donde se alcanza el momento elástico es:

$$\lambda M(x_{el}) = \lambda(a(x_{el} - b)^2 + c) = M_{el}$$

$$x_{el} = b - \sqrt{\frac{\frac{M_{el} - c}{\lambda}}{a}} \quad (3.4.55)$$

Introduciendo este valor en (3.4.54) se tiene que la longitud inelástica es:

$$L_{Ed}(\lambda) = \sqrt{\frac{\frac{M_{el} - c}{\lambda}}{a}} \quad (3.4.56)$$

En esta longitud el número de pernos es:

$$n_q(\lambda) = n_f \frac{L_{Ed}(\lambda)}{s_t} \quad (3.4.57)$$

donde

$n_q$  número de pernos en la longitud inelástica

$n_f$  número de pernos colocados por sección

$s_t$  separación entre pernos

El esfuerzo rasante máximo total que se puede desarrollar es:

$$H_{\max}(\lambda) = n_q(\lambda) P_{Rd} \quad (3.4.58)$$

donde

$H_{\max}$  esfuerzo rasante máximo total que se puede desarrollar

$P_{Rd}$  carga última individual de un perno

Y el axil máximo que se puede dar en la losa de hormigón en la sección de momento máximo es, por equilibrio:

$$N_{c,\max}(\lambda) = N_{c,el} + H_{\max}(\lambda) \quad (3.4.59)$$

donde

$N_{c,\max}$  axil máximo que se puede dar en la losa de hormigón en la sección de momento máximo

$N_{c,el}$  axil en la losa de hormigón para el momento elástico de la sección

El grado de conexión, según (3.4.51), es:

$$\eta(\lambda) = \frac{N_{c,max}(\lambda)}{N_f} \quad (3.4.60)$$

Y el momento flector resistente de la sección, según (3.4.52), es:

$$M_{Rd}(\lambda) = M_{pl,a,Rd} + (M_{pl,Rd} - M_{pl,a,Rd})\eta(\lambda) \quad (3.4.61)$$

El momento flector actuante es:

$$M_{Ed}(\lambda) = \lambda M_{Ed}^* \quad (3.4.62)$$

Como vemos, en condiciones de conexión parcial el momento flector resistente depende de la ley de flectores. A priori, aunque para el caso de ley de flectores de cálculo ( $\lambda = 1$ ) se tenga  $M_{Rd}(1) > M_{Ed}(1)$  no se puede garantizar que eso sea así para valores menores ( $\lambda < 1$ ).

El momento resistente de la sección según (3.4.61) es un valor acotado tanto por encima como por debajo. Sustituyendo términos queda:

$$M_{Rd}(\lambda) = M_a + (M_{pl} - M_a) \frac{N_{el}}{N_f} + (M_{pl} - M_a) \frac{n_f}{s_t} \frac{P_{Rd}}{N_f} L_{Ed}(\lambda) \quad (3.4.63)$$

El límite superior lo marca el momento plástico de la sección. El valor mínimo se tiene cuando no puede desarrollarse rasante en la longitud inelástica:

$$M_{Rd,min} = M_a + (M_{pl} - M_a) \frac{N_{el}}{N_f} \quad (3.4.64)$$

Y se tiene:

$$M_{Rd}(\lambda) = M_{Rd,min} + (M_{pl} - M_a) \frac{n_f}{s_t} \frac{P_{Rd}}{N_f} L_{Ed}(\lambda)$$

$$M_{Rd,min} \leq M_{Rd}(\lambda) \leq M_{pl}$$

Por otra parte, como estamos haciendo un estudio inelástico de la sección, el valor de proporcionalidad de la carga solamente puede disminuir a valores en los que se tenga longitud inelástica, es decir, el momento máximo actuante no puede ser menor al elástico de la sección. Entonces debemos buscar los valores  $\lambda$  en el intervalo  $\lambda_{min} \leq \lambda \leq 1$  para los que  $M_{Rd}(\lambda) < M_{Ed}(\lambda)$  con  $\lambda_{min}$  dado por:

$$\lambda_{\min} = \frac{M_{el}}{M_{Ed}^*} \quad (3.4.65)$$

Definimos la siguiente función:

$$g(\lambda) = M_{Rd}(\lambda) - M_{Ed}(\lambda) \quad (3.4.66)$$

Sabemos que, para la combinación de cargas de cálculo se ha comprobado que el momento resistente es mayor al actuante:

$$g(1) = M_{Rd}(1) - M_{Ed}(1) > 0 \quad (3.4.67)$$

Además, la función en el intervalo es cóncava. Derivando se obtiene:

$$\frac{d^2g}{d\lambda^2} = \frac{3}{4} \left( \frac{M_{el}}{a} \lambda \right)^2 \left( \frac{M_{el}}{a} \lambda^3 - \frac{c}{a} \lambda^4 \right)^{-\frac{3}{2}} \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{\lambda}{\lambda_{\min}} \right) < 0 \quad (3.4.68)$$

ya que

$$\frac{3}{4} \left( \frac{M_{el}}{a} \lambda \right)^2 \left( \frac{M_{el}}{a} \lambda^3 - \frac{c}{a} \lambda^4 \right)^{-\frac{3}{2}} > 0$$

$$1 - \frac{4}{3} \frac{\lambda}{\lambda_{\min}} < 0$$

Se deduce por el Teorema de Bolzano y por ser la función continua y cóncava que, siendo la función positiva en un extremo del intervalo, para que existan valores donde la función sea negativa (flector actuante mayor al resistente con lo que la sección no aguantaría) es necesario y suficiente que la función en el otro extremo del intervalo sea negativa. Esto es:

$$g(\lambda_{\min}) < 0 \quad (3.4.69)$$

Si esto ocurre existe  $\lambda$  tal que  $\lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_c \leq 1$  con  $g(\lambda_c) = 0$  donde  $g(\lambda) < 0$ .

Para el caso límite del valor mínimo la longitud inelástica sería cero: por un lado el momento resistente de la sección sería el mínimo dado por (3.4.64) y el momento actuante sería el elástico de la sección:

$$g(\lambda_{\min}) = M_{Rd,\min} - M_{el} \quad (3.4.70)$$

Finalmente concluimos que si  $M_{Rd,\min} > M_{el}$  siempre el momento resistente será mayor al actuante y podemos garantizar la resistencia de la sección. Si no ocurre se deberá hacer un estudio detallado del caso.

### 3.4.6.6 Reclasificación de la sección

Para determinar que una sección es clase 1 ó 2 al comienzo del cálculo de una sección mixta se asume conexión total, es decir, se asume que en la losa de hormigón se puede desarrollar todo el axil que corresponda hasta alcanzar la capacidad resistente plástica de la sección.

Como hemos visto, en el caso de tener una conexión parcial el axil en la losa está limitado. Al reducirse el paquete de compresiones en la losa, por equilibrio en la sección, debe bajar la fibra neutra para que la resultante de tensiones siga siendo nula. Al bajar la fibra neutra puede tenerse una mayor parte de alma comprimida, así que hay que volver a clasificar la sección para esa nueva posición de fibra neutra y comprobar que no pasa a ser una clase de sección más desfavorable.

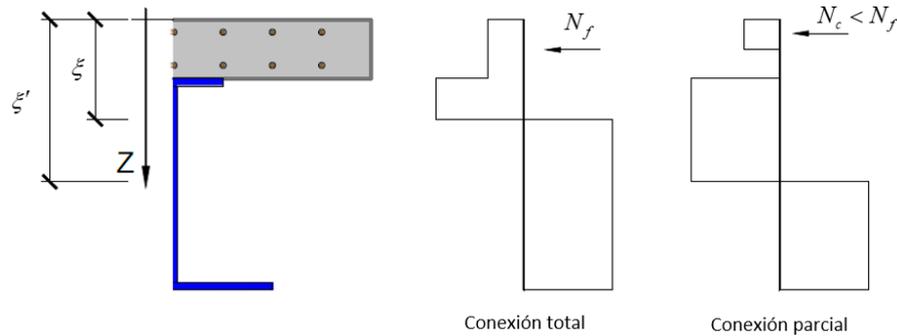


Fig. 3-25 Cambio en la posición de la fibra neutra por conexión parcial

## 3.5 Análisis del esfuerzo rasante

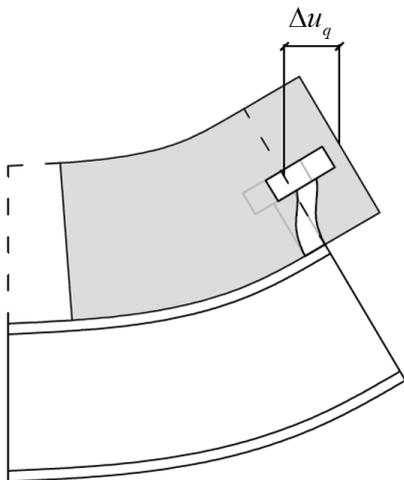


Fig. 3-26 Efecto de la deformabilidad de la conexión

En el Eurocódigo no se contempla el efecto de la deformabilidad de la conexión en el valor del esfuerzo rasante y en el comportamiento y respuesta de la sección mixta. Esta deformabilidad hace que la sección sea más flexible y lo primero que se intuye es que esta deformabilidad hará que se tengan mayores valores de flecha para comprobación de ELS. Además, la ley de deformaciones y tensiones en hormigón y acero van a variar respecto a lo obtenido asumiendo conexión infinitamente rígida, así que se puede tener que la sección plastifique aunque la comprobación asumiendo interacción completa indique que no. También varía la distribución de axiles en la losa de hormigón y, en consecuencia, la ley de rasantes.

El propósito de este módulo del programa, más que comprobar respecto a una normativa, es calcular estos resultados entre otros teniendo en cuenta esta deformabilidad y ofrecer un conocimiento más profundo del comportamiento de las secciones mixtas. La metodología de cálculo seguida es la que se encuentra en el manual de Construcción Mixta de Julio Martínez Calzón.

### 3.5.1 Rigidez de la conexión uniformemente distribuida

La rigidez de la conexión sigue una distribución discreta al estar presente solamente en cada sección con pernos. Al ser la separación entre los pernos una cantidad bastante menor a la longitud total de la viga, la rigidez de éstos se puede repartir uniformemente en la longitud para tener una rigidez continua y facilitar los cálculos.

En el apartado 3.3.1 se modelizó la rigidez de un perno con un comportamiento elástico-lineal y se obtuvo la relación entre el desplazamiento de la cabeza y el rasante total soportado conforme a la ecuación (3.3.33). Esto corresponde a un modelo elástico-lineal de la conexión en el que la rigidez es constante para cualquier valor de. La realidad no es así porque conforme aumenta el desplazamiento la rigidez del perno disminuye por fenómenos de plastificación del material. Esto no se ha tenido en cuenta para obtener los resultados. El cálculo del rasante con conexión elastoplástica se deja para futuras mejoras del programa.

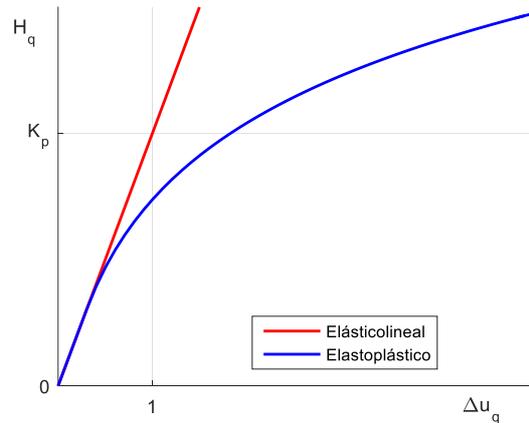


Fig. 3-27 Relación carga-desplazamiento de un perno

Tomando que el rasante total soportado por un perno es el resultante en una distancia igual a la separación longitudinal entre ellos y dividido por el número de pernos en una sección se tiene:

$$H_q = \frac{1}{n_f} \int_{s_t} R(x) dx \approx \frac{R(x) s_t}{n_f} = K_p \Delta u_q(x) \Rightarrow R(x) = \frac{n_f K_p}{s_t} \Delta u_q(x) = K_q \Delta u_q(x)$$

$$R(x) = K_q \Delta u_q(x) \quad \text{con} \quad K_q = \frac{n_f K_p}{s_t} \quad (3.5.1)$$

donde

$H_q$       esfuerzo rasante total soportado por un perno individual

$n_f$       número de pernos por sección

$s_t$       separación longitudinal entre pernos

$K_p$       rigidez individual de un perno

$\Delta u_q(x)$       desplazamiento relativo entre hormigón y acero de una sección. En una sección con pernos se puede tomar aproximadamente igual al desplazamiento de la cabeza debido a su deformación

$K_q$       rigidez equivalente uniformemente distribuida en toda la viga

### 3.5.2 Ecuaciones básicas

La ecuación fundamental del rasante es por equilibrio:

$$R(x) = \frac{d}{dx} N_c(x) \quad (3.5.2)$$

donde

$R(x)$  distribución en la viga del esfuerzo rasante

$N_c(x)$  distribución en la viga del esfuerzo axial en la losa de hormigón

En cuanto a las leyes de deformación en la sección seguiremos admitiendo que la sección permanece plana, con lo que la ley de deformaciones es lineal. Tanto la losa de hormigón como la sección metálica tienen la misma curvatura porque tienen la misma deformada, pero el desplazamiento relativo entre ellas hace que exista un decalaje entre sus leyes de deformación. Recordamos que el eje  $z$  se ha tomado empezando en la superficie de hormigón y sentido positivo hacia abajo.

$$\varepsilon_c(z) = \varepsilon_{c0} + Xz \quad (3.5.3)$$

$$\varepsilon_s(z) = \varepsilon_{s0} + Xz \quad (3.5.4)$$

donde

$\varepsilon_c(z)$  ley de deformaciones en la losa de hormigón

$\varepsilon_s(z)$  ley de deformaciones en la sección metálica

$\varepsilon_{c0}$  Una constante. A priori, valor desconocido

$\varepsilon_{s0}$  Una constante. A priori, valor desconocido

$X$  curvatura de la sección

Derivando la expresión (3.5.1) y combinando con (3.5.2) se tiene:

$$\frac{d}{dx} R(x) = K_q \frac{d}{dx} \Delta u_q(x) = K_q \Delta \varepsilon_q(x)$$

$$\frac{d}{dx} R(x) = K_q \Delta \varepsilon_q(x) \quad (3.5.5)$$

La variación de deformación que aparece es la diferencia en la cabeza del perno de la deformación que se tiene en la losa de hormigón y la que le correspondería si se hubiera mantenido dentro de la deformada del perfil metálico (valor de interacción completa). En realidad, no importa en qué punto calculemos esta diferencia de deformación porque losa y perfil metálico tienen misma curvatura. Aplicando (3.5.3) y (3.5.4) se tiene:

$$\Delta \varepsilon_q = \varepsilon_c(z_q) - \varepsilon_s(z_q) = \varepsilon_{c0} - \varepsilon_{s0} \quad (3.5.6)$$

donde

$z_q$  posición de la cabeza de los pernos

Quedando finalmente:

$$\frac{d}{dx} R(x) = K_q (\varepsilon_{c0} - \varepsilon_{s0}) \quad (3.5.7)$$

Conocida la ley de deformaciones en la sección y con la ecuación de comportamiento del material se tiene la ley de tensiones en la sección. Al estar en flexión pura la resultante de tensiones tiene que ser nula por equilibrio. Entonces la resultante en la parte metálica debe ser el axil en la losa cambiado de signo:

$$N_c = \int_{H_c} \sigma(z) b(z) dz \quad (3.5.8)$$

$$N_s = \int_{H_s} \sigma(z) b(z) dz = -N_c \quad (3.5.9)$$

Además, el momento resultante en la sección debe ser el momento aplicado. Simplificaremos el cálculo asumiendo que la ley de flectores no varía al tener en cuenta la deformación de la conexión:

$$M = \int_H \sigma(z) z b(z) dz \quad (3.5.10)$$

Con lo anterior se tienen cinco ecuaciones con cinco incógnitas  $\{R, N_c, \varepsilon_{c0}, \varepsilon_{s0}, X\}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{d}{dx} N_c = R \\ (2) \quad \frac{d}{dx} R = K_q (\varepsilon_{c0} - \varepsilon_{s0}) \\ (3) \quad \int_{H_c} \sigma(\varepsilon_{c0}, X, z) b(z) dz = N_c \\ (4) \quad \int_{H_s} \sigma(\varepsilon_{s0}, X, z) b(z) dz = -N_c \\ (5) \quad \int_H \sigma(\varepsilon_{c0}, \varepsilon_{s0}, X, z) z b(z) dz = M \end{array} \right. \quad (3.5.11)$$

Las ecuaciones (3), (4) y (5) permiten obtener  $\varepsilon_{c0}$  y  $\varepsilon_{s0}$  en función de  $N_c$  . Sustituyendo esta dependencia en la ecuación (2) se tiene:

$$\frac{d}{dx} R = K_q (\varepsilon_{c0}(N_c) - \varepsilon_{s0}(N_c)) = g(N_c)$$

$$\frac{d}{dx} R = g(N_c) \quad (3.5.12)$$

Así, las ecuaciones (1) y (2) forman un sistema de dos ecuaciones diferenciales que, a expensas de las condiciones de contorno, determinan en la longitud de la viga el rasante y el axil de la losa de hormigón:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} N_c = R \\ \frac{d}{dx} R = g(N_c) \end{cases} \quad (3.5.13)$$

Y si combinamos estas dos ecuaciones eliminando el rasante se tiene una ecuación diferencial de segundo orden para el axil en la losa de hormigón:

$$\frac{d^2}{dx^2} N_c = g(N_c) \quad (3.5.14)$$

### 3.5.3 Condiciones de contorno

Al contener el problema dos ecuaciones diferenciales de primer orden (o una de segundo orden) se deben disponer dos condiciones de contorno para tener una solución concreta. En el caso de una viga de un vano las dos condiciones que buscamos serían axil de la losa nulo en ambos extremos por condición de borde libre.

Si se introduce una ley de flectores donde los momentos en los extremos no son nulos, se ha estimado oportuno utilizar la siguiente relación bilineal para determinar qué axiles en la losa le corresponden:

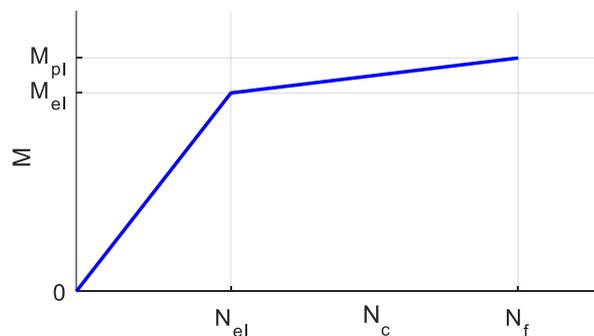


Fig. 3-28 Relación bilineal entre axil en losa y momento flector para establecer las condiciones de contorno

donde

$M_{el}$  momento elástico de la sección

$N_{el}$  axil en la losa de hormigón para el momento elástico

$M_{pl}$  momento plástico de la sección

$N_f$  axil en la losa de hormigón para el momento plástico

Análíticamente, la relación bilineal anterior se expresaría:

$$N_c = f(M) = \begin{cases} \frac{N_{el}}{M_{el}} M & \text{si } M \leq M_{el} \\ N_{el} + \frac{N_f - N_{el}}{M_{pl} - M_{el}} (M - M_{el}) & \text{si } M_{el} < M \leq M_{pl} \end{cases} \quad (3.5.15)$$

Y las condiciones de contorno serían:

$$\begin{cases} N_c = f(M(0)) & \text{en } x = 0 \\ N_c = f(M(L)) & \text{en } x = L \end{cases} \quad (3.5.16)$$

donde

$L$  longitud de la viga

### 3.5.4 Análisis Elástico

Establecidas las ecuaciones básicas y las condiciones de contorno pasamos ahora a obtener la solución tomando un comportamiento elástico-lineal de los materiales en la sección. Aquí aparece la problemática de que las integrales que hay que resolver para obtener la ley de deformaciones en el hormigón dependen de la zona comprimida (porque el hormigón a tracción se desprecia), que depende a su vez de la ley de deformaciones. Para simplificar se toma a flexión positiva la sección no fisurada obtenida del cálculo elástico asumiendo interacción completa y para la flexión negativa, la sección fisurada.

Con estas hipótesis se puede conseguir poner  $\varepsilon_{c0}$  y  $\varepsilon_{s0}$  en función de  $N_c$  analíticamente. En la losa de hormigón, armadura y sección metálica se tienen los siguientes axiles y flectores que luego se combinan para obtener las ecuaciones básicas establecidas:

#### Axil en hormigón

$$N_c^* = \int_{H_c} \sigma(\varepsilon_{c0}, X, z) b(z) dz = \int_{H_c} E_c (\varepsilon_{c0} + Xz) b(z) dz = E_c A_c \varepsilon_{c0} + E_c A_c z_{cg} X \quad (3.5.17)$$

donde

$N_c^*$  axil en el hormigón de la losa

$E_c$  módulo de elasticidad del hormigón

$A_c$  área de hormigón (sección no fisurada para flexión positiva y fisurada para negativa)

$z_{cg}$  posición del baricentro de  $A_c$

#### Axil en armadura

$$N_y = \sum_i E_y A_i (\varepsilon_{c0} + Xz_i) = E_y A_y \varepsilon_{c0} + E_y A_y z_{yg} X \quad (3.5.18)$$

donde

$N_y$  axil debido a la armadura en la losa de hormigón

$E_y$  módulo de elasticidad del acero de armar

$A_y$  área total de armadura

$z_{yg}$  posición del baricentro de la armadura

### Axil en losa de hormigón

La ecuación (3) del sistema (3.5.11) quedaría:

$$N_c = N_c^* + N_y = (E_c A_c + E_y A_y) \varepsilon_{c0} + (E_c A_c z_{cg} + E_y A_y z_{yg}) X$$

$$(E_c A_c + E_y A_y) \varepsilon_{c0} + (E_c A_c z_{cg} + E_y A_y z_{yg}) X = N_c \quad (3.5.19)$$

### Axil en sección metálica

$$N_s = \int_{H_s} \sigma(\varepsilon_{s0}, X, z) b(z) dz = \int_{H_s} E_s (\varepsilon_{s0} + Xz) b(z) dz = E_s A_s \varepsilon_{s0} + E_s A_s z_{sg} X \quad (3.5.20)$$

donde

$N_s$  axil en sección metálica

$E_s$  módulo de elasticidad del acero de la sección metálica

$A_s$  área de la sección metálica

$z_{sg}$  posición del baricentro la sección metálica

Con lo que la ecuación (4) de (3.5.11) quedaría:

$$N_s = -N_c$$

$$E_s A_s \varepsilon_{s0} + E_s A_s z_{sg} X = -N_c \quad (3.5.21)$$

### Momento en hormigón

$$M_c = \int_{H_c} \sigma(\varepsilon_{c0}, X, z) z b(z) dz = \int_{H_c} E_c (\varepsilon_{c0} + Xz) z b(z) dz = E_c A_c z_{cg} \varepsilon_{c0} + E_c I_{c0} X \quad (3.5.22)$$

donde

$M_c$  momento en el hormigón de la losa

$I_{c0}$  inercia de la sección de hormigón respecto el origen del eje (superficie de la losa de hormigón)

### Momento en armadura

$$M_y = \sum_i E_y A_i (\varepsilon_{c0} + X z_i) z_i = E_y A_y z_{yg} \varepsilon_{c0} + E_y I_{y0} X \quad (3.5.23)$$

donde

$M_y$  momento en armadura

$I_{y0}$  inercia de la armadura respecto el origen del eje (superficie de la losa de hormigón)

### Momento en sección metálica

$$M_s = \int_{H_s} \sigma(\varepsilon_{s0}, X, z) z b(z) dz = \int_{H_s} E_s (\varepsilon_{s0} + X z) z b(z) dz = E_s A_s z_{sg} \varepsilon_{s0} + E_s I_{s0} X \quad (3.5.24)$$

donde

$M_s$  axil en sección metálica

$I_{s0}$  inercia de la sección metálica respecto el origen del eje (superficie de la losa de hormigón)

### Momento en la sección

La ecuación (5) del sistema (3.5.11) quedaría:

$$M = M_c + M_y + M_s$$

$$\left( E_c A_c z_{cg} + E_y A_y z_{yg} \right) \varepsilon_{c0} + E_s A_s z_{sg} \varepsilon_{s0} + \left( E_c I_{c0} + E_y I_{y0} + E_s I_{s0} \right) X = M \quad (3.5.25)$$

### Sistema de ecuaciones

Las ecuaciones (3), (4) y (5) del sistema (3.5.11) quedarían:

$$\begin{cases} (1) & (E_c A_c + E_y A_y) \varepsilon_{c0} + (E_c A_c z_{cg} + E_y A_y z_{yg}) X = N_c \\ (2) & E_s A_s \varepsilon_{s0} + E_s A_s z_{sg} X = -N_c \\ (3) & (E_c A_c z_{cg} + E_y A_y z_{yg}) \varepsilon_{c0} + E_s A_s z_{sg} \varepsilon_{s0} + (E_c I_{c0} + E_y I_{y0} + E_s I_{s0}) X = M \end{cases} \quad (3.5.26)$$

Expresándolo matricialmente:

$$\begin{bmatrix} E_c A_c + E_y A_y & 0 & E_c A_c z_{cg} + E_y A_y z_{yg} \\ 0 & E_s A_s & E_s A_s z_{sg} \\ E_c A_c z_{cg} + E_y A_y z_{yg} & E_s A_s z_{sg} & E_c I_{c0} + E_y I_{y0} + E_s I_{s0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{c0} \\ \varepsilon_{s0} \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_c \\ -N_c \\ M \end{bmatrix} \quad (3.5.27)$$

Ahora se va a pasar a “homogeneizar” la sección con el acero de la sección metálica. Es simplemente reagrupar y renombrar términos, que equivale a calcular la sección con unos anchos reducidos de hormigón y armadura asumiendo que es completamente de acero de la sección metálica. Definimos las siguientes magnitudes propias de la sección “homogénea”:

$$A_{cR} = \frac{E_c}{E_s} A_c \left( 1 + \frac{E_y}{E_c} \frac{A_y}{A_c} \right) \quad (3.5.28)$$

$$z_{cgR} = \frac{E_c}{E_s} \frac{A_c}{A_{cR}} z_{gc} \left( 1 + \frac{E_y}{E_c} \frac{A_y}{A_c} \frac{z_{yg}}{z_{gc}} \right) \quad (3.5.29)$$

$$I_{c0R} = \frac{E_c}{E_s} I_{c0} \left( 1 + \frac{E_y}{E_c} \frac{I_{y0}}{I_{c0}} \right) \quad (3.5.30)$$

Operando en la primera ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} E_s A_{cR} \varepsilon_{c0} + E_s A_{cR} z_{cgR} X &= N_c \\ \varepsilon_{c0} + z_{cgR} X &= \frac{N_c}{E_s A_{cR}} = \varepsilon_{cgR} \end{aligned} \quad (3.5.31)$$

Operando en la segunda ecuación se obtiene:

$$\varepsilon_{s0} + z_{sg} X = -\frac{N_c}{E_s A_s} = \varepsilon_{sg} \quad (3.5.32)$$

En la tercera ecuación usamos según (3.5.31) y (3.5.32) tal que:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{c0} &= \varepsilon_{cgR} - z_{cgR} X \\ \varepsilon_{s0} &= \varepsilon_{sg} - z_{sg} X \end{aligned}$$

Se tiene, por un lado:

$$\begin{aligned}
 (E_c A_c z_{cg} + E_y A_y z_{yg}) \varepsilon_{c0} + (E_c I_{c0} + E_y I_{y0}) X &= E_s A_{cR} z_{cgR} (\varepsilon_{cgR} - z_{cgR} X) + E_s I_{c0R} X = \\
 &= E_s A_{cR} z_{cgR} \varepsilon_{cgR} + E_s (I_{c0R} - A_{cR} z_{cgR}^2) X = \\
 &= N_c z_{cgR} + E_s I_{cgR} X
 \end{aligned} \tag{3.5.33}$$

Y por otro:

$$\begin{aligned}
 E_s A_s z_{sg} \varepsilon_{s0} + E_s I_{s0} X &= E_s A_s z_{sg} (\varepsilon_{sg} - z_{sg} X) + E_s I_{s0} X = \\
 &= E_s A_s z_{sg} \varepsilon_{sg} + E_s (I_{s0} - A_s z_{sg}^2) X = \\
 &= -N_c z_{sg} + E_s I_{sg} X
 \end{aligned} \tag{3.5.34}$$

donde

$I_{cgR}$  inercia de la sección de hormigón reducida respecto de su baricentro

$I_{sg}$  inercia de la sección metálica respecto de su baricentro

Por lo que la tercera ecuación queda:

$$\begin{aligned}
 -N_c (z_{sg} - z_{cgR}) + E_s (I_{cgR} + I_{sg}) X &= -N_c \Delta z_g + E_s I_T X = M \\
 E_s I_T X &= M + N_c \Delta z_g
 \end{aligned} \tag{3.5.35}$$

con

$$\Delta z_g = z_{sg} - z_{cgR}$$

$$I_T = I_{cgR} + I_{sg}$$

Así que, finalmente, el sistema quedaría:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (1) \quad \varepsilon_{c0} + z_{cgR} X = \frac{N_c}{E_s A_{cR}} \\
 (2) \quad \varepsilon_{s0} + z_{sg} X = -\frac{N_c}{E_s A_s} \\
 (3) \quad E_s I_T X = M + N_c \Delta z_g
 \end{array} \right. \tag{3.5.36}$$

Despejando  $\varepsilon_{c0} - \varepsilon_{s0}$  se obtiene:

$$\varepsilon_{c0} - \varepsilon_{s0} = \left( \frac{1}{E_s A_{cR}} + \frac{1}{E_s A_s} + \frac{\Delta z_g^2}{E_s I_T} \right) N_c + \frac{\Delta z_g}{E_s I_T} M \quad (3.5.37)$$

E introduciéndolo en (3.5.12) resulta:

$$g(N_c) = K_q \left( \frac{1}{E_s A_{cR}} + \frac{1}{E_s A_s} + \frac{\Delta z_g^2}{E_s I_T} \right) N_c + K_q \frac{\Delta z_g}{E_s I_T} M \quad (3.5.38)$$

Por lo tanto, la ecuación básica del rasante sería según (3.5.14):

$$\frac{d^2}{dx^2} N_c(x) = K_q \left( \frac{1}{E_s A_{cR}} + \frac{1}{E_s A_s} + \frac{\Delta z_g^2}{E_s I_T} \right) N_c(x) + K_q \frac{\Delta z_g}{E_s I_T} M(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} N_c(x) - Y_1 N_c(x) = Y_2 M(x) \quad (3.5.39)$$

con

$$Y_1 = K_q \left( \frac{1}{E_s A_{cR}} + \frac{1}{E_s A_s} + \frac{\Delta z_g^2}{E_s I_T} \right)$$

$$Y_2 = K_q \frac{\Delta z_g}{E_s I_T}$$

Estos números son constantes que dependen únicamente de la geometría de la sección y las propiedades de los materiales. Además, la ley de flectores es conocida. Esta es pues una ecuación diferencial de segundo orden completamente definida cuya solución depende únicamente de dos condiciones de contorno. Para leyes de flectores adecuadas incluso se puede resolver manualmente y obtener la expresión analítica del rasante. La ecuación diferencial para vigas que estén sometidas plenamente a flexión positiva equivale a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de coeficientes constantes no homogéneo de la forma:

$$\begin{bmatrix} y_1 = N_c \\ y_2 = N_c' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ Y_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Y_2 \end{bmatrix} M(x) \quad (3.5.40)$$

Este sistema se puede resolver por ejemplo con el método de coeficientes indeterminados o con el método de variación de parámetros (Kreyszig, 2013).

Por ejemplo, para una viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida donde la ley de flectores está dada por

$$M(x) = ax^2 + bx + c \quad (3.5.41)$$

las soluciones del axil en la losa y el rasante son:

$$N_c(x) = 2a \frac{Y_2}{Y_1^2} \left( \frac{1 - \cosh(\sqrt{Y_1}L)}{\sinh(\sqrt{Y_1}L)} \sinh(\sqrt{Y_1}x) + \cosh(\sqrt{Y_1}x) - 1 \right) - \frac{Y_2}{Y_1} M(x) \quad (3.5.42)$$

$$R(x) = 2a \frac{Y_2}{Y_1^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{1 - \cosh(\sqrt{Y_1}L)}{\sinh(\sqrt{Y_1}L)} \cosh(\sqrt{Y_1}x) + \sinh(\sqrt{Y_1}x) \right) - \frac{Y_2}{Y_1} V(x) \quad (3.5.43)$$

Si se combinan tramos de flexión positiva con negativa sí es cierto que la solución analítica por vía manual es inabordable. Sin embargo, para el caso general hemos dejado que el programa resuelva esta ecuación numéricamente. Resuelto el problema y conseguido la distribución de axiles en la losa, pasamos a obtener resultados de interés en la respuesta de la sección mixta que explicamos en lo que sigue.

#### 3.5.4.1 Esfuerzo rasante

Por equilibrio, aplicando la ecuación básica (3.5.2) se obtiene el rasante en la viga. La derivada numérica es complicada porque es un problema muy mal condicionado. Es por ello que en el programa se ha implementado un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden equivalente a la ecuación diferencial de segundo orden, porque directamente de la solución se tiene la distribución de rasantes (además de que, de hecho, en Matlab no se pueden implementar ecuaciones diferenciales de segundo orden). La solución se ha obtenido usando el método adaptativo de Runge-Kutta de cuarto orden. El algoritmo se puede encontrar en Kreyszig, 2013.

$$\underline{y}(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_c(x) \\ R(x) \end{bmatrix} \quad (3.5.44)$$

#### 3.5.4.2 Flecha

La curvatura en la viga se puede obtener a partir de la solución del axil en la losa con la tercera ecuación del sistema (3.5.36):

$$X(x) = \frac{M(x) + N_c(x) \Delta z_g}{E_s I_T} \quad (3.5.45)$$

El giro se obtiene integrando la curvatura:

$$\phi(x) = \phi_0 + \int_0^x X(x') dx' = \phi_0 + \tilde{\phi}(x) \quad (3.5.46)$$

con

$$\tilde{\phi}(x) = \int_0^x X(x') dx' \quad (3.5.47)$$

donde

$\phi$  giro de la sección

$\phi_0$  giro de la sección en el primer apoyo  $x = 0$  a priori valor desconocido

La deformada de la viga se obtiene integrando el giro:

$$u_z(x) = u_0 + \int_0^x \phi(x') dx' = \int_0^x \phi(x') dx' = \phi_0 x + \int_0^x \tilde{\phi}(x') dx' \quad (3.5.48)$$

donde

$u_z$  desplazamiento vertical

$u_0$  desplazamiento vertical en el primer apoyo  $x = 0$ . Por condición de apoyo,  $u_0 = 0$

El giro en la sección del primer apoyo se obtiene de imponer que el desplazamiento vertical en el segundo apoyo también sea cero:

$$u_z(L) = \phi_0 L + \int_0^L \tilde{\phi}(x') dx' = 0$$

$$\phi_0 = -\frac{\int_0^L \tilde{\phi}(x') dx'}{L} \quad (3.5.49)$$

Y así se tiene la deformada de la viga en régimen elástico-lineal teniendo en cuenta la deformabilidad de la conexión. Se comentó que numéricamente la derivada es muy delicada, pero las integrales numéricamente se resuelven de forma rápida, precisa y cómoda.

Es útil calcular también la deformada sin tener en cuenta la deformación de la conexión para comparar ambos resultados y tener una idea del orden de magnitud de la diferencia en los resultados que introduce tener en cuenta este fenómeno. El cálculo es análogo a lo anteriormente expuesto utilizando:

$$X(x) = \frac{M(x)}{(EI)} \quad (3.5.50)$$

donde

$(EI)$  rigidez a flexión de la sección no fisurada para flexión positiva o fisurada para negativa

Todo este desarrollo se puede evitar y obtener los resultados de forma más directa introduciendo más ecuaciones en el sistema. Es lo que se ha hecho en el programa informático. El sistema de ecuaciones diferenciales completo implementado en el programa para calcular todos estos resultados teniendo en cuenta la deformabilidad de la conexión y un comportamiento elástico-lineal de los materiales en la sección es:

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} N_c \\ R \\ \tilde{u}_{z,def} \\ \tilde{\phi}_{def} \\ \tilde{u}_{z,rig} \\ \tilde{\phi}_{rig} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{y}' = \begin{bmatrix} y_2 \\ Y_1 y_1 + Y_2 M(x) \\ y_4 \\ \frac{M(x) + \Delta z_g y_1}{E_s I_T} \\ y_5 \\ \frac{M(x)}{(EI)} \end{bmatrix} \quad (3.5.51)$$

Entonces, teniendo la solución de este sistema los giros iniciales en los apoyos son:

$$\phi_{0,def} = -\frac{\tilde{u}_{z,def}(L)}{L} \quad (3.5.52)$$

$$\phi_{0,rig} = -\frac{\tilde{u}_{z,rig}(L)}{L} \quad (3.5.53)$$

Y las deformadas son:

$$u_{z,def}(x) = \phi_{0,def} x + \tilde{u}_{z,def}(x) \quad (3.5.54)$$

$$u_{z,rig}(x) = \phi_{0,rig} x + \tilde{u}_{z,rig}(x) \quad (3.5.55)$$

donde

*def* hace referencia a las magnitudes obtenidas teniendo en cuenta la deformación de la conexión

*rig* hace referencia a las magnitudes obtenidas asumiendo conexión infinitamente rígida

Como se aprecia, es considerable el ahorro de esfuerzo que se consigue combinándolo todo en el mismo sistema porque todos los resultados están contenidos en su solución que se obtiene de una vez.

### 3.5.4.3 Tensiones en sección de $M_v$

Otra consecuencia inmediata de considerar la deformación en la conexión es que la ley de deformaciones en la sección va a ser distinta, por lo que las tensiones también y se pueden tener mayores valores a los esperados según interacción completa. En el programa se ha decidido calcular esta nueva ley de tensiones en la sección de momento máximo. Se compara con la ley correspondiente a interacción completa.

La curvatura en la sección de momento máximo es:

$$X_v = X(x_v) = \frac{M(x_v) + N_c(x_v) \Delta z_g}{E_s I_T} \quad (3.5.56)$$

Las constantes en las leyes de deformación según (3.5.3) y (3.5.4) son aplicando (3.5.31) y (3.5.32):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{c0,v} &= \frac{N_c(x_v)}{E_s A_{cR}} - z_{cgR} X_v \\ \varepsilon_{s0,v} &= -\frac{N_c(x_v)}{E_s A_s} - z_{sg} X_v\end{aligned}\quad (3.5.57)$$

Y las leyes de deformaciones son:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{c,v}(z) &= \varepsilon_{c0,v} + X_v z \\ \varepsilon_{s,v}(z) &= \varepsilon_{s0,v} + X_v z\end{aligned}\quad (3.5.58)$$

Las tensiones se obtienen multiplicando por el módulo de elasticidad correspondiente siendo nulas en la zona de hormigón traccionado, si la hubiera.

### 3.5.5 Análisis Plástico con Conexión No Deformable

El desarrollo anterior solamente es válido para un comportamiento elástico-lineal de la sección. En este apartado tendremos en cuenta para el cálculo del rasante un comportamiento elastoplástico de los materiales, pero sin considerar la deformación de la conexión. Este análisis es el desarrollo previo del caso más general estudiado en este trabajo que se explica en el apartado siguiente donde se considera el acoplamiento entre el comportamiento elastoplástico de los materiales y la deformabilidad de la conexión.

#### 3.5.5.1 Esfuerzo rasante

Sin tener en cuenta la deformabilidad de la conexión la ley de deformaciones en la sección es única para hormigón y acero siendo:

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_0 + Xz \quad (3.5.59)$$

donde

$\varepsilon_0$  una constante en la ley de deformaciones de la sección. Es la deformación en  $z = 0$

$X$  curvatura de la sección

En el sistema general (3.5.11) deja de ser necesaria la segunda ecuación y quedaría:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{d}{dx} N_c = R \\ (2) \quad \int_{H_c} \sigma(\varepsilon_0, X, z) b(z) dz = N_c \\ (3) \quad \int_{H_s} \sigma(\varepsilon_0, X, z) b(z) dz = -N_c \\ (4) \quad \int_H \sigma(\varepsilon_0, X, z) z b(z) dz = M \end{array} \right. \quad (3.5.60)$$

Se observa que la solución no necesita de condiciones de contorno. La ley de flectores es conocida, así que sabiendo

el momento en cada punto de la viga las ecuaciones (2), (3) y (4) forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas  $\{\varepsilon_0, X, N_c\}$  que permiten obtener el axil en la losa.

La solución de estas tres incógnitas  $\{\varepsilon_0, X, N_c\}$  en función del momento flector en general no se puede resolver analíticamente porque el comportamiento elastoplástico de los materiales hace que sea no lineal. Se resuelve numéricamente utilizando métodos de aproximaciones sucesivas como el método de Newton-Raphson con estimación del jacobiano. Así que conociendo la ley de flectores queda determinada la distribución en la viga de los axiles en la losa de hormigón. Conociendo estos axiles se deriva y se obtiene el rasante.

Este procedimiento es bastante burdo computacionalmente hablando porque en cada punto de la viga donde se tenga que calcular el axil en la losa a partir del flector hay que resolver un sistema de ecuaciones no lineal con estimación numérica del jacobiano aunque anteriormente se haya resuelto ese sistema para el mismo valor de flector. Estos algoritmos de aproximaciones sucesivas son muy costosos. Repetir los mismos cálculos con este tipo de algoritmos constituye un verdadero despilfarro computacional.

La primera opción que se nos viene a la cabeza para ahorrar coste computacional es calcular los valores del axil en la losa para todos los flectores posibles (aquellos entre el momento plástico a flexión negativa y positiva) obteniendo el diagrama que relaciona el axil en losa y el flector. Teniendo en cuenta que la obtención del axil en losa para flectores menores al valor resistente elástico es inmediata al ser una relación lineal, solamente hace falta resolver el sistema no lineal con comportamiento elastoplástico de los materiales para los flectores más allá de los elásticos. A partir de este diagrama la obtención del axil en losa es inmediata para cualquier ley de flectores. Luego la ley de axiles se deriva y se tiene el rasante.

Sin embargo, hay una manera más rápida y más fácil de programar que es la que se ha implementado. Esta manera no se basa en el diagrama axil en la losa-flector, sino en su derivada. Lo mostramos en lo que sigue.

Utilizando la regla de la cadena de la derivación se obtiene:

$$R(x) = \frac{dN_c}{dx} = \frac{dN_c}{dM} \frac{dM}{dx} = \frac{dN_c}{dM} V(x) \quad (3.5.61)$$

Aparece la derivada del axil respecto del flector que, si se tiene calculada para todos los valores de flector, entonces la obtención del rasante es inmediata: en cada punto se toma el flector, se obtiene la derivada a partir del diagrama y este valor se multiplica por el cortante, que es conocido al conocerse la ley de flectores. Entonces, calcular de forma previa el diagrama que relaciona la derivada del axil en losa respecto del flector” parece ser la opción más óptima. Este diagrama se mantiene en memoria mientras que no se modifique la sección por si se quieren calcular resultados para distintas leyes de flectores.

Explicamos a continuación cómo se ha calculado este diagrama que relaciona la derivada del axil en losa respecto del flector. Ya se ha comentado que el cálculo numérico de la derivada es muy delicado así que se deben tomar ciertas precauciones para garantizar la precisión de los resultados.

Buscamos obtener una relación de la forma:

$$\frac{dN_c}{dM} = f(M) \quad (3.5.62)$$

Esta relación es trivial para flectores menores a los elásticos porque la relación es lineal:

$$N_c(M) = \frac{N_{el}}{M_{el}} M \Rightarrow \frac{dN_c}{dM} = \frac{N_{el}}{M_{el}} \quad (3.5.63)$$

Para flectores mayores al valor resistente elástico la relación entre el axil y el flector no es analítica. Entonces el diagrama debe calcularse punto a punto e interpolar linealmente para resultados intermedios. Para cada valor de

flector el axil se determina con la solución del sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas  $\{\varepsilon_0, X, N_c\}$  que venimos viendo hasta ahora.

$$\begin{cases} (1) \int_{H_c} \sigma(\varepsilon_0, X, z) b(z) dz = N_c \\ (2) \int_{H_s} \sigma(\varepsilon_0, X, z) b(z) dz = -N_c \\ (3) \int_H \sigma(\varepsilon_0, X, z) z b(z) dz = M \end{cases} \quad (3.5.64)$$

Sea  $S(M)$  la función que obtiene el axil en la losa a partir del flector resolviendo el sistema anterior. Esta función no es analítica por lo que no se puede derivar directamente. Se deben utilizar procedimientos numéricos. El procedimiento seguido es uno de los encontrados en Kreyszig, 2013. En esta obra se puede leer:

*“La derivación numérica es la determinación de valores de la derivada de una función  $f$  a partir de valores dados de  $f$ . La derivación numérica debe evitarse siempre que sea posible porque [...] la derivación produce valores mucho menos precisos...”*

Sin embargo, aquí no se tiene más remedio que utilizarlos. En esta referencia bibliográfica se recogen algunas de una gran cantidad de fórmulas para derivadas numéricas, unas más exactas que otras. La elegida ha sido la que se obtiene de derivar el polinomio de Lagrange de cuarto orden:

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{12h} (f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)) \quad (3.5.65)$$

Donde la derivada es más exacta cuanto menor sea el tamaño de paso  $h$ . Utilizaremos entonces:

$$\frac{dN_c}{dM} = \frac{dS}{dM} = S'(M)$$

$$S'(M) \approx \frac{1}{12h} (S(M - 2h) - 8S(M - h) + 8S(M + h) - S(M + 2h)) \quad (3.5.66)$$

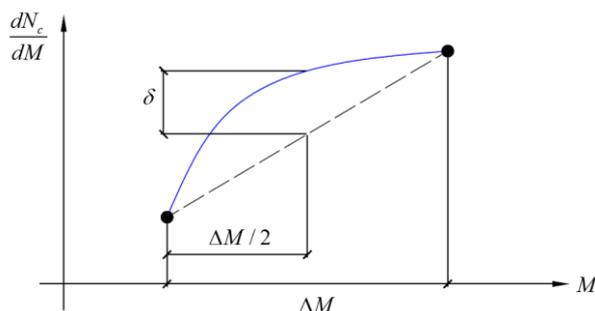


Fig. 3-29 Precisión entre puntos del diagrama

En cada valor  $M$  del flector obtenemos los axiles para los flectores  $\{M - 2h, M - h, M + h, M + 2h\}$  a través del sistema de ecuaciones (3.5.64). Estos valores los introducimos en (3.5.66) y tenemos una aproximación de la derivada en  $M$ . La precisión de este resultado numérico la garantizamos en cada punto reduciendo el tamaño de paso hasta que los resultados varíen menos que una precisión establecida. Con esto el problema de calcular la derivada del axil en la losa respecto del flector para un valor del flector dado estaría solucionado.

Un detalle más que hay que tener en cuenta es el espaciado que tomamos entre los puntos donde vamos a calcular esta derivada (ver Fig. 3-29). La derivada, puntualmente, la podremos haber calculado puntualmente con toda la precisión que se desee, pero si entre puntos existe demasiado espacio esta precisión no sirve de nada porque se pierde al interpolar linealmente.

Para garantizar la precisión del diagrama se ha tomado un método adaptativo en el que en cada punto se va reduciendo el tamaño de espaciamento hasta que con la mitad de espaciamento la diferencia entre el resultado real y el resultado obtenido interpolando linealmente difieren menos de una tolerancia:

$$\delta = S' \left( \frac{M_i + M_{i+1}}{2} \right) - \frac{S'(M_i) + S'(M_{i+1})}{2} < TOL \quad (3.5.67)$$

donde

$M_i$  valor de flector en el que se ha calculado el valor del diagrama

$M_{i+1}$  siguiente valor de flector en el que se va a calcular el valor del diagrama

$\Delta M$  espaciamento entre valores, tamaño de paso

$S'$  función que devuelve el valor del diagrama

$\delta$  diferencia entre el valor del diagrama calculado como tal y calculado interpolando linealmente

$TOL$  tolerancia establecida

Resumiendo, con el sistema (3.5.64) obtenemos el axil en la losa de hormigón para un valor dado de momento flector. Luego, con la expresión (3.5.66) calculamos en una serie de puntos la derivada del axil con respecto al momento flector y para valores intermedios se interpola linealmente obteniendo un diagrama. Finalmente, con este diagrama se calcula la derivada del axil con respecto al flector en los valores de la ley de momentos flectores introducida en la viga, se multiplica por el cortante y se tiene el rasante.

### 3.5.5.2 Diagramas $M - X$ , $N_c - X$ y $M - N_c$

Estos resultados, aunque no necesarios para hallar la distribución de rasantes, se han calculado y se muestran porque su visualización puede resultar interesante e ilustrativa. La obtención es sencilla mediante el sistema (3.5.64) tomando como parámetro la curvatura. Así las incógnitas serían  $\{\varepsilon_0, N_c, M\}$  y de resolverlo para distintos valores de curvatura se obtienen los diagramas de la forma:

$$\begin{aligned} M &= g(X) \\ N_c &= k(X) \end{aligned} \quad (3.5.68)$$

Y de la composición de estas dos funciones se obtiene el diagrama momento-axil en la losa:

$$M = m(N_c) = M(X(N_c)) = g \circ k^{-1} \quad (3.5.69)$$

Si solamente se quiere dibujar el diagrama basta con representar en el sistema de ejes apropiado los puntos  $P$  tal que:

$$P: X \rightarrow P = (k(X), g(X)) \quad (3.5.70)$$

### 3.5.5.3 Simplificación según Eurocódigo 4

Para flexión positiva se tienen diagramas  $M - N_c$  con la siguiente apariencia. El Eurocódigo 4 indica que, a falta de este cálculo numérico, se interpolen linealmente los resultados correspondientes a la resistencia elástica y plástica obteniendo un diagrama bilineal (ver apartado 3.4.6.2).

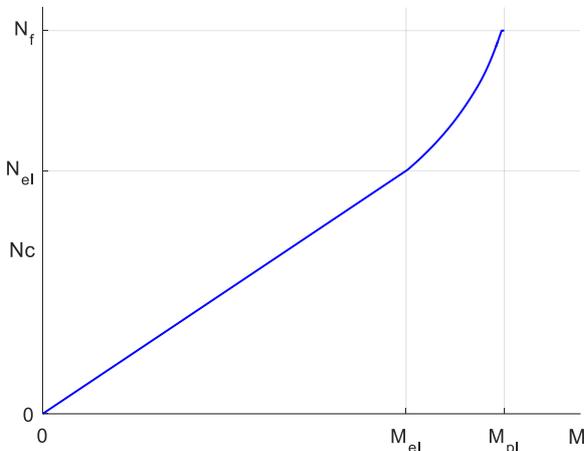


Fig. 3-30.a

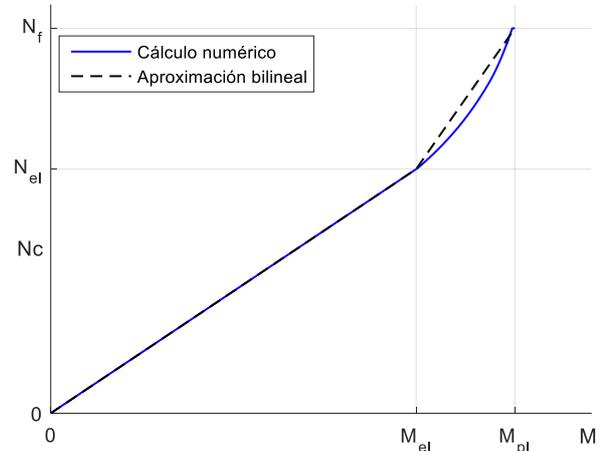


Fig. 3-30.b

Fig. 3-30 Diagrama  $M - N_c$  :

- a) Obtenido por procedimientos numéricos
- b) Comparativa con aproximación bilineal según Eurocódigo 4

La derivada de estas curvas (que recordamos es el valor que multiplicado por el esfuerzo cortante da el rasante según ecuación (3.5.61)), sería de la forma que se muestra en Fig. 3-31.

A partir de la distribución de esfuerzo cortante podemos intuir aproximadamente la forma de la distribución del rasante para las hipótesis de cálculo tomadas en este apartado. Una de las primeras conclusiones a las que se llega es que los valores de esfuerzo rasante coinciden en los puntos de comportamiento elástico de la sección porque tienen misma derivada y difieren en los tramos inelásticos.

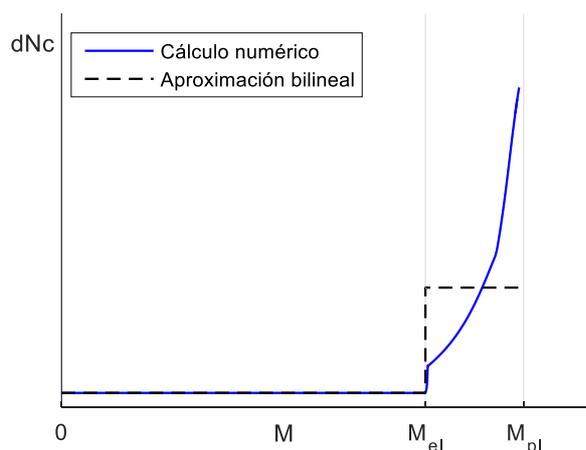


Fig. 3-31 Derivada del axil en la losa de hormigón respecto del momento flector

Por ejemplo, para una viga biapoyada y carga uniformemente distribuida se sabe que la distribución de cortantes es lineal con valores máximos en los extremos y se anula en el punto medio. Por lo anterior, en los tramos donde el flector es menor al resistente elástico los resultados de la aproximación bilineal coinciden con el cálculo numérico.

En los tramos donde se supera el flector elástico la aproximación bilineal seguiría dando una ley de rasantes lineal con otra pendiente, pero el cálculo numérico daría una ley curva.

Cuando se alcanza el momento elástico la derivada del diagrama numérico es menor a su aproximación bilineal por lo que el rasante en ese punto sería menor. Conforme aumenta el flector ambos resultados se van pareciendo más porque la derivada del diagrama numérico va aumentando y acercándose (incluso haciéndose mayor si se supera un valor dado de flector) a la aproximación bilineal. Así que intuitivamente podemos concluir que se tendrían unas leyes de rasantes de la forma:

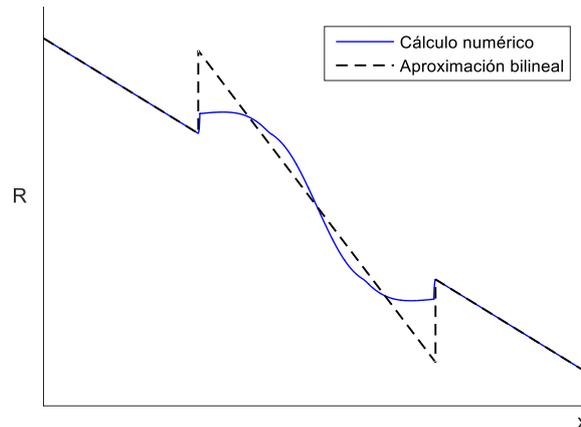


Fig. 3-32 Forma intuitiva de la ley de rasantes según cálculo numérico y aproximación bilineal para el caso de viga biapoyada con carga uniformemente distribuida

En general se tiene que la resultante del rasante plástico calculado por método numérico es menor a la que se tiene haciendo la aproximación que dicta el Eurocódigo 4, por lo que el esfuerzo que actúa sobre los pernos en realidad va a ser menor al obtenido utilizando la simplificación. Se concluye que esta simplificación es buena en cuanto a que facilita los cálculos y devuelve resultados por el lado de la seguridad.

### 3.5.6 Análisis Plástico con Conexión Deformable

Pasamos ahora al caso más general estudiado en este trabajo: la distribución del esfuerzo rasante teniendo en cuenta la plastificación de los materiales y la deformabilidad de la conexión. Al tener en cuenta la deformación de la conexión, al igual que en el análisis elástico, el sistema que se debe resolver es el general dado por (3.5.11). La manera de resolverlo sigue la misma metodología que en análisis elástico. Las dos primeras ecuaciones forman un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} N_c = R \\ \frac{d}{dx} R = K_q (\varepsilon_{c0}(N_c) - \varepsilon_{s0}(N_c)) = g(N_c) \end{cases} \quad (3.5.71)$$

Las tres últimas ecuaciones conocido el flector porque la ley la distribución es conocida y valor dado de axil en la losa de hormigón forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas  $\{\varepsilon_{c0}, \varepsilon_{s0}, X\}$ . Permite obtener  $\varepsilon_{c0}(N_c)$  y  $\varepsilon_{s0}(N_c)$ .

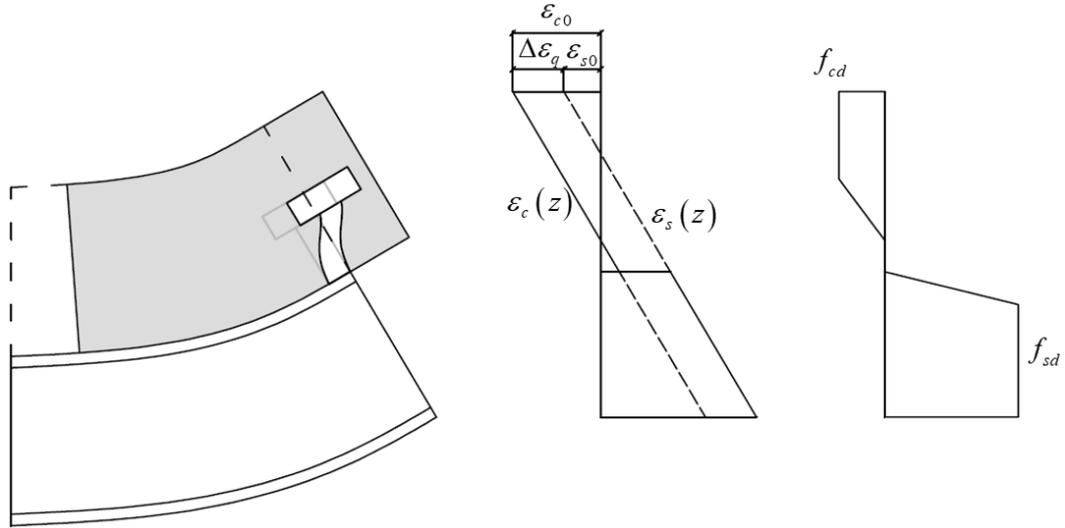


Fig. 3-33 Análisis elastoplástico de la sección con deformación de la conexión

Por lo tanto la función  $g(N_c)$  está perfectamente definida y el sistema se puede resolver a expensas de dos condiciones de contorno. Se tomarán las mismas que en el análisis elástico (ver apartado 3.5.3). La función  $g(N_c)$  está definida tal que conocido el momento flector se toma como argumento de entrada el axil en la losa, se resuelve el sistema (3.5.72), se obtienen  $\{\varepsilon_{c0}, \varepsilon_{s0}\}$  y el argumento de salida es  $K_q(\varepsilon_{c0} - \varepsilon_{s0})$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \int_{H_c} \sigma(\varepsilon_{c0}, X, z) b(z) dz = N_c \\ (2) \quad \int_{H_s} \sigma(\varepsilon_{s0}, X, z) b(z) dz = -N_c \\ (3) \quad \int_H \sigma(\varepsilon_{c0}, \varepsilon_{s0}, X, z) z b(z) dz = M \end{array} \right. \quad (3.5.72)$$

Si con un análisis elástico de los materiales se puede obtener la función  $g(N_c)$  analíticamente, en el caso de comportamiento elastoplástico de los materiales no va a poder ser así. El sistema es no lineal y debe resolverse mediante procedimientos numéricos de aproximaciones sucesivas. Matlab utiliza el método de Newton-Raphson con aproximación numérica del jacobiano.

Con todo esto el problema estaría resuelto. Si se implementa el algoritmo tal cual se ha descrito el sistema de ecuaciones diferenciales tarda demasiado en resolverse numéricamente porque en cada iteración debe resolver un sistema de ecuaciones no lineales con un método de alto coste computacional. Para reducir el tiempo de cálculo proponemos lo siguiente que es lo que se ha implementado en el programa informático.

Se sabe que los valores de flector y axil en la losa están acotados en los intervalos conocidos:

$$\begin{aligned} M_{pl}^- &\leq M \leq M_{pl}^+ \\ N_f^+ &\leq N_c \leq N_f^- \end{aligned} \quad (3.5.73)$$

donde

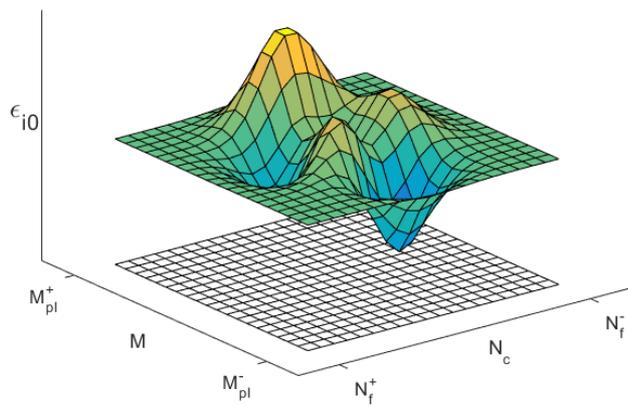
$M_{pl}^-$  momento plástico de la sección a flexión negativa

$M_{pl}^+$  momento plástico de la sección a flexión positiva

$N_f^-$  axil en la losa de hormigón para el momento plástico a flexión negativa

$N_f^+$  axil en la losa de hormigón para el momento plástico a flexión positiva

Entonces para ahorrar tiempo de cálculo se puede resolver el sistema no lineal (3.5.72) de forma previa en una malla de valores de los intervalos (3.5.73) obteniendo puntualmente  $\{\varepsilon_{c0}, \varepsilon_{s0}\}$  de la forma:



$$\{\varepsilon_{c0}(M, N_c), \varepsilon_{s0}(M, N_c)\} \quad (3.5.74)$$

Fig. 3-34 Superficie  $MN_c$

Luego, a la hora de tener que resolver el sistema de ecuaciones diferenciales se interpolan estos resultados. Es cierto que la interpolación introduce error, pero si es lo suficientemente fina este error es admisible. Se ha decidido establecer la malla en un tamaño de  $75^2$  elementos.

La resolución previa del sistema no lineal en la malla de valores para el axil en la losa y el flector es lo que calcula el programa mientras se muestra por pantalla el cuadro de espera de la Fig. 2-21 y se ha denominado Superficie  $MN_c$ .

La Fig. 3-34 no corresponde a ningún ejemplo en concreto. El propósito de esta figura es dar la idea del propósito de esta superficie. Se debe aclarar que la superficie dibujada no es un resultado del caso particular de ninguna sección. Esta superficie es la superficie *peaks* de Matlab que viene predefinida en el programa.

Una vez calculada esta superficie, la función  $g(N_c)$  para la resolución de las ecuaciones diferenciales deja de ser la resolución de un sistema no lineal y pasa a utilizar una interpolación de la forma:

$$\varepsilon_{i0}(M, N_c) \approx \varepsilon_{i0}(M_k, N_k) + \frac{\varepsilon_{i0}(M_k, N_{k+1}) - \varepsilon_{i0}(M_k, N_k)}{N_{k+1} - N_k} (N_c - N_k) + \frac{\varepsilon_{i0}(M_{k+1}, N_k) - \varepsilon_{i0}(M_k, N_k)}{M_{k+1} - M_k} (M - M_k)$$

donde

$i$  hace referencia a la losa de hormigón o a la sección metálica según  $i = c$  ó  $i = s$

$N_k, N_{k+1}$  son los vértices del rectángulo de la malla en el que está comprendido el punto que se quiere interpolar según:  $N_k \leq N_c \leq N_{k+1}$  y  $M_k \leq M \leq M_{k+1}$

De la solución del sistema de ecuaciones diferenciales imponiendo las condiciones de contorno establecidas se obtienen la distribución de rasantes y la de axiles en la losa de hormigón en la longitud de la viga.

## 4 EJEMPLOS DE VERIFICACIÓN

---

Realizaremos en este capítulo de forma manual el cálculo de algunas secciones en una serie de ejemplos para comprobar que los resultados se corresponden con los devueltos por el programa. Cada ejemplo se ha planteado para ejecutar ciertas partes del programa de forma que entre todos se haya puesto el programa a prueba prácticamente de forma completa.

Respecto a los tipos de sección y materiales, los ejemplos contemplan los tipos de secciones 1, 2, 4 y 5 con una o dos filas de armadura, los hormigones C30/37, C35/45 y C40/50, los aceros estructurales S235 y S275 y el acero para armar B400S.

Todos los ejemplos incluyen clasificación de la sección y la correspondiente reducción si resulta ser clase 4, cálculo de las magnitudes de resistencia elástica y plástica a flexión y resistencia a cortante incluyendo abolladura. En el ejemplo 4 se tiene interacción flector-cortante.

Respecto a la conexión y el rasante, en el ejemplo 1 se comparan los resultados de esfuerzo rasante, flecha y tensiones en la sección de máximo flector obtenidos de realizar un análisis elástico según se tenga en cuenta o no la deformabilidad de la conexión. Se concluye que el esfuerzo rasante sobre los pernos es menor en los apoyos teniendo en cuenta la deformación de la conexión, pero se tiene una flecha mayor. Las tensiones en la sección de máximo momento flector también son algo mayores.

En el ejemplo 3 se tiene un caso de conexión parcial. Además, se realiza un análisis elastoplástico del esfuerzo rasante comparando los resultados de tener o no en cuenta la deformabilidad de la conexión con la simplificación que recoge el Eurocódigo 4. Concluimos que la simplificación es práctica en cuanto a que simplifica los cálculos para poderlos abordar manualmente y da un resultado del lado de la seguridad de esfuerzo rasante total de cálculo para comprobación plástica de pernos, pero este margen es bastante elevado pudiéndose reducir más de un 30%.

De forma previa establecemos una notación para magnitudes comunes y usadas de forma frecuente.

### NOTACIÓN

$A_i$  área

$N_i$  axil plástico

$z_i$  posición del baricentro

donde el subíndice puede ser

$c$  se refiere a la sección de hormigón. Si existe losa y canto peraltado, serían  $c1$  y  $c2$ , respectivamente.

$y$  se refiere a la armadura

1 se refiere al ala superior

$w$  se refiere al alma

2 se refiere al ala/panel inferior

$s$  se refiere a la sección metálica completa

$n$  junto con los anteriores se refiere a la reducción de secciones clase 4

## 4.1 Ejemplo 1: Análisis elástico del esfuerzo rasante

Se pretende calcular una viga simplemente apoyada de 15 m de luz con una sección de dimensiones que se especifican a continuación. Se ha colocado en la losa una armadura de una fila de 4 barras de diámetro 20 mm con un recubrimiento mecánico de 50 mm. Para el hormigón se va a utilizar la clase C30/37 con un coeficiente de seguridad de 1,50, para el acero estructural el tipo S235 con un coeficiente de 1,05 y para la armadura, acero B400S con un coeficiente de 1,15.

La ley de momentos flectores es la correspondiente a una carga por unidad de longitud uniformemente distribuida que produce un flector de valor máximo 600 KNm. En cuanto a la conexión, se ha dispuesto un perno cada 300 mm. Las dimensiones del perno son: vástago de 50 mm de longitud y 20 mm de diámetro con cabeza de 20 mm de longitud y 30 mm de diámetro. El material del perno es un acero de 500 MPa de resistencia. Se le aplicará un coeficiente de seguridad de 1,25.

### DATOS

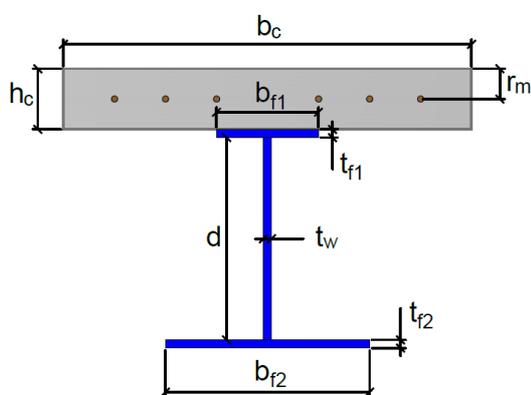


Fig. 4-1.a

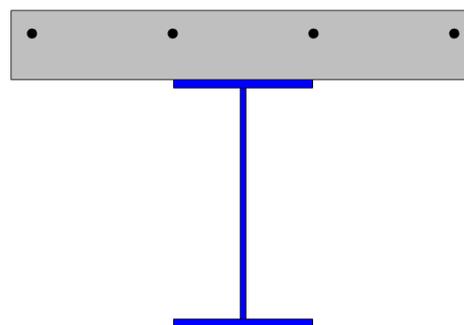


Fig. 4-1.b

Fig. 4-1 Ejemplo 1:  
a) Sección tipo. Notación de dimensiones.  
b) Dibujo a escala de la sección

GEOMETRÍA SECCIÓN		ARMADURA		HORMIGÓN C30/37		ACERO S 235		ARMADURA B 400 S	
$b_c$	mm 1000	Fila 1	Barras --	$E_c$	GPa 33	$E_s$	GPa 210	$E_y$	GPa 200
$h_c$	mm 150		$r_m$	mm 50	$f_{ck}$	MPa 30	$f_{sk}$	MPa 235	$f_{yk}$
$d$	mm 500			$\gamma_M$	-- 1,5	$\gamma_M$	-- 1,05	$\gamma_M$	-- 1,15
$t_w$	mm 12			$f_{cd}$	MPa 17	$f_{sd}$	MPa 223	$f_{yd}$	MPa 347
$b_{f1}$	mm 300			$\varepsilon_c$	-- 5,15 E-04	$\varepsilon_s$	-- 1,07 E-03	$\varepsilon_y$	-- 1,74 E-03
$t_{f1}$	mm 18			$n_c$	-- 6,36	$n_s$	-- 1	$n_y$	-- 1,05
$b_{f2}$	mm 300			$f_{cm}$	MPa 2,9				
$t_{f2}$	mm 18								

Tabla 4-1 Definición geométrica de sección y propiedades de materiales

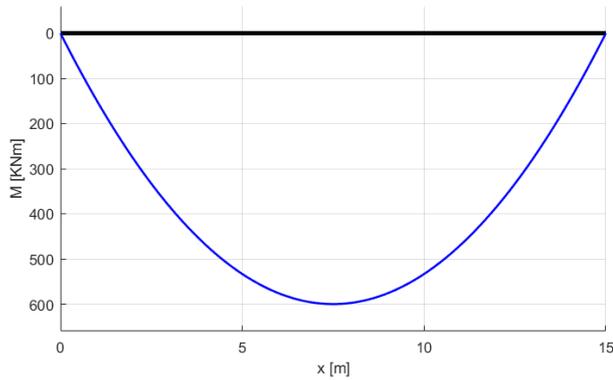


Fig. 4-2.a

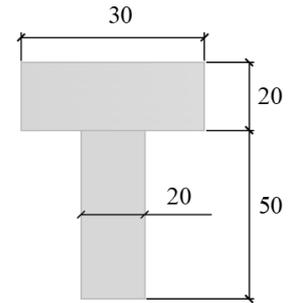


Fig. 4-2.b

Fig. 4-2 Ejemplo 1: Otros datos

a) Ley de flectores ELS

b) Dimensiones de los pernos

### MAGNITUDES PREVIAS

$$A_c = b_c h_c = 0.150 \cdot 1 = 1.50 \cdot 10^{-1} \text{ m}^2 \quad A_{cR} = \frac{1}{n_c} A_c = \frac{1}{6.36} \cdot 1.50 \cdot 10^{-1} = 2.36 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$A_y = \sum_i N_{b,i} \frac{\pi}{4} \phi_i^2 = 4 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0.02^2 = 1.26 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \quad A_{yR} = \frac{1}{n_y} A_y = \frac{1}{1.05} \cdot 1.26 \cdot 10^{-3} = 1.20 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A_1 = b_{f1} t_{f1} = 0.3 \cdot 0.018 = 5.40 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A_w = d t_w = 0.5 \cdot 0.012 = 6.00 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A_2 = b_{f2} t_{f2} = 0.3 \cdot 0.018 = 5.40 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A_s = A_1 + A_w + A_2 = 5.40 \cdot 10^{-3} + 6.00 \cdot 10^{-3} + 5.40 \cdot 10^{-3} = 1.68 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$N_c = A_c f_{cd} = 1.50 \cdot 10^{-1} \cdot 17 \cdot 10^6 = 2.55 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$N_y = A_y f_{yd} = 1.26 \cdot 10^{-3} \cdot 347 \cdot 10^6 = 4.37 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$N_1 = A_1 f_{sd} = 5.40 \cdot 10^{-3} \cdot 223 \cdot 10^6 = 1.20 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$N_w = A_w f_{sd} = 6.00 \cdot 10^{-3} \cdot 223 \cdot 10^6 = 1.34 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$N_2 = A_2 f_{sd} = 5.40 \cdot 10^{-3} \cdot 223 \cdot 10^6 = 1.20 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$N_s = A_s f_{sd} = 1.68 \cdot 10^{-2} \cdot 223 \cdot 10^6 = 3.74 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$z_c = \frac{1}{2} h_c = \frac{1}{2} \cdot 150 = 75 \text{ mm}$$

$$z_y = 50 \text{ mm}$$

$$z_1 = h_c + \frac{1}{2} t_{f1} = 150 + \frac{1}{2} \cdot 18 = 159 \text{ mm}$$

$$z_w = h_c + t_{f1} + \frac{1}{2} d = 150 + 18 + \frac{1}{2} \cdot 500 = 418 \text{ mm}$$

$$z_2 = h_c + t_{f1} + d + \frac{1}{2} t_{f2} = 150 + 18 + 500 + \frac{1}{2} \cdot 18 = 677 \text{ mm}$$

$$H = h_c + t_{f1} + d + t_{f2} = 150 + 18 + 500 + 18 = 686 \text{ mm}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_{sk} [MPa]}} = \sqrt{\frac{235}{235}} = 1$$

	ÁREAS		AXILES PLAST.		BARICENTROS	
Losa de hormigón	$A_c$	m <sup>2</sup> 1,50E-1	$N_c$	N 2,55E+6	$z_c$	mm 75
Armadura	$A_y$	m <sup>2</sup> 1,26E-3	$N_y$	N 4,37E+5	$z_y$	mm 50
Ala superior	$A_1$	m <sup>2</sup> 5,40E-3	$N_1$	N 1,20E+6	$z_1$	mm 159
Alma	$A_w$	m <sup>2</sup> 6,00E-3	$N_w$	N 1,34E+6	$z_w$	mm 418
Ala inferior	$A_2$	m <sup>2</sup> 5,40E-3	$N_2$	N 1,20E+6	$z_2$	mm 677
Sección metálica	$A_s$	m <sup>2</sup> 1,68E-2	$N_s$	N 3,74E+6	$z_s$	mm 418

Tabla 4-2 Ejemplo 1: valores de magnitudes previas

## CLASIFICACIÓN

### Flexión positiva

- Fibra neutra plástica  $\xi_{pl}^+$

$$N_c + N_y = 2.55 \cdot 10^6 + 4.37 \cdot 10^5 = 2.99 \cdot 10^6 \text{ N} < N_s \Rightarrow \text{No está en losa}$$

$$N_c + N_y + N_1 = 2.55 \cdot 10^6 + 4.37 \cdot 10^5 + 1.20 \cdot 10^6 = 4.19 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$N_w + N_2 = 1.34 \cdot 10^6 + 1.20 \cdot 10^6 = 2.54 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$N_c + N_y + N_1 > N_w + N_2 \Rightarrow \text{Fibra en ala superior}$$

$$N_c + N_y + \frac{x}{t_{f1}} N_1 = \left(1 - \frac{x}{t_{f1}}\right) N_1 + N_w + N_2$$

$$2.99 \cdot 10^6 + \frac{x}{18} \cdot 1.20 \cdot 10^6 = \left(1 - \frac{x}{18}\right) 1.20 \cdot 10^6 + 2.54 \cdot 10^6 \Rightarrow x = 5.63 \text{ mm}$$

$$\xi_{pl}^+ = 150 + 5.63 = 156 \text{ mm}$$

Toda la sección metálica, salvo apenas 6 mm de ala superior, está traccionada. La sección a flexión positiva es clase 1.

### Flexión negativa

- Fibra neutra plástica  $\xi_{pl}^-$

$$N_y + N_1 = 4.37 \cdot 10^5 + 1.20 \cdot 10^6 = 1.64 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$N_w + N_2 = 2.54 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$N_y + N_1 > N_w + N_2 \Rightarrow \text{Fibra en alma}$$

$$N_y + N_1 + \frac{x}{d} N_w = \left(1 - \frac{x}{d}\right) N_w + N_2$$

$$1.64 \cdot 10^6 + \frac{x}{500} \cdot 1.34 \cdot 10^6 = \left(1 - \frac{x}{500}\right) \cdot 1.34 \cdot 10^6 + 1.20 \cdot 10^6 \Rightarrow x = 168 \text{ mm}$$

$$\xi_{pl}^- = 150 + 18 + 168 = 336 \text{ mm}$$

- Clasificación alma

$$\frac{c}{t} = \frac{d}{t_w} = \frac{500}{12} = 41.67$$

$$\text{Zona comprimida: } \alpha C = 500 - 168 = 332 \text{ mm} \Rightarrow \alpha = \frac{332}{500} = 0.66$$

$$\frac{396\varepsilon}{13\alpha - 1} = \frac{396 \cdot 1}{13 \cdot 0.66 - 1} = 52.24 > 41.67 \Rightarrow \text{Ala clase 1}$$

- Clasificación ala inferior

$$\frac{c}{t} = \frac{\frac{1}{2} b_{f2}}{t_{f2}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 300}{18} = 8.33$$

$$9\varepsilon = 9 \cdot 1 = 9 > 8.33 \Rightarrow \text{Clase 1}$$

Ala y alma son clase 1, con lo que la sección es clase 1 a flexión negativa.

## RESISTENCIA ELÁSTICA A FLEXIÓN

### Flexión positiva

- Fibra neutra elástica  $\xi_{el}^+$

$$\xi_{el}^+ = \frac{\sum_i A_{i(R)} z_i}{\sum_i A_{i(R)}} = \frac{2.36 \cdot 10^{-2} \cdot 75 + 1.20 \cdot 10^{-3} \cdot 50 + 1.68 \cdot 10^{-2} \cdot 418}{2.36 \cdot 10^{-2} + 1.20 \cdot 10^{-3} + 1.68 \cdot 10^{-2}} = 213 \text{ mm}$$

- Rigidez a flexión

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{n_c} I_{cg} + A_{cR} (z_c - \xi_{el}^+)^2 + A_{yR} (z_y - \xi_{el}^+)^2 + A_1 (z_1 - \xi_{el}^+)^2 + I_{wg} + A_w (z_w - \xi_{el}^+)^2 + A_2 (z_2 - \xi_{el}^+)^2 = \\ &= \frac{1}{6.36} \cdot \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 0.15^3 + 2.36 \cdot 10^{-2} (0.75 - 0.213)^2 \\ &\quad + 1.20 \cdot 10^{-3} (0.05 - 0.213)^2 \\ &\quad + 5.40 \cdot 10^{-3} (0.159 - 0.213)^2 \\ &\quad + \frac{1}{12} \cdot 0.012 \cdot 0.5^3 + 6.00 \cdot 10^{-3} (0.418 - 0.213)^2 \\ &\quad + 5.40 \cdot 10^{-3} (0.677 - 0.213)^2 \\ &= 2.08 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

$$(EI)^+ = E_s I = 210 \cdot 10^9 \cdot 2.08 \cdot 10^{-3} = 4.37 \cdot 10^5 \text{ KNm}^2$$

- Curvatura de plastificación primera

$$X_c = \frac{-\varepsilon_c}{0 - \xi_{el}^+} = \frac{-5.15 \cdot 10^{-4}}{0 - 0.213} = 2.42 \cdot 10^{-3} \text{ 1/m}$$

$$X_y = \frac{-\varepsilon_y}{z_y - \xi_{el}^+} = \frac{-1.74 \cdot 10^{-3}}{0.05 - 0.213} = 1.07 \cdot 10^{-2} \text{ 1/m}$$

$$X_s = \frac{\varepsilon_s}{H - \xi_{el}^+} = \frac{1.07 \cdot 10^{-3}}{0.686 - 0.213} = 2.26 \cdot 10^{-3} \text{ 1/m}$$

$$X_{el}^+ = 2.26 \cdot 10^{-3} \text{ 1/m}$$

- Momento elástico

$$M_{el}^+ = (EI)^+ X_{el}^+ = 4.37 \cdot 10^5 \cdot 2.26 \cdot 10^{-3} = 987 \text{ KNm}$$

- Momento efectivo  $M_{2ct}$

$$\sigma_{2ct} = 2 f_{ctm} = 2 \cdot 2.9 = 5.8 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{2ct} = \frac{\sigma_{2ct}}{E_c} = \frac{5.8 \cdot 10^6}{33 \cdot 10^9} = 1.76 \cdot 10^{-4}$$

$$X_{2ct} = -\frac{\varepsilon_{2ct}}{\xi_{el}^+} = -8.26 \cdot 10^{-4} \text{ 1/m}$$

$$M_{2ct} = (EI)^+ X_{2ct} = 4.37 \cdot 10^5 \cdot (-8.26 \cdot 10^{-4}) = -360 \text{ KNm}$$

### Flexión negativa

- Fibra neutra elástica  $\xi_{el}^-$

$$\xi_{el}^- = \frac{\sum_i A_{i(R)} z_i}{\sum_i A_{i(R)}} = \frac{1.20 \cdot 10^{-3} \cdot 50 + 1.68 \cdot 10^{-2} \cdot 418}{1.20 \cdot 10^{-3} + 1.68 \cdot 10^{-2}} = 393 \text{ mm}$$

- Rigidez a flexión

$$\begin{aligned}
 I &= A_{yR} (z_y - \xi_{el}^-)^2 + A_1 (z_1 - \xi_{el}^-)^2 + I_{wg} + A_w (z_w - \xi_{el}^-)^2 + A_2 (z_2 - \xi_{el}^-)^2 = \\
 &= 1.20 \cdot 10^{-3} (0.05 - 0.393)^2 \\
 &\quad + 5.40 \cdot 10^{-3} (0.159 - 0.393)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{12} \cdot 0.012 \cdot 0.5^3 + 6.00 \cdot 10^{-3} (0.418 - 0.393)^2 \\
 &\quad + 5.40 \cdot 10^{-3} (0.677 - 0.393)^2 \\
 &= 1.03 \cdot 10^{-3} m^4
 \end{aligned}$$

$$(EI)^+ = E_s I = 210 \cdot 10^9 \cdot 1.03 \cdot 10^{-3} = 2.16 \cdot 10^5 \text{ KNm}^2$$

- Curvatura de plastificación primera

$$X_y = \frac{\varepsilon_y}{z_y - \xi_{el}^-} = \frac{1.74 \cdot 10^{-3}}{0.05 - 0.393} = -5.07 \cdot 10^{-3} \text{ 1/m}$$

$$X_s = \frac{-\varepsilon_s}{H - \xi_{el}^-} = \frac{-1.07 \cdot 10^{-3}}{0.686 - 0.393} = -3.65 \cdot 10^{-3} \text{ 1/m}$$

$$X_{el}^- = -3.65 \cdot 10^{-3} \text{ 1/m}$$

- Momento elástico

$$M_{el}^- = (EI)^- X_{el}^- = 2.16 \cdot 10^5 \cdot (-3.65 \cdot 10^{-3}) = -788 \text{ KNm}$$

## RESISTENCIA A CORTANTE

- Resistencia plástica

$$V_{pl} = \frac{d t_w f_{sd}}{\sqrt{3}} = \frac{0.5 \cdot 0.012 \cdot 223 \cdot 10^6}{\sqrt{3}} = 775 \text{ KN}$$

- Abolladura

$$\frac{d}{t_w} = \frac{500}{12} = 41.67 \quad \frac{72}{\eta} \varepsilon = \frac{72}{1} \cdot 1 = 72$$

$$\frac{d}{t_w} < \frac{72}{\eta} \varepsilon \Rightarrow \text{No hay abolladura del alma por cortante}$$

- Resistencia de cálculo a cortante

$$V_{Rd} = \min \{V_{pl}, V_b\} = \min \{775, \emptyset\} = 775 \text{ KN}$$

## RESISTENCIA PLÁSTICA A FLEXIÓN

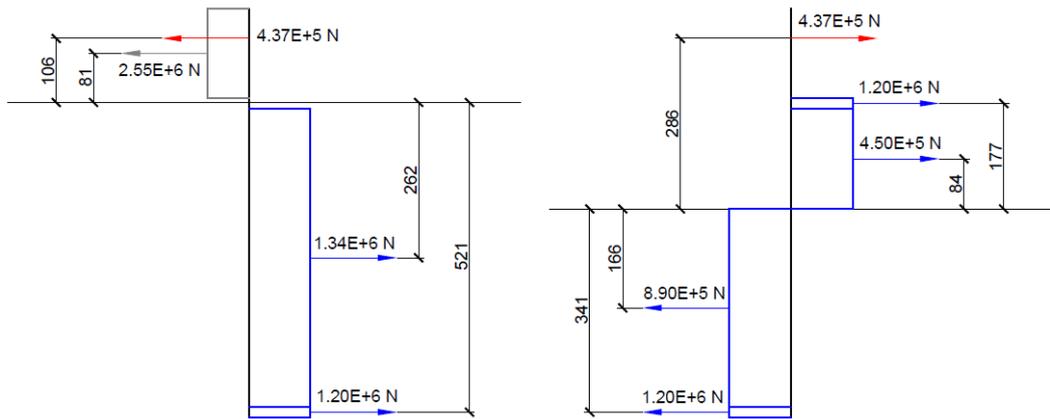


Fig. 4-3 Ejemplo 1: tensiones en régimen plástico a flexión positiva y negativa

- Interacción flector-cortante

$$\frac{V_{Ed}}{V_{Rd}} = \frac{0}{775} = 0 < \frac{1}{2} \Rightarrow \text{No hay interacción}$$

Flexión positiva

- Momento resistente plástico

Se desprecia el momento del ala superior por estar la fibra neutra en ella.

$$\begin{aligned} M_{pl}^+ &= \sum_i N_i |z_i - \xi_{pl}^+| = \\ &= 2.55 \cdot 10^6 \cdot 0.081 + 4.37 \cdot 10^5 \cdot 0.106 + 1.34 \cdot 10^6 \cdot 0.262 + 1.20 \cdot 10^6 \cdot 0.521 \\ &= 1229 \text{ KNm} \end{aligned}$$

Flexión negativa

- Momento resistente plástico

$$\begin{aligned} M_{pl}^- &= \sum_i N_i |z_i - \xi_{pl}^-| = \\ &= 4.37 \cdot 10^5 \cdot 0.286 + 1.20 \cdot 10^6 \cdot 0.177 + 4.50 \cdot 10^5 \cdot 0.084 + 8.90 \cdot 10^5 \cdot 0.166 + 1.20 \cdot 10^6 \cdot 0.341 = \\ &= 931 \text{ KNm} \end{aligned}$$

## CONEXIÓN

- Resistencia individual de un perno

$$P_{Rd,1} = \frac{0.8 f_u \pi \frac{d_v^2}{4}}{\gamma_v} = \frac{0.8 \cdot 500 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot \frac{0.02^2}{4}}{1.25} = 101 \text{ KN}$$

$$\alpha = 0.2 \left( \frac{h_t}{d_v} + 1 \right) = 0.2 \cdot \left( \frac{70}{20} + 1 \right) = 0.9$$

$$P_{Rd,2} = \frac{0.29\alpha d_v^2 \sqrt{f_{ck} E_{cm}}}{\gamma_V} = \frac{0.29 \cdot 0.9 \cdot 0.02^2 \cdot \sqrt{30 \cdot 10^6 \cdot 33 \cdot 10^9}}{1.25} = 83 \text{ KN}$$

$$P_{Rd} = \min \{P_{Rd,1}, P_{Rd,2}\} = \min \{101, 83\} = 83 \text{ KN}$$

- Separación máxima de los pernos

$$N_{c,el} = E_{cm} X_{el}^+ A_c |z_c - \xi_{el}^+| = 33 \cdot 10^9 \cdot 2.26 \cdot 10^{-3} \cdot 1.50 \cdot 10^{-1} |0.075 - 0.213| = 1.54 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$N_{y,el} = E_y X_{el}^+ A_y |z_y - \xi_{el}^+| = 200 \cdot 10^9 \cdot 2.26 \cdot 10^{-3} \cdot 1.26 \cdot 10^{-3} \cdot |0.05 - 0.213| = 9.28 \cdot 10^4 \text{ N}$$

$$N_{el} = N_{c,el} + N_{y,el} = 1.54 \cdot 10^6 + 9.28 \cdot 10^4 = 1.63 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$K = n_f P_{Rd} \frac{M_{el}}{N_{el}} = 1 \cdot 83 \cdot 10^3 \cdot \frac{987 \cdot 10^3}{1.63 \cdot 10^6} = 5.03 \cdot 10^4 \text{ Nm}$$

$$s_t [\text{mm}] \leq K [\text{Nm}] \frac{1}{V(x) [\text{KN}]} = \frac{5.03 \cdot 10^4}{V [\text{KN}]}$$

$$s_t [\text{mm}] \leq \frac{5.03 \cdot 10^4}{V [\text{KN}]}$$

Con la ley de flectores dada el cortante máximo es 160 KN y está en los extremos. En esos puntos es donde se tiene la separación más restrictiva y debe ser menor a:

$$s_t \leq \frac{5.03 \cdot 10^4}{160} = 314 \text{ mm}$$

## ESFUERZO RASANTE

En un análisis elástico sin tener en cuenta la deformación de la conexión la distribución de esfuerzos rasantes obtenida es lineal con valores extremos en los apoyos de la viga:

$$R(x) = \frac{N_{el}}{M_{el}} V(x) = \frac{1.63 \cdot 10^6}{987 \cdot 10^3} V(x) = 1.658 V(x) = 1.68 \cdot 160 = 269 \text{ KNm}^{-1}$$

En un análisis elástico del esfuerzo rasante teniendo en cuenta la deformación de la conexión, según se muestra en los resultados del programa, la distribución obtenida es similar en la mayor parte de la longitud de la viga salvo en los extremos donde el valor del rasante disminuye a un valor de 202 KNm<sup>-1</sup> (ver Fig. 4-4)

## FLECHA

Con un comportamiento elástico-lineal de la sección sin tener en cuenta la deformación de la conexión se estima la flecha en:

$$\delta = \frac{5}{384} \cdot \frac{qL^4}{EI} = \frac{5}{384} \cdot 8 \cdot \frac{qL^2}{8} \cdot \frac{L^2}{EI} = \frac{5}{48} \frac{M_V L^2}{EI} = \frac{5}{48} \cdot \frac{600 \cdot 10^3 \cdot 15^2}{4.37 \cdot 10^8} = 31 \text{ mm}$$

La deformación de la conexión aumenta la flexibilidad de la sección (disminuye su rigidez a flexión) y, según el resultado del programa, la flecha ascendería a 37 mm (ver Fig. 4-4).

## COMPARATIVA DE RESULTADOS

		Cálculo manual	MixtasCalc
<b>Clasificación flexión positiva</b>			
Fibra neutra plástica	mm	156	156
Clasificación	--	Clase 1	Clase 1
<b>Clasificación flexión negativa</b>			
Fibra neutra plástica	mm	336	337
Clasificación	--	Clase 1	Clase 1
<b>Resistencia elástica a flexión positiva</b>			
Fibra neutra elástica	mm	213	213
Rigidez a flexión	KNm <sup>2</sup>	4,37E+05	4,37E+05
Curvatura elástica	1/m	2,26E-03	2,25E-03
Momento elástico	KNm	987	984
Momento efectivo	KNm	-360	-361
<b>Resistencia elástica a flexión negativa</b>			
Fibra neutra elástica	mm	393	394
Rigidez a flexión	KNm <sup>2</sup>	2,16E+05	2,10E+05
Curvatura elástica	1/m	-3,65E-03	-3,64E-03
Momento elástico	KNm	-788	766
<b>Resistencia cortante</b>			
Resistencia plástica	KN	775	775
Abolladura	--	No	No
Resistencia de cálculo	KN	7,75E+02	7,75E+02
Reducción por interacción M-V	--	0	0
<b>Resistencia plástica a flexión positiva</b>			
Momento plástico	KNm	1229	1240
<b>Resistencia plástica a flexión negativa</b>			
Momento plástico	KNm	931	934
<b>Conexión: resistencia elástica</b>			
Resistencia individual del perno	KN	83	83
Valor K (separación máxima)	Nm	5,03E+04	5,02E+04

Tabla 4-3 Ejemplo 1: comparativa de resultados

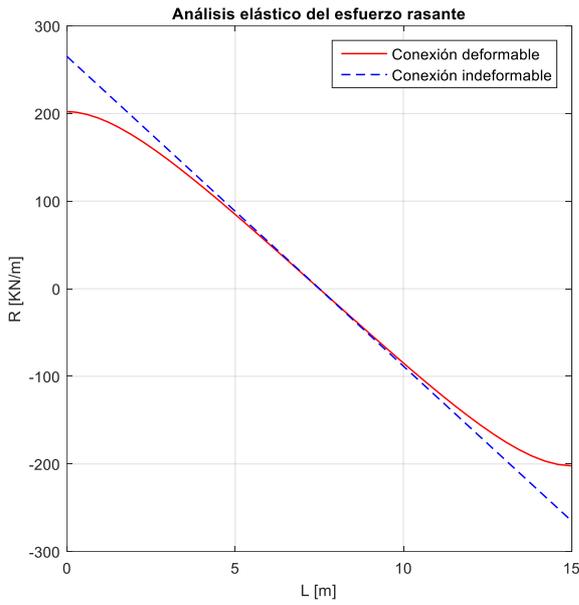


Fig. 4-4.a

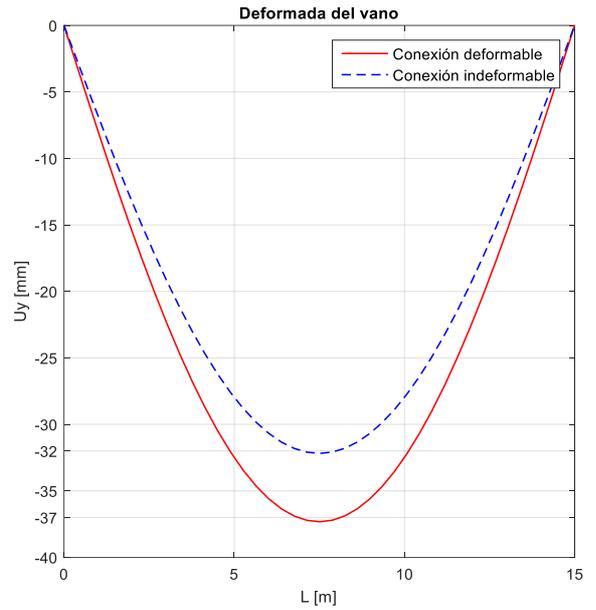


Fig. 4-4.b

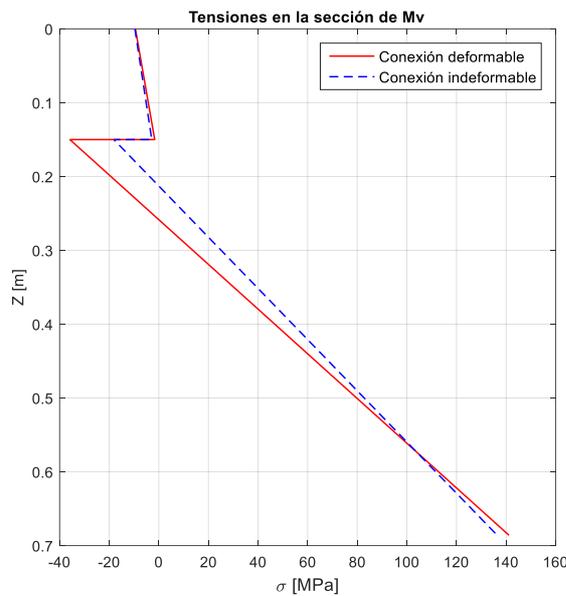


Fig. 4-4.c

Fig. 4-4 Ejemplo 1: Análisis elástico del esfuerzo rasante

- a) Distribución del esfuerzo rasante
- b) Deformada de la viga
- c) Tensiones en sección de  $M_V$

### TENSIONES EN SECCIÓN DE $M_V$

En la sección de momento máximo sin tener en cuenta la deformación de la conexión se tienen en hormigón y acero unas tensiones máximas de:

$$X_v = \frac{M_v}{EI} = \frac{600 \cdot 10^3}{4.37 \cdot 10^8} = 1.37 \cdot 10^{-3} \text{ 1/m}$$

$$\varepsilon(z) = X_v (z - \xi_{el}^+) = 1.37 \cdot 10^{-3} (z - 0.213)$$

$$\sigma_c = E_c \varepsilon(0) = 33 \cdot 10^9 \cdot 1.37 \cdot 10^{-3} \cdot (0 - 0.213) = -9.63 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = E_s \varepsilon(H) = 210 \cdot 10^9 \cdot 1.37 \cdot 10^{-3} \cdot (0.686 - 0.213) = 136 \text{ MPa}$$

Y teniendo en cuenta la deformación de la conexión:

$$X_v = 1.57 \cdot 10^{-3} \text{ 1/m} \quad \varepsilon_{c0} = -2.86 \cdot 10^{-4} \quad \varepsilon_{s0} = 4.07 \cdot 10^{-4}$$

$$\sigma_c = E_c \varepsilon(0) = E_c (\varepsilon_{c0} + X_v \cdot 0) = 33 \cdot 10^9 \cdot (-2.86 \cdot 10^{-4}) = -9.44 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = E_s \varepsilon(H) = E_s (\varepsilon_{s0} + X_v H) = 210 \cdot 10^9 (4.07 \cdot 10^{-4} + 1.57 \cdot 10^{-3} \cdot 0.686) = 141 \text{ MPa}$$

### CONCLUSIONES: INFLUENCIA DE LA DEFORMACIÓN DE LA CONEXIÓN

El rasante llega a variar un 25% en los extremos, pero prácticamente es idéntico al obtenido sin deformación de la conexión en la mayor parte de la longitud de la viga. Además, la variación es de disminución con lo que los resultados asumiendo interacción completa están del lado de la seguridad.

La flecha aumenta casi un 20%, incremento para nada despreciable. La flecha pasa de ser del orden de  $L/500$  a  $L/400$ . Si se apura el ELS de deformaciones no teniendo en cuenta la flexibilidad que introduce la conexión es bastante probable que en la práctica se sobrepase el límite.

Por último, en cuanto a las tensiones máximas en los materiales de la sección, apenas varía un 2% en el hormigón y un 4% en el acero. Estas variaciones son justificadamente despreciables.

Se concluye que estudiar la respuesta de la viga con deformación de la conexión en régimen elástico será necesario para comprobación de ELS de deformaciones cuando el resultado sin tener en cuenta esta deformación sea comprometido en el sentido de que esté cerca del valor límite.

## 4.2 Ejemplo 2: Sección reducida de un perfil metálico clase 4

Para la siguiente sección metálica se quiere obtener sus parámetros resistentes a flexión. Las dimensiones se especifican a continuación. El material es acero S275 con un coeficiente parcial de seguridad para la resistencia de 1,05.

### DATOS

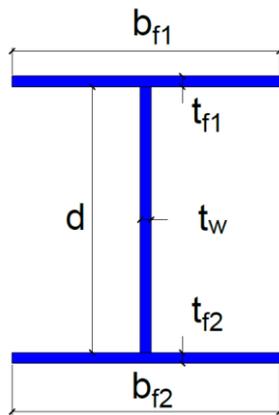


Fig. 4-5.a



Fig. 4-5.b

Fig. 4-5 Ejemplo 2:  
a) Notación para dimensiones  
b) Dibujo a escala de la sección

GEOMETRÍA SECCIÓN			ACERO S 275		
$d$	mm	1000	$E_s$	GPa	210
$t_w$	mm	8	$f_{sk}$	MPa	275
$b_{f1}$	mm	500	$\gamma_M$	--	1,05
$t_{f1}$	mm	10	$f_{sd}$	MPa	261
$b_{f2}$	mm	500	$\epsilon_s$	--	1,24 E-03
$t_{f2}$	mm	10	$n_s$	--	1

Tabla 4-4 Ejemplo 2: valores de dimensiones y propiedades del material

### MAGNITUDES PREVIAS

$$A_1 = b_{f1} t_{f1} = 0.5 \cdot 0.010 = 5.00 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A_w = d t_w = 1 \cdot 0.008 = 8.00 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A_2 = b_{f2} t_{f2} = 0.5 \cdot 0.010 = 5.00 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A_s = A_1 + A_w + A_2 = 5.00 \cdot 10^{-3} + 8.00 \cdot 10^{-3} + 5.00 \cdot 10^{-3} = 1.80 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$N_1 = A_1 f_{sd} = 5.00 \cdot 10^{-3} \cdot 261 \cdot 10^6 = 1.31 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$N_w = A_w f_{sd} = 8.00 \cdot 10^{-3} \cdot 261 \cdot 10^6 = 2.09 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$N_2 = A_2 f_{sd} = 5.00 \cdot 10^{-3} \cdot 261 \cdot 10^6 = 1.31 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$N_s = A_s f_{sd} = 1.80 \cdot 10^{-2} \cdot 261 \cdot 10^6 = 4.70 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$z_1 = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5 \text{ mm}$$

$$z_w = 10 + \frac{1}{2} \cdot 1000 = 510 \text{ mm}$$

$$z_2 = 10 + 1000 + \frac{1}{2} \cdot 10 = 1015 \text{ mm}$$

$$z_s = 510 \text{ mm}$$

$$H = 10 + 1000 + 10 = 1020 \text{ mm}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_{sk} [\text{MPa}]}} = \sqrt{\frac{235}{275}} = 0.92$$

	ÁREAS	AXILES PLAST.	BARICENTROS
Ala superior	$A_1$ m <sup>2</sup> 5,00E-3	$N_1$ N 1,31E+6	$z_1$ mm 5
Alma	$A_w$ m <sup>2</sup> 8,00E-3	$N_w$ N 2,09E+6	$z_w$ mm 510
Ala inferior	$A_2$ m <sup>2</sup> 5,00E-3	$N_2$ N 1,31E+6	$z_2$ mm 1015
Sección metálica	$A_s$ m <sup>2</sup> 1,80E-2	$N_s$ N 4,70E+6	$z_s$ mm 510

Tabla 4-5 Ejemplo 2: valores de magnitudes previas

## CLASIFICACIÓN

- Fibra neutra plástica  $\xi_{pl} = 510 \text{ mm}$

- Clasificación alma

$$\frac{c}{t} = \frac{d}{t_w} = \frac{1000}{8} = 125$$

$$\text{Zona comprimida: } \alpha C = 510 - 10 = 500 \text{ mm} \Rightarrow \alpha = \frac{500}{1000} = 0.50$$

$$\frac{36\varepsilon}{\alpha} = \frac{36 \cdot 0.92}{0.50} = 66.24 < 125 \Rightarrow \text{No es clase 1}$$

$$\frac{41.5\varepsilon}{\alpha} = \frac{41.5 \cdot 0.92}{0.50} = 76.36 < 125 \Rightarrow \text{No es clase 2}$$

- Fibra neutra plástica  $\xi_{el} = 510 \text{ mm}$

$$\psi = -1$$

$$62\varepsilon(1-\psi)\sqrt{-\psi} = 62 \cdot 0.92 \cdot (1 - (-1))\sqrt{-(-1)} = 114.09 < 125 \Rightarrow \text{No es clase 3, por lo que es clase 4.}$$

- Reducción ala superior

$$k_\sigma = 0.43$$

$$\bar{\lambda}_p = \frac{c/t}{28.4\varepsilon\sqrt{k_\sigma}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 500/10}{28.4 \cdot 0.92 \cdot \sqrt{0.43}} = 1.46$$

$$\rho = \frac{\bar{\lambda}_p - 0.188}{\bar{\lambda}_p^2} = \frac{1.46 - 0.188}{1.46^2} = 0.597$$

$$b_{eff} = \rho b_{f1} = 0.597 \cdot 500 = 299 \text{ mm}$$

$$b_{n1} = (1 - \rho)b_{f1} = 201 \text{ mm}$$

$$A_{n1} = b_{n1}t_{f1} = 0.201 \cdot 0.010 = 2.01 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$z_{n1} = 5 \text{ mm}$$

- Nueva fibra neutra elástica

$$\xi_{el} = \frac{A_s z_s - A_{n1} z_{n1}}{A_s - A_{n1}} = \frac{1.8 \cdot 10^{-2} \cdot 0.510 - 2.01 \cdot 10^{-3} \cdot 0.005}{1.8 \cdot 10^{-2} - 2.01 \cdot 10^{-3}} = 573 \text{ mm}$$

- Reducción alma

$$\bar{b}_c = 573 - 10 = 563 \text{ mm} \quad \alpha = \frac{\bar{b}_c}{d} = \frac{563}{1000} = 0.563$$

$$\psi = -\frac{1 - \alpha}{\alpha} = -\frac{1 - 0.563}{0.563} = -0.776$$

$$k_\sigma = 7.81 - 6.29\psi + 9.78\psi^2 = 7.81 - 6.29(-0.773) + 9.78 \cdot (-0.773)^2 = 18.52$$

$$\bar{\lambda}_p = \frac{d/t_w}{28.4\varepsilon\sqrt{k_\sigma}} = \frac{1000/8}{28.4 \cdot 0.92 \cdot \sqrt{18.52}} = 1.112$$

$$\rho = \frac{\bar{\lambda}_p - 0.055 \cdot (3 + \psi)}{\bar{\lambda}_p^2} = \frac{1.112 - 0.055 \cdot (3 + (-0.776))}{1.112^2} = 0.800$$

$$b_{eff} = \rho \bar{b}_c = 0.800 \cdot 563 = 450 \text{ mm}$$

$$b_{e1} = 0.4b_{eff} = 0.4 \cdot 450 = 180 \text{ mm}$$

$$b_{e2} = 0.6b_{eff} = 0.6 \cdot 450 = 270 \text{ mm}$$

$$b_{mv} = (1 - \rho)\bar{b}_c = (1 - 0.800) \cdot 563 = 113 \text{ mm}$$

$$A_{nw} = b_{nw} t_w = 0.113 \cdot 0.008 = 9.04 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$z_{nw} = t_{f1} + b_{e1} + \frac{1}{2} \cdot b_{nw} = 10 + 180 + \frac{1}{2} \cdot 113 = 247 \text{ mm}$$

- Nueva fibra neutra elástica

$$\xi_{el} = \frac{A_s z_s - A_{n1} z_{n1} - A_{nw} z_{nw}}{A_s - A_{n1} - A_{nw}} = \frac{1.8 \cdot 10^{-2} \cdot 0.510 - 2.01 \cdot 10^{-3} \cdot 0.005 - 9.04 \cdot 10^{-4} \cdot 0.247}{1.8 \cdot 10^{-2} - 2.01 \cdot 10^{-3} - 9.04 \cdot 10^{-4}} = 593 \text{ mm}$$

$$\bar{b}_c = 593 - 10 = 583 \text{ mm}$$

$$b_{e1} = 180 \text{ mm} \quad b_{e2} = 270 \text{ mm}$$

$$b_{nw} = \bar{b}_c - (b_{e1} + b_{e2}) = 583 - (180 + 270) = 133 \text{ mm}$$

$$A_{nw} = b_{nw} t_w = 0.133 \cdot 0.008 = 1.06 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$z_{nw} = t_{f1} + b_{e1} + \frac{1}{2} b_{nw} = 10 + 180 + \frac{1}{2} \cdot 133 = 257 \text{ mm}$$

## RESISTENCIA ELÁSTICA A FLEXIÓN

- Rigidez a flexión

$$\begin{aligned} I_s &= \frac{1}{12} t_w d^3 + A_w (z_w - \xi_{el})^2 + A_1 (z_1 - \xi_{el})^2 + A_2 (z_2 - \xi_{el})^2 = \\ &= \frac{1}{12} \cdot 0.008 \cdot 1^3 + 8 \cdot 10^{-3} (0.510 - 0.593)^2 + 5 \cdot 10^{-3} \cdot (0.005 - 0.593)^2 + 5 \cdot 10^{-3} \cdot (1.015 - 0.593)^2 \\ &= 3.34 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

$$I_{n1} = A_{n1} (z_{n1} - \xi_{el})^2 = 2.01 \cdot 10^{-3} \cdot (0.005 - 0.593)^2 = 6.95 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_{nw} = \frac{1}{12} t_w b_{nw}^3 + A_{nw} (z_{nw} - \xi_{el})^2 = \frac{1}{12} \cdot 0.008 \cdot 0.133^3 + 1.06 \cdot 10^{-3} \cdot (0.257 - 0.593)^2 = 1.31 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I = I_s - I_{n1} - I_{nw} = 3.34 \cdot 10^{-3} - 6.95 \cdot 10^{-4} - 1.31 \cdot 10^{-4} = 2.51 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$EI = 210 \cdot 10^9 \cdot 2.51 \cdot 10^{-3} = 5.27 \cdot 10^5 \text{ KNm}^2$$

- Módulo resistente elástico

$$W_{el} = \frac{I_G}{|z_m - \xi_{el}|} = \frac{2.51 \cdot 10^{-3}}{|0 - 0.593|} = 4.23 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

- Curvatura de plastificación primera

$$X_s = \frac{-\varepsilon_s}{0 - \xi_{el}} = \frac{-1.24 \cdot 10^{-3}}{0 - 0.593} = 2.09 \cdot 10^{-3} \text{ 1/m}$$

$$X_{el} = 2.09 \cdot 10^{-3} \text{ 1/m}$$

- Momento elástico

$$M_{el} = EIX_{el} = 5.27 \cdot 10^5 \cdot 2.09 \cdot 10^{-3} = 1101 \text{ KNm} \text{ y también se puede obtener como:}$$

$$M_{el} = W_{el} \cdot f_{sd} = 4.23 \cdot 10^{-3} \cdot 261 \cdot 10^6 = 1104 \text{ KNm}$$

### RESISTENCIA A CORTANTE

- Resistencia plástica

$$V_{pl} = \frac{d t_w f_{sd}}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot 0.008 \cdot 261 \cdot 10^6}{\sqrt{3}} = 1206 \text{ KN}$$

- Abolladura por cortante

$$\frac{d}{t_w} = \frac{1000}{8} = 125 \quad \frac{72}{\eta} \varepsilon = \frac{72}{1} \cdot 0.92 = 66.24$$

$$\frac{d}{t_w} > \frac{72}{\eta} \varepsilon \Rightarrow \text{Hay abolladura del alma por cortante}$$

$$\chi = 72 \varepsilon \frac{t_w}{d} = 72 \cdot 0.92 \cdot \frac{8}{1000} = 0.53$$

$$V_b = \chi V_{pl} = 0.53 \cdot 1206 = 639 \text{ KN}$$

- Resistencia de cálculo a cortante

$$V_{Rd} = \min \{V_{pl}, V_b\} = \min \{1206, 639\} = 639 \text{ KN}$$

## COMPARATIVA DE RESULTADOS

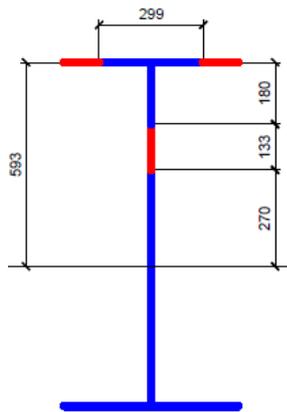


Fig. 4-6.a

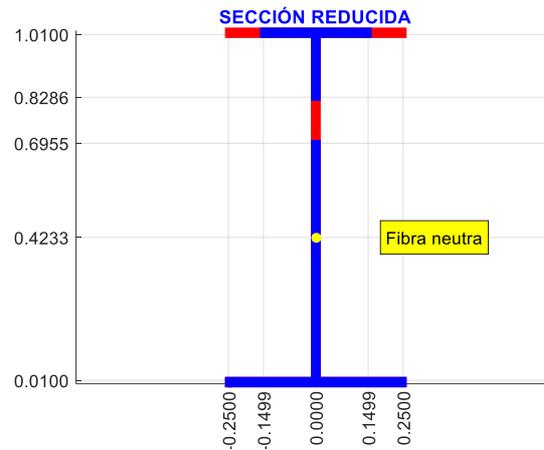


Fig. 4-6.b

Fig. 4-6 Ejemplo 2: sección reducida

a) Por cálculo manual

b) Según programa MixtasCalc

		Cálculo manual	MixtasCalc
<b>Clasificación</b>			
Fibra neutra elástica	mm	593	597
Clasificación	--	Clase 4	Clase 4
<b>Reducción ala superior</b>			
Ancho efectivo	mm	299	300
Ancho no efectivo	mm	201	200
<b>Reducción alma</b>			
Canto efectivo	mm	867	867
Canto no efectivo	mm	133	133
<b>Resistencia elástica a flexión</b>			
Rigidez a flexión	KNm <sup>2</sup>	5,27E+05	5,31E+05
Curvatura elástica	1/m	2,09E-03	2,09E-03
Módulo resistente elástico	m <sup>3</sup>	4,23E-03	4,25E-03
Momento elástico	KNm	1101	1111
<b>Resistencia cortante</b>			
Resistencia plástica	KN	1206	1206
Abolladura	KN	639	644
Resistencia de cálculo	KN	639	644

Tabla 4-6 Ejemplo 2: comparativa de resultados

### 4.3 Ejemplo 3: Análisis elastoplástico del esfuerzo rasante

Se quiere calcular una viga simplemente apoyada de 35 m de luz con una sección tipo cajón con losa de hormigón peraltada. En la losa se han colocado dos filas de armadura: la primera de 8 barras de diámetro 20 mm con un recubrimiento mecánico de 50 mm y la segunda de 8 barras de diámetro 20 mm con un recubrimiento mecánico de 200 mm respecto de la superficie superior de la losa. Para el hormigón se va a utilizar la clase C40/50 con un coeficiente de seguridad de 1,50, para el acero estructural el tipo S275 con un coeficiente de 1,05 y para la armadura acero B400S con un coeficiente de 1,15.

La viga está sometida a una carga uniformemente distribuida correspondiente a la comprobación de un ELU que produce un momento máximo de 23000 KNm. En cuanto a la conexión, se han dispuesto 4 pernos por sección cada 500 mm. Las dimensiones se especifican a continuación. El material del perno es un acero de 500 MPa de resistencia. Se le aplicará un coeficiente de seguridad de 1,25.

#### DATOS

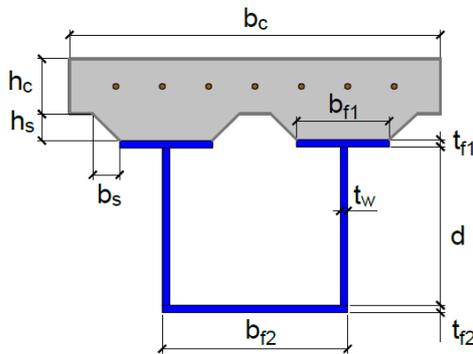


Fig. 4-7.a

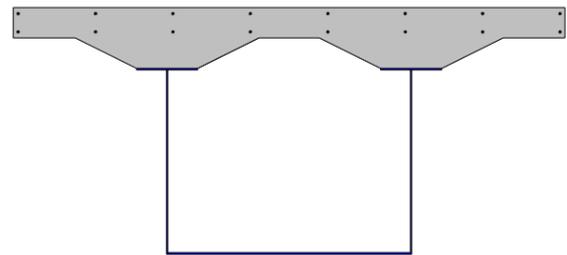


Fig. 4-7.b

Fig. 4-7 Ejemplo 3:  
a) Sección tipo y notación de dimensiones  
b) Dibujo a escala de la sección

GEOMETRÍA SECCIÓN	ARMADURA	HORMIGÓN C40/50	ACERO S 275	ARMADURA B 400 S
$b_c$ mm 4500	Fila 1 -- 8 $\phi$ 20 mm 50	$E_c$ GPa 35	$E_s$ GPa 210	$E_y$ GPa 200
$h_c$ mm 250		$f_{ck}$ MPa 40	$f_{sk}$ MPa 275	$f_{yk}$ MPa 400
$d$ mm 1500	Fila 2 -- 8 $\phi$ 20 mm 200	$\gamma_M$ -- 1,5	$\gamma_M$ -- 1,05	$\gamma_M$ -- 1,15
$t_w$ mm 10		$f_{cd}$ MPa 23	$f_{sd}$ MPa 261	$f_{yd}$ MPa 347
$b_{f1}$ mm 500		$\epsilon_c$ -- 6,57 E-04	$\epsilon_s$ -- 1,24 E-03	$\epsilon_y$ -- 1,74 E-03
$t_{f1}$ mm 12		$n_c$ -- 6	$n_s$ -- 1	$n_y$ -- 1,05
$b_{f2}$ mm 500		$f_{ctm}$ MPa 3,5		
$t_{f2}$ mm 12				
$h_s$ mm 250				
$b_s$ mm 500				

Tabla 4-7 valores de dimensiones y propiedades de los materiales

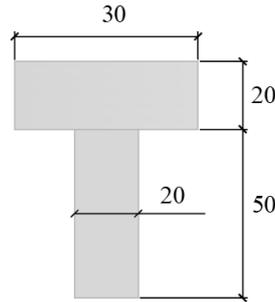


Fig. 4-8 Ejemplo 3: dimensiones de los pernos conectadores

### MAGNITUDES PREVIAS

Expresión analítica del ancho de hormigón en el canto con peralte:

$$b(z) = 2b_{f1} + 4b_s \left( 1 + \frac{h_c - z}{h_s} \right) \quad \text{para } h_c \leq z \leq h_c + h_s$$

$$b(z) = 2 \cdot 0.5 + 4 \cdot 0.5 \cdot \left( 1 + \frac{0.25 - z}{0.25} \right) = 5 - 8z \quad \text{para } 0.25 \text{ m} \leq z \leq 0.5 \text{ m}$$

Tomando una coordenada local  $z' = z - h_c = z - 0.25$ :

$$b(z') = 5 - 8(z' + 0.25) = 3 - 8z' \quad \text{para } 0 \leq z' \leq 0.25 \text{ m}$$

Otras magnitudes previas:

$$A_{c1} = b_c h_c = 0.250 \cdot 4.5 = 1.13 \text{ m}^2$$

$$A_{c2} = \int_0^{h_s} b(z') dz' = \int_0^{0.25} (3 - 8z') dz = 0.5 \text{ m}^2$$

$$A_c = A_{c1} + A_{c2} = 1.13 + 0.5 = 1.63 \text{ m}^2$$

$$A_{y1} = N_b \frac{\pi}{4} \phi^2 = 8 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0.02^2 = 2.51 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A_{y2} = N_b \frac{\pi}{4} \phi^2 = 8 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0.02^2 = 2.51 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A_y = A_{y1} + A_{y2} = 2.51 \cdot 10^{-3} + 2.51 \cdot 10^{-3} = 5.02 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A_1 = 2b_{f1} t_{f1} = 2 \cdot 0.5 \cdot 0.012 = 1.2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$A_w = 2d t_w = 2 \cdot 1.5 \cdot 0.010 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$A_2 = b_{f2} t_{f2} = 2 \cdot 0.015 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$A_s = A_1 + A_w + A_2 = 1.2 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-2} = 7.2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$N_{c1} = A_{c1} f_{cd} = 1.13 \cdot 23 \cdot 10^6 = 2.60 \cdot 10^7 \text{ N}$$

$$N_{c2} = A_{c2} f_{cd} = 0.5 \cdot 23 \cdot 10^6 = 1.15 \cdot 10^7 \text{ N}$$

$$N_c = A_c f_{cd} = 1.63 \cdot 23 \cdot 10^6 = 3.75 \cdot 10^7 \text{ N}$$

$$N_{y1} = A_{y1} f_{yd} = 2.51 \cdot 10^{-3} \cdot 347 \cdot 10^6 = 8.75 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$N_{y2} = A_{y2} f_{yd} = 2.51 \cdot 10^{-3} \cdot 347 \cdot 10^6 = 8.75 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$N_y = A_y f_{yd} = 5.02 \cdot 10^{-3} \cdot 347 \cdot 10^6 = 1.74 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$N_1 = A_1 f_{sd} = 1.2 \cdot 10^{-2} \cdot 261 \cdot 10^6 = 3.13 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$N_w = A_w f_{sd} = 3 \cdot 10^{-2} \cdot 261 \cdot 10^6 = 7.83 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$N_2 = A_2 f_{sd} = 3 \cdot 10^{-2} \cdot 261 \cdot 10^6 = 7.83 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$N_s = A_s f_{sd} = 7.2 \cdot 10^{-2} \cdot 261 \cdot 10^6 = 1.88 \cdot 10^7 \text{ N}$$

$$z_{c1} = \frac{1}{2} h_c = \frac{1}{2} \cdot 250 = 125 \text{ mm}$$

$$z_{c2} = \frac{\int_{h_c}^{h_c+h_s} b(z) z dz}{A_{c2}} = \frac{\int_0^{0.5} (5-8z) z dz}{0.5} = 354 \text{ mm}$$

$$z_c = \frac{A_{c1} z_{c1} + A_{c2} z_{c2}}{A_c} = \frac{1.13 \cdot 125 + 0.5 \cdot 354}{1.63} = 195 \text{ mm}$$

$$z_{y1} = 50 \text{ mm} \quad z_{y2} = 200 \text{ mm} \quad z_y = \frac{z_{y1} + z_{y2}}{2} = \frac{50 + 200}{2} = 125 \text{ mm}$$

$$z_1 = h_c + h_s + \frac{1}{2} t_{f1} = 250 + 250 + \frac{1}{2} \cdot 12 = 506 \text{ mm}$$

$$z_w = h_c + h_s + t_{f1} + \frac{1}{2} d = 250 + 250 + 12 + \frac{1}{2} \cdot 1500 = 1262 \text{ mm}$$

$$z_2 = h_c + h_s + t_{f1} + d + \frac{1}{2} t_{f2} = 250 + 250 + 12 + 1500 + \frac{1}{2} \cdot 15 = 2020 \text{ mm}$$

$$z_s = \frac{A_1 z_1 + A_w z_w + A_2 z_2}{A_s} = \frac{1.2 \cdot 10^{-2} \cdot 506 + 3 \cdot 10^{-2} \cdot 1262 + 3 \cdot 10^{-2} \cdot 2020}{7.2 \cdot 10^{-2}} = 1452 \text{ mm}$$

$$H = h_c + h_s + t_{f1} + d + t_{f2} = 250 + 250 + 12 + 1500 + 15 = 2027 \text{ mm}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_{sk} [\text{MPa}]}} = \sqrt{\frac{235}{275}} = 0.92$$

	ÁREAS		AXILES PLAST.		BARICENTROS	
Losa de hormigón	$A_{c1}$	m <sup>2</sup> 1,13	$N_{c1}$	N 2,60E+7	$z_{c1}$	mm 125
Canto peraltado	$A_{c2}$	m <sup>2</sup> 0,5	$N_{c2}$	N 1,15E+7	$z_{c2}$	mm 354
Sección de hormigón	$A_c$	m <sup>2</sup> 1,63	$N_c$	N 3,75E+7	$z_c$	mm 195
Fila 1 armadura	$A_{y1}$	m <sup>2</sup> 2,51E-3	$N_{y1}$	N 8,75E+5	$z_{y1}$	mm 50
Fila 2 armadura	$A_{y2}$	m <sup>2</sup> 2,51E-3	$N_{y2}$	N 8,75E+5	$z_{y2}$	mm 200
Armadura	$A_y$	m <sup>2</sup> 5,02E-3	$N_y$	N 1,74E+6	$z_y$	mm 125
Ala superior	$A_1$	m <sup>2</sup> 1,20E-2	$N_1$	N 3,13E+6	$z_1$	mm 506
Alma	$A_w$	m <sup>2</sup> 3,00E-2	$N_w$	N 7,83E+6	$z_w$	mm 1262
Ala inferior	$A_2$	m <sup>2</sup> 3,00E-2	$N_2$	N 7,83E+6	$z_2$	mm 2020
Sección metálica	$A_s$	m <sup>2</sup> 7,20E-2	$N_s$	N 1,88E+7	$z_s$	mm 1452

Tabla 4-8 Ejemplo 3: valores de magnitudes previas

**CLASIFICACIÓN**Flexión positiva

- Fibra neutra plástica  $\xi_{pl}^+$

$N_c + N_y > N_s \Rightarrow$  Está en sección de hormigón

$N_{c1} + N_y = 2.60 \cdot 10^7 + 1.74 \cdot 10^6 = 2.77 \cdot 10^7 \text{ N} > N_s \Rightarrow$  Está en losa rectangular

$$\frac{x}{h_c} N_{c1} + N_{y1} = N_{y2} + N_s \Rightarrow \frac{x}{250} \cdot 2.60 \cdot 10^7 + 8.71 \cdot 10^5 = 8.71 \cdot 10^5 + 1.88 \cdot 10^7 \Rightarrow x = \xi_{pl}^+ = 181 \text{ mm}$$

Toda la sección metálica está traccionada. La sección es clase 1 a flexión positiva.

Flexión negativa

- Clasificación panel inferior

$$\frac{c}{t} = \frac{2000}{15} = 133 \quad 42\varepsilon = 42 \cdot 0.92 = 38.64$$

$$\frac{c}{t} > 42\varepsilon \Rightarrow \text{Clase 4}$$

Existe al menos un elemento en la sección que es clase 4, con lo que la sección a flexión negativa es clase 4.

- Reducción panel inferior

$$\psi = 1 \quad k_\sigma = 4$$

$$\bar{\lambda}_p = \frac{c/t}{28.4\varepsilon\sqrt{k_\sigma}} = \frac{2000/15}{28.4 \cdot 0.92 \cdot \sqrt{4}} = 2.551$$

$$\rho = \frac{\bar{\lambda}_p - 0.055 \cdot (3 + \psi)}{\bar{\lambda}_p^2} = \frac{2.551 - 0.055 \cdot (3 + 1)}{2.551^2} = 0.358$$

$$b_{eff} = \rho b_{f2} = 0.358 \cdot 2000 = 716 \text{ mm}$$

$$b_{e1} = 0.5b_{eff} = 0.5 \cdot 716 = 358 \text{ mm}$$

$$b_{e2} = 0.5b_{eff} = 0.5 \cdot 716 = 358 \text{ mm}$$

$$b_{n2} = (1 - \rho)b_{f2} = (1 - 0.358) \cdot 2000 = 1284 \text{ mm}$$

$$A_{n2} = b_{n2}t_{f2} = 1.284 \cdot 0.015 = 1.93 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$z_{n2} = 2020 \text{ mm}$$

- Fibra neutra elástica sección completa

$$\xi_{el}^- = \frac{\frac{1}{n_y} A_y z_y + A_s z_s}{\frac{1}{n_y} A_y + A_s} = \frac{1.05 \cdot 5.02 \cdot 10^{-3} \cdot 125 + 7.20 \cdot 10^{-2} \cdot 1452}{\frac{1}{1.05} \cdot 5.02 \cdot 10^{-3} + 7.20 \cdot 10^{-2}} = \frac{1.05 \cdot 10^2}{7.68 \cdot 10^{-2}} = 1367 \text{ mm}$$

- Fibra neutra elástica con panel inferior reducido

$$\xi_{el}^- = \frac{\frac{1}{n_y} A_y z_y + A_s z_s - A_{n2} z_{n2}}{\frac{1}{n_y} A_y + A_s - A_{n2}} = \frac{1.05 \cdot 10^2 - 1.93 \cdot 10^{-2} \cdot 2020}{7.68 \cdot 10^{-2} - 1.93 \cdot 10^{-2}} = \frac{6.60 \cdot 10^1}{5.75 \cdot 10^{-2}} = 1148 \text{ mm}$$

- Reducción alma

$$\bar{b}_c = H - t_{f2} - \xi_{el}^- = 2027 - 15 - 1148 = 864 \text{ mm}$$

$$\alpha = \frac{\bar{b}_c}{d} = \frac{864}{1500} = 0.576 \Rightarrow \psi = -\frac{1 - \alpha}{\alpha} = -\frac{1 - 0.576}{0.576} = -0.736$$

$$k_\sigma = 7.81 - 6.29\psi + 9.78\psi^2 = 7.81 - 6.29(-0.736) + 9.78 \cdot (-0.736)^2 = 17.74$$

$$\bar{\lambda}_p = \frac{d/t_w}{28.4\epsilon\sqrt{k_\sigma}} = \frac{1500/10}{28.4 \cdot 0.92 \cdot \sqrt{17.74}} = 1.363$$

$$\rho = \frac{\bar{\lambda}_p - 0.055 \cdot (3 + \psi)}{\bar{\lambda}_p^2} = \frac{1.363 - 0.055 \cdot (3 + (-0.736))}{1.363^2} = 0.667$$

$$b_{eff} = \rho \bar{b}_c = 0.667 \cdot 864 = 576 \text{ mm}$$

$$b_{e1} = 0.4b_{eff} = 0.4 \cdot 576 = 230 \text{ mm}$$

$$b_{e2} = 0.6b_{eff} = 0.6 \cdot 576 = 346 \text{ mm}$$

$$b_{nw} = (1 - \rho)\bar{b}_c = (1 - 0.667) \cdot 864 = 288 \text{ mm}$$

$$A_{nw} = 2b_{nw}t_w = 2 \cdot 0.288 \cdot 0.010 = 5.76 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$z_{nw} = H - t_{f2} - b_{e1} - \frac{1}{2} b_{nw} = 2027 - 15 - 230 - \frac{1}{2} \cdot 288 = 1638 \text{ mm}$$

- Nueva fibra neutra elástica sección reducida

$$\xi_{el}^- = \frac{\frac{1}{n_y} A_y z_y + A_s z_s - A_{n2} z_{n2} - A_{nw} z_{nw}}{\frac{1}{n_y} A_y + A_s - A_{n2} - A_{nw}} = \frac{6.60 \cdot 10^1 - 5.76 \cdot 10^{-3} \cdot 1638}{5.75 \cdot 10^{-2} - 5.76 \cdot 10^{-3}} = 1093 \text{ mm}$$

$$\bar{b}_c = H - t_{f2} - \xi_{el}^- = 2027 - 15 - 1093 = 919 \text{ mm}$$

$$b_{e1} = 230 \text{ mm}$$

$$b_{e2} = 346 \text{ mm}$$

$$b_{nw} = \bar{b}_c - (b_{e1} + b_{e2}) = 919 - (230 + 346) = 343 \text{ mm}$$

$$A_{nw} = 2 b_{nw} t_w = 2 \cdot 0.343 \cdot 0.010 = 6.86 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$z_{nw} = H - t_{f2} - b_{e1} - \frac{1}{2} b_{nw} = 2027 - 15 - 230 - \frac{1}{2} \cdot 343 = 1611 \text{ mm}$$

## RESISTENCIA ELÁSTICA A FLEXIÓN

### Flexión positiva

- Fibra neutra elástica  $\xi_{el}^+$

$$\xi_{el}^+ = \frac{\frac{1}{n_c} A_c z_c + \frac{1}{n_y} A_y z_y + A_s z_s}{\frac{1}{n_c} A_c + \frac{1}{n_y} A_y + A_s} = \frac{\frac{1}{6} \cdot 1.63 \cdot 0.195 + \frac{1}{1.05} \cdot 5.02 \cdot 10^{-3} \cdot 0.125 + 7.20 \cdot 10^{-2} \cdot 1.452}{\frac{1}{6} \cdot 1.63 + \frac{1}{1.05} \cdot 5.02 \cdot 10^{-3} + 7.20 \cdot 10^{-2}} = \frac{1.58 \cdot 10^{-1}}{3.48 \cdot 10^{-1}} = 454 \text{ mm}$$

Hay hormigón traccionado en  $454 \text{ mm} \leq z \leq 500 \text{ mm}$ . No lo tenemos en cuenta.

$$\xi_{el}^+ = \frac{\frac{1}{n_c} A_c z_c + \frac{1}{n_y} A_y z_y + A_s z_s - \frac{1}{n_c} \int_{\xi_{el}^+}^{h_c+h_s} z b(z) dz}{\frac{1}{n_c} A_c + \frac{1}{n_y} A_y + A_s - \frac{1}{n_c} \int_{\xi_{el}^+}^{h_c+h_s} b(z) dz} = \frac{1.58 \cdot 10^{-1} - \frac{1}{6} \cdot \int_{0.454}^{0.5} (5-8z) z dz}{3.48 \cdot 10^{-1} - \frac{1}{6} \cdot \int_{0.454}^{0.5} (5-8z) dz} = 453 \text{ mm}$$

- Rigidez a flexión

$$I_{c1} = \frac{1}{n_c} \left( \frac{1}{12} b_c h_c^3 + A_{c1} (z_{c1} - \xi_{el}^+)^2 \right) = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{12} \cdot 4.5 \cdot 0.25^3 + 1.13 \cdot (0.125 - 0.453)^2 \right) = 2.12 \cdot 10^{-2} \text{ m}^4$$

$$I_{c2} = \frac{1}{n_c} \int_{h_c}^{\xi_{el}^+} (z - \xi_{el}^+)^2 b(z) dz = \frac{1}{6} \int_{0.25}^{0.453} (z - 0.453)^2 (5 - 8z) dz = 1.21 \cdot 10^{-3} m^4$$

$$I_{y1} = \frac{1}{n_y} A_{y1} (z_{y1} - \xi_{el}^+)^2 = \frac{1}{1.05} \cdot 2.51 \cdot 10^{-3} \cdot (0.05 - 0.453)^2 = 3.88 \cdot 10^{-4} m^4$$

$$I_{y2} = \frac{1}{n_y} A_{y2} (z_{y2} - \xi_{el}^+)^2 = \frac{1}{1.05} \cdot 2.51 \cdot 10^{-3} \cdot (0.2 - 0.453)^2 = 1.53 \cdot 10^{-4} m^4$$

$$I_1 = A_1 (z_1 - \xi_{el}^+)^2 = 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot (0.506 - 0.453)^2 = 3.37 \cdot 10^{-5} m^4$$

$$I_w = 2 \cdot \frac{1}{12} t_w d^3 + A_w (z_w - \xi_{el}^+)^2 = 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0.010 \cdot 1.5^3 + 3 \cdot 10^{-2} \cdot (1.262 - 0.453)^2 = 2.53 \cdot 10^{-2} m^4$$

$$I_2 = A_2 (z_2 - \xi_{el}^+)^2 = 3 \cdot 10^{-2} \cdot (2.020 - 0.453)^2 = 7.37 \cdot 10^{-2} m^4$$

$$\begin{aligned} I &= I_{c1} + I_{c2} + I_{y1} + I_{y2} + I_1 + I_w + I_2 = \\ &= 2.12 \cdot 10^{-2} + 1.21 \cdot 10^{-3} + 3.88 \cdot 10^{-4} + 1.53 \cdot 10^{-4} + 3.37 \cdot 10^{-5} + 2.53 \cdot 10^{-2} + 7.37 \cdot 10^{-2} = \\ &= 1.22 \cdot 10^{-1} m^4 \end{aligned}$$

$$(EI)^+ = E_s I = 210 \cdot 10^9 \cdot 1.22 \cdot 10^{-1} = 2.56 \cdot 10^7 KNm^2$$

- Curvatura de plastificación primera

$$X_c = \frac{-\varepsilon_c}{0 - \xi_{el}^+} = \frac{-6.57 \cdot 10^{-4}}{0 - 0.453} = 1.45 \cdot 10^{-3} 1/m$$

$$X_y = \frac{-\varepsilon_y}{z_{y1} - \xi_{el}^+} = \frac{-1.74 \cdot 10^{-3}}{0.05 - 0.453} = 4.32 \cdot 10^{-3} 1/m$$

$$X_s = \frac{\varepsilon_s}{H - \xi_{el}^+} = \frac{1.24 \cdot 10^{-3}}{2.027 - 0.453} = 7.88 \cdot 10^{-4} 1/m$$

$$X_{el}^+ = 7.88 \cdot 10^{-4} 1/m$$

- Momento resistente elástico

$$M_{el}^+ = (EI)^+ X_{el}^+ = 2.56 \cdot 10^7 \cdot 7.88 \cdot 10^{-4} = 20173 KNm$$

- Momento efectivo  $M_{2ct}$  :

$$\sigma_{2ct} = 2f_{ctm} = 2 \cdot 3.5 = 7 MPa$$

$$\varepsilon_{2ct} = \frac{\sigma_{2ct}}{E_c} = \frac{7 \cdot 10^6}{35 \cdot 10^9} = 2 \cdot 10^{-4}$$

$$X_{2ct} = -\frac{\varepsilon_{2ct}}{\xi_{el}^+} = -\frac{2 \cdot 10^{-4}}{0.453} = -4.42 \cdot 10^{-4} \text{ 1/m}$$

$$M_{2ct} = (EI)^+ X_{2ct} = 2.56 \cdot 10^7 \cdot (-4.42 \cdot 10^{-4}) = -11315 \text{ KNm}$$

### Flexión negativa

- Rigidez a flexión

$$I_{y1} = \frac{1}{n_y} A_{y1} (z_{y1} - \xi_{el}^-)^2 = \frac{1}{1.05} \cdot 2.51 \cdot 10^{-3} \cdot (0.05 - 1.093)^2 = 2.60 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$I_{y2} = \frac{1}{n_y} A_{y2} (z_{y2} - \xi_{el}^-)^2 = \frac{1}{1.05} \cdot 2.51 \cdot 10^{-3} \cdot (0.2 - 1.093)^2 = 1.91 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$I_1 = A_1 (z_1 - \xi_{el}^+)^2 = 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot (0.506 - 1.093)^2 = 4.13 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$I_w = 2 \cdot \frac{1}{12} t_w d^3 + A_w (z_w - \xi_{el}^-)^2 = 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0.010 \cdot 1.5^3 + 3 \cdot 10^{-2} \cdot (1.262 - 1.093)^2 = 6.48 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$I_2 = A_2 (z_2 - \xi_{el}^-)^2 = 3 \cdot 10^{-2} \cdot (2.020 - 1.093)^2 = 2.58 \cdot 10^{-2} \text{ m}^4$$

$$I_{nw} = 2 \cdot \frac{1}{12} t_w b_{nw}^3 + A_{nw} (z_{nw} - \xi_{el}^-)^2 = 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0.010 \cdot 0.343^3 + 6.86 \cdot 10^{-3} \cdot (1.611 - 1.093)^2 = 1.91 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$I_{n2} = A_{n2} (z_{n2} - \xi_{el}^-)^2 = 1.93 \cdot 10^{-2} \cdot (2.020 - 1.093)^2 = 1.66 \cdot 10^{-2} \text{ m}^4$$

$$\begin{aligned} I &= I_{y1} + I_{y2} + I_1 + I_w + I_2 - I_{nw} - I_{n2} = \\ &= 2.60 \cdot 10^{-3} + 1.91 \cdot 10^{-3} + 4.13 \cdot 10^{-3} + 6.48 \cdot 10^{-3} + 2.58 \cdot 10^{-2} - 1.91 \cdot 10^{-3} - 1.66 \cdot 10^{-2} = \\ &= 2.24 \cdot 10^{-2} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

$$(EI)^- = E_s I = 210 \cdot 10^9 \cdot 2.24 \cdot 10^{-2} = 4.70 \cdot 10^6 \text{ KNm}^2$$

- Curvatura de plastificación primera

$$X_y = \frac{\varepsilon_y}{z_{y1} - \xi_{el}^-} = \frac{1.74 \cdot 10^{-3}}{0.05 - 1.093} = -1.67 \cdot 10^{-3} \text{ 1/m}$$

$$X_s = \frac{-\varepsilon_s}{H - \xi_{el}^+} = \frac{-1.24 \cdot 10^{-3}}{2.027 - 1.093} = -1.33 \cdot 10^{-3} \text{ 1/m}$$

$$X_{el}^- = -1.33 \cdot 10^{-3} \text{ 1/m}$$

- Momento resistente elástico

$$M_{el}^- = (EI)^- X_{el}^- = 4.70 \cdot 10^6 \cdot (-1.33 \cdot 10^{-3}) = -6251 \text{ KNm}$$

## RESISTENCIA A CORTANTE

- Resistencia plástica

$$V_{pl} = \frac{2d t_w f_{sd}}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 1.5 \cdot 0.010 \cdot 261 \cdot 10^6}{\sqrt{3}} = 4521 \text{ KN}$$

- Abolladura por cortante

$$\frac{d}{t_w} = \frac{1500}{10} = 150 \quad \frac{72}{\eta} \varepsilon = \frac{72}{1} \cdot 0.92 = 66.24$$

$$\frac{d}{t_w} > \frac{72}{\eta} \varepsilon \Rightarrow \text{Hay abolladura del alma por cortante}$$

$$\chi = 72 \varepsilon \frac{t_w}{d} = 72 \cdot 0.92 \cdot \frac{10}{1500} = 0.442$$

$$V_b = \chi V_{pl} = 0.442 \cdot 4521 = 1998 \text{ KN}$$

- Resistencia de cálculo a cortante

$$V_{Rd} = \min \{V_{pl}, V_b\} = \min \{4521, 1998\} = 1998 \text{ KN}$$

## RESISTENCIA PLÁSTICA A FLEXIÓN

### Flexión positiva

- Momento resistente plástico

$$\begin{aligned} M_{pl}^+ &= \frac{\xi_{pl}^+}{h_c} N_c \frac{1}{2} \xi_{pl}^+ + A_{y1} |z_{y1} - \xi_{pl}^+| + A_{y2} |z_{y2} - \xi_{pl}^+| + A_s |z_s - \xi_{pl}^+| = \\ &= \frac{181}{250} \cdot 2.60 \cdot 10^7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.181 + 8.75 \cdot 10^5 \cdot |0.05 - 0.181| + 8.75 \cdot 10^5 \cdot |0.2 - 0.181| \\ &\quad + 1.78 \cdot 10^7 \cdot |1.452 - 0.181| \\ &= 1.70 \cdot 10^6 + 1.15 \cdot 10^5 + 1.66 \cdot 10^4 + 2.39 \cdot 10^7 = \\ &= 25735 \text{ KNm} \end{aligned}$$

## CONEXIÓN

- Resistencia individual de un perno

$$P_{Rd,1} = \frac{0.8 f_u \pi \frac{d_v^2}{4}}{\gamma_V} = \frac{0.8 \cdot 500 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot \frac{0.02^2}{4}}{1.25} = 101 \text{ KN}$$

$$\alpha = 0.2 \left( \frac{h_t}{d_v} + 1 \right) = 0.2 \cdot \left( \frac{70}{20} + 1 \right) = 0.9$$

$$P_{Rd,2} = \frac{0.29\alpha d_v^2 \sqrt{f_{ck} E_{cm}}}{\gamma_V} = \frac{0.29 \cdot 0.9 \cdot 0.02^2 \cdot \sqrt{40 \cdot 10^6 \cdot 35 \cdot 10^9}}{1.25} = 99 \text{ KN}$$

$$P_{Rd} = \min \{P_{Rd,1}, P_{Rd,2}\} = \min \{101, 99\} = 99 \text{ KN}$$

### Flexión positiva

- Separación máxima de los pernos en régimen elástico

$$N_{c1,el} = E_c X_{el}^+ A_{c1} |z_{c1} - \xi_{el}^+| = 35 \cdot 10^9 \cdot 7.88 \cdot 10^{-4} \cdot 1.13 \cdot |0.125 - 0.453| = 1.02 \cdot 10^7 \text{ N}$$

$$N_{c2,el} = E_c X_{el}^+ \int_{h_c}^{\xi_{el}^+} (z - \xi_{el}^+) b(z) dz = 35 \cdot 10^9 \cdot 7.88 \cdot 10^{-4} \cdot \int_{0.25}^{0.453} (z - 0.453)(5 - 8z) dz = 1.40 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$N_{y,el} = E_y X_{el}^+ A_y |z_y - \xi_{el}^+| = 200 \cdot 10^9 \cdot 7.88 \cdot 10^{-4} \cdot 5.02 \cdot 10^{-3} \cdot |0.125 - 0.453| = 2.59 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$N_{el} = N_{c1,el} + N_{c2,el} + N_{y,el} = 1.02 \cdot 10^7 + 1.40 \cdot 10^6 + 2.59 \cdot 10^5 = 1.19 \cdot 10^7 \text{ N}$$

$$K = n_f P_{Rd} \frac{M_{el}}{N_{el}} = 4 \cdot 99 \cdot 10^3 \cdot \frac{20173 \cdot 10^3}{1.19 \cdot 10^7} = 6.71 \cdot 10^5 \text{ Nm}$$

$$s_t [\text{mm}] \leq K [\text{Nm}] \frac{1}{V(x) [\text{KN}]} = \frac{6.71 \cdot 10^5}{V [\text{KN}]}$$

Con la ley de flectores dada el cortante máximo es 2630 KN y está en los extremos. En esos puntos es donde se tiene la separación más restrictiva y debe ser menor a:

$$s_t \leq \frac{6.71 \cdot 10^5}{2630} = 255 \text{ mm}$$

- Separación máxima de pernos en régimen plástico

Axil plástico en sección de hormigón:

$$N_{c1,f} = \frac{\xi_{pl}^+}{h_c} N_{c1} = \frac{181}{250} \cdot 2.60 \cdot 10^7 = 1.88 \cdot 10^7 \text{ N}$$

$$N_{y1,f} = N_{y1} = 8.75 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$N_{y2,f} = -N_{y2} = -8.75 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$N_f = N_{c1,f} + N_{y1,f} + N_{y2,f} = 1.88 \cdot 10^7 + 8.75 \cdot 10^5 - 8.75 \cdot 10^5 = 1.88 \cdot 10^7 \text{ N}$$

Esfuerzo rasante de cálculo:

$$H_{Ed} = \frac{N_f - N_{el}}{M_{pl} - M_{el}} (M_{Ed} - M_{el}) = \frac{1.88 \cdot 10^7 - 1.19 \cdot 10^7}{2.57 \cdot 10^7 - 2.02 \cdot 10^7} \cdot (2.30 \cdot 10^7 - 2.02 \cdot 10^7) = 3.51 \cdot 10^6 \text{ N}$$

Número mínimo de pernos:

$$n_{q,\min} = \frac{H_{Ed}}{P_{Rd}} = \frac{3.51 \cdot 10^6}{99 \cdot 10^3} = 36 \text{ pernos}$$

La ley de flectores está dada por:

$$M(x) = ax^2 + bx + c = -7.51 \cdot 10^4 x^2 + 2.63 \cdot 10^6 x$$

La posición donde comienza la longitud inelástica está dada por:

$$M(x_{el}) = M_{el}^+ \Rightarrow -7.51 \cdot 10^4 x_{el}^2 + 2.63 \cdot 10^6 x_{el} = 2.02 \cdot 10^7 \Rightarrow x_{el} = 11.38 \text{ m}$$

El valor extremo de la ley de flectores está en el punto medio de la viga:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{2.63 \cdot 10^6}{2 \cdot (-7.51 \cdot 10^4)} = 17.5 \text{ m}$$

La longitud inelástica de cálculo es:

$$L_{Ed} = x_v - x_{el} = 17.5 - 11.38 = 6.12 \text{ m}$$

Finalmente, la separación máxima es:

$$s_t \leq s_{t,\max} = n_f \frac{L_{Ed}}{n_{q,\min}} = 4 \cdot \frac{6.12}{36} = 680 \text{ mm}$$

- Grado de conexión

Pernos colocados:

$$n_q = n_f \frac{L_{Ed}}{s_t} = 4 \cdot \frac{6.12}{0.5} = 49 \text{ pernos}$$

Axil máximo que se puede dar en la losa:

$$N_{c,\max} = N_{el} + n_q P_{Rd} = 1.19 \cdot 10^7 + 49 \cdot 99 \cdot 10^3 = 1.68 \cdot 10^7 \text{ N}$$

Grado de conexión:

$$\eta = \frac{N_{c,\max}}{N_f} = \frac{1.68 \cdot 10^7}{1.88 \cdot 10^7} = 0.894$$

- Momento resistente plástico sección metálica

Fibra neutra plástica sección metálica. Suponemos que está en alma:

$$N_1 + \frac{x}{d} N_w = \left(1 - \frac{x}{d}\right) N_w + N_2$$

$$3.13 \cdot 10^6 + \frac{x}{1500} 7.83 \cdot 10^6 = \left(1 - \frac{x}{1500}\right) 7.83 \cdot 10^6 + 7.83 \cdot 10^6 \Rightarrow x = 1200 \text{ mm}$$

$$N_{w1} = \frac{x}{d} N_w = \frac{1200}{1500} \cdot 7.83 \cdot 10^6 = 6.26 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$N_{w2} = \left(1 - \frac{x}{d}\right) N_w = \left(1 - \frac{1200}{1500}\right) 7.83 \cdot 10^6 = 1.57 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$z_{w1} = h_c + h_s + t_{f1} + \frac{1}{2} x = 250 + 250 + 12 + \frac{1}{2} \cdot 1200 = 1112 \text{ mm}$$

$$z_{w2} = h_c + h_s + t_{f1} + x + \frac{1}{2}(d - x) = 250 + 250 + 12 + 1200 + \frac{1}{2} \cdot (1500 - 1200) = 1412 \text{ mm}$$

$$\xi_{a,pl} = h_c + h_s + t_{f1} + x = 250 + 250 + 12 + 1200 = 1712 \text{ mm}$$

Momento resistente plástico de sección metálica:

$$\begin{aligned} M_{a,pl} &= N_1 |z_1 - \xi_{a,pl}| + N_{w1} |z_{w1} - \xi_{a,pl}| + N_{w2} |z_{w2} - \xi_{a,pl}| + N_2 |z_2 - \xi_{a,pl}| = \\ &= 3.13 \cdot 10^6 \cdot |0.506 - 1.712| + 6.26 \cdot 10^6 \cdot |1.112 - 1.712| + 1.57 \cdot 10^6 \cdot |1.412 - 1.712| \\ &\quad + 7.83 \cdot 10^6 \cdot |2.020 - 1.712| \\ &= 3.77 \cdot 10^6 + 3.76 \cdot 10^6 + 4.71 \cdot 10^5 + 2.41 \cdot 10^6 = \\ &= 10411 \text{ KNm} \end{aligned}$$

- Momento resistente plástico de la sección con conexión parcial

$$M_{Rd} = M_{pl,a,Rd} + (M_{pl,Rd} - M_{pl,a,Rd}) \eta = 10411 + (25735 - 10411) \cdot 0.894 = 24111 \text{ KNm}$$

- Reclasificación de la sección

$$N_c = N_{c,max} = 1.68 \cdot 10^7 \text{ N}$$

$$N_c + N_1 = 1.68 \cdot 10^7 + 3.13 \cdot 10^6 = 1.99 \cdot 10^7 \text{ N}$$

$$N_w + N_2 = 7.83 \cdot 10^6 + 7.83 \cdot 10^6 = 1.57 \cdot 10^7 \text{ N}$$

$$N_c + N_1 > N_w + N_2 \Rightarrow \text{Nueva fibra neutra } \xi_{pl}' \text{ en ala superior}$$

Alma completa en tracción. La sección sigue siendo clase 1.

## COMPARATIVA DE RESULTADOS

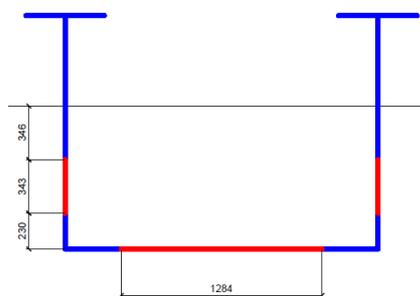


Fig. 4-9.a

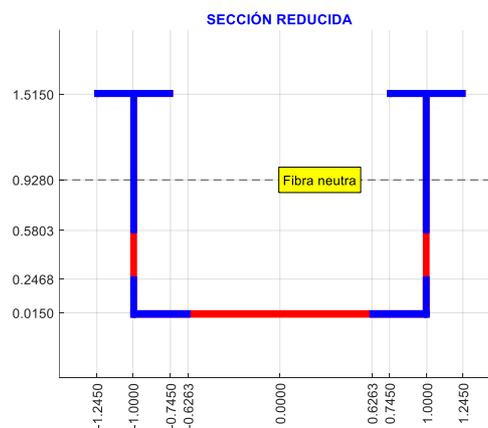


Fig. 4-9.b

Fig. 4-9 Ejemplo 3: sección reducida

a) Cálculo manual

b) Según programa MixtasCalc

		Cálculo manual	MixtasCalc
<b>Clasificación flexión positiva</b>			
Fibra neutra plástica	mm	181	185
Clasificación	--	Clase 1	Clase 1
<b>Clasificación flexión negativa</b>			
Fibra neutra elástica	mm	1093	1099
Clasificación	--	Clase 4	Clase 4
<b>Sección reducida</b>			
Ancho no efectivo panel inferior	mm	1284	1252
Ancho no efectivo alma	mm	343	333
<b>Resistencia elástica a flexión positiva</b>			
Fibra neutra elástica	mm	453	454
Rigidez a flexión	KNm <sup>2</sup>	2,56E+07	2,56E+07
Curvatura elástica	1/m	7,88E-04	7,93E-04
Momento elástico	KNm	20173	20283
Momento efectivo	KNm	-11315	-11264
<b>Resistencia elástica a flexión negativa</b>			
Fibra neutra elástica	mm	1093	1099
Rigidez a flexión	KNm <sup>2</sup>	4,70E+06	4,81E+06
Curvatura elástica	1/m	-1,33E-03	-1,34E-03
Momento elástico	KNm	-6251	-6458
<b>Resistencia cortante</b>			
Resistencia plástica	KN	4521	--
Abolladura	--	0,44	0,44
Resistencia de cálculo	KN	1998	2012
<b>Resistencia plástica a flexión positiva</b>			
Momento plástico	KNm	25735	25762
<b>Conexión</b>			
Resistencia individual del perno	KN	99	99
Valor K	Nm	6,71E+05	6,70E+05
<b>Conexión (régimen plástico)</b>			
Separación máxima	mm	680	695
Grado de conexión	--	0,894	0,886
Momento último conexión parcial	KNm	24111	23995
Reclasificación de la sección	--	Clase 1	Clase 1

Tabla 4-9 Ejemplo 3: comparativa de resultados

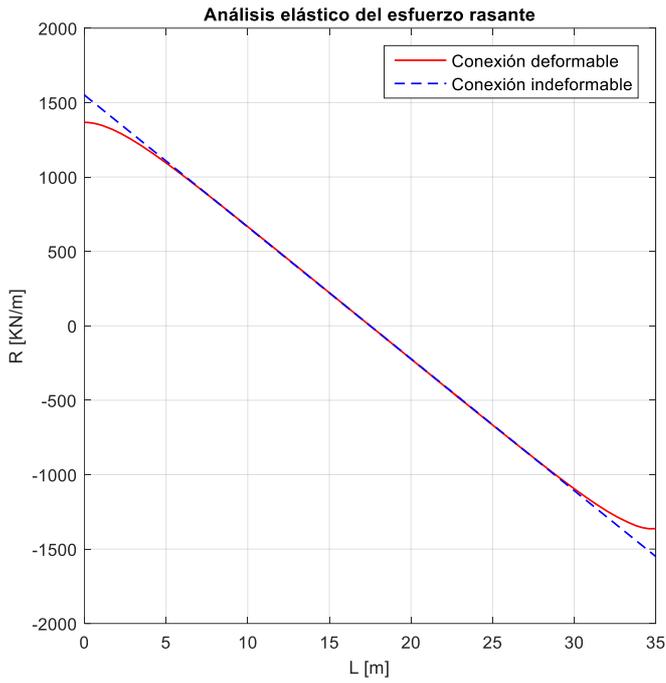


Fig. 4-10.a

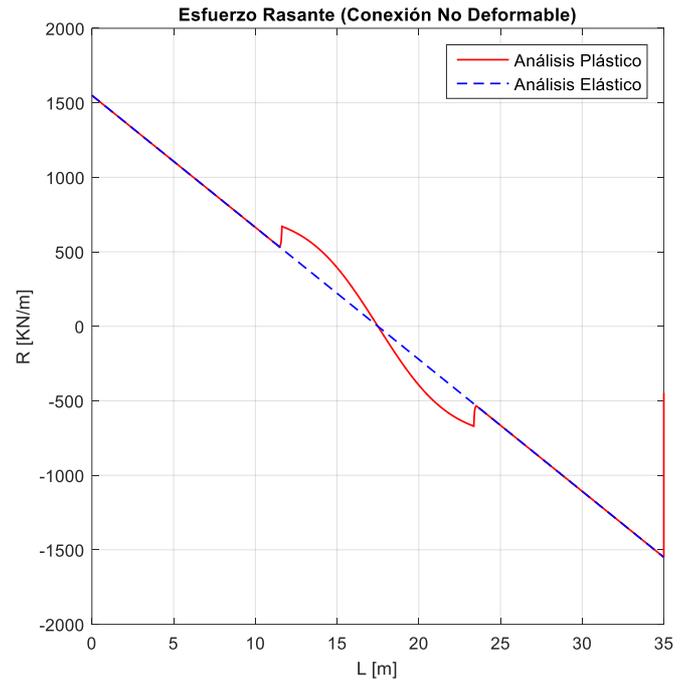


Fig. 4-10.b

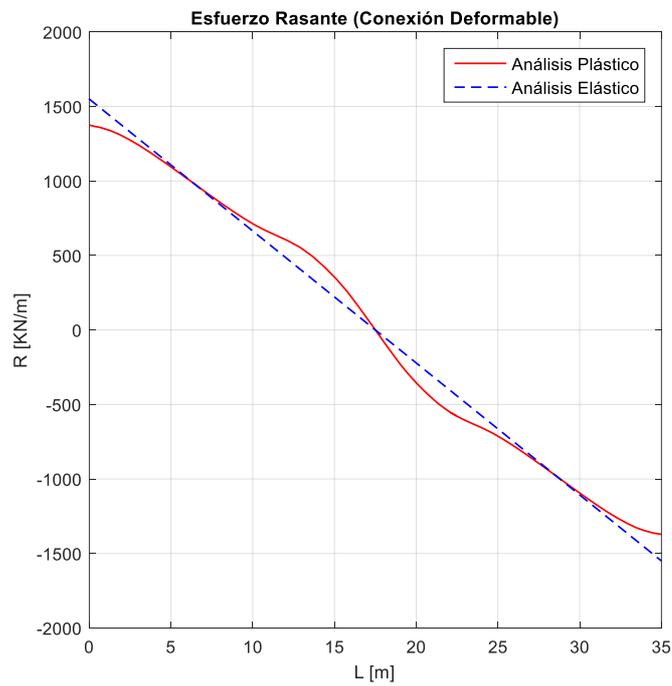


Fig. 4-10.c

Fig. 4-10 Ejemplo 3: Esfuerzo rasante asumiendo  
 a) Comportamiento elástico y conexión no deformable  
 b) Comportamiento elastoplástico y conexión no deformable  
 c) Comportamiento elastoplástico y conexión deformable

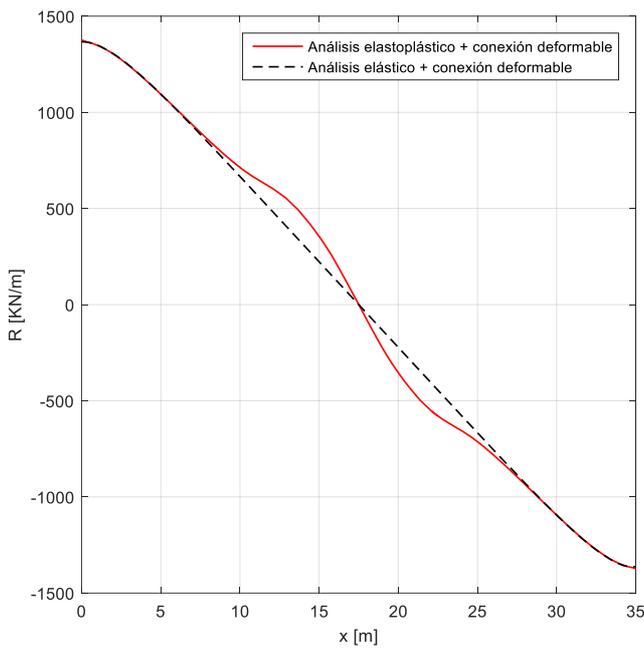


Fig. 4-11.a

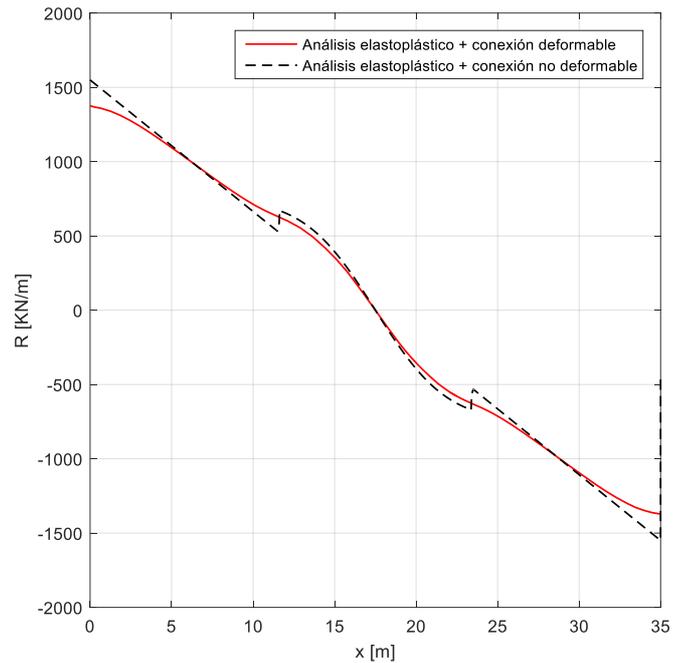


Fig. 4-11.a

Fig. 4-11 Ejemplo 3: esfuerzo rasante asumiendo:

- a) Conexión deformable: comparativa de resultados según análisis elastoplástico y análisis elástico.
- b) Comportamiento elastoplástico: comparativa de resultados según conexión deformable y no deformable.

La Fig. 4-10 es un resultado generado por el programa. La Fig. 4-11 la hemos generado particularmente para este ejemplo. En estas figuras se observa que el rasante elastoplástico con conexión deformable, el más costoso de calcular, se puede aproximar en buena medida con el rasante elástico con conexión deformable en los tramos de la viga de comportamiento elástico y con el rasante elastoplástico con conexión no deformable en los tramos de la viga de comportamiento elastoplástico.

Resulta interesante también comparar el esfuerzo rasante resultante en la longitud de cálculo inelástica que se utiliza para comprobar los pernos según las distintas hipótesis de cálculo.

Según lo indicado por el Eurocódigo 4, el esfuerzo rasante de cálculo plástico para la comprobación de pernos es:

$$H_{Ed,EU} = \frac{N_f - N_{el}}{M_{pl} - M_{el}} (M_{Ed} - M_{el}) = \frac{1.88 \cdot 10^7 - 1.19 \cdot 10^7}{2.57 \cdot 10^7 - 2.02 \cdot 10^7} \cdot (2.30 \cdot 10^7 - 2.02 \cdot 10^7) = 3.51 \cdot 10^6 \text{ N}$$

Este esfuerzo rasante de cálculo plástico teniendo en cuenta un comportamiento elastoplástico de los materiales de la sección y conexión no deformable es:

$$H_{Ed,rig} = \int_{x_{el}}^{x_v} R(x) dx = 2.48 \cdot 10^6 \text{ N}$$

El esfuerzo rasante de cálculo plástico teniendo en cuenta comportamiento elastoplástico de los materiales de la sección y conexión deformable es:

$$H_{Ed,def} = \int_{x_{el}}^{x_v} R(x) dx = 2.33 \cdot 10^6 \text{ N}$$

Así que se tiene  $H_{Ed,EU} > H_{Ed,rig} > H_{Ed,def}$  reduciéndose el esfuerzo de cálculo más de un 30 % en este caso respecto del que indica la simplificación del Eurocódigo 4.

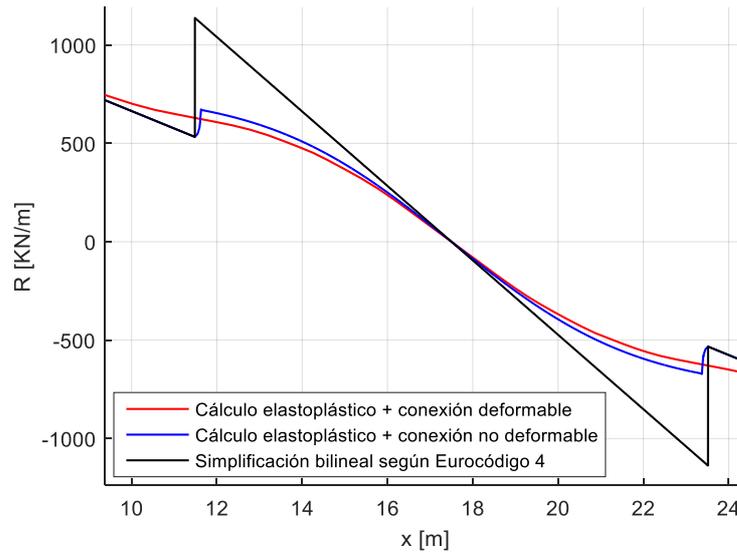


Fig. 4-12 Ejemplo 3: distribución del rasante en la longitud inelástica de la viga para distintas hipótesis de cálculo

#### 4.4 Ejemplo 4: Resistencia plástica a flexión con interacción M-V

Se trata de calcular los parámetros resistentes a flexión de la sección mixta indicada a continuación. Para el hormigón se va a utilizar la clase C35/45 con un coeficiente de seguridad de 1,50, para el acero estructural el tipo S235 con un coeficiente de 1,05 y para la armadura acero B400S. La sección está sometida a un esfuerzo cortante de cálculo de 450 KN.

##### DATOS

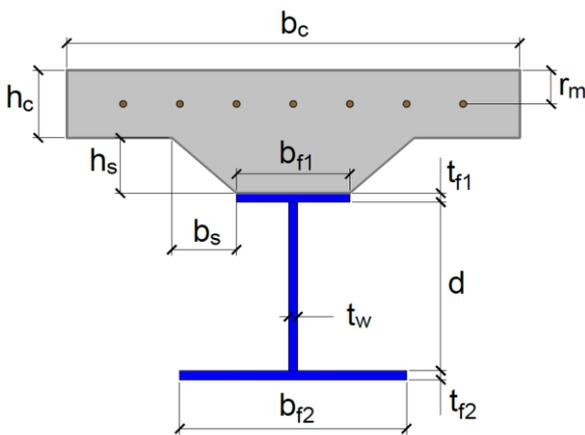


Fig. 4-13.a

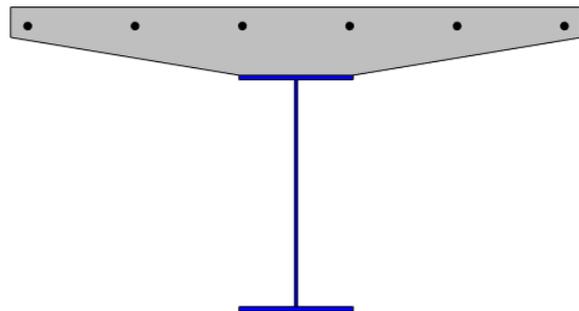


Fig. 4-13.b

Fig. 4-13 Ejemplo 4  
a) Sección tipo y notación de dimensiones  
b) Dibujo a escala de la sección

GEOMETRÍA SECCIÓN			ARMADURA	HORMIGÓN C35/45			ACERO S 275			ARMADURA B 400 S		
$b_c$	mm	1500	Fila 1 -- 6Φ20 mm 50	$E_c$	GPa	34	$E_s$	GPa	210	$E_y$	GPa	200
$h_c$	mm	80		$f_{ck}$	MPa	35	$f_{sk}$	MPa	275	$f_{yk}$	MPa	400
$d$	mm	600		$\gamma_M$	--	1,5	$\gamma_M$	--	1,05	$\gamma_M$	--	1,15
$t_w$	mm	8		$f_{cd}$	MPa	19,8	$f_{sd}$	MPa	261	$f_{yd}$	MPa	347
$b_{f1}$	mm	300		$\varepsilon_c$	--	5,82 E-04	$\varepsilon_s$	--	1,24 E-03	$\varepsilon_y$	--	1,74 E-03
$t_{f1}$	mm	12		$n_c$	--	6,18	$n_s$	--	1	$n_y$	--	1,05
$b_{f2}$	mm	300		$f_{cm}$	MPa	3,2						
$t_{f2}$	mm	12										
$h_s$	mm	100										
$b_s$	mm	600										

Tabla 4-10 Ejemplo 4: valores de dimensiones y definición de los materiales

### MAGNITUDES PREVIAS

Expresión analítica del ancho de hormigón en el canto con peralte:

$$b(z) = b_{f1} + 2b_s \left( 1 + \frac{h_c - z}{h_s} \right) \quad \text{para } h_c \leq z \leq h_c + h_s$$

$$b(z) = 0.3 + 2 \cdot 0.6 \cdot \left( 1 + \frac{0.08 - z}{0.1} \right) = 2.46 - 12z \quad \text{para } 0.25 \text{ m} \leq z \leq 0.5 \text{ m}$$

Tomando una coordenada local  $z' = z - h_c = z - 0.08$ :

$$b(z') = 2.46 - 12(z' + 0.08) = 1.5 - 12z' \quad \text{para } 0 \leq z' \leq 0.25 \text{ m}$$

Otras magnitudes previas:

$$A_{c1} = b_c h_c = 1.5 \cdot 0.08 = 0.12 \text{ m}^2$$

$$A_{c2} = \int_{h_c}^{h_c+h_s} b(z) dz = \int_{0.08}^{0.18} (2.46 - 12z) dz = 0.09 \text{ m}^2$$

$$A_c = A_{c1} + A_{c2} = 0.12 + 0.09 = 0.21 \text{ m}^2$$

$$A_y = N_b \frac{\pi}{4} \phi^2 = 6 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0.02^2 = 1.88 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A_1 = b_{f1} t_{f1} = 0.3 \cdot 0.012 = 3.6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A_w = d t_w = 0.6 \cdot 0.008 = 4.8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A_2 = b_{f2} t_{f2} = 0.3 \cdot 0.012 = 3.6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A_s = A_1 + A_w + A_2 = 3.6 \cdot 10^{-3} + 4.8 \cdot 10^{-3} + 3.6 \cdot 10^{-3} = 1.2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$N_{c1} = A_{c1} f_{cd} = 0.12 \cdot 19.8 \cdot 10^6 = 2.38 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$N_{c2} = A_{c2} f_{cd} = 0.09 \cdot 19.8 \cdot 10^6 = 1.78 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$N_c = A_c f_{cd} = 0.21 \cdot 19.8 \cdot 10^6 = 4.16 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$N_y = A_y f_{yd} = 1.88 \cdot 10^{-3} \cdot 347 \cdot 10^6 = 6.52 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$N_1 = A_1 f_{sd} = 3.6 \cdot 10^{-3} \cdot 261 \cdot 10^6 = 9.40 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$N_w = A_w f_{sd} = 4.8 \cdot 10^{-3} \cdot 261 \cdot 10^6 = 1.25 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$N_2 = A_2 f_{sd} = 3.6 \cdot 10^{-3} \cdot 261 \cdot 10^6 = 9.40 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$N_s = A_s f_{sd} = 1.2 \cdot 10^{-2} \cdot 261 \cdot 10^6 = 3.13 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$z_{c1} = \frac{1}{2} h_c = \frac{1}{2} \cdot 250 = 125 \text{ mm}$$

$$z_{c2} = \frac{\int_{h_c}^{h_c+h_s} b(z) z dz}{A_{c2}} = \frac{\int_{0.08}^{0.18} (2.46 - 12z) z dz}{0.09} = 119 \text{ mm}$$

$$z_c = \frac{A_{c1} z_{c1} + A_{c2} z_{c2}}{A_c} = \frac{0.12 \cdot 125 + 0.09 \cdot 119}{0.21} = 74 \text{ mm}$$

$$z_y = 50 \text{ mm}$$

$$z_1 = h_c + h_s + \frac{1}{2} t_{f1} = 80 + 100 + \frac{1}{2} \cdot 12 = 186 \text{ mm}$$

$$z_w = h_c + h_s + t_{f1} + \frac{1}{2} d = 80 + 100 + 12 + \frac{1}{2} \cdot 600 = 492 \text{ mm}$$

$$z_2 = h_c + h_s + t_{f1} + d + \frac{1}{2} t_{f2} = 80 + 100 + 12 + 600 + \frac{1}{2} \cdot 12 = 798 \text{ mm}$$

$$z_s = \frac{A_1 z_1 + A_w z_w + A_2 z_2}{A_s} = \frac{3.6 \cdot 10^{-3} \cdot 186 + 4.8 \cdot 10^{-3} \cdot 492 + 3.6 \cdot 10^{-3} \cdot 798}{1.2 \cdot 10^{-2}} = 492 \text{ mm}$$

$$H = h_c + h_s + t_{f1} + d + t_{f2} = 80 + 100 + 12 + 600 + 12 = 804 \text{ mm}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_{sk} [\text{MPa}]}} = \sqrt{\frac{235}{275}} = 0.92$$

	ÁREAS		AXILES PLAST.	BARICENTROS
Losa de hormigón	$A_{c1}$ m <sup>2</sup>	0,12	$N_{c1}$ N 2,38E+6	$z_{c1}$ mm 40
Canto peraltado	$A_{c2}$ m <sup>2</sup>	0,09	$N_{c2}$ N 1,78E+6	$z_{c2}$ mm 119
Sección de hormigón	$A_c$ m <sup>2</sup>	0,21	$N_c$ N 4,16E+6	$z_c$ mm 74
Armadura	$A_y$ m <sup>2</sup>	1,88E-3	$N_y$ N 6,52E+5	$z_y$ mm 50
Ala superior	$A_1$ m <sup>2</sup>	3,60E-3	$N_1$ N 9,40E+5	$z_1$ mm 186
Alma	$A_w$ m <sup>2</sup>	4,80E-3	$N_w$ N 1,25E+6	$z_w$ mm 492
Ala inferior	$A_2$ m <sup>2</sup>	3,60E-3	$N_2$ N 9,40E+5	$z_2$ mm 498
Sección metálica	$A_s$ m <sup>2</sup>	1,20E-2	$N_s$ N 3,13E+6	$z_s$ mm 492

Tabla 4-11 Ejemplo 4: valores de magnitudes previas

## CLASIFICACIÓN

### Flexión positiva

- Fibra neutra plástica  $\xi_{pl}^+$

$N_c + N_y > N_s \Rightarrow$  Está en sección de hormigón

$$N_{c1} + N_y = 2.38 \cdot 10^6 + 6.52 \cdot 10^5 = 3.03 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$N_{c1} + N_y < N_s \Rightarrow$  Está en canto peraltado  $80 \text{ mm} < \xi_{pl}^+ < 180 \text{ mm}$

Toda la sección metálica está traccionada. Sección clase 1.

### Flexión negativa

- Clasificación ala inferior

$$\frac{c}{t} = \frac{150}{12} = 12.5$$

$$9\varepsilon = 9 \cdot 0.92 = 8.28 < \frac{c}{t} \Rightarrow \text{No es clase 1}$$

$$10\varepsilon = 10 \cdot 0.92 = 9.2 < \frac{c}{t} \Rightarrow \text{No es clase 2}$$

$$14\varepsilon = 14 \cdot 0.92 = 12.88 > \frac{c}{t} \Rightarrow \text{Es clase 3}$$

- Fibra neutra plástica  $\xi_{pl}^-$

Suponemos que se encuentra en el alma

$$N_y + N_1 + \frac{x}{d} N_w = \left(1 - \frac{x}{d}\right) N_w + N_2$$

$$6.52 \cdot 10^5 + 9.40 \cdot 10^5 + \frac{x}{600} \cdot 1.25 \cdot 10^6 = \left(1 - \frac{x}{600}\right) \cdot 1.25 \cdot 10^6 + 9.40 \cdot 10^5 \Rightarrow x = 144 \text{ mm}$$

$$\xi_{pl}^- = h_c + h_s + t_{f1} + x = 80 + 100 + 12 + 144 = 336 \text{ mm}$$

- Clasificación alma

$$\frac{c}{t} = \frac{d}{t_w} = \frac{600}{8} = 75 \quad \bar{b}_c = d - x = 600 - 144 = 456 \text{ mm} \quad \alpha = \frac{\bar{b}_c}{d} = \frac{456}{600} = 0.760$$

$$\frac{396\varepsilon}{13\alpha - 1} = \frac{396 \cdot 0.92}{13 \cdot 0.760 - 1} = 41.02 < \frac{d}{t_w} \Rightarrow \text{No es clase 1}$$

$$\frac{456\varepsilon}{13\alpha - 1} = \frac{456 \cdot 0.92}{13 \cdot 0.760 - 1} = 47.24 < \frac{d}{t_w} \Rightarrow \text{No es clase 2}$$

- Fibra neutra elástica  $\xi_{el}^-$

$$\xi_{el}^- = \frac{\frac{1}{n_y} A_y z_y + A_s z_s}{\frac{1}{n_y} A_y + A_s} = \frac{1.05 \cdot 1.88 \cdot 10^{-3} \cdot 0.050 + 1.2 \cdot 10^{-2} \cdot 0.492}{\frac{1}{1.05} \cdot 1.88 \cdot 10^{-3} + 1.2 \cdot 10^{-2}} = \frac{5.99 \cdot 10^{-3}}{1.38 \cdot 10^{-2}} = 435 \text{ mm}$$

- Clasificación alma

$$\bar{b}_c = h_c + h_s + t_{f1} + d - \xi_{el}^- = 80 + 100 + 12 + 600 - 435 = 357 \text{ mm}$$

$$\alpha = \frac{\bar{b}_c}{d} = \frac{357}{600} = 0.595$$

$$\psi = -\frac{1 - \alpha}{\alpha} = -\frac{1 - 0.595}{0.595} = -0.681$$

$$62\varepsilon(1 - \psi)\sqrt{(-\psi)} = 62 \cdot 0.92 \cdot (1 - (-0.681))\sqrt{-(-0.681)} = 79.13 > \frac{d}{t_w} \Rightarrow \text{Es clase 3}$$

Ala inferior y alma son ambas clase 3. La sección es clase 3 a flexión negativa.

## RESISTENCIA ELÁSTICA A FLEXIÓN

### Flexión positiva

- Fibra neutra elástica  $\xi_{el}^+$

$$\xi_{el}^+ = \frac{\frac{1}{n_c} A_c z_c + \frac{1}{n_y} A_y z_y + A_s z_s}{\frac{1}{n_c} A_c + \frac{1}{n_y} A_y + A_s} = \frac{6.18 \cdot 0.21 \cdot 0.074 + 5.99 \cdot 10^{-3}}{\frac{1}{6.18} \cdot 0.21 + 1.38 \cdot 10^{-2}} = \frac{8.50 \cdot 10^{-3}}{4.78 \cdot 10^{-2}} = 178 \text{ mm}$$

Hay hormigón traccionado en  $178 \text{ mm} \leq z \leq 180 \text{ mm}$ . No debemos tenerlo en cuenta, pero es tan poca cantidad que la diferencia en la fibra neutra va a ser despreciable.

- Rigidez a flexión

$$I_{c1} = \frac{1}{n_c} \left( \frac{1}{12} b_c h_c^3 + A_{c1} (z_{c1} - \xi_{el}^+)^2 \right) = \frac{1}{6.18} \left( \frac{1}{12} \cdot 1.5 \cdot 0.08^3 + 0.12 \cdot (0.04 - 0.178)^2 \right) = 3.80 \cdot 10^{-4} m^4$$

$$I_{c2} = \frac{1}{n_c} \int_{h_c}^{\xi_{el}^+} (z - \xi_{el}^+)^2 b(z) dz = \frac{1}{6.18} \int_{0.08}^{0.178} (z - 0.178)^2 (2.46 - 12z) dz = 6.12 \cdot 10^{-5} m^4$$

$$I_y = \frac{1}{n_y} A_y (z_y - \xi_{el}^+)^2 = \frac{1}{1.05} \cdot 1.88 \cdot 10^{-3} \cdot (0.05 - 0.178)^2 = 2.93 \cdot 10^{-5} m^4$$

$$\begin{aligned} I_{s,G} &= A_1 (z_1 - z_s)^2 + \frac{1}{12} t_w d^3 + A_2 (z_2 - z_s)^2 = \\ &= 3.6 \cdot 10^{-3} \cdot (0.186 - 0.492)^2 + \frac{1}{12} \cdot 0.008 \cdot 0.6^3 + 3.6 \cdot 10^{-3} \cdot (0.798 - 0.492)^2 = \\ &= 8.18 \cdot 10^{-4} m^4 \end{aligned}$$

$$I_s = I_{s,G} + A_s (z_s - \xi_{el}^+)^2 = 8.18 \cdot 10^{-4} + 1.2 \cdot 10^{-2} \cdot (0.492 - 0.178)^2 = 2.00 \cdot 10^{-3} m^4$$

$$I = I_{c1} + I_{c2} + I_y + I_s = 3.80 \cdot 10^{-4} + 6.12 \cdot 10^{-5} + 2.93 \cdot 10^{-5} + 2.00 \cdot 10^{-3} = 2.47 \cdot 10^{-3} m^4$$

$$(EI)^+ = E_s I = 210 \cdot 10^9 \cdot 2.47 \cdot 10^{-3} = 5.19 \cdot 10^5 KNm^2$$

- Curvatura de plastificación primera

$$X_c = \frac{-\varepsilon_c}{0 - \xi_{el}^+} = \frac{-5.82 \cdot 10^{-4}}{0 - 0.178} = 3.27 \cdot 10^{-3} 1/m$$

$$X_y = \frac{-\varepsilon_y}{z_{y1} - \xi_{el}^+} = \frac{-1.74 \cdot 10^{-3}}{0.05 - 0.178} = 1.36 \cdot 10^{-2} 1/m$$

$$X_s = \frac{\varepsilon_s}{H - \xi_{el}^+} = \frac{1.24 \cdot 10^{-3}}{0.804 - 0.178} = 1.98 \cdot 10^{-3} 1/m$$

$$X_{el}^+ = 1.98 \cdot 10^{-3} 1/m$$

- Momento resistente elástico

$$M_{el}^+ = (EI)^+ X_{el}^+ = 5.19 \cdot 10^5 \cdot 1.98 \cdot 10^{-3} = 1027 KNm$$

- Momento efectivo  $M_{2ct}$  :

$$\sigma_{2ct} = 2f_{ctm} = 2 \cdot 3.2 = 6.4 MPa$$

$$\varepsilon_{2ct} = \frac{\sigma_{2ct}}{E_c} = \frac{6.4 \cdot 10^6}{34 \cdot 10^9} = 1.88 \cdot 10^{-4}$$

$$X_{2ct} = -\frac{\varepsilon_{2ct}}{\xi_{el}^+} = -\frac{1.88 \cdot 10^{-4}}{0.178} = -1.06 \cdot 10^{-3} \text{ 1/m}$$

$$M_{2ct} = (EI)^+ X_{2ct} = 5.19 \cdot 10^5 \cdot (-1.06 \cdot 10^{-3}) = -550 \text{ KNm}$$

### Flexión negativa

- Rigidez a flexión

$$I_{y1} = \frac{1}{n_y} A_{y1} (z_{y1} - \xi_{el}^-)^2 = \frac{1}{1.05} \cdot 1.88 \cdot 10^{-3} \cdot (0.05 - 0.435)^2 = 2.65 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_s = I_{s,G} + A_s (z_s - \xi_{el}^-)^2 = 8.18 \cdot 10^{-4} + 1.2 \cdot 10^{-2} \cdot (0.492 - 0.435)^2 = 8.57 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I = I_y + I_s = 2.65 \cdot 10^{-4} + 8.57 \cdot 10^{-4} = 1.12 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$(EI)^- = E_s I = 210 \cdot 10^9 \cdot 1.12 \cdot 10^{-3} = 2.35 \cdot 10^5 \text{ KNm}^2$$

- Curvatura de plastificación primera

$$X_y = \frac{\varepsilon_y}{z_{y1} - \xi_{el}^-} = \frac{1.74 \cdot 10^{-3}}{0.05 - 0.435} = -4.52 \cdot 10^{-3} \text{ 1/m}$$

$$X_s = \frac{-\varepsilon_s}{H - \xi_{el}^+} = \frac{-1.24 \cdot 10^{-3}}{0.804 - 0.435} = -3.36 \cdot 10^{-3} \text{ 1/m}$$

$$X_{el}^- = -3.36 \cdot 10^{-3} \text{ 1/m}$$

- Momento resistente elástico

$$M_{el}^- = (EI)^- X_{el}^- = 2.35 \cdot 10^5 \cdot (-3.36 \cdot 10^{-3}) = -790 \text{ KNm}$$

### **RESISTENCIA A CORTANTE**

- Resistencia plástica

$$V_{pl} = \frac{d t_w f_{sd}}{\sqrt{3}} = \frac{0.6 \cdot 0.008 \cdot 261 \cdot 10^6}{\sqrt{3}} = 723 \text{ KN}$$

- Abolladura por cortante

$$\frac{d}{t_w} = \frac{600}{8} = 75 \quad \frac{72}{\eta} \varepsilon = \frac{72}{1} \cdot 0.92 = 66.24$$

$$\frac{d}{t_w} > \frac{72}{\eta} \varepsilon \Rightarrow \text{Hay abolladura del alma por cortante}$$

$$\chi = 72\varepsilon \frac{t_w}{d} = 72 \cdot 0.92 \cdot \frac{8}{600} = 0.883$$

$$V_b = \chi V_{pl} = 0.883 \cdot 723 = 638 \text{ KN}$$

- Resistencia de cálculo a cortante

$$V_{Rd} = \min \{V_{pl}, V_b\} = \min \{723, 638\} = 638 \text{ KN}$$

- Interacción flector-cortante

$$\frac{V_{Ed}}{V_{Rd}} = \frac{450}{638} = 0.705 > \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Existe interacción}$$

$$\rho = \left( 2 \frac{V_{Ed}}{V_{Rd}} - 1 \right)^2 = (2 \cdot 0.705 - 1)^2 = 0.168$$

$$N_{w,\rho} = (1 - \rho) N_w = (1 - 0.168) \cdot 1.25 \cdot 10^6 = 1.04 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$N_{s,\rho} = N_1 + N_{w,\rho} + N_2 = 9.40 \cdot 10^5 + 1.04 \cdot 10^6 + 9.40 \cdot 10^5 = 2.92 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$z_{s,\rho} = 492 \text{ mm}$$

## RESISTENCIA PLÁSTICA A FLEXIÓN

- Fibra neutra plástica teniendo en cuenta interacción  $\xi_{pl,\rho}^+$

$$N_{c1} + N_y > N_{s,\rho} \Rightarrow \text{Está en la losa de hormigón } 0 < \xi_{pl,\rho}^+ < 80 \text{ mm}$$

$$\frac{\xi_{pl,\rho}^+}{h_c} N_{c1} + N_y = N_{s,\rho} \Rightarrow \frac{\xi_{pl,\rho}^+}{80} \cdot 2.38 \cdot 10^6 + 6.52 \cdot 10^5 = 2.92 \cdot 10^6 \Rightarrow \xi_{pl,\rho}^+ = 76 \text{ mm}$$

- Momento resistente plástico  $M_{pl}^+$

$$\begin{aligned} M_{pl}^+ &= \frac{\xi_{pl,\rho}^+}{h_c} N_{c1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \xi_{pl,\rho}^+ + N_y \left| z_y - \xi_{pl,\rho}^+ \right| + N_{s,\rho} \left| z_{s,\rho} - \xi_{pl,\rho}^+ \right| = \\ &= \frac{0.076}{0.08} \cdot 2.38 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.076 + 6.52 \cdot 10^5 \cdot |0.05 - 0.076| + 2.92 \cdot 10^6 \cdot |0.492 - 0.076| = \\ &= 8.59 \cdot 10^4 + 1.70 \cdot 10^4 + 1.21 \cdot 10^6 = 1317 \text{ KNm} \end{aligned}$$

## COMPARATIVA DE RESULTADOS

		Cálculo manual	MixtasCalc
<b>Clasificación flexión positiva</b>			
Fibra neutra plástica	mm	< 180	84
Clasificación	--	Clase 1	Clase 1
<b>Clasificación flexión negativa</b>			
Fibra neutra elástica	mm	435	434
Clasificación	--	Clase 3	Clase 3
<b>Resistencia elástica a flexión positiva</b>			
Fibra neutra elástica	mm	178	178
Rigidez a flexión	KNm <sup>2</sup>	5,19E+05	5,19E+05
Curvatura elástica	1/m	1,98E-03	1,99E-03
Momento elástico	KNm	1027	1034
Momento efectivo	KNm	-550	-49
<b>Resistencia elástica a flexión negativa</b>			
Fibra neutra elástica	mm	435	434
Rigidez a flexión	KNm <sup>2</sup>	2,35E+05	2,36E+05
Curvatura elástica	1/m	-3,36E-03	-3,38E-03
Momento elástico	KNm	-790	-796
<b>Resistencia cortante</b>			
Resistencia plástica	KN	723	--
Abolladura	--	0,883	0,89
Resistencia de cálculo	KN	638	644
Reducción por interacción M-V	--	0,168	0,158
<b>Resistencia plástica a flexión positiva</b>			
Fibra neutra plástica	mm	76	77
Momento plástico	KNm	1317	1328

Tabla 4-12 Ejemplo 4: comparativa de resultados

# 5 ANÁLISIS DE SECCIONES MIXTAS

**M**ixtasCalc resulta una herramienta muy adecuada para llevar a cabo de forma más que suficiente el predimensionamiento de una sección en los inicios del diseño y cálculo de una viga mixta. Este proceso consiste en elegir la tipología de sección adecuada y el orden de magnitud de las dimensiones para luego ir variando algunas dimensiones y propiedades de materiales hasta encontrar la sección óptima de acuerdo a los criterios y necesidades establecidos.

En este capítulo se pretende determinar qué dimensiones y materiales influyen más en qué propiedades resistentes de la sección. Para ello se definirán dos secciones cuyos valores de propiedades resistentes se tomarán como valores de referencia. Después elegimos un conjunto de parámetros entre las dimensiones y materiales de la sección y un conjunto de resultados para los cuales iremos mostrando cómo varían al ir variando separadamente uno a uno cada parámetro. Teniendo estas variaciones podremos establecer qué parámetros son más o menos influyentes en qué propiedades resistentes.

Por otro lado, como se ha visto tanto en el desarrollo y fundamentos de cálculo del programa y en los ejemplos, la respuesta y resistencia de la sección mixta tiene una fuerte dependencia de la conexión. La respuesta que más nos interesa estudiar dado que no se contempla en la normativa utilizada es la influencia de la deformabilidad de la conexión en la deformada de la viga. Esta respuesta depende de las dimensiones de los pernos y su disposición en la viga que determina una rigidez equivalente: conexiones más o menos rígidas determinan un incremento en la deformabilidad de la sección en mayor o menor medida a la que corresponde suponiendo interacción completa. Es por ello que resultaría ilustrativo, y es lo que se hace en el segundo análisis paramétrico, ver cómo varía la flecha de la viga respecto al resultado asumiendo interacción completa en función de la deformabilidad de la conexión.

En cuanto a la resistencia de la conexión a esfuerzo rasante, ésta no tanto de las dimensiones sino de la cantidad de área transversal de conexión por unidad de longitud de viga.

## 5.1 Análisis paramétrico 1: Influencia de la geometría y materiales

Dada una sección escogemos cierta variable de geometría o clase resistente de material como parámetro. Se pretende analizar la variación de las propiedades resistentes de la sección con la variación del parámetro elegido. En este análisis el conjunto de propiedades resistentes comprende:

- Rigidez a flexión positiva
- Momento elástico a flexión positiva
- Momento plástico a flexión positiva

Y el conjunto de parámetros elegidos comprende:

- Canto de alma
- Ancho de ala inferior
- Canto total de hormigón
- Clase resistente de hormigón
- Clase resistente de acero

El canto total de hormigón para secciones con losa de hormigón peraltada se ha tomado tal que:

$$\begin{cases} H_c = h_c + h_s \\ h_c = h_s \end{cases} \Rightarrow h_c = h_s = \frac{1}{2} H_c$$

Para las secciones de referencia se han escogido de tipos de materiales el hormigón C40/50, el acero estructural S275 y el acero de armar B400S. A continuación, definimos las dos secciones A y B con los valores de referencia.

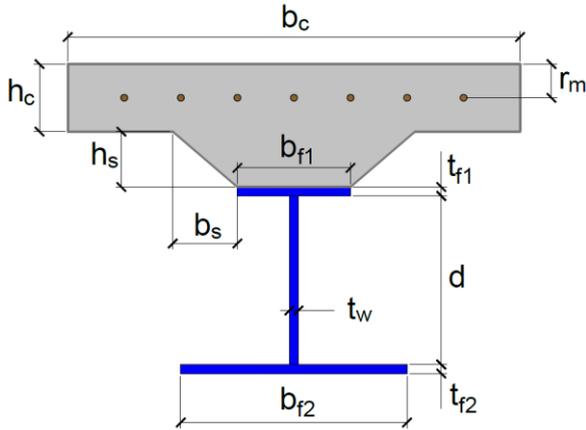


Fig. 5-1.a

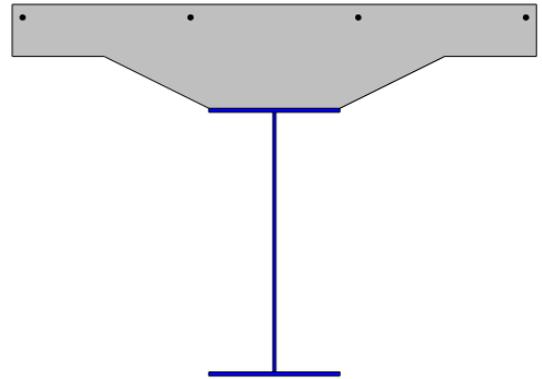


Fig. 5-1.b

Fig. 5-1 Sección A:  
a) Sección tipo y notación de dimensiones  
b) Dibujo a escala de la sección

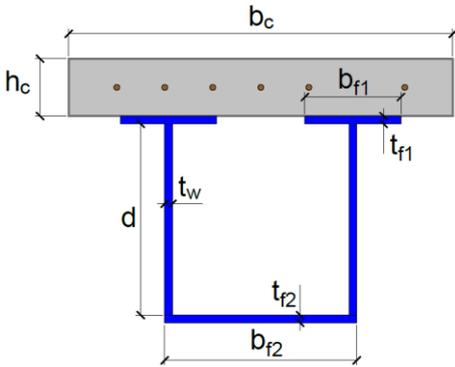


Fig. 5-2.a

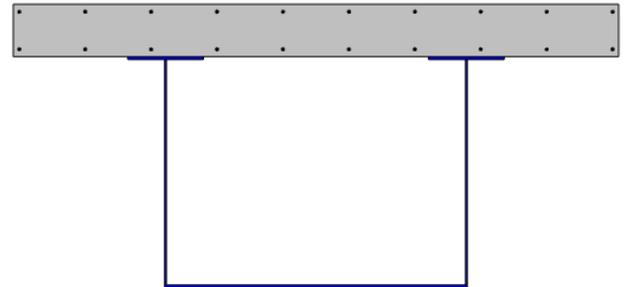


Fig. 5-2.b

Fig. 5-2 Sección B:  
a) Sección tipo y notación de dimensiones  
b) Dibujo a escala de la sección

GEOMETRÍA SECCIÓN A	ARMADURA
$b_c$ mm 2000	Fila 1 -- 4 $\Phi$ 20 mm 50
$h_c$ mm 200	
$d$ mm 1000	
$t_w$ mm 12	
$b_{f1}$ mm 500	
$t_{f1}$ mm 15	
$b_{f2}$ mm 500	
$t_{f2}$ mm 15	
$h_s$ mm 200	
$b_s$ mm 400	

GEOMETRÍA SECCIÓN B	ARMADURA
$b_c$ mm 4000	Fila 1 -- 10 $\Phi$ 20 mm 50
$h_c$ mm 350	
$d$ mm 1500	Fila 2 -- 10 $\Phi$ 20 mm 300
$t_w$ mm 12	
$b_{f1}$ mm 500	
$t_{f1}$ mm 18	
$b_{f2}$ mm 2000	
$t_{f2}$ mm 19	

Tabla 5-1 Valores de dimensiones y armadura

Los resultados de las propiedades resistentes en el análisis de cada parámetro se recogen en las siguientes tablas. Estos resultados se han representado en sistemas de ejes que relacionen un par de magnitudes resistentes para hacer la interpretación de más fácil comprensión.

### ANÁLISIS PARAMÉTRICO SECCIÓN A

Los valores de las propiedades resistentes de la sección de referencia son:

$$(EI)^* = 3.795 \cdot 10^6 \text{ KNm}^2$$

$$M_{el}^* = 4254 \text{ KNm}$$

$$M_{pl}^* = 5963 \text{ KNm}$$

$d$	$(EI)$	$M_{el}$	$M_{pl}$	$\frac{(EI)}{(EI)^*}$	$\frac{M_{el}}{M_{el}^*}$	$\frac{M_{pl}}{M_{pl}^*}$
m	KNm <sup>2</sup>	KNm	KNm	--	--	--
0,5	1,361E+06	2431	3353	0,359	0,571	0,562
0,7	2,147E+06	3095	4309	0,566	0,728	0,723
0,9	3,178E+06	3847	5383	0,837	0,904	0,903
1,1	4,483E+06	4680	6573	1,181	1,100	1,102
1,3	6,085E+06	5590	7880	1,603	1,314	1,321
1,5	8,009E+06	6574	9304	2,110	1,545	1,560

Tabla 5-2 Análisis paramétrico sección A: variación del canto del alma

$b_{f2}$	$(EI)$	$M_{el}$	$M_{pl}$	$\frac{(EI)}{(EI)^*}$	$\frac{M_{el}}{M_{el}^*}$	$\frac{M_{pl}}{M_{pl}^*}$
m	KNm <sup>2</sup>	KNm	KNm	--	--	--
0,0	1,738E+06	1815	3418	0,458	0,427	0,573
0,2	2,590E+06	2791	4444	0,682	0,656	0,745
0,4	3,405E+06	3768	5460	0,897	0,886	0,916
0,6	4,175E+06	4740	6463	1,100	1,114	1,084
0,8	4,906E+06	5708	7452	1,293	1,342	1,250
1,0	5,604E+06	6674	8427	1,477	1,569	1,413

Tabla 5-3 Análisis paramétrico sección A: variación de ancho de ala inferior

$H_c$	$(EI)$	$M_{el}$	$M_{pl}$	$\frac{(EI)}{(EI)^*}$	$\frac{M_{el}}{M_{el}^*}$	$\frac{M_{pl}}{M_{pl}^*}$
m	KNm <sup>2</sup>	KNm	KNm	--	--	--
0,2	2,537E+06	3413	4504	0,669	0,802	0,755
0,3	3,135E+06	3811	5256	0,826	0,896	0,881
0,4	3,795E+06	4254	5963	1,000	1,000	1,000
0,5	4,535E+06	4727	6670	1,195	1,111	1,119
0,6	5,362E+06	5225	7377	1,413	1,228	1,237

Tabla 5-4 Análisis paramétrico sección A: variación de canto total de hormigón

<i>HORM</i>	$(EI)$	$M_{el}$	$M_{pl}$	$\frac{(EI)}{(EI)^*}$	$\frac{M_{el}}{M_{el}^*}$	$\frac{M_{pl}}{M_{pl}^*}$
--	KNm <sup>2</sup>	KNm	KNm	--	--	--
C30/37	3,752E+06	4237	5801	0,989	0,996	0,973
C35/45	3,774E+06	4246	5894	0,994	0,998	0,988
C40/50	3,795E+06	4254	5963	1,000	1,000	1,000
C45/55	3,815E+06	4263	6017	1,005	1,002	1,009
C50/60	3,835E+06	4271	6060	1,011	1,004	1,016

Tabla 5-5 Análisis paramétrico sección A: variación de la clase resistente de hormigón

<i>ACERO</i>	$(EI)$	$M_{el}$	$M_{pl}$	$\frac{(EI)}{(EI)^*}$	$\frac{M_{el}}{M_{el}^*}$	$\frac{M_{pl}}{M_{pl}^*}$
--	KNm <sup>2</sup>	KNm	KNm	--	--	--
S235	3,795E+06	3635	5161	1,000	0,854	0,866
S275	3,795E+06	4254	5963	1,000	1,000	1,000
S355	3,795E+06	5492	7497	1,000	1,291	1,257
S450	3,795E+06	6961	9167	1,000	1,636	1,537

Tabla 5-6 Análisis paramétrico sección A: variación de la clase resistente de acero

**SECCIÓN B**

Los valores de las propiedades resistentes de la sección de referencia son:

$$(EI)^* = 3.795 \cdot 10^6 \text{ KNm}^2$$

$$M_{el}^* = 4254 \text{ KNm}$$

$$M_{pl}^* = 5963 \text{ KNm}$$

<i>d</i>	$(EI)$	$M_{el}$	$M_{pl}$	$\frac{(EI)}{(EI)^*}$	$\frac{M_{el}}{M_{el}^*}$	$\frac{M_{pl}}{M_{pl}^*}$
m	KNm <sup>2</sup>	KNm	KNm	--	--	--
1,0	1,219E+07	15110	18710	0,481	0,672	0,668
1,2	1,678E+07	17939	22247	0,662	0,797	0,795
1,4	2,225E+07	20937	26018	0,878	0,931	0,930
1,6	2,864E+07	24094	30022	1,131	1,071	1,073
1,8	3,599E+07	27403	34261	1,421	1,218	1,224
2,0	4,433E+07	30859	38745	1,750	1,372	1,384

Tabla 5-7 Análisis paramétrico sección B: variación del canto del alma

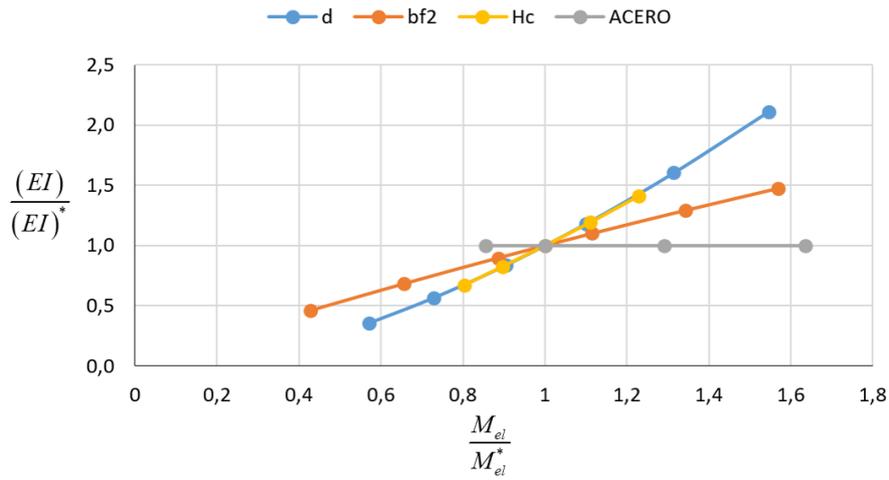


Fig. 5-3.a

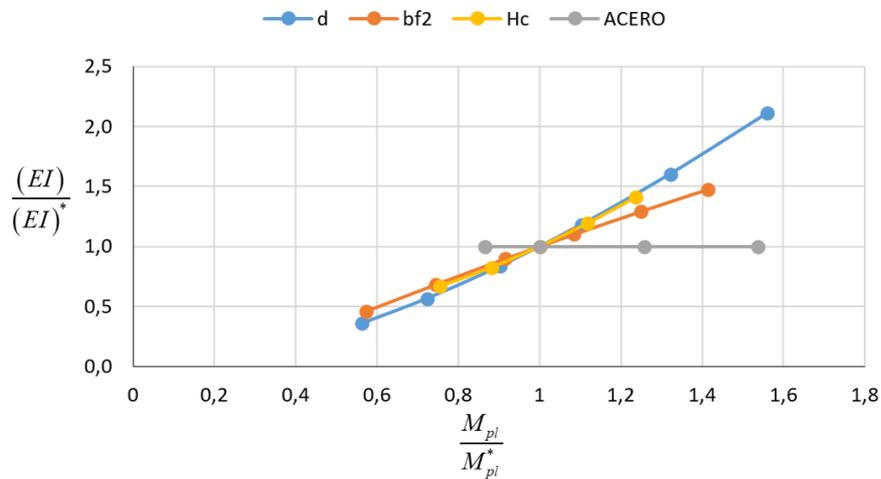


Fig. 5-3.b

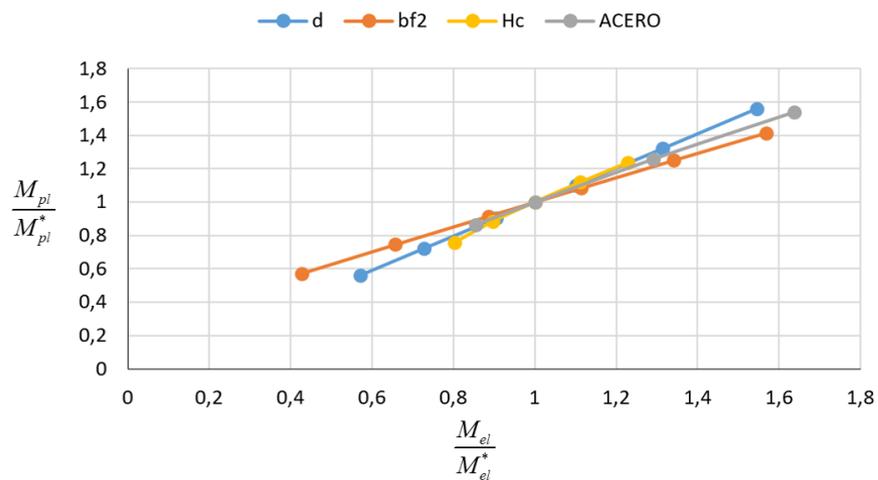


Fig. 5-3.c

Fig. 5-3 Análisis paramétrico sección A. Respecto a los parámetros escogidos, variación de:  
 a) Rigidez a flexión frente a momento resistente elástico  
 b) Rigidez a flexión frente a momento resistente plástico  
 c) Momento resistente plástico frente a momento resistente elástico

$b_{f2}$	$(EI)$	$M_{el}$	$M_{pl}$	$\frac{(EI)}{(EI)^*}$	$\frac{M_{el}}{M_{el}^*}$	$\frac{M_{pl}}{M_{pl}^*}$
m	KNm <sup>2</sup>	KNm	KNm	--	--	--
1,5	2,133E+07	18408	23946	0,842	0,818	0,855
1,7	2,296E+07	20043	25572	0,906	0,891	0,914
1,9	2,455E+07	21678	27187	0,969	0,964	0,971
2,1	2,610E+07	23313	28791	1,030	1,036	1,029
2,3	2,762E+07	24948	30384	1,090	1,109	1,085
2,5	2,910E+07	26583	31967	1,149	1,182	1,142

Tabla 5-8 Análisis paramétrico sección B: variación de ancho de ala inferior

$H_c$	$(EI)$	$M_{el}$	$M_{pl}$	$\frac{(EI)}{(EI)^*}$	$\frac{M_{el}}{M_{el}^*}$	$\frac{M_{pl}}{M_{pl}^*}$
m	KNm <sup>2</sup>	KNm	KNm	--	--	--
0,2	2,019E+07	20537	24504	0,797	0,913	0,875
0,3	2,367E+07	21824	26553	0,934	0,970	0,949
0,4	2,700E+07	23203	29250	1,066	1,031	1,045
0,5	3,046E+07	24753	31769	1,203	1,100	1,135
0,6	3,420E+07	26446	34288	1,350	1,176	1,225

Tabla 5-9 Análisis paramétrico sección B: variación de canto total de hormigón

$HORM$	$(EI)$	$M_{el}$	$M_{pl}$	$\frac{(EI)}{(EI)^*}$	$\frac{M_{el}}{M_{el}^*}$	$\frac{M_{pl}}{M_{pl}^*}$
--	KNm <sup>2</sup>	KNm	KNm	--	--	--
C30/37	2,503E+07	22431	27007	0,988	0,997	0,965
C35/45	2,518E+07	22464	27622	0,994	0,999	0,987
C40/50	2,533E+07	22496	27991	1,000	1,000	1,000
C45/55	2,547E+07	22527	28346	1,006	1,001	1,013
C50/60	2,561E+07	22556	28631	1,011	1,003	1,023

Tabla 5-10 Análisis paramétrico sección B: variación de la clase resistente de hormigón

$ACERO$	$(EI)$	$M_{el}$	$M_{pl}$	$\frac{(EI)}{(EI)^*}$	$\frac{M_{el}}{M_{el}^*}$	$\frac{M_{pl}}{M_{pl}^*}$
--	KNm <sup>2</sup>	KNm	KNm	--	--	--
S235	2,533E+07	19224	24357	1,000	0,855	0,870
S275	2,533E+07	22496	27991	1,000	1,000	1,000
S355	2,533E+07	29040	34919	1,000	1,291	1,248
S450	2,533E+07	33982	42713	1,000	1,511	1,526

Tabla 5-11 Análisis paramétrico sección B: variación de la clase resistente de acero

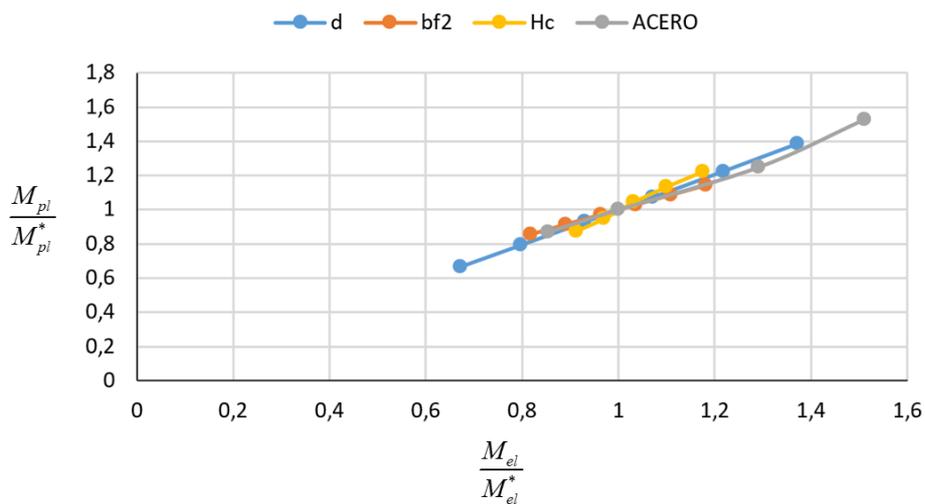
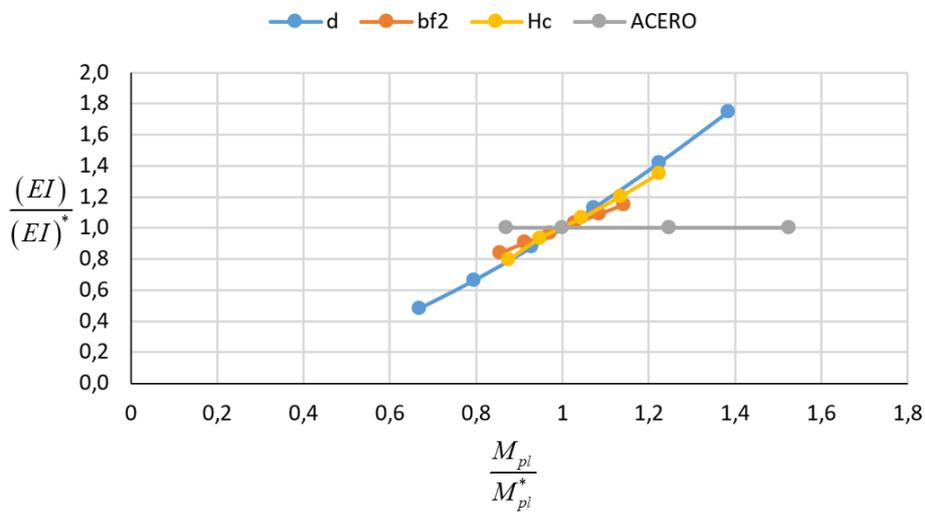
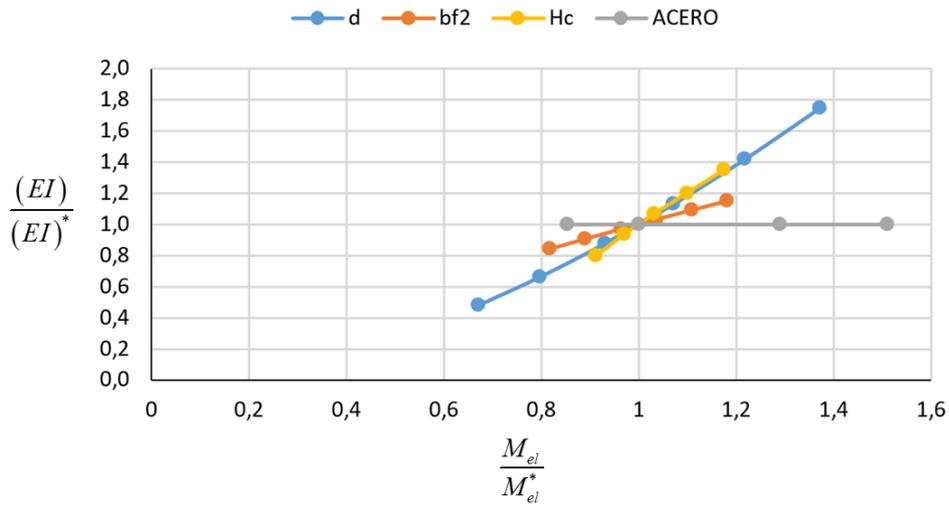


Fig. 5-4 Análisis paramétrico sección B. Respecto a los parámetros escogidos, variación de:  
 a) Rigidez a flexión frente a momento resistente elástico  
 b) Rigidez a flexión frente a momento resistente plástico  
 c) Momento resistente plástico frente a momento resistente elástico

## OBSERVACIONES

Lo primero que llama la atención es la independencia de las propiedades resistentes respecto de la clase resistente de hormigón. Se observa que, variando la clase de hormigón, rigidez a flexión, momento elástico y momento plástico apenas varían. La independencia con la rigidez a flexión es fácil de deducir porque no depende de la resistencia del hormigón, sino de la relación del módulo elástico del hormigón respecto al del acero, que varía más bien poco de una clase resistente a otra. Con algo más de razonamiento se deduce lo mismo también con el momento plástico y el elástico.

Por un lado, en general, la fibra neutra plástica a flexión positiva en una viga mixta estará en la sección de hormigón. Por otro lado, en este caso general, en flexión pura el axil en la losa es el del perfil metálico, pero con distinto signo. Así que si varía la resistencia del hormigón lo único que ocurre en el régimen último plástico es que la fibra neutra varía en la losa algunos pocos centímetros. El poco cambio de posición de la fibra neutra se debe a la gran superficie de hormigón que se suele tener. Entonces el momento plástico sigue siendo el axil en la sección metálica por una distancia que prácticamente no varía.

El razonamiento en régimen elástico es similar. La posición de la fibra neutra elástica a flexión positiva depende de la relación de módulos de elasticidad. Como este módulo varía poco al cambiar la clase resistente de hormigón, la posición de la fibra neutra permanece casi invariante. Además, se tiene que en general la curvatura de plastificación primera a flexión positiva queda determinada por la plastificación a tracción de la fibra inferior de acero. Si la fibra neutra apenas varía, la curvatura tampoco. Concluido que en régimen elástico fibra neutra, curvatura de plastificación y módulo elástico permanecen casi iguales, entonces la ley de deformaciones y tensiones es prácticamente la misma con lo que al integrar las tensiones se tiene el mismo momento elástico, aunque varíe la clase resistente de hormigón.

Explicado todo esto, decidimos no representar los resultados obtenidos de variar la clase resistente de hormigón para simplificar las ilustraciones y facilitar su interpretación.

También es interesante observar que para todos los parámetros elegidos se tiene el mismo incremento relativo al valor de referencia de momento elástico y plástico. Esto se manifiesta en que los resultados están aproximadamente sobre la bisectriz del primer cuadrante según se muestra en Fig. 5-3.c y Fig. 5-4.c.

## CONCLUSIONES

De los resultados se deduce que para mejorar las propiedades resistentes de la sección lo más efectivo es aumentar el canto de la sección, bien aumentando canto del alma o canto de la sección de hormigón. La influencia de aumentar el ancho de ala inferior resulta menor. La resistencia del acero tiene fuerte influencia en los momentos resistentes, pero no varía la rigidez a flexión porque el módulo elástico permanece constante. El problema de aumentar el canto de hormigón es que aumenta rápidamente el porcentaje de resistencia necesario para soportar el peso propio.

Por ejemplo, para una viga simplemente apoyada el momento máximo debido a la carga de peso propio en ELS está dado por:

$$M_{Ed} = \frac{qL^2}{8} \quad (4.1.1)$$

con

$$q = A_s \gamma_s + A_c \gamma_c \quad (4.1.2)$$

donde

$L$  longitud del vano

$q$  carga de peso propio

$A_c$  área de hormigón en la sección

$A_s$  área de acero en la sección

$\gamma_c$  peso específico del hormigón, aproximadamente 25 KN/m<sup>3</sup>

$\gamma_s$  peso específico del acero, aproximadamente 77 KN/m<sup>3</sup>

Para la sección A, sea 25 m la longitud del vano. Para los distintos valores de  $H_c$  estudiados se tiene:

$H_c$	$A_c$	$M_{Ed}$	$M_{el}$	$\frac{M_{Ed}}{M_{el}}$
m	m <sup>2</sup>	KNm	KNm	--
0,2	2,900E-01	718	3413	0,210
0,3	4,350E-01	995	3811	0,261
0,4	5,800E-01	1273	4254	0,299
0,5	7,250E-01	1550	4727	0,328
0,6	8,700E-01	1828	5225	0,350

Tabla 5-12 Sección A. Fracción de resistencia empleada en soportar peso propio según el canto de sección de hormigón

Para la sección B, sea 35 m la longitud del vano. Para los distintos valores de  $H_c$  estudiados se tiene:

$H_c$	$A_c$	$M_{Ed}$	$M_{el}$	$\frac{M_{Ed}}{M_{el}}$
m	m <sup>2</sup>	KNm	KNm	--
0,2	8,000E-01	4086	20537	0,199
0,3	1,200E+00	5587	21824	0,256
0,4	1,600E+00	7087	23203	0,305
0,5	2,000E+00	8588	24753	0,347
0,6	2,400E+00	10088	26446	0,381

Tabla 5-13 Sección B. Fracción de resistencia empleada en soportar peso propio según el canto de sección de hormigón

En base a estos estudios se concluye que, si no surgen problemas de inestabilidad (o se solucionan por medio de rigidizadores) lo más efectivo para mejorar las propiedades resistentes de la sección es en primer lugar aumentar el canto de alma y como segunda opción el ancho o espesor de ala inferior. Si se tiene suficiente rigidez a flexión y lo que se quiere es aumentar los momentos resistentes recomendamos optar por aumentar la resistencia del acero estructural. Por último, optaríamos por aumentar para cualquier propósito el canto de la sección de hormigón. Tiene alta repercusión en la mejoría de la resistencia de la sección, pero aumenta rápidamente el porcentaje de esta resistencia que se necesita para soportar el propio peso. Este inconveniente hace que sea la última opción que debamos tomar.

## 5.2 Análisis paramétrico 2: Influencia de la conexión

Se estudiará la influencia de las dimensiones de los pernos y su disposición en la viga en el resultado de la flecha y rasante máximo teniendo en cuenta la deformabilidad de la conexión asumiendo un comportamiento elástico de la sección. Se tomará como referencia los mismos resultados asumiendo interacción completa entre hormigón y acero. En este análisis paramétrico el conjunto de resultados comprende el análisis elástico de:

- Rasante máximo en la longitud de la viga
- Flecha

Y el conjunto de parámetros elegidos comprende:

- Diámetro del vástago
- Altura del vástago
- Separación longitudinal entre pernos
- Número de pernos colocados por sección

Es necesario también definir las secciones, vigas y leyes de flectores sobre las que se obtendrán los resultados. Se han elegido las secciones y vigas A y B definidas en el análisis paramétrico anterior con una ley de flectores correspondiente a la que produce una carga uniformemente distribuida de valor tal que el momento máximo sea el resistente elástico de la sección a flexión positiva.

Según la modelización que se ha desarrollado, no se tiene una dependencia exclusiva de cada parámetro con el valor de los resultados, sino que una conexión dada determina una rigidez equivalente y esta rigidez equivalente, los resultados. Es por ello que creemos más conveniente estudiar primero cómo varían los resultados en función de dicho valor de rigidez equivalente y luego ver cómo varía esta rigidez en función de las dimensiones y disposición de la conexión. Para tener varios valores de rigidez podemos elegir las distintas combinaciones sistemas de carga sobre el perno y condiciones de contorno que ofrece el programa. Para otros valores podemos introducirle al programa directamente un valor de rigidez equivalente según se muestra en el apartado 2.6.1.

Para la sección A en una viga con una longitud de 25 m suponiendo una interacción completa se tienen los resultados:

$$R_{\max}^* = 600 \text{ KN} / \text{m}$$

$$\delta^* = 72 \text{ mm}$$

Para la sección B en una viga con una longitud de 35 m suponiendo una interacción completa se tienen los resultados:

$$R_{\max}^* = 1563 \text{ KN} / \text{m}$$

$$\delta^* = 113 \text{ mm}$$

donde

$R_{\max}^*$  rasante máximo en la longitud de la viga suponiendo interacción completa

$\delta^*$  flecha suponiendo interacción completa

Variando la rigidez de la conexión obtenemos lo siguiente.

$K_q$	$R_{\max}$	$\delta$	$\frac{R_{\max}}{R_{\max}^*}$	$\frac{\delta}{\delta^*}$
Pa	KN/m	mm		
5,000E+07	357	120	0,595	1,667
9,443E+07	421	102	0,702	1,417
2,440E+08	488	85	0,813	1,181
5,701E+08	527	78	0,878	1,083
9,950E+08	545	75	0,908	1,042
2,000E+09	563	74	0,938	1,028

Tabla 5-14 Sección A  
Resultados de variar la rigidez equivalente de la conexión

$K_q$	$R_{\max}$	$\delta$	$\frac{R_{\max}}{R_{\max}^*}$	$\frac{\delta}{\delta^*}$
Pa	KN/m	mm		
5,000E+07	756	212	0,484	1,876
1,133E+08	1004	170	0,642	1,504
2,928E+08	1212	140	0,775	1,239
6,841E+08	1334	125	0,853	1,106
1,194E+09	1389	120	0,889	1,062
2,000E+09	1429	117	0,914	1,035

Tabla 5-15 Sección B  
Resultados de variar la rigidez equivalente de la conexión

De estos resultados podemos proponer un valor orientativo de rigidez que separe las conexiones rígidas de las flexibles. Si definimos como conexión rígida aquella que aumenta relativamente poco la deformabilidad de la sección de manera que se tienen valores parecidos a los de interacción completa, entonces en base a Fig. 5-5, Fig. 5-6 y Fig. 5-7 podemos establecer que las conexiones con rigideces mayores a 5,00E+08 Pa pueden definirse como rígidas y las de menor rigidez, como flexibles.

Este valor propuesto coincide con el que se indica en el manual Construcción Mixta de Martínez Calzón. En esta obra en el capítulo de análisis elástico de la conexión en régimen elástico no fisurado de la sección se propone la siguiente clasificación de las conexiones en base a su rigidez:

$$\begin{aligned}
 \text{Deslizante} & \quad \text{si} \quad 2.00 \cdot 10^7 \text{ Pa} < K_q < 1.25 \cdot 10^8 \text{ Pa} \\
 \text{Flexible} & \quad \text{si} \quad 1.25 \cdot 10^8 \text{ Pa} < K_q < 5.00 \cdot 10^8 \text{ Pa} \\
 \text{Rígida} & \quad \text{si} \quad 5.00 \cdot 10^8 \text{ Pa} < K_q
 \end{aligned}$$

Se observa que valores decrecientes de rigidez dan cada vez valores más alejados del resultado correspondiente a interacción completa. De aquí se deduce que la modelización que se ha realizado de la conexión puede no ser la más apropiada. Valores de deformación de los pernos por encima de un valor límite harán que estos comiencen a plastificar y se tenga una rigidez menor al valor en régimen elástico, por lo que no serían válidos los resultados devueltos por el programa que asumen una rigidez constante e igual al valor en régimen elástico.

En futuras mejoras del programa se debería intentar modelizar la rigidez de la conexión dependiente de la deformación. Mientras tanto recomendamos utilizar un valor reducido al que corresponda. En la ventana de modelización de la rigidez de la conexión se muestran los valores de rigidez en régimen elástico. Elegido el caso se introduce un menor valor (en la medida que estime oportuno) en la opción de rigidez definida por el usuario.

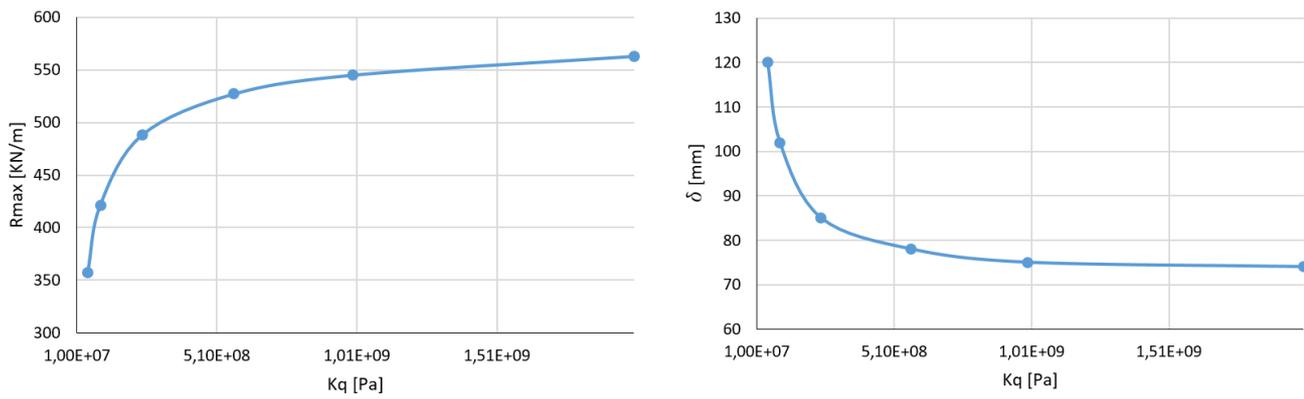


Fig. 5-5 Sección A  
Resultados de variar la rigidez equivalente de la conexión

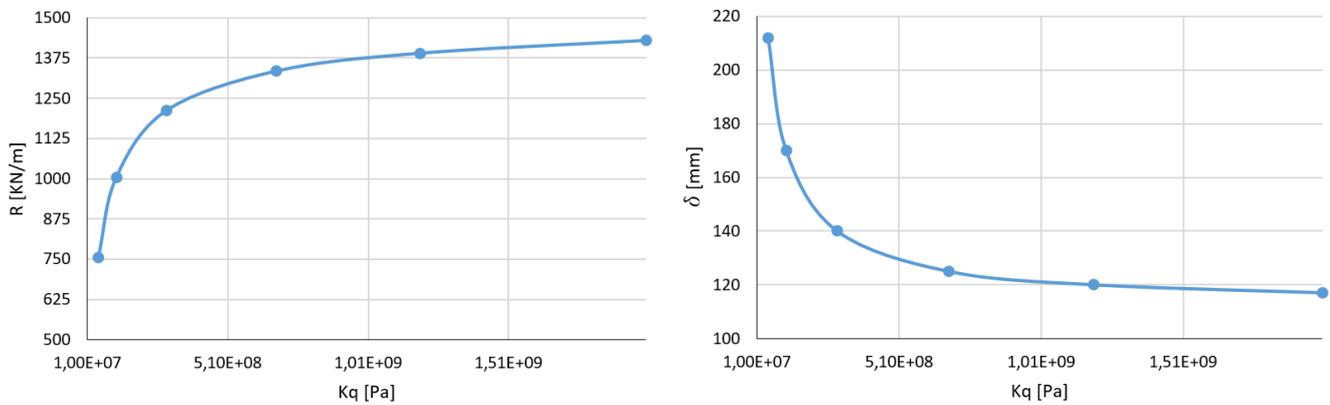


Fig. 5-6 Sección B  
Resultados de variar la rigidez equivalente de la conexión

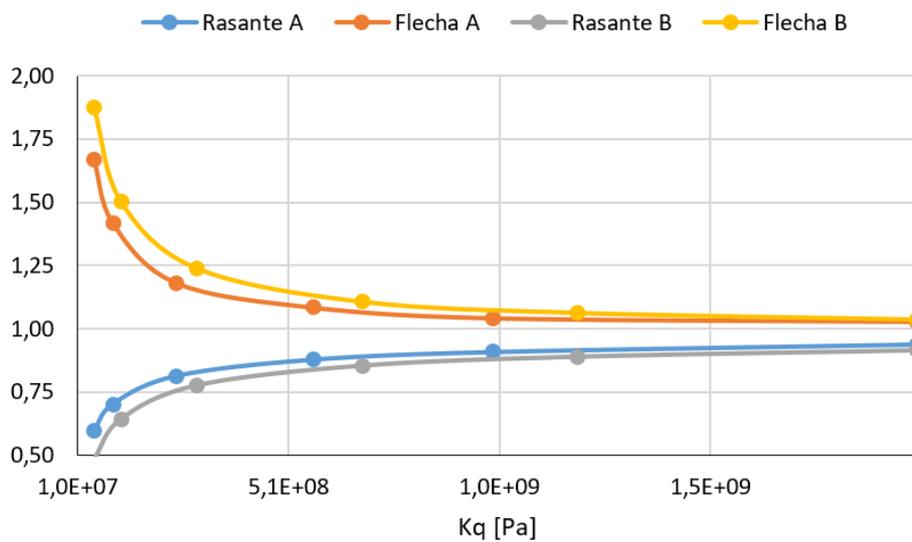


Fig. 5-7 Resultados adimensionalizados respecto a valor de interacción completa

A continuación, analizaremos la influencia de las dimensiones y disposición de los pernos conectadores en el valor de rigidez equivalente de la conexión que determina si esta es rígida o flexible.

Tomaremos unas dimensiones y disposición de conexión dadas. Con esos valores de referencia iremos modificando los parámetros uno a uno y veremos cómo varía la rigidez de la conexión. Obtenemos lo siguiente:

$h_t$	mm	70
$d_c$	mm	30
$h_v$	mm	50
$d_v$	mm	20
$s_t$	mm	300
$N_f$	mm	1

Tabla 5-16 Conexión de referencia

donde

- $h_t$  altura total del perno
- $d_c$  diámetro de la cabeza
- $h_v$  altura del vástago
- $d_v$  diámetro del vástago
- $s_t$  separación longitudinal entre pernos
- $N_f$  número de pernos colocados por sección

Al variar los parámetros el diámetro de la cabeza será en todo caso 20 mm mayor al diámetro del vástago y la altura de la cabeza será siempre de 20 mm con lo que la altura total del perno será la altura del vástago más 20 mm.

$d_v$ mm	$d_c$ mm	$K_{q,1}$ Pa	$K_{q,2}$ Pa	$K_{q,3}$ Pa	$K_{q,4}$ Pa
15	35	1,29E+08	2,08E+08	1,53E+07	3,96E+07
18	38	2,43E+08	3,95E+08	3,14E+07	8,10E+07
21	41	4,05E+08	6,67E+08	5,75E+07	1,48E+08
24	44	6,20E+08	1,03E+09	9,68E+07	2,48E+08
27	47	8,91E+08	1,50E+09	1,53E+08	3,89E+08
30	50	1,22E+09	2,08E+09	2,29E+08	5,80E+08

Tabla 5-17 Rigidez de la conexión tomando como parámetro el diámetro del vástago

$h_v$ mm	$h_t$ mm	$K_{q,1}$ Pa	$K_{q,2}$ Pa	$K_{q,3}$ Pa	$K_{q,4}$ Pa
30	50	7,46E+08	1,29E+09	1,30E+08	3,24E+08
50	70	2,85E+08	4,98E+08	4,72E+07	1,22E+08
70	90	1,31E+08	2,32E+08	2,23E+07	5,84E+07
90	110	6,92E+07	1,24E+08	1,23E+07	3,23E+07
110	130	4,05E+07	7,35E+07	7,44E+06	1,97E+07
130	150	2,56E+07	4,69E+07	4,85E+06	1,29E+07

Tabla 5-18 Rigidez de la conexión tomando como parámetro la altura del vástago

$s_t$ mm	$K_{q,1}$ Pa	$K_{q,2}$ Pa	$K_{q,3}$ Pa	$K_{q,4}$ Pa
100	8,55E+08	1,49E+09	1,42E+08	3,66E+08
200	4,28E+08	7,46E+08	7,08E+07	1,83E+08
300	2,85E+08	4,98E+08	4,72E+07	1,22E+08
400	2,14E+08	3,73E+08	3,54E+07	9,15E+07
500	1,71E+08	2,99E+08	2,83E+07	7,32E+07
600	1,43E+08	2,49E+08	2,36E+07	6,10E+07

Tabla 5-19 Rigidez de la conexión tomando como parámetro la separación longitudinal entre pernos

$N_f$ --	$K_{q,1}$ Pa	$K_{q,2}$ Pa	$K_{q,3}$ Pa	$K_{q,4}$ Pa
1	2,85E+08	4,98E+08	4,72E+07	1,22E+08
2	5,70E+08	9,95E+08	9,44E+07	2,44E+08
4	1,14E+09	1,99E+09	1,89E+08	4,88E+08
6	1,71E+09	2,99E+09	2,83E+08	7,32E+08
8	2,28E+09	3,98E+09	3,78E+08	9,76E+08

Tabla 5-20 Rigidez de la conexión tomando como parámetro el número de pernos colocados por sección

donde

$K_{q,1}$  rigidez según rasante concentrado en una carga puntual en la cabeza del perno y el giro de esta impedido

$K_{q,2}$  rigidez según rasante uniformemente distribuido con giro de la cabeza impedido

$K_{q,3}$  rigidez según rasante concentrado en una carga puntual en la cabeza del perno y el giro de esta permitido

$K_{q,4}$  rigidez según rasante uniformemente distribuido con giro de la cabeza permitido

En el siguiente gráfico tomamos la rigidez asociada a rasante concentrado en una carga puntual en la cabeza del perno y el giro impedido (valor  $K_{q,1}$ ) y representamos su valor para cada caso estudiado.

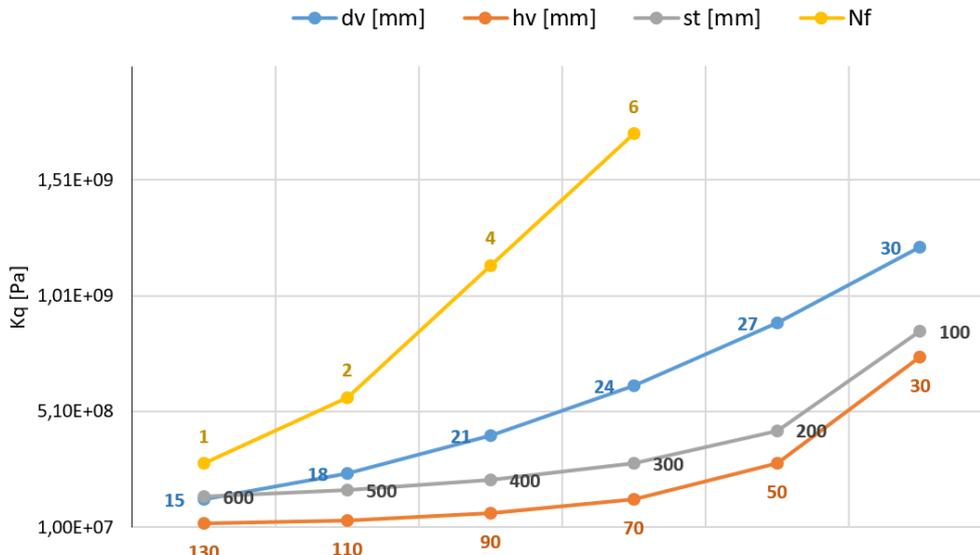


Fig. 5-8 Valores de rigidez  $K_{q,1}$  para cada caso estudiado

La rigidez de la conexión es lineal con el número de pernos en la sección, inversamente proporcional a la separación, depende del diámetro del vástago a la cuarta potencia y es inversamente proporcional al cubo de la altura del vástago. Este comportamiento se refleja en el gráfico anterior. Se deduce que lo más efectivo para tener rigideces altas de conexión y así poder tomar por válidos los resultados obtenidos de interacción completa es colocar más pernos por sección y aumentar el diámetro del vástago. Disminuir la separación es menos efectivo: hay que colocarlos bastante más juntos para tener incrementos considerables de rigidez. La altura no debe disminuirse demasiado pues, aunque aumenta la rigidez, se tiene menor valor de rasante último resistente del perno individual y además la interacción con el hormigón podría no ser la adecuada con lo que la modelización llevada a cabo podría no ser válida.

De este razonamiento proponemos establecer qué sería más conveniente, si pocos pernos altos y gruesos más distanciados o mayor cantidad de pernos más delgados, con menos altura y dispuestos de forma más junta. De cara a los resultados de rasante y flecha, estos son los mismos si se consigue en ambos casos valor similar de rigidez. Sin embargo, es más conveniente tener más cantidad de área transversal de perno por unidad de longitud de viga para tener un mayor esfuerzo rasante total resistente. Esto se consigue en mayor medida teniendo más pernos de menos dimensión. Por ejemplo, contemplamos los dos casos siguientes.

$h_t$	mm	70	90
$d_c$	mm	30	55
$h_v$	mm	50	70
$d_v$	mm	20	35
$s_t$	mm	300	500
$N_f$	mm	2	1
$K_{q,1}$	Pa	5,70 E+08	5,91 E+08
$H_{Rd}$	KN/m	553	404

Tabla 5-21 Dos propuestas de conexión:  
Pocos pernos gruesos separados y más pernos delgados y juntos

Se observa que, aun teniendo rigidez equivalente, el esfuerzo rasante resistente último por unidad de longitud es sustancialmente mayor en el caso de una conexión con pernos más delgados y juntos. Ambas opciones devolverían los mismos resultados de leyes de distribución de rasante y flechas teniendo en cuenta la deformabilidad de la conexión, pero el grado de conexión parcial por resistencia de la conexión puede resultar bastante menor si se tienen pocos pernos más separados, aunque tengan mayor diámetro.

Además, la realidad es que la rigidez de la conexión está situada de forma puntual en la viga en la posición de cada sección con pernos, por lo que sería en verdad un problema a resolver de manera discreta. La modelización del problema como si fuera continuo a través del cálculo de una rigidez uniforme equivalente es una aproximación fundamentada en el hecho de que la separación entre pernos es de menor orden de magnitud a la longitud de la viga. Así que cuanto más juntos se coloquen los pernos en relación a la longitud total de la viga más próximo estará el comportamiento continuo al real discreto y mayor validez tendrán los resultados calculados con este programa.

## 6 CONCLUSIONES

---

Finalmente, después de todo este trabajo se ha conseguido desarrollar una herramienta informática que proporciona de forma inmediata el valor de las principales magnitudes resistentes a flexión de las tipologías de sección mixta más usuales con los materiales más frecuentes. Con esta herramienta se pueden abordar análisis paramétricos para conocer el comportamiento de este tipo de secciones, incluyendo aquellos con fuerte carácter no lineal imposible de desarrollar manualmente. También sirve como herramienta de predimensionado. De los análisis paramétricos se pueden sacar las siguientes conclusiones:

- La influencia del espesor de la losa y el canto del alma de la sección metálica sobre la resistencia a flexión de las secciones mixtas es similar.
- La resistencia de la sección apenas aumenta mejorando la clase resistente del hormigón colocado en la losa.
- Se ha conseguido una herramienta para comprobar ELS de deformaciones teniendo en cuenta la deformabilidad de la conexión cuando la normativa, pese a establecer que así sea, no indica cómo.
- Se tiene mejor respuesta de la sección colocando un mayor número de pernos más juntos con menor diámetro que disponiendo pernos gruesos a mayor separación.
- Existe un valor de rigidez asociado a la conexión a partir del cual puede no considerarse la ductilidad de la conexión. Este valor coincide con el propuesto en la obra de Construcción Mixta de Martínez Calzón.



## 7 FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO

---

**A**un así, quedan numerosos aspectos en los que seguir trabajando para mejorar este programa. Destacamos implementar rigidizadores longitudinales y posición arbitraria de rigidizadores transversales así como más tipos de secciones mixtas, como las parcialmente embebidas o con doble losa de compresión para la flexión negativa.

Como mejoras secundarias:

- Calcular la sección eficaz teniendo en cuenta el fenómeno del arrastre por cortante.
- Las clases resistentes de hormigones que se han implementado llegan hasta la clase C50/60. Podrían introducirse los hormigones de altas prestaciones y resistencia.
- Respecto también al hormigón tener en cuenta retracción y fluencia.
- Implementar la comprobación de ELS de fisuración.
- Para los aceros de alta resistencia se debe tomar el comportamiento elastoplástico de los materiales para el cálculo de la sección en régimen plástico y no rígidoelástico como se ha hecho.
- Cálculo a torsión.
- Cálculo de armadura transversal.
- Más avisos sobre limitaciones y recomendaciones que se proponen en los Eurocódigos.



# BIBLIOGRAFÍA

---

*Eurocódigo 2 1992-1-1 Proyectos de estructuras de hormigón.*

*Eurocódigo 3 1993-1-1 Proyectos de estructuras de acero.*

*Eurocódigo 3 1993-1-5 Placas planas cargadas en su plano.*

*Eurocódigo 4 1994-1-1 Proyectos de estructuras mixtas de acero y hormigón.*

*Eurocódigo 4 1994-2 Reglas para puentes.*

Graciani, E., Picón, R. y Cañas, J. *Resistencia de Materiales*. Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales (GERM) del Dpto. de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras de la Universidad de Sevilla.

*Instrucción de Acero Estructural*. Serie normativas del Ministerio de Fomento de España. 3ª Edición, 2012. ISBN 9788449809170.

*Instrucción de Hormigón Estructural*. Serie normativas del Ministerio de Fomento de España. 5ª Edición, 2011. ISBN 9788449808999.

Kreyszig, Erwin. *Matemáticas avanzadas para ingeniería. Volumen 1*. Limusa Wiley, 4ª Edición, 2013. ISBN 9786070504754.

Kreyszig, Erwin. *Matemáticas avanzadas para ingeniería. Volumen 2*. Limusa Wiley, 4ª Edición, 2013. ISBN 9786070504761.

*Manual de aplicación de la RPX-95.*

Martínez Calzón, J. y Ortiz Herrera, J. *Construcción Mixta Hormigón-Acero*. Editorial Rueda, 1978. ISBN 8472070107.

Martínez Calzón, J. *Estructuras mixtas, teoría y práctica*. Instituto Eduardo Torroja de la Construcción y del Cemento, 1966.

Monfort Leonart, J. *Estructuras mixtas para edificación según criterios del Eurocódigo 4*. Editorial Universidad Politécnica de Valencia, 2002. ISBN 8497052277.

Oñate, Eugenio. *Structural Analysis by the Finite Element Method. Linear Statics. Volume 1. Basis and Solids*. Springer, 1ª Edición, 2009. ISBN 9781402087325.

Oñate, Eugenio. *Structural Analysis by the Finite Element Method. Linear Statics. Volume 2. Beams, Plates and Shells*. Springer, 1ª Edición, 2013. ISBN 9781402087424.

Ortiz Berrocal, L. *Resistencia de materiales*. McGraw Hill, 3ª Ed, 2007. ISBN 9788448156336.

*RPX-95 Recomendaciones para el proyecto de puentes mixtos para carreteras*. Serie normativa de Instrucciones de Construcción de la Dirección General de Carreteras del Ministerio de Fomento de España.