

# La inclusión de outputs no deseables en el Análisis Envolvente de Datos (DEA).

Ignacio Contreras Rubio  
Universidad Pablo de Olavide  
Carr. de Utrera Km. 1  
Sevilla, 41013

Teléfono: 954349355/ Fax 954349339  
[iconrub@dee.upo.es](mailto:iconrub@dee.upo.es)

Amparo M<sup>a</sup>. Mármol Conde  
Universidad de Sevilla  
Avda. Ramón y Cajal 1  
Sevilla 41018

Teléfono: 954557554/ Fax 954551667  
[amarmol@us.es](mailto:amarmol@us.es)

## Resumen.

Mediante las técnicas de Análisis Envolvente de Datos (DEA) se analiza la eficiencia relativa de un conjunto de organizaciones o unidades de decisión que, mediante una tecnología semejante, utilizan un conjunto común de inputs, para producir un conjunto también común de outputs.

Los modelos clásicos suponen que todos los outputs son deseables y que se pretende reducir la utilización de inputs. Sin embargo, es frecuente que en el proceso de producción aparezcan outputs nocivos o no deseables, o que la cantidad utilizada de determinado factor de producción se desee maximizar. Esta posibilidad ya fue citada en el trabajo inicial de Farrell en 1957, pero el tratamiento teórico de outputs no deseables en los modelos DEA se ha llevado a cabo esencialmente en la última década derivado, sin duda, por el creciente interés en incluir los aspectos ambientales en la evaluación de la eficiencia de las organizaciones.

En el presente trabajo se sintetizan los principales elementos teóricos relacionados con la inclusión de outputs no deseables e inputs deseables, no necesariamente ambientales, en los modelos DEA. Asimismo, proponemos una formulación general de dichos modelos a partir de la Teoría de decisión multicriterio.

**Palabras clave:** DEA, outputs no deseables, inputs deseables, Programación Multicriterio.

## 1.-Introducción.

Los modelos clásicos para la evaluación de eficiencia mediante DEA parten del supuesto de que se desea minimizar las cantidades de inputs utilizadas por cada unidad, los inputs tienen, por tanto, un carácter *no deseable* desde el punto de vista de la eficiencia. Por el contrario, las cantidades generadas de output deben ser maximizadas, por lo que pueden calificarse como variables *deseables* desde el punto de vista de la eficiencia.

No obstante, ya en los trabajos de Koopmans (1951) y Farrell (1957) se menciona la posibilidad de que del proceso productivo puedan surgir determinadas consecuencias no deseables o efectos nocivos, como puede ser, por ejemplo, la generación de residuos, así como que determinados factores productivos tengan un carácter *deseable* para la organización, piénsese, por ejemplo, en los factores utilizados en una planta de reciclado.

En la pasada década se ha multiplicado el interés por la inclusión en los modelos de evaluación de eficiencia en general de este tipo de variables, en general *outputs no deseables* e *inputs deseables*, referidos en la literatura como *factores inversos*. Este

interés está motivado, sin duda, por la creciente importancia que se ha ido otorgando a los aspectos ambientales en la evaluación de la eficiencia de la actividad de las organizaciones<sup>1</sup>. El Análisis Envolvente de Datos se presenta como una técnica con un importante potencial para la evaluación ambiental de las organizaciones respecto al análisis de indicadores tradicionales derivado, especialmente, del carácter no subjetivo de los pesos con los que se agregan las variables.

El objetivo de este trabajo es hacer una revisión de los procedimientos para estudiar la eficiencia de las unidades de decisión cuando se tienen en cuenta estos factores inversos. Para ello, en las secciones siguientes, en primer lugar se resume los elementos teóricos necesarios para la inclusión de estas nuevas variables en los modelos de evaluación de eficiencia. En segundo lugar se abordan los modelos DEA desde la perspectiva multicriterio para terminar con una ilustración de la aplicación de los modelos anteriores al estudio de la actividad económica de las ocho provincias andaluzas.

## 2.-La inclusión de factores inversos en DEA.

Consideramos un problema en el que se desean evaluar  $n$  unidades de decisión en las que cada una de ellas utiliza  $m$  inputs tradicionales, así como  $p$  inputs que la organización desea maximizar. Cada unidad produce, asimismo,  $s$  outputs deseables o tradicionales y  $q$  outputs nocivos o no deseables.

Por  $X \in M_{m \times n}(\mathfrak{R}_+)$  denotamos la matriz que representan los valores observados para los valores de inputs tradicionales. Por  $Z \in M_{q \times n}(\mathfrak{R}_+)$ ,  $Y \in M_{s \times n}(\mathfrak{R}_+)$  y  $B \in M_{p \times n}(\mathfrak{R}_+)$  denotamos, respectivamente, las matrices que incluyen los valores observados de inputs no deseables, outputs tradicionales o deseables y outputs no deseables. Por  $x^j \in \mathfrak{R}_+^n$  denotamos la columna  $j$ -ésima de la matriz  $X$ . Este vector representa las observaciones de input tradicional para la unidad  $j$ ,  $j=1, \dots, n$ . De manera análoga, pueden definirse vectores columna para el resto de variables definidas.

Con la incorporación de estas dos nuevas categorías de variables se rompe el esquema de preferencia característico de DEA: mayores cantidades de output y menores de input. Aparecen ahora valores de input con un carácter deseable desde el punto de vista de la eficiencia, por lo que se busca es incrementar sus valores, y valores de output no deseables que, por tanto, se desean reducir.

La idea básica en DEA es medir la posibilidad de que el nivel observado de una unidad pueda ser mejorado en el conjunto de posibilidades de producción. En presencia de estas nuevas variables, el conjunto de posibilidades de producción,  $P$ , ha de incluir todas las combinaciones posibles derivadas del proceso productivo, es decir,  $P = \{(x, z, y, b) \mid (x, z) \text{ permite producir } (y, b)\}$ .

Sea  $\lambda \in \mathfrak{R}_+^n$  vector que permite agregar las variables dentro de un conjunto tecnológico dado. Para el supuesto de rendimientos a escala constante el conjunto de posibilidades de producción es de la forma  $P = \{(x, z, y, b) \mid X\lambda \leq x, Z\lambda \geq z, Y\lambda \geq y, B\lambda \leq b, \lambda \geq 0\}$ . Para el supuesto de rendimientos variables a escala, en el conjunto  $P$  se consideran solo las combinaciones convexas tales que  $\lambda' \bar{1} = 1$ .

En este contexto una unidad  $(x, z, y, b) \in P$  se dirá eficiente en el sentido Pareto-Koopmans si no existe otra unidad  $(x', z', y', b') \in P$  tal que  $x \leq x', z \geq z', y \geq y', b \leq b'$  con  $(x, z, y, b) \neq (x', z', y', b')$ .

Una unidad  $(x, z, y, b) \in P$  se dirá débilmente eficiente si no existe otra unidad  $(x', z', y', b') \in P$  tal que  $x < x', z > z', y > y', b < b'$ .

Aunque el conjunto de posibilidades pueda describirse de la misma forma si, directamente, se incluyeran los outputs no deseables como inputs y viceversa, el planteamiento del modelo con cuatro categorías de variables permite diferentes alternativas en la construcción de los ratios de eficiencia así como en la construcción de las unidades de referencia, según se consideren variaciones en una u otra de las cuatro categorías de variables referidas.

Una revisión completa de los trabajos publicados a este respecto puede consultarse en Allen (1999) en la que se analizan 22 publicaciones referidas, exclusivamente, al tratamiento de aspectos ambientales. Puede destacarse, además, que la mayor parte de los trabajos incluidos son aplicaciones empíricas, en las que se realizan numerosas combinaciones de métodos y modelos para el tratamiento de los outputs no deseables. En este trabajo no se considera explícitamente el tratamiento de inputs deseables, únicamente incluyen outputs no deseables. En Lewis y Sexton (1999) puede consultarse el tratamiento de los inputs deseables.

De manera sintética, pueden diferenciarse dos vías para la inclusión de estas nuevas variables en los modelos DEA: aproximaciones indirectas y aproximaciones directas a través de modelos orientados.

(a) Por aproximaciones indirectas se entienden las transformaciones previas de los datos para su inclusión como variables tradicionales. Tanto en el ya citado trabajo de Allen (1999) como en Scheel (2000) aparecen las transformaciones propuestas de manera detallada. En general, los valores de outputs no deseables se transforman mediante una función monótona decreciente para los outputs no deseables, de manera que los resultados obtenidos pueden incorporarse como outputs tradicionales, o monótona creciente para el caso de inputs deseables, para la inclusión de los valores transformados como inputs tradicionales. Las aproximaciones propuestas, para el caso de outputs no deseables<sup>2</sup>, pueden resumirse en tres:

(a.1) Utilización de los valores simétricos,  $f_{ij}(B) = -b_{ij}, i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, n$ , propuesta por Koopmans (1951) y aplicado por Berg et al. (1992). Esta transformación produce el mismo conjunto de posibilidades que la incorporación de outputs no deseables como inputs con la única salvedad del signo.

(a.2) Utilización de los valores simétricos más una traslación,  $f_{ij}(B) = -b_{ij} + \beta_j, i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, n$ , propuesta por Seiford y Thrall (1990), donde  $\beta_j$  es un escalar común para cada uno de los outputs no deseables y suficientemente grande para que el valor final sea positivo.

(a.3) Utilización de los valores inversos,  $f_{ij}(B) = 1/b_{ij}, i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, n$ , propuesta por Golany y Roll (1989) y aplicada, entre otros, por Lovell et al. (1995)<sup>3</sup>.

La principal ventaja de este tipo de aproximaciones es la posibilidad de aplicar los modelos tradicionales sin realizar modificación en su planteamiento. Los principales inconvenientes son dos. Por un lado, la aplicación de estas transformaciones puede dar lugar a problemas de cálculo, tal es el caso de la transformación inversa si una de las

observaciones tiene una componente igual a cero. Por otro, aunque la transformación de determinadas variables tiene sentido propio como es el caso de la inversa de la tasa de mortalidad que puede ser interpretada como tasa de supervivencia, en la mayor parte de las situaciones el valor transformado carece de significado<sup>4</sup>.

(b) Para soslayar estos importantes inconvenientes, se desarrollan modelos transformados en los que se incorporan directamente las observaciones.

Puede tomarse como referencia el trabajo de Korhonen y Luptacik (2000) en el que se hace un recorrido por los posibles modelos orientados en el caso de outputs no deseables. Dejando a un lado el modelo de evaluación de eficiencia en dos etapas en el que se evalúan por separado variables tradicionales y no deseables, ver Scheel (2000) y obviando consideraciones sobre los supuestos de eliminación débil o fuerte sobre cada una de las variables<sup>5</sup>, en presencia de outputs no deseables las principales aproximaciones son tres:

(b.1) Incorporación de los outputs no deseables como inputs. La principal ventaja de este procedimiento es que se mantiene de manera natural la maximización y minimización de cada categoría de variables. Por el contrario, se rompe el esquema característico del proceso productivo.

(b.2) Incorporación de los valores no deseables como valores deseables con signo negativo. El output no deseable se considera como un caso particular de output que desea ser minimizado. A diferencia del anterior, se mantiene el esquema entre inputs y outputs característico de la función de producción.

(b.3) Creación de nuevos ratios de eficiencia, por ejemplo incorporando el input tradicional junto al output deseable con signo negativo, el output resultante es lo que Allen (1999) llama producción neta. Una aplicación de esta aproximación puede verse en Tyteca (1996).

En el caso de considerar únicamente inputs deseables, el tratamiento es análogo para los procedimientos anteriores. Lo que no queda tan claro es la incorporación a la vez de las cuatro categorías de variables, no tanto en la construcción de las ratios como en la interpretación de los coeficientes de eficiencia de cada modelo. El único trabajo en el que aparecen las cuatro categorías es Dyckhoff y Allen (2001), que presenta un modelo aditivo ponderado donde los outputs no deseables se tratan como inputs y los inputs deseables como outputs.

### **3.- Modelos DEA y Programación Multicriterio**

Un planteamiento alternativo al tratamiento de estas variables en DEA parte del estudio de las relaciones entre el Análisis Envoltante de Datos y la Optimización Multicriterio. En general, los trabajos que estudian conjuntamente ambas técnicas se encuadran en dos grandes grupos: aquellas que aplican ambas metodologías con un carácter complementario, con la finalidad de comparar y completar y, por otro, estudios que tratan de establecer la equivalencia desde el punto de vista teórico entre ambas, haciendo ver cómo los modelos DEA pueden deducirse como un caso particular de los Modelos de Programación Multicriterio. En este segundo grupo de estudios pueden considerarse los trabajos de Korhonen et al. (2001), Liu y Sharp (1999) o Stewart (1996), que comentamos a continuación.

(a) En el trabajo de Korhonen et al. (2001) se demuestra la equivalencia entre los modelos DEA y el problema lineal multiobjetivo (MOLP). Dicho planteamiento puede

extenderse de manera natural al caso que nos ocupa. Consideramos el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
 & \max \quad Y\lambda \\
 & \min \quad B\lambda \\
 & \min \quad X\lambda \\
 & \max \quad Z\lambda \\
 & \text{s.a.} \quad \lambda \in \Lambda = \{ \lambda \mid \lambda \in \mathfrak{R}_+^n, A\lambda \leq c \};
 \end{aligned}$$

El modelo busca encontrar una combinación factible de inputs y outputs que optimice, simultáneamente, los cuatro grupos de criterios, lo que daría lugar a una solución ideal que en la práctica no suele ser alcanzable.

Para obtener soluciones eficientes utiliza una función de escalarización propuesta por Wierzbicki (1980), ver Joro et al. (1998), con la que, a partir de un vector de pesos y un vector de niveles de aspiración, denominado punto de referencia en la terminología MOLP, crea un modelo genérico al que llama *modelo de punto de referencia*. A partir de éste, mediante variaciones del vector de ponderaciones y de los niveles de aspiración se generan los modelos DEA existentes, definiendo, además, la forma de  $\Lambda$  según los supuestos de rendimientos a escala.

En el caso de las cuatro categorías de variables, con vector de pesos  $w = (w^y, w^b, w^x, w^z)$  y niveles de aspiración,  $g = (g^y, g^b, g^x, g^z)$ , los modelos son de la forma:

Modelo genérico primal	Modelo genérico dual
$  \begin{aligned}  \max \quad & z_o = \sigma + \varepsilon(I^t s_y^+ + I^t s_b^- + I^t s_x^- + I^t s_z^+) \\  \text{s.a.} \quad & Y\lambda - \sigma w^y - s_y^+ = g^y \\  & B\lambda + \sigma w^b + s_b^- = g^b \\  & X\lambda + \sigma w^x + s_x^- = g^x \\  & Z\lambda - \sigma w^z - s_z^+ = g^z \\  & s_y^+, s_b^-, s_x^-, s_z^+ \geq 0 \\  & \varepsilon > 0 \text{ (no arquimediano)} \\  & \lambda \in \Lambda = \{ \lambda \mid \lambda \in \mathfrak{R}_+^n, A\lambda \leq c \}.  \end{aligned}  $	$  \begin{aligned}  \min \quad & w_o = v_x^t g^x - v_z^t g^z - u_y^t g^y + u_x^t g^x + u^t c \\  \text{s.a.} \quad & -u_y^t Y + u_b^t B + v_x^t X - v_z^t Z + u^t A \geq 0 \\  & u_y^t w^y + u_b^t w^b + v_x^t w^x + v_z^t w^z = 1 \\  & v_x^t, v_z^t, u_y^t, u_b^t \geq \varepsilon 1 \\  & u \geq 0 \\  & \varepsilon > 0 \text{ (no arquimediano)}.  \end{aligned}  $

Este modelo general permite la incorporación de la posible información adicional disponible sobre el conjunto de posibilidades de producción a través de las restricciones  $A\lambda \leq c$ .

(b) En el trabajo de Liu y Sharp (1999) se describe la construcción de los modelos DEA a partir del planteamiento de un problema de Programación por Metas. En él, se parte de establecer la relación entre inputs y outputs utilizados por las unidades a través de lo que denomina *sistemas de respuesta*. Se establecen tres posibilidades:

- **Sistemas de respuesta positivos (PRS).** Aquellos en los que se desea un mayor nivel de output cuando el nivel de input aumenta. En este caso, la eficiencia de la unidad es evaluada en función de la cantidad de output que puede producir, es decir, mientras mayor sea este valor, para un valor de input dado, más eficiente es considerada la unidad.

- Sistemas de respuesta negativos (NRS). En este caso, la unidad desea reducir los niveles de output cuando los niveles de input se incrementan. Este es, por tanto, el sistema de respuesta característico para la valoración de outputs no deseables.
- Sistemas de respuesta mixtos. Permite representar situaciones en las que aparecen, simultáneamente, las dos relaciones anteriores.

En el caso que nos ocupa, con las cuatro variables reseñadas, es claro que la relación entre input y output tradicional responde al primero de los casos y la relación entre input tradicional y output no deseable al segundo de ellos. Las relaciones entre input no deseable y output tradicional son del tipo *PRS* y entre input deseable y output no deseable *NRS*. Como se vio, la idea básica en DEA es medir la posibilidad de que el nivel observado de una unidad pueda ser mejorado. Si no existe mejora posible la unidad es considerada eficiente, es decir, si la meta establecida no puede ser mejorada, la unidad evaluada es eficiente. En otro caso, la unidad es ineficiente. Las metas iniciales si deseamos evaluar la DMU<sub>o</sub> serán, por tanto, los valores observados para la unidad, es decir,  $X\lambda \leq x^o, Z\lambda \geq z^o, Y\lambda \geq y^o, B\lambda \geq b^o$ .

Para evaluar la posibilidad de mejora de una unidad, Liu y Sharp (1999) proponen diferentes tipos de funciones de valoración: funciones aditivas, en la que se considera un vector de ponderaciones  $(w_x, w_z, w_y, w_b)$ , y funciones combinadas en la que cabe tanto variaciones radiales como aditivas. En ambos casos el conjunto tecnológico,  $\Lambda$ , varía según los supuestos sobre rendimientos a escala que se establezcan y la información adicional disponible.

Funciones aditivas		Funciones combinadas	
<i>max</i>	$w_x s_x + w_z s_z + w_y s_y + w_b s_b$	<i>max</i>	$w_x (1 - \theta_x) + w_z \theta_z + w_y \theta_y + w_b (1 - \theta_b) + \varepsilon( s_x _1 +  s_z _1 +  s_y _1 +  s_b _1)$
<i>s.a.</i>	$X\lambda + s_x = x^o$	<i>s.a.</i>	$X\lambda + s_x = \theta_x x^o$
	$Z\lambda - s_z = z^o$		$Z\lambda - s_z = \theta_z z^o$
	$Y\lambda - s_y = y^o$		$Y\lambda - s_y = \theta_y y^o$
	$B\lambda + s_b = b^o$		$B\lambda + s_b = \theta_b b^o$
	$\lambda \in \Lambda$		$\lambda \in \Lambda$
	$s_x, s_z, s_y, s_b \geq 0$ .		$\varepsilon, s_x, s_z, s_y, s_b, \theta_x, \theta_z, \theta_y, \theta_b \geq 0$

En el caso de funciones combinadas,  $\varepsilon$  es un valor infinitésimo y  $|\cdot|_1$  representa la norma 1. Dando valores a los pesos  $w$  pueden generarse las diferentes orientaciones. Al igual que antes no se consideran las implicaciones derivadas de los supuestos de eliminación débil o fuerte sobre las variables. Puede verse cómo para los casos de variables que han de ser reducidas, inputs tradicionales y outputs no deseables, el modelo puede escribirse como minimizar la función cambiada de signo para establecer la analogía con modelos clásicos.

(c) Por último, consideramos la propuesta de Li y Reeves (1999) en el que plantea los modelos clásicos DEA a partir de una variable de desviación  $d$ . El modelo clásico con rendimientos constantes a escala, que es referido en la literatura como modelo CCR, Charnes et al. (1978), en su forma multiplicativa puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
& \min d_o \quad (\max h_o = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}) \\
& \text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1 \\
& \quad \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + d_j = 0; \quad \forall j = 1, \dots, n \\
& \quad u_r, v_i, d_j \geq 0; \quad \forall r, i, j.
\end{aligned}$$

Donde  $d_j$  representa la variable de desviación para la DMU $_j$ . En este modelo, la unidad es eficiente si y solo si el valor de su variable de desviación en el óptimo es 0 ( $d_o^* = 0$ ) o, equivalentemente, si  $h_o^* = 1$ . Si la unidad no es eficiente, su coeficiente de eficiencia viene dado por  $h_o^* = 1 - d_o^*$ .

Si bien  $d_o$  es la medida de eficiencia clásica, pueden definirse otras que completen la información sobre la clasificación de la unidad según distintos conceptos de eficiencia.

En Li y Reeves (1999) se propone un modelo con tres posibles criterios, cada uno de los cuales define un concepto diferente de eficiencia: minimizar la desviación de la unidad evaluada, minimizar la máxima desviación y minimizar la suma de desviaciones, sin que exista una orden de prioridad entre los objetivos.

Planteamos a continuación la adaptación de este modelo para el tratamiento de factores inversos. Considerando los cuatro vectores de variables conjuntamente, el planteamiento del modelo depende de cómo se integren los valores de outputs no deseables e inputs deseables. Consideramos dos posibilidades:

(c.1) Las nuevas variables se incorporan junto a las tradicionales pero cambiadas de signo, obteniéndose el siguiente modelo lineal multiobjetivo:

$$\begin{aligned}
& \min d_o \\
& \min M \\
& \min \sum_{j=1}^n d_j \\
& \text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^m v_i^x x_{io} - \sum_{i=1}^s v_i^z z_{io} = 1 \\
& \quad \sum_{r=1}^s u_r^y y_{rj} - \sum_{r=1}^p u_r^b b_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i^x x_{ij} + \sum_{i=1}^s v_i^z z_{ij} + d_j = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n \\
& \quad M - d_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
& \quad u_r^y, u_r^b, v_i^x, v_i^z \geq 0, \quad \forall r, i
\end{aligned}$$

(c.2) Los outputs no deseables se incorporan como inputs y los inputs deseables como outputs, con lo que el modelo se escribe como:

$$\begin{aligned}
& \min d_o \\
& \min M \\
& \min \sum_{j=1}^n d_j \\
& \text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^m v_i^x x_{io} + \sum_{r=1}^p u_r^b b_{ro} = 1 \\
& \quad \sum_{r=1}^s u_r^y y_{rj} - \sum_{r=1}^p u_r^b b_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i^x x_{ij} + \sum_{i=1}^s v_i^z z_{ij} + d_j = 0, \forall j = 1, \dots, n \\
& \quad M - d_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \\
& \quad u_r^y, u_r^b, v_i^x, v_i^z \geq 0, \forall r, i
\end{aligned}$$

En estos modelos la solución que optimiza el primer objetivo coincide con la solución de los modelos DEA orientados. Los otros dos criterios definen dos conceptos diferentes de eficiencia, eficiencia-minimax para las soluciones que optimizan el segundo criterio y eficiencia-minisum para el tercero. En los tres casos, se habla de eficiencia si el valor en el óptimo es cero (o su coeficiente de eficiencia es igual a 1). Puede comprobarse que los dos últimos criterios son más restrictivos que el primero, que coincide con el valor de eficiencia clásico de DEA. Si una unidad es eficiente en los criterios minimax o minisum necesariamente ha de serlo en el primero de los criterios. La principal ventaja que se deriva del tratamiento simultáneo de las tres medidas de eficiencia es la reducción del número de unidades eficientes, algo que resulta de especial utilidad si se desea hacer una ordenación de las unidades de decisión estudiadas como vemos en la siguiente aplicación.

#### 4.-Análisis de la actividad económica de las provincias andaluzas.

Consideramos, a modo de ilustración, un análisis de la actividad económica de las ocho provincias andaluzas en función de las variables que aparecen en la Tabla 1, cada una de las cuales se corresponde con una de las cuatro categorías analizadas en este trabajo:

- PIB per cápita en miles de pesetas corrientes. Se incorpora al modelo como output tradicional.
- Producción declarada de residuos peligrosos, que se incorpora al modelo como output no deseable.
- Consumo eléctrico, que se considera en el modelo input tradicional.
- Población ocupada. Se considera input deseable en el modelo ya que representa un recurso del sistema cuya cuantía se desea maximizar.

En primer lugar, se resuelve un modelo aditivo como el propuesto en el apartado (b) de la Sección 3, modelo no orientado en el que se considera un vector de ponderaciones unitario. Las provincias cuya actividad económica es considerada como eficiente, según esta medida, son Granada y Málaga. Las demás provincias pueden ordenarse según este índice de eficiencia como Córdoba, Jaén, Almería, Sevilla, Huelva y Cádiz. Los resultados aparecen en la Tabla 2.

En segundo lugar, planteamos un modelo en el que el output no deseable se incorpora con valor negativo y el input deseable como output, de manera que obtenemos un modelo orientado exclusivamente al input tradicional (consumo eléctrico).

Si se resuelven por separado los tres objetivos definidos en el anterior modelo, los resultados obtenidos se recogen en la Tabla 3. Puede apreciarse el carácter más



restrictivo de la eficiencia minisum y minimax respecto al primer criterio, que coincide con el valor del coeficiente de eficiencia del modelo CCR correspondiente.

Los índices de eficiencia en los tres modelos proponen ordenaciones diferentes de las unidades de decisión. Solo coinciden en situar en el primer lugar a Granada ya que es la única que aparece como eficiente según los tres criterios, y en último lugar a Huelva.

**Tabla 1**

Provincia	PIB per cápita	Población ocupada	Consumo de electricidad	Producciones de residuos peligrosos
<b>AL</b>	2045,937	172,3	1785,158	3481,5
<b>CA</b>	1618,115	336,4	4390,789	100501,4
<b>CO</b>	1629,266	222,7	2222,859	1987,4
<b>GR</b>	1521,150	234,8	2054,329	3676,1
<b>HU</b>	1818,470	141,4	2935,861	52874,6
<b>JA</b>	1496,444	197,4	1933,953	3328,7
<b>MA</b>	2031,925	406,3	3853,507	2991,6
<b>SE</b>	1597,979	551,5	5800,823	21672,6

Fuentes: Anuario Económico de España 2001. Servicio de Estudios de La Caixa. IEA, Anuario estadístico 2001.

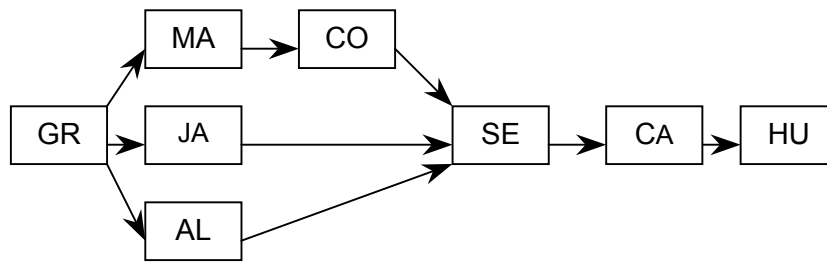
**Tabla 2**

Provincia	Aditivo
<b>AL</b>	2363,85
<b>CA</b>	99224,72
<b>CO</b>	458,34
<b>GR</b>	0,00
<b>HU</b>	53428,24
<b>JA</b>	1936,97
<b>MA</b>	0,00
<b>SE</b>	18182,07

**Tabla 3**

Provincia	Minimizar $d_o$	Minisum	Minimax
<b>AL</b>	1,000	0,844	0,934
<b>CA</b>	0,670	0,670	0,648
<b>CO</b>	1,000	0,877	0,891
<b>GR</b>	1,000	1,000	1,000
<b>HU</b>	0,540	0,421	0,474
<b>JA</b>	0,927	0,893	0,912
<b>MA</b>	1,000	0,922	0,896
<b>SE</b>	0,832	0,832	0,773

Considerando los valores tridimensionales que contienen las tres medidas de eficiencia, para cada unidad obtenerse una ordenación parcial de las unidades de decisión que representa la situación relativa de unas unidades respecto a otras. En este caso se obtiene:



Esta ordenación parcial puede realizarse por cualquier procedimiento de ordenación de alternativas, por ejemplo Promethee, Brans et al. (1986).

## 5.- Conclusiones

En este trabajo se hace una revisión de los principales elementos teóricos relacionados con la inclusión de factores inversos en el Análisis Envoltorio de Datos y se pone de manifiesto que el estudio de los modelos DEA desde la perspectiva multicriterio permite un tratamiento unificado de dichos outputs no deseables e inputs deseables, haciendo posible también la consideración conjunta de varias medidas de eficiencia.

El trabajo se ilustra con un estudio de la actividad económica de las ocho provincias andaluzas, considerando las cuatro categorías de variables que aparecen en el trabajo, con el que se pretende ver la utilidad de considerar diferentes medidas de eficiencia si se desea realizar una ordenación de las unidades evaluadas.

## Referencias

- Allen, K. (1999) DEA in Ecological Context: an Overview, en Data Envelopment Analysis in the Service Sector, Westermann. pp. 203-235, Gabler, Wiesbaden.
- Berg, S.A., Forsund, F.R. y Jansen, E.S., (1992) Malmquist Indices of Productivity Growth During the Deregulation of Norwegian Banking 1980-89. Scandinavian Journal of Economics, pp. 211-228.
- Brans, J. P., Vincke, P.H. y Mareschal, B. How to Select and How to Rank Projects: The Promethee Method. European Journal of Operational Research vol 24, pp. 228-238.
- Charnes, A. Cooper, W.W. y Rhodes, E. (1978) Measuring the Efficiency of Decision Making Units, European Journal of Operational Research 2, pp. 429-444.
- Dyckhoff, H. y Allen, K. (2001) Measuring Ecological Efficiency with Data Envelopment Analysis (DEA). European Journal of Operational Research 132, pp. 312-325.
- Farrell, M. J. (1957) The Measurement of Productive Efficiency, Journal of the Royal Statistical Society, Serie A, nº 120 Part 3, pp. 253-290.
- Golany, B. y Roll, Y. (1989) An Application Procedure for DEA. Omega: The International Journal of Management Science 17, pp. 237-250.
- Joro, T., Korhonen, P. y Wallenius, J. (1998) Structural Comparison of Data Envelopment Analysis and Multiple Objective Linear Programming. Management Science, vol. 44, nº , pp.962-970.

- Koopmans, T. C. (1951) *Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities en Activity Analysis of Production and Allocation*, T.C. Koopmans, New York, Wiley.
- Korhonen, P. y Luptacik, M. (2000) *Eco-Efficiency Analysis of Power Plants: an Extension of Data Envelopment Analysis*. Helsinki School of Economics and Business Administration Working Paper (W-241).
- Korhonen, P., Tainio, R. y Wallenius, J. (2001) *Value Efficiency Analysis of Academic Research*. *European Journal of Operational Research*, vol. 130, pp. 121-132.
- Lewis, H.F. y Sexton, T. R. (1999) *Data Envelopment Analysis with Reverse Inputs*, presentado en el *North American Productivity Workshop*, Union College, Schenectady, New York.
- Li, X-B. y Reeves, G. R. (1999) *A Multiple Criteria Approach to Data Envelopment Analysis*, *European Journal of Operational Research* 115, pp. 507-517.
- Liu, W. y Sharp, J. (1999) *DEA Models via Goal Programming*, en *Data Envelopment Analysis in the Service Sector*, Westermann (Ed.). pp. 79-101, Gabler, Wiesbaden.
- Lovell, C.A.K., Pastor, J.T. y Turner, J.A. (1995) *Measuring Macroeconomic Performance in OCDE: A Comparison of European and Non-european countries*, *European Journal of Operational Research* 87, pp. 507-518.
- Scheel, H. (2000) *Undesiderable outputs in Efficiency Valuations*. *European Journal of Operational Research* 132, pp. 400-410.
- Seiford, L.M. y Thrall, R.M. (1990). *Recent Development in DEA: The Mathematical Programming Approach in Frontier Analysis*. *Journal of Econometrics*, 46, pp. 7-38.
- Stewart, T. J. (1996) *Relationships between Data Envelopment Analysis and Multicriteria Decision Analysis*. *Journal of the Operational Research Society*, vol. 47, nº 5, pp. 654-665.
- Tyteca, D. (1996) *On the Measurement of the Environmental Performance for Firms: Concepts and Empirical Results*. *Journal of Productivity Analysis* 8, pp. 183-197.
- Wierzbicki, A. (1980) *The Use of Reference Objectives in Multiobjective Optimization*, en G. Fandel y T. Gal (Eds.) *Multiple Objective Decision Making, Theory and Application*, Springer-Verlag, New York.

---

<sup>1</sup> No obstante, el tratamiento de este tipo de variables no ha de identificarse, necesariamente, con los aspectos ambientales de la actividad empresarial. Con la inclusión de estos dos nuevos tipos de variables se hace posible la evaluación de cualquier actividad en la que bien aparezcan consecuencias no deseables derivadas de la producción, piénsese, por ejemplo, en los índices de morosidad de las entidades financieras, o en la que alguno de los factores sea especialmente atractivo para la entidad.

<sup>2</sup> Que, puede extenderse al caso de inputs deseables.

<sup>3</sup> En Scheel (2000) se demuestra como si una unidad es eficiente con la aproximación mediante sus valores inversos, también lo será si se utiliza el cálculo del simétrico o simétrico más traslación.

<sup>4</sup> En Lovell et al. (1995) puede verse una aplicación de la incorporación de datos transformados para el estudio de 19 países de la OCDE.

<sup>5</sup> Para una discusión detallada puede verse Scheel (2000). Los supuestos más usuales asumen eliminación fuerte en outputs tradicionales, con lo que se hace referencia a la posibilidad de reducir las cantidades producidas sin coste manteniendo constante el input utilizado; por el contrario, bajo el supuesto de eliminación débil las producciones no deseables solo pueden ser reducidas a expensas de reducir la producción de outputs deseables o del incremento de input.