Juegos finitos n-personales como juegos de negociación

A.M.Mármol, L.Monroy, V. Rubiales
Departamento de Economía Aplicada III.
Universidad de Sevilla.

Avd. Ramón y Cajal, n.1. 41018-Sevilla.
vrubiales@us.es

Resumen
Los juegos n-personales finitos son una extensión de los juegos bimatriciales al caso de n jugadores. Tradicionalmente estos juegos se tratan desde el punto de vista no cooperativo, pero en muchas ocasiones puede resultar útil analizar las posibilidades de cooperación entre los jugadores para obtener soluciones de consenso que mejoren el resultado que pueden asegurarse los jugadores individualmente. En este trabajo analizamos los juegos n-personales finitos como juegos de negociación. Consideramos una extensión de los valores maximin de un juego bipersonal para establecer el punto de desacuerdo como el pago que cada jugador puede garantizarse independientemente de los demás jugadores. Una vez determinado dicho punto, obtenemos la solución de Kalai-Smorodinsky y la solución igualitaria. Los resultados se ilustran con un ejemplo.

Palabras clave: Juegos finitos, juegos de negociación, soluciones α-maxmin.

Abstract
N-person finite games are the extension of bimatrix games to the case of n players. These games are usually analyzed as noncooperative games, but in certain contexts it can be useful to explore the possibilities of cooperation among players to reach a consensus solution. In this paper we analyze n-person finite games as bargaining games. We consider an extension of the concept of maxmin values, in order to establish the disagreement point, and present a linear programming procedure to obtain the Kalai-Smorodinsky and the egalitarian solutions. Finally we discuss an example to illustrate the results.

Keywords: Finite games, bargaining games, α-maxmin solutions.

1. Introducción.

Los juegos n-personales finitos en forma normal se han estudiado usualmente desde la óptica de la teoría de juegos no cooperativos, siendo el equilibrio de Nash (Nash, 1950a) el concepto de solución más importante para este tipo de juegos. Sin embargo, aunque todo juego finito posee al menos un equilibrio de Nash, esta solución presenta dificultades con respecto al número de puntos de equilibrio, con respecto a la forma que tales equilibrios podrían estar relacionados y con el hecho de que el resultado que proporciona el punto de equilibrio pueda no ser Pareto-óptimo. Estas debilidades del equilibrio de Nash sugieren una posibilidad de cooperación entre los jugadores, de forma que se garanticen un resultado mejor que el que puedan obtener de forma independiente.

En este trabajo, analizamos los juegos n-personales finitos escalares como juegos de negociación en los que el espacio de todos los posibles resultados se obtiene con la convexificación del espacio de pagos del juego finito mediante estrategias mixtas conjuntas. Estas estrategias no sólo permiten generar cualquier pago del espacio, sino que también pueden utilizarse para mejorar el resultado en relación con un punto de desacuerdo no cooperativo que se determina como los pagos que pueden asegurarse los jugadores si actúan unilateralmente.

En la literatura sobre juegos de negociación se han propuesto diferentes conceptos de solución. Entre las soluciones clásicas que se han planteado está la solución de Nash, (Nash, 1950b), que asigna el punto del conjunto de pagos posibles que maximiza el producto de las utilidades obtenidas desde el punto de desacuerdo. Ha sido también muy estudiada la familia de soluciones proporcionales (Kalai, 1977), denominadas también α-igualitarias, que asignan el punto maximal factible para el cual las ganancias de utilidad de todos los agentes desde el punto de desacuerdo son proporcionales. Casos particulares son la solución de Kalai-Smorodinsky, (Kalai y Smorodinsky, 1975), que considera el punto cuyas utilidades son proporcionales a las expectativas más optimistas de los agentes, y la solución igualitaria que proporciona las mismas ganancias de utilidad a todos los agentes.

El concepto de solución que consideramos en este trabajo para resolver el juego de negociación inducido por el juego finito, se basa en la aplicación del criterio maximin, dando lugar a la familia de soluciones α-maxmin (Mármol et al. 2002), que proporcionan un resultado factible que maximiza el mínimo de las ganancias de utilidad ponderadas obtenidas por cada jugador. Bajo ciertas condiciones, en esta familia se incluyen las soluciones clásicas de Kalai-Smorodinsky y la igualitaria, y en general, proporcionan resultados que dominan a los de éstas.

El trabajo está organizado de la siguiente forma: en la sección 2 presentamos el juego finito n-personal escalar. La sección 3 se dedica a la formulación del juego de negociación asociado al juego finito n-personal y a su resolución. En la sección 4 presentamos un ejemplo de juego finito, que nos permite ilustrar el análisis que proponemos. El trabajo finaliza con una sección dedicada a las conclusiones.

2. Juegos finitos n-personales

Los juegos n-personales finitos en forma normal son una extensión de los juegos bimatriciales al caso de n jugadores. Aunque no es posible representar matricialmente estos juegos, sí podemos establecer una formulación precisa para describirlos.

Un juego n-personal finito viene dado por el conjunto de jugadores, $N = \{1,...,n\}$, donde cada jugador, $i \in N$, tiene un número finito de alternativas o estrategias puras, r_i. Para $i \in N$, sea $E_i = \{e_i^1,...,e_i^{r_i}\}$ el conjunto de estrategias puras del jugador i. Cuando cada jugador i elige su estrategia pura $e_i^{j_i}$, el resultado del juego es un vector n-dimensional $(a_1^{j_1,...,j_n},...,a_n^{j_1,...,j_n})$, donde la componente i-ésima representa el pago obtenido por el jugador i.

Denotaremos por Y_i al espacio de estrategias mixtas para el jugador i,

$$Y_i = \{ y_i \in R^{r_i} \ / \ \sum_{j=1}^{r_i} y_i^j = 1,\ y_i^j \geq 0,\ \forall j = 1,...,r_i \ \}$$

Las estrategias mixtas de los jugadores son distribuciones de probabilidad sobre el conjunto de sus estrategias puras. Si los jugadores no cooperan, cada jugador elige una estrategia de su espacio de estrategias mixtas, $y_i \in Y_i$, y la función de pagos se define en el producto cartesiano de los espacios de estrategias mixtas de los jugadores, $\prod_{i=1}^{n} Y_i \subseteq R^{\sum_{i=1}^{n} r_i}$. Un vector $y \in R^{\sum_{i=1}^{n} r_i}$ se representa como $y = (y_1,...,y_n)$, donde $y_i = (y_i^1,...,y_i^{r_i})$. La función de pagos en el juego no cooperativo es una función vectorial multilineal, $f^{NC} : \prod_{i=1}^{n} Y_i \to R^n$, que puede escribirse como

$$f^{NC}(y_1,...,y_n) = \left(\sum_{j_1=1}^{r_1} ... \sum_{j_n=1}^{r_n} y_1^{j_1} ... y_n^{j_n} a_1^{j_1,...,j_n},..., \sum_{j_1=1}^{r_1} ... \sum_{j_n=1}^{r_n} y_1^{j_1} ... y_n^{j_n} a_n^{j_1,...,j_n} \right)$$

Si se supone la cooperación entre los jugadores, hay que considerar las estrategias conjuntas que pueden formarse a través de dicha cooperación. Así, el juego tiene $R = \prod_{i=1}^{n} r_i$ estrategias puras conjuntas. El conjunto de dichas estrategias puede representarse como

$$E = \prod_{i=1}^{n} E_i = \{(e_1^{j_1},...,e_n^{j_n}),\ e_i^{j_i} \in E_i, i = 1,...,n,\ j_i = 1,...,r_i\}$$

Análogamente, hay que extender la definición de estrategia mixta al ámbito de estos juegos para introducir el concepto de estrategia mixta conjunta como una distribución de probabilidad sobre el conjunto de las estrategias puras conjuntas. Así, mientras que en un juego no cooperativo, las estrategias mixtas son distribuciones de probabilidad de los jugadores elegidas independientemente, en un juego cooperativo las estrategias mixtas conjuntas son distribuciones de probabilidad elegidas conjuntamente. El espacio de decisión conjunto de los jugadores en un juego n-personal finito cooperativo es

$$Y = \{ y \in R^R, \sum_{i=1}^{R} y^k = 1,\ y^k \geq 0 \ \}$$

Cada componente de $y \in Y, y^k = y^{j_1,...,j_n}, j_i \in \{1,...,r_i\}$ representa la probabilidad de que los jugadores elijan la estrategia pura conjunta $(e_1^{j_1},...,e_n^{j_n})$.

La función de pagos del juego cooperativo, definida en el espacio de estrategias mixtas conjuntas, es una función vectorial lineal, $f^C : Y \to R^n$, que puede escribirse como

$$f^C(y) = \left(\sum_{\substack{j_i=1 \\ i=1,\dots,n}}^{r_i} y^{j_1,\dots,j_n} \; a_1^{j_1,\dots,j_n}, \dots, \sum_{\substack{j_i=1 \\ i=1,\dots,n}}^{r_i} y^{j_1,\dots,j_n} \; a_n^{j_1,\dots,j_n} \right)$$

Considerando estrategias mixtas conjuntas se consigue la convexificación del conjunto de pagos del juego n-personal finito, ya que puede generarse cualquier combinación convexa de vectores de pagos obtenidos mediante estrategias puras. Esto es debido a que el espacio de estrategias mixtas conjuntas es compacto y convexo, y la función f^C es lineal, por lo que el conjunto de pagos es un poliedro cuyos vértices son los pagos correspondientes a las estrategias puras conjuntas de los jugadores. La región de pagos del juego n-personal cooperativo está formada por las combinaciones convexas de los pagos asociados a las estrategias puras.

3. El juego de negociación.

Un juego de negociación n-personal se describe usualmente por un conjunto de agentes, $N = \{1,\dots,n\}$, y un par (S,d), donde $S \subset R^n$ es el conjunto de todos los posibles resultados del juego y d es el punto de desacuerdo, que representa el pago que los agentes obtendrán en caso de no llegar a un acuerdo. Una solución para un juego de negociación especifica un pago que los jugadores aceptarían bajo ciertos supuestos de racionalidad.

Asociado a un juego finito n-personal, definimos un juego de negociación (S,d), donde S se corresponde con la región de pagos del juego cooperativo, esto es $S = f^C(Y)$. La obtención del punto de desacuerdo para este juego de negociación se describe a continuación.

3.1. Puntos de desacuerdo

Una forma natural de establecer el punto de desacuerdo en un juego de negociación consiste en determinar los pagos que pueden asegurarse los jugadores si actúan unilateralmente, sin tener en cuenta la actuación de los demás. Si se trata de un juego bimatricial, estos pagos son los valores maximin del juego. En el caso de n jugadores, proponemos obtener un ”nivel de seguridad”, d_i, para cada jugador $i = 1,\dots,n$, para lo que extendemos el concepto de los valores maximin de un juego de 2 jugadores.

Definición. El valor maximin para un jugador $i \in N$, en un juego finito n-personal, es el máximo pago que puede obtener cuando los restantes jugadores cooperan entre sí para minimizar su pago.

A continuación demostramos que el valor maximin de los jugadores en un juego finito n-personal se obtiene resolviendo n juegos bipersonales de suma nula.

Dado el jugador $i \in N$, consideramos el conjunto de jugadores $N \setminus \{i\}$ como un único jugador que juega contra el jugador i. El espacio de estrategias puras para el jugador $N \setminus \{i\}$ es

$$E_{-i} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} E_i$$

y el espacio de estrategias mixtas para el jugador $N \setminus \{i\}$ es

$$Y_{-i} = \{ y_{-i} \in R^{q_i} \,/\, \sum_{j=1}^{q_i} y_{-i}^k = 1, y_{-i}^k \geq 0,\ \forall k = 1,\ldots,q_i \ \}$$

donde $q_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} r_i$ es el número de estrategias puras del jugador $N \setminus \{i\}$.

La función de pagos del juego bipersonal de suma nula, de jugadores $\{i,\ N \setminus \{i\}\}$ es una función bilineal, $f^{NC} : Y_i \times Y_{-i} \to R$, dada por

$$f^{NC}(y_i, y_{-i}) = y_i\, A(i) y_{-i}$$

donde la matriz de pagos, $A(i)$,es de orden $r_i \times q_i$, y viene dada por $A(i) = (a_i^{st})_{\substack{s=1,\ldots,r_i \\ t=1,\ldots,q_i}}$.

El elemento a_i^{st} representa el pago para el jugador i cuando elige su estrategia pura $e_i^s \in E_i$, y el jugador $N \setminus \{i\}$ elige su estrategia pura $e_{N-\{i\}}^t \in E_{-i}$, siendo $a_i^{st} = a_i^{j_1,\ldots,j_n}$ para $s = j_i$, y $t = (j_1,\ldots,j_{i-1}, j_{i+1},\ldots,j_n)$. A partir de los elementos de la matriz $A(i)$, podemos expresar la función de pagos como

$$f^{NC}(y_i, y_{-i}) = y_i\, A(i) y_{-i} = \sum_{s=1}^{r_i} \sum_{t=1}^{q_i} y_i^s y_{-i}^t a_i^{st}$$

Proposición. En un juego finito n-personal el valor maximin del jugador $i \in N$ es el valor del juego bipersonal de suma nula de matriz $A(i)$.

<u>Demostración</u>: Para determinar el valormaximin para el jugador i, para cada estrategia $y_i \in Y_i$, el jugador i calcula el peor pago que puede conseguir

$$v_i(y_i) = \min_{y_{-i} \in Y_{-i}} f^{NC}(y_i, y_{-i}) = \min_{y_{-i} \in Y_{-i}} \sum_{s=1}^{r_i} \sum_{t=1}^{q_i} y_i^s y_{-i}^t a_i^{st}$$

y considera el mejor de estos valores

$$\max_{y_i \in Y_i} v_i(y_i) = \max_{y_i \in Y_i} \min_{y_{-i} \in Y_{-i}} \sum_{s=1}^{r_i} \sum_{t=1}^{q_i} y_i^s y_{-i}^t a_i^{st}$$

Por el teorema minimax (von Neumann, 1928) , este valor existe y coincide con el valor del juego de suma nula de matriz $A(i)$. □

Por tanto, para determinar el punto de desacuerdo en un juego de negociación asociado al juego n-personal finito, hay que obtener el valor de n juegos bipersonales de suma nula. El punto de desacuerdo es $d = (d_1, ..., d_n)$, donde $\forall i \in N$ $d_i = \max_{y_i \in Y_i} v_i(y_i) = \max_{y_i \in Y_i} \min_{y_{-i} \in Y_{-i}} y_i A(i) y_{-i}$.

3.2 Soluciones

Para resolver el juego de negociación que induce el juego finito n-personal, consideramos una familia de soluciones basada en la aplicación del criterio maxmin, las soluciones α-maxmin. Bajo ciertas condiciones, en esta familia se incluyen las soluciones clásicas de Kalai-Smorodinski y la igualitaria, y en general, proporcionan resultados más favorables para los jugadores que éstas.

A continuación describimos esta familia de soluciones y presentamos los resultados que permiten obtenerlas.

Sea $\Delta = \left\{ \alpha \in R^n : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ \alpha_i > 0, i = 1, ..., n \right\}$, consideremos $\alpha \in \Delta$, para cada $x \in S$, sea $\tilde{x}_i = \frac{x_i - d_i}{\alpha_i}$, $\forall i = 1, ..., n$. $\tilde{x}_i$ representa las ganancias de utilidad para el jugador i desde el punto de desacuerdo ponderadas con pesos $\frac{1}{\alpha_i}$. El vector de ganancias de utilidad ponderadas lo denotamos por $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n)$.

Para cada $x \in S$, sea $z(x) = \min_i \{\tilde{x}_i\}$, que representa la menor ganancia de utilidad ponderada que proporciona el resultado x.

Aplicar el criterio maxmin para obtener la solución del juego (S,d), bajo la hipótesis de que las ganancias de utilidad puedan estar ponderadas por distintos pesos, consiste en hallar un resultado factible que maximice el mínimo de las ganancias de utilidad ponderadas obtenidas por cada jugador.

Definición. El punto $x \in S$, es una solución α-maxmin del juego (S,d), con $\alpha \in \Delta$ si $z(x) \geq z(y),\ \forall y \in S$.

Es decir, x es una solución α-maxmin, si la mínima ganancia de utilidad ponderada que genera es máxima. Obsérvese que la mínima ganancia puede alcanzarse en diferentes puntos factibles de S. Bajo determinadas condiciones sobre el conjunto de pagos, dado $\alpha \in \Delta$, la solución α-maxmin es única, y todos los agentes obtienen la mínima ganancia de utilidad ponderada. Las soluciones α-maxmin verifican la propiedad de Pareto-optimalidad débil[1]. Además, para cada $\alpha \in \Delta$, una de ellas es Pareto-óptima[2] (véase Mármol y otros 2002).

Una importante ventaja que presentan las soluciones α-maxmin frente a otras soluciones de negociación es la posibilidad de calcularlas mediante técnicas de optimización matemática, en un amplio rango de problemas.

De la definición anterior se deduce que las soluciones α-maxmin son soluciones del problema de optimización

$$\begin{aligned} \max \quad & \min_{i=1,\ldots,n} \left\{ \frac{x_i - d_i}{\alpha_i} \right\} \\ s.a. \quad & x \in S \\ & x \geq d \end{aligned}$$

Este problema es equivalente al problema que denotamos ($PM(\alpha)$)

$$\begin{aligned} \max \quad & z \\ s.a. \quad & \frac{x_i - d_i}{\alpha_i} \geq z \quad \forall i = 1,\ldots,n \\ & x \in S \\ & x \geq d \end{aligned}$$

Así, el conjunto de soluciones α-maxmin de un juego de negociación (S,d), puede obtenerse a partir de las soluciones del problema ($PM(\alpha)$).

La resolución de este problema se simplifica considerablemente cuando el juego de negociación es lineal, es decir, cuando el conjunto de pagos S es poliédrico, ya que se pueden utilizar las técnicas de la programación lineal para obtener las soluciones de negociación. Esta es la situación que se presenta en el juego de negociación que induce un juego n-personal finito, cuyo conjunto de pagos es un poliedro $f^C(Y)$ como se ha establecido en la sección 3.

4. Ejemplo.

Un grupo agroalimentario comercializa tres tipos de productos que están gestionados por tres departamentos distintos con capacidad de decisión sobre su política publicitaria. Cada departamento puede emitir en televisión dos tipos de anuncios, que inciden sobre aspectos distintos de sus respectivos productos.

La publicidad de cada producto repercute indirectamente en las ventas de los otros. Se han realizado estudios sobre el efecto en las ventas de las distintas combinaciones de anuncios de los departamentos de la empresa, obteniéndose los resultados que se representan en la siguiente tabla.

	e_3^1	e_3^2
$e_1^1 e_2^1$	(5 1 2)	(1 1 2)
$e_1^1 e_2^2$	(3 1 4)	(1 1 3)
$e_1^2 e_2^1$	(2 3 5)	(2 3 5)
$e_1^2 e_2^2$	(5 4 1)	(1 0 5)

Es decir, si los tres departamentos utilizan su primer anuncio, se produce un aumento en las ventas del primer producto de 5 u.m., de 1 u.m. en el segundo producto y de 2 u.m. en las ventas del tercer producto.

Cada departamento desea maximizar los efectos de la publicidad sobre sus productos, por lo que está dispuesto a negociar con los otros departamentos para determinar las combinaciones de anuncios más adecuadas.

Esta situación puede modelarse como un juego de tres jugadores que se corresponden con los tres departamentos, cada uno de ellos con dos estrategias que consisten en emitir uno u otro anuncio. La cooperación entre los jugadores garantiza que los resultados que obtengan mejorarán los que obtendrían si cada uno ellos actuara unilateralmente. Una situación de este tipo puede representarse mediante un juego de negociación, que como demostramos en este trabajo permite analizar y proporcionar soluciones para estos modelos.

Si analizamos este juego como un juego cooperativo, el conjunto de estrategias puras conjuntas es

$$E = \prod_{i=1}^{3} E_i = \{(e_1^{j_1}, e_2^{j_2}, e_3^{j_3}),\ e_i^{j_i} \in E_i, j_i = 1,2 \ \ \forall i = 1,2,3\}$$

y el conjunto de pagos del juego de negociación asociado es un poliedro cuyos vértices son los pagos correspondientes a las estrategias puras conjuntas, es decir,

$$S = \{x = \sum_{j=1}^{8} y^j P^j, \sum_{j=1}^{8} y^j = 1,\ y^j \geq 0,\ \forall j = 1,...,8\}$$

donde $P^1,...,P^8$, son los 8 vectores de pagos de la matriz anterior.

Para determinar el punto de desacuerdo, $d = (d_1, d_2, d_3)$, calculamos el pago que cada jugador puede garantizarse independientemente de los otros jugadores. Para ello, resolvemos 3 juegos bipersonales de suma nula, y el punto de desacuerdo para el jugador i, d_i, se obtiene como el valor del juego bipersonal de suma nula y matriz $A(i)$, $i = 1,2,3$, que en este caso son

$$A(1) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad A(3) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Estas matrices representan los pagos que obtienen los jugadores con sus estrategias puras frente a las estrategias puras conjuntas de los otros jugadores. Resolviendo los juegos de suma nula correspondientes se obtiene $d_1 = 1,\ d_2 = 1,\ d_3 = 2$.

Consideramos en primer lugar, una solución equitativa que maximiza el nivel mínimo de aumento en las ventas. Se corresponde con la solución α-maximin para $\alpha = (1,1,1)$. El problema lineal ($PM(\alpha)$) que proporciona la solución es:

$$\begin{array}{ll} \max & z \\ s.a. & 5y_1 + y_2 + 3y_3 + 2y_5 + 2y_6 + 5y_7 + y_8 - 1 \geq z \\ & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 3y_5 + 3y_6 + 4y_7 - 1 \geq z \\ & 2y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 3y_4 + 5y_5 + 2y_6 + y_7 + 5y_8 - 2 \geq z \\ & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 = 1 \\ & 5y_1 + y_2 + 3y_3 + 2y_5 + 2y_6 + 5y_7 + y_8 \geq 1 \\ & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 3y_5 + 3y_6 + 4y_7 \geq 1 \\ & 2y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 3y_4 + 5y_5 + 2y_6 + y_7 + 5y_8 \geq 2 \\ & y_j \geq 0,\ \forall j = 1,...,8 \end{array}$$

Al resolver este problema obtenemos un único punto del conjunto de pagos *S*, (2.91, 2.91, 3.91). Esta solución es la solución de ganancia igualitaria con respecto al punto de desacuerdo, mejorando las ventas garantizadas de los tres departamentos en 1.91 u.m. Además es Pareto-óptima, en el sentido de que no existe otro punto factible, tal que mejore a todos los jugadores, con una mejora estricta al menos para alguno de ellos. Esta solución se obtiene con la estrategia mixta conjunta (0.13, 0, 0, 0, 0.7, 0, 0.17, 0), es decir, este pago se obtiene cuando los departamentos eligen las estrategias puras conjuntas (e_1^1, e_2^1, e_3^1), (e_1^2, e_2^1, e_3^1), (e_1^2, e_2^2, e_3^1) con probabilidades 0.13, 0.7 y 0.17, respectivamente. Alternativamente, la misma solución se obtiene con las estrategias puras conjuntas (e_1^1, e_2^1, e_3^1), (e_1^2, e_2^1, e_3^2), (e_1^2, e_2^2, e_3^1). Obsérvese que el pago asociado a las estrategias puras conjuntas (e_1^2, e_2^1, e_3^1) y (e_1^2, e_2^1, e_3^2) es el mismo.

Un concepto de solución alternativa, que tiene en cuenta los valores más optimistas que pueden alcanzar los departamentos, es la solución de Kalai-Smorodinsky. El punto ideal del juego, $I = (I_1, I_2, I_3)$, se define como

$$I_i(S,d) = \max\{x_i \,/\, x \in S, x \geq d\},\ i = 1,2,3.$$

En este caso, $I_1 = 1$, $I_2 = 3.75$, $I_3 = 5$. La solución α-maxmin correspondiente a la solución de Kalai-Smorodinsky, se obtiene para $\alpha_i = I_i - d_i$, i = 1,2,3, y es el punto del espacio de pagos (3.22, 2.53, 3.66). Esta solución es única y Pareto-óptima, por lo que coincide con la de Kalai-Smorodinsky y se alcanza cuando los jugadores eligen las estrategias puras conjuntas (e_1^1, e_2^1, e_3^1), (e_1^2, e_2^1, e_3^1), (e_1^2, e_2^2, e_3^1) con probabilidades 0.293, 0.593 y 0.114, respectivamente.

Obsérvese que el hecho de tener como referencia el punto ideal hace que la solución de consenso se desplace hacia puntos que proporcionan aumentos de ventas mayores a los departamentos con valores optimistas más elevados.

5. Conclusiones

En este trabajo se pone de manifiesto que la cooperación entre los agentes en los juegos finitos n-personales permite tratar estos juegos como problemas de negociación.

Los dos puntos esenciales son la determinación de los puntos de desacuerdo, y la posibilidad de realizar el cálculo efectivo de las soluciones de consenso.

Con respecto al punto de desacuerdo, se propone una extensión del concepto de valor maxmin que se obtiene mediante la resolución de n juegos bipersonales de suma nula. Con respecto al aspecto computacional del cálculo de las soluciones, la estructura poliédrica del conjunto de pagos factibles del juego de negociación que induce el juego finito, y el hecho de que los puntos extremos sean conocidos, permite la obtención de las soluciones α-maximin mediante la resolución de problemas lineales.

6. Referencias

Kalai, E. (1977). Proportional solutions to bargaining situations: interpersonal utility comparisons. Econometrica, 45, pp 1623-1630.

Kalai, E., Smorodinsky, M. (1975). Other solutions to Nash's bargaining problem. Econometrica, 43, pp 513-518.

Mármol A.M., Monroy L., Rubiales V. (2002). Soluciones maximin en juegos de negociación n-personales. X Jornadas ASEPUMA, Madrid.

Nash, J.F. (1950a). Equilibrium points in n-person games. Proceeding of National Academic of Science of the USA, 36, pp 48-49.

Nash, J.F. (1950b). The bargaining problem. Econometrica, 18, pp 155-162.

Von Neumann, J. (1928). Zur theorie der gesellschaftsspiele. Mathematische Annalen, 100, pp 295-320.

Notas

[1] Un punto $x \in S$ es débilmente Pareto-óptimo si no existe $x' \in S,\ x'_i > x_i$, $\forall i = 1,\ldots,n$.

[2] Un punto $x \in S$ es Pareto-óptimo si no existe $x' \in S,\ x' \neq x,\ x'_i \geq x_i$, $\forall i = 1,\ldots,n$.