

Estudio de la dispersión del ruido aerodinámico mediante el Método de los Elementos de Contorno formulado en el espacio de Bézier-Bernstein

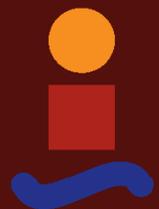
Autor: Marcos Ballesteros Garnica

Tutor: Antonio Romero Ordóñez

**Dpto. Mecánica de Medios Continuos y Teoría
de Estructuras**

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Sevilla, 2019



Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería Aeroespacial

Estudio de la dispersión del ruido aerodinámico mediante el Método de los
Elementos de Contorno formulado en el espacio de Bézier-Bernstein

Autor:

Marcos Ballesteros Garnica

Tutor:

Antonio Romero Ordóñez

Dpto. Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2019

Proyecto Fin de Carrera: Estudio de la dispersión del ruido aerodinámico mediante el Método de los Elementos de Contorno formulado en el espacio de Bézier-Bernstein

Autor: Marcos Ballesteros Garnica

Tutor: Antonio Romero Ordóñez

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2019

El Secretario del Tribunal

A mi familia

A mis maestros

1. Resumen

En el trabajo desarrollado a continuación se aborda el estudio de problemas acústicos con el Método de los Elementos de Contorno (BEM). Este método se ha utilizado entre otras razones por la posibilidad de representar de manera exacta la geometría de los objetos, a diferencia de otros métodos como el Método de los Elementos Finitos (MEF).

Para la realización de este estudio se ha partido de la ecuación de Helmholtz, particularizando en el caso de un obstáculo de sección circular inmerso en el seno de un fluido. Se han estudiado tanto para fluidos en los que se transmite una señal a frecuencia constante, variando la señal a la que se le realiza un barrido en frecuencia y posteriormente analizando el efecto de la posición del receptor respecto al obstáculo. Para ello se ha definido el concepto de pérdidas de inserción, como la relación entre la señal recibida al encontrarse el obstáculo y la señal que se recibiría si no estuviese.

Posteriormente se ha resuelto el problema mediante el método de elemento de contorno, en primer lugar para comparar los resultados con los de la solución analítica replicando el problema circular. Una vez comparados estos resultados se pasa a buscar las configuraciones con las cuales se obtienen menos pérdidas de inserción (IL). Se resuelven primero modelos más simples, desde obstáculos cuadrados, elípticos modificando la geometría hasta obtenerse formas más complejas. Como parte de éste estudio se han probado configuraciones cuyo contorno es anguloso con el objeto de ahondar en los límites del presente método.

Por último se han estudiado configuraciones en las que se trabajan con múltiples obstáculos, tanto circulares como triangulares, repitiendo el proceso para obtener las pérdidas por inserción.

Para la definición de los elementos de contorno se ha utilizado la herramienta de diseño Inkscape, donde manualmente se diseñan y modifican mediante la aplicación de curvas de Bézier de dicha herramienta las curvas que permiten determinar dichos elementos.

De los resultados obtenidos se han extraído una serie de conclusiones, tanto sobre el funcionamiento del Método de los Elementos de Contorno, su utilidad, limitaciones..., como de la optimización de la señal acústica llevada a cabo en el estudio.

2. Notación

MEF	Método de Elementos Finitos
FEM	Finite Elements Method
MEC	Método de Elementos de Contorno
BEM	Boundary Element Method
CAD	Computer Aided Design
ω	Frecuencia Angular
k_f	Número de Onda del Fluido
c_f	Velocidad de Propagación del Sonido en el Fluido
h	Tamaño del Elemento
p	Orden del Elemento
x	Coordenada Longitudinal
\mathbf{t}	Vector Tangencial
\mathbf{n}	Vector Normal
δ_{ij}	Delta de Kronecker (DK)
B_n^f	Polinomio de Bernstein
$\tilde{\Psi}$	Solución Fundamental
λ	Longitud de Onda
ξ	Coordenada Natural
Γ	Superficie Obstáculo
ρ	Densidad Fluido
Σ	Superficie del Contorno del Problema
Ω	Dominio del Contorno del Problema

3. Índice

1. Resumen	7
2. Notación	9
3. Índice	11
4. Índice de figuras	13
5. Introducción	19
5.1. Desarrollo histórico métodos numéricos	19
5.2. Desarrollo histórico BEM	20
5.3. Estado actual BEM	20
5.4. Objetivos principales del TFG	21
6. BEM aplicado al problema acústico	23
6.1. Formulación del BEM	23
6.1.2. Problema cavidad circular	29
6.1.2.1. Solución analítica	29
6.1.2.1.1. Frecuencia cte	30
6.1.2.1.1.1. Pérdidas de inserción (IL)	31
6.1.2.1.1.2. Alejamiento receptor	34
6.1.2.1.2 Barrido en frecuencia	34
6.1.2.2. Aproximación de la geometría. Inkscape	38
6.1.2.3. Solución BEM	40
6.1.2.3.1. Comparación analítica/BEM	43
6.1.2.4. BEM aplicado a diferentes problemas	45
6.1.2.4.1. Obstáculo cuadrado	45
6.1.2.4.2. Obstáculo elíptico	47
6.1.2.4.3. Obstáculos triangulares	49
6.1.2.4.4. Obstáculos triangulares girados	51
6.1.2.4.5. Obstáculo parabólica	52
6.1.2.4.6. Obstáculos semilla y estrella	55
6.1.2.4.7. 2 Obstáculos circulares	57

6.1.2.4.8. 2 Obstáculos triangulares	61
6.1.2.4.9. 3 Obstáculos circulares	65
6.1.2.4.10. 3 Obstáculos triangulares	67
6.1.2.4.11. 4 Obstáculos circulares	71
6.2. Perfiles NACA	73
7. Resumen y análisis de resultados	87
8. Futuras líneas de trabajo	91
9. Bibliografía	93

4. Índice de figuras

Figura 6.1. Geometría obstáculo genérico	23
Figura 6.2. Comparación FEM vs BEM	24
Figura 6.3. Curva de Bézier n=3	26
Figura 6.4. Geometría obstáculo circular	29
Figura 6.5. Mallado obstáculo circular	29
Figura 6.6. Señal emitida 100 Hz	30
Figura 6.7. Señal recibida 100 Hz	30
Figura 6.8. Pérdidas de inserción 100 Hz	31
Figura 6.9. Máx. pérdidas de inserción 100 Hz	32
Figura 6.10. Señal emitida 300 Hz	32
Figura 6.11. Señal recibida 300 Hz	33
Figura 6.12. Pérdidas de inserción 300 Hz	33
Figura 6.13. Máx pérdidas de inserción 300 Hz	34
Figura 6.14. Pérdidas de inserción alejando el receptor	34
Figura 6.15. Presión emitida / Presión recibida	35
Figura 6.16. Pérdidas de inserción vs frecuencia	35
Figura 6.17. Señal 100 Hz	37
Figura 6.18. Señal 600 Hz	37
Figura 6.19. Curvas Bézier obstáculo circular	38
Figura 6.20. Curvas Bézier obstáculo cuadrado	39

Figura 6.21. Curvas Bézier obstáculo triangular	39
Figura 6.22. Puntos de control obstáculo circular	39
Figura 6.23. Elementos de contorno obst. circular	40
Figura 6.24. Señal obstáculo circular BEM	41
Figura 6.25. Pérdidas inserción obst. circular BEM	41
Figura 6.26. Máxima IL (estela)	42
Figura 6.27. Máxima IL (borde ataque)	42
Figura 6.28. Máxima IL (borde salida)	42
Figura 6.29. IL analítica	43
Figura 6.30 Máxima IL analítica (borde salida)	43
Figura 6.31. Máxima IL analítica (estela)	43
Figura 6.32. Máxima IL analítica (borde ataque)	44
Figura 6.33. Elementos de contorno obst. cuadrado	45
Figura 6.34. Señal obstáculo cuadrado BEM	46
Figura 6.35. Pérdidas inserción obst. cuadrado BEM	46
Figura 6.36. Máxima IL obst. circular (b. salida)	47
Figura 6.37. Máxima IL obst. cuadrado (b.salida)	47
Figura 6.38. Máxima IL obst. circular (b.ataque)	47
Figura 6.39. Máxima IL obst. cuadrado (b.ataque)	47
Figura 6.40. Elementos de contorno obst. elíptico	48
Figura 6.41. Señal obstáculo elíptico BEM	48
Figura 6.42. Pérdidas inserción obst. elíptico BEM	48
Figura 6.43. Max. IL obst. elíptico	48
Figura 6.44. Pérdidas inserción obst. triangular BEM	49

Figura 6.45. Max. IL obst. triangular BEM	49
Figura 6.46. Pérdidas inserción obst. triangular en punta BEM	50
Figura 6.47. Max. IL obst. triangular en punta BEM	50
Figura 6.48. Elementos de contorno triangular inverso	51
Figura 6.49. Señal obst. triangular inverso	51
Figura 6.50. Pérdidas de inserción obst. triangular inverso	52
Figura 6.51. Max. IL obst. triangular inverso	52
Figura 6.52. Elementos de contorno obstáculo parabólico	53
Figura 6.53. Señal obst. parabólico	53
Figura 6.54. Pérdidas de inserción obst. parabólico	54
Figura 6.55. IL máximo obst. parabólico	54
Figura 6.56. Señal obst. “semilla”	55
Figura 6.57. IL obst. “semilla”	55
Figura 6.58. Señal obst. “estrella”	56
Figura 6.59. IL obst. “estrella”	56
Figura 6.60. Elementos de contorno de 2 círculos	57
Figura 6.61. Señal frente a 2 círculos	57
Figura 6.62. Pérdidas de inserción frente a 2 círculos	58
Figura 6.63. Max. IL frente a 2 círculos	58
Figura 6.64. Elementos de contorno de 2 círculos juntos	59
Figura 6.65. Señal frente a 2 círculos juntos	59
Figura 6.66. Pérdidas de inserción frente a 2 círculos	60
Figura 6.67. Max. IL frente a 2 círculos juntos	60
Figura 6.68. Elementos de contorno 2 triángulos	61

Figura 6.69. Señal frente a 2 triángulos	61
Figura 6.70. Pérdidas de inserción frente a 2 triángulos	62
Figura 6.71. Max. IL frente a 2 triángulos	62
Figura 6.72. Elementos de contorno 2 triángulos óptimos	63
Figura 6.73. Señal 2 triángulos óptimos	63
Figura 6.74. IL 2 triángulos óptimos	64
Figura 6.75. Máx. IL 2 triángulos óptimos	64
Figura 6.76. Elementos de contorno de 3 círculos	65
Figura 6.77. Señal frente a 3 círculos	65
Figura 6.78. Pérdidas de inserción frente a 3 círculos	66
Figura 6.79. Max. IL frente a 3 círculos	66
Figura 6.80. Elementos de contorno 3 triángulos	67
Figura 6.81. Señal frente a 3 triángulos	67
Figura 6.82. Pérdidas de inserción frente a 3 triángulos	68
Figura 6.83. Max IL frente a 3 triángulos	68
Figura 6.84. Elementos de contorno 3 triángulos óptimos	69
Figura 6.85. Señal 3 triángulos óptimos	69
Figura 6.86. IL 3 triángulos óptimos	70
Figura 6.87. Máx. IL 3 triángulos óptimos	70
Figura 6.88. Elementos de contorno 4 círculos	71
Figura 6.89. Señal frente a 4 círculos	71
Figura 6.90. Pérdidas de inserción frente a 4 círculos	72
Figura 6.91. Max. IL frente a 4 círculos	72
Figura 6.92. Geometría perfil NACA	73

Figura 6.93. Curvas Bézier NACA0007 B.A.	74
Figura 6.94. Curvas Bézier NACA0012 B.A.	74
Figura 6.95. Curvas Bézier NACA0020 B.A.	75
Figura 6.96. Curvas Bézier NACA0007 B.S	75
Figura 6.97. Curvas Bézier NACA0012 B.S.	76
Figura 6.98. Curvas Bézier NACA0020 B.S.	76
Figura 6.99. Elementos de Contorno NACA 0007	77
Figura 6.100. Señal NACA 0007	77
Figura 6.101. IL NACA 0007	78
Figura 6.102 Max. IL NACA 0007	78
Figura 6.103. Elementos de Contorno NACA 0012	79
Figura 6.104. Señal NACA 0012	79
Figura 6.105. IL NACA 0012	80
Figura 6.106. Max. IL NACA 0012	81
Figura 6.107. Elementos de Contorno NACA 0020	81
Figura 6.108. Señal NACA 0020	82
Figura 6.109. IL NACA 0020	82
Figura 6.110. Max. IL NACA 0020	83
Figura 6.111. Geometría NACA 4711	83
Figura 6.112. Elementos de Contorno NACA 4711	84
Figura 6.113. Señal NACA 4711	85
Figura 6.114. Max. IL NACA 4711	85
Figura 6.115. IL NACA 4711	86
Figura 6.116. Señal óptimo individual	87
Figura 6.117. IL óptimo individual	87

Figura 6.118. Señal óptimo 2 obstáculos (a)	88
Figura 6.119. IL óptimo 2 obstáculos (a)	88
Figura 6.120. Señal óptimo 2 obstáculos (b)	88
Figura 6.121. IL óptimo 2 obstáculos (b)	88
Figura 6.122. Señal óptimo 3 obstáculos	89
Figura 6.123. IL óptimo 3 obstáculos	89

5. Introducción

5.1. Desarrollo histórico de los métodos numéricos

Desde el principio de la historia, la humanidad se ha encontrado ante la necesidad de resolver problemas y enfrentarse a cálculos tanto para asegurar su supervivencia como para facilitar su vida, para ello desarrolló multitud de herramientas con las que poder resolver dichos problemas, desde las primitivas herramientas de la prehistoria hasta los últimos avances tecnológicos del S.XXI.

Aunque desde hace milenios el ser humano ha desarrollado la ingeniería, desde las grandes obras de la Prehistoria, como los monumentos megalíticos de Stonehenge, de la antigüedad, tales como las pirámides de Giza, los zigurats en Mesopotamia, los primeros ingenios en agricultura y ganadería, la arquitectura civil romana (acueductos, alcantarillados, calzadas...), la construcción de grandes catedrales en el medievo, no es hasta bien entrada la Edad Moderna al calor de la revolución industrial que la ingeniería adquiere la dimensión y complejidad actual para las cuales fue necesario poseer conocimientos matemáticos de cálculo que permitiesen aplicar dichos métodos, estas herramientas, habían sido desarrolladas por grandes físicos y matemáticos, de la talla de Newton, Leibiniz, Da Vinci durante los siglos XVI y XVII, de entre ellos cabe destacar, por su importancia capital en el desarrollo de los métodos numéricos utilizados en el trabajo (MEF y BEM), el cálculo diferencial estudiado a la par por Newton y Leibiniz.

Es en el siglo XX a raíz de la invención y desarrollo de los primeros ordenadores y máquinas de cálculo que se genera el caldo de cultivo para la aparición de los primeros métodos numéricos que han ido aumentando en rapidez, capacidad de cálculo y precisión conforme lo ha ido haciendo la técnica actual.

El principal de éstos métodos es el Método de los Elementos Finitos (MEF), el cual fue introducido para el análisis de estructuras aeronáuticas en la década de los cuarenta del S.XX, [1], en las que Hrennikoff con el framework method (1941) [2], Courant en su artículo Variational methods for the solution of problems and vibrations (1942) [3], Argyris en Energy theorems and structural analysis (1954) [4], Turner, Stiffness and deflection analysis of complex structures (1956) [5], Clough, quien introduce el término elemento finito, junto con el establecimiento de las bases matemáticas del método en la década de los setenta dan lugar a la estructura actual del método [6].

5.2. Desarrollo histórico del Método de los Elementos de Contorno (BEM)

El Método de los Elementos de Contorno aparece, al igual que el Método de los Elementos Finitos, gracias a los avances computacionales y, aunque la irrupción del Método de los Elementos Finitos en el mundo académico eclipsó en un primer momento al Método de los Elementos de Contorno, este último ha aprovechado herramientas utilizadas para el MEF en su propio desarrollo [7].

Los primeros artículos en los que se basa el método son los redactados, en la década de los 60's, por M.A. Laswon [8] en los que diserta sobre el flujo potencial, junto con los escritos por Rizzo [9] y Cruse [10] en los que plantean la posible aplicación del método a diversos campos como la Teoría de la Elasticidad, la Teoría de la Fractura, dinámica...

Como se menciona anteriormente, para el desarrollo del Método de los Elementos de Contorno se utilizaron técnicas desarrolladas para el Método de los Elementos Finitos, tanto en la discretización como en el cálculo, aportación realizada por Lachat y Watson [11].

Dentro de esta estrecha relación entre los Métodos de los Elementos de Contorno y de los Elementos Finitos se encuentran los denominados métodos híbridos o mixtos BEM-MEF [12], usados para estudiar problemas de interacción fluido-estructura, debido a las ventajas ofrecidas por el BEM en el modelado de medios semi-infinitos, al cumplir de manera inmediata la condición de radiación en el infinito, y el MEF en la modelación de materiales no homogéneos. Este tipo de métodos fueron introducidos por Everstine y Henderson [13], a los que cabe añadir a Gaul y Wenzel [14], que presentan un modelo en el que la estructura es discretizada por el FEM y la representación del dominio fluido corre a cargo del BEM. Más adelante Cygan y Von Estorff extienden el uso del método a problemas no lineales [15].

5.3. Estado actual BEM

En la actualidad el método se viene desarrollando para aplicaciones en el campo de la Teoría de la Elasticidad y de la fractura en el análisis de los estados tensionales en el entorno de grietas en sólidos con distintos materiales cuando ésta se produce en la interfase de éstos [16], análisis de fractura en planos de ortotropía como puede verse en el trabajo de Gray y Paulino [17], análisis de estructuras en trabajos como los realizados por Perez-Gavilán y M.H. Aliabadi sobre soluciones de las ecuaciones de Navier para objetos multi-conexos [18], estudios sobre cizalladura [19] y problemas elásticos [20], resolución de problemas de torsión para elementos de sección no circular, flexión de membranas [21], además de problemas de fluido acústica.

Dentro del campo de aplicación a la fluido acústica en la que se centra el presente trabajo se ha avanzado en el estudio de problemas estructura-fluido desarrollando métodos mixtos BEM-FEM anteriormente mencionados [12], [13], [14], [15]. Así mismo, diversos artículos han tratado la implementación en la aplicación Método de los Elementos de Contorno en la fluido estática de herramientas matemáticas de modelado de contornos basados en el espacio Bézier-Berstein [22], [23], en el cual se emplean las curvas de Bézier, que a su vez se basan en los polinomios de Berstein, para determinar con exactitud la geometría de los objetos, lo cual permite obtener con gran precisión la solución de los problemas planteados en el entorno de los objetos que conforman el contorno de éstos. Éste modelo es el que se va a seguir en la realización del presente estudio y su formulación viene desarrollada en el siguiente punto.

5.4. Objetivos principales del TFG

Durante el desarrollo de los métodos numéricos en la ingeniería, uno de los principales desafíos ha resultado ser tanto representar medios semi-infinitos, como representar de manera exacta la forma de los contornos de los problemas a resolver, es por ello, que se desarrolló y se sigue desarrollando el Método de los Elementos de Contorno por sus claras ventajas en éstas áreas. En el estudio que a continuación se presenta, se han pretendido alcanzar los siguientes objetivos:

Por un lado, la aplicación práctica de dicho método a una gama concreta de problemas, la de la fluido acústica, buscando implementar una herramienta que permita determinar las pérdidas provocadas por la presencia de obstáculos en el interior de un fluido, útil en el desarrollo de estructuras cuya ubicación final esté en el entorno de sistemas de emisión y recepción de señales.

Dentro de los objetivos del presente trabajo se pretende utilizar la herramienta de diseño CAD Inkscape que permita la definición y manipulación de las curvas de Bézier que determinan la geometría del contorno del problema de una manera mucho más sencilla y manual, permitiendo conseguir geometrías mucho más complejas.

Mediante este estudio también se pretende comprobar las limitaciones que van apareciendo en el uso práctico del método, tanto en las herramientas utilizadas para su implementación (Matlab, Inkscape...) como en la capacidad de cálculo o en la representación de determinadas geometrías.

6. BEM aplicado al problema elástico

6.1. Formulación del BEM

A continuación se presenta la formulación del Método de los Elementos de Contorno (BEM) y su aplicación al problema de fluido estática. La formulación del problema se ha llevado a cabo siguiendo tanto el artículo de A. Romero et al. [23], el documento de J.J.Pérez-Gavilán E. [24], [25] el Trabajo Fin de Grado de J.C. Cámara-Molina y el artículo de A.J.B. Tadeu et al. [22]. En este trabajo se utilizará la formulación 2.5.D, propuesta por A. Romero et al. [23] para resolver problemas 2D, fijando el número de onda $k_z = 0$, quedando para futuros estudios la implementación del método para problemas 3D. mediante superficies de Bèzier.

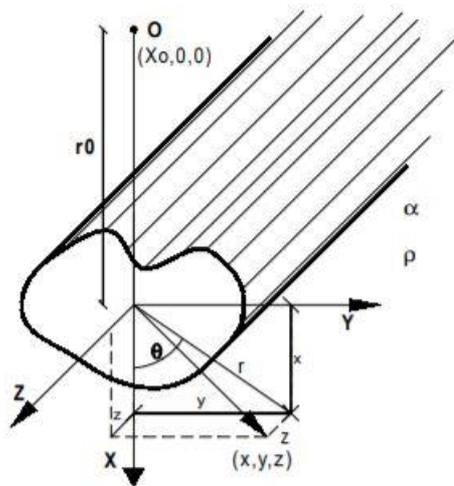


Figura 6.1. Geometría obstáculo genérico

También se ha empleado la hipótesis de que el fluido a estudiar es un fluido newtoniano, lineal, no viscoso e irrotacional, que junto a la elección del problema 2.5.D permiten reducir el número de ecuaciones a resolver, ya que de lo contrario obligarían al uso de métodos computacionales más potentes.

El problema para un fluido no viscoso está gobernado por la ecuación homogénea de Helmholtz:

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \quad (1)$$

Se llega al problema 2.D mediante la superposición de soluciones bidimensionales variando el valor del número de onda en dirección longitudinal z (k_z).

Para ello se utiliza la descomposición de Fourier:

$$f(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\hat{\mathbf{x}}, k_z, \omega) e^{-ik_z z} \quad (2)$$

Teniendo en cuenta la anterior expresión resulta:

$$\nabla^2(\hat{p}(\hat{\mathbf{x}}, k_z, \omega) e^{-ik_z z}) + k_z^2 \hat{p}(\hat{\mathbf{x}}, k_z, \omega) e^{-ik_z z} = 0 \quad (3)$$

Donde $p(\mathbf{x}, \omega)$ representa el campo de presiones en el punto $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x, y, z)$ es de la forma:

$$p(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{p}(\hat{\mathbf{x}}, k_z, \omega) e^{-ik_z z} dk_z \quad (4)$$

Siendo \hat{p} la presión en el dominio de la frecuencia, k el número de onda del fluido: $k = \frac{\omega}{c_f}$ y c_f la velocidad de propagación del sonido en el fluido.

El Método de los Elementos de Contorno tiene su principal característica en el cálculo de la solución en el dominio fluido a partir de la aproximación de las variables del problema en el contorno del modelo mediante el método de colocación (T.Betti) explicado a continuación, lo cual difiere de otros métodos tal como el Método de los Elementos Finitos (MEF) el cual calcula la solución mediante el mallado del dominio del problema y la aproximación en él de las variables. La principal ventaja que ofrece esta característica es la capacidad de evitar los efectos de reflexión en problemas como el que se presenta en este trabajo en el que una onda se propaga en medios infinitos o semi-infinitos en los que otros métodos provocan la necesidad de utilizar fronteras ficticias para delimitar el contorno del dominio, es decir, cumple con la condición de Sommerfeld, tal y como se ejemplifica en la siguiente figura

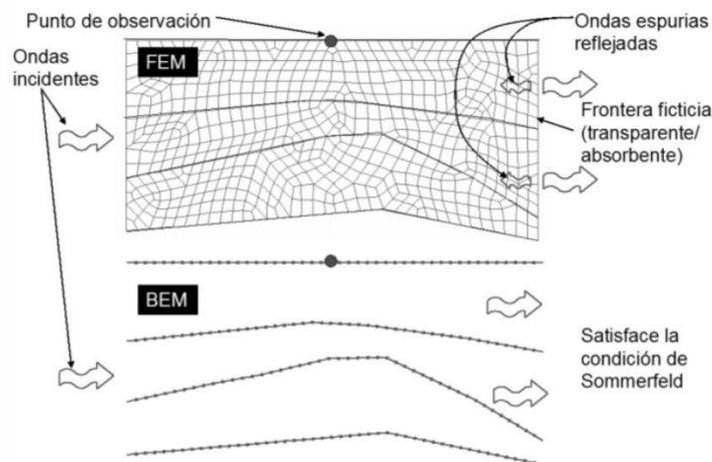


Figura 6.2. Comparación FEM vs BEM

La formulación del BEM usada en este trabajo se realiza en el espacio Bézier-Bernstein, el cual viene desarrollado brevemente en el siguiente epígrafe.

El polinomio de Bernstein, fue introducido por Bernstein para demostrar el teorema de Weierstrass, estando definido como se presenta a continuación:

Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y sea $\epsilon > 0$, \exists un polinomio de grado n , $P_n(x)$, tal que:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \epsilon \quad x \in [a, b] \quad (5)$$

Donde $P_n(x)$ viene dado por la expresión:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_k^n(t) \quad (6)$$

Donde $B_k^n(t)$ es la base del espacio Bernstein de grado n :

$$B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \quad t \in [0,1] \quad (7)$$

Esta base permite representar dicho polinomio de Bernstein a través de puntos de control b_k :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k B_k^n(t) \quad (8)$$

A partir de lo cual puede usarse para el desarrollo de las curvas de Bézier $r_n(t)$:

$$r_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k B_k^n(t) \quad (9)$$

Donde b_k son el conjunto de puntos de control usados para aproximar la geometría.

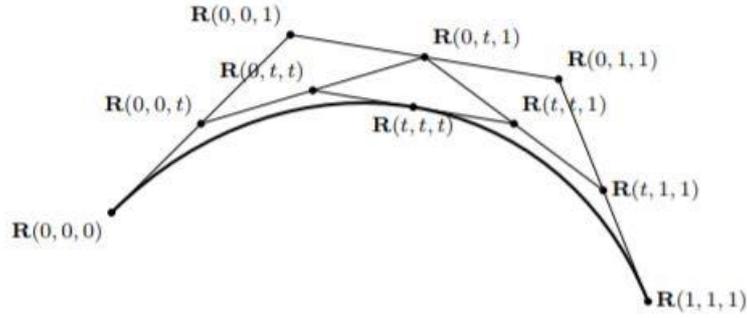


Figura 6.3. Curva de Bézier n=3

Esta aproximación de la geometría es la usada para la formulación del Método de Elementos de Contorno en el espacio Bézier-Bernstein.

A partir de la ecuación de Helmholtz anteriormente mencionada (1) se obtiene la representación de contorno integral, la solución fundamental $\tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{x}}, k, \omega, \tilde{\mathbf{x}}_i)$ del campo de presión acústico en un receptor situado en $(\tilde{\mathbf{x}})$ bajo la actuación de una señal emitida desde una fuente en $(\tilde{\mathbf{x}}_i)$.

$$\nabla^2 \tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{x}}, k, \omega, \tilde{\mathbf{x}}_i) + k^2 \tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{x}}, k, \omega, \tilde{\mathbf{x}}_i) = -\delta(r) \quad (10)$$

Donde $k = \omega/c_f$ y δ es la delta de Dirac:

$$\delta(r) = \begin{cases} \infty, & r = 0 \\ 0, & r \neq 0 \end{cases} \quad (11)$$

Siendo r la distancia entre la fuente emisora y el receptor, es decir $r = \|\tilde{\mathbf{x}}_i - \tilde{\mathbf{x}}\|$, resultando la expresión de la solución fundamental para una región infinita en el campo de la frecuencia:

$$\tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{x}}, k, \omega, \tilde{\mathbf{x}}_i) = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(k_\alpha r) \quad (12)$$

Donde $k_\alpha = \sqrt{k^2 - k_z^2}$ y $H_0^{(2)}$ es la función de Hankel.

A partir de la base Bézier-Bernstein y la solución fundamental $\tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{x}}, k, \omega, \tilde{\mathbf{x}}_i)$ podemos, mediante el método de colocación, expresar el problema acústico integral como:

$$c(\tilde{\mathbf{x}}_i) \tilde{p}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i, k, \omega) = - \int_{\Sigma} (i\rho\omega \tilde{v}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i, k, \omega) \tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{x}}, k, \omega, \tilde{\mathbf{x}}_i) + \tilde{p}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i, k, \omega) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{x}}, k, \omega, \tilde{\mathbf{x}}_i))) d\Sigma \quad (13)$$

Donde $\tilde{p}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i, k_z, \omega)$ es la presión acústica y $\tilde{v}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i, k_z, \omega)$ la velocidad normal de la partícula a la superficie del contorno (Σ).

El vector \mathbf{n} es la normal (interior) al contorno del elemento Γ tal que si se recorre el contorno de Γ en sentido horario el elemento Γ va en sentido al interior del contorno y si es recorrido en sentido antihorario el elemento Γ va en sentido exterior al contorno.

$c(\tilde{\mathbf{x}}_i)$ es el termino libre cuyo valor viene dado por la forma del contorno, en los casos que se abarcan en este estudio, problemas con obstáculos de contorno suave, este término puede tomarse como $\frac{1}{2}$.

Si el contorno se discretiza en N elementos tal que $\Sigma = \cup_{j=1}^N \Sigma^j$, conduce a una aproximación en dicho contorno de las variables del fluido mediante el uso de las funciones ϕ como aproximación de forma de grado p, tal que:

$$\sum_{i=1}^{p+1} \phi_i \tilde{p}_i = \tilde{\Phi} \tilde{\mathbf{p}}_e \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^{p+1} \phi_i \tilde{v}_i = \tilde{\Phi} \tilde{\mathbf{v}}_e \quad (15)$$

Como funciones aproximantes de forma se utilizan se usan funciones interpolantes de Lagrange asociados a la base de Bernstein

Quedando la ecuación (13) reescrita como:

$$c_i \tilde{p}_i = - \sum_{j=1}^Q [i \rho \omega \{ \int_{\Sigma^j} \phi^j \tilde{\Psi} d\Sigma \} \tilde{v}^j + \{ \int_{\Sigma^j} \phi^j \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial n} d\Sigma \} \tilde{p}^j] \quad (16)$$

Siendo Q el número total de nodos en el contorno de Γ .

Denotando las integrales que aparecen en la expresión (16) como:

$$\mathbf{h}_i^j(\tilde{\mathbf{x}}, k_z, \omega, \tilde{\mathbf{x}}_i) = \int_{\Sigma^j} \phi^j \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial n} d\Sigma \quad (17)$$

$$\mathbf{g}_i^j(\tilde{\mathbf{x}}, k_z, \omega, \tilde{\mathbf{x}}_i) = \int_{\Sigma^j} \phi^j \tilde{\Psi} d\Sigma \quad (18)$$

Se toma el espacio Bézier-Bernstein para describir los elementos de contorno que incluyen al nodo j-ésimo $\Sigma^j(\tilde{\mathbf{x}})$ como curvas de Bézier de orden n, $\mathbf{r}_n^j(\mathbf{t})$.

Reescribiendo las expresiones (17) y (18) en la base uniparamétrica ξ , donde $\xi \in [-1,1]$ viene de la transformación $2t = \xi + 1$ con $t \in [0,1]$, y siendo el Jacobiano de la transformación $\frac{dt}{d\xi} = \frac{1}{2}$.

$$\mathbf{h}_i^j(\tilde{\mathbf{x}}, k_z, \omega, \tilde{\mathbf{x}}_i) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \phi^j \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial n} \left| \frac{d}{dt} \mathbf{r}_n^j(\mathbf{t}) \right| d\xi \quad (19)$$

$$\mathbf{g}_i^j(\tilde{\mathbf{x}}, k_z, \omega, \tilde{\mathbf{x}}_i) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \phi^j \tilde{\Psi} \left| \frac{d}{dt} \mathbf{r}_n^j(\mathbf{t}) \right| d\xi \quad (20)$$

Si consideramos el sistema de ecuaciones para los Q elementos de contorno se obtiene el siguiente sistema matricial:

$$\tilde{\mathbf{H}}(\tilde{\mathbf{x}}, k_z, \omega, \tilde{\mathbf{x}}_i) \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{x}}, k_z, \omega) = \tilde{\mathbf{G}}(\tilde{\mathbf{x}}, k_z, \omega, \tilde{\mathbf{x}}_i) \tilde{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{x}}, k_z, \omega) \quad (21)$$

Que junto a las condiciones de contorno del problema nos proporcionan un sistema de la forma $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ resuelto mediante la herramienta Matlab.

A continuación, una vez descrito el Método de los Elementos de Contorno y su formulación, se da paso a su utilización en problemas concretos, para ello se tomara primero un problema sencillo del cual se conoce su resultado analítico para posteriormente introducir nuevas formas y distribuciones con objeto de localizar las que permiten obtener unas menores pérdidas.

6.1.2. Problema cavidad circular

En este problema se pretende calcular el efecto de un obstáculo (cavidad circular) en una señal sonora dada, mediante la discretización del problema por el método de elementos de contorno.

Se ha decidido comenzar por este problema en concreto ya que se posee de él la solución analítica, desarrollada por A.J.B. Tadeu [22], lo cual, nos permitirá comparar dichos resultados con los que más adelante se obtendrán con el Método de los Elementos de Contorno.

El sistema consiste en un emisor de una señal de frecuencia ω que se encuentra situado en el punto de coordenadas $(-5,0)$ y un receptor o un conjunto de ellos inmersos en un fluido de velocidad de propagación del fluido c_f entre los cuales se coloca un obstáculo, en este caso una circunferencia de radio 5 y centrada en el origen.

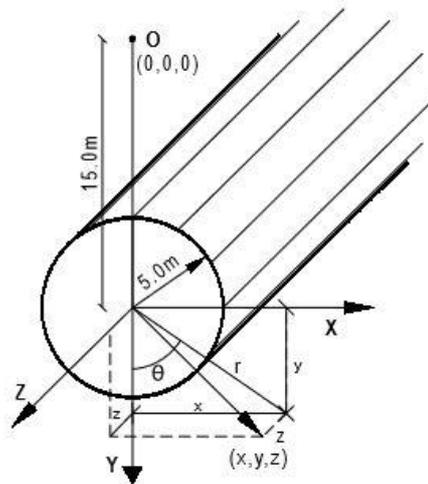


Figura 6.4. Geometría obstáculo circular

6.1.2.1. Solución analítica

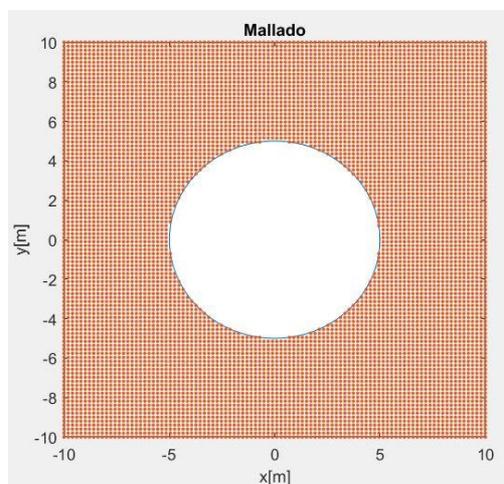


Figura 6.5. Mallado obstáculo circular

El primer objeto del problema es cuantificar las pérdidas de inserción de la señal a la llegada al receptor, es decir la cantidad de señal que se pierde tras la inclusión del obstáculo, a lo largo de todo el dominio definido por el mallado.

Para ello, se ha resuelto el problema para un par de valores de la frecuencia ω constante.

6.1.2.1.1. Frecuencia cte

Para una frecuencia de 100 Hz se obtienen unas distribuciones de potencia emitida (sin obstáculo) y recibida (con obstáculo):

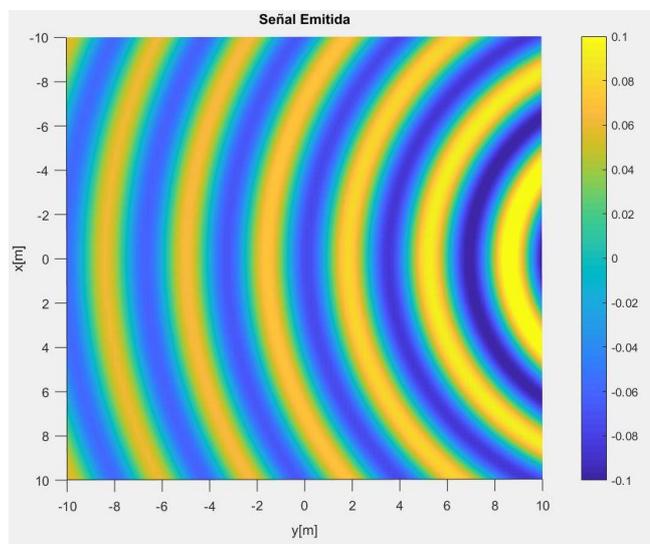


Figura 6.6. Señal emitida 100 Hz

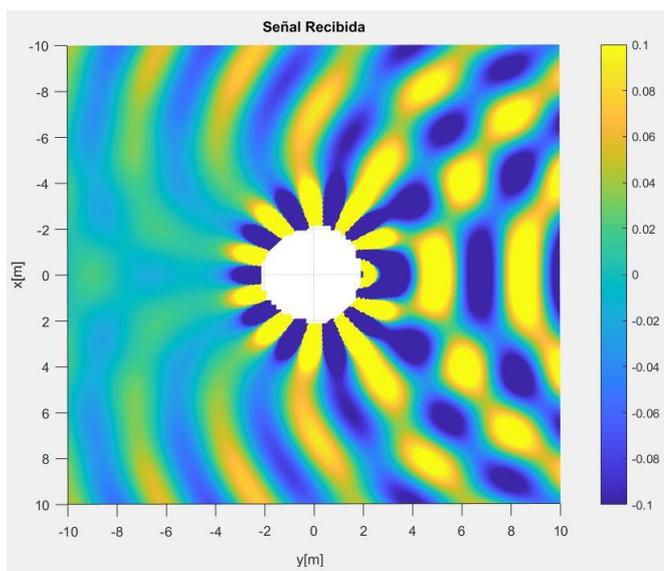


Figura 6.7. Señal recibida 100 Hz

De estos resultados cabe destacar los obtenidos en el entorno del objeto, debido a que son muy altos, este error viene dado por la mala aproximación que se realiza del problema en el contorno del obstáculo, más adelante se comprobará cómo con el método propuesto los resultados en dicha zona mejoran notablemente.

6.1.2.1.1. Pérdidas de inserción (IL)

Para cuantificar las pérdidas del receptor se define el parámetro pérdidas por inserción, IL, este coeficiente representa la diferencia entre la señal acústica antes y después de la colocación del obstáculo, [21]:

$$IL = 20 \log_{10} \left(\frac{P_{tot}}{P_{inc}} \right) \quad (22)$$

Donde P_{tot} se define como: $P_{tot} = P_{inc} + P_{sca}$, es decir definimos la presión total recibida por el receptor como la suma de las señales, la incidente sin obstáculo (P_{inc}), más la señal perdida por la presencia del obstáculo (P_{sca}).

A continuación, se muestran las pérdidas por inserción (IL) que aparecen ante la colocación del obstáculo de sección circular para una frecuencia de 100Hz:

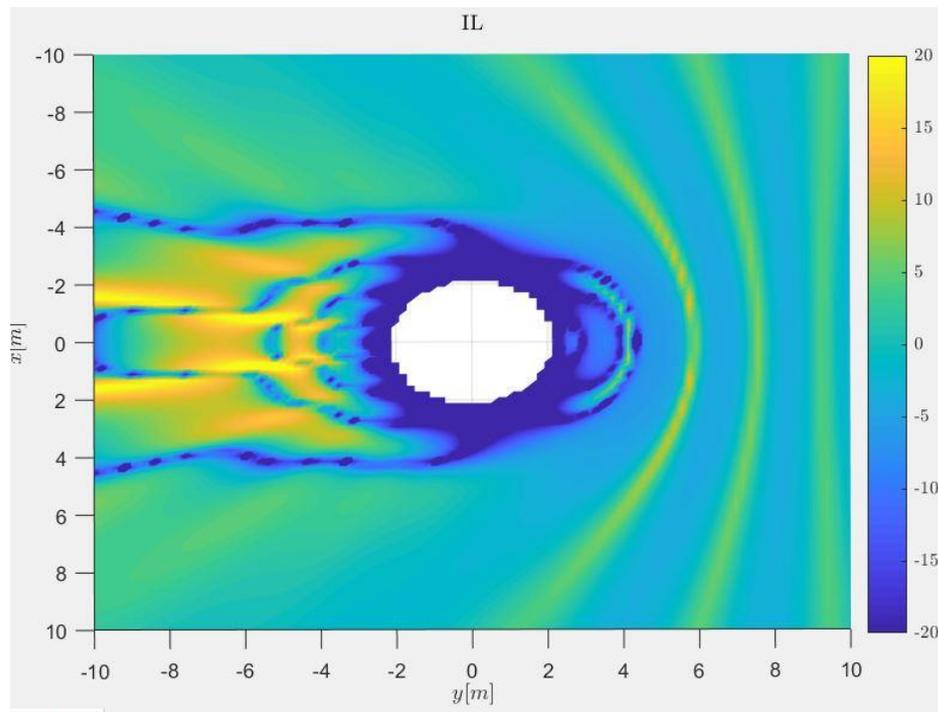


Figura 6.8. Pérdidas de inserción 100 Hz

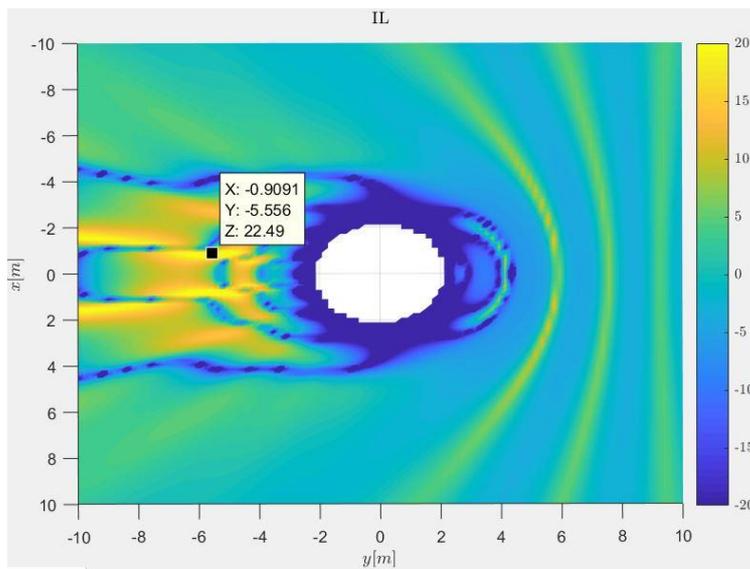


Figura 6.9. Máximo pérdidas de inserción 100 Hz

Analizando los valores mostrados de las pérdidas por inserción se ha localizado su máximo en la estela del obstáculo, siendo este valor de 22.49 dB.

Debido a que para el cálculo de las pérdidas de inserción se han utilizado los valores anteriores de señales recibidas y emitidas ésta presenta los mismos errores en la zona cercana al contorno del obstáculo.

El segundo objeto del problema es obtener las pérdidas en los puntos del entorno del objeto para una frecuencia mayor, de 300Hz, para la que se obtiene:

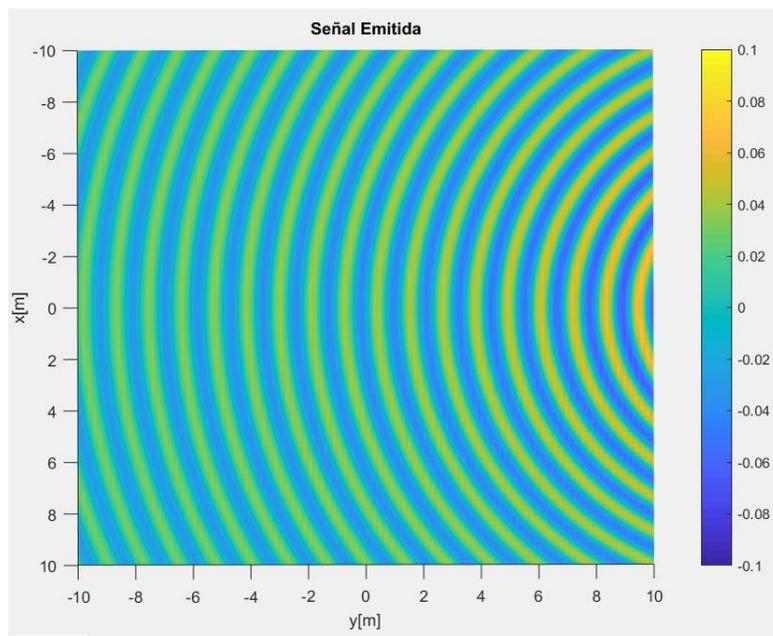


Figura 6.10. Señal emitida 300 Hz

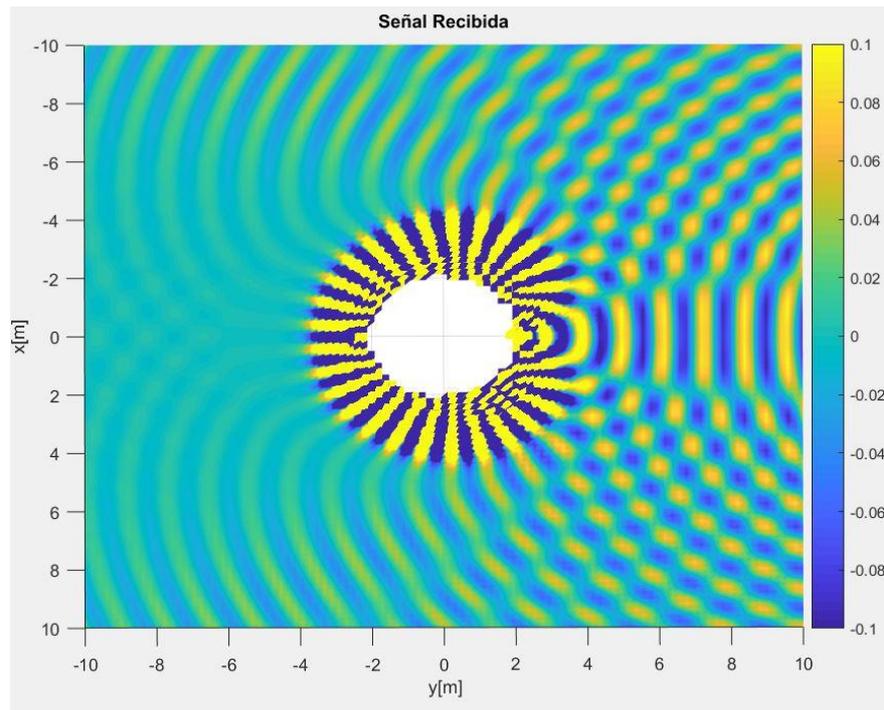


Figura 6.11. Señal recibida 300 Hz

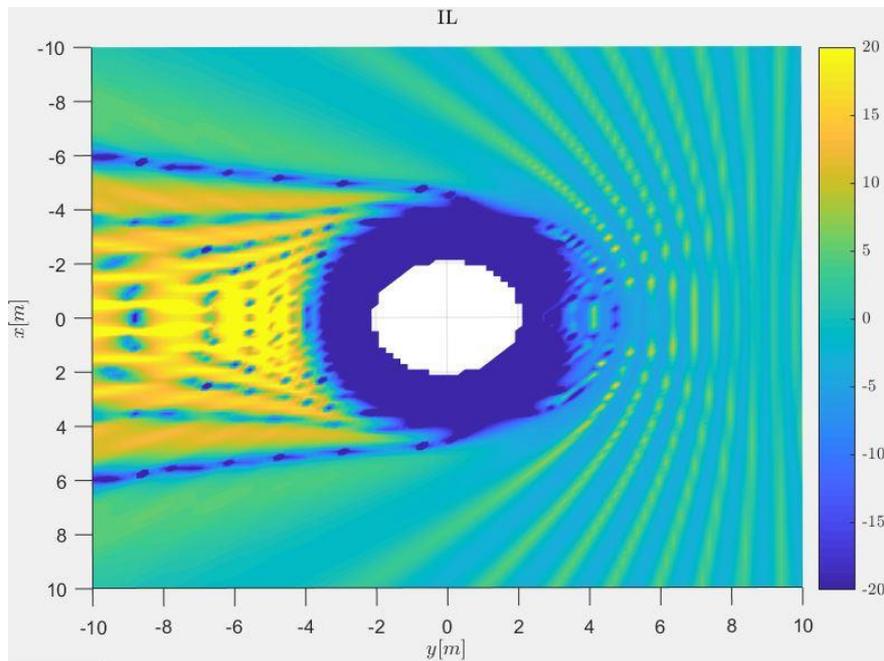


Figura 6.12. Pérdidas de inserción 300 Hz

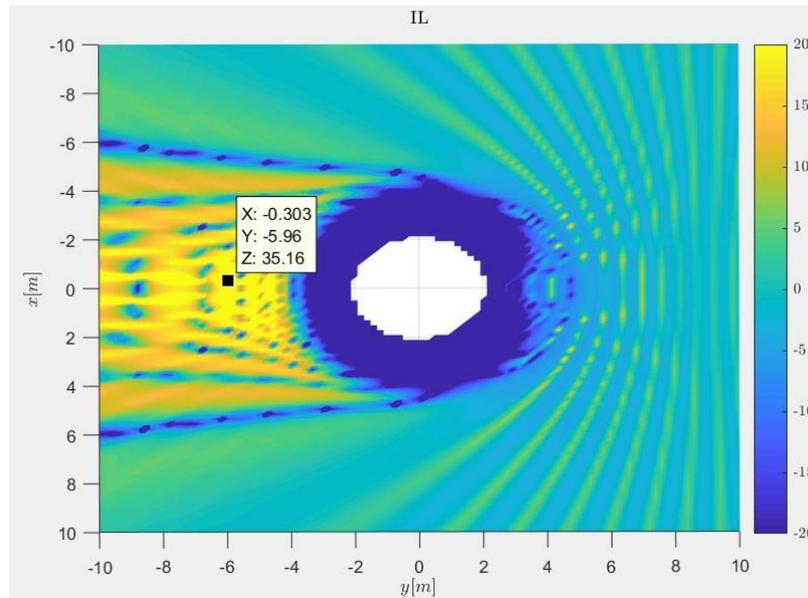


Figura 6.13. Pérdidas de inserción 300 Hz

Puede observarse perfectamente la estela creada a sotavento del objeto y las interferencias en el frente del cilindro, en la que las pérdidas por inserción alcanzan un máximo de 35.16 dB.

6.1.2.1.1.2. Alejamiento receptor

A continuación se analiza el efecto de las pérdidas en la estela dejada tras el objeto, para ello se ha medido la pérdida de inserción en puntos cada vez más alejados del obstáculo, como se representa en la siguiente figura:

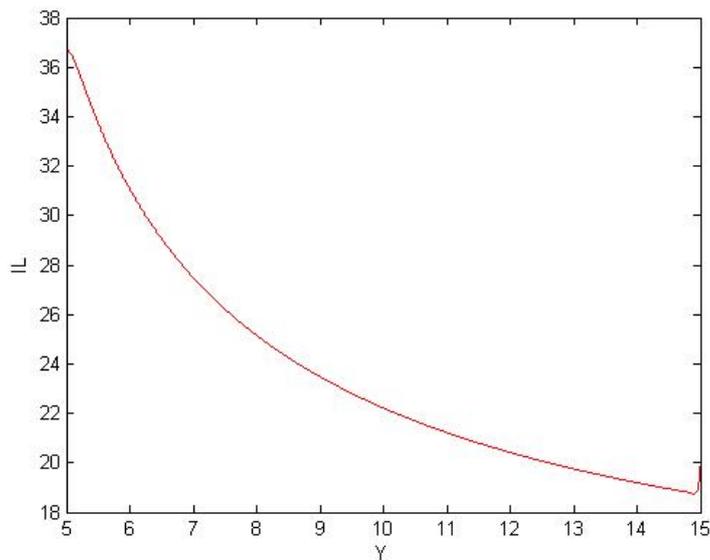


Figura 6.14. Pérdidas de inserción alejando el receptor

Puede observarse como las pérdidas por inserción disminuyen conforme nos alejamos del obstáculo, como cabría esperar, el efecto del obstáculo va desapareciendo a medida que nos alejamos de éste. A una distancia suficiente del objeto, el fluido en el que se propaga la señal no se ve perturbada por la presencia del mismo, por lo que la señal llega sin modificar.

Ésto se produce ya que al avanzar sobre la estela creada por la presencia del obstáculo la señal se va amortiguando a medida que nos alejamos de este, debido a que alrededor del obstáculo la señal se va doblando, quedando ésta frenada alrededor, en cambio la corriente exterior suficientemente alejada que no se ve modificada por la presencia del obstáculo ocupa y mueve al fluido de la estela recuperando el movimiento original de la señal emitida.

También puede comprobarse cómo afecta el aumento de la frecuencia en la estela del obstáculo, como se muestra a continuación, en la que puede observarse como a medida que aumenta la frecuencia de la señal emitida crecen las pérdidas por inserción en toda la estela y cómo el crecimiento se va frenando a medida que aumenta la frecuencia, como se explica en el siguiente capítulo.

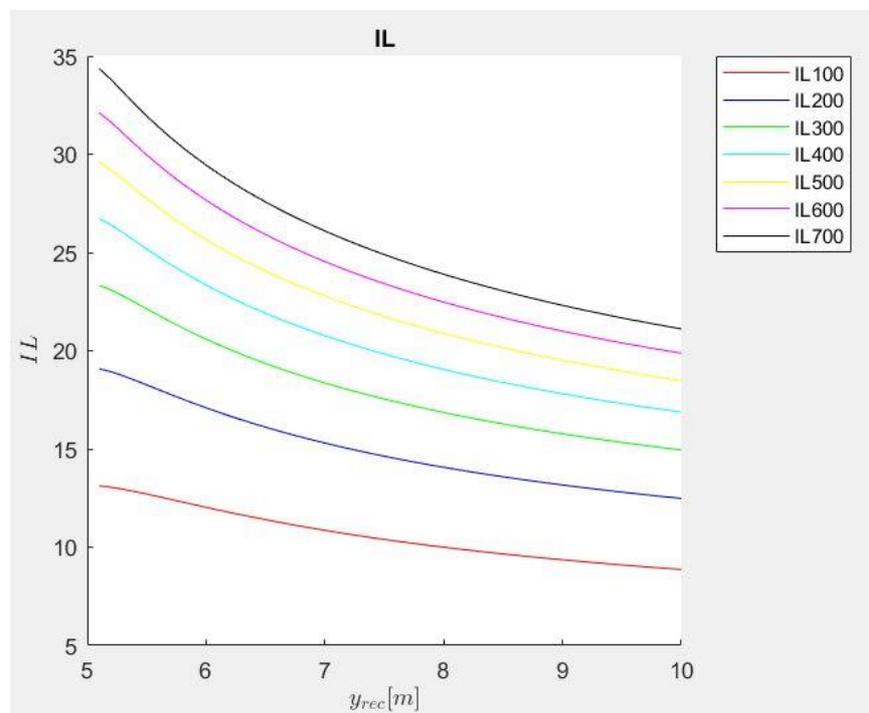


Figura 6.15. IL distancia/frecuencia

6.1.2.1.2. Barrido en frecuencia

Por último se ha analizado la evolución de las pérdidas a medida que variamos la frecuencia de la onda emitida, para ello, se representa la pérdida para un receptor colocado en el punto de coordenadas (0,-10).

Calculando y representando la potencia incidente y la potencia recibida por el receptor:

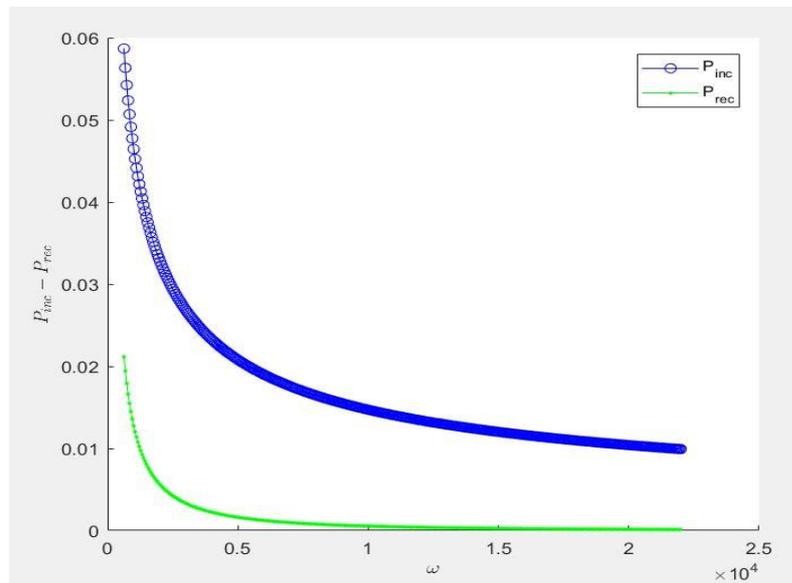


Figura 6.16. Presión emitida / Presión recibida

Y las pérdidas resultantes en el receptor:

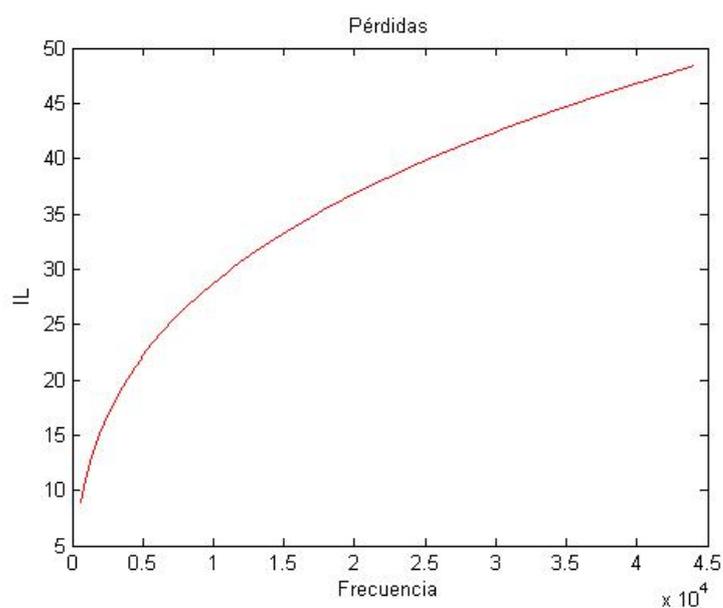


Figura 6.17. Pérdidas de inserción vs frecuencia

Donde puede observarse cómo las pérdidas van aumentando conforme va aumentando la frecuencia emitida, aunque con un crecimiento más lento a medida que crece la frecuencia. En presencia del obstáculo una onda cuya frecuencia es mayor, la longitud de onda es menor, es decir, el choque de esta genera una estela más estrecha y de valores más elevados que los obtenidos para una frecuencia menor. Al disminuir la distancia entre ondas, el fluido no puede disipar las perturbaciones antes de que se provoquen las siguientes, por lo que se acoplan entre sí amplificando las pérdidas por inserción.

A continuación se muestran dos figuras en las que puede verse la señal recibida para una señal emitida de 100 Hz y 600 Hz respectivamente, en las que puede verse el efecto mencionado antes, en el que la estela se estrecha a medida que aumenta la frecuencia de la señal.

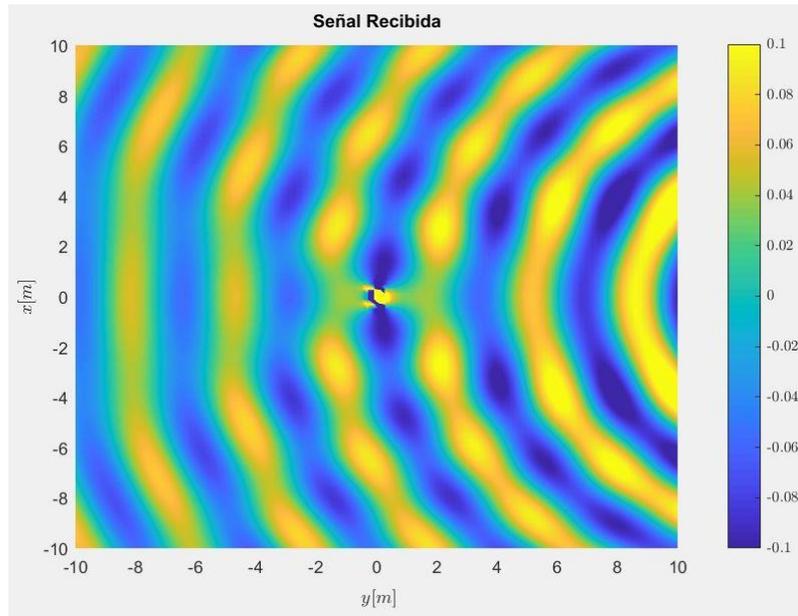


Figura 6.18. Señal 100 Hz

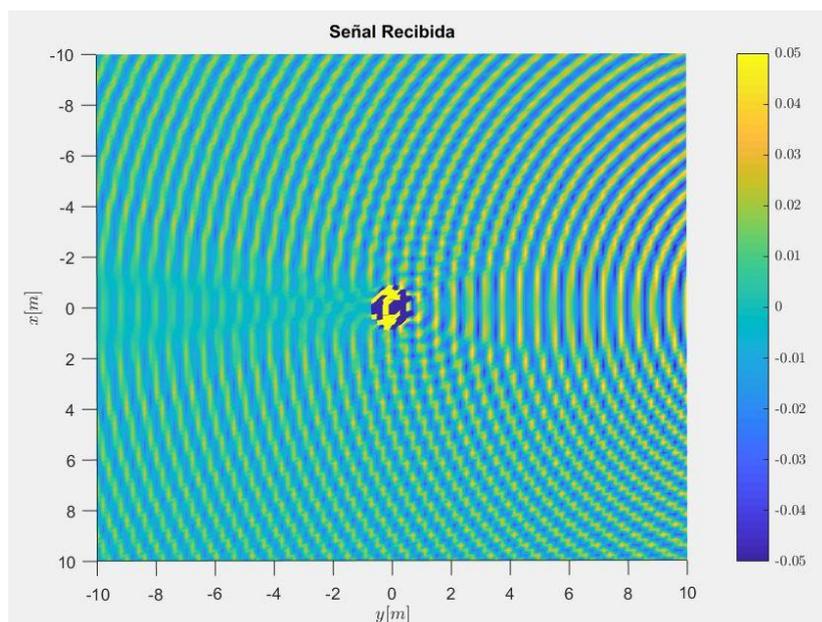


Figura 6.19. Señal 600 Hz

6.1.2.2. Aproximación de la geometría. Inkscape.

Como primer paso en el Método de los Elementos de Contorno se debe modelar la forma de los cuerpos que se incluyen formando el contorno del medio semi-infinito, en los cuales se calculará la solución que posteriormente se extrapolará al resto del medio fluido.

Para obtener la geometría de los obstáculos se ha utilizado la herramienta de diseño Inkscape, en concreto, los módulos que permiten crear y modificar curvas de Bézier. [27]

A continuación, se explica brevemente a modo de guía el proceso seguido para el ejemplo del obstáculo circular.

En el caso del obstáculo circular se sigue la siguiente metodología, crear las correspondientes curvas de Bézier  y, mediante la aplicación de edición de nodos , determinar manualmente la geometría del contorno, ésto introduce errores humanos al modelar, por lo que en futuros estudios se pretende realizar este modelado en el entorno Matlab.

Para minimizar estos errores se ha recurrido a herramientas tales como guías y rejillas disponibles en el programa.

Por último, la aplicación genera un archivo .svg que es interpretado por los programas desarrollados para el Método de los Elementos de Contorno en Matlab

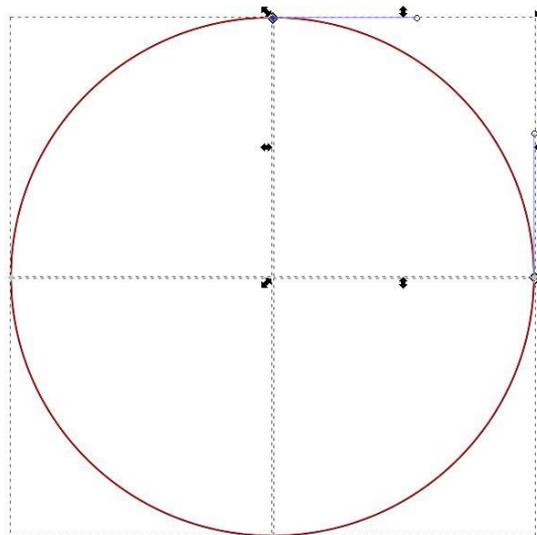


Figura 6.18. Curvas de Bézier obstáculo circular

A partir del modelo para el primer problema, se ha ido modificando dicho obstáculo para obtener las geometrías estudiadas a lo largo del trabajo.

Como ejemplo, se presentan las geometrías de sección cuadrada y triangular con bordes redondeados.

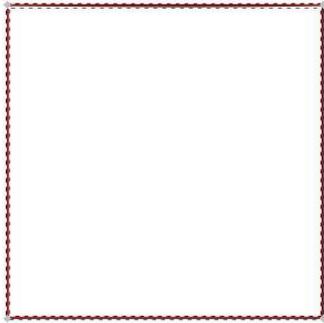


Figura 6.19. Curvas Bézier obstáculo cuadrado

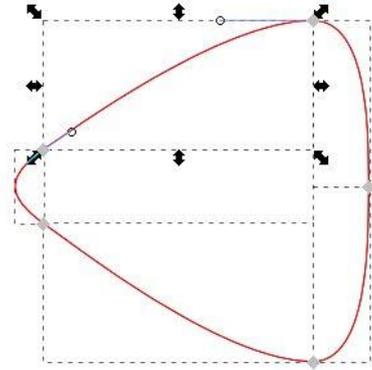


Figura 6.20. Curvas Bézier obstáculo triangular

A continuación se presentan las curvas de Bézier de un obstáculo circular donde se marcan los puntos de control. También se presentan la posición de estos puntos de control (se muestran los del primer cuadrante, los demás se obtienen por simetría).

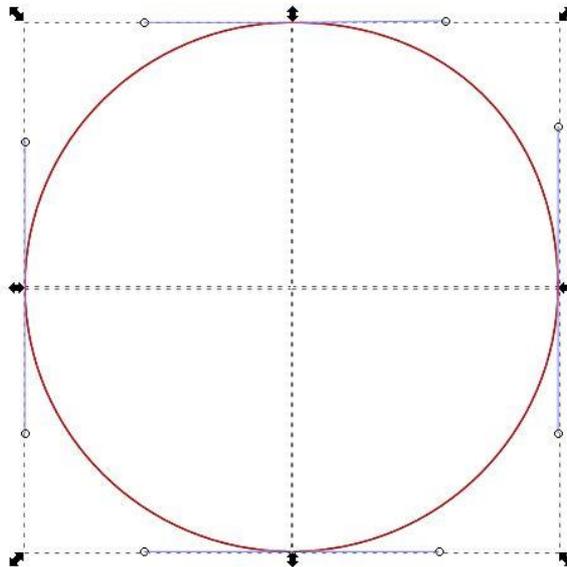


Figura 6.21. Puntos de control obstáculo circular

Puntos de control

$N1 (R,0)$, $N2 (0.57R,0)$, $N3 (0,0.7R)$ $N4 (0,R)$

6.1.2.3. Solución BEM

En primer lugar, repetiremos el problema inicial de un obstáculo circular de radio 5 centrado en el origen de coordenadas y un emisor colocado en (-5,0) que propaga una señal a $\omega=300\text{Hz}$.

En primer lugar se representa el contorno del objeto y la señal obtenida:

A la hora de elegir los parámetros de discretización de los elementos de contorno se han seguido las siguientes condiciones:

$$k * h \sim 3 \div 6 \quad (23)$$

$$d_\lambda = \frac{2\pi * p}{k * h} \geq 6 \quad (24)$$

Donde h define el tamaño del elemento, p define el orden del elemento y d_λ la densidad de elementos.

Elementos de contorno

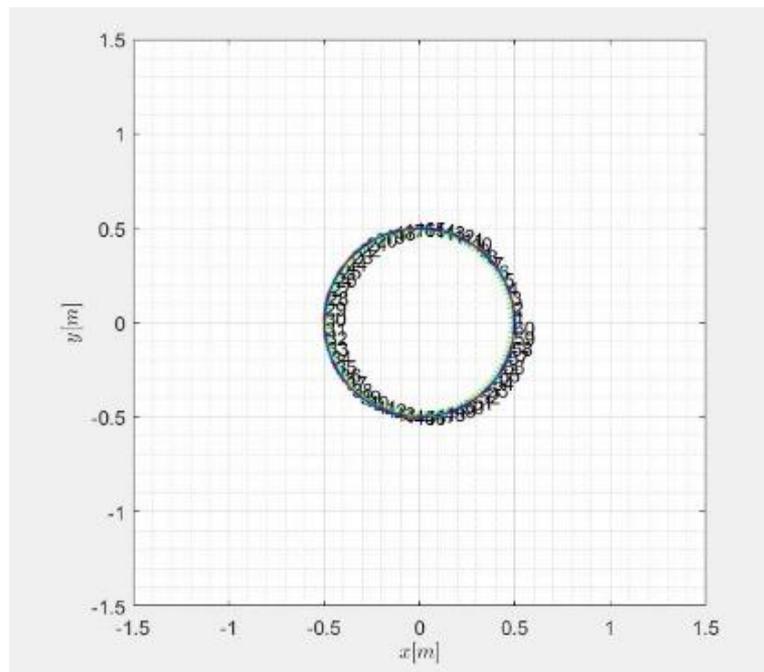


Figura 6.22. Elementos de contorno obst. circular

Señal

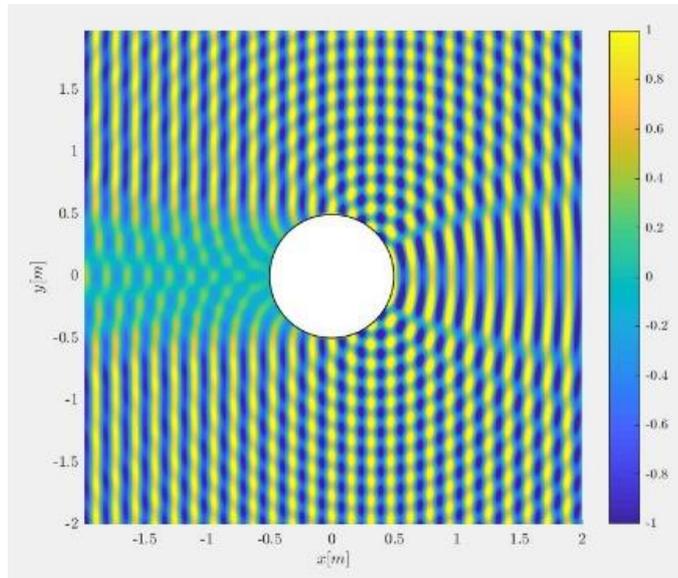


Figura 6.23. Señal obstáculo circular BEM

Pérdidas de inserción (IL)

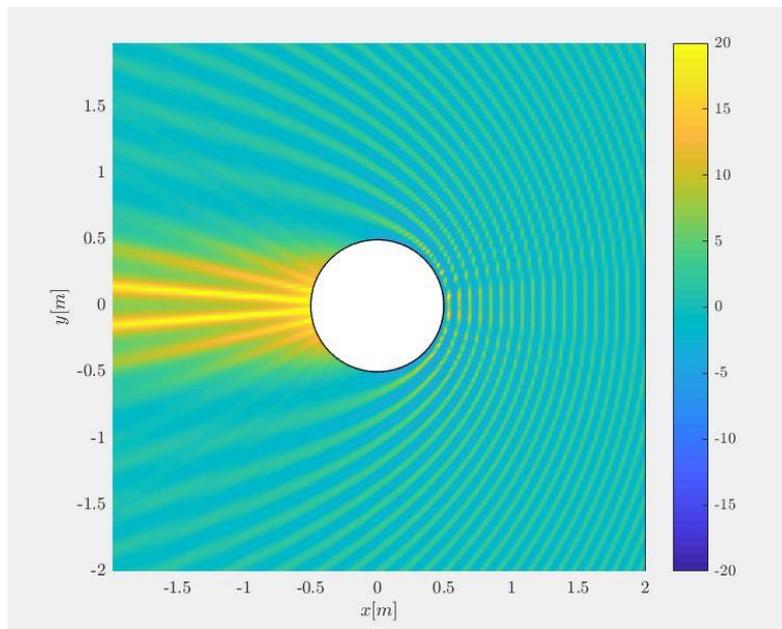


Figura 6.24. Pérdidas inserción obst. circular BEM

Haciendo uso de la herramienta Data Cursor se localizan manualmente aquellos puntos donde las pérdidas por inserción (IL) alcanzan sus valores más altos. En este caso se han buscado estos centrándose en tres zonas, la zona frontal del objeto donde incide la onda, la zona de la estela del objeto más cercana a éste y la zona de la estela más alejada.

Se han localizado los siguientes puntos de valores máximos.

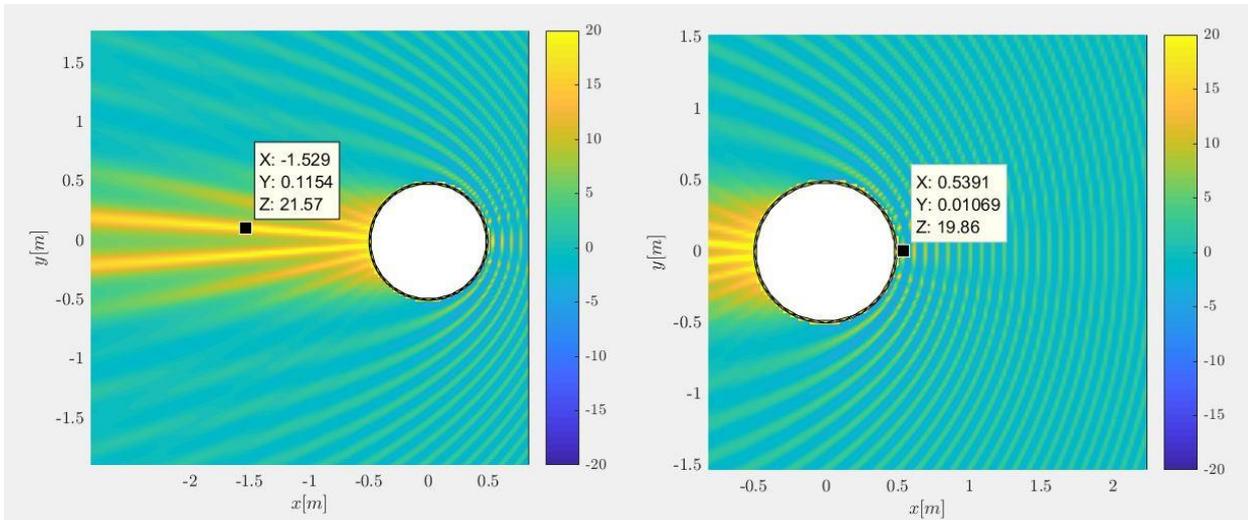


Figura 6.25. Máxima IL (estela)

Figura 6.26. Máxima IL (borde ataque)

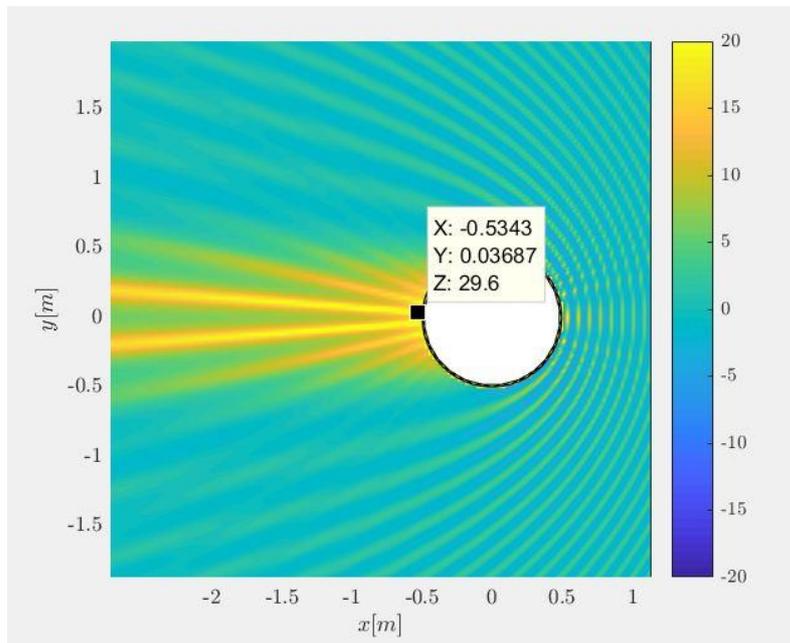


Figura 6.27. Máxima IL (borde salida)

En dicha figura pueden observarse pérdidas de hasta 19.86 dB frente al objeto, de 21.57 dB en una zona intermedia de la estela y de hasta 29.6 dB tras éste.

6.1.2.3.1. Comparación solución analítica/BEM

Una vez obtenidos los primeros resultados se comparan con los resultados de la solución analítica, en la que pueden observarse mayores diferencias en el entorno del objeto al no aproximarse en la solución analítica de manera exacta el contorno del objeto.

Pérdidas de inercia

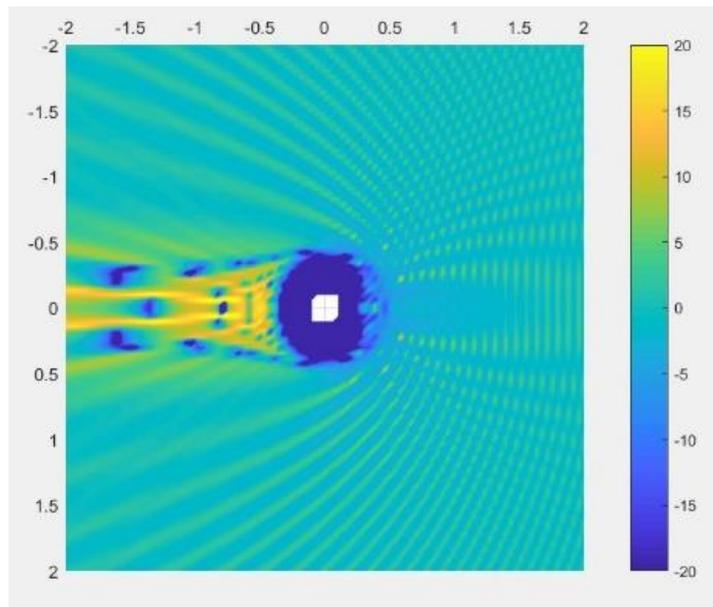


Figura 6.28. IL analítica

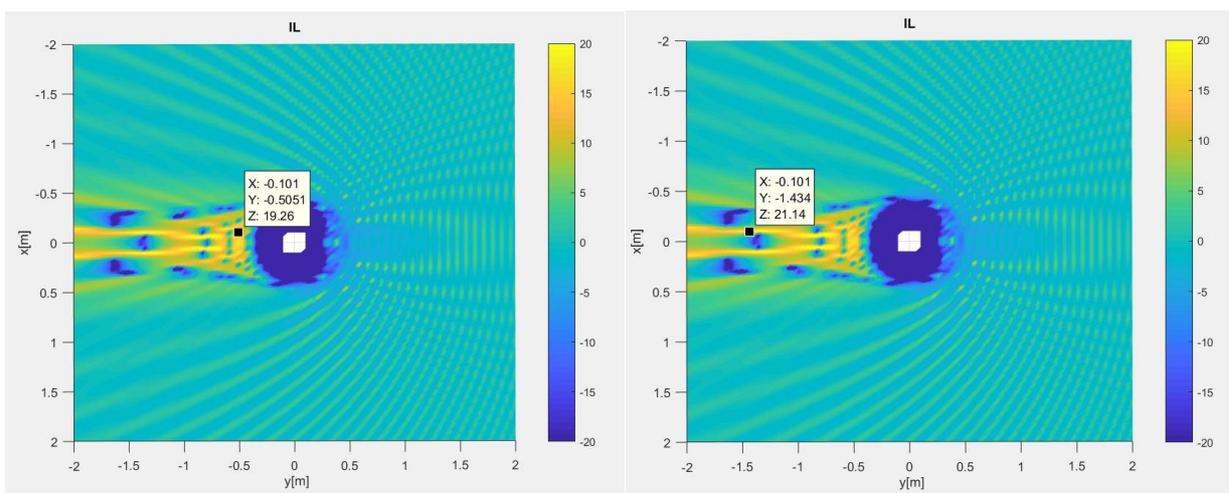


Figura 6.29. Máxima IL analítica (borde salida)

Figura 6.30. Máxima IL analítica (estela)

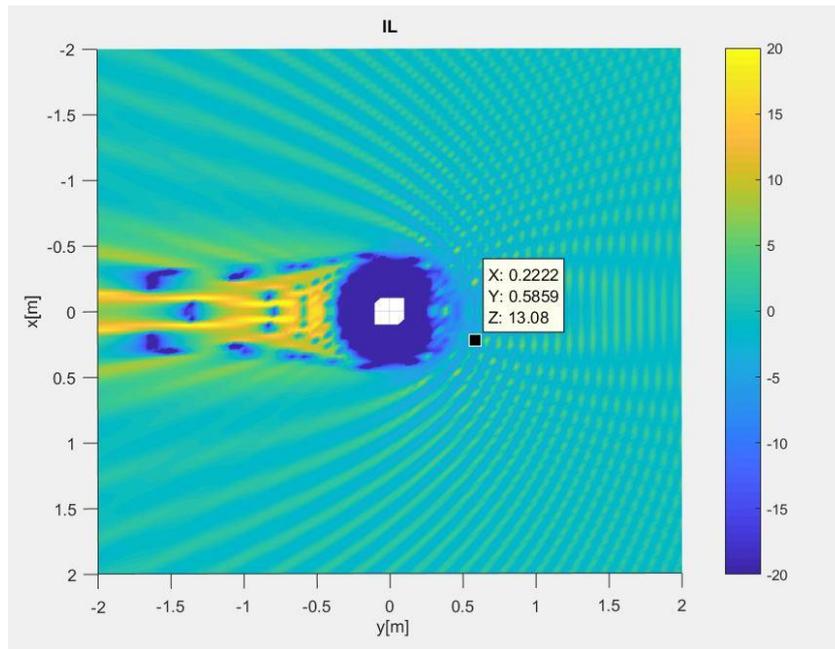


Figura 6.31. Máxima IL analítica (borde ataque)

En estas imágenes se observa como la solución ofrecida por el Método de los Elementos de Contorno difiere en mayor medida tanto en la zona frente al obstáculo, como justo detrás de éste, frente a la zona media de la estela provocada por la presencia del objeto, es decir, encontramos las mayores discrepancias entre el BEM y la solución analítica en el entorno de la frontera del obstáculo donde el BEM si es capaz de aproximar de manera exacta la geometría de éste.

6.1.2.4. BEM aplicado a diferentes problemas

Una vez estudiado el caso del obstáculo circular se utilizará éste como punto de partida para el proceso de optimización de la geometría del obstáculo llevado a cabo en este trabajo.

Para empezar, se han tomado distintas geometrías sencillas tales como cuadrados, elipses..., analizándose los resultados y extrayéndose de éstos una serie de dimensiones y formas que producen mejores resultados, a partir de los cuales se han ideado una serie de geometrías que se prevén que puedan ofrecer mejores prestaciones

Posteriormente, se han probado estas geometrías más complejas como obstáculos triangulares, parabólicos... de los cuales se han obtenido aquellos óptimos, además de presentarse aquellas que presentan errores en el método.

Una vez estudiados los obstáculos de manera aislada, se ha continuado el estudio utilizando varios obstáculos a la vez usando las formas óptimas obtenidas en el estudio de los obstáculos individuales realizado previamente, variando tanto su número como su posición relativa. Para lo cual estos resultados han sido comparados con los que se obtienen de resolver el mismo problema pero con obstáculos circulares.

6.1.2.4.1. Obstáculo cuadrado

Se presentan a continuación tanto la discretización, como la señal emitida en el caso de un obstáculo cuadrado.

Elementos de contorno

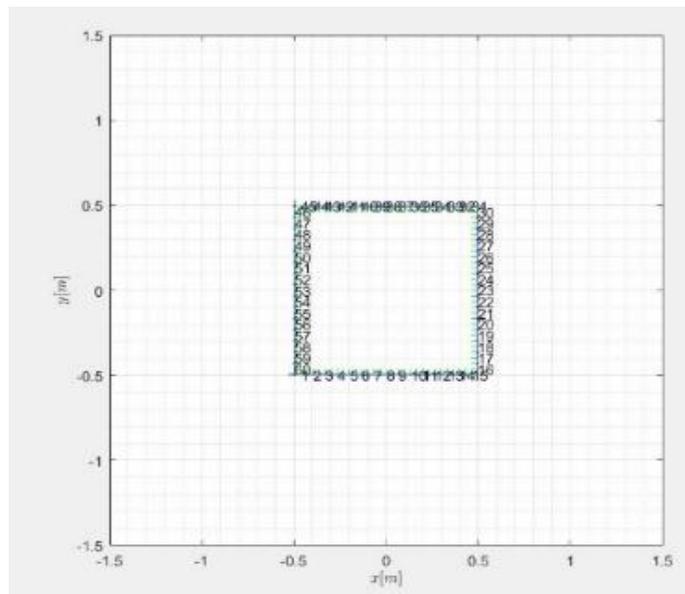


Figura 6.32. Elementos de contorno obst. cuadrado

Señal

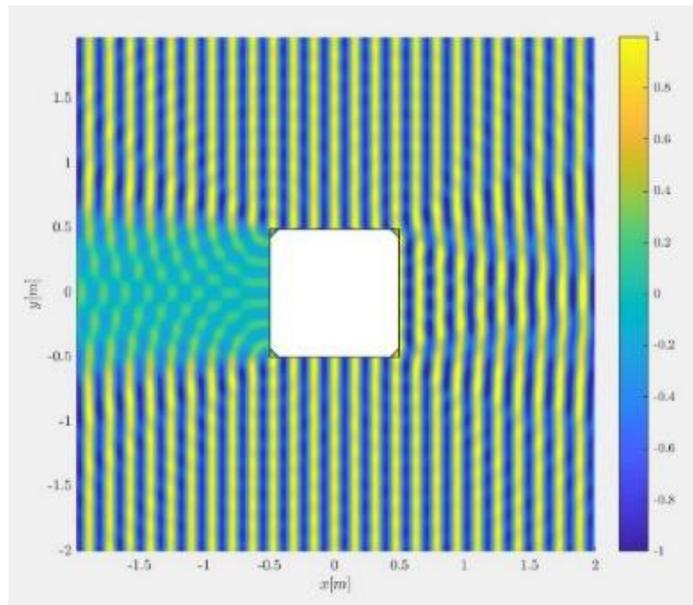


Figura 6.33. Señal obstáculo cuadrado BEM

Perdidas de inerción

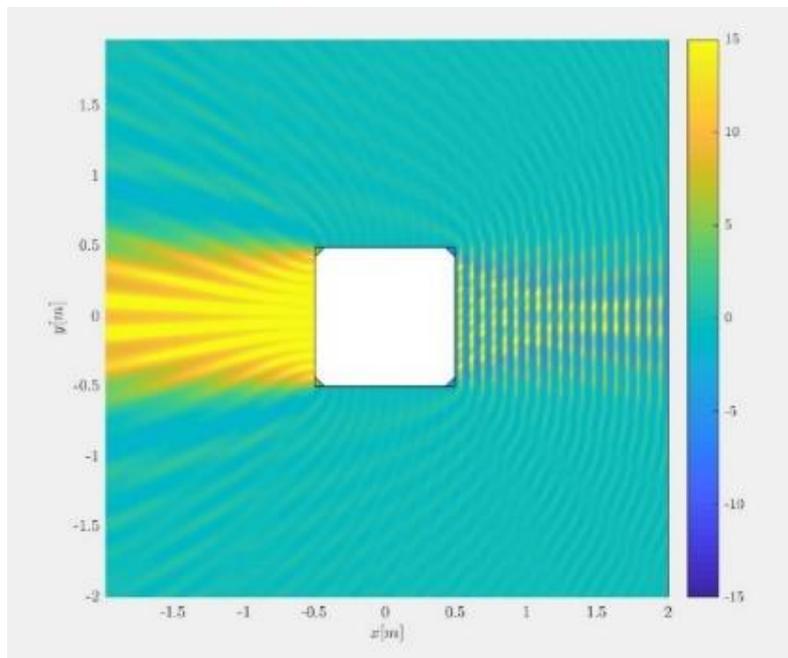


Figura 6.34. Pérdidas inserción obst. cuadrado BEM

Se observan pérdidas de inserción de hasta 40 dB en la estela del cuadrado y de hasta 35 dB frente a éste, siendo mayores que cuando el objeto es de sección circular, produciéndose estos picos en zonas más alejadas del objeto.

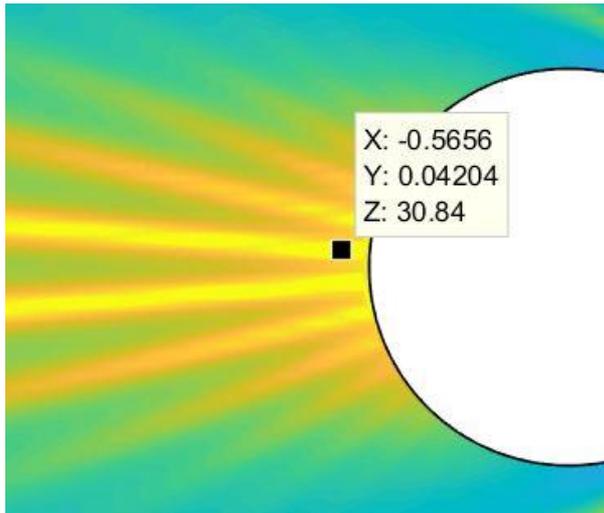


Figura 6.35. Máxima IL obst. circular (b. salida)

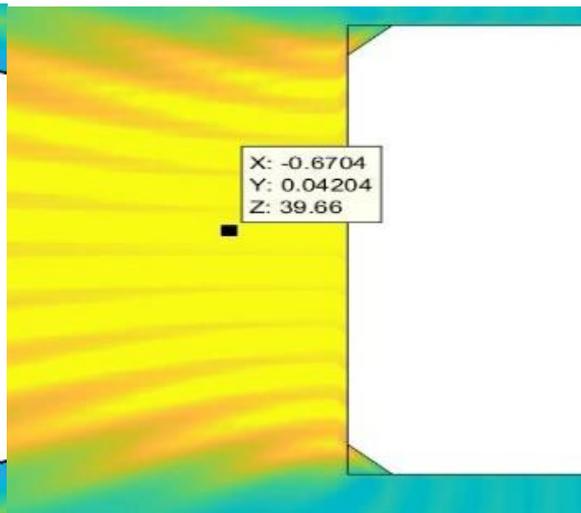


Figura 6.36. Máxima IL obst. cuadrado (b.salida)

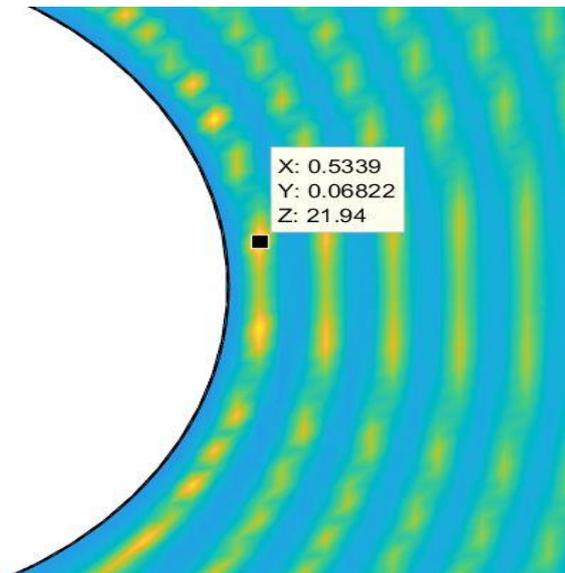


Figura 6.37. Máxima IL obst. circular (b.ataque)

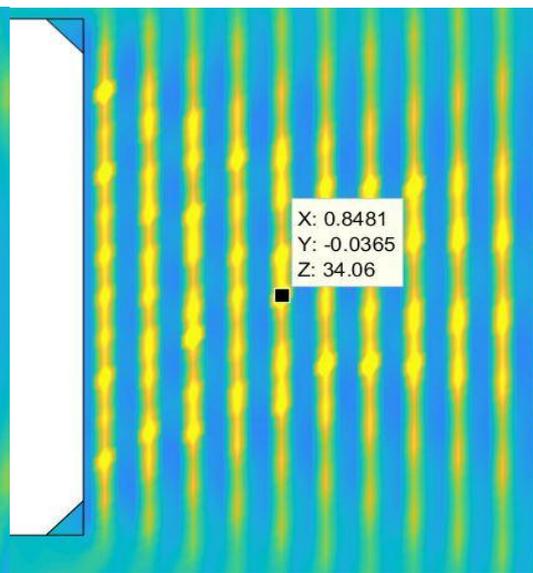


Figura 6.38. Máxima IL obst. cuadrado (b.ataque)

Cabe destacar, que en el entorno del frente del obstáculo la diferencia de pérdidas entre ambas configuraciones son acuciadas, probablemente debido a encontrarse el fluido un cambio más abrupto en la superficie del cuadrado que en la superficie del circular.

6.1.2.4.2. Obstáculo elíptico

También se ha recurrido a una elipse de eje mayor en el sentido de la propagación de la señal.

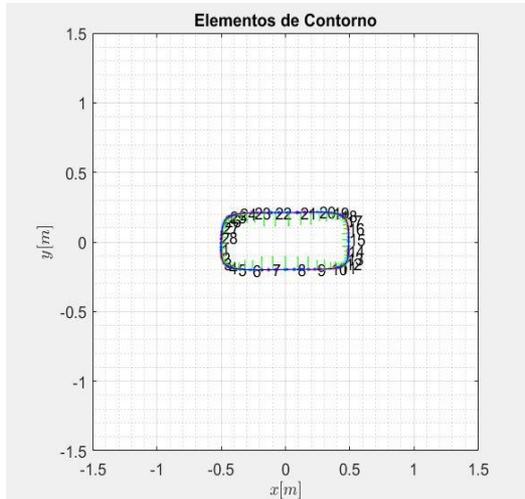


Figura 6.39. Elementos de contorno obst. elíptico

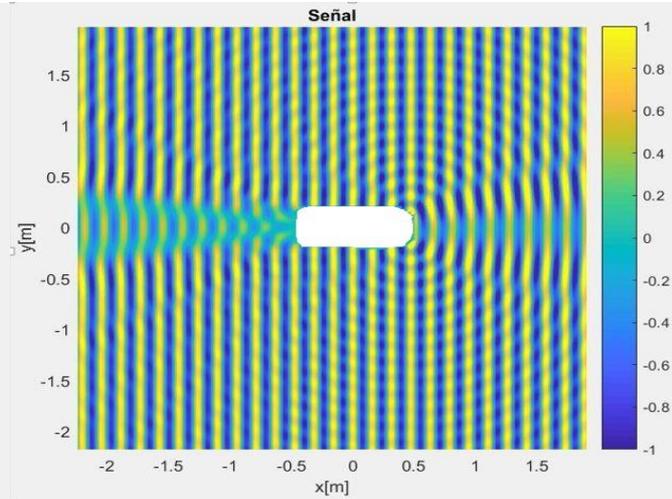


Figura 6.40. Señal obstáculo elíptico BEM

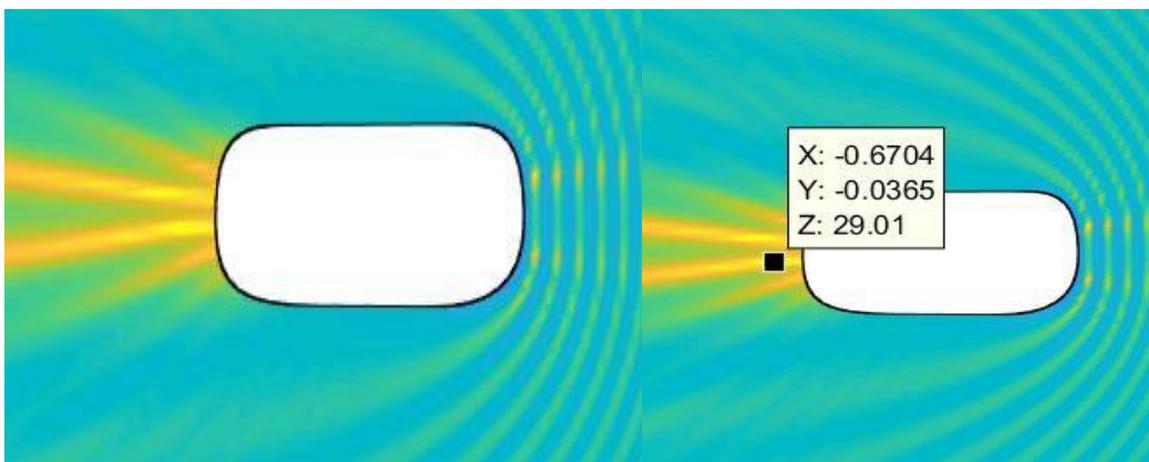


Figura 6.41. Pérdidas inserción obst. elíptico BEM

Figura 6.42. Max. IL obst. elíptico

Se observa que teniéndose pérdidas de 29.01 en la estela del obstáculo frente a las 30.84 del círculo esta geometría si mejora los resultados del ejemplo de partida.

6.1.2.4.3. Obstáculos triangulares

Una vez se han analizado una serie de formas básicas podemos extraer una serie de conclusiones que se utilizarán para encaminar el resto del estudio.

Por un lado hemos encontrado que un borde de entrada al obstáculo suave resulta en unas pérdidas menores frente a los obstáculos de frente plano.

Y por otro lado se ha observado como ante un obstáculo alargado en el sentido de propagación de la onda también produce un mejor resultado.

Es por ello que se prueban a continuación varias formas buscando mejorar los resultados del círculo, donde se ha encontrado una forma semejante a un triángulo de picos redondeados que mejoran los resultados del obstáculo circular.

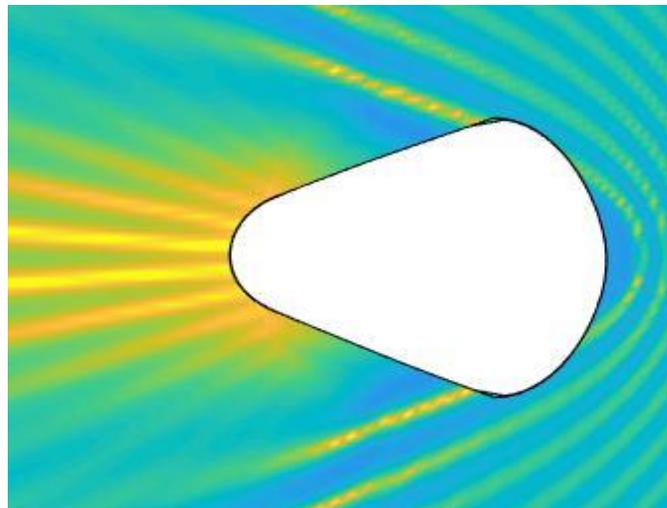


Figura 6.43. Pérdidas inserción obst. triangular BEM

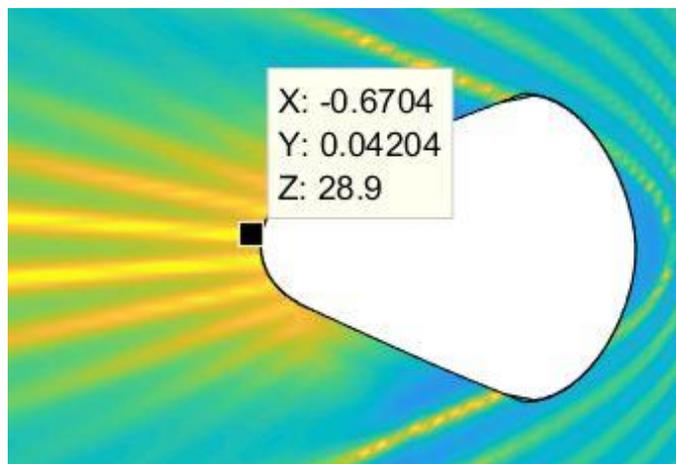


Figura 6.44. Max. IL obst. triangular BEM

A la luz de estos resultados, se ha decidido probar una geometría similar en la que el pico del triángulo situado a la estela del objeto se ha afilado para observar el efecto de este reborde anguloso en las pérdidas, tal y como se muestra a continuación.

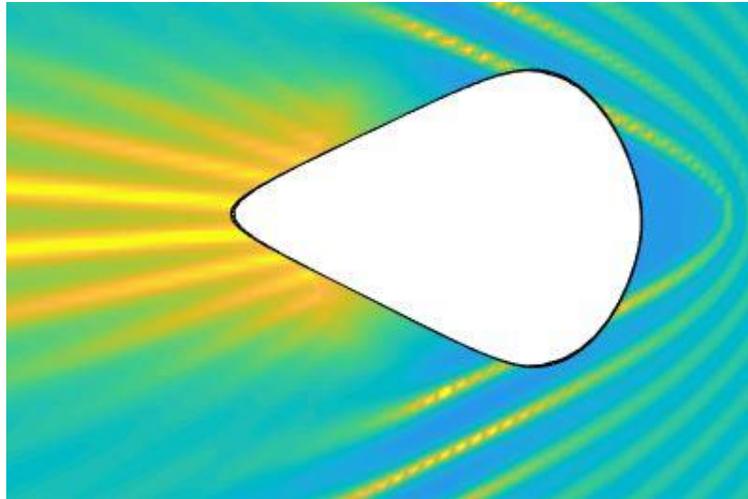


Figura 6.45. Pérdidas inserción obst. triangular en punta BEM

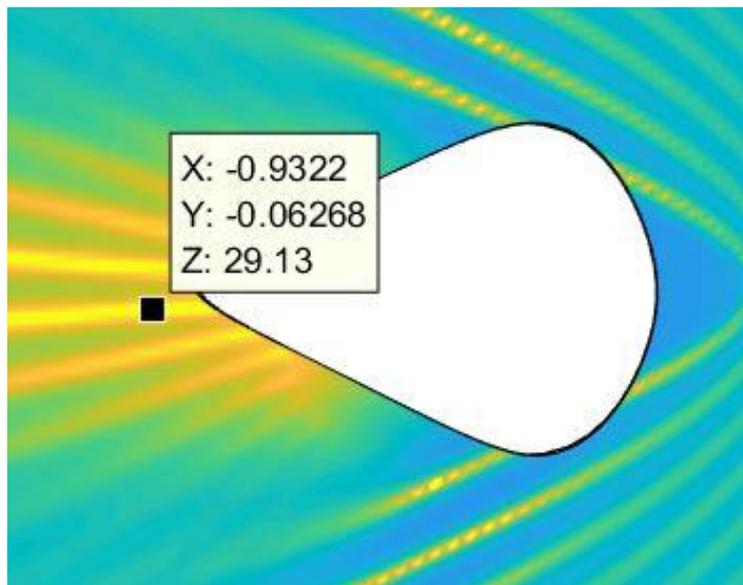


Figura 6.46. Max. IL obst. triangular en punta BEM

En el caso del triángulo redondeado aparecen picos de pérdidas de hasta 28.9 dB , mientras que en el caso de un borde mas afilado éstas crecen hasta valores de 29.13 dB, por lo que se concluye que el objeto que optimice la solución del problema deberá tener un borde de salida suave.

6.1.2.4.4. Obstáculos triangulares girados

Partiendo de esta geometría triangular se ha probado a continuación con otro cuerpo también triangular pero en este caso orientado en dirección al emisor obteniéndose los siguientes resultados.

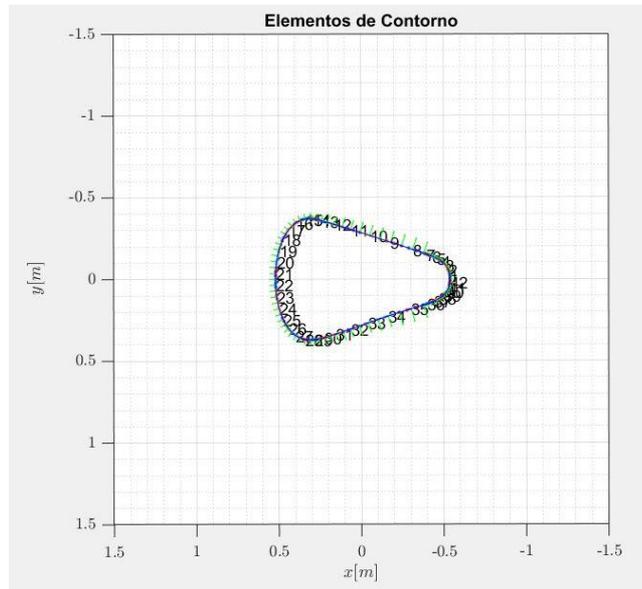


Figura 6.47. Elementos de contorno triangular inverso

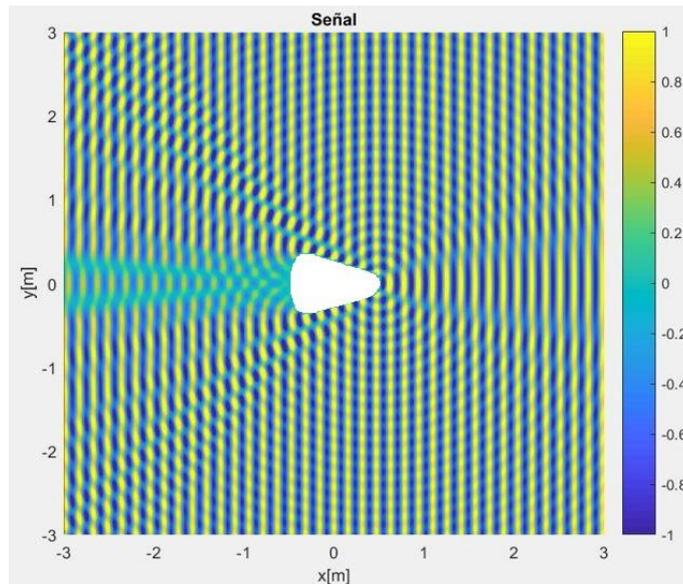


Figura 6.48. Señal obst. triangular inverso

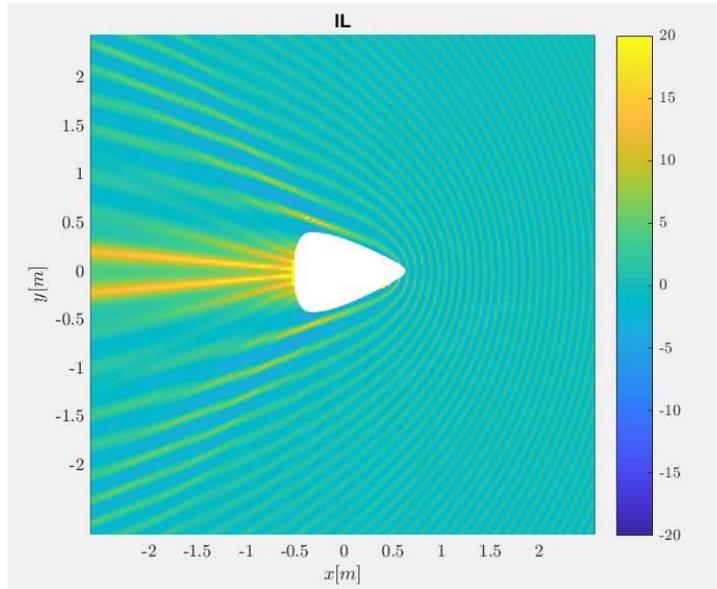


Figura 6.49. Pérdidas de inserción obst. triangular inverso

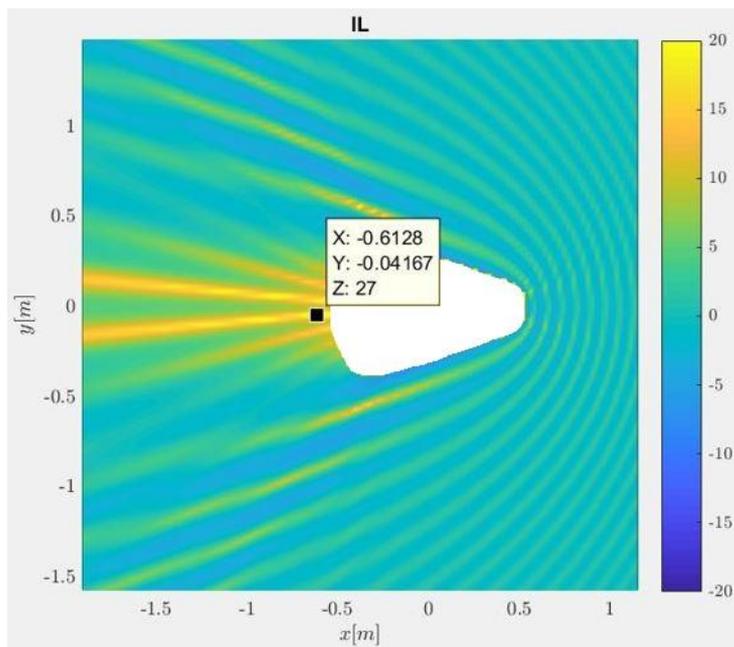


Figura 6.50. Max. IL obst. triangular inverso

El máximo alcanzado con esta nueva geometría es de 27 dB por lo que mejora todos los resultados logrados hasta ahora en este estudio y en lo que resta se tomará como la configuración óptima para un obstáculo individual colocado en el seno de un fluido.

A continuación se presentan varios ejemplos de geometrías estudiadas cuyos resultados ofrecidos no son válidos tanto por no mejorar los resultados de referencia del obstáculo circular como otros casos concretos en los que el Método de los Elementos de Contorno no obtiene una solución válida para el problema.

6.1.2.4.5. Cavity parabólica

También se han probado diversas formas en las que el resultado no ha sido satisfactorio, como la que se presenta a continuación, un obstáculo parabólico.

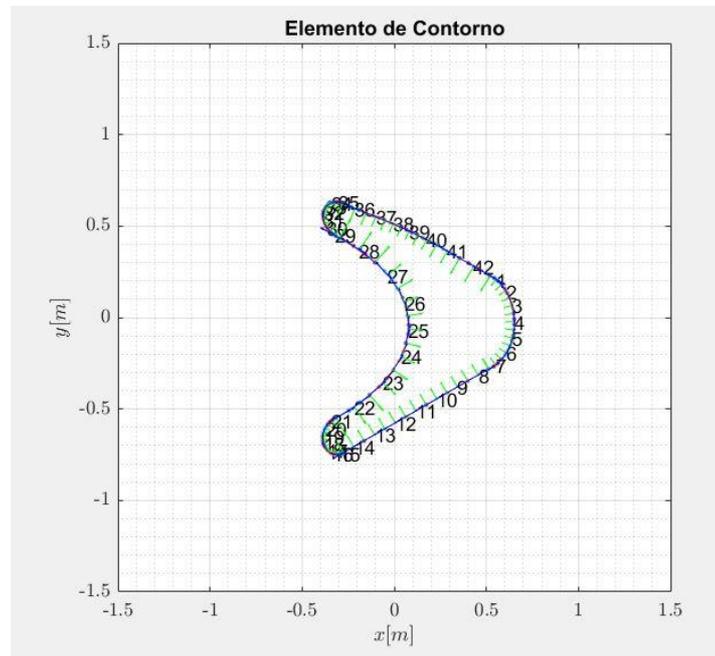


Figura 6.51. Pérdidas de inserción obst. parabólico

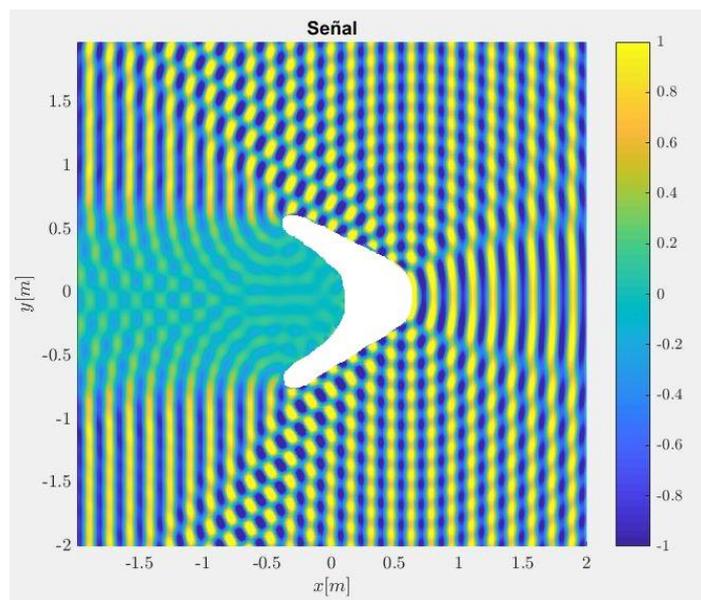


Figura 6.52. Señal obst. parabólico

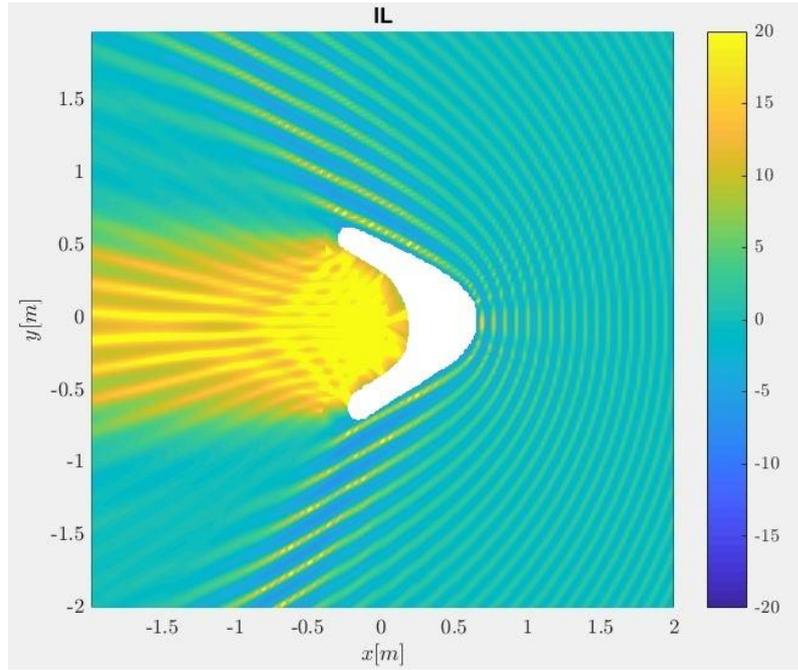


Figura 6.53. Pérdidas de inserción obst. parabólico

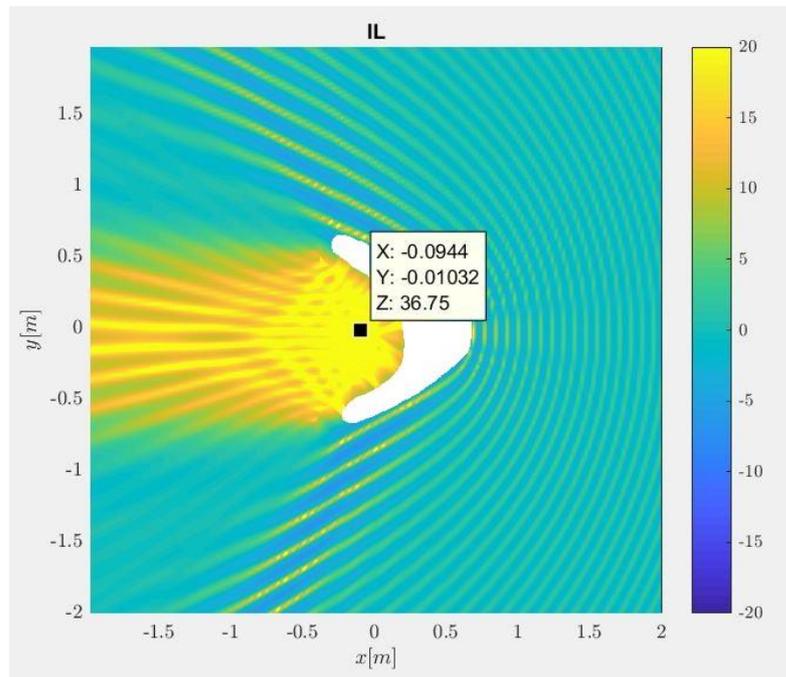


Figura 6.54. IL máximo obst. parabólico

Se observa una estela muy amplia, que abarca prácticamente toda la zona trasera del objeto y en la que se alcanzan valores de 31.41 dB, superiores incluso a los que se obtienen en el caso circular, por lo que se desecha esta morfología de obstáculos.

6.1.2.4.6. Cavidades semilla y estrella

En los casos estudiados hasta ahora se han encontrado geometrías tanto que mejoran los resultados de partida como casos en los que se empeoraban, a continuación, se presentan una serie de ejemplos particulares donde las geometrías propuestas proporcionan resultados anómalos, un obstáculo en forma elíptica rematada por dos puntas (semilla) y un obstáculo en forma de estrella con cuatro puntas.

Semilla

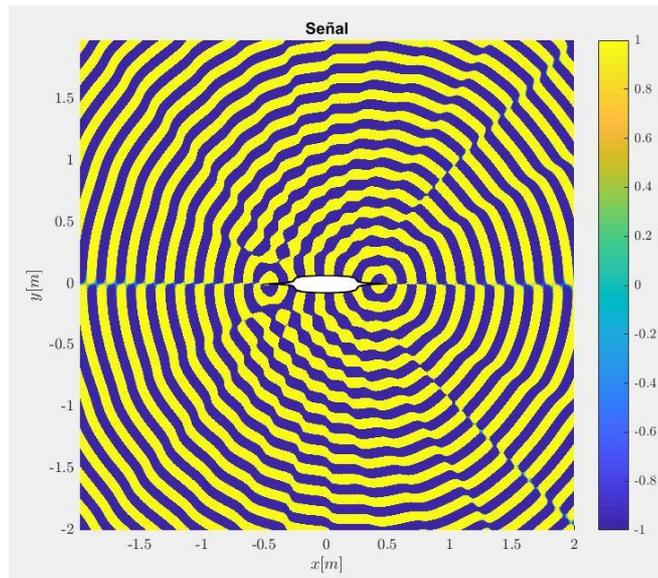


Figura 6.55. Señal obst. “semilla”

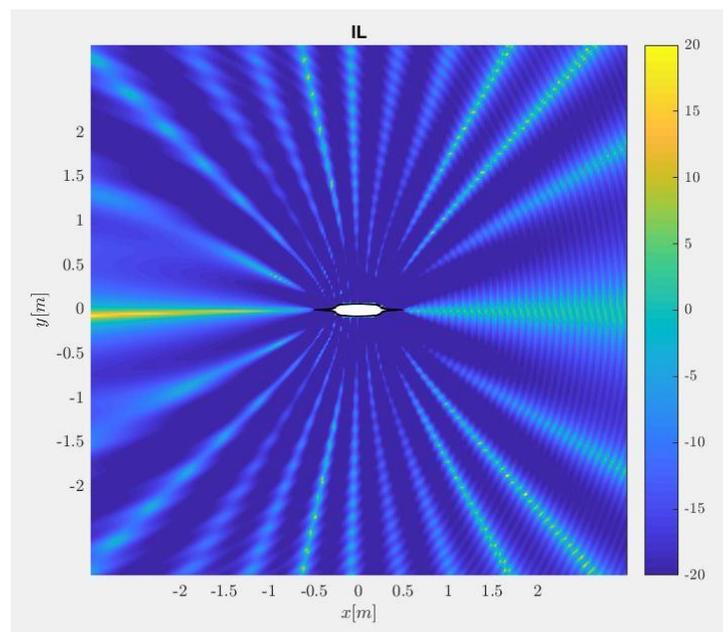


Figura 6.56. IL obst. “semilla”

Estrella

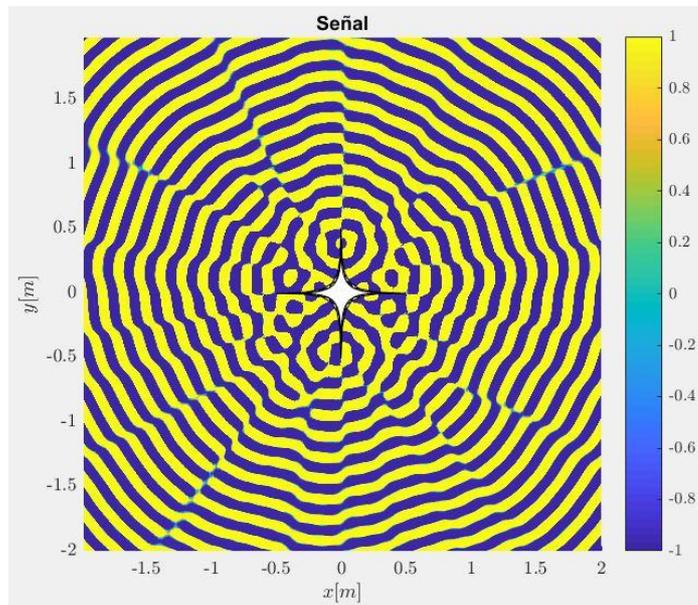


Figura 6.57. Señal obst. “estrella”

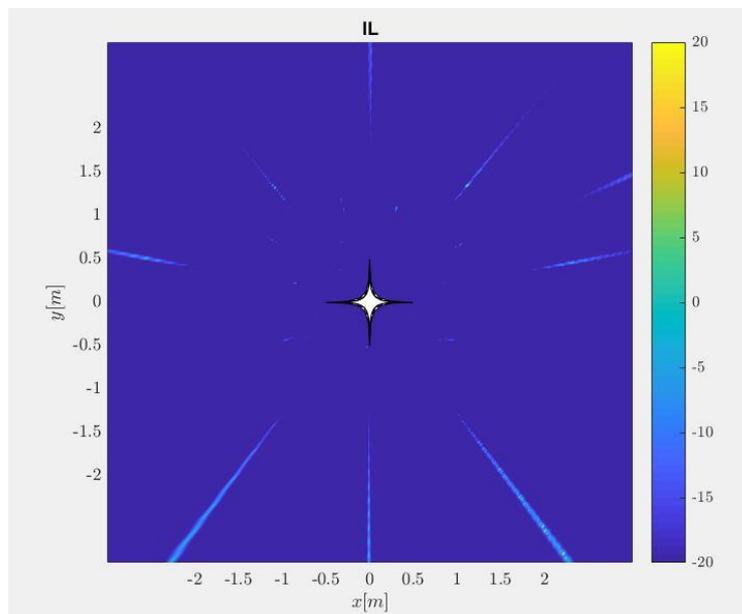


Figura 6.58. IL obst. “estrella”

Donde se comprueba que la solución obtenida con el BEM no concuerda con la que se esperaría encontrar en la realidad.

Estos resultados se deben a que los obstáculos poseen contornos no suaves con bordes angulosos en los que en determinadas zonas el espesor del obstáculo es nulo, lo cual provoca fallos en el Método de Elementos de Contorno .

A partir de aquí, en lo que resta de trabajo se limitará el estudio a geometrias de contorno suave.

6.1.2.4.7. 2 Cavidades circulares

Una vez se han estudiado diferentes obstáculos de manera individual y habiendo obtenido la forma óptima del obstáculo individual se ha pasado a implementar el método a configuraciones con más de un objeto y en diferentes configuraciones.

Para ello primero se han analizado las configuraciones con la forma de referencia del objeto, la circular, para determinar el efecto que tienen sobre las pérdidas tanto el número de obstáculos insertados como la posición entre ellos, para luego implementar estas configuraciones en el caso triangular con el objeto de comprobar si ante estas nuevas situaciones sigue siendo la forma óptima.

Se ha comenzado probando distintas distribuciones de dos obstáculos circulares:

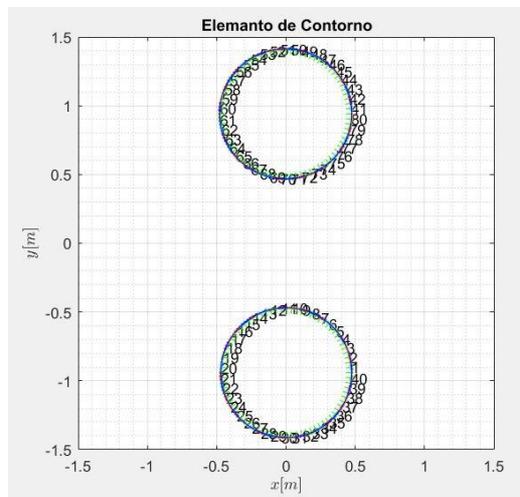


Figura 6.59. Elementos de contorno de 2 círculos

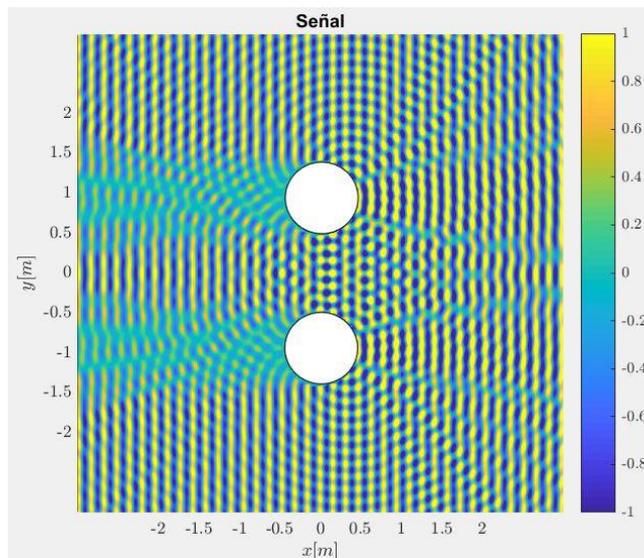


Figura 6.60. Señal frente a 2 círculos

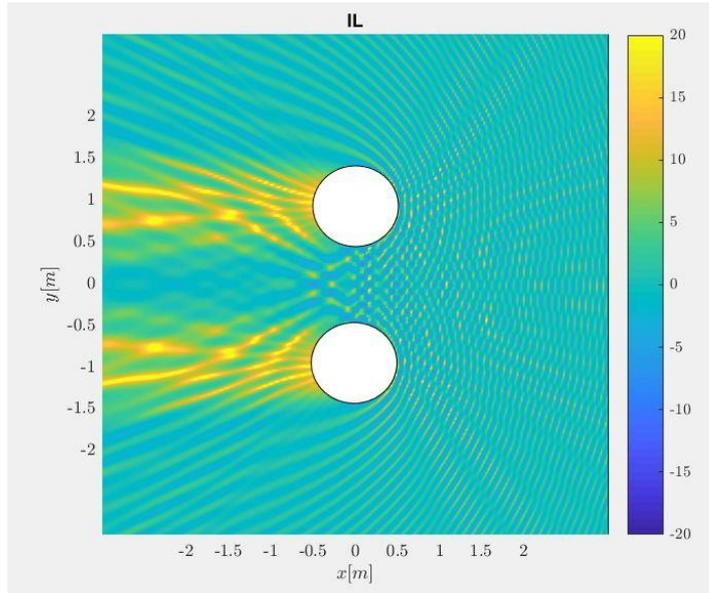


Figura 6.61. Pérdidas de inserción frente a 2 círculos

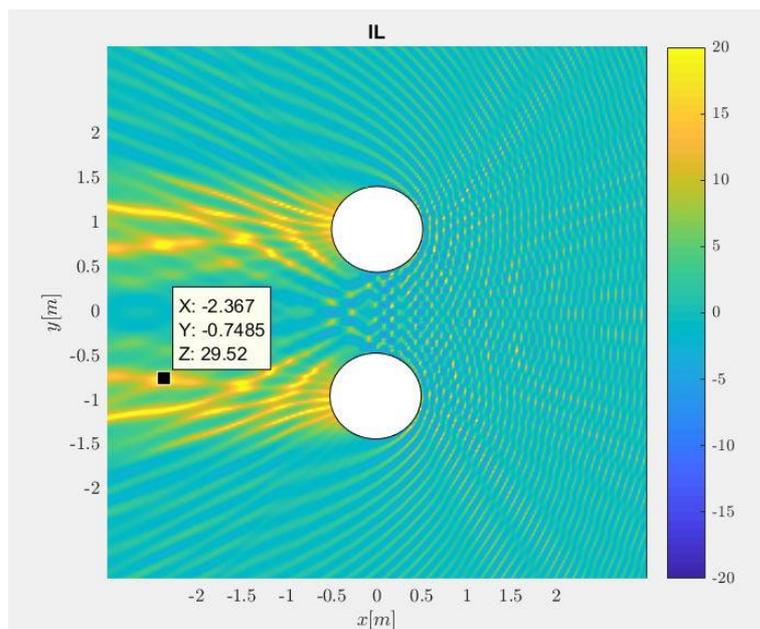


Figura 6.62. Max. IL frente a 2 círculos

Los valores máximos de módulo 28.5 dB se alcanza en la estela de las dos esferas a una cierta distancia de éstas, allí donde el efecto de la presencia de uno de los círculos se suma al efecto de la otra.

Tal y como se realizó en el apartado anterior comprobando geometrías que pudieran dar errores en el Método de los Elementos de Contorno (obstáculos en forma de semilla y estrella) se ha probado a colocar ambos obstáculos a una distancia menor para comprobar así la eficacia del método en zonas con un límite entre contornos más angosto.

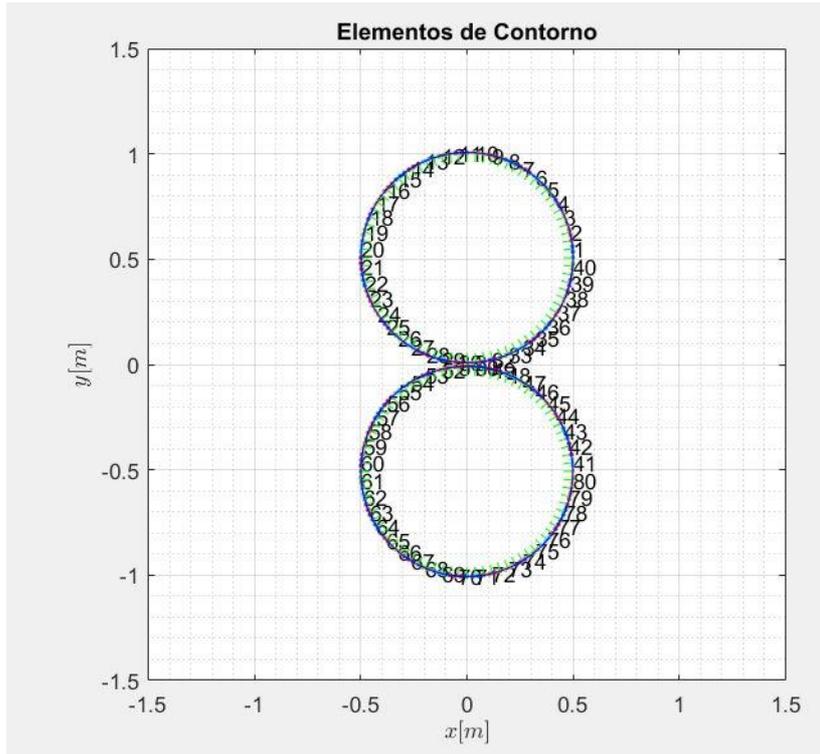


Figura 6.63. Elementos de contorno de 2 círculos juntos

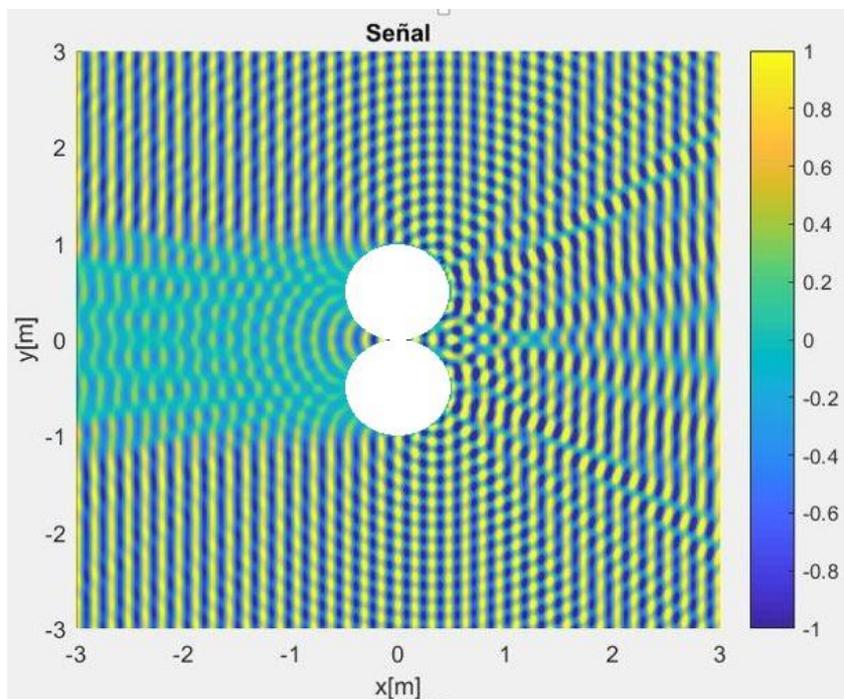


Figura 6.64. Señal frente a 2 círculos juntos

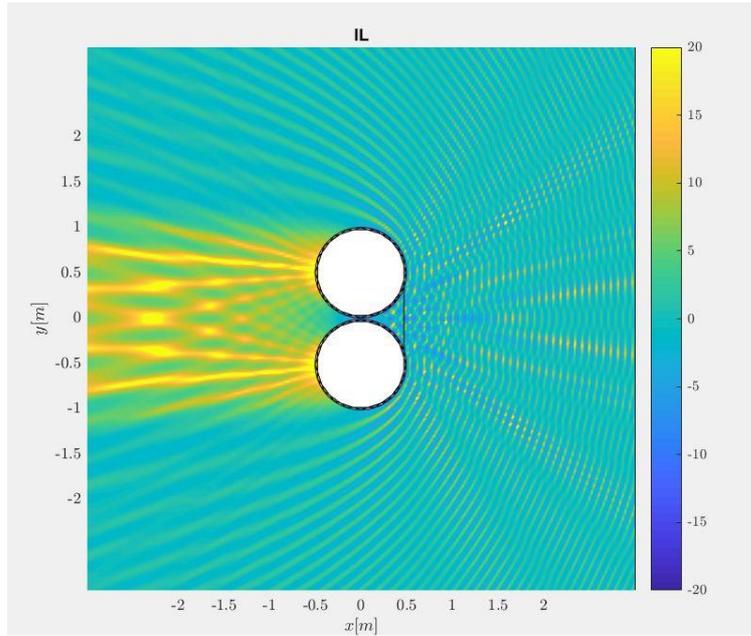


Figura 6.65. Pérdidas de inserción frente a 2 círculos

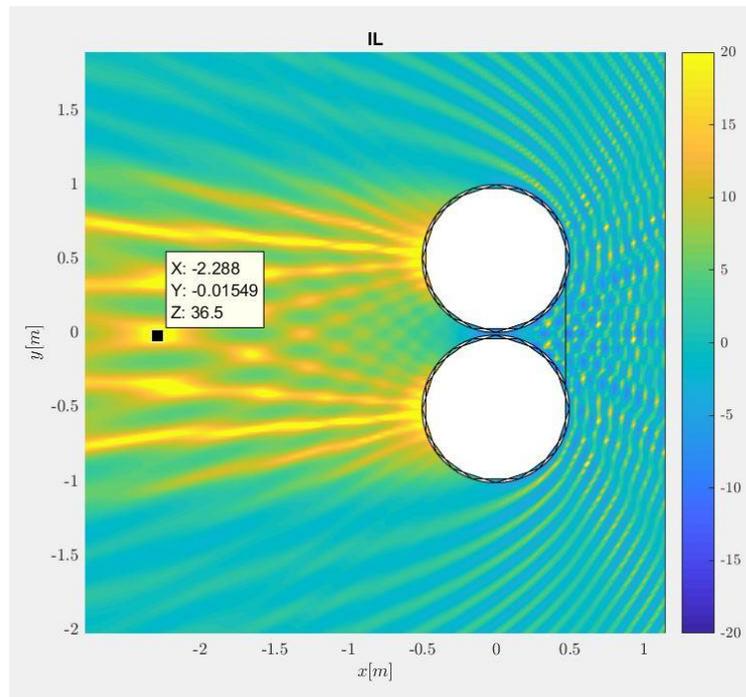


Figura 6.66. Max. IL frente a 2 círculos juntos

Donde puede verse que el método obtiene la solución de manera aceptable, reproduciendo correctamente la solución incluso en la zona de contacto entre ambos objetos.

6.1.2.4.8. 2 Cavidades triangulares

A continuación se pasa a realizar el mismo problema sustituyendo los obstáculos circulares por triangulares.

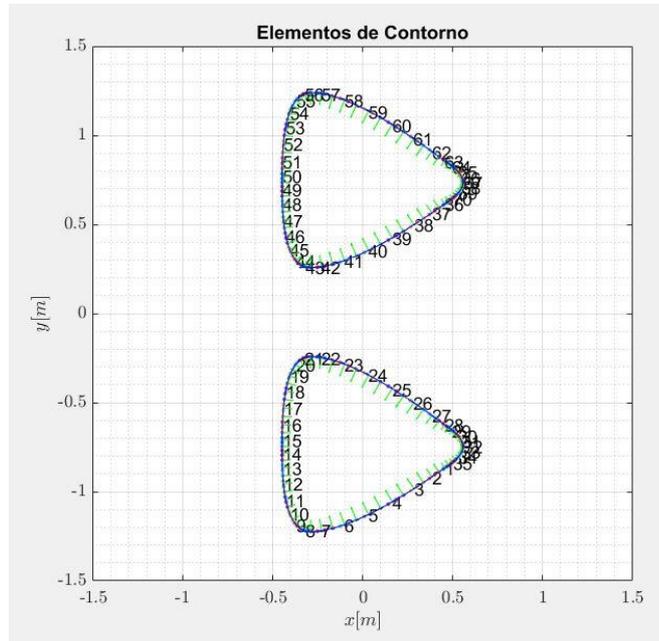


Figura 6.67. Elementos de contorno 2 triángulos

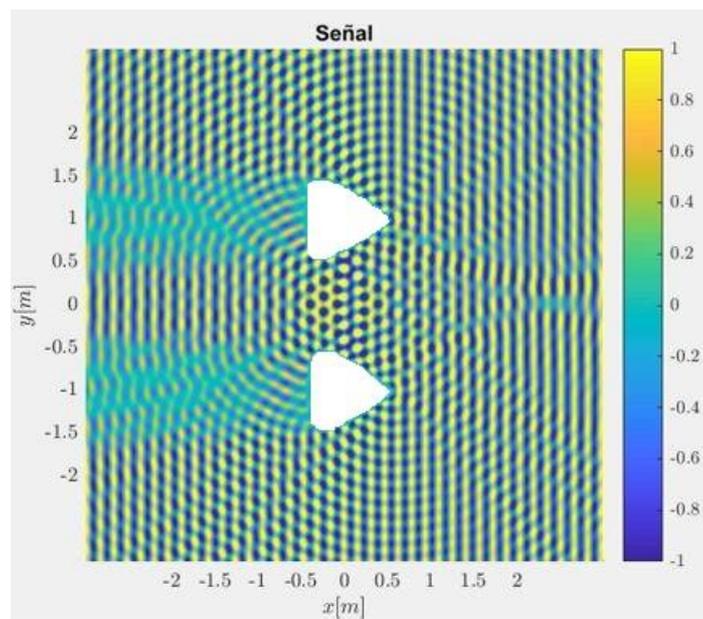


Figura 6.68. Señal frente a 2 triángulos

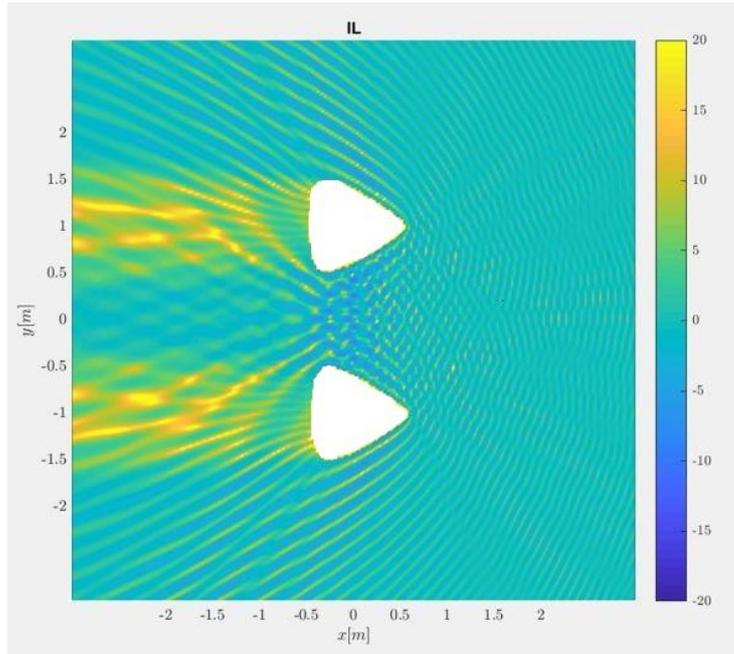


Figura 6.69. Pérdidas de inserción frente a 2 triángulos

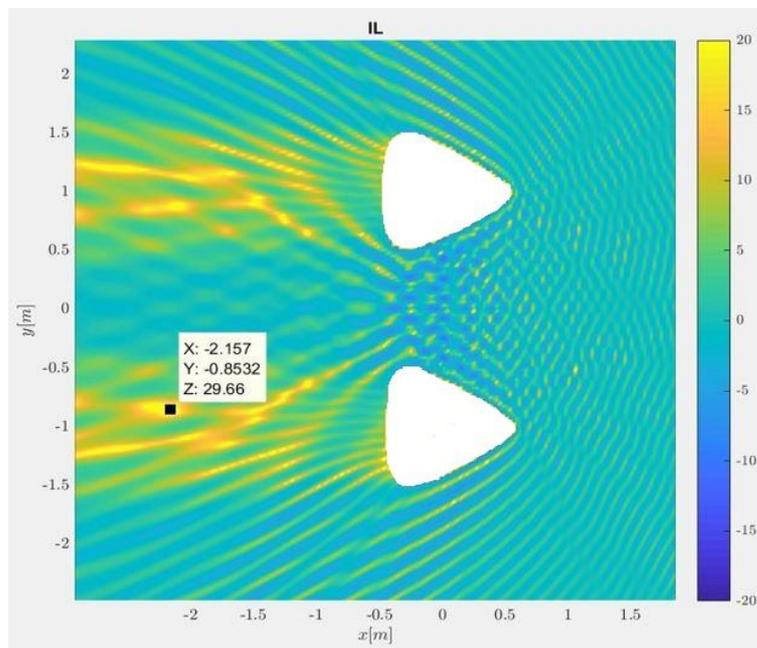


Figura 6.70. Max. IL frente a 2 triángulos

En este caso, los resultados a diferencia del problema con obstáculos individuales no mejoran a los resultantes del caso circular. Esto viene dado por el hecho de que al combinarse ambos triángulos, la forma efectiva del conjunto cambia, perdiendo las ventajas por las cuales se había optado por ella en el capítulo anterior.

Utilizando los triángulos óptimos del análisis de obstáculos individuales se obtienen los siguientes resultados:

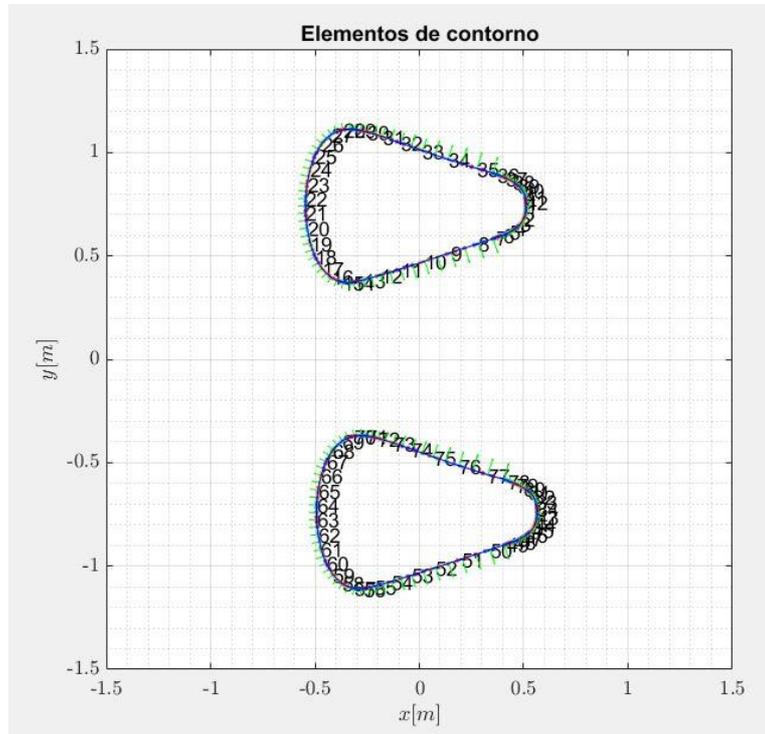


Figura 6.71. Elementos de contorno 2 triángulos óptimos

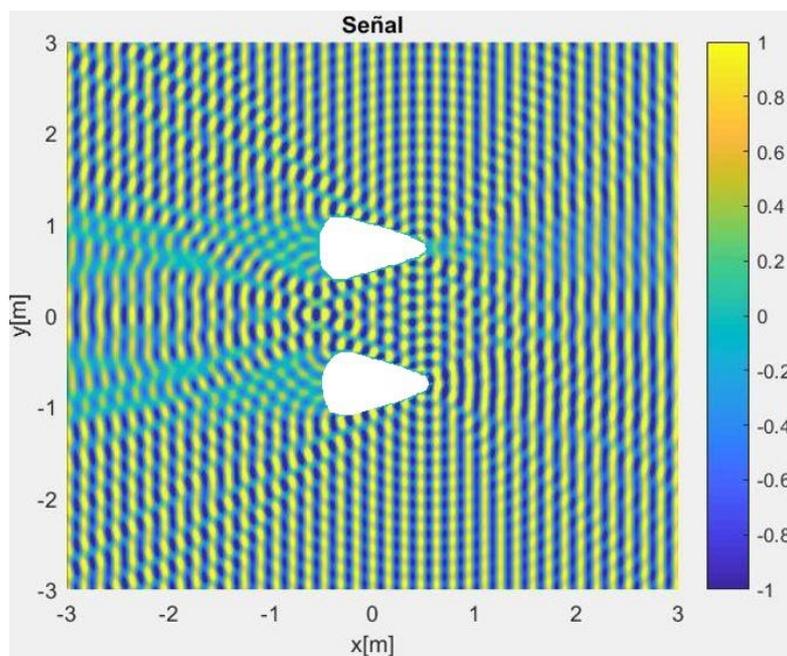


Figura 6.72. Señal 2 triángulos óptimos

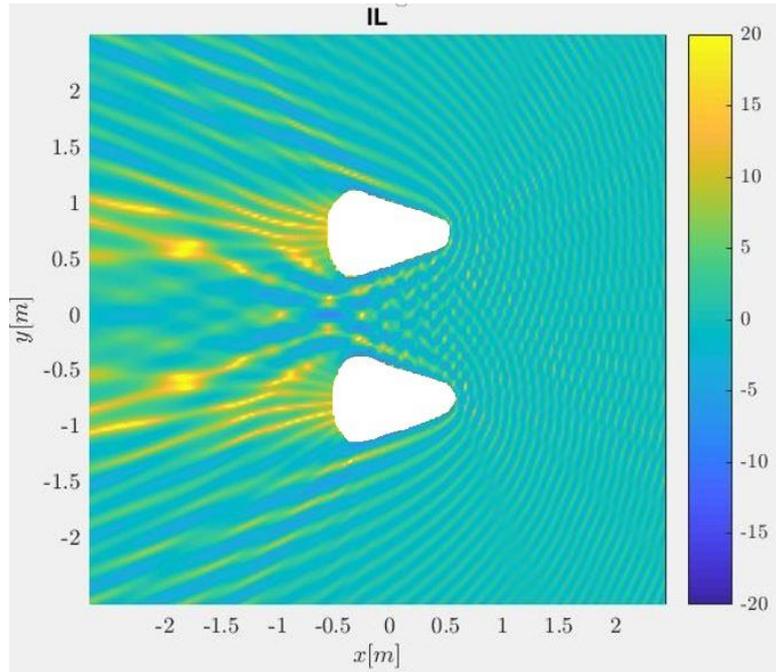


Figura 6.73. IL 2 triángulos óptimos

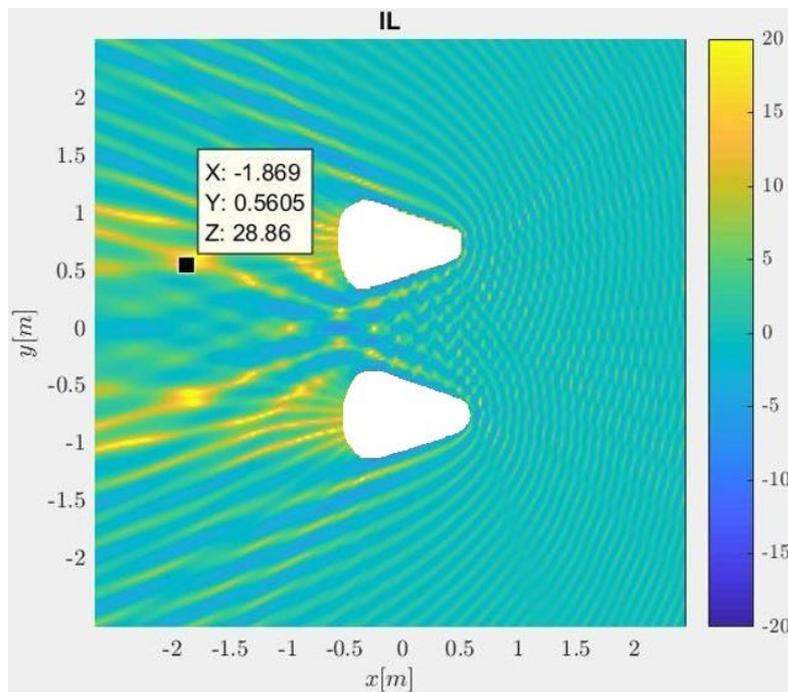


Figura 6.74. Máx. IL 2 triángulos óptimos

Donde pueden observarse pérdidas máximas de 28.86 dB, lo cual prácticamente coincide con los valores de máximas pérdidas del problema con dos obstáculos circulares, ya que como se comentaba anteriormente, la forma efectiva de estos dos triángulos provocan la pérdida de las propiedades que minimizaban las pérdidas en el caso individual.

6.1.2.4.9. 3 Cavidades circulares

El siguiente modelo a analizar es el conformado por tres círculos, uno colocado de forma más adelantada a los otros dos, quedando este primero a la altura del hueco dejado por los círculos traseros, tal y como puede verse en las siguientes figuras.

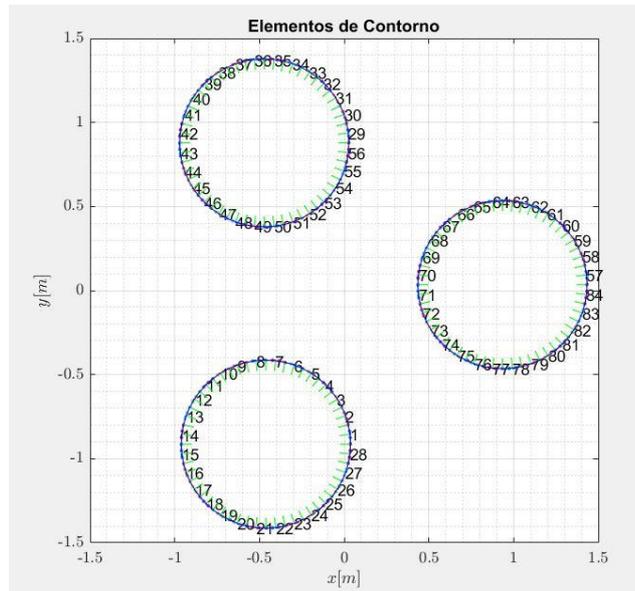


Figura 6.75. Elementos de contorno de 3 círculos

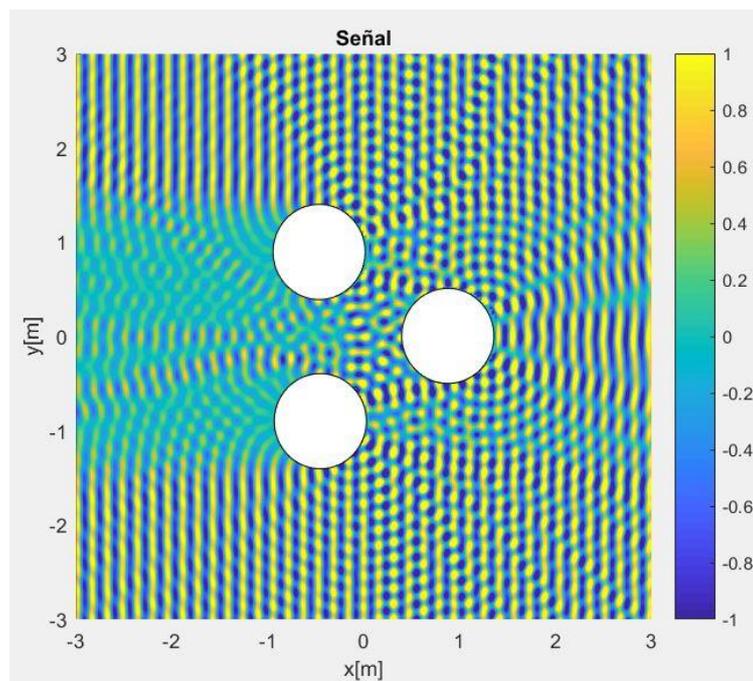


Figura 6.76. Señal frente a 3 círculos

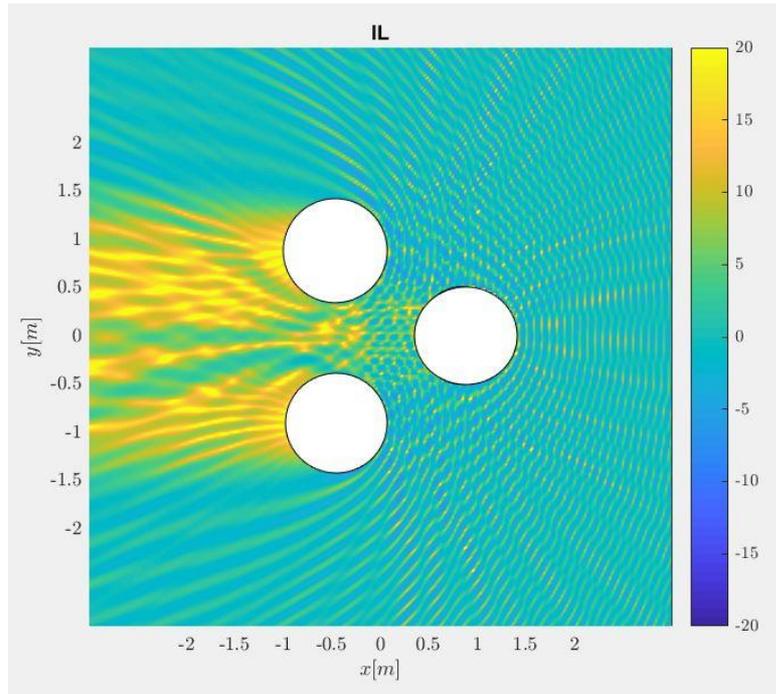


Figura 6.77. Pérdidas de inserción frente a 3 círculos

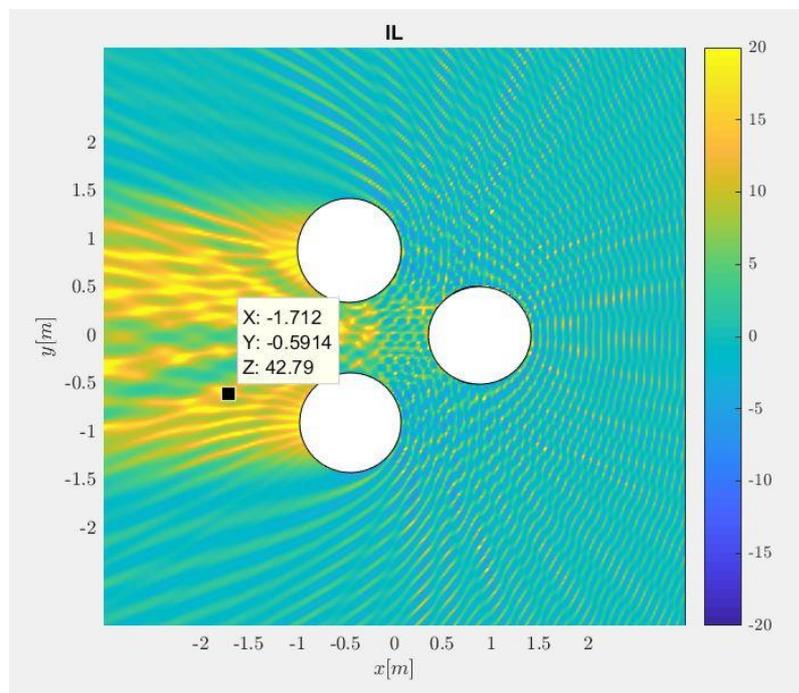


Figura 6.78. Max. IL frente a 3 círculos

Tras representar los resultados se ha localizado el máximo cuyo valor asciende 42.79, situado en una zona de la estela algo más adelantada que en el caso de dos obstáculos, zona donde se acoplan las pérdidas tanto de las dos esferas situadas en la zona trasera como de la situada delante.

6.1.2.4.10. 3 Cavidades triangulares

Nuevamente se sustituyen los obstáculos circulares por los triángulos, quedando los siguientes resultados.

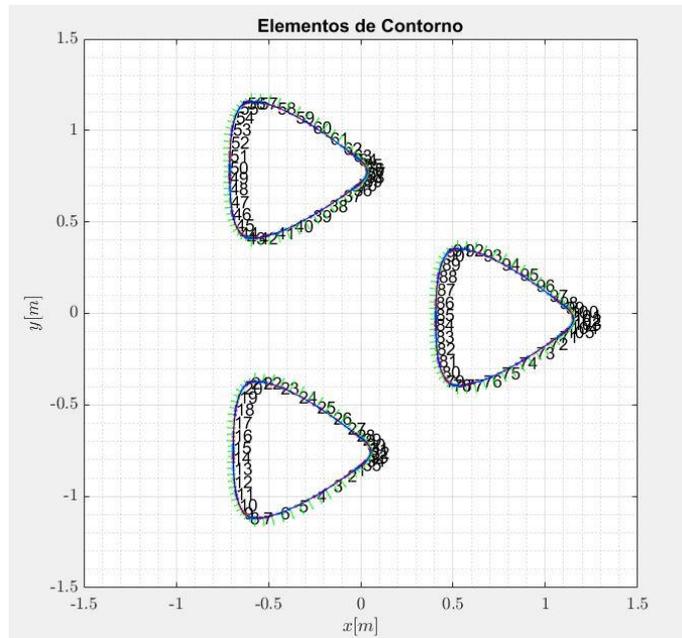


Figura 6.79. Elementos de contorno 3 triángulos

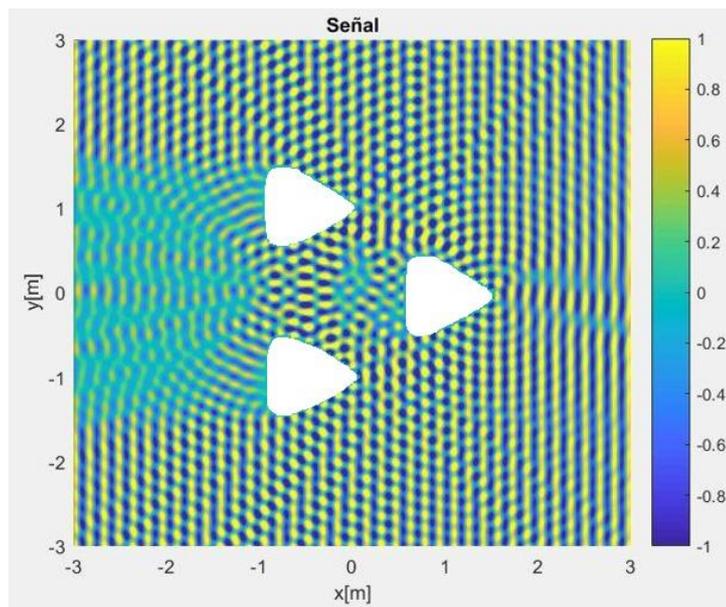


Figura 6.80. Señal frente a 3 triángulos

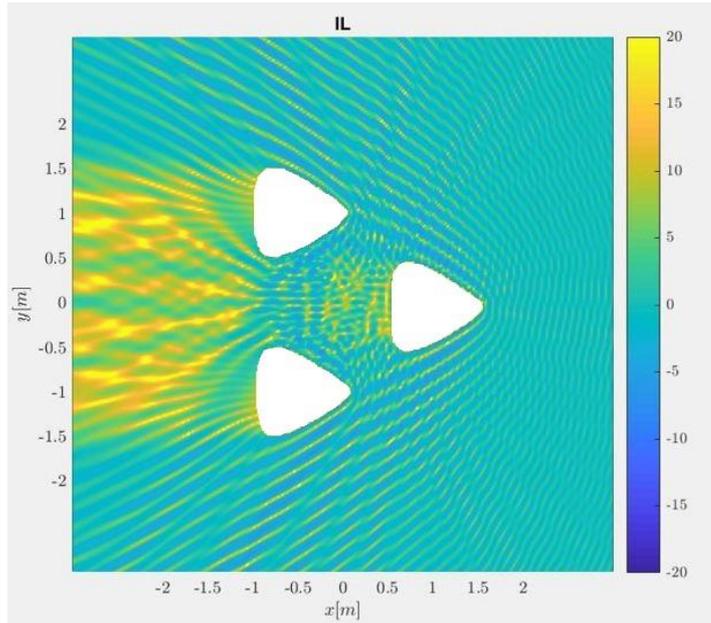


Figura 6.81. Pérdidas de inserción frente a 3 triángulos

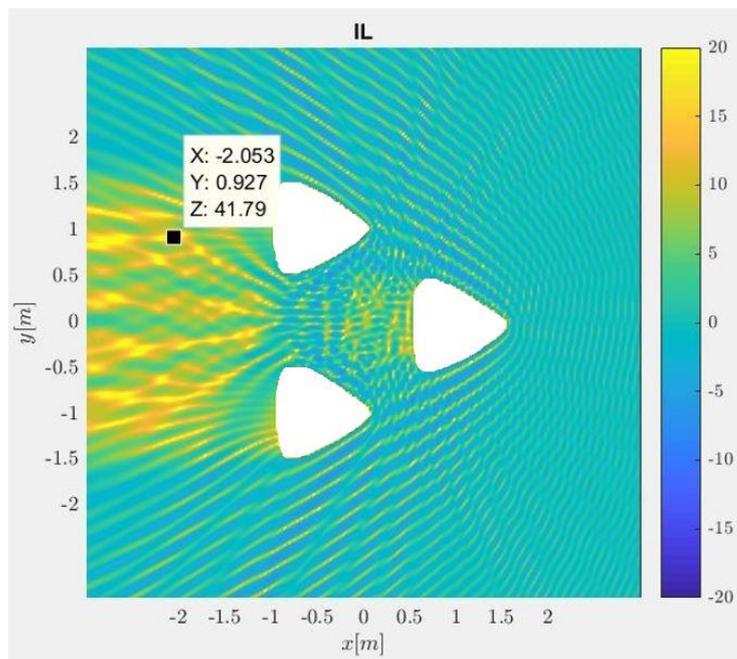


Figura 6.82. Max IL frente a 3 triángulos

Donde se observa que en este caso al alcanzarse valores de pérdidas máximos de 41.79 la configuración con triángulos si mejora a la configuración con círculos. Esto se debe a que la forma efectiva que resulta de la colocación de los obstáculos triangulares se asemeja más a la geometría del obstáculo óptimo individual obtenido en el capítulo anterior.

Probando con los triángulos para los que se obtuvo la configuración óptima individual se obtiene:

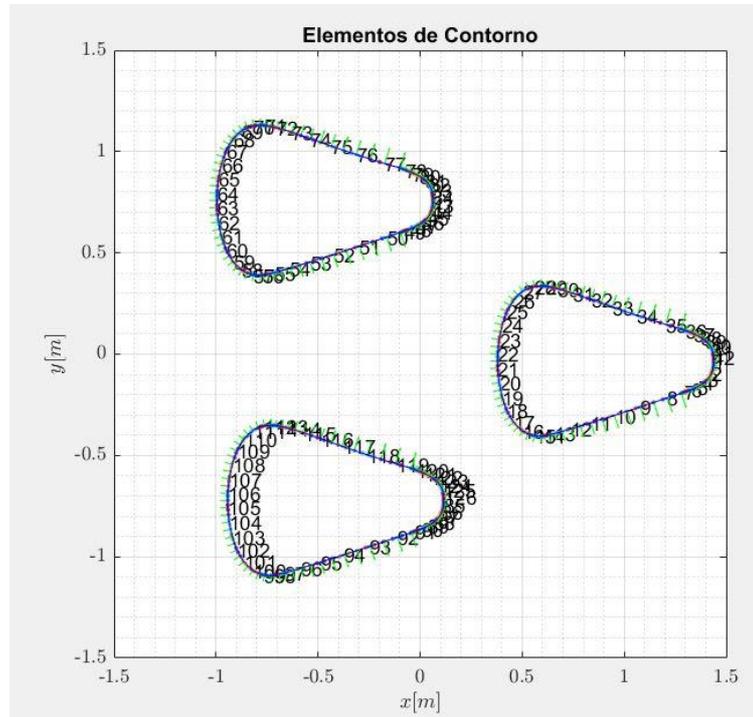


Figura 6.83. Elementos de contorno 3 triángulos óptimos

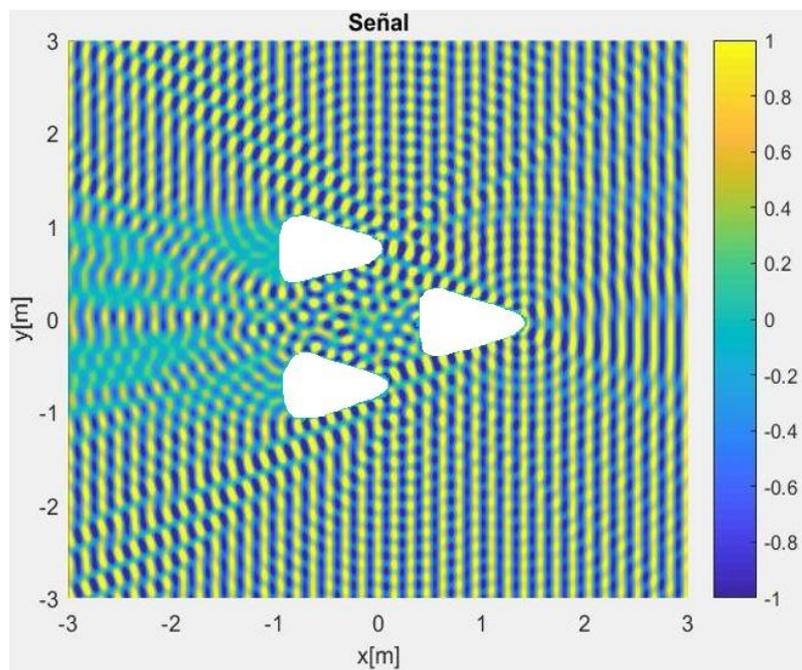


Figura 6.84. Señal 3 triángulos óptimos

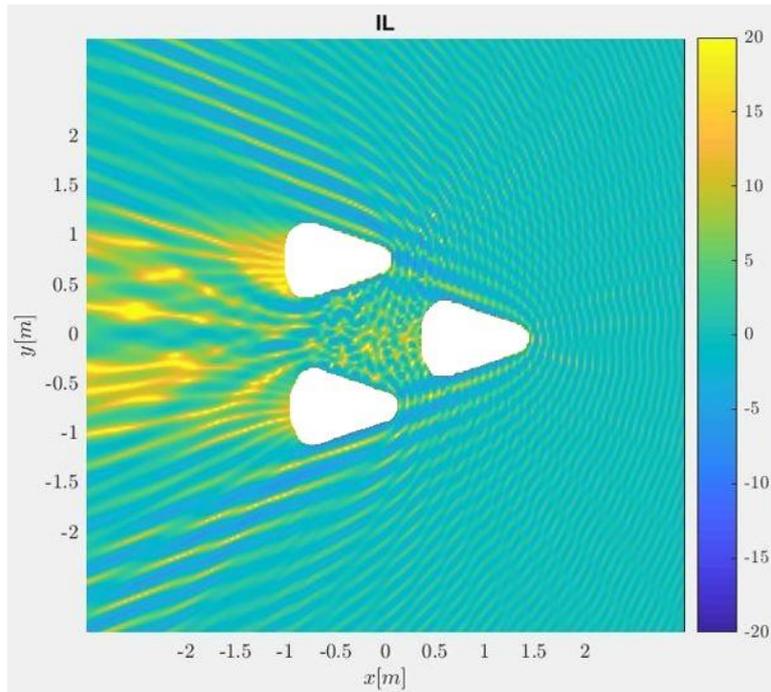


Figura 6.85. IL 3 triángulos óptimos

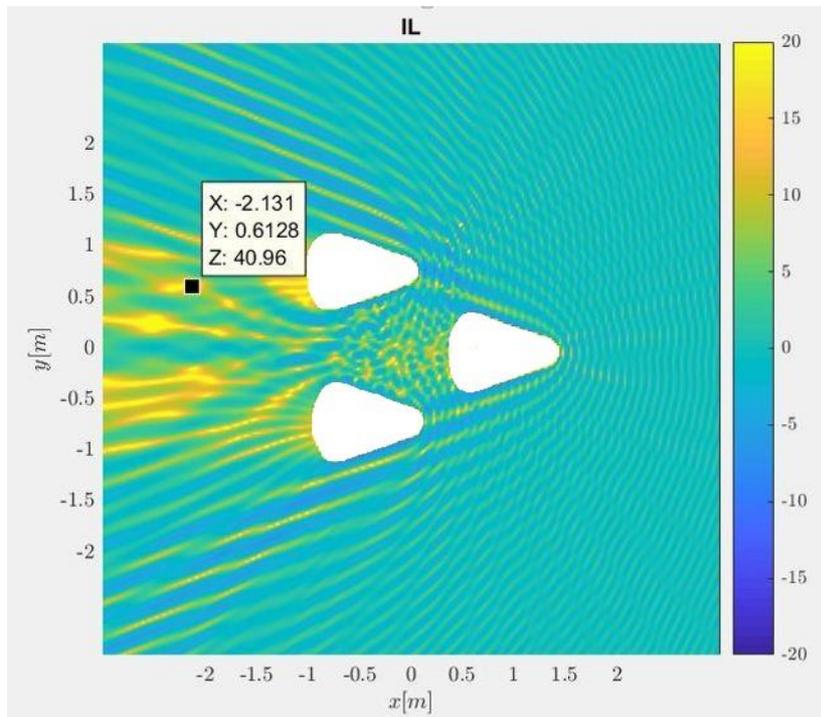


Figura 6.86. Máx. IL 3 triángulos óptimos

Así mismo vemos que en el caso de 3 triángulos formando una disposición en punta de flecha, al alcanzar una forma equivalente a la de un triángulo individual, los resultados mejoran a los del problema consistente en 3 obstáculos circulares, en este caso se alcanzan unas pérdidas máximas de 40.96 dB.

6.1.2.4.11. 4 Cavidades circulares

Por último se procede a estudiar el problema en el que 4 obstáculos circulares colocados por parejas dos delante y dos detrás como se presenta a continuación.

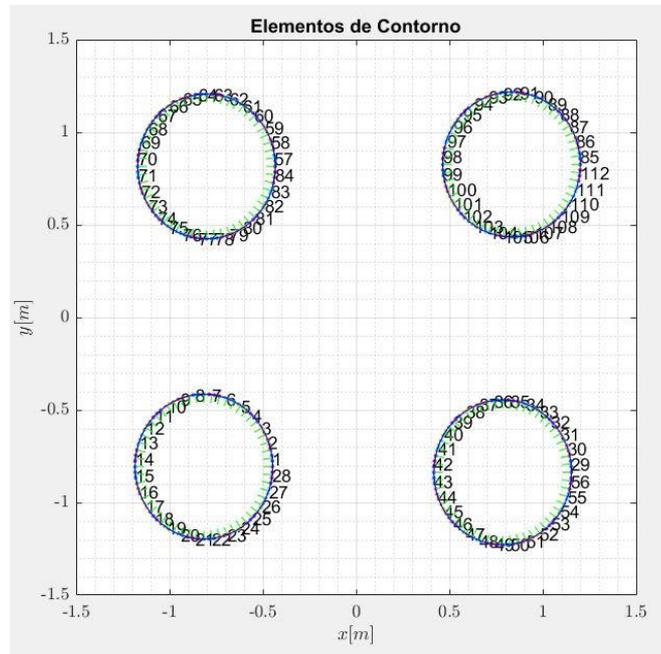


Figura 6.88. Elementos de contorno 4 círculos

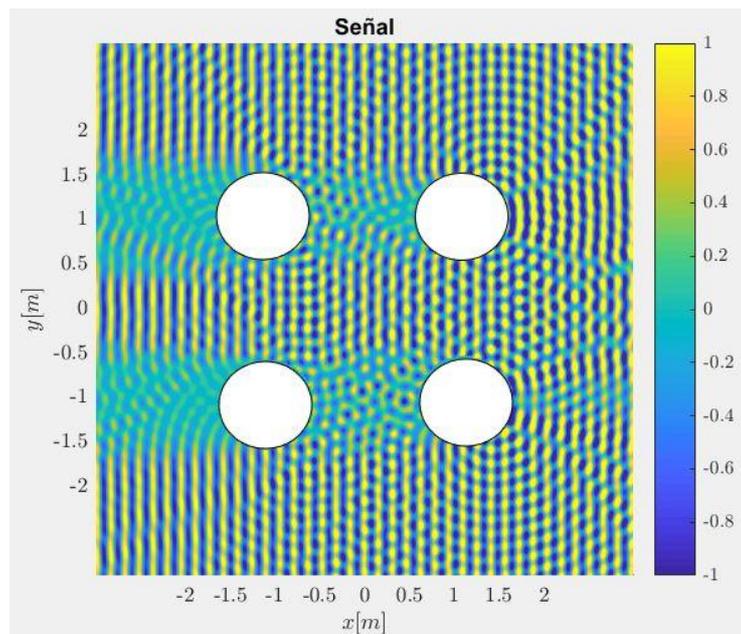


Figura 6.89. Señal frente a 4 círculos

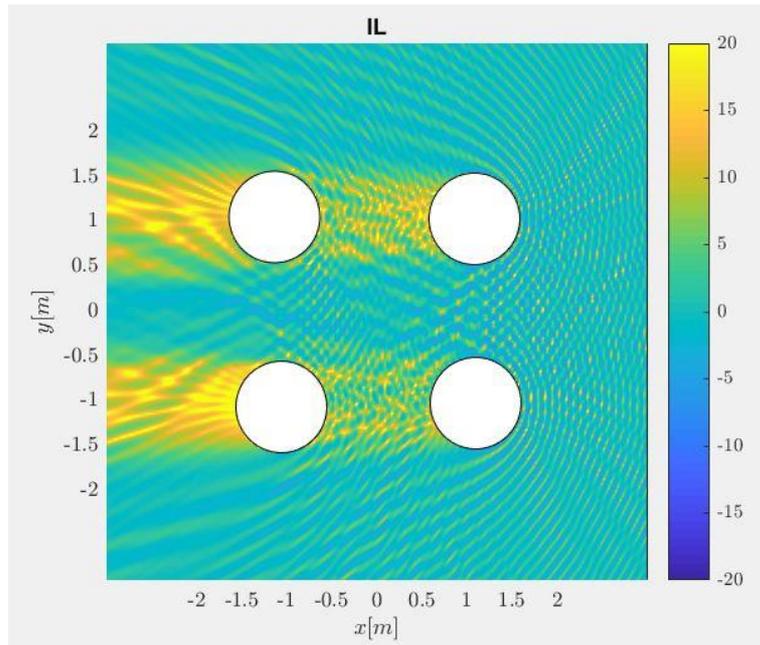


Figura 6.90. Pérdidas de inserción frente a 4 círculos

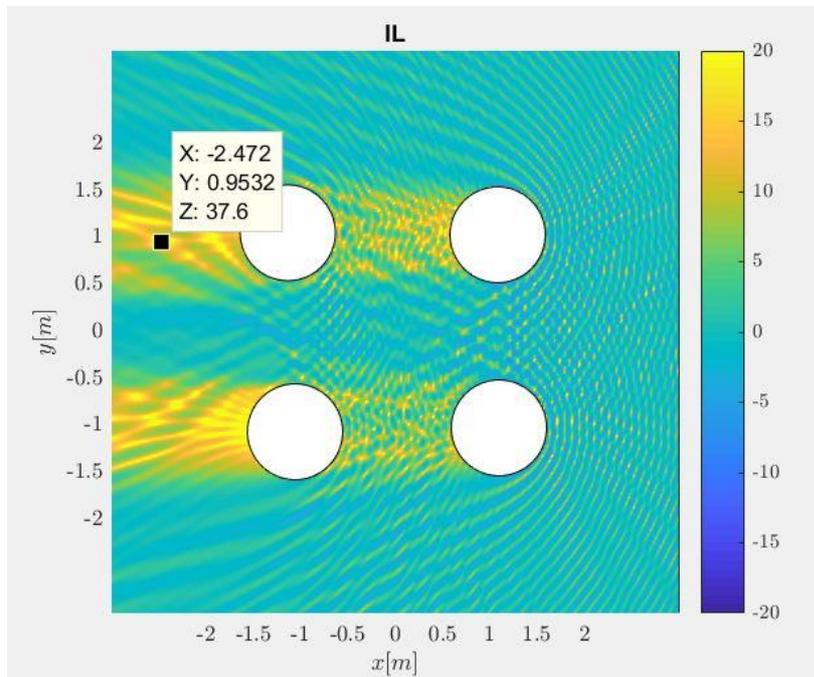


Figura 6.91. Max. IL frente a 4 círculos

Para este último caso se obtienen unas pérdidas de 37.5 dB. Llegados a este punto del estudio, la capacidad de cálculo de las herramientas informáticas utilizadas producen fallos debidos al aumento de las solicitaciones del método, es por ello que se determina terminar el estudio en este punto.

6.2. Perfiles NACA

Para finalizar el trabajo se ha realizado un estudio del efecto sobre las ondas acústicas de la presencia de perfiles NACA, a continuación, se presenta una pequeña introducción sobre la definición de las características principales mediante su denominación de 4 caracteres y cómo se han implementado sus geometrías, calculando los nodos de las curvas de Bézier que los delimitan.

Nomenclatura NACA

Para comenzar se describen los perfiles NACA simétricos, aquellos en los que la línea media del perfil es una recta que une el borde de ataque con el borde de salida.

Los cuatro dígitos que aparecen en la nomenclatura de NACA representan, de izquierda a derecha:

La máxima cota de la línea media del perfil (0 en perfiles simétricos), la posición de máxima curvatura con respecto al borde de ataque en unidades de decenas de tanto por ciento de la cuerda (0 en perfiles simétricos) y los dos últimos dígitos representan el máximo espesor en tanto por ciento de la cuerda (t/c) [28].

Los perfiles NACA de cuatro dígitos definen su geometría mediante los parámetros que se presentan en la siguiente figura:

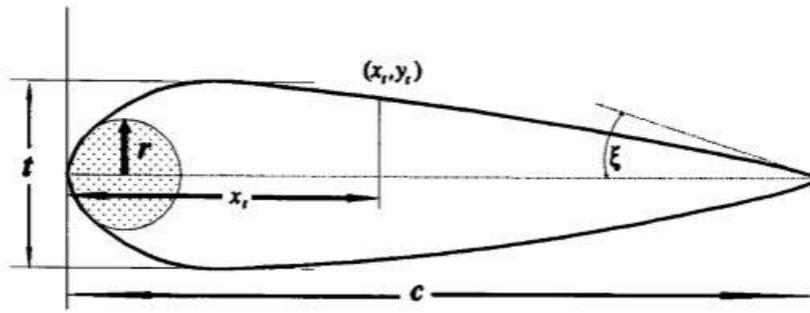


Figura 6.92. Geometría perfil NACA

Donde:

c : cuerda del perfil

t : máximo espesor del perfil

r : radio borde de ataque

ξ : ángulo borde de salida

La relación de dichos parámetros con el contorno del perfil y_t obtenida de forma experimental:

$$\pm y_t = \frac{t}{0.2} * (0.2969 * \sqrt{x} - 0.126x - 0.3516x^2 + 0.2843x^3 - 0.1015x^4) \quad (25)$$

Y su derivada

$$\pm y'_t = \frac{t}{0.2} * \left(\frac{0.14845}{\sqrt{x}} - 0.126 - 0.7032x + 0.8529x^2 - 0.406x^3 \right) \quad (26)$$

Que se relaciona con los parámetros geométricos del perfil siguiendo las siguientes expresiones:

$$r = 1.1019t^2$$

$$\tan(\xi) = y'(1) = -1.16925t$$

Las posiciones de los nodos de las curvas de Bézier se obtienen de las siguientes gráficas [29] y se recopilan en la tabla (1).

Curvas de Bézier del borde de ataque del perfil:

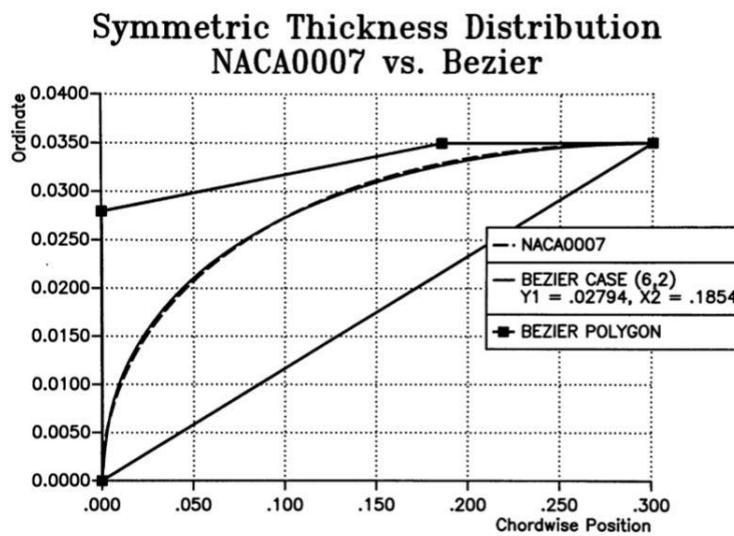


Figura 6.93. Curvas Bézier NACA0007 B.A.

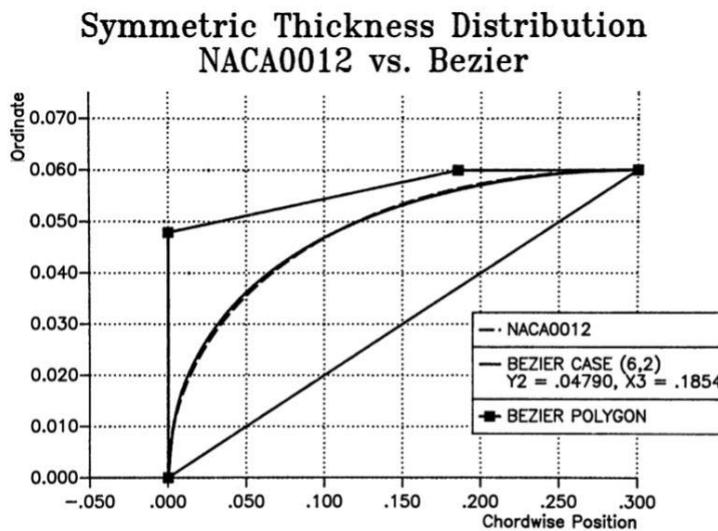


Figura 6.94. Curvas Bézier NACA0012 B.A.

Symmetric Thickness Distribution NACA0020 vs. Bezier

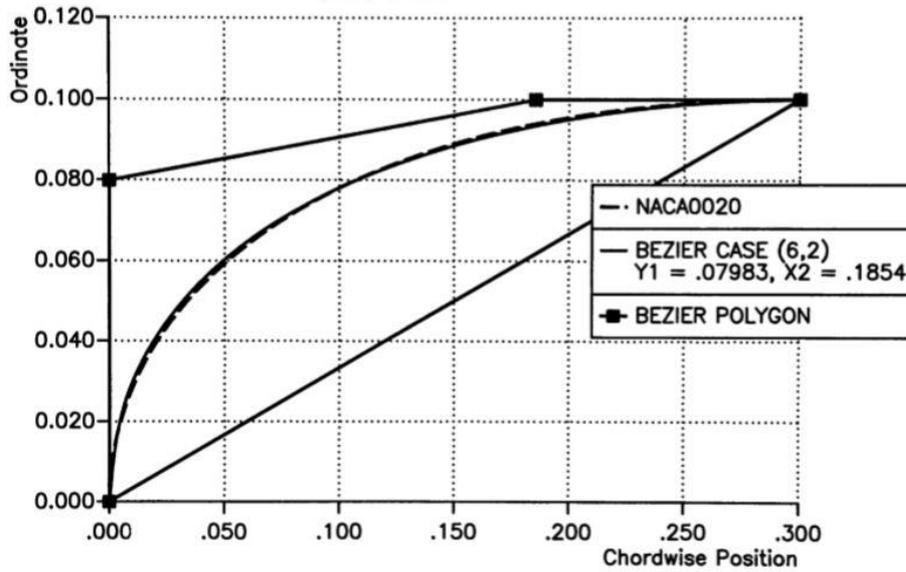


Figura 6.95. Curvas Bézier NACA0020 B.A.

Curvas de Bézier del borde de ataque del perfil:

Trailing Edge - Symmetric Thickness Distribution NACA Four-Digit vs. Bezier

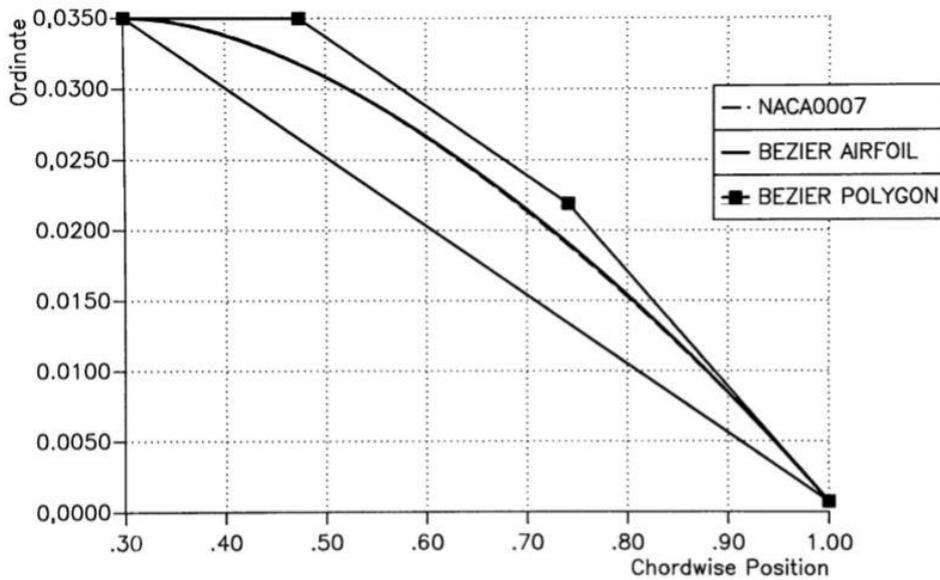


Figura 6.96. Curvas Bézier NACA0007 B.S.

Symmetric Thickness Distribution NACA0012 vs. Bezier

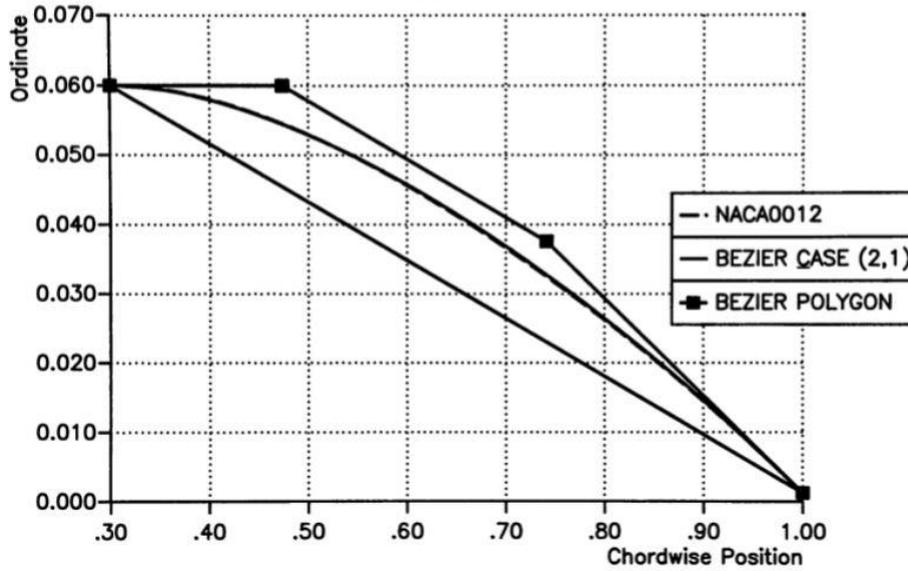


Figura 6.97. Curvas Bézier NACA0012 B.S.

Trailing Edge - Symmetric Thickness Distribution NACA Four-Digit vs. Bezier

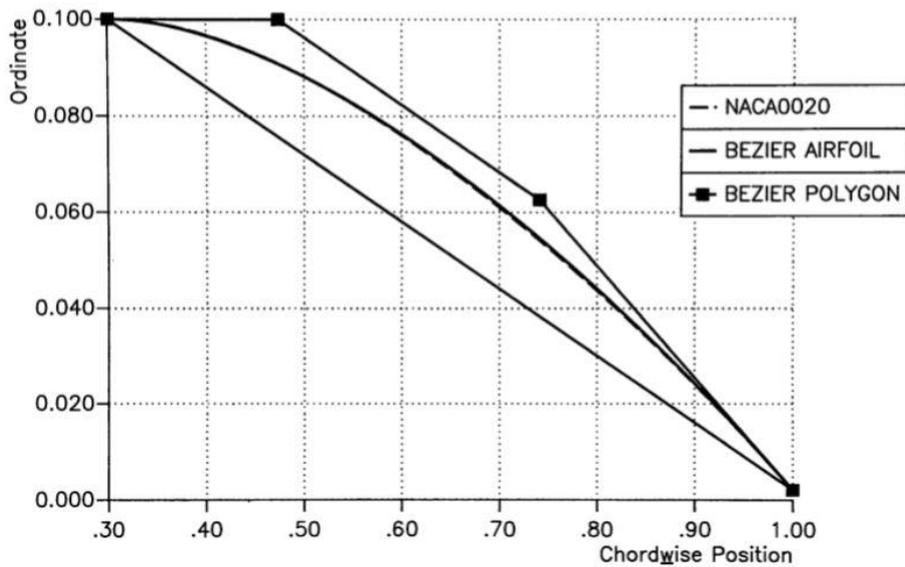


Figura 6.98. Curvas Bézier NACA0020 B.S.

En la siguiente tabla se presentan las coordenadas de los nodos (los superiores al ser simétricos) para perfiles NACA simétricos:

NACA	N1(B.A.)	N2(B.A.)	N3(B.A.)	N4(B.A.)	N1(B.S.)	N2(B.S.)	N3(B.S.)	N4(B.S.)
0007	(0,0)	(0,0.028c)	(0.18c,0.035c)	(0.3c,0.035c)	(0.3c,0.035c)	(0.475c,0.035c)	(0.745c,0.225c)	(c,0)
0012	(0,0)	(0,0.048c)	(0.18c,0.06c)	(0.3c,0.06c)	(0.3c,0.06c)	(0.475c,0.06c)	(0.745c,0.038c)	(c,0)
0020	(0,0)	(0,0.08c)	(0.18c,0.1c)	(0.3c,0.1c)	(0.3c,0.1c)	(0.475c,0.1c)	(0.745c,0.064c)	(c,0)

A continuación se adjuntan los resultados obtenidos para un perfil NACA 0007:

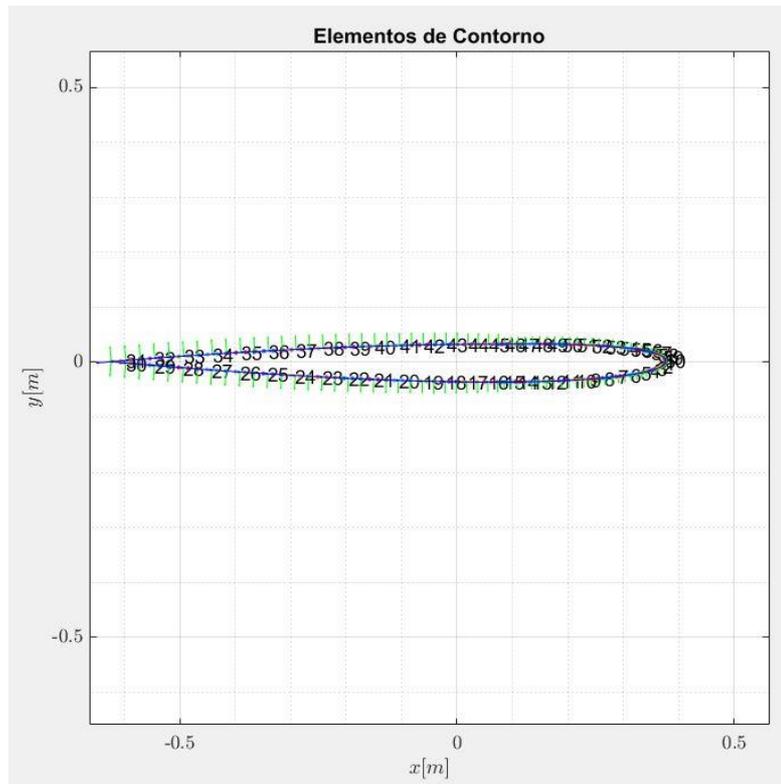


Figura 6.99. Elementos de Contorno NACA 0007

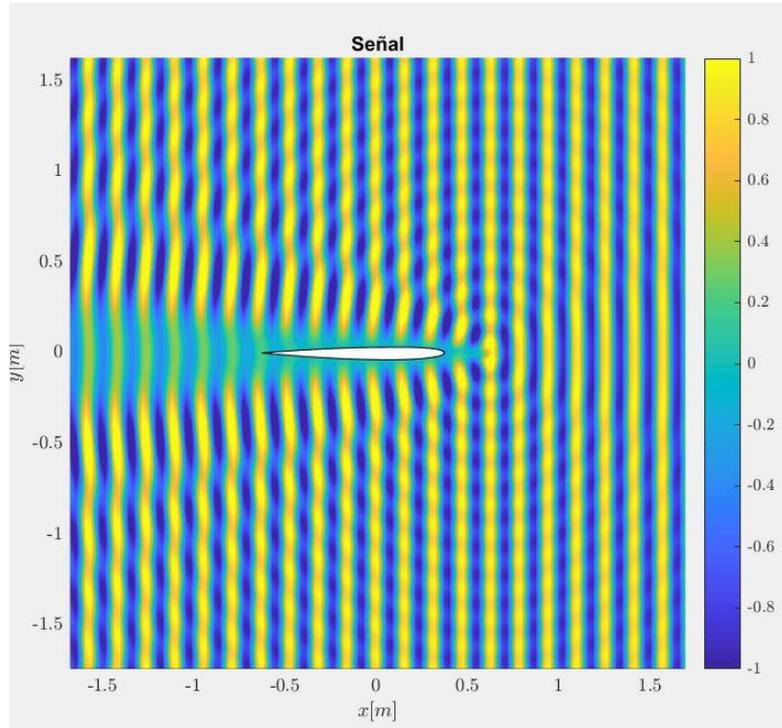


Figura 6.100. Señal NACA 0007

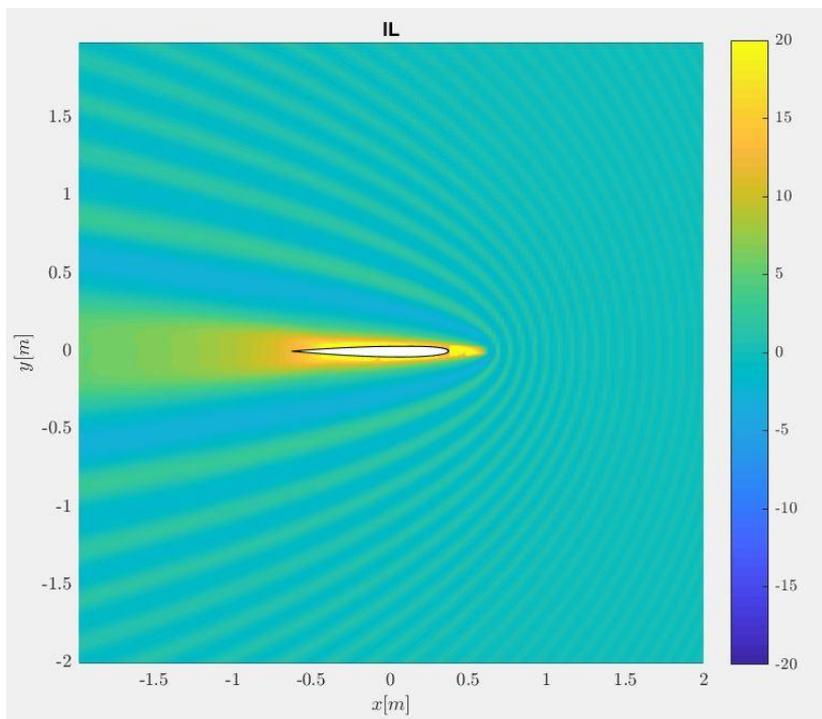


Figura 6.101. IL NACA 0007

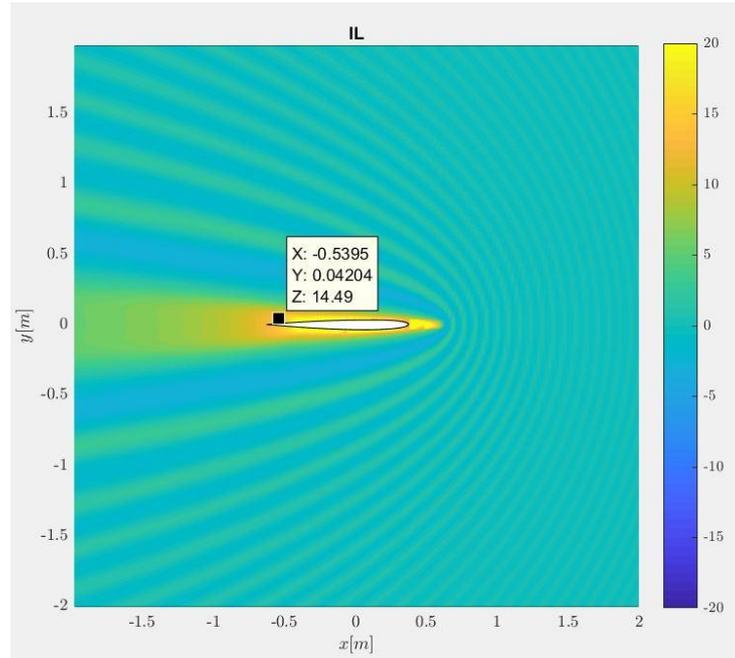


Figura 6.102. Max. IL NACA 0007

Puede observarse cómo las pérdidas son mucho menores a las obtenidas con el diseño manual utilizada hasta esta altura del trabajo, teniéndose pérdidas por inserción de 14.49 dB (frente a los 27 dB del valor óptimo obtenido para un obstáculo individual).

A su vez, los resultados ofrecidos por un perfil NACA 0012 son los siguientes:

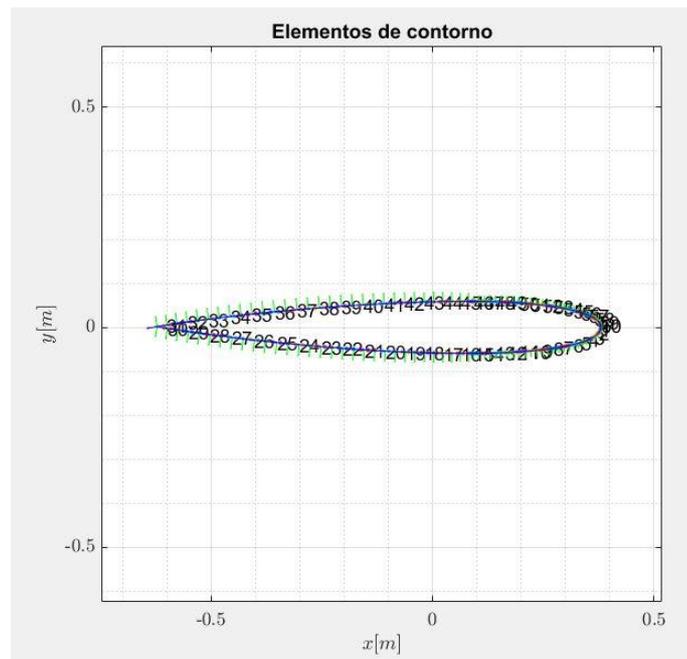


Figura 6.103. Elementos de Contorno NACA 0012

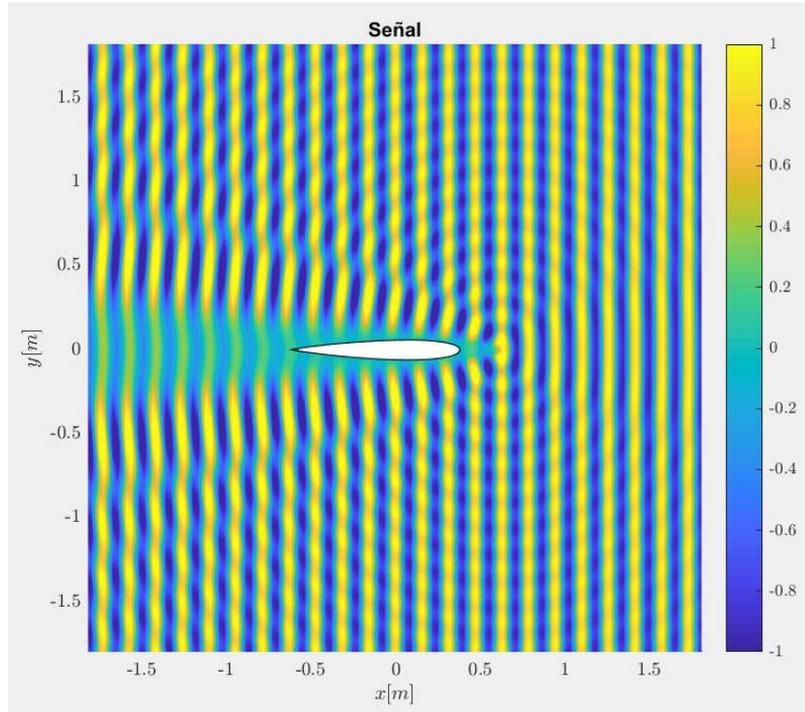


Figura 6.104. Señal NACA 0012

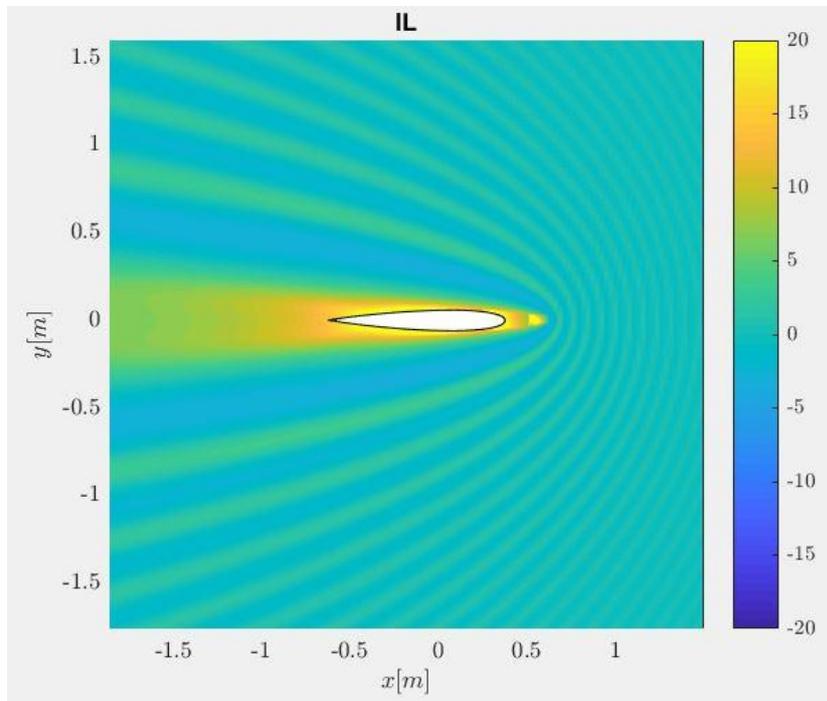


Figura 6.105. IL NACA 0012

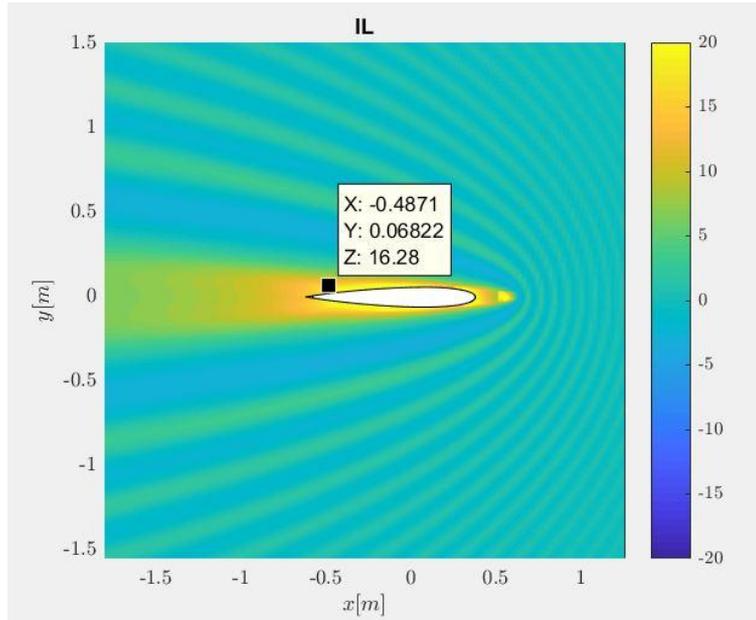


Figura 6.106. Max. IL NACA 0012

En este caso, los resultados al aumentar el espesor del perfil empeoran respecto al perfil NACA 0007, manteniéndose unos resultados mucho mejores a los obtenidos anteriormente.

Por último, se muestran los resultados de un perfil NACA 0020:

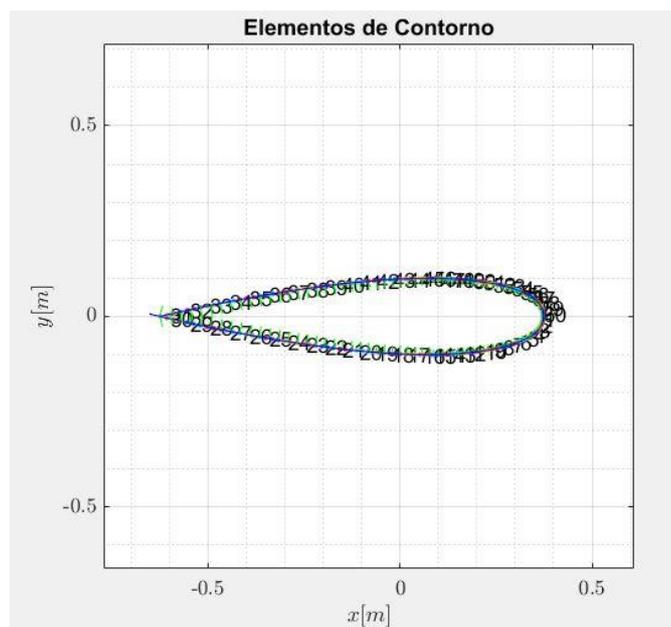


Figura 6.107. Elementos de Contorno NACA 0020

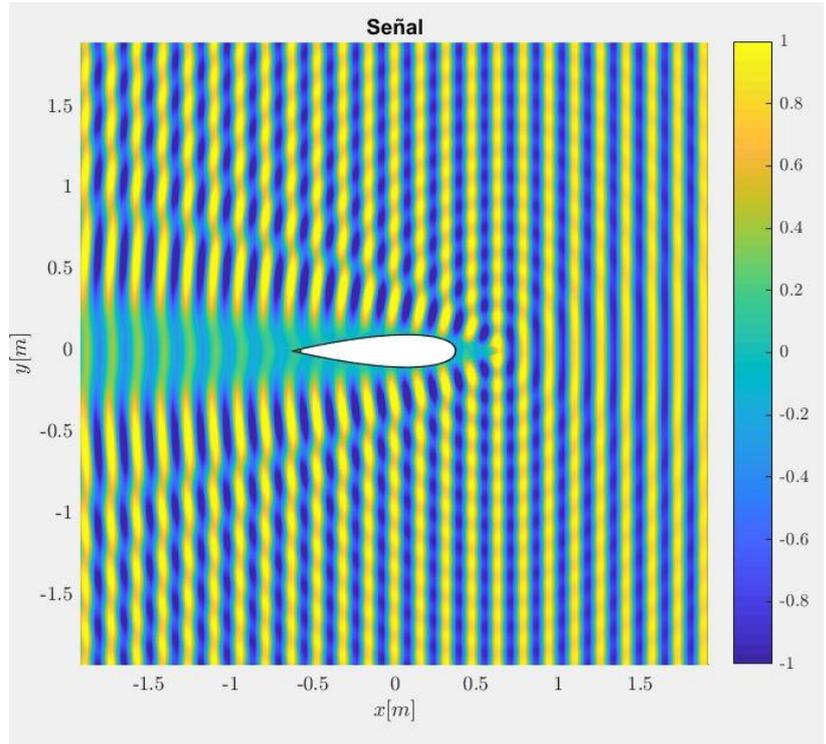


Figura 6.108. Señal NACA 0020

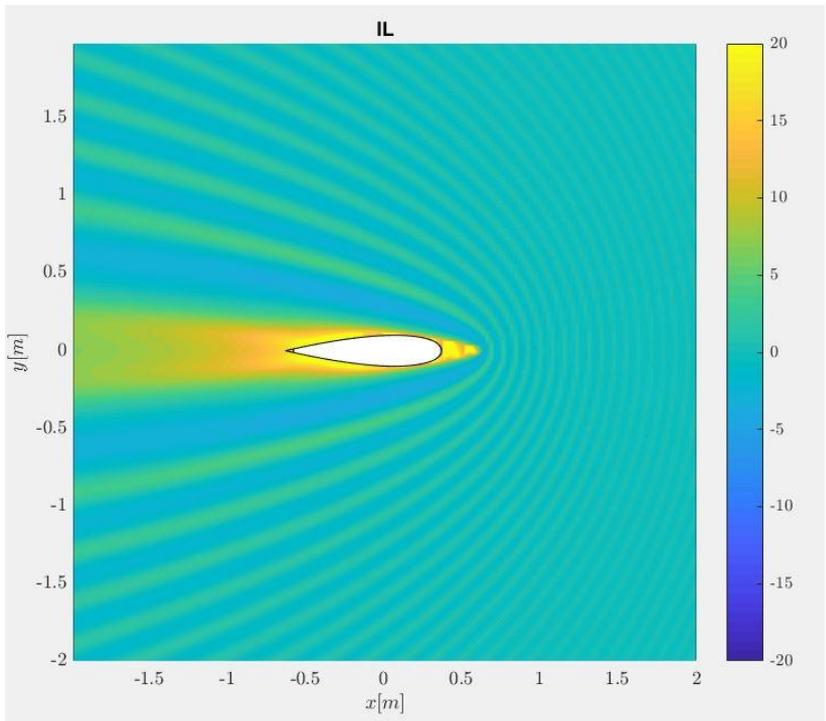


Figura 6.109. IL NACA 0020

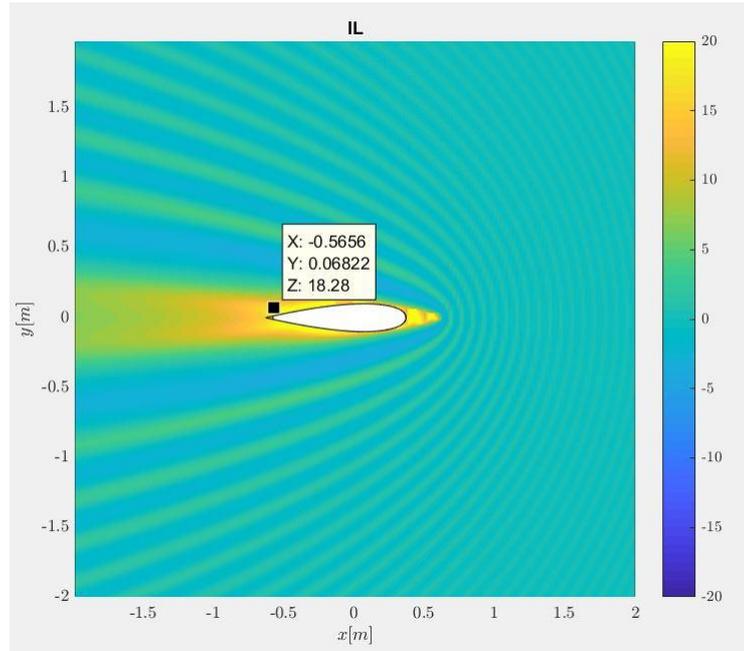


Figura 6.110. Max. IL NACA 0020

Los resultados del perfil NACA 0020 muestran la misma tendencia que los anteriores en los que se observa el aumento de las pérdidas por inserción con el espesor de los perfiles (en este caso, de 18.28 dB).

Como ejemplo se representa un perfil NACA 4711, es decir, un perfil no simétrico con una curvatura máxima en el 4% de la cuerda, en una distancia de $0.7c$ medida desde el borde de ataque y que posee un espesor máximo de un 11% de la cuerda, $t/c = 0.11$, cuyos resultados se muestran a continuación.

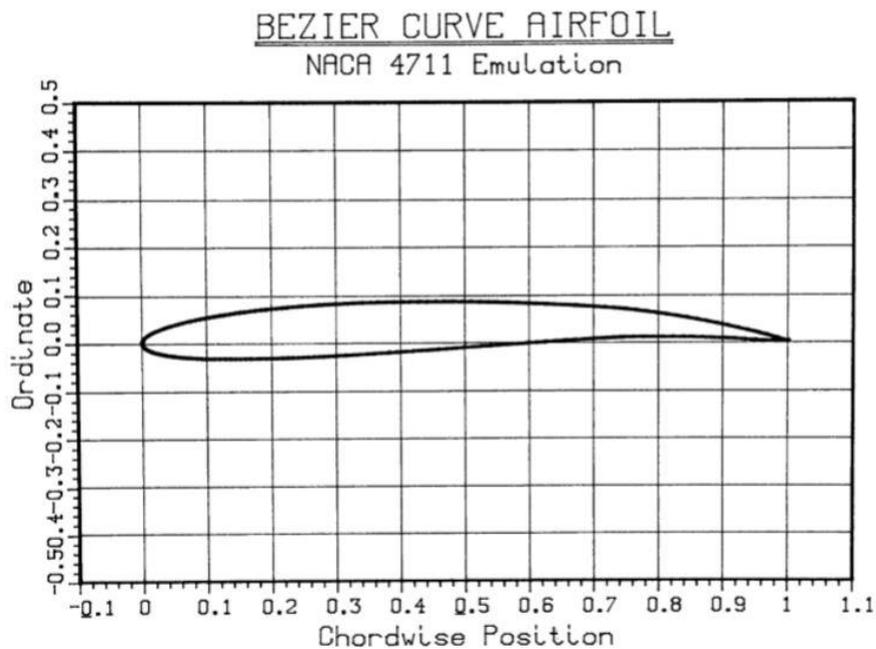


Figura 6.111. Geometría NACA 4711

A continuación se presentan los puntos de control del perfil NACA no simétrico 4711:

NACA	N1(B.A.)	N2(B.A.)	N3(B.A.)	N4(B.A.)=N1(B.S.)	N2(B.S.)	N3(B.S.)	N4(B.S.)
4711 extradós	(0,0)	(0,0.04c)	(0.187c,0.081c)	(0.4c,0.081c)	(0.66c,0.081c)	(0.8c,0.55c)	(c,0)
4711 intradós	(0,0)	(0,-0.027c)	(0.17c,-0.027c)	(0.3c,-0.027 c)	(0.583c,-0.11c)	(0.6c,0.03c)	(c,0)

A continuación se adjuntan los resultados obtenidos para un perfil NACA 4711:

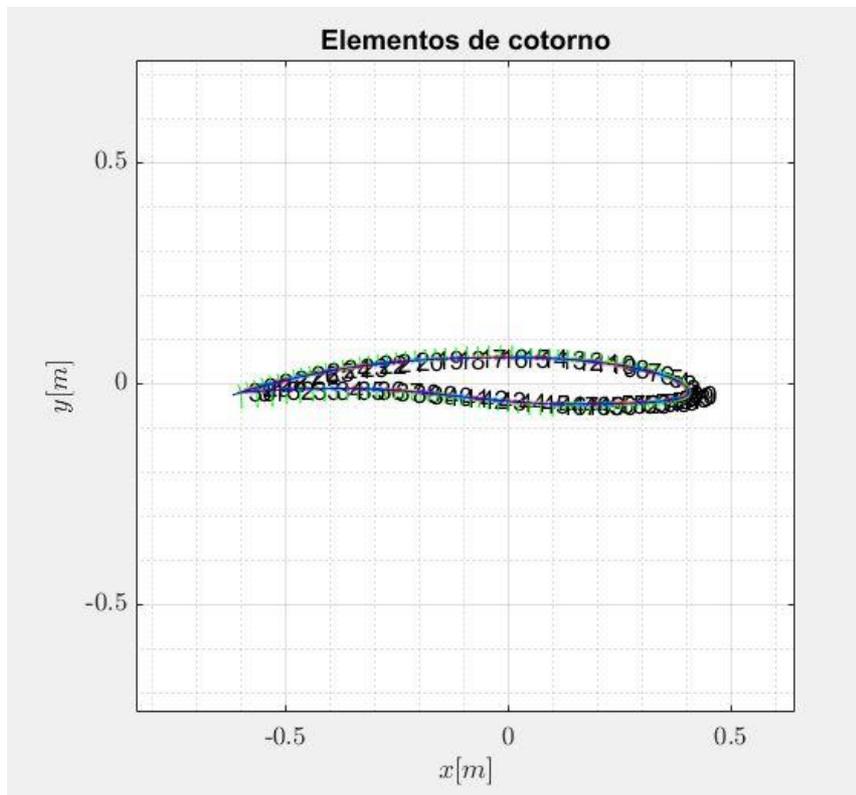


Figura 6.112. Elementos de Contorno NACA 4711

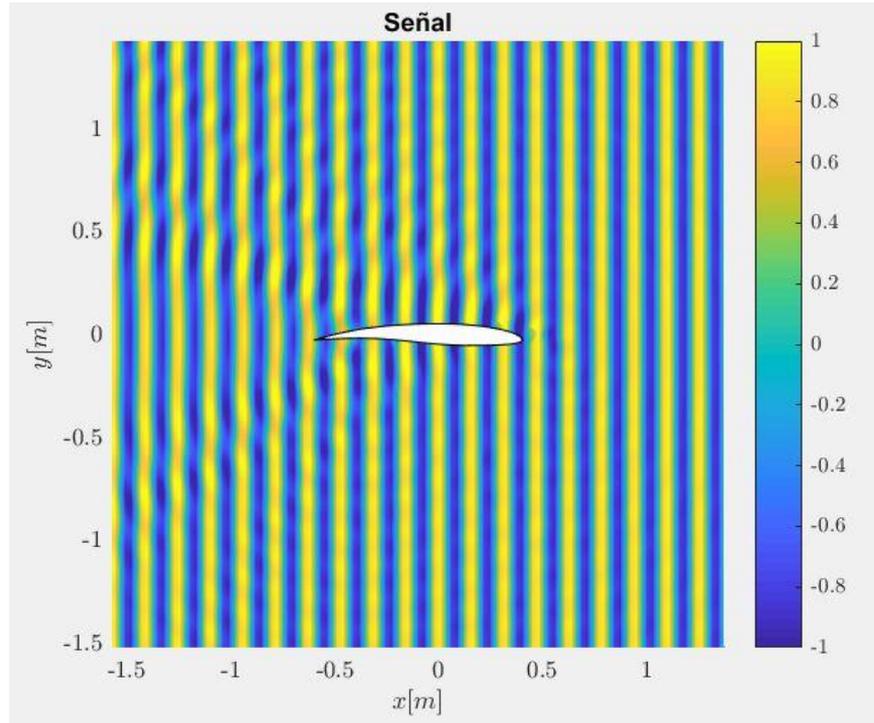


Figura 6.113. Señal NACA 4711

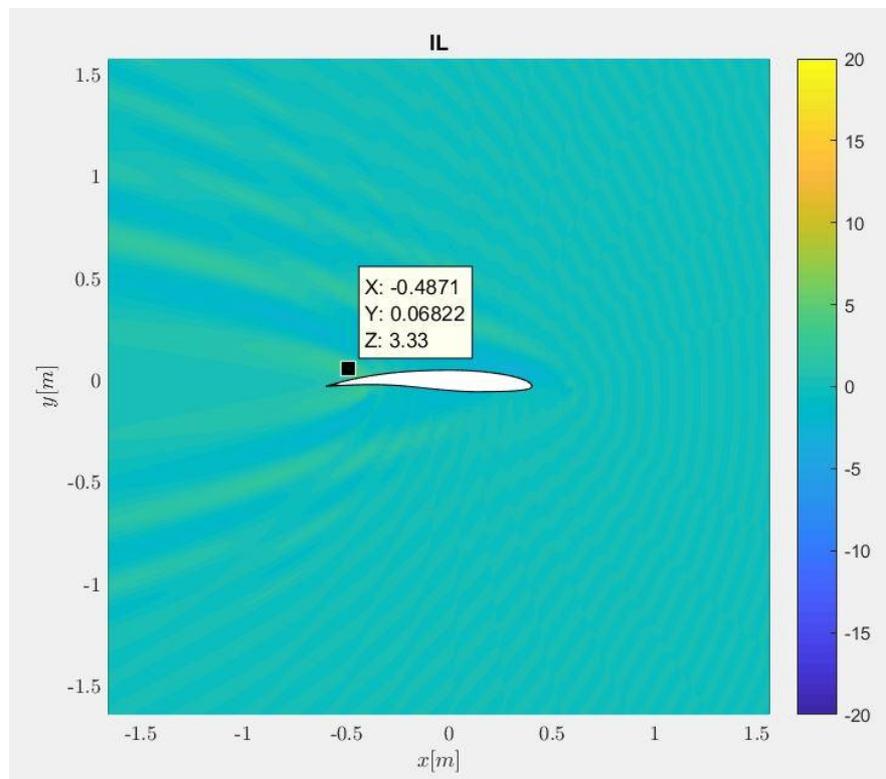


Figura 6.114. Max. IL NACA 4711

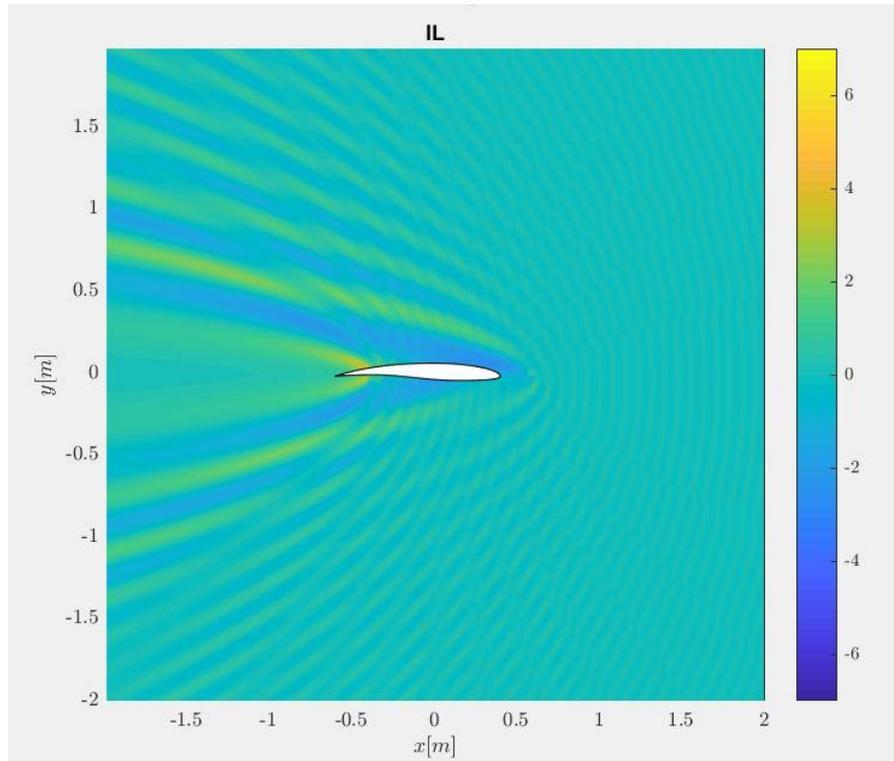


Figura 6.115. IL NACA 4711

El perfil no simétrico NACA 4711 presenta los menores valores de pérdidas por inserción alcanzándose un valor máximo de 3.33dB en la estela de este perfil, localizándose en el extradós del perfil, al ser en este caso un perfil no simétrico aparecen diferencias entre el intradós y el extradós. Estos valores son muy por debajo tanto de los resultados obtenidos en el análisis inicial como de los obtenidos para los perfiles simétricos, que no bajaban de los 14.49 dB. Se trata de un perfil que perturba mínimamente la corriente con su presencia por lo que la onda acústica asociada a ella tampoco se ve afectada en demasía.

Para concluir el presente estudio, se pasa a recopilar los resultados más relevantes.

7. Resumen y análisis de resultados

Configuraciones óptimas

En este capítulo, se realiza una síntesis de los resultados obtenidos en el proceso de optimización llevado a cabo en el trabajo.

ÓPTIMA INDIVIDUAL

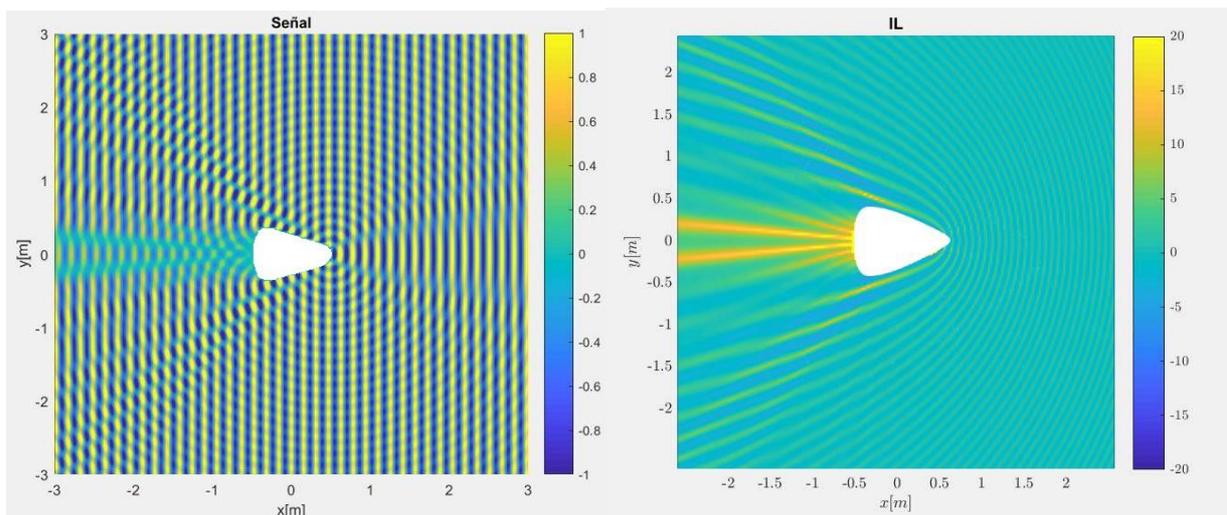


Figura 6.116. Señal óptimo individual

Figura 6.117. IL óptimo individual

En el estudio sobre obstáculos individuales se concluye que la geometría encontrada que mejores resultados ofrece es aquella de forma triangular con el vértice orientado en el frente del obstáculo, con unas pérdidas máximas de 27 dB.

OPTIMA 2 OBSTÁCULOS

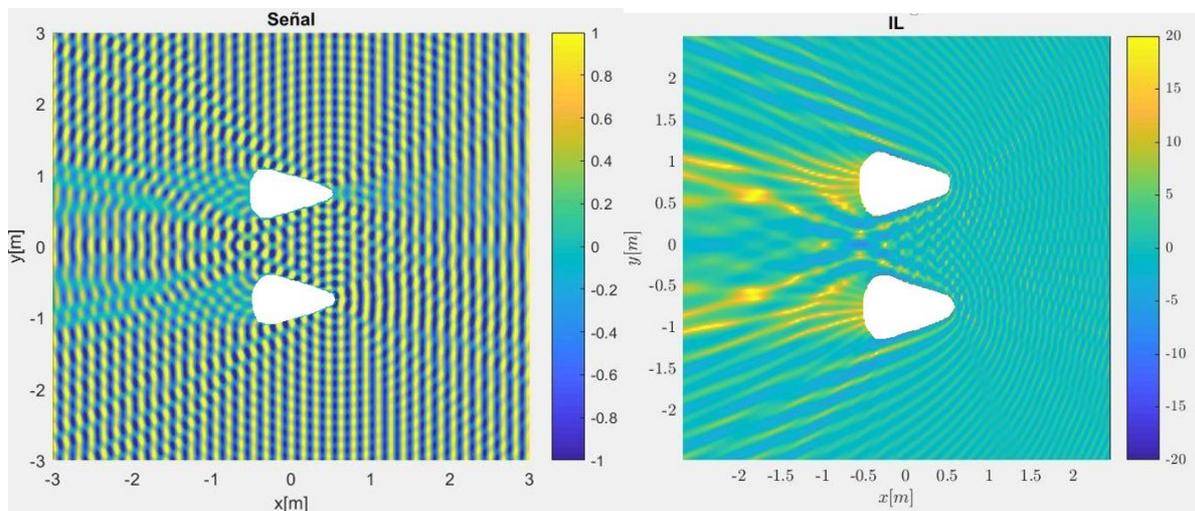


Figura 6.118. Señal óptimo 2 obstáculos (a)

Figura 6.119. IL óptimo 2 obstáculos (a)

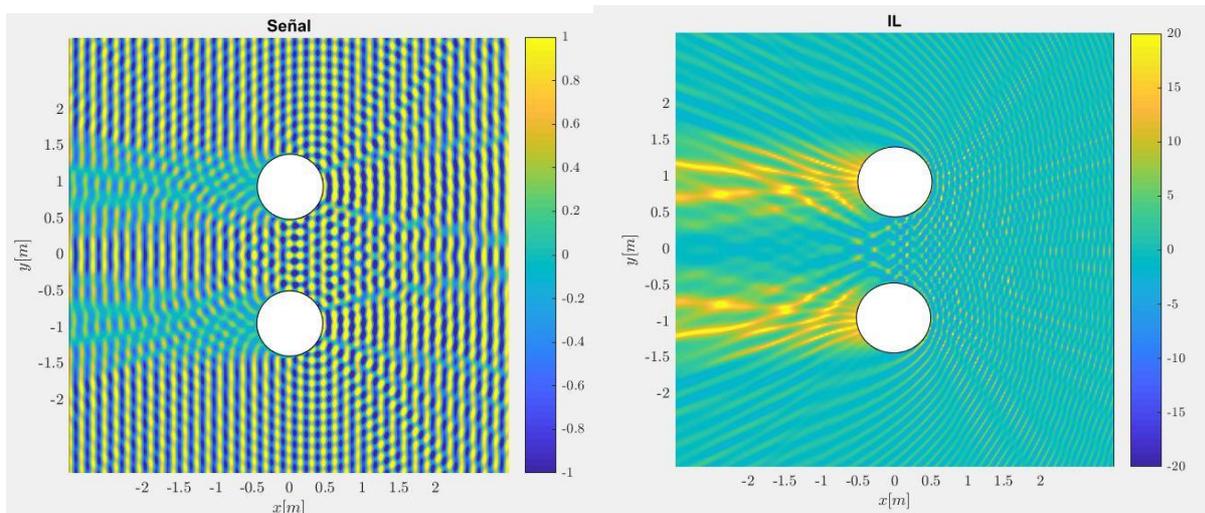


Figura 6.120. Señal óptimo 2 obstáculos (b)

Figura 6.121. IL óptimo 2 obstáculos (b)

En el caso del problema de 2 obstáculos se ha determinado que dos configuraciones reproducen unos resultados del mismo orden, en concreto los correspondientes al caso triangular óptimo (a) y a dos obstáculos circulares (b) donde se han obtenido pérdidas de 28.5 dB.

OPTIMA 3 OBSTÁCULOS

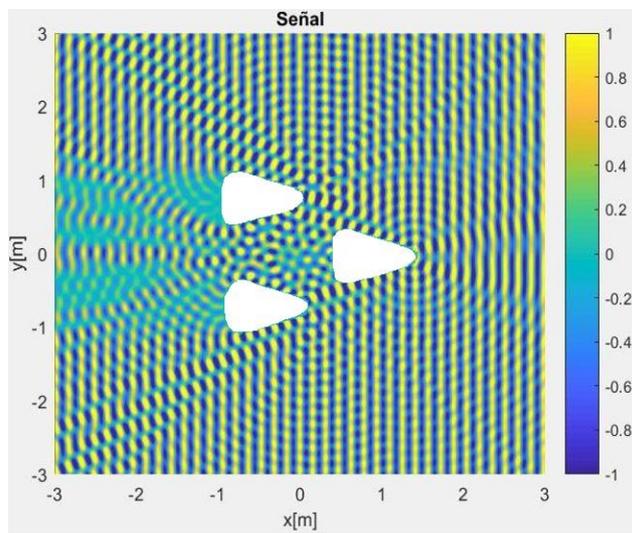


Figura 6.122. Señal óptimo 3 obstáculos

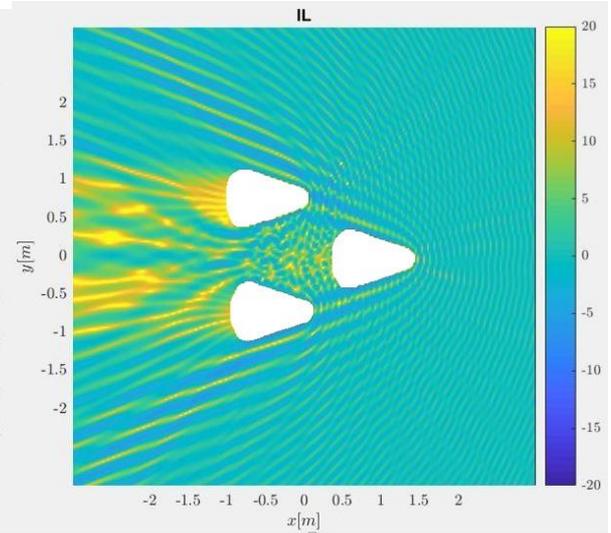


Figura 6.123. IL óptimo 3 obstáculos

Para el problema consistente en tres obstáculos en disposición triangular se ha obtenido como configuración óptima aquella con 3 triángulos cuya forma era la óptima también en el caso de un obstáculo, siendo estas pérdidas de 40.96 dB.

8. Futuras líneas de trabajo

Una vez concluido este estudio, se proponen a continuación posibles futuros estudios con los que desarrollar el Método de los Elementos de Contorno aprovechando las fortalezas de éste y desarrollando las herramientas usadas para implementarlo.

Por un lado un posible estudio sería pasar del problema 2D al 3D para ello habría que pasar de las actuales curvas de Bézier utilizadas al trabajo con superficies de Bézier...

Otro posible trabajo podría estar encaminado en la sustitución del modelado de los elementos de contorno mediante la aplicación de diseño Inkscape utilizada en el presente trabajo, que aunque presenta una gran ventaja al poder usar y manipular curvas de Bézier, esto se lleva a cabo de manera manual por lo que se introducen errores. Además solo permite trabajar con curvas de Bézier, por lo que en el estudio de problemas 3D sería necesario encontrar una herramienta que permita trabajar con superficies de Bézier.

En cuanto al proceso de optimización de las pérdidas producidas la línea de avance en el estudio podría ser la búsqueda de un método de localización de extremos de las pérdidas de inserción (IL) mediante Matlab, para ello, habría que una vez que se ha calculado la solución para todos los puntos, eliminar aquellos que se encuentren dentro del dominio del obstáculo que actualmente introducen valores aleatorios carentes de sentido físico que impiden actualmente localizar estos máximos mediante este método. Esto resulta de capital importancia si se desea realizar este estudio para los problemas 3D anteriormente mencionados, ya que sería inviable realizarlo manualmente.

Por último, se podría extender este estudio tanto a geometrías más complejas, configuraciones con una mayor variedad de obstáculos, aunque para ello sería necesario mayor capacidad de cálculo, como a otro tipo de problemas, tanto con otros fluidos como para otro tipo de estructuras.

9. Bibliografía

- [1] D. Garijo, Modelo sin malla en simulación numérica de estructuras aeroespaciales, 2015.
- [2] A. Hrennikoff, Solution of problems of elasticity by the framework method, 1941.
- [3] R. Courant, Variational methods for the solution of problems and vibrations, 1942.
- [4] S. K. J.H. Argyris, Energy theorems and structural analysis, 1960.
- [5] M. Turner, Stiffness and deflection analysis of complex structures, 1956.
- [6] J. M. K.K. Gupta, A brief history of th beginning of the Finite Element Method Int. J. Numer. Meth. Engng, 1996.
- [7] P. R. E.Alarcon, Guía de Introducción al Método de los Elementos de Contorno, 1983.
- [8] M. Lawson, Integral equation methods in potential theory I, 1963.
- [9] F. Rizzo, An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics, 1967.
- [10] T. Cruse, Numerical solutions in threedimensional elastostatics, 1969.
- [11] J. W. J.C. Lachat, A second generation integral equation program for three-dimensional elastic analysis in Boundary-integral equation method: computational applications in applied mechanics, 1975.
- [12] A. A.Romero, 2.5D coupled BEM–FEM used to model fluid and solidscattering wave, 2014.
- [13] H. F. Everstine G.C., Coupled finite element/boundary element approach for fluid-structure interaction., journal of the Acoustical Society of America, 1990.
- [14] W. W. Gaul L., A coupled symmetric BE-FE method for acoustic fluid-structure interaction, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2002.
- [15] O. V. E. O. Czygan, Fluid-structure interaction by coupling BEM and nonlinear FEM, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2002.
- [16] J. C. Martos, Análisis local de la solución elástica en el entorno del vértice de grietas de interfase, 2016.
- [17] G. P. L.J. Gray, Symmetric Galerkin boundary integral fracture analysis for plane orthotropic elasticity, 1999.

- [18] M. A. J.J. PÉREZ-GAVILÁN, A Symmetric Galerkin BEM for Harmonic Problems and Multiconnected Bodies, 2001.
- [19] M. A. J.J. PÉREZ-GAVILÁN, Symmetric Galerkin BEM for shear deformable plates, 2003.
- [20] M. A. J.J. PÉREZ-GAVILÁN, A symmetric Galerkin boundary element method for dynamic frequency domain viscoelastic problems, 2001.
- [21] J. T. Katsikadelis, The Boundary Element Method for Engineers and Scientists, Theory and Applications, 2016.
- [22] L. G. J.A.Tadeu, three-dimensional wave scattering by a fixed cylindrical inclusion submerged in a fluid medium, Coimbra,Portugal, 1999.
- [23] P. J. C.-M. A. A.Romero, On the formulation of a BEM in the Bézier-Bernstein space for the solution of Hemholtz equation * mirar pu, 2018.
- [24] J. J. P.-G. E, Introducción a los Elementos de Frontera, 2006.
- [25] J. Cámara-Molina, Modelización de Problemas de Fluido-acústica con Elementos Espectrales de Orden Elevado y Polinomios de Bernstein, 2017.
- [26] P. P. Cantador, Programación en Matlab del Método de los Elementos de Contorno aplicado a problemas acústicos, 2015.
- [27] inkscape, «inkscape.org,» [En línea]. [Último acceso: 2018].
- [28] G. R. A. Jose Manuel Gordillo Arias de Saavedra, Introducción a la Aerodinámica Potencial.
- [29] W. T. Scarbrough, NACA FOUR-DIGIT AIRFOIL SECTION GENERATION USING CUBIC PARAMETRIC CURVE SEGMENTS AND THE GOLDEN SECTION, 1992.