

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería de las Tecnologías de  
Telecomunicación (GITT)

Medición, procesamiento y clasificación de señales  
electroencefalográficas

Autor: Daniel Rodríguez Cassolà

Tutores: Sergio A. Cruces Álvarez y F. Javier Olías Sánchez

**Dep. Teoría de la Señal y Comunicaciones**  
**Escuela Técnica Superior de Ingeniería**  
**Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2018





Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería de las Tecnologías de Telecomunicación (GITT)

# **Medición, procesamiento y clasificación de señales electroencefalográficas**

Autor:

Daniel Rodríguez Cassolà

Tutores:

Sergio A. Cruces Álvarez  
Catedrático de Universidad

F. Javier Olías Sánchez  
Investigador Predoctoral

Dep. de Teoría de la Señal y Comunicaciones  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2018



Trabajo Fin de Grado: Medición, procesado y clasificación de señales electroencefalográficas

Autor: Daniel Rodríguez Cassolà

Tutores: Sergio A. Cruces Álvarez  
F. Javier Olías Sánchez

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:



*A Marc, evidentemente.*





*El pueblo vikingo, aunque primitivo, era en algunos aspectos bastante desarrollado. Un antropólogo norteamericano logró calcular el «rotated factor index» del desarrollo sociocultural de algunos pueblos primitivos. El «rotated factor index» para los vikingos es de 1,60, mientras que es de 1,73 para los aztecas, 0,99 para los hotentotes, 0,89 para los mafulu, 0,44 para los bosquimanos y 0,28 para los esquimales. Lo que pueda ser exactamente el «rotated factor index» sólo lo sabe el antropólogo norteamericano que lo ha inventado.*

Allegro ma non troppo. CARLO M. CIPOLLA



# Agradecimientos

---

Este trabajo de fin de grado debe su génesis y buena parte de su desarrollo a la inestimable ayuda y colaboración de mis tutores Sergio A. Cruces Álvarez y F. Javier Olías Sánchez. A ellos dos gracias por guiarme durante el proceso de compleción del trabajo y por permitirme adentrarme en la apasionante temática del tratamiento de señales cerebrales.

También quiero agradecer aquí la aportación acumulada de todo el profesorado de mi etapa universitaria, con especial énfasis hacia aquel grupo que ejerció de faro en la tormenta.

En último término, un agradecimiento infinito y eterno a mi pareja, a mi familia y a mis amigos. Todos ellos se reconocerán y sabrán que se preocuparon, habitualmente más que yo, por mi singladura académica.

*Daniel Rodríguez Cassolà*

*Sevilla, 2018*



# Resumen

---

El objetivo principal de este trabajo es el de implementar un sistema BCI (Brain Computer Interface) mediante un dispositivo de captación EEG (Electroencefalograma) para medir, procesar y clasificar señales cerebrales en tiempo real con el fin de poder discriminar entre dos clases de movimientos imaginados sin necesidad de realizar una actividad motora. Las aplicaciones prácticas que se abren ante el investigador en caso de éxito son indudablemente numerosas y atractivas.

En los primeros capítulos se ven los fundamentos teóricos necesarios para transitar hacia la parte práctica. Se estudia la fisiología del cerebro y, particularmente, el comportamiento de las neuronas que, a través de los potenciales de acción, generan las ondas cerebrales que se acaban registrando en un EEG. La monitorización de la actividad cerebral lleva al desarrollo de los sistemas BCI que proporcionan un canal de comunicación con el mundo exterior sin necesidad de recurrir a actividades musculares. Se repasa el estado de la investigación BCI actual y sus características y se plantean algunas consideraciones sobre su desarrollo futuro. El dispositivo Emotiv EPOC empleado en el trabajo es también presentado en una primera aproximación técnica.

Se estudia a continuación la teoría de reconocimiento de patrones y de clasificación que, apoyándose en la teoría de decisión bayesiana, sirve de cimiento conceptual y matemático para las tareas de discriminación entre clases que es necesario hacer en este trabajo. Se estudia en profundidad la técnica del LDA (Linear Discriminant Analysis) concebida y optimizada para la clasificación y que se usa en el sistema diseñado. También se analiza el algoritmo CSP (Common Spatial Patterns) empleado para calcular el filtro espacial óptimo que reduce la dimensionalidad de las señales originales. Se introduce además el procedimiento de PCA (Principal Component Analysis) utilizado en reconocimiento de patrones para obtener las componentes principales de un conjunto de observaciones, reduciendo así las dimensiones del conjunto total.

En la parte final del trabajo se ve el esquema del sistema BCI diseñado con sus características técnicas y, antes de detallar las simulaciones realizadas y los resultados obtenidos, se comprueba el funcionamiento del sistema con datos EEG registrados profesionalmente. Se muestran además un par de aplicaciones prácticas que se han desarrollado y probado, un juego de ping-pong y una herramienta de deletreo, con el fin de que sirvan de ejemplo de las utilidades que pueden tener cabida en el mundo real a raíz de la investigación sobre las señales electroencefalográficas.

Para concluir este trabajo se hace una recopilación de los temas tratados que, junto con las problemáticas afrontadas durante su realización y algunas reflexiones personales, derivan en las conclusiones finales.



# Abstract

---

The main goal of this project is to implement a BCI (Brain Computer Interface) system using an EEG monitoring device to measure, to process and to classify brain signals in real time in order to discriminate between two classes of imagined movements without the need to perform motor activity. In case of success, the practical applications that present themselves in front of the investigator are undoubtedly numerous and attractive.

In the first chapters, we review the theoretical fundamentals that are going to be applied in the practical part of the project. We study the physiology of the brain and, more precisely, the behaviour of the neurons through its action potentials that generate brain waves that can be registered with an EEG device. The monitorization of brain activities leads to the development of BCI systems that supply a channel to communicate with the outside world without muscle activity. A summary of recent BCI investigations is made, with explanations about its characteristics and some considerations about future evolutions on the subject. The Emotiv EPOC device is the one that is going to be used in this project and it is presented with a brief technical approach.

Afterwards we focus on pattern recognition theory and classification theory, and these two along Bayesian decision theory are used as mathematical and conceptual foundations for the tasks of class discrimination needed in this project. We study thoroughly the LDA (Linear Discriminant Analysis) technique that was conceived and optimized for classification and it is used on the designed system. CSP (Common Spatial Patterns) algorithm is also explained to find the optimal spatial filter that reduces the dimensionality of the original signals. We also introduce the PCA (Principal Component Analysis) algorithm used in pattern recognition to obtain the principal components from a set of observations and therefore to reduce the total dimensions.

In the final part of the project, the scheme of the designed BCI system is shown and technically explained. Before introducing the simulations and the final results, the system is verified using professionally recorded EEG data. We find a couple of software applications that were developed and tested, a ping-pong game and a spelling tool, with the aim to serve as an example of the outcomes of research in electroencephalographic signals that can have their place in the real world.

To finish this project we review all the subjects, the problems that were faced and some personal reflections that altogether lead to the final conclusions.





# Índice

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>xi</b>
<b>Resumen</b>	<b>xiii</b>
<b>Abstract</b>	<b>xv</b>
<b>Índice</b>	<b>xvii</b>
<b>Notación</b>	<b>xxi</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Morfología y Fisiología del Cerebro</b>	<b>3</b>
2.1 <i>El cerebro humano</i>	4
2.1.1 Áreas funcionales	5
2.1.1 Zonas cerebrales y movimientos corporales	5
2.2 <i>El sistema nervioso y las neuronas</i>	5
2.1.1 Potencial de acción o impulso nervioso	6
2.2.1 Codificación neuronal y ondas cerebrales	8
2.3 <i>El electroencefalograma</i>	9
2.4 <i>Conclusiones</i>	10
<b>3 Las Interfaces Cerebro-Ordenador (BCI)</b>	<b>11</b>
3.1 <i>Esquema y características de un sistema BCI</i>	12
3.1.1 Adquisición de señales	13
3.1.2 Procesado de señal: extracción de características	13
3.1.3 Procesado de señal: algoritmo de traducción o clasificación	13
3.1.4 El dispositivo de salida	14
3.1.5 El protocolo de operación	14
3.2 <i>Ejemplos de BCI</i>	14
3.2.1 Ondas $\mu$ y $\beta$ y otra actividad de la corteza motora	14
3.3 <i>Emotiv EPOC</i>	16
3.4 <i>Conclusiones</i>	18
<b>4 Reconocimiento de Patrones y Teoría de Clasificación</b>	<b>19</b>
4.1 <i>Introducción</i>	19
4.2 <i>Sistemas de reconocimiento de patrones</i>	22
4.2.1 Detección o lectura	22
4.2.2 Segmentación y agrupamiento	22
4.2.3 Extracción de características	23
4.2.4 Clasificación	23
4.2.5 Postprocesado	23
4.3 <i>Ciclo de diseño</i>	24
4.3.1 Adquisición de datos	24

4.3.2	Elección de características	25
4.3.3	Elección del modelo	25
4.3.4	Entrenamiento del clasificador	25
4.3.5	Evaluación del clasificador	25
4.3.6	Complejidad computacional	25
4.4	<i>Aprendizaje y adaptación</i>	25
4.5	<i>Teoría de decisión bayesiana</i>	26
4.5.1	Clasificación de tasa de error mínima	27
4.5.2	Clasificadores, funciones discriminantes y superficies de decisión	28
4.5.3	Densidad normal	29
4.5.4	Densidad univariante	30
4.5.5	Densidad multivariante	30
4.5.6	Funciones discriminantes para la densidad normal	31
4.6	<i>Conclusiones</i>	35
<b>5</b>	<b>Estudio Teórico de Técnicas Utilizadas en BCI</b>	<b>37</b>
5.1	<i>LDA</i>	38
5.1.1	LDA para dos clases	38
5.2	<i>CSP</i>	41
5.2.1	CSP aplicado a BCI de movimientos imaginados	41
5.2.2	Variantes y extensiones de CSP	45
5.3	<i>Introducción a PCA</i>	46
5.4	<i>Conclusiones</i>	47
<b>6</b>	<b>Realización del Sistema BCI</b>	<b>49</b>
6.1	<i>Herramientas utilizadas</i>	49
6.1.1	Emotiv Epoc	49
6.1.2	PC con Matlab y Simulink	50
6.2	<i>Esquema de bloques del trabajo</i>	50
6.2.1	EpocEEG(double y1[22])	51
6.2.2	Filtro Discreto Paso Banda	51
6.2.3	gen_move_dj	52
6.2.4	misfun5	52
6.2.5	Bloques visuales	55
6.2.6	Bloques de resultados	56
6.3	<i>Paradigma para la recopilación de datos</i>	56
6.4	<i>Montaje de aplicaciones</i>	56
6.5	<i>Conclusiones</i>	56
<b>7</b>	<b>Resultados Obtenidos</b>	<b>57</b>
7.1	<i>Simulación con datos de competición pregrabados</i>	57
7.2	<i>Mediciones en tiempo real con el casco Emotiv EPOC</i>	58
7.3	<i>Resumen de resultados y conclusiones</i>	59
<b>8</b>	<b>Aplicaciones Prácticas</b>	<b>63</b>
8.1	<i>Juego de ping-pong</i>	63
8.1.1	Fase de entrenamiento	63
8.1.2	Fase de juego	64
8.2	<i>Aplicación de alfabeto</i>	64
8.2.1	Fase de entrenamiento	64
8.2.2	Fase de deletreo	64
8.2.3	Rendimiento, conclusiones y posibles mejoras	68
<b>9</b>	<b>Conclusiones Finales</b>	<b>69</b>
	<b>Índice de Ilustraciones</b>	<b>73</b>

<b>Índice de Tablas</b>	<b>75</b>
<b>Glosario</b>	<b>77</b>
<b>Referencias</b>	<b>79</b>



# Notación

---

$p(\omega_1)$	Probabilidad a priori de $\omega_1$
$p(x \omega_1)$	Probabilidad de $x$ condicionada a $\omega_1$
$\hat{\omega}$	Estima de $\omega$
$g_i(x)$	Función discriminante
$\mathcal{R}_i$	Región de decisión
$\varepsilon[f(x)]$	Valor esperado de una función escalar $f(x)$
$N(\mu, \sigma^2)$	Distribución normal de media $\mu$ y varianza $\sigma^2$
$H[p(x)]$	Entropía de la distribución de probabilidad $p(x)$
$\Sigma$	Matriz de covarianzas
$\mathbf{X}$	Matriz de señales recibidas por los electrodos
$\mathbf{A}$	Patrón espacial
$\mathbf{S}$	Matriz de señales originarias
$\mathbf{n}$	Ruido
$\mathbf{w}$	Filtro espacial simple
$\mathbf{y}$	Señal filtrada espacialmente
$\lambda$	Autovalor de $\mathbf{S}$
$\phi$	Autovector de $\mathbf{S}$
$\mathbf{z}$	Vector de características



# 1 INTRODUCCIÓN

---

El avión de caza soviético MiG-31 de la película *Firefox* de 1982 cuenta con la impresionante característica de poder ser controlado mentalmente por el piloto, lo cual le ofrece una gran ventaja en el combate ante sus adversarios. Hoy en día todavía nos encontramos lejos de ese escenario de cuasi ciencia ficción en el que un sistema BCI sea capaz de interpretar las señales cerebrales con tamaño fiabilidad y rapidez. Nos conformaríamos con que los pasos que se dan para avanzar en este gran reto de ingeniería en todas las disciplinas científicas y tecnológicas implicadas, desde la neurociencia hasta la teoría de señales, permitiesen a usuarios con problemas en sus capacidades motoras tener unos canales de comunicación mejores con el mundo exterior y contar con herramientas de control seguras sobre prótesis y dispositivos electrónicos que incrementen su calidad de vida.

El objeto de este trabajo es el de diseñar y probar un sistema en tiempo real que permita captar, procesar y clasificar señales electroencefalográficas. Teniendo en cuenta que los medios disponibles no son los que se pueden encontrar de los grandes laboratorios de investigación, precisamos que el objetivo concreto es el de, utilizando herramientas comerciales a nuestro alcance como son un casco sensor EEG comercial y un PC, diferenciar entre las señales cerebrales de dos movimientos motores imaginados. El casco Emotiv EPOC será el encargado de la captación de las señales del cerebro de los usuarios a través de sus varios sensores situados sobre el cuero cabelludo y un PC equipado con Matlab se ocupará de ejecutar las tareas de procesado y clasificación que arrojarán unos resultados que habrá que analizar y valorar consecuentemente. Que el sistema funcione en tiempo real es una limitación añadida que, si bien dificulta la tarea del investigador al requerir mayor exigencia en el rendimiento, obliga a una mayor automatización que nos acerca al entorno ideal en el que los usuarios interactúan directa e independientemente con la máquina.

Imaginar un movimiento y ser capaz de determinarlo externamente, leer la mente en definitiva. Una vez repuestos de la impresión causada por la contundencia del desafío, aplicamos el enfoque ingenieril modularizando el problema. Las esquivas señales cerebrales y su registro, el procesado de los preciosos datos para su posterior análisis, el veredicto resultante de ellos, su verificación y la aplicación a la vista del usuario final; todo ello es necesario manejar con sus correspondientes particularidades y problemáticas. Para decepción de algún que otro lector, no vamos a intentar pilotar ningún avión con el poder de la mente, sino que se pretende diseñar un sistema que sea capaz de distinguir cuándo los usuarios imaginan que mueven la mano izquierda y cuándo hacen lo mismo con la mano derecha. Parece obvia dicha elección si lo que queremos es tener una primera opción sencilla y evidente para el manejo de dispositivos e interfaces. Ampliando el punto de partida, también entrará en juego en este trabajo el movimiento imaginario de la lengua pero sin salirnos en ningún momento de una clasificación binaria, que, aunque modesta, es una base fácilmente escalable a órdenes superiores.

Dadas las dificultades que plantean todas las etapas del sistema frente a los medios empleados y las incertidumbres que asoman tras cada paso, no se cuenta con la certeza de que el barco llegue a buen puerto. Desde el gran desconocimiento del comportamiento del cerebro humano, pasando por la calidad del dispositivo de captación, siguiendo por las contaminaciones de ruido y artefactos y llegando a la poca familiaridad de los usuarios con el sistema, habrá que apoyarse en las verdades científicas que se

conozcan y validar cada parte del proceso independientemente.

La bondad de la parte del sistema que se dedica al procesado y la clasificación se certifica obteniendo un desempeño excelente simulando en tiempo real datos pertenecientes a una competición profesional de BCI. Obviamente la frase anterior ya deja entrever que la peor cara la presenta la fase de captación y será necesario evaluar en qué grado son útiles y aprovechables por el sistema las mediciones de la actividad cerebral realizadas en el entorno de trabajo.

Los resultados obtenidos en los experimentos llevados a cabo muestran aristas desiguales que intentarán ser razonadas para que todas juntas conformen una figura de provecho. Por una parte, demuestran la posibilidad de implementar sistemas BCI en pequeña escala y por la otra dejan patente la fragilidad de los mimbres que se manejan y la importancia de seguir afinando los medios técnicos y lógicos implicados en el proceso completo.

Un par de aplicaciones sencillas de diferente propósito, como son un juego y una herramienta de escritura, trazan la línea de meta del camino recorrido en este trabajo, que el autor estima que incuestionablemente ha merecido la pena ya que se puede afirmar sin rubor que la investigación del cerebro humano y los sistemas BCI es un terreno fértil con mucho futuro por delante y muchos frutos que ofrecer.



## 2 MORFOLOGÍA Y FISIOLOGÍA DEL CEREBRO

---

El cerebro es el órgano más importante del ser humano ya que es el elemento principal del sistema nervioso central y es quien controla las funciones, acciones y reacciones corporales. Es además el lugar donde reside nuestro intelecto y, en último término, nuestra individualidad como ser humano. El grueso de este capítulo hace referencia a los libros [1], [2] y [7].

Este órgano de 1,4 kg de masa corrugada y consistencia gelatinosa [1] parece haber pasado relativamente desapercibido durante siglos y escapado del foco principal de la ciencia médica, ya que el contenido del cráneo era considerado de poca importancia frente a los pulmones, el corazón o la vejiga. Esto fuera probablemente debido al hecho de que su funcionalidad no se revela a simple vista, al contrario que la de otros órganos del cuerpo. En el Antiguo Egipto los momificadores extraían el cerebro a los muertos y lo desechaban, mientras preservaban el corazón y otras vísceras; el sabio griego Aristóteles pensaba que el cerebro era un refrigerador para enfriar la sangre y el científico y filósofo francés Descartes concluyó que se trataba de una especie de antena a través de la cual el espíritu se comunicaba con el cuerpo [2].

La función más elemental del cerebro es mantener vivo al resto del cuerpo. De entre los más de cien mil millones de neuronas [3], podemos encontrar aquéllas que regulan la respiración, el ritmo cardiaco y la presión arterial; y otras que controlan el hambre, la sed, el impulso sexual y el ciclo de sueño. Pero por encima de todo, el cerebro es el encargado de generar las emociones, las percepciones y los pensamientos que guían nuestro comportamiento, dirige y ejecuta nuestras acciones y, finalmente, es el responsable de la autoconsciencia de nuestra propia mente.

Hasta hace alrededor de cien años, la única evidencia de la conexión entre el cerebro y la mente se derivaba de “experimentos naturales” [4], esto es, accidentes con resultado de heridas en la cabeza que causaban aberraciones en el comportamiento de las víctimas. A partir de la observación de estos casos en una primera etapa, los médicos comenzaron a mapear zonas del paisaje cerebral emparejando a posteriori las disfuncionalidades con las áreas dañadas del cerebro. Como es de suponer, se trataba de un trabajo lento porque los científicos debían aguardar hasta la muerte del paciente para recolectar la evidencia fisiológica. A principios del siglo XX, todo lo que se conocía del sustrato físico de la mente podía ser recopilado en un solo volumen. Desde entonces, los avances científicos y tecnológicos han impulsado la revolución neurocientífica. Potentes microscopios hacen posible observar con detalle la intrincada anatomía cerebral; un mayor conocimiento de los fenómenos eléctricos permite reconocer las dinámicas cerebrales y, con el advenimiento de la electroencefalografía (EEG), observarlas y medirlas; y, postreramente, los dispositivos de escaneo de imágenes suministran a los investigadores información del interior del cerebro vivo y de sus mecanismos en funcionamiento. En las dos últimas décadas, la tomografía por emisión de positrones (PET), la imagen por resonancia magnética funcional (fMRI) y, más recientemente, la encefalografía magnética (MEG) han producido mapas aún más detallados de las funciones del cerebro [5].

Hoy en día la investigación neurocientífica es una tarea en continua evolución y nadie sabe fehacientemente cómo será el cuadro final que ofrecerá. Quizás el cerebro sea tan complicado que no lleguemos a comprenderlo jamás por entero.

## 2.1 El cerebro humano

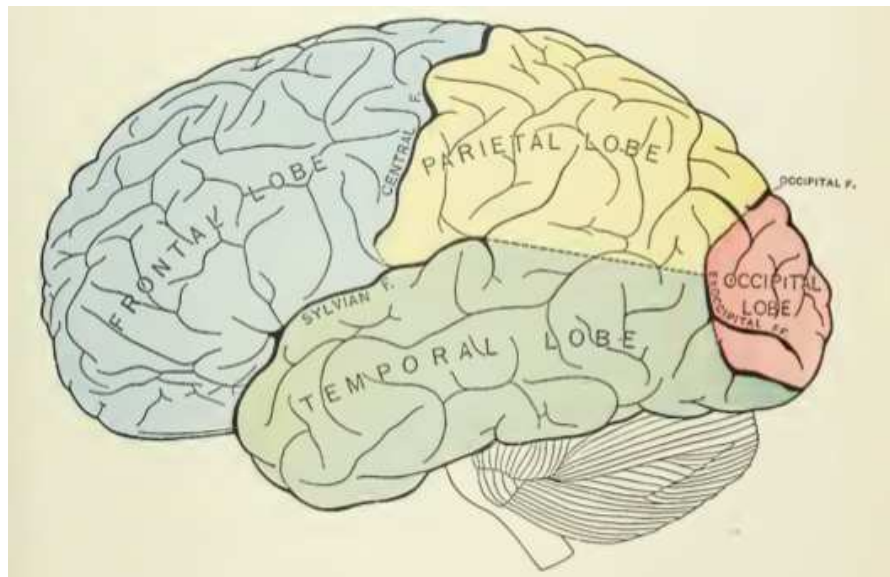
El cerebro humano se divide, en una primera aproximación física, en dos hemisferios: el izquierdo y el derecho, a partir de la cisura interhemisférica [6]. Los hemisferios se encuentran unidos entre sí por las comisuras interhemisféricas y, a diferencia de los de otras especies, no son la imagen especular el uno del otro, sino que son asimétricos, y esto provoca que existan algunas diferencias funcionales entre ellos. Cada hemisferio controla en gran medida su lado opuesto del cuerpo y se considera que el hemisferio izquierdo prevalece en tareas como el lenguaje, las matemáticas y la lógica, mientras que el hemisferio derecho se hace más presente en las habilidades visuales y sonoras, como las artísticas y musicales. Cabe precisar que esta especialización espacial varía ligeramente de una persona a otra y que las dos mitades del cerebro trabajan complementaria y sincronizadamente en la realización de las distintas funciones, no existiendo zonas exclusivas de funcionamiento.

La capa más externa del cerebro se denomina córtex o corteza cerebral y tiene ese aspecto rugoso tan característico, además de un color grisáceo que hace que tome comúnmente el nombre de materia gris, en contraste con el color blanquecino de la capa inferior. Las distintas protuberancias y hendiduras permiten dividir el córtex en cuatro o seis lóbulos, dependiendo del sistema anatómico utilizado. Tanto la extensión como el nombre de los lóbulos están relacionados con los huesos del cráneo que los recubren, conocidos conjuntamente como neurocráneo.

La clasificación más habitual define los siguiente lóbulos cerebrales y sus funciones más destacadas [7], cuya imagen podemos ver en la **Ilustración 2-1**:

- **Lóbulo frontal:** realiza como principales tareas el control de la conducta, la planificación y la regulación de las emociones. En algunas ocasiones, se denomina lóbulo prefrontal a la parte delantera, siendo más ampliamente aceptado el término córtex prefrontal.
- **Lóbulo parietal:** en esta zona reside el control de la actividad motora y de las extremidades del cuerpo. Como se indicó anteriormente, el lóbulo parietal del hemisferio izquierdo controla las extremidades del lado derecho y viceversa. Podemos distinguir dos regiones dentro del lóbulo: la más próxima al lóbulo frontal, llamada corteza motora, que piensa los movimientos; y la más próxima al lóbulo occipital, llamada corteza somatosensorial, que interpreta el sentido del tacto, diferenciando cualidades como la suavidad, la aspereza, la humedad, etc.
- **Lóbulo occipital:** es el centro del sistema visual de la percepción. Interpreta los estímulos visuales y los transforma en información útil, incluso para otras áreas cerebrales. Regula la interpretación de imágenes, el reconocimiento espacial y la discriminación del movimiento y los colores. Aunque no es una zona particularmente vulnerable a las lesiones, cualquier trauma significativo en el cerebro podría producir alteraciones en el sistema visual-perceptivo, como alucinaciones, ilusiones visuales y otros trastornos.
- **Lóbulo temporal:** se ocupa de la memoria, la audición y el reconocimiento de patrones. Existe un área concreta del lóbulo que se encarga del reconocimiento de caras. El lenguaje, el desciframiento de la información y el sentido del equilibrio son otras importantes funciones que desempeña.

En algunos sistemas de clasificación, el lóbulo límbico y la ínsula, o lóbulo central, se consideran diferenciados de los lóbulos definidos más arriba [8].



**Ilustración 2-1.** Lóbulos del cerebro humano. *Fuente:* Imagen extraída de [7].

### 2.1.1 Áreas funcionales

El córtex puede ser mapeado al menos de tres maneras diferentes. Una es la anatómica, definida anteriormente a partir de las cisuras y circunvoluciones cerebrales. Otra es la microscópica, que tiene en cuenta las formas y tipos de las células y sus conexiones, tal como estableció el neurólogo alemán Korbinian Brodmann [9]. Un tercer método se hace eco de las funciones neurológicas cuando pequeñas áreas son estimuladas para estudiar las sensaciones o movimientos que se generan. Estos tres mapas del cerebro coinciden solo parcialmente al superponerlos.

Para el desarrollo de este trabajo nos basaremos en la clasificación anatómica más común, aprovechando su clara distribución espacial en el cerebro y su delimitación en funciones principales suficientemente diferenciadas unas de otras.

#### 2.1.1 Zonas cerebrales y movimientos corporales

Tanto las acciones conscientes como las inconscientes dependen de la corteza motora primaria, que es una zona situada en la parte posterior del lóbulo frontal. Ésta envía la señal para contraer los músculos a través de la médula espinal y los nervios motores. Sin embargo, mientras los movimientos inconscientes son planificados por zonas del lóbulo parietal, las acciones conscientes implican la intervención de otras zonas más frontales, incluyendo la corteza premotora y el área premotora suplementaria. También pueden intervenir áreas prefrontales, como la corteza prefrontal dorsolateral, donde las acciones son evaluadas conscientemente. Podría parecer que las acciones voluntarias y conscientes son el resultado de una decisión, pero de hecho áreas del cerebro encargadas de funciones inconscientes planifican y comienzan a ejecutar movimientos antes de que sean determinados de forma consciente. En términos más precisos, la decisión puede por tanto ser simplemente el reconocimiento consciente de lo que la parte inconsciente de la mente está planeando hacer. Esto se verá más adelante con mayor especificidad cuando se hable del potencial de acción.

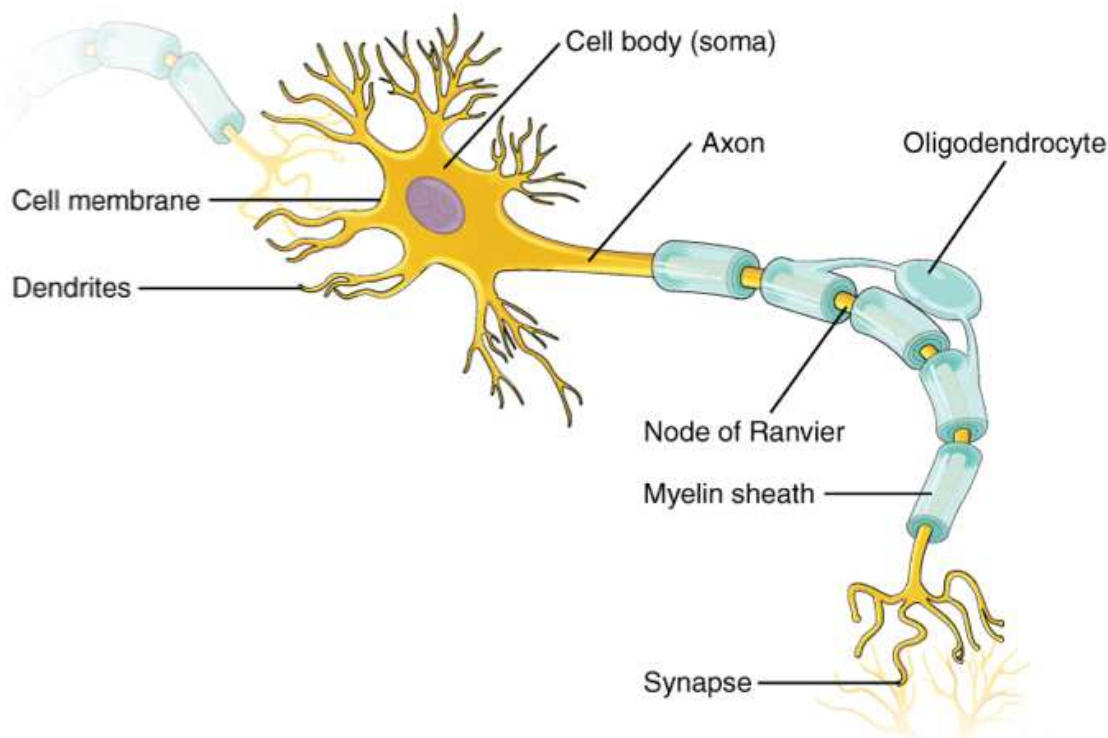
## 2.2 El sistema nervioso y las neuronas

El sistema nervioso de los vertebrados comparte una estructura básica: un sistema nervioso central que comprende el cerebro y la médula espinal y un sistema nervioso periférico compuesto por células nerviosas motoras y sensoriales. Las neuronas son las unidades funcionales básicas del sistema nervioso y generan

señales eléctricas llamadas potenciales de acción que les permiten transmitir información rápidamente a largas distancias y que estudiaremos seguidamente.

Un cerebro humano contiene alrededor de 86.000 millones de neuronas interconectadas formando redes neuronales. Estas conexiones se llaman sinapsis y permiten el envío de señales entre las neuronas.

Dentro de una neurona se pueden distinguir el cuerpo de la célula o soma, el axón y las dendritas (**Ilustración 2-2**). Un axón es una extensión del cuerpo de la célula que se alarga hasta otras células en ocasiones tanto como un metro. Por el axón se propaga el impulso nervioso. Las dendritas son unas ramificaciones que parten del cuerpo de la célula y que se extienden ampliamente dando lugar a complejas estructuras en forma de árbol. Del cuerpo de la célula surgen con frecuencia múltiples dendritas pero no más de un axón. La mayoría de las neuronas reciben señales a través de las dendritas y las envían por el axón. Esto confiere a la neurona una polaridad debido al sentido en el que fluye la información. Los nervios son conjuntos de axones en forma de cordones que comunican al cerebro con todos los órganos del cuerpo.



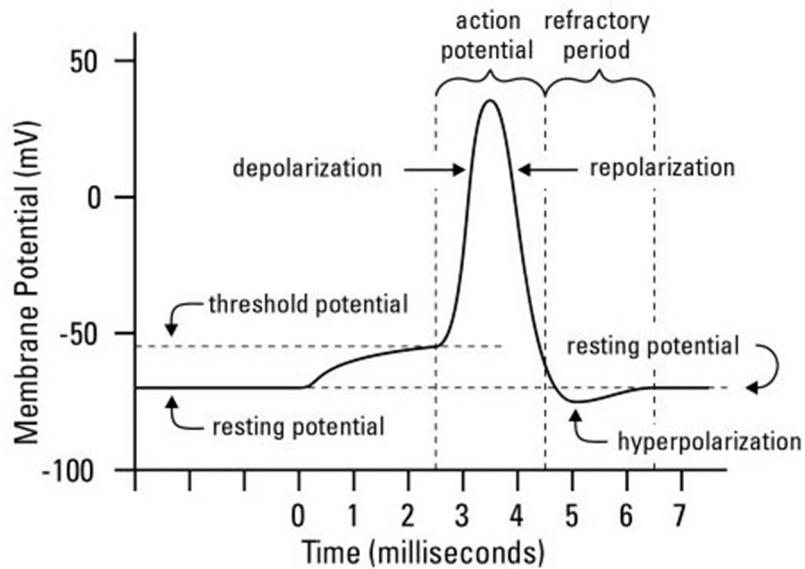
**Ilustración 2-2.** Partes de una neurona. *Fuente:* Imagen extraída de [10].

### 2.1.1 Potencial de acción o impulso nervioso

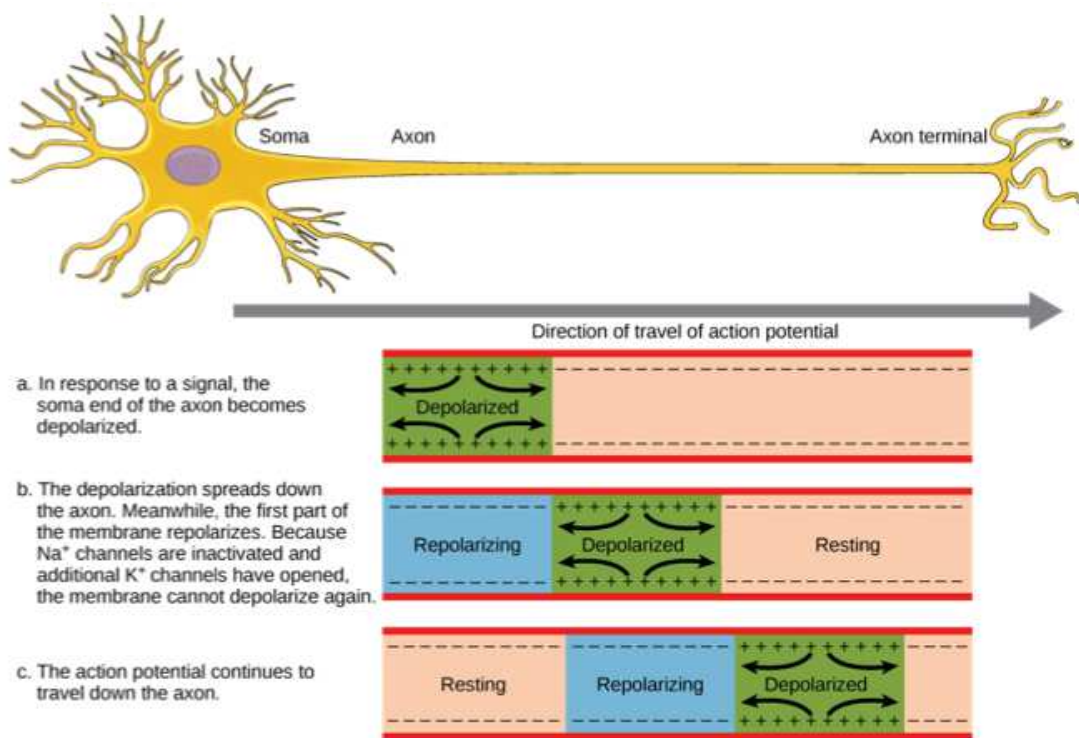
Todas las neuronas son excitables eléctricamente debido a la existencia de gradientes en el voltaje de sus membranas. La diferencia en la concentración de iones de sodio, potasio, cloro y calcio entre el interior de la célula y su exterior provoca un cambio en el voltaje que, superado un límite, genera un pulso electroquímico llamado potencial de acción que viaja rápidamente por el axón y activa las conexiones sinápticas con otras células. La causa del potencial de acción puede deberse a muchos tipos de estímulos: químicos, eléctricos, visuales, sonoros, táctiles...

El potencial de acción o impulso nervioso dura pocas milésimas de segundo y tiene una forma temporal muy particular que recibe el nombre en inglés de *spike* [11], que se puede ver en la **Ilustración 2-3**. La diferencia de potencial entre el interior y el exterior de la neurona es de unos  $-70$  mV en estado normal, y con este dato volvemos a incidir en el concepto de neurona polarizada. Este equilibrio se ve alterado por dos mecanismos posibles: la hiperpolarización, o incremento del valor absoluto del potencial en el interior de la neurona, y el más relevante de la despolarización.

La despolarización es la disminución del valor absoluto del potencial en el interior de la neurona. Cuando el potencial aumenta y la despolarización supera un valor umbral, el proceso se desencadena de forma inevitable y la neurona dispara un potencial de acción. Tras cada *spike* la célula necesita un tiempo refractario o de reposo para poder disparar el siguiente (**Ilustración 2-4**).



**Ilustración 2-3.** Evolución temporal de un spike. *Fuente:* Imagen extraída de [12].



**Ilustración 2-4.** Evolución espacial de un spike. *Fuente:* Imagen extraída de [13].

### 2.2.1 Codificación neuronal y ondas cerebrales

La visión agregada de los potenciales de acción da lugar a una codificación. Ésta puede consistir en una codificación independiente e individual para cada neurona, dependiendo de la aparición o no de *spikes*. También la frecuencia con que son disparados los potenciales de acción en una célula puede codificar información que puede ser analizada posteriormente.

Cuando se tienen secuencias de potenciales de acción disparados por la neurona con una pauta temporal, tenemos una codificación por correlación. La frecuencia con la que se generan los impulsos nerviosos consecutivos se llama tasa de disparo.

La codificación también puede producirse debido a la actuación de poblaciones neuronales, tanto en modo jerárquico en el que unos niveles neuronales disparan a los niveles adyacentes, como en modo sincronizado a la misma frecuencia.

#### 2.2.1.1 Sincronización y desincronización

Cuando las neuronas codifican información sincronizándose a una frecuencia de disparo, hablamos de un evento relacionado con la sincronización (ERS). En el caso en el que la codificación se produce al desaparecer una frecuencia, tenemos un evento relacionado con la desincronización (ERD).

La importancia de este fenómeno para este trabajo estriba en que los ERD pueden ser detectados por los aparatos de electroencefalograma (EEG) adecuados e integrados en sistemas BCI (*Brain- Computer Interface*) para su posterior análisis e interpretación. Los sistemas BCI los veremos en detalle en el siguiente capítulo.

#### 2.2.1.2 Ondas cerebrales

Aprovechamos este pequeño avance sobre el electroencefalograma y el campo de la adquisición de las señales para anotar que, de forma empírica a partir de los estudios realizados sobre la aparición de los ritmos cerebrales característicos de cada estado mental del paciente, se han agrupado las frecuencias en las bandas reflejadas en la **Tabla 2-1**.

Nombre	Frecuencia (Hz)	Actividad
Delta ( $\delta$ )	0,5 – 4	Sueño profundo
Theta ( $\theta$ )	4 – 7,5	Meditación profunda, memoria
Alfa ( $\alpha$ )	8 – 13	Relajación
Mu ( $\mu$ )	8 – 13	Movimiento, tacto
Beta ( $\beta$ )	14 – 26	Atención
Gamma ( $\gamma$ )	> 30	Percepción consciente

**Tabla 2-1.** Bandas de frecuencia de las ondas cerebrales.

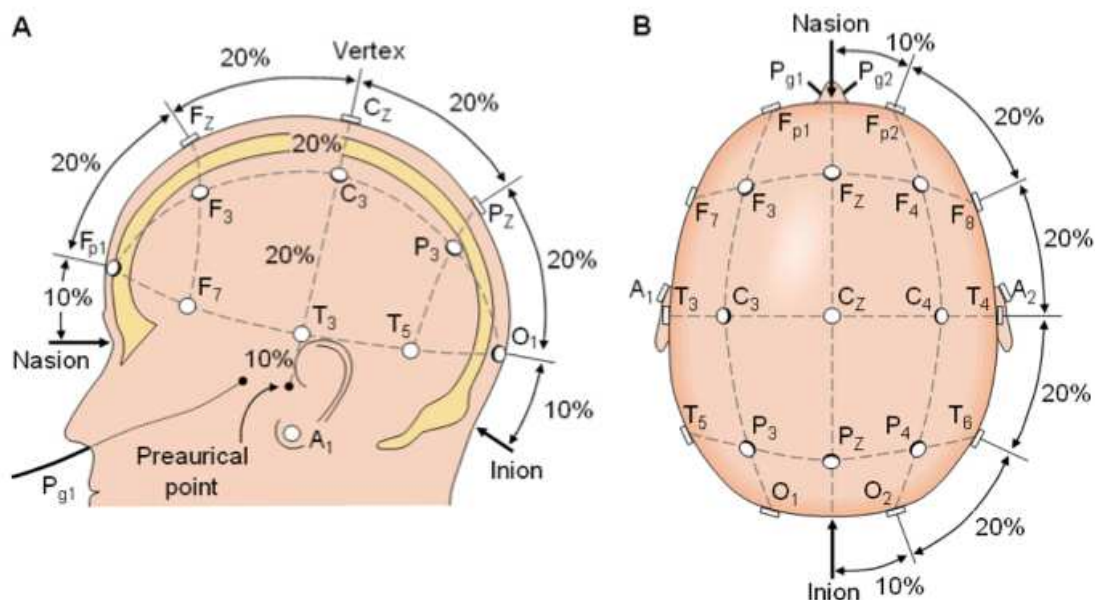
Centramos nuestra mirada especialmente en las ondas  $\mu$  y  $\beta$ , que además se encuentran estrechamente relacionadas entre sí. Las ondas  $\beta$  están asociadas a procesos de atención o de resolución de problemas y pueden ser anuladas por movimientos o sensaciones táctiles. Las ondas  $\mu$ , a su vez, están asociadas al movimiento y el tacto y son generadas por grandes poblaciones neuronales del lóbulo parietal y cuentan con mayor amplitud cuando el cuerpo está en estado de reposo. Al realizar un movimiento, se produce un ERD en algunas zonas del lóbulo parietal. Al cesar dicho movimiento y entrar en fase de relajación, se genera un ERS. Según la parte del cuerpo que se mueve, entra en funcionamiento un área u otra de la

corteza motora. Lo más interesante y particular del tema, y básicamente en lo que se centra el estudio de este trabajo, es que un sujeto entrenado puede llegar a generar el ERD (y el ERS subsiguiente) imaginando el movimiento sin realizarlo realmente. Por lo tanto, si conseguimos discriminar e identificar el área de la corteza motora que está en actividad, podremos identificar el movimiento (real o imaginado) asociado. Pensemos en las importantes derivadas y aplicaciones que se abren ante nosotros gracias a este fenómeno.

## 2.3 El electroencefalograma

El electroencefalograma (EEG) consiste en el registro de la actividad eléctrica de la corteza cerebral mediante electrodos no invasivos aplicados sobre el cuero cabelludo. Se revela como una herramienta fundamental a la hora de conocer la actividad, ausencia de actividad y/o anomalías en el funcionamiento del cerebro. El EEG se utiliza para ayudar a diagnosticar la presencia o los tipos de trastornos epilépticos y para evaluar cualquier otra patología del sistema nervioso central como tumores, infecciones, enfermedades degenerativas o alteraciones metabólicas que afecten al cerebro.

La señal que se obtiene es de pequeña magnitud, entorno a los  $40 \mu\text{V}$ , por lo que necesita ser amplificada. Dicha amplificación es diferencial, al tomar las variaciones de voltaje entre varios puntos. La colocación de los sensores extracraneales en la cabeza del paciente atiende a un patrón espacial, descrito en el llamado sistema internacional 10-20 (**Ilustración 2-5**), que hace referencia a la distancias proporcionales entre ellos. Los electrodos siguen una nomenclatura donde las letras señalan la región cerebral sobre la que yacen (Fp, prefrontal; F, frontal; C, central; P, parietal; T, temporal y O, occipital), mientras que los números designan el hemisferio (impares el izquierdo, pares el derecho) y los electrodos de la línea media se señalan con la letra z.



**Ilustración 2-5.** Ubicación de los electrodos según el sistema internacional 10-20. **A)** Vista lateral. **B)** Vista cenital. *Fuente:* Imagen extraída de [14].

Un apartado muy importante de la electroencefalografía es el tratamiento de los artefactos. Se trata del verdadero caballo de batalla en la práctica diaria de esta técnica, ya que es imprescindible diferenciar entre un artefacto y una señal bioeléctrica cerebral. Podemos distinguir dos tipos de artefactos: externos e internos.

Los artefactos externos son los derivados de la máquina de EEG, del instrumental o del medio ambiente. Pueden deberse a un error en la colocación o a la sensibilidad de los electrodos, alteración de los parámetros de calibración, electricidad estática u otros elementos eléctricos externos, como aparatos médicos presentes en las inmediaciones.

Los artefactos internos son los derivados del propio paciente. Los más significativos son:

- Electrocardiograma (EKG) o marcapasos. Señal intermitente y sincrónica del complejo QRS del EKG superpuesta a la señal del EEG.
- Pulso. Su oscilación genera un impulso rítmico de vaivén en la línea de base del EEG.
- Respiración. Oscilaciones lentas y rítmicas en la línea de base.
- Electromiograma (EMG) o artefacto muscular (tics, mioclonías, temblores, deglución...)
- Contracción músculos craneofaciales sobre electrodos frontotemporales o parietales y en pacientes inquietos o con rigideces, que originan descargas irregulares de amplitud y frecuencia elevada.
- Movimientos oculares o electrooculograma (EOG). El parpadeo repetitivo da lugar a un movimiento en áreas anteriores, que simula una actividad theta y/o delta.
- Sudor. Al igual que la grasa, producen un balanceo dando lugar a una inestabilidad de la línea de base.
- Reflexión eléctrica dérmica. Cambio transitorio en la resistencia eléctrica de la piel por estimulación o ruido, que produce un desplazamiento lento de la línea de base.
- Movimientos del paciente. En sujetos inquietos o confusos, que originan cambios en la línea de base, haciendo muy difícil la interpretación del registro.

Podemos colegir inmediatamente que la eliminación de los artefactos es obligatoria para poder analizar adecuadamente la señal EEG. Esto se puede hacer a priori, intentando que los sujetos bajo observación se muevan lo menos posible, o bien a posteriori, tratando las señales contaminadas con artefactos, ya sea descartando muestras o filtrando la señal en determinadas bandas frecuenciales. Veremos esto con más detalle en capítulos posteriores.

## 2.4 Conclusiones

En este capítulo hemos podido ver cuál es la estructura del cerebro y cómo su clasificación anatómica más habitual nos resultará útil en nuestro trabajo al estar basada en divisiones espaciales que, a grandes rasgos, coinciden con áreas funcionales de nuestro interés. Es de especial relevancia el lóbulo frontal para el estudio de los movimientos corporales. El potencial de acción que producen las neuronas para comunicarse se estudia de forma agrupada en fenómenos de sincronización (ERS) y desincronización (ERD) que dan lugar a las ondas cerebrales, las cuales serán objeto del tratamiento de señal. El electroencefalograma (EEG) es una herramienta que nos permite recoger las señales del cerebro, que pueden ser integradas en sistemas BCI para su ulterior análisis e interpretación.



# 3 LAS INTERFACES CEREBRO-ORDENADOR (BCI)

---

Los sistemas BCI proporcionan un canal por el que potencialmente pueden ser enviados mensajes y órdenes al mundo exterior. Este canal, que no está fundamentado en la actividad estrictamente muscular, parte de medidas sobre la actividad electroencefalográfica y otras funciones cerebrales. La base para la elaboración de este capítulo se sustenta en el libro [18].

En los últimos tiempos se ha apreciado un auge considerable en la investigación BCI debido a los avances en el entendimiento del cerebro y sus funciones, los cada vez más potentes equipos electrónicos de bajo coste y también al reconocimiento y concienciación crecientes por parte de la sociedad de las necesidades y habilidades sin desarrollar de las personas con discapacidad. Siguiendo estas pautas, los esfuerzos empleados en la investigación de los sistemas BCI se concentran en desarrollar nuevas tecnologías de comunicación y control aumentativas, orientadas a usuarios con desórdenes neuromusculares graves, tales como la ELA<sup>1</sup>, parálisis cerebral, derrames cerebrales o lesiones medulares.

El objetivo más inmediato es proporcionar a los posibles usuarios, quienes quizás se encuentren completamente paralizados o confinados a la inmovilidad, unas vías de comunicación que les permitan expresar sus deseos a los cuidadores e incluso operar procesadores de texto y neuroprótesis.

En la actualidad, los sistemas BCI utilizan distintas señales electrofisiológicas para determinar la voluntad del usuario, como el potencial cortical lento (SCP), el potencial evocado P300, las ondas  $\mu$  y  $\beta$  registradas en el cuero cabelludo (son las empleadas en este trabajo) o la actividad neuronal de la corteza cerebral obtenida con electrodos implantados. Estas señales se traducen en tiempo real a comandos que operan una pantalla o algún otro dispositivo. Para un funcionamiento exitoso se requiere que el usuario sea capaz de codificar dichos comandos con las señales observadas y que el sistema BCI derive los comandos a partir de las señales obtenidas. Es decir, el usuario y el sistema BCI necesitan adaptarse el uno al otro en una etapa inicial de entrenamiento y continuar haciéndolo en lo sucesivo para así obtener un rendimiento estable. Los 90 bits/min de tasa de transferencia de información [15] como cota máxima de los sistemas BCI a día de hoy pueden parecer escasos, pero son valiosísimos para todas aquellas personas a quienes se les abre el abanico de los métodos de comunicación aumentativos alejados de los convencionales. Por otra parte, hay que tener en cuenta que muchas de las posibles aplicaciones de la tecnología BCI, como el control de neuroprótesis, podrían requerir de tasas de bit más elevadas.

El progreso futuro de este campo dependerá del enfoque de la investigación y el desarrollo BCI hacia un problema multidisciplinar que afecta a la neurobiología, psicología, ingeniería, matemáticas e informática. Será necesario identificar las señales cerebrales que los usuarios pueden controlar mejor, desarrollar métodos de entrenamiento que optimicen el control de los dispositivos, determinar los mejores algoritmos que traduzcan las señales en comandos, identificar y eliminar los artefactos tales como los electromiogramas (EMG) y los electrooculogramas (EOG), adoptar procedimientos objetivos y precisos para evaluar el rendimiento de los sistemas, identificar las aplicaciones BCI adecuadas y sus destinatarios

---

<sup>1</sup> Esclerosis lateral amiotrófica.

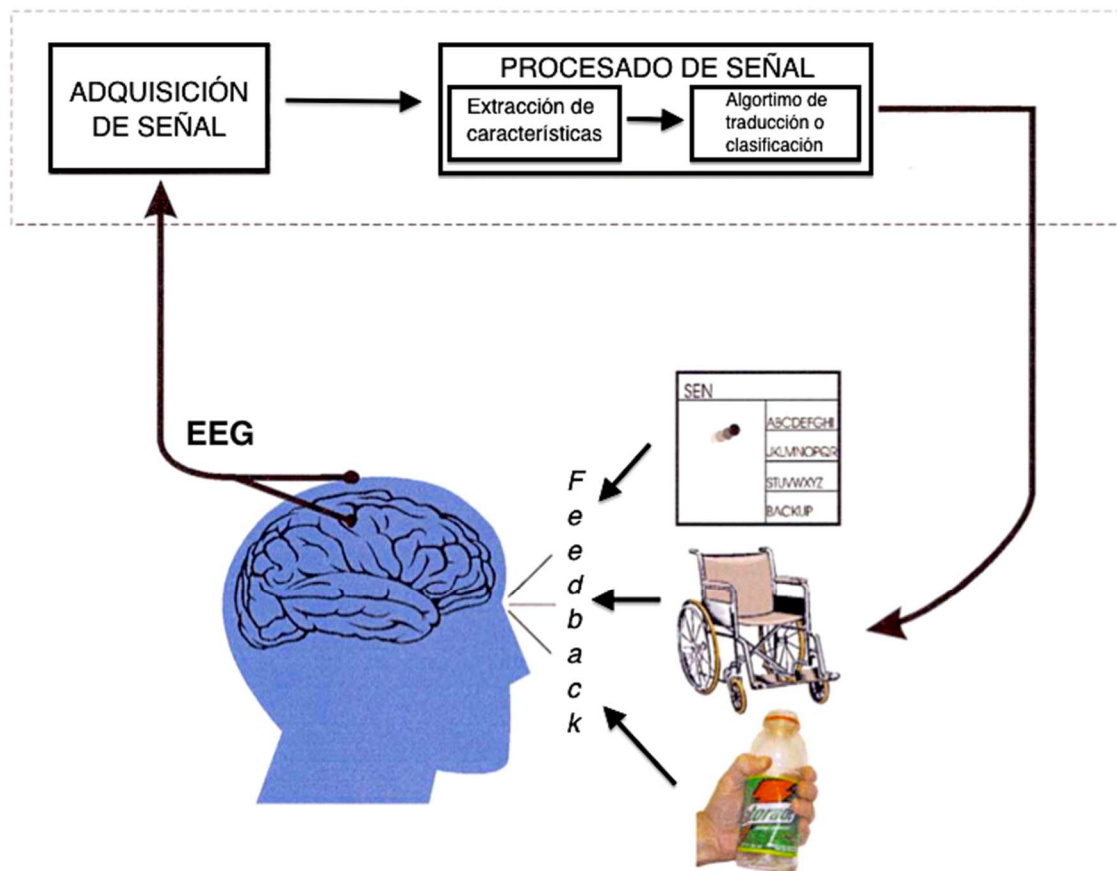
y, por último y especialmente, prestar atención a los factores que afecten a la aceptación de la tecnología aumentativa por parte del usuario final, incluyendo la utilidad, la funcionalidad, la facilidad de uso, la comodidad o el impacto estético.

Es razonable albergar la expectativa de unos sistemas BCI que lleguen a satisfacer las necesidades de las personas con discapacidades motrices por medio de nuevas opciones de control y comunicación. En otro nivel de utilidad, podríamos encontrar aplicaciones que ofrezcan un canal de control suplementario en circunstancias especiales o para usos más prosaicos como videojuegos y simuladores.

En este trabajo implementaremos un sistema BCI a partir del casco Emotiv EPOC para la adquisición de señales electroencefalográficas (EEG), empleando las herramientas proporcionadas por Matlab para el procesamiento de señales en tiempo real. También desarrollaremos un par de aplicaciones sencillas que pueden servir de ilustración de los resultados concretos y de base para otras funcionalidades más avanzadas.

### 3.1 Esquema y características de un sistema BCI

Como cualquier otro sistema de comunicaciones o de control, un sistema BCI consta de una entrada (e.g., actividad electrofisiológica del usuario), una salida (e.g., comandos de un dispositivo), componentes que traducen la una en la otra y un protocolo que determina su funcionamiento. En la **Ilustración 3-1** podemos ver estos elementos y su interacción.



**Ilustración 3-1.** Esquema de un sistema BCI. *Fuente:* Modificación propia de [16].

### 3.1.1 Adquisición de señales

Podemos categorizar los sistemas BCI electrofisiológicos en función del empleo de métodos invasivos, como los sensores intracorticales, o no invasivos, como los EEG que utilizaremos en este trabajo. También podemos distinguir entre el empleo de entradas evocadas, que resultan de estimulaciones sensoriales estereotipadas proporcionadas por el sistema, y entradas espontáneas, como los ritmos EEG de la corteza motora, que no dependenden de estimulaciones externas. En la parte de adquisición de señales del sistema, la entrada elegida se registra mediante electrodos, se amplifica y se digitaliza.

### 3.1.2 Procesado de señal: extracción de características

Los datos digitalizados se someten a uno o varios procesos de extracción de características, como el filtrado espacial o el análisis espectral, con los que se espera discernir las variables que codifican los mensajes u órdenes del usuario. Las características pueden residir en el dominio temporal (e.g., potenciales evocados o tasas de disparo de las neuronas) y/o en el dominio frecuencial (e.g., ondas  $\mu$  y  $\beta$ ), por lo que cabe la posibilidad de que el sistema use ambos para mejorar el rendimiento.

Por lo general, las características de señal de los sistemas BCI son eventos cerebrales identificables, como el disparo de una población neuronal determinada o la activación sincronizada de la corteza motora. El conocimiento previo de estos eventos es relevante a la hora de implementar el sistema ya que permitirán mayor eficiencia en el registro de las señales, un mejor aprendizaje de los usuarios en el control de los eventos y una mayor eficacia en el reconocimiento y eliminación de los artefactos.

### 3.1.3 Procesado de señal: algoritmo de traducción o clasificación

El siguiente paso es el de traducir las características de la señal en comandos u órdenes del usuario para que se lleven a cabo en el dispositivo. Ya sea utilizando métodos lineales (e.g., análisis estadístico clásico) o no lineales (e.g., redes neuronales), el fin es el mismo: convertir variables independientes en dependientes.

Los algoritmos efectivos se adaptan a cada usuario en tres niveles. En el primer nivel, cuando un nuevo usuario accede por primera vez al sistema BCI, el algoritmo se adapta a las particularidades de la señal del usuario, como el rango de amplitud o la tasa de disparo. Un sistema que tenga únicamente este nivel de adaptación, que significa un único ajuste inicial, será efectivo mientras el desempeño del usuario sea estable. Sin embargo, sabemos que la EEG, entre otras, presenta variaciones en el corto y el largo plazo relacionadas con la hora del día, niveles hormonales, el entorno cercano, sucesos recientes, cansancio, enfermedad y otros factores.

Se necesita, por tanto, un segundo nivel de adaptación: ajustes periódicos *online* para reducir el impacto de las reseñadas variaciones espontáneas. Un buen algoritmo de traducción se ajustará a estas variaciones para hacer corresponder el rango actual de valores de las características de la señal con el rango disponible de valores de los comandos del dispositivo.

El tercer nivel de adaptación encara el aspecto crucial de una operación BCI efectiva: la dependencia de la interacción satisfactoria de dos controladores adaptativos, el sistema BCI y el cerebro del usuario. Se hace uso de las capacidades adaptativas del cerebro cuando interpretamos una característica de una señal electrofisiológica, que es el mero reflejo de una función cerebral, como el producto final de dicha función. Es decir, se transforma en una salida que lleva la intención del usuario al mundo exterior. En el escenario más deseable los resultados de las operaciones BCI afectarán a las futuras entradas y el cerebro modificará las características de la señal para mejorar la operativa del sistema. Por ejemplo, si la característica es la amplitud de las ondas  $\mu$  y  $\beta$ , la correlación entre dicha amplitud y la intención del usuario aumentará, deseadamente, con el tiempo y el sistema podría recompensarlo con una comunicación mas rápida que reconozca y estimule el desarrollo de una mayor habilidad del usuario en la interacción con el sistema.

### 3.1.4 El dispositivo de salida

En la mayoría de los sistemas BCI el dispositivo de salida es una pantalla de ordenador y la salida es una selección de letras o iconos que en aquella se presentan. Algunos sistemas tienen una salida intermedia en forma de cursor que se dirige al objetivo antes de su selección, que será un *feedback* o realimentación que usará el cerebro para mantener e incrementar la precisión y la velocidad de comunicación. En las aplicaciones planteadas en este trabajo haremos uso de este planteamiento para mejorar el rendimiento.

En una fase temprana de desarrollo tecnológico se encuentran las neuroprótesis para personas con lesiones medulares, cuyo manejo y control a través del sistema BCI las convierte en el propio dispositivo de salida del sistema.

### 3.1.5 El protocolo de operación

El protocolo guía la operación del sistema, define cómo se arranca y para, si la comunicación es continua o discontinua, si la transmisión del mensaje es disparada por el sistema o por el usuario, la secuencia y frecuencia de las interacciones entre ambos y qué *feedback* se obtiene.

La mayoría de los protocolos empleados en BCI no son apropiados en su totalidad para las aplicaciones que sirven a las necesidades de las personas con discapacidad. No hay un control total del usuario, es el investigador quién enciende y apaga el sistema. Como se necesita medir con minuciosidad y precisión en el laboratorio, a los sujetos bajo estudio se les dice qué mensajes o comandos enviar. En un funcionamiento normal son los usuarios quienes eligen el mensaje. Este problema puede complicar la transición desde el ámbito de la investigación al del mundo real.

## 3.2 Ejemplos de BCI

Mientras que muchos estudios han descrito la correlación entre las medidas electrofisiológicas de las funciones cerebrales y las respuestas neuromusculares o la intención del usuario y que pueden utilizarse en un sistema BCI, son relativamente escasos los artículos sometidos a *peer-review*<sup>2</sup> que satisfacen los puntos del apartado anterior y el esquema de la **Ilustración 3-1** con sistemas que dan el control al usuario sobre un dispositivo y mantienen un *feedback* concurrente sobre el mismo.

De entre todos los grupos de BCI independientes, reseñamos el que está relacionado con este trabajo, el de las ondas  $\mu$  y  $\beta$ .

### 3.2.1 Ondas $\mu$ y $\beta$ y otra actividad de la corteza motora

Varios factores sugieren que las ondas  $\mu$  y  $\beta$  pueden ser buenas características de señal para una comunicación basada en EEG. Están asociadas con las áreas corticales más directamente conectadas con los canales de respuesta motora del cerebro. El movimiento o su preparación se acompaña de un descenso de los ritmos cerebrales de forma contralateral al mismo. Esta alteración se llama ERD (evento relacionado con la desincronización, de sus siglas en inglés), mientras que la opuesta, el aumento del ritmo, se llama ERS (evento relacionado con la sincronización, de sus siglas en inglés) y ocurre en la fase de relajación tras un movimiento.

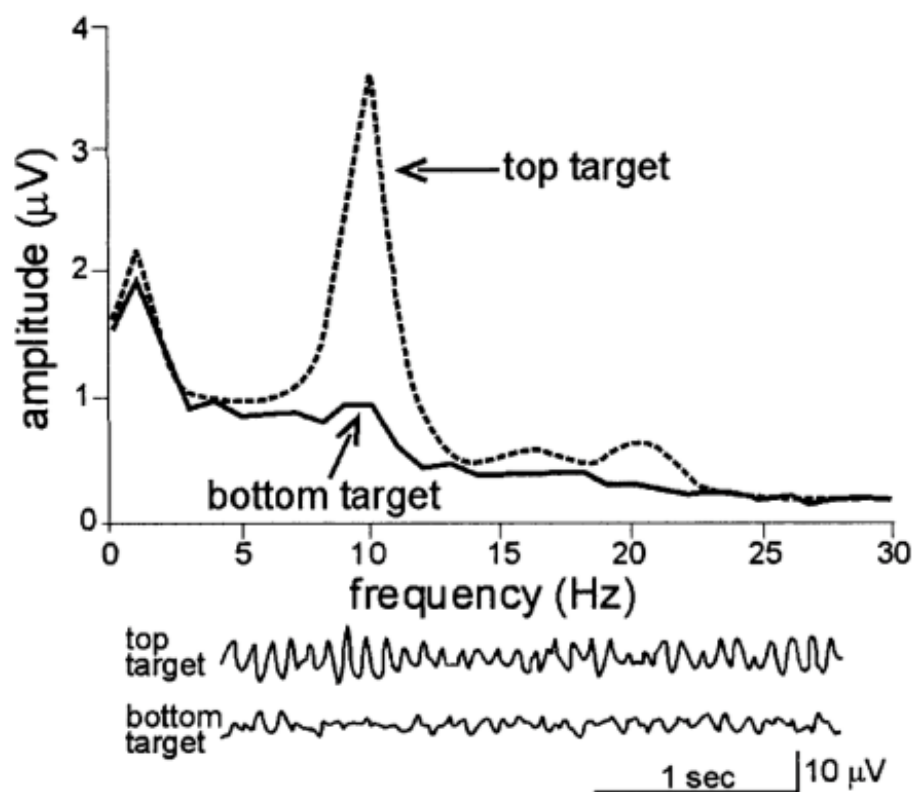
Y en lo que, indudablemente es el aspecto más atractivo de este trabajo y es más relevante para el uso de BCI, ERD y ERS no requieren que se produzca físicamente el movimiento porque también ocurren cuando se imagina dicho movimiento, cuando se conciben imágenes motoras. Desde mediados de los años 80 varios BCI basados en las ondas  $\mu$  y  $\beta$  han sido desarrollados, de los que tomamos dos ejemplos:

---

<sup>2</sup> La revisión por pares es un proceso de evaluación de los artículos científicos antes de su publicación.

- **BCI Wadsworth:** usuarios con o sin discapacidades motoras aprenden a controlar la amplitud de sus ondas  $\mu$  o  $\beta$  para mover un cursor en una o dos dimensiones hacia objetivos en una pantalla de ordenador. En la **Ilustración 3-2** se muestra el fenómeno.

Para cada dimensión de control del cursor, una ecuación lineal traduce la amplitud de las ondas  $\mu$  y  $\beta$  de varios sensores situados en el cuero cabelludo a una tasa de 10 veces/segundo. El 80% de los usuarios aprenden a controlar el cursor tras unas 3 semanas, con 2 ó 3 sesiones de 40 minutos por semana. En las sesiones iniciales, los usuarios emplean imágenes del movimiento (imaginar el movimiento de la mano, actividades corporales completas, relajación) para controlar el cursor. A medida que avanza el entrenamiento, las imágenes se tornan cada vez menos importantes y los usuarios aprenden a mover el cursor como si realizaran actos motores ordinarios, es decir, sin pensar en los detalles del proceso. Se ha llegado a alcanzar una precisión del 95% en el manejo del cursor para responder preguntas orales de sí o no y tasas de transferencia de información de hasta 25 bits/minuto.



**Ilustración 3-2.** Espectro frecuencial y ondas EEG de la corteza motora registradas sobre el cuero cabelludo. El usuario controla la amplitud de las ondas  $\mu$  (8-13 Hz) para mover un cursor hacia el extremo superior o inferior de la pantalla. *Fuente:* Imagen extraída de [17].

La investigación en este BCI se ha centrado en extraer las características temporales, espectrales y topográficas de las ondas  $\mu$  y  $\beta$  para optimizar la interacción adaptativa entre el usuario y el sistema. Algunas mejoras incluyen filtros espaciales personalizados al comportamiento de cada usuario, análisis autorregresivo en frecuencia para mayor resolución en tiempos cortos y selección optimizada de las constantes en la ecuación de traducción de la EEG.

- **BCI Graz:** También está basado en ERD y ERS de las ondas  $\mu$  y  $\beta$ . La investigación se ha centrado en distinguir entre la EEG asociada de imaginar varias acciones motoras simples, como mover el pie o la mano izquierda, para controlar un cursor o abrir y cerrar una prótesis de una mano paralizada. En el capítulo correspondiente a la explicación práctica del sistema BCI empleado en este trabajo, veremos las similitudes con esta investigación.

En su protocolo estándar, el usuario participa en una sesión inicial para seleccionar un paradigma de imagen de movimiento. En series de 160 *trials*<sup>3</sup> de 5,25 segundos de duración, el usuario imagina una entre varias acciones (e.g., mover la mano derecha, la mano izquierda, un pie o la lengua) y la EEG de varios electrodos situados sobre la corteza motora se somete a análisis frecuencial para extraer sus características. Para cada movimiento imaginado se define un vector de  $n$  dimensiones y entre todos ellos establecen un clasificador, lineal o no, específico del usuario (e.g., el LDA que se estudia más adelante o el DSLVQ<sup>4</sup>), que decide qué acción se está imaginando. En las sesiones siguientes, el sistema emplea el clasificador entrenado previamente para traducir el pensamiento del usuario en una salida continua (e.g., un cursor o una barra en movimiento) o discreta (e.g., selección de una letra o símbolo) que se presenta al usuario como *feedback* en una pantalla de ordenador. Normalmente, el algoritmo de clasificación se ajusta entre las sesiones de distintos días. Tras 6 ó 7 sesiones con *trials* de dos clases de movimientos imaginados (i.e., mano derecha y mano izquierda), alrededor del 90% de los usuarios pueden llegar a manejar el sistema con éxito, llegando a alcanzar precisiones de más del 90% en algunos casos.

Los estudios actuales buscan mejorar la clasificación con parámetros derivados del análisis frecuencial autorregresivo y del uso de filtros espaciales alternativos. En el terreno de la aplicación, se ha experimentado con sistemas BCI de control en el hogar del usuario que actualizan el algoritmo de clasificación remontamente desde el laboratorio [18].

### 3.3 Emotiv EPOC

Es un dispositivo móvil inalámbrico de EEG de 14 canales relativamente popular por su sencillez y su precio ajustado (entorno a los 800 dólares) en comparación con el resto de marcas comerciales, que se utiliza en diversas aplicaciones BCI, algunas suministradas por el propio fabricante californiano Emotiv Inc. Vemos una imagen del mismo en la **Ilustración 3-3**. A pesar de estar enfocado al mercado de consumo, el dispositivo permite acceder fácilmente a los datos recabados por los sensores y es por ello que también se emplea en etapas iniciales de investigación sobre el cerebro humano mediante la detección de las órdenes del usuario o la revisión de los indicadores de rendimiento y expresiones faciales. Emotiv EPOC cuenta, además de los sensores EEG, con información EOG y EMG facial que el software usa para el control de aplicaciones. Según el fabricante, es capaz de detectar indicadores de rendimiento para los estados del usuario de agitación, atención, relajación, interés, estrés y concentración. El dispositivo reconoce expresiones faciales como guiño, parpadeo, sorpresa, fruncimiento, risa o rictus.

Cuenta con un programa que permite la configuración y la lectura en tiempo real de las ondas cerebrales, así como su grabación para un tratamiento posterior. Una SDK y una API también se facilitan para entornos de desarrollo. Por norma general, para derivar la correlación entre algún tipo de actividad cerebral y una tarea o evento cognitivo específico, los datos EEG son obtenidos de manera continua mientras se van sucediendo distintos eventos a lo largo de un lapso de tiempo. Después se discretiza la grabación completa en secciones de tiempo llamadas *epochs* en función de las ocurrencias de los eventos, obteniendo así la respuesta relacionada.

El hecho de que la transmisión de datos entre el dispositivo y el ordenador sea inalámbrica puede levantar a priori la alarma en lo referente a sincronización, pérdida de paquetes o desconexiones temporales. Veremos si esto afecta realmente al desempeño del sistema.

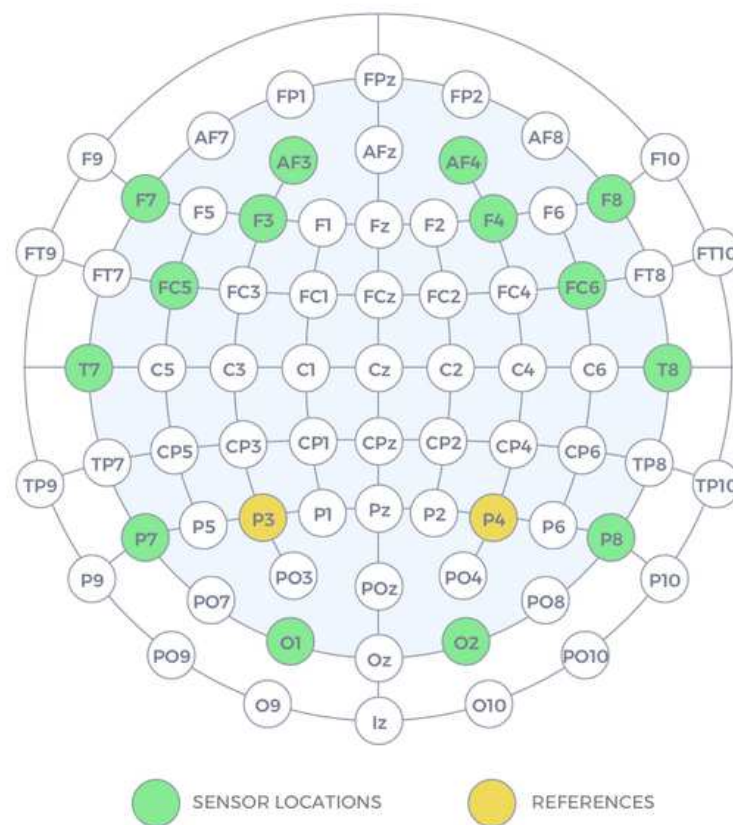
El casco Emotiv EPOC está diseñado para proporcionar una buena cobertura de los lóbulos frontal y prefrontal y algo menor en los lóbulos temporal, parietal y occipital. En la **Ilustración 3-4** se muestran la localización de los sensores usando el sistema internacional 10-20.

<sup>3</sup> Un *trial* es cada vez que se le pide al sujeto que imagine un movimiento concreto durante un periodo de tiempo determinado.

<sup>4</sup> Distinction Sensitive Learning Vector Quantization es un método optimizado para la selección de características.



**Ilustración 3-3.** Caso Emotiv EPOC empleado en el desarrollo de este trabajo. *Fuente:* Fabricante.



**Ilustración 3-4.** Localización de los sensores de Emotiv EPOC en el cráneo. Vista cenital. *Fuente:* Fabricante.

### 3.4 Conclusiones

El control y la comunicación del cerebro con el mundo exterior sin emplear los músculos o los nervios ya no es solo una mera especulación. Múltiples estudios y aplicaciones prueban que una comunicación directa desde el cerebro es posible y puede servir para una gran variedad de propósitos. De todos modos, la realidad actual todavía se encuentra lejos de los escenarios imaginados más sofisticados, como pilotar aviones o transmitir discursos en tiempo real. El valor futuro de las BCI está indefectiblemente ligado a la capacidad de aumentar la tasa de transferencia de información.

Los sistemas BCI constan de varias etapas que son las de adquisición de señales (el método no invasivo con EEG será el empleado aquí), el procesado de señal (dividido a su vez en la extracción de características y la traducción o clasificación) y el dispositivo de salida que servirá de *feedback* al usuario. Debemos contar con un protocolo de operación y afrontar una tarea de adaptación del usuario al sistema.

Los futuros avances de los sistemas BCI se fundamentan en la coordinación científica y tecnológica interdisciplinar, identificación de las características de las señales cerebrales que mejor puedan controlar los usuarios, optimización de los métodos de extracción y de traducción, eliminación de los artefactos, objetivación del rendimiento del sistema, desarrollo de aplicaciones apropiadas y atención a las necesidades y preferencias de los usuarios.



# 4 RECONOCIMIENTO DE PATRONES Y TEORÍA DE CLASIFICACIÓN

---

En nuestra vida cotidiana tomamos multitud de decisiones, de manera consciente e inconsciente, en función de la información que nos aportan nuestros sentidos. De forma evolutiva el ser humano ha desarrollado sistemas neuronales y cognitivos tremendamente sofisticados con el fin de procesar los datos que recibimos externamente y asignar una categoría a cada patrón reconocido que derive en la acción a tomar correspondiente.

Distinguir una cara familiar, comprender un discurso hablado, interpretar un mensaje manuscrito o identificar un alimento en mal estado son procesos inadvertidamente complicados que se sustentan en el reconocimiento y clasificación de patrones [19].

Los avances tecnológicos recientes permiten el empleo de máquinas en el reconocimiento y clasificación de patrones en áreas como el reconocimiento de voz, identificación dactilar, secuenciación del ADN y muchas otras. Para algunas áreas, especialmente las relacionadas con la audición y la visión, las tareas de diseño, como son los algoritmos empleados y el hardware especialmente dedicado, están guiadas por cómo se abordan las soluciones en la propia naturaleza [20].

Las técnicas de aprendizaje máquina (*Machine Learning*) mejoradas, gracias al aumento exponencial de la capacidad computacional, han permitido también grandes mejoras en el reconocimiento y clasificación de patrones.

## 4.1 Introducción

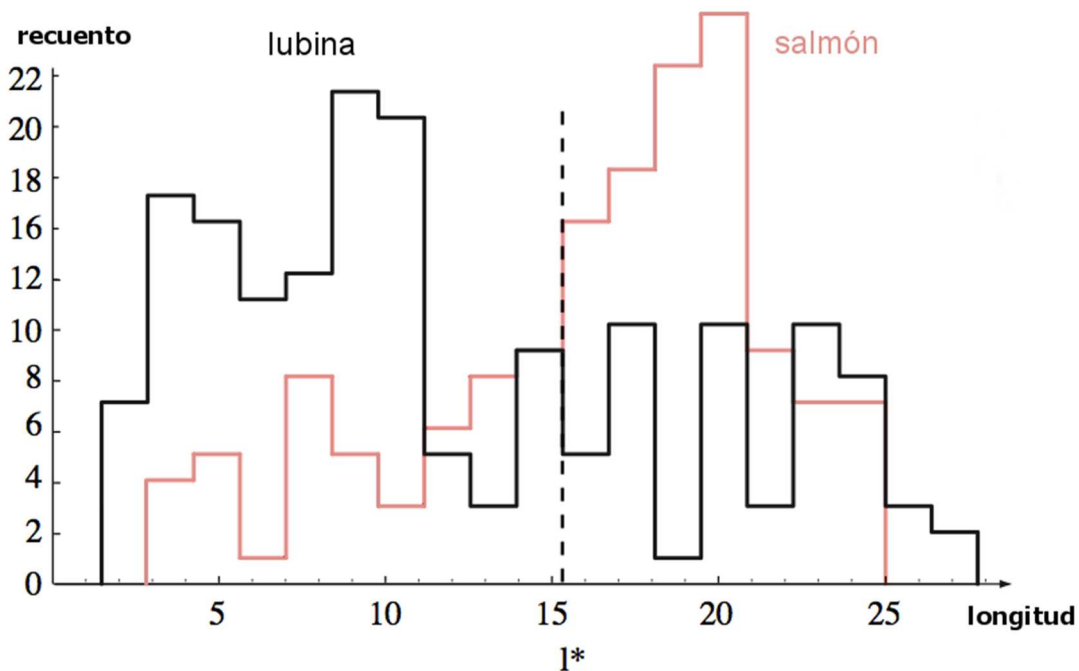
El estudio realizado en este capítulo sigue el análisis mostrado en el libro *Pattern Classification* de Duda, Hart y Stork [19]. Vamos a desarrollar los conceptos y funcionamiento del esquema de la **Ilustración 4-1** a través de un ejemplo imaginario de una planta de procesamiento de pescado en el que queremos separar los ejemplares entrantes en una máquina por su especie. Suponemos que tenemos lubinas y salmones, y a través de unos sensores ópticos intentamos descubrir algunas características que diferencien a un tipo de pescado de otro.



**Ilustración 4-1.** Esquema inicial de un sistema de reconocimiento de patrones.

En primer lugar, la cámara captura una imagen del pescado. Acto seguido, la señal de la cámara es preprocesada para simplificar las operaciones posteriores con el cuidado de evitar la pérdida de información relevante. Los datos de un solo pescado se envían al extractor de características, cuyo propósito es el de reducir su volumen midiendo ciertas características o propiedades, como pueden ser la longitud o el brillo. Estas características, o más precisamente sus valores, son enviadas al clasificador que las evalúa y toma una decisión en lo que respecta a la especie.

Hacemos una tentativa de diseño del extractor de características y del clasificador partiendo de la suposición de que un salmón es, por norma general, más grande que una lubina. Esto nos permite establecer un primer modelo para el pescado: la longitud típica del salmón es mayor que la de la lubina. La longitud se convierte en una característica evidente y así podríamos intentar clasificar los peces simplemente observando si la longitud  $l$  de un ejemplar supera algún valor crítico  $l_c$ . Este valor de  $l_c$  puede establecerse a partir de muestras de entrenamiento de los distintos tipos de pescado, haciendo mediciones y revisando los resultados. En la **Ilustración 4-2** podemos ver un posible escenario. Vemos que no existe un valor umbral  $l^*$  que discrimine inequívocamente entre ambas categorías. Usando únicamente la longitud del pescado, nos veremos abocados a cometer algunos errores.

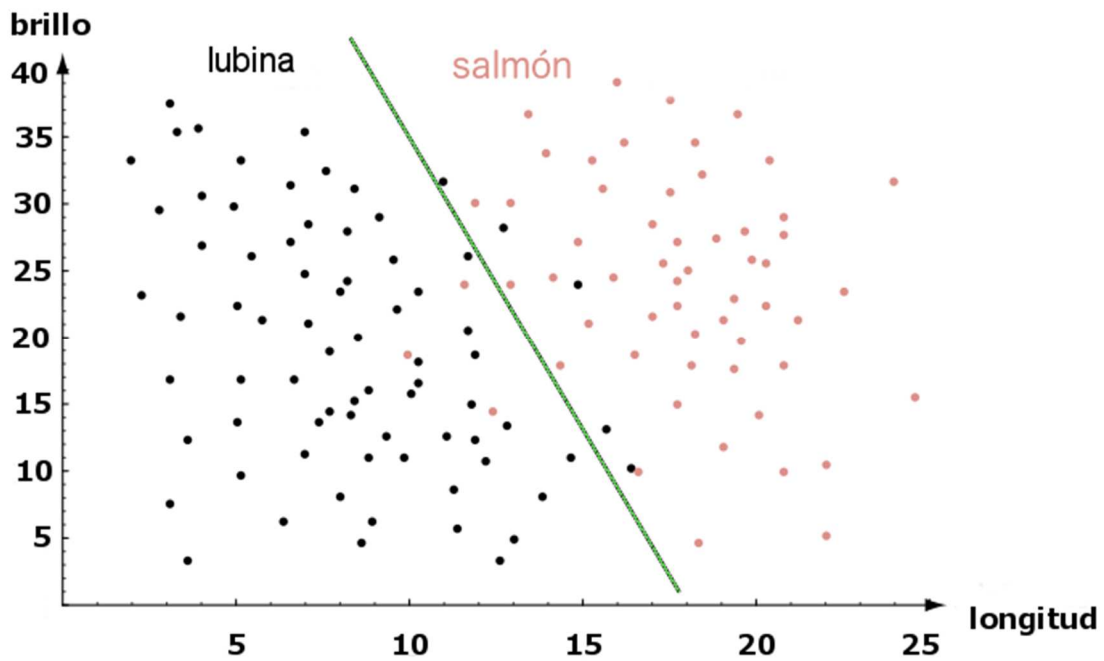


**Ilustración 4-2.** Histogramas de la característica de longitud de dos categorías. *Fuente:* Imagen modificada de [19].

Introducimos ahora el coste que conlleva nuestra decisión. Habitualmente la equivocación en la asignación de una clase tiene un coste simétrico, esto es, decidir que tenemos una lubina cuando en realidad se trata de un salmón nos supone el mismo perjuicio que al contrario. Debemos hacer constar que esto no tiene obligatoriamente que ser así, pero para nuestro trabajo con señales cerebrales tomaremos por simplicidad el escenario simétrico. La importancia del coste asociado a una decisión es que nos sirve de punto de partida para construir una regla de decisión, o frontera de decisión. Minimizar dicho coste es el objetivo fundamental de la teoría de decisión, del que la clasificación de patrones es un importante campo.

Suponemos ahora que añadimos una característica más, el brillo, a nuestro espacio de características de los peces. El extractor de características describe ahora un vector de características para cada pescado con el que realizar la clasificación en un espacio de características de dos dimensiones. Debemos dividir el espacio de características en dos regiones con una frontera de decisión. Todos los puntos de una región serán

considerados salmónes y todos los de la otra, lubinas. En la **Ilustración 4-3** tenemos una gráfica que representa esta situación con las características de anchura y brillo para las categorías de lubina y salmón. La línea diagonal verde puede servir de frontera de decisión del clasificador. El error de clasificación total en la **Ilustración 4-3** es menor que usando una sola característica como en la **Ilustración 4-2**, aunque sigue habiendo algunos errores.



**Ilustración 4-3.** Espacio de dos características para dos categorías. *Fuente:* Imagen modificada de [19].

Podríamos pensar a priori que extraer más características de nuestras observaciones ayudará al clasificador en su desempeño, pero hay que ser consciente de que no todas las características cumplirán esta premisa. Pueden ser irrelevantes o estar correlacionadas con otras que ya consideramos, con lo que no aportarán nada al rendimiento del clasificador, o incluso harán que funcione peor. También puede ocurrir que haya una dificultad añadida en la extracción de la característica o un coste computacional que la haga poco interesante frente a la mejora que supone. Por otra parte, una alta dimensionalidad, contar con demasiadas características, puede ir en contra de la eficiencia del proceso en cuestiones de tiempo o dinero.

Es importante también incluir el concepto de generalización. Debemos evitar que nuestras muestras de entrenamiento definan una frontera de decisión demasiado adaptada a ellas, demasiado perfecta, y, por ende demasiado complicada, cuando lo que queremos es que el clasificador sea capaz de discernir las características subyacentes de las nuevas muestras que le lleguen. Es decir, es preferible simplificar el proceso y que el clasificador tenga un peor rendimiento con las muestras de entrenamiento, a costa de un mejor comportamiento con las nuevas muestras <sup>1</sup>.

¿Pero hasta qué punto podemos simplificar? ¿Podemos predecir cómo de buena será la generalización de nuestro sistema? Estas respuestas corresponden a los problemas tratados por el reconocimiento estadístico de patrones, que se centra en las propiedades estadísticas de los patrones, habitualmente expresadas en densidades

<sup>1</sup> En este punto de la introducción hacemos una anotación sobre el *overfitting*, que es la situación en la que el sistema es tan complejo y el modelo del clasificador tan ajustado a la secuencia de entrenamiento que realiza una clasificación perfecta de las muestras de entrenamiento mientras su rendimiento es pobre con las nuevas muestras. Una de las áreas de investigación más importantes en la clasificación de patrones estadística es el ajuste óptimo de la complejidad del modelo: lo suficientemente complejo para ver las diferencias entre las categorías pero lo suficientemente simple para comportarse bien con las nuevas muestras.

de probabilidad.

En resumen, la extracción de características toma como entrada patrones y produce como salida valores de características. El número de características siempre se elige menor a las que se necesitarían para describir por completo el objeto de interés, lo cual conduce a pérdida de información.

Existen además otros tres campos estrechamente relacionados y que se emplean con frecuencia, implícita o explícitamente en los primeros pasos del reconocimiento de patrones como son la regresión, la interpolación y la estimación:

- a) Con la regresión se pretende encontrar alguna descripción funcional de los datos con la intención de predecir los valores de las nuevas entradas. La regresión lineal, que es la más común y más estudiada, es aquella en la que las variables de entrada se definen como funciones lineales.
- b) Con la interpolación se consigue inferir fácilmente la función de entrada para aquellos valores intermedios que no están definidos.
- c) La estimación se realiza sobre la densidad de probabilidad de que un miembro perteneciente a cierta categoría tenga determinadas características.

## 4.2 Sistemas de reconocimiento de patrones

Analizamos ahora el esquema de la **Ilustración 4-4** de un diagrama algo más elaborado y genérico de un sistema típico de reconocimiento de patrones. Detallamos cada componente por separado, las operaciones que describen y los problemas que presenta.



**Ilustración 4-4.** Esquema avanzado de un sistema de reconocimiento de patrones.

### 4.2.1 Detección o lectura

La entrada del sistema es algún tipo de transductor que convierta alguna magnitud física en una señal, generalmente eléctrica. La dificultad que plantea deriva de las propias limitaciones del transductor en lo referente al ancho de banda, la resolución, la sensibilidad, la relación señal a ruido, la latencia, etcétera. Ya podemos intuir con lo explicado anteriormente sobre las señales cerebrales que no será trivial este punto en nuestro caso, en el que utilizaremos un casco EEG para su captación.

### 4.2.2 Segmentación y agrupamiento

En el ejemplo de la planta de pescado, hemos asumido tácitamente que cada ejemplar está aislado y podía ser distinguido fácilmente del resto en la cinta transportadora. En la práctica, los peces se amontonarán y deberemos determinar dónde empieza uno y acaba otro. Es decir, los patrones individuales deben ser segmentados. ¿Pero cómo segmentar antes de categorizar? Debemos contar con un modo de pasar de una observación a otra, y saber cuando tenemos ausencia de ellas. La segmentación es uno de los problemas más complejos del reconocimiento de patrones.

De manera relacionada, aparece el problema de agrupar las partes de un objeto compuesto o de distinguir los agrupamientos. Encontramos subconjuntos y conjuntos que complican la decisión. Los mejores clasificadores intentan incorporar el número justo de entradas a la clasificación, pero no demasiadas. ¿Cómo se hace esto automáticamente?

Por fortuna, no experimentaremos estas dificultades en nuestro caso ya que contaremos con una segmentación fija o estática que trocea la señal EEG en segmentos de duración determinada con puntos de inicio y final conocidos de antemano en los que se inscriben los movimientos imaginados. Si quisiéramos realizar una segmentación dinámica y automática, nos moveríamos en un plano de mayor complejidad.

### 4.2.3 Extracción de características

La frontera conceptual entre la extracción de características y la clasificación propiamente dicha es levemente arbitraria. Contar con un extractor de características ideal conseguiría que el trabajo del clasificador fuese mucho menos exigente. Recíprocamente, un clasificador omnipotente no demandaría mucho rendimiento al extractor de características. La distinción se realiza por razones prácticas.

El objetivo clásico del extractor de características es el de caracterizar un objeto a través de medidas cuyos valores sean muy similares a otros objetos de la misma categoría y muy diferentes a los objetos de distintas categorías. Esto lleva a pensar que debemos buscar características distintivas que sean invariantes a transformaciones irrelevantes de la entrada, como la traslación, la rotación o la escala.

Como ocurre con la segmentación, la tarea de la extracción de características está mucho más ligada al dominio de estudio que la clasificación propiamente dicha y, por tanto, necesitaremos un buen conocimiento previo de nuestro escenario. Se aplican técnicas de la clasificación de patrones para hacer al extractor de características menos sensible al ruido y, en ocasiones, para seleccionar las características más relevantes de entre las posibles. En nuestro caso, tomaremos como característica las matrices de covarianza de los ensayos en los que se hagan los movimientos imaginados.

### 4.2.4 Clasificación

Usa el vector de características que se le proporciona para asignar el objeto a una categoría. Ya que el clasificador no va a ser perfecto, debemos determinar la probabilidad para cada una de las posibles categorías. El grado de dificultad de los problemas de la clasificación depende de la variabilidad de los valores de las características en objetos de la misma categoría frente a la de los valores de las características en objetos de diferentes categorías. Esta variabilidad en la misma categoría puede deberse a la complejidad o puede producirla el ruido.

No hace falta recordar la importancia del ruido en el procesado de señales. Ya sea debido a la aleatoriedad de las entradas pertenecientes al mundo real o al comportamiento de los sensores, en la decisión y el reconocimiento de patrones estará involucrado inevitablemente afectando al rendimiento global del sistema.

Otro problema que se presenta en la práctica es que a veces no es posible determinar los valores de todas las características para una entrada en particular. ¿Cómo debería compensar esta ausencia el categorizador? Asignar un cero o la media de los valores de los patrones anteriores a la característica ausente probablemente no sea la solución óptima. De igual manera, aparece la duda de cómo entrenar al clasificador cuando los datos son incompletos.

### 4.2.5 Postprocesado

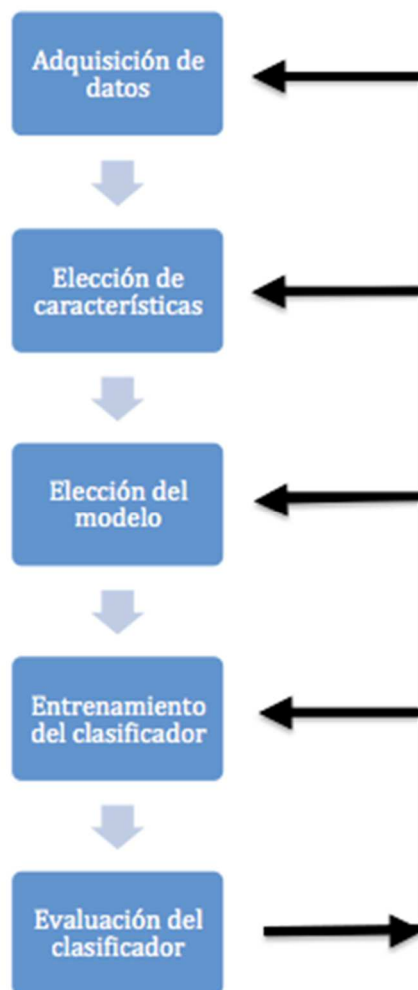
Usa la salida del clasificador para decidir la acción a tomar. Hemos estudiado el rendimiento del sistema para minimizar la tasa de error. Sin embargo, puede ser mucho mejor reducir el coste total esperado, llamado riesgo. Esto implica incorporar conocimiento sobre los costes a las decisiones del clasificador.

El postprocesado también podrá tener en cuenta el contexto para proporcionar información no proveniente del objeto estrictamente.

El uso de múltiples clasificadores puede mejorar el rendimiento, si imaginamos que cada uno opera sobre distintos aspectos de la entrada. Cuando todos están de acuerdo sobre un patrón, no hay problema. En caso contrario, hay que proceder por votación simple, por voto de calidad

### 4.3 Ciclo de diseño

El diseño de un sistema de reconocimiento de patrones comprende las siguientes etapas de la **Ilustración 4-5**, de las cuales veremos también los problemas que entrañan:



**Ilustración 4-5.** Ciclo de diseño de un sistema de reconocimiento de patrones.

#### 4.3.1 Adquisición de datos

Puede ser la parte más costosa en el desarrollo del sistema. A partir de unos pocos ejemplos típicos se puede implementar un estudio preliminar, pero muchos más datos serán necesarios para entrenar y probar el sistema. La dificultad estriba en saber cuál será la cantidad adecuada y suficientemente representativa.

### 4.3.2 Elección de características

La elección de características distintivas es un paso crítico del diseño que depende del dominio del problema. El conocimiento a priori de los objetos de estudio ayudará al diseño del clasificador, cosa que no siempre es evidente ni sencilla. Tampoco lo es el combinar dicho conocimiento con los datos empíricos para encontrar las características más relevantes y efectivas.

### 4.3.3 Elección del modelo

Puede ocurrir que el rendimiento del clasificador no sea el esperado y nos planteemos cambiar de modelo hipotético al que referimos para acercarnos al modelo real subyacente y validar si los patrones son correctos. Existe cierta incertidumbre en la tarea de selección y el cambio entre modelos que mejore la calidad del sistema.

### 4.3.4 Entrenamiento del clasificador

Es la utilización de los datos para determinar el clasificador. Entre los abundantes métodos disponibles en el diseño de sistemas de reconocimiento de patrones, en décadas recientes emergen como los más efectivos aquéllos que implican aprendizaje con patrones de ejemplo. Vemos más adelante una breve digresión sobre el aprendizaje.

### 4.3.5 Evaluación del clasificador

Es conveniente conocer el rendimiento del sistema e identificar las necesidades de mejora de sus componentes. Conduce a modificaciones de las otras etapas del sistema. Puede derivar en aumentar el número de características, medir la tasa de error, modificar las regiones de decisión, etcétera.

### 4.3.6 Complejidad computacional

Los recursos necesarios para el cálculo y la complejidad computacional de los algoritmos empleados son de gran importancia práctica. Como en cualquier problema de ingeniería queremos una solución eficiente, que no sea únicamente eficaz, sino que lo sea a bajo coste.

## 4.4 Aprendizaje y adaptación

En sentido amplio, cualquier método que incorpore información de las muestras de entrenamiento en el diseño del clasificador está haciendo aprendizaje [21]. Como se ha avanzado, es habitual entrenar al clasificador en un modelo que aprenda de las características de las muestras para establecer la frontera de decisión que minimice el error. La gran mayoría de los problemas de reconocimiento de patrones son tan complicados que no podemos aventurar previamente una decisión sobre la clasificación y emplearemos mucho tiempo en el aprendizaje.

La evolución del sistema se puede lograr a través de los siguientes métodos de aprendizaje diferenciados:

- a. **Aprendizaje supervisado:** Se proporciona la categoría o coste de cada patrón en un conjunto de muestras de entrenamiento que sirven de referencia al modelo y se busca reducir la suma de los costes para dichos patrones. Se trabaja con probabilidades para determinar si un algoritmo de aprendizaje puede alcanzar la solución de un problema concreto o si es estable a variaciones de los parámetros. Algunas técnicas de clasificación del aprendizaje supervisado son [22]:
  - Linear Discriminant Analysis (LDA)
  - Quadratic Discriminant Analysis (QDA)
  - Support Vector Machine (SVM)

- Naïve Bayes
  - k-Nearest Neighbor (k-NN)
- b. **Aprendizaje no supervisado:** No se conoce a qué categoría pertenecen las muestras y el sistema forma *clusters* o agrupaciones “naturales” en categorías con las muestras de características similares. La “naturalidad” de la agrupación se define explícita o implícitamente en el algoritmo de *clustering*. Un ejemplo de aprendizaje no supervisado es el algoritmo K-means, empleado en *data mining* [22].
- c. **Aprendizaje con refuerzo:** Es una variante del aprendizaje supervisado en la que se entrena y mejora el clasificador comparando una entrada de categoría conocida con la salida calculada por el mismo. En la clasificación de patrones, lo más común es tener un refuerzo binario que indique si la decisión es correcta o no. En el caso de contar sólo con dos categorías y el mismo coste para los errores de decisión, este tipo de aprendizaje es equivalente al aprendizaje supervisado estándar.

## 4.5 Teoría de decisión bayesiana

La teoría de decisión bayesiana se utiliza extensamente en la clasificación de patrones [19]. En este trabajo usaremos el conocido teorema de Bayes para implementar nuestra decisión sobre la pertenencia a una clase fundamentada en las probabilidades calculadas de acierto.

El teorema de Bayes nos da la probabilidad de que ocurra un evento A sabiendo que ha ocurrido otro evento B a partir de la ocurrencia del evento B condicionada a la del evento A. Se expresa como la relación siguiente:

$$p(A|B) = \frac{p(B|A)p(A)}{p(B)}$$

Seguimos, como ilustración práctica, con el ejemplo anterior de una planta de procesamiento de pescado en la que necesitamos distinguir entre lubinas, a las que llamaremos  $\omega_1$ , y salmones,  $\omega_2$  en su caso. Llamamos también suceso  $\omega$  a la entrada del pescado, indeterminado aún, a la máquina separadora.

Denotamos las probabilidades a priori  $p(\omega_1)$  y  $p(\omega_2)$  como la probabilidad de que el próximo pescado sea una lubina, es decir que el suceso  $\omega = \omega_1$ , o un salmón, que sea  $\omega = \omega_2$ . En nuestro ejemplo tenemos además que:

$$p(\omega_1) + p(\omega_2) = 1$$

Que se lee como que los pescados que entrarán en la máquina o son de una especie o son de otra. Contamos entonces con una población de dos clases que estará presente en todos los sucesos.

Establecemos una primera regla de decisión para la máquina separadora, si no conocemos ninguna característica más, a partir de las probabilidades a priori. Diremos que tenemos  $\omega_1$ , una lubina, si  $p(\omega_1) > p(\omega_2)$ , y en otros caso diremos  $\omega_2$ , un salmón. Si las probabilidades a priori son idénticas, solo acertaremos la mitad de las veces. Hemos supuesto que el coste o las consecuencias de decidirse por uno u otro pescado son las mismas. En general, la probabilidad de error es el menor valor de  $p(\omega_1)$  y  $p(\omega_2)$ .

Vamos a medir los peces antes de introducirlos en la máquina separadora y definimos  $x$  como el valor de una variable aleatoria discreta  $X$  que representa su longitud. Decimos que  $p(x)$  es la probabilidad de que la variable aleatoria discreta  $X$  tome el valor  $x$ , es decir,  $p(X = x)$  la probabilidad de que un pescado mida una determinada longitud. Definimos la función de densidad de probabilidad de  $x$  condicionada a la clase  $p(x|\omega)$



como la probabilidad de que la longitud del pescado sea  $x$  dado que el suceso sea conocido, con  $p(x|\omega_1)$  sabiendo que tenemos una lubina en la máquina y  $p(x|\omega_2)$  un salmón.

Escribimos para nuestro ejemplo la fórmula de Bayes:

$$p(\omega_j|x) = \frac{p(x|\omega_j)p(\omega_j)}{p(x)}$$

Para el caso de dos clases:

$$p(x) = \sum_{j=1}^2 p(x|\omega_j)p(\omega_j)$$

Donde  $p(x)$  es el factor de evidencia, que es un factor de escala para que la suma sea uno.

La fórmula de Bayes convierte la probabilidad a priori  $p(\omega_j)$  en la probabilidad a posteriori  $p(\omega_j|x)$ . Llamamos a  $p(x|\omega_j)$  como la verosimilitud de  $\omega_j$  con respecto a  $x$ , la clase  $\omega_j$  para la que  $p(x|\omega_j)$  es grande es más probable que sea la verdadera clase.

Si para una longitud  $x$  dada,  $p(\omega_1|x) > p(\omega_2|x)$  normalmente decidiremos que la verdadera naturaleza del pescado es  $\omega_1$ , una lubina. De aquí obtenemos la probabilidad de error al tomar una decisión dado  $x$ :

$$p(\text{error}|x) = \begin{cases} p(\omega_1|x) & \text{si decidimos } \omega_2 \\ p(\omega_2|x) & \text{si decidimos } \omega_1 \end{cases}$$

Minimizamos la probabilidad de error para un  $x$  dado si decidimos  $\omega_1$  cuando  $p(\omega_1|x) > p(\omega_2|x)$  y  $\omega_2$  en caso contrario. Esta regla minimiza la probabilidad de error media:

$$P(\text{error}) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\text{error}, x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} P(\text{error}|x)p(x) dx$$

Si para cada valor de  $x$ , tomamos  $p(\text{error}|x)$  pequeño, entonces la integral anterior será pequeña. Utilizamos la regla de decisión de Bayes para minimizar la probabilidad de error:

$$p(\text{error}|x) = \min \left[ p(\omega_1|x), p(\omega_2|x) \right]$$

Si para un  $x$  dado tenemos idénticas probabilidades condicionadas, entonces una observación concreta no nos proporciona información sobre la clase y la decisión recae por completo en las probabilidades a priori. Si las probabilidades a priori son equiprobables,  $p(\omega_1) = p(\omega_2)$ , la decisión se basará en las verosimilitudes  $p(x|\omega_j)$ . La regla de decisión de Bayes combina ambos factores anteriores para lograr la mínima probabilidad de error.

Cabe recordar que toda esta teoría bayesiana se puede ampliar para que contemple más de una característica, más de dos clases, más acciones que una decisión binaria o a una función de pérdidas por tomar la decisión equivocada más general. Obviamente, también existe un desarrollo para vectores de características o descripciones con variables continuas.

#### 4.5.1 Clasificación de tasa de error mínima

En nuestro escenario de trabajo, si queremos asignar una clase y conocemos sus probabilidades a priori,

entonces según el teorema de Bayes podemos hacer una clasificación que minimice la tasa de errores:

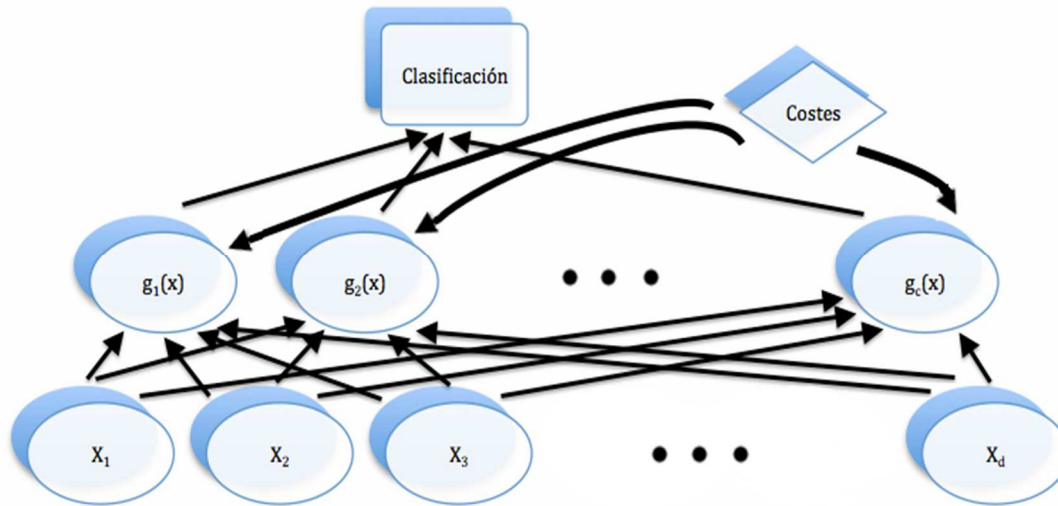
$$\hat{\omega} = \omega_i \Leftrightarrow p(\omega_i|x) \geq p(\omega_k|x) \quad \forall k \neq i$$

#### 4.5.2 Clasificadores, funciones discriminantes y superficies de decisión

Existen muchas maneras de representar los clasificadores. Una de las más útiles es como un conjunto de funciones discriminantes  $g_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, c$ . El clasificador asigna la característica  $x$  a la clase  $\omega_i$  si se cumple:

$$g_i(x) > g_k(x) \quad \forall k \neq i$$

Podemos ver el clasificador como una máquina que calcula  $c$  funciones discriminantes y selecciona la categoría correspondiente al mayor discriminante.



**Ilustración 4-6.** Esquema de un clasificador como un conjunto de funciones discriminantes.

Para el caso en el que el objetivo sea minimizar los errores, podemos simplificar tomando  $g_i(x) = p(\omega_i|x)$ , y la máxima función discriminante corresponde a la máxima probabilidad a posteriori.

La elección de las funciones discriminantes no es única. Podemos multiplicarlas por la misma constante positiva o combinarlas con la misma constante aditiva. Más genéricamente, si reemplazamos cada  $g_i(x)$  por  $f(g_i(x))$ , donde  $f(\cdot)$  es una función monótonamente creciente, la clasificación no cambia. Esto da pie a simplificaciones analíticas y computacionales. En particular, para la clasificación *minimum-error-rate* los resultados son idénticos:

$$g_i(x) = p(\omega_i|x) = \frac{p(x|\omega_i)p(\omega_i)}{\sum_{k=1}^c p(x|\omega_k)p(\omega_k)}$$

$$g_i(x) = p(x|\omega_i)p(\omega_i)$$

$$g_i(x) = \ln \left[ p(x|\omega_i) \right] + \ln \left[ p(\omega_i) \right] \quad (1)$$

Aunque las funciones discriminantes se pueden escribir de varias formas, las reglas de decisión son equivalentes. El efecto de una regla de decisión es dividir el espacio de características en  $c$  regiones de decisión  $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_c$ . Si  $g_i(x) > g_j(x)$  para todo  $j \neq i$ , entonces  $x$  está en  $\mathcal{R}_i$  y la regla de decisión nos dice que asignemos  $x$  a  $\omega_i$ . Las regiones están separadas por fronteras de decisión, superficies del espacio de características donde las mayores funciones discriminantes se igualan.

#### 4.5.2.1 El caso de dos categorías

Aunque el caso de dos categorías es únicamente una realización particular del caso de múltiples categorías, ha recibido tradicionalmente un tratamiento separado. Un clasificador que coloca un patrón en una de dos categorías existentes se llama dicotomizador. Se establece una sola función discriminante:

$$g(x) = g_1(x) - g_2(x)$$

Y se usa la regla de decisión siguiente:  $\omega_1$  si  $g(x) > 0$  y  $\omega_2$  en caso contrario. Un dicotomizador puede ser visto como una máquina que computa una sola función discriminante  $g(x)$  y clasifica  $x$  de acuerdo con el signo algebraico del resultado. De entre las varias formas en que podemos escribir la función discriminante para minimum-error-rate, las más útiles son:

$$g(x) = p(\omega_1|x) - p(\omega_2|x)$$

$$g(x) = \ln \left[ \frac{p(x|\omega_1)}{p(x|\omega_2)} \right] + \ln \left[ \frac{p(\omega_1)}{p(\omega_2)} \right]$$

#### 4.5.3 Densidad normal

La estructura de un clasificador de Bayes está determinada por las densidades condicionales  $p(x|\omega_i)$  y las probabilidades a priori  $p(\omega_i)$ . La función de densidad de probabilidad gaussiana o normal multivariante es un modelo apropiado para el caso en el que los vectores de características  $x$  para una clase dada  $\omega_i$  tengan valores continuos.

En primer lugar, recordamos que el valor esperado de una función escalar  $f(x)$  con densidad de probabilidad  $p(x)$  se define como:

$$\mathcal{E} [ f(x) ] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p(x) dx$$

Si los valores que puede tomar  $x$  están restringidos a un conjunto discreto  $\mathcal{D}$ , debemos sumar todas las muestras así:

$$\mathcal{E} [ f(x) ] \equiv \sum_{x \in \mathcal{D}} f(x) p(x)$$

Teniendo en cuenta que en este caso  $p(x)$  es la masa de probabilidad en  $x$ .

#### 4.5.4 Densidad univariante

Para la normal univariante continua o densidad gaussiana tenemos:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad (2)$$

Y el valor esperado de  $x$  lo definimos como la media  $\mu$ :

$$\mu \equiv \mathcal{E}[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx$$

El cuadrado de la desviación estándar lo denominamos varianza  $\sigma^2$ :

$$\sigma^2 \equiv \mathcal{E}\left[(x-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 p(x) dx$$

Así tenemos que la densidad normal univariante está completamente especificada con dos parámetros: su media  $\mu$  y su varianza  $\sigma^2$ . Por simplicidad, habitualmente escribimos la ecuación (2) como  $p(x) \sim N(\mu, \sigma^2)$  para decir que  $x$  está normalmente distribuida con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . Las muestras de las distribuciones normales tienden a agruparse entorno a la media con un esparcimiento relacionado con la desviación estándar  $\sigma$ . El 95% del área está en  $|x - \mu| \leq 2\sigma$ , el pico está en  $\mu$  y vale  $p(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ .

Se define la entropía de una distribución como:

$$H[p(x)] = -\int p(x) \ln(x) dx$$

Esta cantidad se mide en *nats* (si la definimos con  $\log_2$  en vez de  $\ln$ , la unidad será el bit). La entropía mide la incertidumbre fundamental en los valores de los puntos seleccionados aleatoriamente de una distribución. Puede demostrarse que la distribución normal tiene la máxima entropía de todas las distribuciones dadas una media y una varianza. El Teorema Central del Límite afirma que el efecto agregado de la suma de un gran número de perturbaciones pequeñas y aleatoriamente independientes nos da una distribución gaussiana. Ya que muchos patrones, desde los peces hasta los sonidos hablados, pueden verse como patrones ideales corrompidos por un gran número de pequeños procesos aleatorios, el gaussiano es un buen modelo para describir una distribución de probabilidad real.

#### 4.5.5 Densidad multivariante

La densidad normal multivariante en  $d$  dimensiones se escribe como:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^t \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right] \quad (3)$$

Donde  $\mathbf{x}$  es un vector columna de  $d$  componentes,  $\boldsymbol{\mu}$  es el vector media de  $d$  componentes,  $\Sigma$  es la matriz de covarianzas de tamaño  $d \times d$ ,  $|\Sigma|$  es su determinante y  $\Sigma^{-1}$  su matriz inversa. Habitualmente se abrevia la ecuación (3) como  $p(\mathbf{x}) \sim N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$  y tenemos que:

$$\boldsymbol{\mu} \equiv \mathcal{E}[\mathbf{x}] = \int \mathbf{x} \cdot p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} \equiv \mathcal{E}\left[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^t\right] = \int (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^t p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

El valor esperado de un vector o una matriz se encuentra tomando los valores esperados de sus elementos. Es decir, si  $x_i$  es el  $i$ -ésimo elemento de  $\mathbf{x}$ ,  $\mu_i$  el  $i$ -ésimo elemento de  $\boldsymbol{\mu}$  y  $\sigma_{ij}$  el elemento  $i,j$  de  $\boldsymbol{\Sigma}$ , entonces:

$$\mu_i = \mathcal{E}[x_i]$$

$$\sigma_{ij} = \mathcal{E}\left[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)\right]$$

La matriz de covarianzas  $\boldsymbol{\Sigma}$  es siempre simétrica y semidefinida positiva. Limitaremos nuestra atención al caso en que  $\boldsymbol{\Sigma}$  es definida positiva con tal de que el determinante de  $\boldsymbol{\Sigma}$  sea estrictamente positivo. Los elementos de la diagonal  $\sigma_{ii}$  son las varianzas de los respectivos  $x_i$  y los elementos de fuera de la diagonal  $\sigma_{ij}$  son las covarianzas de  $x_i$  y  $x_j$ . Para nuestro ejemplo de los peces, tendríamos una covarianza positiva para la característica de longitud de la población. Si  $x_i$  y  $x_j$  son estadísticamente independientes, entonces  $\sigma_{ij}=0$ . Si todos los elementos de fuera de la diagonal son cero,  $p(\mathbf{x})$  se reduce al producto de las densidades normales univariantes por los componentes de  $\mathbf{x}$ .

Las combinaciones lineales de variables aleatorias distribuidas normal y conjuntamente, sean o no independientes, están normalmente distribuidas. En concreto, si  $p(\mathbf{x}) \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ,  $\mathbf{A}$  es una matriz  $d \times k$  e  $\mathbf{y} = \mathbf{A}^t \mathbf{x}$  es un vector de  $k$  componentes, entonces  $p(\mathbf{y}) \sim N(\mathbf{A}^t \boldsymbol{\mu}, \mathbf{A}^t \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A})$ . En el caso concreto de  $k=1$  y  $\mathbf{A}$  sea el vector de longitud unidad  $\mathbf{a}$ ,  $y = \mathbf{a}^t \mathbf{x}$  es un escalar que representa la proyección de  $\mathbf{x}$  en una línea en la dirección de  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{a}^t \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a}$  es la varianza de la proyección de  $\mathbf{x}$  sobre  $\mathbf{a}$ . En general, conocer la matriz de covarianzas permite calcular la dispersión en cualquier dirección o subespacio.

#### 4.5.6 Funciones discriminantes para la densidad normal

Se puede evaluar la función discriminante de la ecuación (1) para la clasificación minimun-error-rate si las densidades de probabilidad  $p(\mathbf{x}|\omega_i) \sim N(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i)$  son normales multivariantes:

$$g_i(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_i)^t \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_i) - \frac{d}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln |\boldsymbol{\Sigma}_i| + \ln p(\omega_i) \quad (4)$$

Analizamos esta función discriminante y la clasificación resultante para tres casos especiales siguiendo el estudio realizado en [19]:

##### 4.5.6.1 Caso 1: $\boldsymbol{\Sigma}_i = \sigma^2 \mathbf{I}$

El caso más simple ocurre cuando las características son estadísticamente independientes y cada una tiene la misma varianza  $\sigma^2$ . La matriz de covarianza es diagonal,  $\sigma^2$  veces la matriz identidad  $\mathbf{I}$ . Geométricamente corresponde a la situación en que las muestras caen en *clusters* hiperesféricos de igual tamaño, estando centrado el de la  $i$ -ésima clase alrededor del vector de media  $\boldsymbol{\mu}_i$ . El cálculo del determinante y de la inversa de  $\boldsymbol{\Sigma}_i$  es sencillo:  $|\boldsymbol{\Sigma}_i| = \sigma^{2d}$  y  $\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} = (1/\sigma^2)\mathbf{I}$ . Ya que  $|\boldsymbol{\Sigma}_i|$  y el término  $(d/2)\ln 2\pi$  son independientes de  $i$ , son constantes aditivas que pueden ser despreciadas. Obtenemos las funciones discriminantes simplificadas:

$$g_i(\mathbf{x}) = -\frac{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_i\|^2}{2\sigma^2} + \ln p(\omega_i) \quad (5)$$

Donde  $\|\cdot\|$  es la norma euclídea, es decir:

$$\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_i\|^2 = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_i)^t (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_i) \quad (6)$$

Si las probabilidades a priori no son idénticas, la ecuación (5) muestra que la distancia cuadrática  $\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_i\|^2$  debe ser normalizada por la varianza  $\sigma^2$  y desplazada una cantidad  $\ln p(\omega_i)$ , y si  $\mathbf{x}$  está a la misma distancia de dos vectores de medias distintos, la decisión óptima será la de la categoría más probable a priori.

No es necesario calcular las distancias si expandimos la forma cuadrática de la ecuación (6):

$$g_i(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\sigma^2} [\mathbf{x}^t \mathbf{x} - 2\boldsymbol{\mu}_i^t \mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}_i^t \boldsymbol{\mu}_i] + \ln p(\omega_i)$$

El término cuadrático  $\mathbf{x}^t \mathbf{x}$  es el mismo para cualquier  $i$  y es por tanto una constante aditiva despreciable. Obtenemos las funciones lineales discriminantes:

$$g_i(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_i^t \mathbf{x} + \omega_{i0}$$

Donde:

$$\mathbf{w}_i = \frac{1}{\sigma^2} \boldsymbol{\mu}_i$$

$$\omega_{i0} = -\frac{1}{2\sigma^2} \boldsymbol{\mu}_i^t \boldsymbol{\mu}_i + \ln p(\omega_i)$$

Llamamos a  $\omega_{i0}$  umbral o *bias* para la  $i$ -ésima categoría.

Un clasificador que usa funciones discriminantes lineales se llama máquina lineal. Las superficies de decisión de una máquina lineal son trozos de hiperplanos definidos por las ecuaciones lineales  $g_i(\mathbf{x}) = g_j(\mathbf{x})$  para las dos categorías con las probabilidades a posteriori más altas. En este caso, se puede escribir:

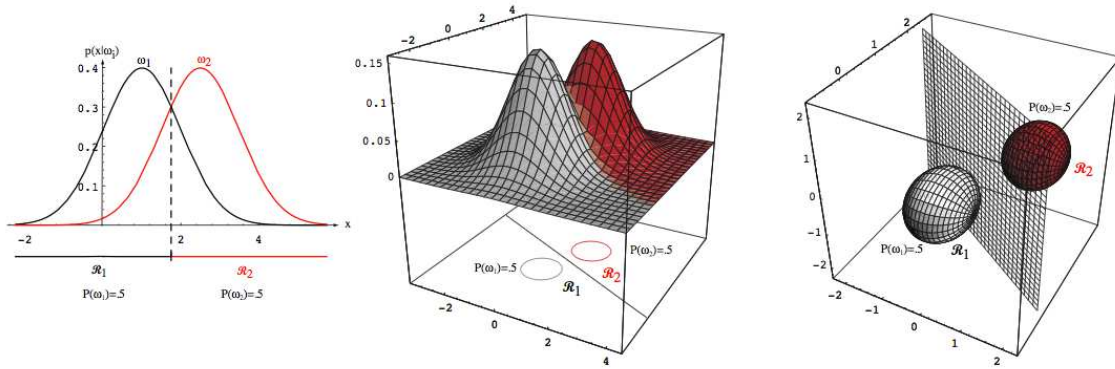
$$\mathbf{w}^t (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$$

Donde:

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu}_j$$

$$\mathbf{x}_0 = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\mu}_i + \boldsymbol{\mu}_j) - \frac{\sigma^2}{\|\boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu}_j\|^2} \ln \frac{p(\omega_i)}{p(\omega_j)} (\boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu}_j) \quad (7)$$

Estas ecuaciones definen un hiperplano que atraviesa el punto  $\mathbf{x}_0$  y es ortogonal al vector  $\mathbf{w}$ . Como  $\mathbf{w} = \boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu}_j$ , el hiperplano que separa  $\mathcal{R}_i$  y  $\mathcal{R}_j$  es ortogonal a la línea que une las medias. Si  $p(\omega_i) = p(\omega_j)$ , el segundo término a la derecha de la ecuación (7) se anula y el punto  $\mathbf{x}_0$  está a mitad de camino de las medias. Si no es así, el punto  $\mathbf{x}_0$  se aleja de la media más probable. Vemos los ejemplos de la **Ilustración 4-7** para 2 características y 1, 2 y 3 dimensiones.



**Ilustración 4-7.** Para  $\Sigma_i = \sigma^2 I$  las distribuciones son esféricas en  $d$  dimensiones y la frontera es un hiperplano generalizado de  $d-1$  dimensiones perpendicular a la línea que separa las medias. *Fuente:* Imagen extraída de [19].

Cabe anotar, que si la varianza  $\sigma^2$  es pequeña comparada con la distancia cuadrática  $\|\mu_i - \mu_j\|^2$ , entonces la posición de la frontera de decisión es insensible en gran medida a los valores exactos de las probabilidades a priori.

Si las probabilidades a priori  $p(\omega_i)$  son iguales para todas las  $c$  clases, entonces el término  $\ln p(\omega_i)$  se convierte en otra constante aditiva que podemos omitir. La regla de decisión óptima puede entonces ser planteada sencillamente como: para clasificar un vector de características  $\mathbf{x}$ , medir la distancia euclídea  $\|\mathbf{x} - \mu_i\|$  de cada  $\mathbf{x}$  a cada uno de los  $c$  vectores de media y asignar  $\mathbf{x}$  a la categoría de la media más cercana. Un clasificador tal se llama clasificador de distancia mínima.

#### 4.5.6.2 Caso 2: $\Sigma_i = \Sigma$

Otro caso simple deriva de tener matrices de covarianza idénticas para todas las clases. Este es el escenario con el que nos encontraremos en nuestro trabajo. Geométricamente, esto corresponde a la situación en la que las muestras caen en *clusters* hiperelipsoidales de igual tamaño y forma, con el *cluster* de la clase  $i$ -ésima centrado alrededor del vector media  $\mu_i$ . Simplificando análogamente al caso anterior, obtenemos las funciones discriminantes:

$$g_i(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu_i)^t \Sigma_i^{-1}(\mathbf{x} - \mu_i) + \ln p(\omega_i) \quad (8)$$

Si las probabilidades a priori  $p(\omega_i)$  son las mismas para las  $c$  clases, entonces el término  $\ln p(\omega_i)$  puede ignorarse y la regla de decisión óptima puede enunciarse sencillamente: para clasificar un vector de características  $\mathbf{x}$ , medir la distancia  $(\mathbf{x} - \mu_i)^t \Sigma_i^{-1}(\mathbf{x} - \mu_i)$  de cada  $\mathbf{x}$  a cada uno de los  $c$  vectores de media y asignar  $\mathbf{x}$  a la categoría de la media más cercana. Como antes, probabilidades a priori desiguales desvían la decisión a favor de la categoría más probable a priori. Expandiendo la forma cuadrática de la ecuación (8) y eliminando los términos independientes de  $i$  quedan funciones discriminantes lineales de nuevo:

$$g_i(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_i^t \mathbf{x} + \omega_{i0}$$

Donde:

$$\mathbf{w}_i = \Sigma^{-1} \mu_i$$

$$\omega_{i0} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_i^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}_i + \ln p(\omega_i)$$

Siendo esta última una ecuación fundamental para el clasificador. De nuevo las fronteras de decisión son hiperplanos. Si  $\mathcal{R}_i$  y  $\mathcal{R}_j$  son contiguas, la frontera entre ellas tiene la ecuación:

$$\mathbf{w}^t (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$$

Donde:

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu}_j)$$

$$\mathbf{x}_0 = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\mu}_i + \boldsymbol{\mu}_j) - \frac{\ln [p(\omega_i) / p(\omega_j)]}{(\boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu}_j)^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu}_j)} (\boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu}_j)$$

Como  $\boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu}_j)$  normalmente no está en la dirección de  $(\boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu}_j)$ , el hiperplano que separa  $\mathcal{R}_i$  y  $\mathcal{R}_j$  no suele ser ortogonal a la línea entre las medias. Sin embargo, sí que interseca esa línea en el punto  $\mathbf{x}_0$ . Si las probabilidades a priori son iguales,  $\mathbf{x}_0$  está a medio camino entre las medias. Si no son iguales, el hiperplano fronterizo óptimo se aleja de la media más probable. Como antes, con *bias* suficiente el plano de decisión no tiene que caer necesariamente entre los dos vectores media.

#### 4.5.6.3 Caso 3: $\boldsymbol{\Sigma}_i = \text{arbitrario}$

Para completar este desarrollo teórico, vemos el caso normal multivariante general donde las matrices de covarianza son distintas para cada categoría. El único término que puede despreciarse de la ecuación (4) es  $(d/2)\ln 2\pi$  y las funciones discriminantes resultantes son cuadráticas:

$$g_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \mathbf{W}_i \mathbf{x} + \mathbf{w}_i^t \mathbf{x} + \omega_{i0}$$

Donde:

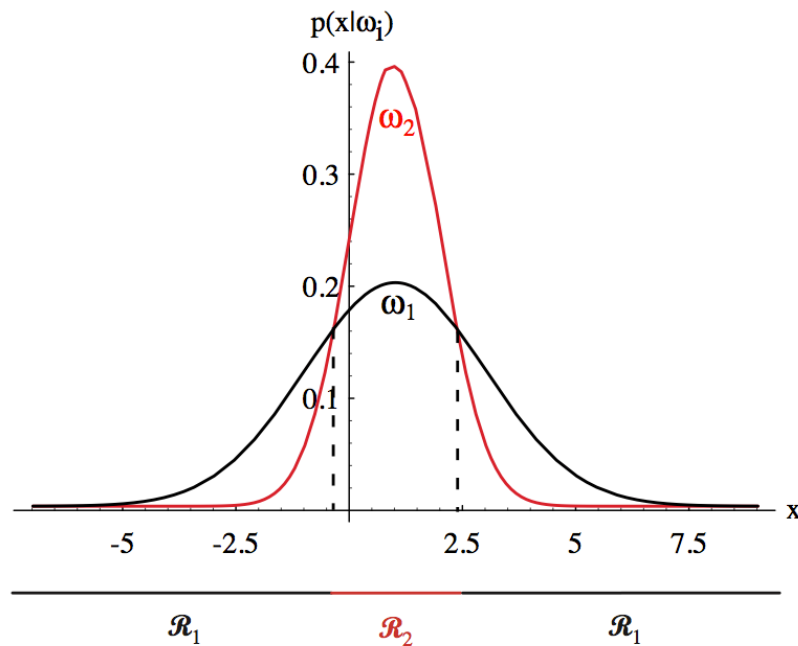
$$\mathbf{w}_i = \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \boldsymbol{\mu}_i$$

$$\mathbf{W}_i = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}$$

$$\omega_{i0} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_i^t \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \boldsymbol{\mu}_i - \frac{1}{2} \ln |\boldsymbol{\Sigma}_i| + \ln p(\omega_i)$$

En el caso de dos categorías, las superficies de decisión son hipercuadros que pueden asumir cualquiera de las formas genéricas: hiperplanos, pares de hiperplano, hiperesferas, hiperelipsoides, hiperparaboloides o hiperhiperboloides de varios tipos. Incluso para una dimensión, para una varianza arbitraria las regiones de decisión no tienen por qué estar conectadas de manera sencilla, como puede verse en la **Ilustración 4-8**.





**Ilustración 4-8.** Regiones de decisión no conectadas de manera sencilla con dos gaussianas de distinta varianza. Fuente: Imagen extraída de [19].

La extensión de estos resultados a más de dos categorías es inmediata teniendo en mente que es necesario identificar qué dos categorías de las  $c$  totales son responsables de cada segmento fronterizo.

## 4.6 Conclusiones

Los últimos avances tecnológicos utilizar máquinas en el reconocimiento y clasificación de patrones en muchas áreas. En algunos casos las soluciones están inspiradas en la naturaleza. Las técnicas de aprendizaje máquina mejoradas han permitido importantes impulsos en el reconocimiento y clasificación de patrones. Se puede optar por el aprendizaje supervisado, no supervisado y con refuerzo.

Es necesario entrenar al clasificador para que pueda dividir el espacio de características en regiones a partir de fronteras de decisión. Minimizar el coste asociado a dicha decisión es el objetivo de la teoría de decisión. Por cuestiones prácticas, el número de características será siempre menor a las que se necesitarían para describir por completo el objeto, lo que conlleva una pérdida de información. Al proceder a la generalización, es necesario apoyarse en el reconocimiento estadístico de patrones y trabajar con densidades de probabilidad.

Los sistemas de reconocimiento de patrones constan de las etapas de detección, segmentación, extracción de características, clasificación y postprocesado que cuentan con sus problemáticas y circunstancias específicas independientes que es necesario estudiar para mejorar el conjunto, lo cual es propio del ciclo de diseño. El diseño consta de las etapas de adquisición de datos, elección de características, elección del modelo, entrenamiento del clasificador y la evaluación que sirve para realimentar las etapas anteriores.

La teoría de decisión bayesiana se utiliza con bastante frecuencia en la clasificación de patrones. Usaremos el teorema de Bayes para tomar la decisión sobre la pertenencia a una clase basándonos en las probabilidades calculadas de acierto. En principio, se establece una regla de decisión a partir de las probabilidades a priori, si no se conoce ninguna característica más. La regla de decisión de Bayes permite hacer una clasificación que logra la mínima probabilidad de error.

Podemos representar los clasificadores como un conjunto de funciones discriminantes que asignan las características a las clases. Estas funciones se pueden escribir de varias formas y se tiene que las reglas de decisión son equivalentes. Una regla de decisión divide el espacio de características en regiones de decisión, que se encuentran separadas por fronteras de decisión.

El caso de dos categorías se ve con detalle ya que cuenta con un estudio diferenciado a pesar de ser tan solo una realización particular del caso de múltiples categorías. Un clasificador de dos categorías existentes se llama dicotomizador y se establece una sola función discriminante. Un clasificador que usa funciones discriminantes lineales se llama máquina lineal.

Para modelar las características de las clases se emplea la función de densidad de probabilidad gaussiana o normal multivariante, al ser bastante buena para describir distribuciones de probabilidad real. Tenemos en cuenta el caso univariante y el multivariante para varias dimensiones. En función del aspecto de las matrices de covarianza de las clases, se obtienen funciones discriminantes simplificadas asociadas a la densidad normal y la clasificación que resulta de ellas.

En nuestro trabajo tendremos el escenario compuesto por matrices de covarianza idénticas para todas las clases, que implica que las muestras se encontrarán en *clusters* hiperelipsoidales de igual tamaño y forma. El clasificador dibuja unas fronteras de decisión que son hiperplanos.

# 5 ESTUDIO TEÓRICO DE TÉCNICAS UTILIZADAS EN BCI

---

La técnica de *Machine Learning* llamada Linear Discriminant Analysis (LDA) se basa en una generalización del Discriminante de Fisher que se utiliza para hacer clasificaciones lineales supervisadas. Es un método paramétrico que necesita de aprendizaje, es decir, extrae algunos parámetros de un entrenamiento previo y posteriormente los utiliza sobre las nuevas muestras observadas para categorizarlas. Entre la multitud de técnicas de clasificación existentes, LDA destaca por su sencillez y estabilidad.

En este trabajo haremos clasificaciones entre dos clases, el caso más simple posible y más común. Tomaremos una serie de observaciones y las dividiremos en dos grupos o clases, debiendo asignar correctamente la clase correcta a cada observación, tras haber entrenado al clasificador. Cuando conocemos la clase a la que pertenece una observación de nuestro conjunto de datos, entrenar al clasificador para que sea capaz de estimar dicha clase se trata de un problema de clasificación supervisada. Cuando no se conocen las clases de las muestras a priori, se habla de clasificación no supervisada.

Utilizaremos, como se ha mencionado, un clasificador lineal y dejaremos de lado los no lineales (gaussianos, polinómicos, etc...). Un clasificador lineal dibuja hiperplanos asignando las clases en subespacios evaluados, los cuales son las regiones entre los hiperplanos.

LDA supone que las características del conjunto de datos siguen una distribución normal  $N(\mu_y, \Sigma_y)$  para cada clase. Las características sobre las que trabajaremos no siguen distribuciones exactamente gaussianas, pero podemos hacer la asunción de que sí lo hacen con poco impacto en nuestro análisis. Para cada clase se modelan la media y la varianza que mejor representan la distribución. Finalmente se aplica el teorema de Bayes, analizado en un capítulo anterior, para calcular las probabilidades de pertenencia a cada clase.

El otro pilar que sustenta este capítulo es Common Spatial Patterns (CSP), un algoritmo de procesado de señales ampliamente utilizado en clasificación de BCIs para obtener los filtros espaciales que maximizan la distancia entre dos clases. Muchas extensiones de este algoritmo básico han sido propuestas, lo que convierte a CSP en el modelo primario de la extracción de características. Se desarrolló como una ampliación de PCA con el nombre original de transformada Fukunaga-Koontz [40] y desde entonces ha experimentado sucesivas modificaciones, como se ve más adelante. Para señales multivariantes se aplica en subcomponentes con distintas varianzas.

En el caso de las actividades motoras de señales EEG, un filtro CSP utiliza la dependencia espacial para maximizar la varianza de una clase movimientos mientras minimiza la varianza de la otra clase. Esta discriminación allanará el camino para la clasificación posterior. Su implementación en este trabajo, atendiendo a estas notas, va de suyo.

Aunque no se va a hacer uso de PCA en este trabajo, se realiza una pequeña introducción del mismo debido a su importancia entre las técnicas de reconocimiento de patrones. Aplicándolo se consigue reducir la dimensionalidad de los conjuntos de muestras y su relación con la neurociencia se demuestra con el hecho de

que algunas de sus variantes se emplean extensamente en esta disciplina científica.

Los textos [23], [28] y, sobre todo, [40] son las referencias básicas que se han seguido para la elaboración de este capítulo.

## 5.1 LDA

En este trabajo se utiliza LDA para implementar la clasificación lineal supervisada al ser un método sencillo y eficiente. Requiere de un aprendizaje basado en un entrenamiento que sirve para extraer unas características que son después empleadas en categorizar las nuevas observaciones.

Ya que en las simulaciones que se realicen necesitaremos discriminar entre dos tipos de movimientos imaginados, hacemos por tanto el estudio de LDA para clasificar entre dos clases.

### 5.1.1 LDA para dos clases

Aplicando esta técnica a nuestro problema, suponemos que contamos con un total de 2 clases y queremos hacer una asignación a una de ellas, que llamaremos  $c_i$ . Conocemos la probabilidad a priori de ocurrencia de cada una de las dos clases  $p(c_i)$ . Según el teorema de Bayes tenemos que:

$$p(c_i | \mathbf{z}) = \frac{p(c_i)p(\mathbf{z}|c_i)}{\sum_{k=1}^c p(c_k)p(\mathbf{z}|c_k)}$$

Esta formula puede representarse, siguiendo la notación del anterior capítulo sobre Bayes como:

$$\text{Posteriori} = \frac{\text{Priori} \cdot \text{Verosimilitud}}{\text{Evidencia}}$$

Donde hemos llamado *Priori* a la probabilidad a priori de la clase  $i$ , *Verosimilitud* al término que indica la probabilidad de obtener esta observación en concreto si la clase era  $i$  y *Evidencia* a un término que hace la función de factor de escala, y que regulariza el resultado, pero que estrictamente no es importante a la hora de tomar una decisión.

Podemos apoyarnos en esta representación para tomar una decisión, debido a que tiene sentido asignar la clase con mayor probabilidad a posteriori.

$$\hat{c} = c_i \Leftrightarrow p(c_i | \mathbf{z}) \geq p(c_k | \mathbf{z}), \forall k \neq i$$

Como se ha comentado, LDA aplica el teorema de Bayes para estimar la clase a la que pertenece cada observación. Siguiendo el estudio realizado en [40], suponemos que tenemos dos clases con una función de densidad de probabilidad gaussiana de igual covarianza y distinta media. Ese es nuestro caso, ya que la matriz de covarianza de ambas clases es la misma y las distribuciones sólo se distinguen en la media.

Conocido el *Priori*, calculamos la *Verosimilitud* y la *Evidencia*:

$$\text{Priori}(c_1) = p(c_1), \text{Priori}(c_2) = 1 - p(c_1)$$

$$\text{Verosimilitud} = p(\mathbf{z}_n | c_k)$$

$$Evidencia = \sum_{k=1}^2 p(c_k) p(\mathbf{z}_n | c_k)$$

Donde  $p(\mathbf{z}_n | c_k)$  es la probabilidad de que una nueva observación pertenezca a clase  $k$  que viene dada por:

$$p(\mathbf{z}_n | c_k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-j \frac{1}{2} (\mathbf{z}_n - \mu_k)^\top \Sigma^{-1} (\mathbf{z}_n - \mu_k)\right)$$

Para una observación  $\mathbf{z}_n$  asignaremos la clase 1 si se cumple lo siguiente:

$$p(c_1) p(\mathbf{z}_n | c_1) \geq (1 - p(c_1)) p(\mathbf{z}_n | c_2) \quad (9)$$

Vamos ahora a buscar la frontera entre las dos regiones de decisión, que será lo mismo que encontrar el hiperplano que cumpla la igualdad de la ecuación (9). Despejamos  $\mathbf{z}_n$  de la ecuación mencionada desarrollando:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{(1 - p(c_1)) p(\mathbf{z}_n | c_2)}{p(c_1) p(\mathbf{z}_n | c_1)} \\ 1 &= \frac{(1 - p(c_1)) \exp\left(-j \frac{1}{2} (\mathbf{z}_n - \mu_2)^\top \Sigma^{-1} (\mathbf{z}_n - \mu_2)\right)}{p(c_1) \exp\left(-j \frac{1}{2} (\mathbf{z}_n - \mu_1)^\top \Sigma^{-1} (\mathbf{z}_n - \mu_1)\right)} \\ 0 &= \log \left( \frac{(1 - p(c_1)) \exp\left(-j \frac{1}{2} (\mathbf{z}_n - \mu_2)^\top \Sigma^{-1} (\mathbf{z}_n - \mu_2)\right)}{p(c_1) \exp\left(-j \frac{1}{2} (\mathbf{z}_n - \mu_1)^\top \Sigma^{-1} (\mathbf{z}_n - \mu_1)\right)} \right) \\ 0 &= \log \left( \frac{(1 - p(c_1))}{p(c_1)} \right) - \frac{1}{2} (\mathbf{z}_n - \mu_2)^\top \Sigma^{-1} (\mathbf{z}_n - \mu_2) + \frac{1}{2} (\mathbf{z}_n - \mu_1)^\top \Sigma^{-1} (\mathbf{z}_n - \mu_1) \\ 0 &= (\mu_2 - \mu_1)^\top \Sigma^{-1} \mathbf{z}_n - \frac{1}{2} \mu_2^\top \Sigma^{-1} \mu_2 + \frac{1}{2} \mu_1^\top \Sigma^{-1} \mu_1 + \log \left( \frac{(1 - p(c_1))}{p(c_1)} \right) \quad (10) \end{aligned}$$

La ecuación (10) es la ecuación general del hiperplano de separación entre las dos clases. Igualamos la ecuación (10) a la ecuación general de un hiperplano dada por:

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} \mathbf{z}_n + \mathbf{b}$$

Y obtenemos los coeficientes  $\mathbf{a}$  y el término independiente  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{a} = (\mu_2 - \mu_1)^\top \Sigma^{-1}$$

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2} \mu_1^\top \Sigma^{-1} \mu_1 - \frac{1}{2} \mu_2^\top \Sigma^{-1} \mu_2 + \log \left( \frac{(1-p(c_1))}{p(c_1)} \right) \quad (11)$$

Podemos reescribir ecuación (11) también como:

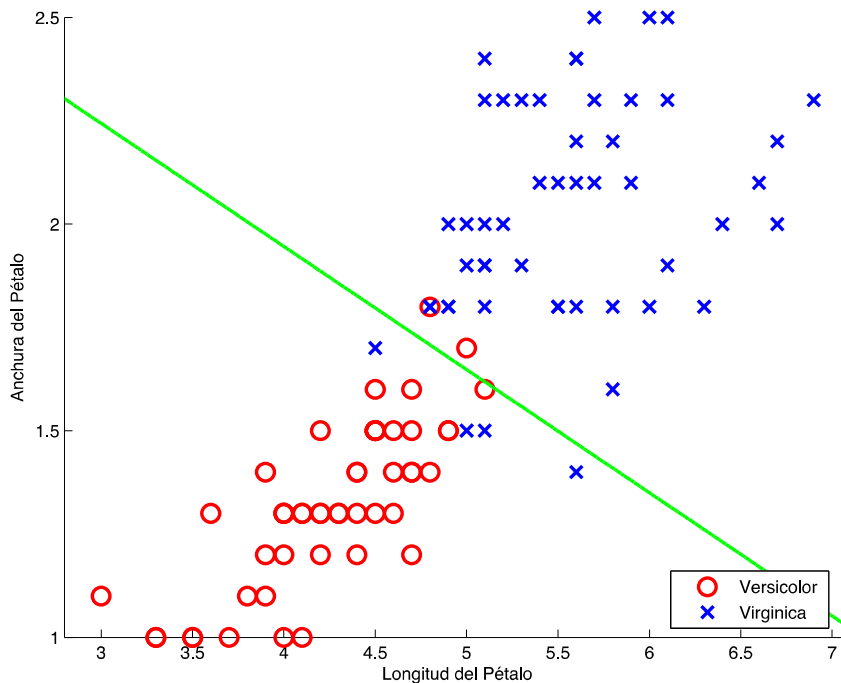
$$\mathbf{b} = -\frac{\mathbf{a}^\top (\mu_1 + \mu_2)}{2} + \log \left( \frac{(1-p(c_1))}{p(c_1)} \right)$$

Podemos estimar a cuál de las dos clases pertenece una observación simplemente evaluando el signo de la ecuación:

$$\hat{c} = \text{sgn}(\mathbf{a}^\top \mathbf{z}_n + \mathbf{b})$$

Que se interpreta como clase estimada 1 con signo positivo y clase estimada 2 con signo negativo.

En la **Ilustración 5-1** podemos ver el resultado de clasificar dos nubes de puntos de dos clases distintas con LDA. Las muestras pertenecen al dataset *fisheriris* de MATLAB y corresponden al conjunto de datos multivariante *Fisher's Iris* que recoge medidas de cuatro rasgos de tres especies de la planta iris. En el ejemplo se ha tomado como características la longitud (eje x) y la anchura de los pétalos (eje y) de las flores de las especies *versicolor* y *virginica*, que son las clases que queremos diferenciar. Se ha trazado la frontera que divide las dos regiones de decisión, que corresponde a una recta empleando un clasificador lineal.



**Ilustración 5-1.** Clasificación con LDA. Fuente: Imagen propia.

## 5.2 CSP

CSP es un algoritmo que se usa en procesado de señales para separar señales multivariantes en subcomponentes con distintas varianzas. Cuando se habla de clasificación en sistemas BCI es inevitable referirse a CSP, ya que aprovecha la dependencia espacial para la clasificación de actividades motoras imaginadas a partir de la obtención de filtros espaciales que maximizan la distancia entre clases.

### 5.2.1 CSP aplicado a BCI de movimientos imaginados

Los sensores utilizados en nuestro trabajo para la adquisición de las señales EEG cuentan con la evidente particularidad de no ser invasivos, para comodidad obvia del sujeto e inconveniencia del investigador. A pesar de tener información espacial de la actividad electromagnética sobre el cráneo y el cuero cabelludo, los sensores proporcionan poca información espacial de las zonas activas del cerebro, debido a la conducción volumétrica. La que la señal recibida por cada sensor no se restringe espacialmente a la información generada por la zona del cerebro sobre la que se sitúa, sino que se trata de una combinación lineal de todas las señales generadas en todas las zonas del cerebro, amén de la omnipresente contaminación por ruido. Se deberá realizar un filtrado espacial antes de abordar un ulterior procesado. Aproximadamente sólo la mitad de las contribuciones en cada electrodo provienen de fuentes en un radio menor de 3 cm [27], lo cual es un problema si la señal de interés es débil, como en los ritmos sensoriales y motores, y aparecen otras señales fuertes en el mismo rango frecuencial, como las ondas  $\alpha$  del córtex visual o los artefactos musculares.

En primer lugar, asumimos que la banda frecuencial y la ventana temporal de la señal EEG de entrada son conocidas a priori. Asumimos también que la señal es conjuntamente gaussiana con media cero. Estos supuestos no suponen ninguna limitación al análisis siguiente debido a que la transformación es lineal y la media puede restarse y añadirse al final y a que los sistemas BCI de movimientos imaginados que utilizan datos EEG operan en frecuencias específicas y no hay pérdida de información al asumir gaussianidad.

Vamos a ver el desarrollo matemático suponiendo solamente dos clases de movimientos, de tipo izquierdo y de tipo derecho que denotaremos I y D respectivamente [40].

Podemos combinar las señales recibidas por los electrodos (filtradas con un filtro paso de banda) para formar la matriz  $\mathbf{X}$  como:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{n}$$

Siendo  $\mathbf{S}$  las  $M$  señales procedentes de cada zona del cerebro supervisada por un sensor,  $\mathbf{A}$  es una matriz  $M \times M$  donde cada columna devuelve una de las señales medidas a partir de las señales generadas y que llamaremos patrón espacial, y  $\mathbf{n}$  es el ruido.

El objetivo es calcular el mejor filtro espacial simple  $\mathbf{w}$  que devuelva una señal  $\mathbf{y}$  filtrada espacialmente con un número  $N$  de filtros, donde  $N < M$ , que maximice la diferencia entre las varianzas de las señales de cada clase de movimiento:

$$\mathbf{y} = \mathbf{w}^\top \mathbf{X}$$

Definimos las matrices de estimación de covarianza  $\Sigma$  de las señales  $\mathbf{X}$  a partir de cada elemento de la matriz:

$$\Sigma(i, j) = \frac{1}{T-1} \sum_{k=1}^T (\mathbf{X}_i(k) - \mu_i)(\mathbf{X}_j(k) - \mu_j)$$

Donde  $\mathbf{X}_i(k)$  hace referencia al elemento  $k$  de la fila  $i$ -ésima y  $\mu_i$  hace referencia a la media de la fila  $i$ -ésima.

Las varianzas  $\sigma^2$  de las señales filtradas se definen como:

$$\sigma^2 = E[\mathbf{y}\mathbf{y}^\top] = \mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w}$$

El objetivo es hallar el filtro espacial que maximice la diferencia entre las varianzas de las señales de cada clase de movimiento, es decir:

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg \max_{\mathbf{w}} \frac{\sigma_I^2 - \sigma_D^2}{\sigma_I^2 + \sigma_D^2} = \arg \max_{\mathbf{w}} \frac{\mathbf{w}^\top (\Sigma_I - \Sigma_D) \mathbf{w}}{\mathbf{w}^\top (\Sigma_I + \Sigma_D) \mathbf{w}} \quad (12)$$

El denominador de la ecuación (12) es un término de normalización para evitar que el módulo del filtro crezca indefinidamente. La ecuación (12) se trata de un cociente de Rayleigh que resolvemos a continuación. Definimos auxiliariamente:

$$\Sigma_T = \Sigma_I + \Sigma_D = \Sigma_T^{1/2} \Sigma_T^{1/2}$$

$$\mathbf{w}^\top = \mathbf{u}^\top \Sigma_T^{-1/2} \quad (13)$$

$$\mathbf{u}^\top \mathbf{u} = 1$$

Sutituyendo en la ecuación (12) tenemos:

$$\hat{\mathbf{u}} = \arg \max_{\mathbf{u}} \frac{\mathbf{u}^\top \Sigma_T^{-1/2} (\Sigma_I - \Sigma_D) \Sigma_T^{-1/2} \mathbf{u}}{\mathbf{u}^\top \Sigma_T^{-1/2} \Sigma_T \Sigma_T^{-1/2} \mathbf{u}} \quad (14)$$

El denominador de la ecuación (14) es igual a uno y queda:

$$\hat{\mathbf{u}} = \arg \max_{\mathbf{u}} \left( \mathbf{u}^\top \Sigma_T^{-1/2} (\Sigma_I - \Sigma_D) \Sigma_T^{-1/2} \mathbf{u} \right) \quad (15)$$

Con la ecuación (13) y desarrollando  $\Sigma_I - \Sigma_D = 2\Sigma_I - \Sigma_T = \Sigma_T - 2\Sigma_D$ , reescribimos el argumento de la ecuación (15):

$$\mathbf{u}^\top \Sigma_T^{-1/2} (\Sigma_I - \Sigma_D) \Sigma_T^{-1/2} \mathbf{u} = 2\mathbf{u}^\top \Sigma_T^{-1/2} \Sigma_I \Sigma_T^{-1/2} \mathbf{u} - \mathbf{u}^\top \Sigma_T^{-1/2} \Sigma_T \Sigma_T^{-1/2} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u}^\top \Sigma_T^{-1/2} (\Sigma_I - \Sigma_D) \Sigma_T^{-1/2} \mathbf{u} = 2\mathbf{u}^\top \Sigma_T^{-1/2} \Sigma_I \Sigma_T^{-1/2} \mathbf{u} - 1 = 1 - 2\mathbf{u}^\top \Sigma_T^{-1/2} \Sigma_D \Sigma_T^{-1/2} \mathbf{u}$$

Y reescribimos la ecuación (15):

$$\hat{\mathbf{u}} = \arg \max_{\mathbf{u}} \left( 2\mathbf{u}^\top \underbrace{\Sigma_T^{-1/2} \Sigma_I \Sigma_T^{-1/2}}_{S_1} \mathbf{u} - 1 \right)$$

La maximización es entonces un problema generalizado de autovectores que se resuelve eligiendo el autovector asociado al mayor autovalor. El autovalor  $\lambda$  y el autovector  $\phi$  buscados satisfacen:

$$S_1 \phi_j^{(1)} = \lambda_j^{(1)} \phi_j^{(1)}$$



Hemos obtenido un filtro que maximiza la varianza entre las dos clases y contamos con una dimensión para discriminar entre ellas.

El objetivo de CSP es hallar uno o más filtros espaciales que maximicen la diferencia entre varianzas y que sean ortogonales entre sí. Por tanto, análogamente al paso anterior resolvemos un problema de minimización:

$$\hat{\mathbf{u}} = \arg \min_{\mathbf{u}} \left( 2\mathbf{u}^\top \Sigma_T^{-1/2} \Sigma_I \Sigma_T^{-1/2} \mathbf{u} - 1 \right)$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \arg \min_{\mathbf{u}} \left( 1 - 2\mathbf{u}^\top \Sigma_T^{-1/2} \Sigma_D \Sigma_T^{-1/2} \mathbf{u} \right)$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \arg \max_{\mathbf{u}} \left( 2\mathbf{u}^\top \underbrace{\Sigma_T^{-1/2} \Sigma_D \Sigma_T^{-1/2}}_{S_2} \mathbf{u} \right)$$

El segundo filtro espacial se obtiene con el autovector asociado al máximo autovalor de  $S_2$ :

$$S_2 \phi_j^{(2)} = \lambda_j^{(2)} \phi_j^{(2)}$$

El tercer filtro espacial lo da el autovector asociado al segundo mayor autovalor de  $S_1$ , el cuarto filtro el autovector asociado al segundo mayor autovalor de  $S_2$  y así sucesivamente.

Dado que las matrices  $S_1$  y  $S_2$  son simétricas, sus autovectores son ortogonales entre sí. El corolario es que todos los filtros obtenidos con el método CSP son ortogonales.

Demostramos que los autovectores de ambas matrices son idénticos:

$$S_2 = \Sigma_T^{-1/2} \Sigma_D \Sigma_T^{-1/2} = \Sigma_T^{-1/2} (\Sigma_T - \Sigma_I) \Sigma_T^{-1/2} = I - S_1$$

$$S_2 \phi_j^{(2)} = (I - S_1) \phi_j^{(2)} = \lambda_j^{(2)} \phi_j^{(2)}$$

$$S_1 \phi_j^{(2)} = (1 - \lambda_j^{(2)}) \phi_j^{(2)}$$

Y despejando nos queda:

$$\phi_j^{(2)} = \phi_i^{(1)}$$

$$\lambda_i^{(1)} = (1 - \lambda_j^{(2)})$$

Para cada autovector de  $S_1$  existe otro igual de  $S_2$ . Si sabemos que los autovalores están acotados entre cero y uno al ser las matrices de covarianza semidefinidas positivas, entonces el autovector asociado al mayor autovalor de  $S_1$  es igual al autovector asociado al menor autovalor de  $S_2$ , el autovector asociado al segundo mayor autovalor de  $S_1$  es igual al autovector asociado al segundo menor autovalor de  $S_2$  y así sucesivamente. Podemos escribir:

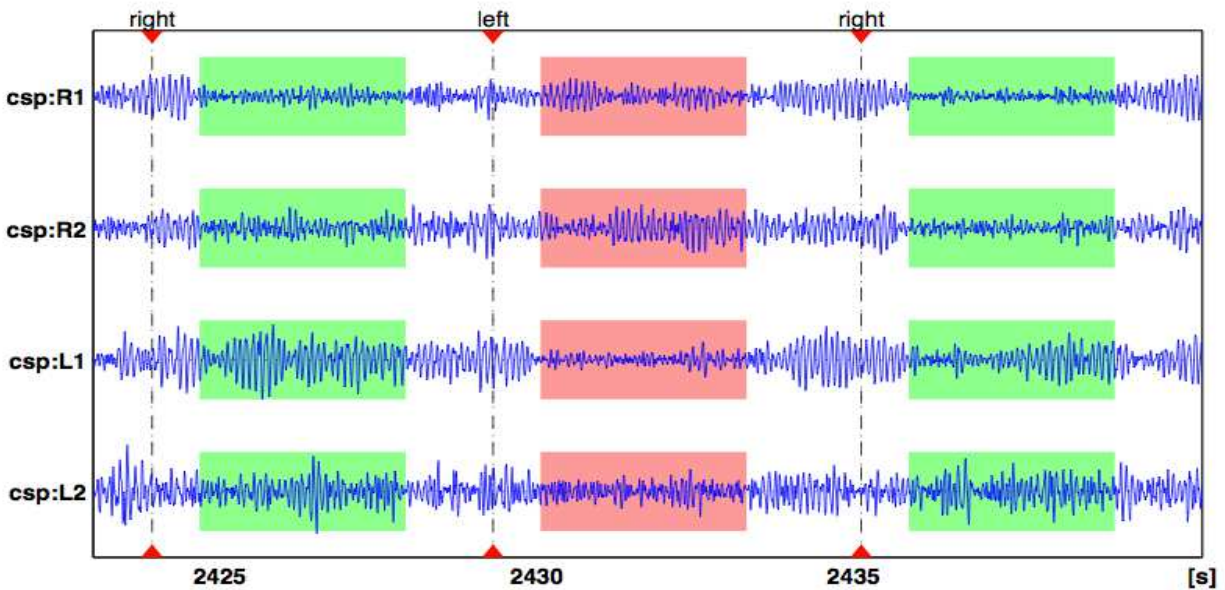
$$\phi_j^{(2)} = \phi_{C-j}^{(1)}$$

Siendo  $C$  el total de autovectores que coincide con el número de canales utilizados.

Si suponemos que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_c$ , hallamos la solución a partir de los autovectores  $\phi$  de  $S_1$ . También valdrían los autovectores de  $S_2$  o de  $\Sigma_T^{-1/2}(\Sigma_I - \Sigma_D)\Sigma_T^{-1/2}$ :

$$\hat{\mathbf{w}} = \Sigma_T^{-1/2}[\phi_1 \dots \phi_c]$$

El efecto del filtrado CSP puede verse en la **Ilustración 5-2** en la que se aplican 4 filtros espaciales a una señal EEG filtrada en banda. Se quiere discriminar entre movimientos imaginados de la mano derecha y la izquierda.



**Ilustración 5-2.** Resultado de aplicar 4 filtros CSP a una señal EEG continua filtrada en banda. En verde los intervalos en que se imagina el movimiento de la mano derecha y en rojo para la mano izquierda. Con los filtros csp:R1 y csp:R2 hay mayor varianza para la mano izquierda y con los filtros csp:L1 y csp:L2 ocurre algo similar con la mano derecha. *Fuente:* [28].

Como vimos anteriormente, hemos reducido las dimensiones de la entrada y podemos pasar a extraer las características calculando la varianza de cada uno de los vectores de salida:

$$z_i = \text{var}(\mathbf{y}_i) = \text{var}(\mathbf{w}_i \mathbf{X}), i \in [1, N]$$

Obtenemos así el vector de características que usará el clasificador para estimar las clases de cada ensayo:

$$\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_N]$$

Existe una coincidencia de estas características con la potencia espectral para cada fila de  $\mathbf{y}$  que nos proporciona una buena intuición de si en cierta zona se está produciendo un ERD.

Un recordatorio importante para nuestro estudio es que siempre consideramos las fuentes como incorreladas al corresponder a poblaciones neuronales distintas.

## 5.2.2 Variantes y extensiones de CSP

Existen muchas variantes de CSP cobijadas bajo los siguientes paraguas metodológicos:

- a) **Multiclase:** En su algoritmo original, CSP está restringido a problemas binarios y una forma común de extenderlo para que abarque más clases es formar suconjuntos de pares de ellas.

Otra aproximación según [29] es diagonalizar simultánea y aproximadamente las características.

- b) **Selección automática del filtro espacial:** El algoritmo CSSP (Common Spatio-Spectral Pattern planteado en [30] resuelve la problemática del CSP estándar en las series temporales de EEG haciendo copias retrasadas de la señal original y obteniendo así filtros espaciales simultáneos optimizados en conjunción con filtros frecuenciales simples. Esta técnica atenúa o enfatiza automáticamente bandas específicas de frecuencias en cada electrodo para tener una discriminación óptima entre dos clases.

CSSSP (Common Sparse Spectral Spatial Pattern) [31] evita el tener que elegir manualmente la banda de frecuencias con un enfoque distinto. Aquí un filtro FIR temporal se optimiza con un filtro espacial. Al contrario que en CSSP, se utiliza un solo filtro temporal que, sin embargo, puede ser de gran complejidad. Para embridar esta dificultad se introduce un esquema de regularización que busca soluciones dispersas para los coeficientes FIR, que funcionan bien en la mayoría de los casos pero requieren de afinación para un rendimiento óptimo.

El método iterativo SPEC-CSP [32] alterna entre la optimización de filtros espaciales *à la* CSP y la optimización de la ponderación espectral. El resultado es una descomposición espacial y un filtro temporal optimizados conjuntamente para el problema de clasificación dado.

- c) **Conexión a un modelo discriminante:** Se interpreta el análisis CSP como un modelo discriminante. Contiene un interés teórico que puede utilizarse para crear nuevas variantes de CSP a partir de modelos de regresión lineales [33].
- d) **Regularizar el CSP:** En aplicaciones prácticas de BCI cuantos menos electrodos tenga el dispositivo, menos tiempo y esfuerzo será necesario para dejarlo operativo y menor estrés padecerán los usuarios. Puede hacerse un análisis CSP para determinar dónde colocar los sensores y experimentar con un número bajo de electrodos. En [34] se propone una regularización de los coeficientes del filtro CSP para llegar a una solución reducida en la que en el punto óptimo muchos de ellos son numéricamente cero. Esto suministra una manera sencilla de elegir el número y posición de los electrodos, que pueden reducirse a un total de entre 10 y 20 sin una caída de rendimiento significativa.
- e) **Técnicas avanzadas para la reducción de los datos de calibración:** Ya que los datos EEG presentan una gran variabilidad de un día para otro en el mismo sujeto, se suelen llevar a cabo sesiones de calibración antes de proceder con las pruebas, incluso con sujetos experimentados. Puede ser deseable hacer uso de antiguas grabaciones para reducir la etapa de calibración al mínimo a partir de la extracción de filtros prototípicos mediante un algoritmo de clusterización [35].

En caso de contar con escasas o ninguna medidas de calibración, se propone un algoritmo EM<sup>6</sup> extendido en [36] el que la extracción y clasificación de las características CSP se realiza conjunta e iterativamente. Consiste en construir un grupo de datos de entrenamiento con los resultados estimados del clasificador actual y volver a extraer las características CSP actualizando el clasificador con los últimos datos.

- f) **Tratamiento de señales EEG no estacionarias:** Una simple adaptación de la desviación del clasificador puede compensar la no estacionariedad de la señal con resultados aceptables [37].

---

<sup>6</sup> El algoritmo EM se trata de una técnica iterativa general para realizar una estimación de máxima verosimilitud de parámetros de problemas en los que existen variables no observables.

Cambios extras como reentrenar al LDA y recalcular el CSP mejoran muy poco el rendimiento o incluso lo empeoran en ocasiones.

FSP (Fixed Spatial Pattern) [38] consiste en mantener el patrón espacial de la fuente relevante, algunas columnas de la matriz  $A$  quedan igual, mientras se cambia el filtro espacial adaptativamente en una nueva grabación.

En iCSP (invariant CSP) se pretende un CSP más robusto frente a la no estacionariedad durante la etapa de *feedback* del BCI haciendo medidas sobre perturbaciones no relacionadas con las tareas y usándolas para reforzar los filtros espaciales que resultan invariantes antes las mismas [39]. La matriz de covarianza de la perturbación se añade al denominador del cociente de Rayleigh del CSP.

### 5.3 Introducción a PCA

Pese a no hacer uso directo en este trabajo, el procedimiento estadístico Principal Component Analysis (PCA) es una de las herramientas más empleadas en el reconocimiento de patrones y por ello se considera relevante hacer, al menos, un pequeño bosquejo que profile sus principales características. Más aún, teniendo en cuenta que de él deriva la ampliación que da origen a CSP.

PCA utiliza una transformación ortogonal para convertir un conjunto de observaciones de variables posiblemente correlacionadas en otro conjunto de valores de variables sin correlación lineal llamadas componentes principales. El número de estas componentes principales es menor o igual que el número de las variables originales, con lo que obtenemos una reducción de las dimensiones del conjunto total. La transformación se define de tal modo que la primera componente principal tiene la varianza de mayor tamaño y, a su vez, las componentes siguientes tienen la mayor varianza posible bajo la restricción de que sean ortogonales a las componentes precedentes. Los vectores resultantes constituyen una base ortogonal no correlacionada.

PCA fue inventado por Karl Pearson en 1901 [23] y desarrollado por Harold Hotelling en los años 30 del siglo pasado. En el ámbito de aplicación del procesado de señal se le denomina también transformada discreta de Kosambi-Karhunen-Loève (KLT). Se utiliza fundamentalmente como herramienta de análisis de datos y para implementar modelos predictivos [24]. Puede realizarse mediante la descomposición en autovalores de la matriz de covarianza o la descomposición en valores singulares de la matriz de datos, tras centrar en ambos casos los datos en la media de cada atributo.

Si tomamos un conjunto de puntos en un espacio euclídeo, la primera componente principal es la línea que pasa por la media multidimensional y que minimiza el cuadrado de las distancias a ella de todos los puntos. La segunda componente principal sigue el mismo concepto tras restarle a todos los puntos la correlación con la primera componente principal. PCA fundamentalmente rota el conjunto de puntos alrededor de su media para alinearlos con las componentes principales y esto hace que se traslade, usando transformaciones ortogonales, la mayor parte de la varianza posible hacia las primeras dimensiones. Los valores en el resto de dimensiones pueden ser desechados, al ser considerablemente más pequeños, con una pérdida mínima de información. Esta capacidad de reducir las dimensiones, mencionada anteriormente, viene acompañada con el coste de mayores recursos computacionales en el cálculo.

PCA es sensible al escalado de las variables. En el caso de contar con variables con distintas unidades de medida entre sí, se convierte en un método de análisis en cierto modo arbitrario. Pearson en su escrito original habla implícitamente del espacio euclídeo, donde no existe tal preocupación. Una manera de sortear esta arbitrariedad es utilizar variables escaladas de tal forma que tengan varianza unidad y tomar como base del análisis la matriz de autocorrelación en lugar de la matriz de autocovarianza. Sin embargo, esto comprime o expande las fluctuaciones en todas las dimensiones del espacio de la señal a la varianza unidad.

El centrado de la media es necesario al ejecutar el PCA para asegurar que la primera componente principal describe la dirección de máxima varianza. Si el análisis se hace a partir de la matriz de autocorrelación, no es

necesario este paso previo ya que los datos ya estarán centrados al calcular las correlaciones.

Cabe señalar que, si bien PCA es una técnica muy empleada en el reconocimiento de patrones, no está optimizada para la clasificación, uno de los focos principales de este trabajo. La alternativa por la que se ha optado para la clasificación es LDA, como se ha comentado anteriormente.

### 5.3.1.1 PCA en neurociencia

Una variante de PCA se utiliza en neurociencia para identificar las propiedades específicas de un estímulo que incrementan la probabilidad de que una neurona genere un potencial de acción. Esta técnica se conoce como análisis de la covarianza desencadenada por spikes, STC de sus siglas en inglés [25]. El análisis STC difiere de PCA en que se usan los autovectores correspondientes a los autovalores mayores y menores para identificar el espacio de características.

Un caso típico es el de presentar un estímulo de ruido blanco, ya sea como excitación sensorial a un sujeto de prueba o como corriente inyectada directamente en la neurona, y registrar como resultado el tren de spikes producido. En principio, algunas características del estímulo hacen más proclive a la neurona a generar spikes, y para poder extraerlas se calcula la diferencia entre la matriz de covarianza de los spikes desencadenados y la matriz de covarianza del conjunto de estímulos justo anterior en el tiempo (habitualmente se trabaja sobre los 100 milisegundos). Los autovectores de esta diferencia indican las direcciones del espacio de estímulos en las que la varianza del conjunto de spikes está más alejada de la varianza del conjunto de estímulos inmediatamente anteriores. Concretamente, los autovectores con los autovalores positivos mayores se corresponden con las direcciones en las que el cambio es mayor. Ya que es en estas direcciones en las que las variaciones del estímulo disparan los potenciales de acción, ofrecen buenas aproximaciones a las características relevantes que se buscan del estímulo.

También se usa PCA para distinguir la identidad de una neurona a partir de la forma de su potencial de acción. Este procedimiento, llamado spike sorting, es útil cuando se recogen extracelularmente señales procedentes de más de una neurona [26]. Primero se aplica PCA para reducir las dimensiones del espacio correspondiente a las formas de onda de los potenciales de acción y después se hace un agrupamiento en clusters para asociar potenciales de acción concretos a neuronas individuales.

PCA como técnica de reducción de las dimensiones es particularmente apropiado para detectar actividades coordinadas de conjuntos neuronales y ha sido utilizado para determinar variables colectivas que marcan las transiciones entre los distintos estados cerebrales.

## 5.4 Conclusiones

En este capítulo se profundiza en el estudio de dos de los principales algoritmos que se utilizan en los sistemas BCI. De hecho, son los que implementaremos en la parte práctica del trabajo por su utilidad contrastada. CSP se encarga de la extracción de características y LDA de la clasificación. Hemos reducido el análisis matemático contemplando únicamente el caso en el que queremos discriminar entre dos clases, teniendo en mente que ambas técnicas están definidas para un número de clases arbitrario.

Se presenta también PCA al ser una de las técnicas más utilizadas en el reconocimiento de patrones. La reducción de las dimensiones es su principal rasgo distintivo. Se nombran algunas de sus variantes que se aplican en neurociencia de forma regular.



# 6 REALIZACIÓN DEL SISTEMA BCI

---

Es hora de ponerse manos a la obra y diseñar el sistema BCI que trabajará en tiempo real con las señales cerebrales para intentar discriminar entre dos movimientos imaginados. Dividimos el sistema en una parte de captación, que es de la que se encarga el casco Emotiv EPOC y su inyección de datos al PC, una parte de procesado y clasificación, que se ejecutará en el PC mediante software y una parte de presentación del resultado o *feedback* para el usuario, que rebajaremos a un mínimo exigible y que simplemente sirva para completar los ensayos.

## 6.1 Herramientas utilizadas

Estando alejados de los laboratorios neurocientíficos profesionales en medios y recursos (y en conocimientos también, ¿por qué no admitirlo?), una de las ideas subyacentes de este trabajo es la poder hacer un estudio sobre las señales EEG dentro de nuestras posibilidades, habilidades y capacidades. Las herramientas de las que disponemos son básicamente dos: el casco sensor y un PC.

### 6.1.1 Emotiv Epoc

El dispositivo ya se ha presentado en el apartado 3.3. Vemos ahora algunas de sus características técnicas:

- 14 canales EEG a partir de los electrodos AF3, F7, F3, FC5, T7, P7, O1, O2, P8, T8, FC6, F4, F8 y AF4.
- 2 canales de referencia de los electrodos P3 y P4 en las apófisis mastoides izquierda y derecha respectivamente.
- Muestreo secuencial con un único ADC (convertidor analógico-digital) a 2048 Hz con downsampling a 128 SPS (muestras por segundo).
- Resolución de 14 bits con un LSB (paso entre voltaje de valores discretos) de 0.51  $\mu$ V.
- Rango dinámico referido a la entrada de 8400  $\mu$ V(pp).
- Ancho de banda entre 0,16 y 43 hercios con filtros notch en 50 Hz y 60 Hz.
- Filtro sinc digital de 5<sup>o</sup> orden incorporado.
- Conexión inalámbrica con receptor propietario USB en la banda de 2.4 GHz.
- Dos giróscopos para detección de movimientos con una tasa de muestreo de 128 Hz y una resolución de 10 bits.

El dispositivo se conecta al ordenador via inalámbrica, y como se comentaba anteriormente, puede suponer una dificultad añadida en caso de interferencias, mala sincronización, interrupción de la transmisión, etc. Por fortuna, podemos emplear el software propietario Controlpanel del fabricante para supervisar los posibles fallos. El casco va almacenando 128 muestras por segundo de EEG y utiliza un socket TCP/IP para transmitir la información. Dependiendo del rendimiento del ordenador será necesario modificar el número de muestras

que se envían en cada paquete TCP/IP, siendo una lo más cercano al comportamiento en tiempo real mientras que valores superiores evitan la pérdida de datos por problemas de red.

Las sesiones que se realizan no pueden ser excesivamente largas ya el dispositivo funciona con una batería interna recargable y se consume un tiempo considerable en ajustar el casco al usuario antes de empezar a experimentar. Este ajuste debe hacerse para que todos los sensores reciban una buena calidad de señal y sin este requisito cumplido, no pueden empezar las sesiones de prueba con los usuarios.

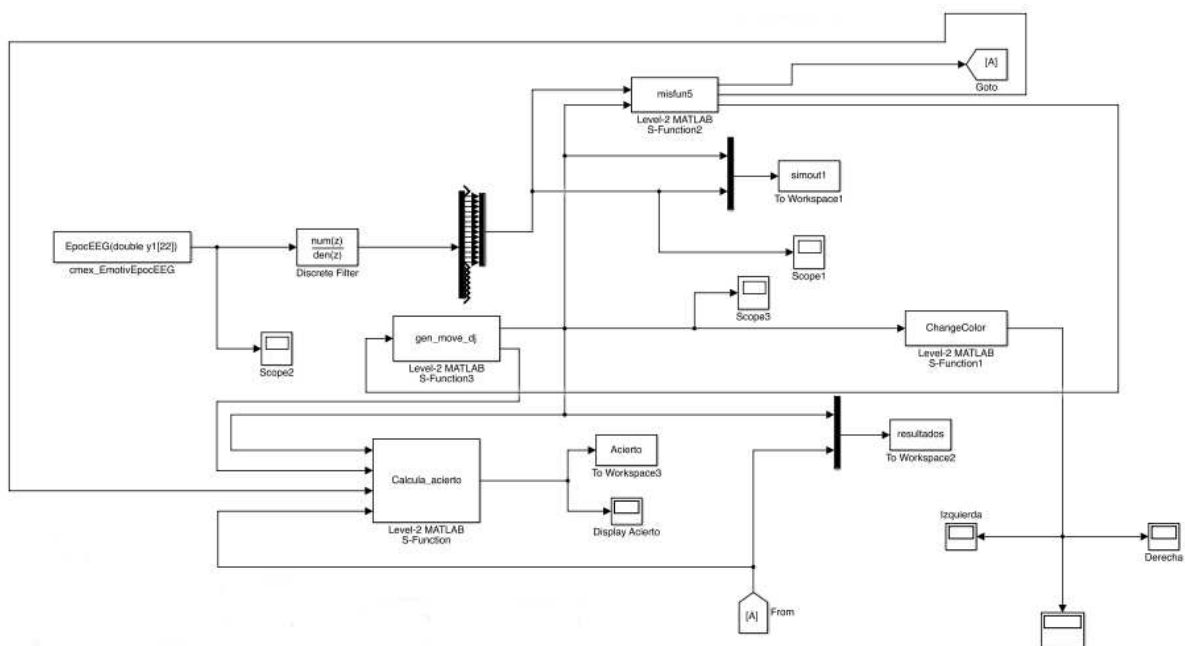
### 6.1.2 PC con Matlab y Simulink

El ordenador sirve de base para exportar, evaluar y analizar los datos. Se utiliza el programa Matlab para inyectar y procesar la información EEG en crudo capturada por el casco. La versión R2017a es la que sustenta el sistema BCI en tiempo real. La versión R2014a se ha utilizado alternativamente para tareas auxiliares de pruebas y comprobaciones, debido a contar con una mayor familiaridad con la misma. El toolbox de código abierto EEGLAB del SCCN (Swartz Center for Computational Neuroscience) muy popular en el procesamiento de señales cerebrales se ha empleado también como apoyo en el trabajo.

Simulink es una herramienta desarrollada por MathWorks para modelar, simular y analizar una gran variedad de sistemas dinámicos. Importaremos las señales en tiempo real mediante Epc Simulink EEG Importer que facilita al modelo de Simulink los datos EEG captados por el casco en forma de datos en serie. El bloque de Simulink *EpcEEG(double y1[22])* que se crea al efecto a partir de un mex S-Function de Matlab recibe los datos en formato vector doble de tamaño 22 con los elementos en el siguiente orden COUNTER, AF3, F7, F3, FC5, T7, P7, O1, O2, P8, T8, FC6, F4, F8, AF4, GYROX, GYROZ, TIMESTAMP, FUNC ID, FUNC VALUE, MARKER, SYNC SIGNAL. Lo que nos interesará serán las grabaciones correspondientes a los 14 sensores cerebrales.

## 6.2 Esquema de bloques del trabajo

En la **Ilustración 6-1** vemos el modelo básico de Simulink sobre el que trabajamos. Procedemos a explicar en qué consiste cada bloque en detalle.

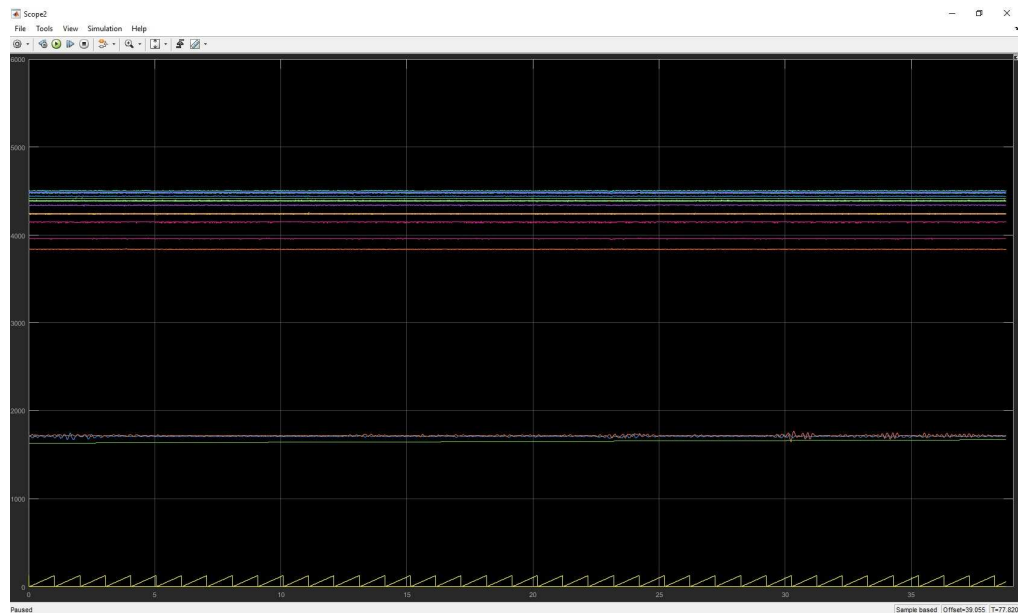


**Ilustración 6-1.** Modelo de Simulink básico empleado.

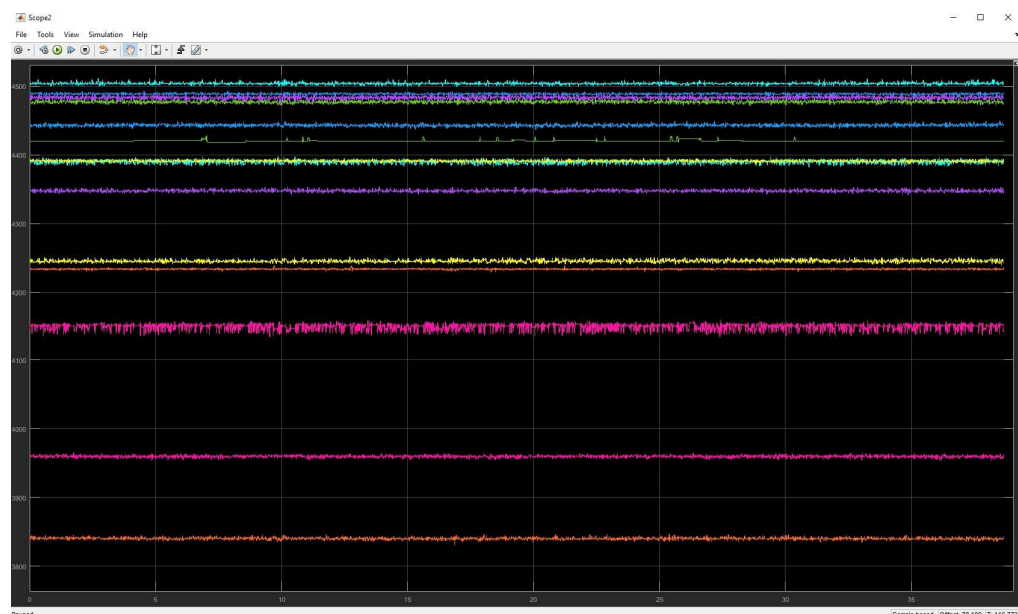


### 6.2.1 EpecEEG(double y1[22])

Se ha descrito ya la funcionalidad del bloque, así que echaremos un vistazo a lo que nos llega a través de él. En la **Ilustración 6-2** podemos observar las 22 señales prometidas. En la **Ilustración 6-3** el detalle de las 14 señales de interés.



**Ilustración 6-2.** 22 señales sin procesar que entran en el modelo Simulink.



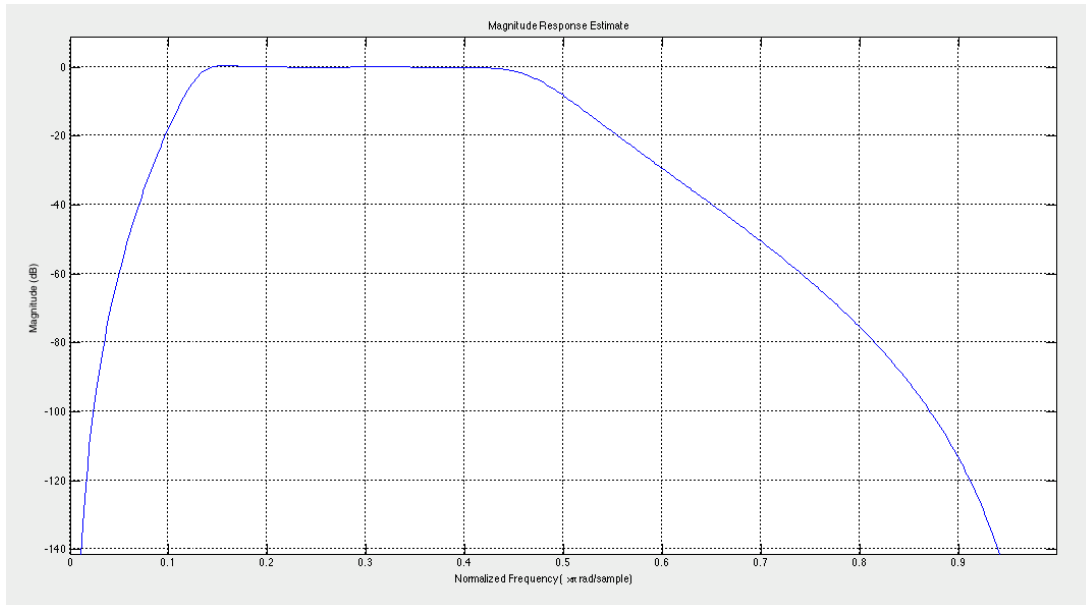
**Ilustración 6-3.** 14 señales de interés sobre las que se opera.

En el caso que veremos más adelante de simulación con señales de competiciones, bastará por sustituir el bloque *EpecEEG(double y1[22])* por un bloque fuente que lea los datos previamente adaptados y los inyecte al sistema a la tasa deseada.

### 6.2.2 Filtro Discreto Paso Banda

Lo primero que se hace es un filtrado espectral para quedarnos con la banda de frecuencia que necesitamos para estudiar la actividad de la corteza sensoriomotora, que se sitúa entre los 8 y los 30 Hz. Se ha utilizado un

filtro IIR discreto de orden 6 calculado con los coeficientes de Butterworth e implementado en la forma directa II. En la **Ilustración 6-4** tenemos su respuesta en frecuencia normalizada.



**Ilustración 6-4.** Magnitud de la respuesta en frecuencia normalizada del filtro.

Vemos que la respuesta en la banda de paso es plana para no alterar los pesos de las componentes frecuenciales de las señales y que el orden bajo del filtro hace que no contamine los valores de un trial con el siguiente.

### 6.2.3 gen\_move\_dj

El bloque *gen\_move\_dj* proporciona una salida que va dictaminando la clase a la que el usuario debe referirse durante cada trial. Esto se puede hacer de dos maneras diferentes: con una precarga de datos que se van suministrando al usuario poco a poco o con una generación automática de los mismos. Si se generan automáticamente los datos, es fundamental asegurarse que durante la fase de entrenamiento se proporcionan tantos trials de una clase como de la otra para poder construir el clasificador con garantías. Durante la fase de test no es necesario atender esta restricción.

### 6.2.4 misfun5

El bloque *misfun5* es el cerebro del sistema BCI y se encargar de clasificar, entrenar y coordinar al resto de bloques. Consta conceptualmente de tres apartados: una función CSP que utiliza los datos de entrenamiento para crear los filtros espaciales, una función LDA que crea el clasificador y otra función que devuelve el resultado de la clasificación.

#### 6.2.4.1 Función CSP

Para generar los filtros espectrales se emplea el siguiente código de Matlab que recoge como entrada los datos de las señales de los trials de entrenamiento y el número de características que queremos extraer de las señales que se corresponde con el número de filtros espectrales que se obtienen. El código es obra de Sergio Cruces y Deepa Beeta [41]. La matriz A de salida será de tamaño el número de canales (14 en nuestro caso) por el número de características.

#### Código Matlab de la función CSP

```
function [A,S,psi]=CSP(training,p)
% Implementation of the standard CSP algorithm
```

```

% (c) Sergio Cruces & Deepa Beeta
% A: mixing matrix
% S: sources

[T,N,trials]=size(training.x);
classes=unique(training.y);
nc=length(classes); % number of classes

if 1 % Energy normalization of each trial
    for t=1:trials
        Trace=sum(var(training.x(:,t)));
        training.x(:,t)=training.x(:,t)/sqrt(Trace);
    end
end

XX=permute(training.x,[2 1 3]); % transposes the x matrices

for c=1:nc
    ind=find(training.y==classes(c));
    X{c}{:,:}=reshape(XX(:,ind),N,T*length(ind));
    Cx{c}{:,:}=cov(X{c}{:,:});
end

Cxt=zeros(N,N);
for c=1:nc
    Cxt=Cxt+Cx{c}{:,:};
end

% Standard-CSP (two equivalent implementations)
if 1
    if length(Cx)<2
        [W1,~]=eig(Cx{2},Cxt);
    else
        [W1,~]=eig(Cx{2},Cxt);
    end
    B=flipud([W1(:,1:floor(p/2)) W1(:,N-ceil(p/2)+1:N)]');
    psi=1;
else
    [U1,D1]=eig(Cxt);
    White=U1*pinv(diag(sqrt(diag(D1))))*U1';
    [U2,D2]=eig(White*Cx{2}*White);
    [D,ind]=sort(diag(D2),'descend');
    B=U2(:,[ind(1:p/2); ind(N-p/2+1:N)])'*White;
    A=pinv(B);
end
A=B';
for c=1:nc
    S{c}{:,:}=B*X{c}{:,:};
end
end

```

#### 6.2.4.2 Función `Crea_Clasificador`

La función `Crea_Clasificador` devuelve las componentes del hiperplano que hace de frontera de decisión entre dos clases utilizando el algoritmo LDA. Es importante recordar que se normalizan los datos para no depender de los valores absolutos de los mismos.

### Código Matlab de la función Crea\_Clasificador

```

function [ coef, oo, media , varianza ] = Crea_Clasificador( M, C, W, NB )
% Función que nos da las componentes de un hiperplano que separa varianzas de dos clases usando LDA
%
% ENTRADAS:
%
% M matriz de 3 dimensiones
% En la 1ª dimensión tenemos las muestras de la señal
% En la 2ª dimensión se concatenan las señales filtradas por bandas (num. sensores * por num. bandas filtradas)
% En la 3ª dimensión tenemos los trials
%
% C vector de clases de los trials. Valores 0 ó 1
%
% W matriz de filtros de 3 dimensiones
% En la 1ª dimensión tenemos el número de características que vamos a extraer
% En la 2ª dimensión es la dimensión de la señal
% En la 3ª dimensión es el número de bandas. Tenemos un filtro para cada banda.
%
% NB número de bandas
%
% SALIDAS:
% La ecuación del hiperplano es coef*X+oo=0
% "media" y "varianza" son la media y la varianza usadas para normalizar los datos

% Señales pensando en la izquierda
s1=M(:,C==1);
% Señales pensando en la derecha
s0=M(:,C==0);
NC=size(W,1);
NS=size(W,2);
% Inicialización
var1=zeros(size(s1,3),size(W,1)*NB);
var0=zeros(size(s0,3),size(W,1)*NB);
for k1 =1:max(size(s0,3),size(s1,3)) % Por si tienen tamaños distintos
    for k2=1:NB
        if k1<=size(s1,3)
            % Calculamos la varianza
            var1(k1,(k2-1)*NC+1:k2*NC)=var(W(:,k2)*s1(:,(k2-1)*NS+1:NS*k2,k1)',0,2)';
        end
        if k1<=size(s0,3)
            var0(k1,(k2-1)*NC+1:k2*NC)=var(W(:,k2)*s0(:,(k2-1)*NS+1:NS*k2,k1)',0,2)';
        end
    end
end
end

% Tomamos el logaritmo para separar mejor
var1=log(var1/size(s1,1));
var0=log(var0/size(s0,1));
% Normalizamos los datos
media=mean([var1;var0]);
varianza=var([var1;var0]);

var1=(var1-repmat(media,size(var1,1),1))./repmat(sqrt(varianza),size(var1,1),1);
var0=(var0-repmat(media,size(var0,1),1))./repmat(sqrt(varianza),size(var0,1),1);

% Obtenemos los coeficientes del hiperplano

```

```

coef = (cov(var1)+cov(var0))/(mean(var1,1)-mean(var0,1))';
% Obtenemos la ordenada en el origen del hiperplano
oo = ((-coef)*(mean(var1,1)+mean(var0,1)))/2;

end

```

### 6.2.4.3 Función Prueba\_Clasificador

La función *Prueba\_Clasificador* devuelve la distancia de la varianza de una clase al hiperplano calculado en el punto anterior y nos permite clasificar en función del resultado.

#### Código Matlab de la función Prueba\_Clasificador

```

function [ Y ] = Prueba_Clasificador( M, W, NB, coef, oo, media, varianza )
NC=size(W,1);
NS=size(W,2);

varCV=zeros(size(M,3),size(W,1)*NB);

for k1=1:size(M,3), for k2=1:NB
    % Calculamos la varianza
    varCV(k1,(k2-1)*NC+1:k2*NC)=var(W(:,k2)*M(:,(k2-1)*NS+1:NS*k2,k1)',0,2)';
end,end

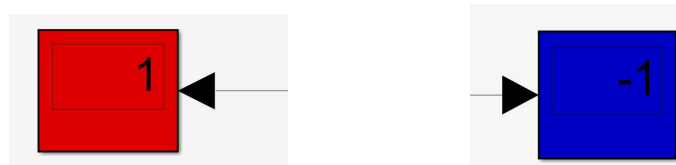
varCV=log(varCV/size(M,1));
varCV=(varCV-repmat(media,size(varCV,1),1))./repmat(sqrt(varianza),size(varCV,1),1);
Y=(varCV*coef + oo);

end

```

### 6.2.5 Bloques visuales

El bloque *ChangeColor* toma la entrada de *gen\_move\_dj* y genera una salida que ilumina el display correspondiente llamado *Izquierda* o *Derecha* que se utilizan como estímulos visuales para que el usuario proceda a imaginar el movimiento correspondiente. Esta interfaz sencilla hace que el display cambie de color y valor como vemos en la **Ilustración 6-5** según el caso. El valor mostrado es 1 para la izquierda y -1 para la derecha. Cuando nos encontramos en la fase de test, una vez transcurrido el trial, el bloque inferior muestra el valor obtenido por el clasificador y toma el color de la clase correspondiente. El ensayo se puede hacer con el usuario siguiendo las indicaciones visuales de los bloques o con el investigador leyendo en voz alta la clase mientras el usuario mantiene los ojos cerrados para mantener la concentración y evitar distracciones, como la que puede provocar la visualización de la clasificación del trial anterior en el bloque inferior.



**Ilustración 6-5.** Detalle de los bloques visuales. a) Clase izquierda. b) Clase derecha.

### 6.2.6 Bloques de resultados

El bloque *Calcula\_acierto* compara la clase planteada al usuario con la clase estimada por el sistema para cada trial de la fase de test y envía el resultado binario de la comparación al bloque *Acierto*, que junto con el bloque *resultados* remiten los resultados obtenidos en las simulaciones al espacio de trabajo de Matlab.

## 6.3 Paradigma para la recopilación de datos

En primer término, es necesario entrenar al sistema BCI para saber cómo piensa cada usuario el movimiento que se le indica. Mediante el bloque *gen\_move\_dj* se genera aleatoriamente o de forma precargada una secuencia de movimientos que el usuario debe pensar. La información se le hace llegar el usuario, ya sea por visión directa o por comunicación oral del investigador, mediante los bloques visuales que van cambiando de valor y color. El usuario se coloca el casco con la ayuda del investigador, se sienta frente a la pantalla y cuando comienza la sesión debe intentar imaginar el movimiento que se le indica durante los segundos que dure el trial. Se hace una pausa entre un trial y otro y se imagina otra vez el movimiento que se indique.

El sistema se parametriza con el número de trials que vamos a emplear para entrenamiento, la duración de cada trial, el lapso de tiempo que usaremos dentro de cada trial para almacenaje de datos, la pausa entre trials y la duración total de la prueba.

El bloque *misfun5* se encarga de extraer las características de las señales cerebrales del usuario e ir creando un clasificador que se aproxime a su modo de pensar. Una vez terminada la fase de entrenamiento, el bloque *gen\_move\_dj* activa un flag que hace *misfun5* termine de recopilar datos y cree los filtros CSP y el clasificador. A partir de ese momento, las nuevas muestras se validarán frente a las de entrenamiento y se desecharán tras la comparación que nos devuelva el resultado de la clasificación. Se sigue indicando al usuario qué movimiento debe imaginar, pero ahora se intenta adivinar qué está pensando validando la señal de entrada con el clasificador creado anteriormente.

## 6.4 Montaje de aplicaciones

Como veremos en el capítulo 8, se han montado un par de aplicaciones en el sistema. En su caso sólo hará falta la fase de entrenamiento y no la de test, porque no vamos a evaluar al sistema, lo vamos a usar. Sustituimos el bloque *ChangeColor* por el bloque de la aplicación que queramos y lo conectaremos a los bloques *gen\_move\_dj* y *misfun5*. El bloque de la aplicación tomará como entradas para el entrenamiento los valores que le proporcione *gen\_move\_dj* y en la fase propiamente de uso de la aplicación utilizará la salida del clasificador ubicado en *misfun5* como valores de entrada de la aplicación.

## 6.5 Conclusiones

El sistema se plantea en módulos al modo ingenieril, que en el caso de Simulink se corresponde con los bloques del modelo con sus funcionalidades correspondientes. De esta manera, en las fases de diseño y de prueba del sistema podemos asegurarnos del correcto desempeño de los bloques para su posterior integración. Los parámetros que definen el modo de operación del sistema deben ser ajustados para optimizar el rendimiento. Se ha seguido la casuística de experimentos similares documentados como punto de partida.

El hecho de que el sistema funcione en tiempo real hace que la sincronización y coordinación entre todas las etapas del sistema deba ser completa y que las operaciones y algoritmos se ejecuten con una clara restricción temporal.

# 7 RESULTADOS OBTENIDOS

Vistos los fundamentos teóricos y el escenario de trabajo para la medición, procesado y clasificación de señales EEG, se presentan en este capítulo las simulaciones realizadas, las parametrizaciones manejadas y los resultados obtenidos. Consideramos un primer caso de prueba con datos pregrabados y el resto con captación en tiempo real del casco Emotiv EPOC.

## 7.1 Simulación con datos de competición pregrabados

La primera simulación la realizamos en un falso tiempo real con datos pregrabados de calidad profesional, lo cual servirá para probar el correcto funcionamiento de la parte de procesado y clasificación del sistema BCI diseñado. Aparcamos así los problemas que pueda presentar la captación de señales EEG y evaluamos la bondad del resto del sistema en comparación con los resultados de otras investigaciones.

Los datos utilizados son los pertenecientes al **Dataset 2a** de la **BCI Competition IV**<sup>1</sup> que contienen grabaciones de señales EEG de cuatro movimientos imaginados, de los que sólo nos interesarán los dos relativos a la mano izquierda y la mano derecha. Analizamos el archivo **A08T.gdf** del usuario 8 en una sesión de entrenamiento, que contiene las etiquetas correspondientes a los movimientos imaginados, por ser uno de los que mejor tasa de acierto presenta [22]. La extracción de los datos del formato **gdf**<sup>2</sup> la hacemos empleando el paquete de software **BioSig**<sup>3</sup>.

Tenemos 144 ensayos con las dos clases de movimiento imaginados sin contaminación de artefactos, 2 segundos de espera entre ensayos y 4 segundos de señal, de los que emplearemos los 3 últimos en un buffer para la clasificación al considerar que contienen más información. Inyectamos la señal a una tasa de 250 muestras por segundo y también a 125, que es la más cercana a los 128 Hz de frecuencia de muestreo del casco Emotiv EPOC. Nos quedamos con la señal de 14 electrodos de los 22 totales, para que coincidan con los del casco Emotiv EPOC. Los porcentajes de acierto en tiempo real son los indicados en la **Tabla 7-1**:

Tasa de muestreo	Trials de entrenamiento	Trials de test	Acierto (%)
1/250	72	72	<b>95,83</b>
1/250	14	130	<b>89,23</b>
1/125	72	72	<b>95,83</b>
1/125	14	130	<b>88,46</b>

**Tabla 7-1.** Porcentaje de acierto del usuario 8 del Dataset 2a.

<sup>1</sup> Dataset disponible en <http://www.bbc.de/competition/iv>

<sup>2</sup> El formato **gdf** específico para señales biomédicas contiene las señales EEG, información sobre los sujetos, la tasa de muestreo, la posición de los electrodos, la temporización, etc.

<sup>3</sup> <http://biosig.sourceforge.net/>

Vemos que la tasa de acierto es muy elevada y que con pocos trials dedicados al entrenamiento ya obtenemos una buena clasificación. No es significativa la diferencia entre una y otra tasa de muestreo. Con estas cifras, podemos pasar a las simulaciones en verdadero tiempo real con la tranquilidad de contar con una base robusta en la parte del sistema de procesado y clasificación.

## 7.2 Mediciones en tiempo real con el casco Emotiv EPOC

Procedemos ahora a la captación de señales EEG con el dispositivo Emotiv EPOC. Se introduce a los usuarios en un escenario en el que se les pide, siguiendo secuencias aleatorias indicadas con estímulos visuales por pantalla o auditivos por parte del investigador <sup>4</sup> que imaginen los movimientos que se especifiquen en cada caso, aunque para ser exactos, y adelantándonos a las pruebas subsiguientes, no solo trataremos con movimientos imaginados.

En las sesiones manejaremos los siguientes parámetros optimizados empíricamente que nos ofrecen un mejor rendimiento:

- 2 clases cada vez.
- 2 segundos de espera entre trials.
- 4 segundos de señal por trial.
- Buffer de los últimos 3 segundos de señal para clasificar.
- 26 trials de entrenamiento.
- 27 trials almacenados.
- 56 trials de test.
- 500 segundos por sesión.
- 1 banda de frecuencia entre 8 y 30 Hz.
- 6 filtros espaciales CSP para tener 6 características por canal.

### a) Movimientos imaginados de la mano derecha y la izquierda

En un primer abordaje, se realizan 30 sesiones en total con 5 usuarios a los que se les pide hacer el movimiento imaginado de la mano derecha y de la mano izquierda. La tasa de acierto oscila entre el **43,48%** y el **57,58%**, lo cual podemos atribuir al puro azar y nos indica que no estamos extrayendo, en esta ocasión, nada de provecho del cerebro de nuestros voluntarios.

Buscando mejorar estas cifras, se trabaja sobre las sesiones grabadas y se hacen de nuevo los cálculos recombinaando los trials de entrenamiento y de test y se modifica el número de trials dedicados al entrenamiento sin que se produzcan modificaciones sustantivas en la tasa de acierto.

### b) Movimientos imaginados de la lengua y las manos

Dado que la orden de movimiento de la lengua se genera en la zona más alejada del lóbulo parietal respecto de las manos, vamos a intentar aprovechar esta particularidad espacial para disponer de más resolución y discriminar entre ambos movimientos imaginados. En este caso se pudo contar con 3 usuarios completando 10 sesiones. La tasa de acierto obtenida se encuentra entre el **47,37%** y el **56,14%** y constatamos con resignación que no hemos avanzado en nuestra investigación.

### c) Movimiento imaginado de ambas manos alternado con reposo

Reducimos las exigencias intentado ahora diferenciar entre el movimiento imaginado de ambas manos y una actividad cerebral neutra perteneciente a un estado de reposo o mente en blanco. Tras realizar 12 sesiones con

---

<sup>4</sup> Sospechamos que el primero método es ligeramente peor pero no se ha podido alcanzar un veredicto concluyente.



3 usuarios, conseguimos esta vez un valor estabilizado alrededor del **61,4%** de acierto que, sin ser un gran éxito, nos ofrece una vía de esperanza por la que transitar.

#### **d) Movimiento imaginado de la lengua alternado con reposo**

Al hilo del caso anterior, probamos con el movimiento imaginado de la lengua y el reposo retrocediendo en la tasa de acierto hasta movernos en el intervalo marcado por un **49,12%** y un **56,14%** para 9 sesiones con 3 usuarios distintos. Podemos colegir que hemos vuelto a tener una salida del sistema marcada por el puro azar. Y el culpable puede ser situado sin ambages en la fase de captación.

#### **e) Movimiento leve de ambas manos alternado con reposo**

Decidimos emprender un cambio radical en el enfoque del estudio y experimentar con movimientos reales en vez de imaginados con la idea de que las señales cerebrales sean más potentes y diferenciables y así ultrapasar la limitación que nos impone la, supongamos pobre por el momento a falta de confirmación, captación de las señales EEG por parte del casco Emotiv EPOC. En principio podemos desechar la presencia de artefactos, debido a un doble motivo: el filtrado interno del dispositivo de captación y el filtrado espectral y la normalización de las covarianzas en CSP de la etapa de procesado. Según [42] un ligero movimiento físico de las manos está permitido y puede ayudar a la visualización del movimiento.

Enlazando con el caso c), Se pide a los 4 usuarios que completaron 4 sesiones cada uno que, dentro de su posado de relajación para afrontar las sesiones, muevan ligeramente las manos según se indique. Alcanzamos guarismos entre un mínimo de **64,91%** y un esperanzador máximo de **75,44%**.

#### **f) Movimiento leve de la lengua alternado con reposo**

En un escenario similar al del caso anterior con 3 sesiones por cada uno de los 4 usuarios, confirmamos la buena dirección del nuevo enfoque obteniendo cifras alrededor de un **73,68%** de acierto.

#### **g) Movimiento leve de la lengua y las manos**

Damos un paso más e intentamos discriminar entre movimientos reales de la lengua y ambas manos. Se pudo contar sólo con 2 usuarios completando 3 veces esta prueba. Salvo un pobre **57,89%** de acierto en una sesión y un espectacular **92,98%** en otra, el resto de ellas se agrupan en un valor medio de **75,44%**.

#### **h) Movimiento incipiente de la lengua y las manos**

Seguimos explorando la casuística y planteamos ahora a los usuarios que imaginen y acto seguido hagan un movimiento incipiente y puntual, casi inapreciable, con el fin de asegurar la generación de la señal EEG correspondiente sin que el movimiento abarque el espacio temporal de nuestro trial utilizado en la clasificación el mismo. Con esta condición, 4 usuarios y 20 sesiones totales, nos situamos a medio camino de los movimientos imaginados y los reales con un mínimo del **59,65%** y un máximo del **63,16%** de acierto.

#### **i) Movimiento incipiente de ambas manos alternado con reposo**

Confirmamos la leve mejora que produce este método respecto del movimiento imaginado puro, a pesar de contar únicamente con 10 sesiones de 3 usuarios, obteniendo una tasa de acierto entre el **61,4%** y el **77,19%**.

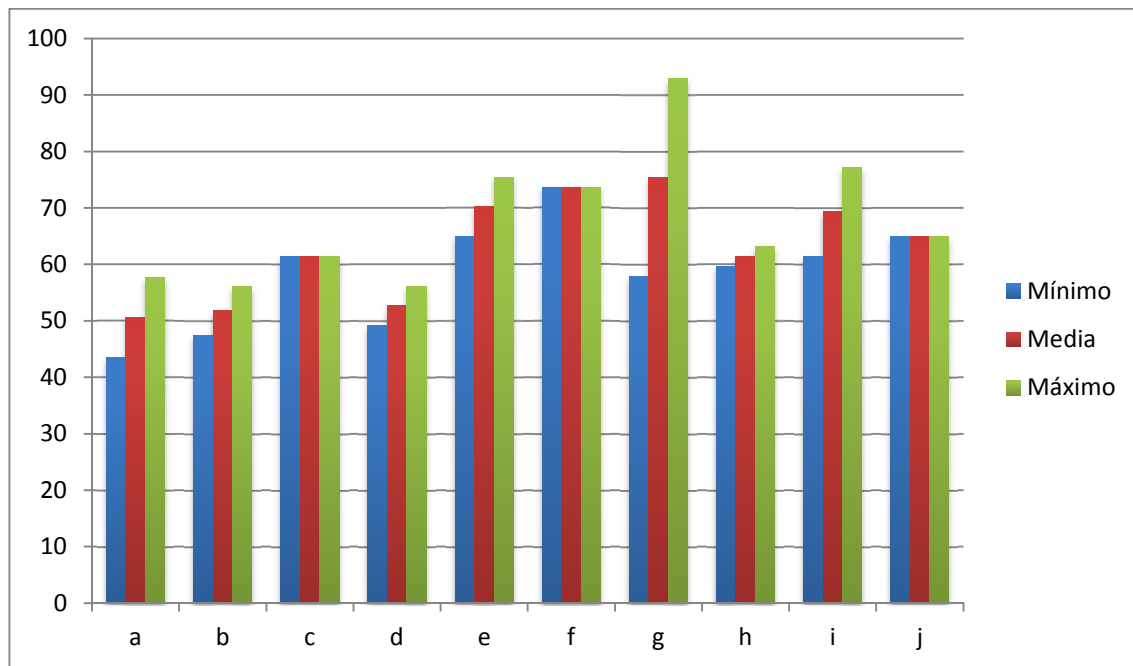
#### **j) Movimiento incipiente de la lengua alternado con reposo**

Terminamos nuestra batería de experimentos este caso con 4 usuarios en 18 sesiones totales, que siguiendo la línea esperada se mueve en valores de acierto cercanos a **64,91%**.

## **7.3 Resumen de resultados y conclusiones**

Presentamos gráficamente los resultados obtenidos representando el valor mínimo, medio y máximo de cada

caso en la **Ilustración 7-1**.



**Ilustración 7-1.** Tasa de acierto de los experimentos en tiempo real. **a)** Imaginado mano derecha-mano izquierda. **b)** Imaginado lengua-manos. **c)** Imaginado manos-reposo. **d)** Imaginado lengua-reposo. **e)** Leve manos-reposo. **f)** Leve lengua-reposo. **g)** Leve lengua-manos. **h)** Incipiente lengua-manos. **i)** Incipiente manos-reposo. **j)** Incipiente lengua-reposo.

Lamentablemente no se ha alcanzado un resultado satisfactorio para el caso principal y más deseado de distinción entre movimientos imaginados de la mano derecha e izquierda. Comprobado el buen funcionamiento del sistema BCI diseñado si se pasa por alto la fase de captación, podemos sospechar de unas culpas repartidas entre el dispositivo utilizado y la habilidad de los usuarios participantes en el estudio. Nos apoyamos en otros estudios [43] para inclinar la balanza acusatoria más hacia el lado del casco que el de los voluntarios [44]. El hecho de contar con un bajo número de sensores en la zona parietal y una sensibilidad que suponemos acorde al enfoque amateur del producto parecen ser determinantes en la calidad de la señal EEG captada.

Moviendo el estudio hacia otros casos más prometedores, comparamos nuestros experimentos con los datos de competiciones oficiales. Debemos reconocer que son sensiblemente peores y no se ha podido generar un escenario de tan alta calidad con las herramientas disponibles, pero podemos estar razonablemente satisfechos al haber obtenido una batería de casos en los que se roza o supera el 70% de acierto, que se considera el umbral de una comunicación fiable [45].

A pesar de intentar ser lo más profesionales y sistemáticos posibles, no podemos desdeñar que el estudio de este trabajo cuenta con pocos usuarios que además están a priori escasamente entrenados. Quizás un abanico más amplio en el estudio arrojaría mejores rendimientos globales, pero no hay una certeza sobre la que apoyar esta afirmación salvo el hecho de que sabemos que las señales cerebrales pueden variar ampliamente de un individuo a otro [46].

En lo que respecta al casco Emotiv EPOC, el fabricante defiende las amplias virtudes de su dispositivo pero por motivos empresariales no muestra estudios detallados sobre su rendimiento ni el del software suministrado en entornos diferentes de los juegos y el entretenimiento en los que intervienen otras señales aparte de las EEG. Tampoco se indica cuanto entrenamiento se necesita para dominar razonablemente el uso del casco. Algunos estudios ajenos al fabricante validan su uso en un sentido amplio sin indicar tampoco pautas para el entrenamiento ni el tamaño de las muestras utilizadas [47].

En lo referente al uso del casco Emotiv EPOC, las sensaciones recogidas en este trabajo se corroboran con las de [48], [49] y [50] por lo que respecta al costoso ajuste en la cabeza para obtener un buen contacto de los sensores antes de cada sesión, especialmente con pelo largo o grueso, por no mencionar a las personas con dificultades de movilidad que requerirán de ayuda externa. También se coincide en calificar su uso como mentalmente exigente, provocando una sensación agri dulce de emoción, diversión y frustración. Así mismo, para algunos usuarios el dispositivo se torna incómodo por la presión de los anclajes tras un lapso de tiempo afectando a su concentración y desempeño en las pruebas y, probablemente, a su predisposición a emplearlo en un futuro en hipotéticas aplicaciones.

En resumen, los resultados de este trabajo ofrecen están en sintonía con otras investigaciones similares y dan pasos en una línea de estudio que se puede y debe continuar con la esperanza de llegar a sistemas BCI mucho más potentes, cómodos, seguros y fiables.



## 8 APLICACIONES PRÁCTICAS

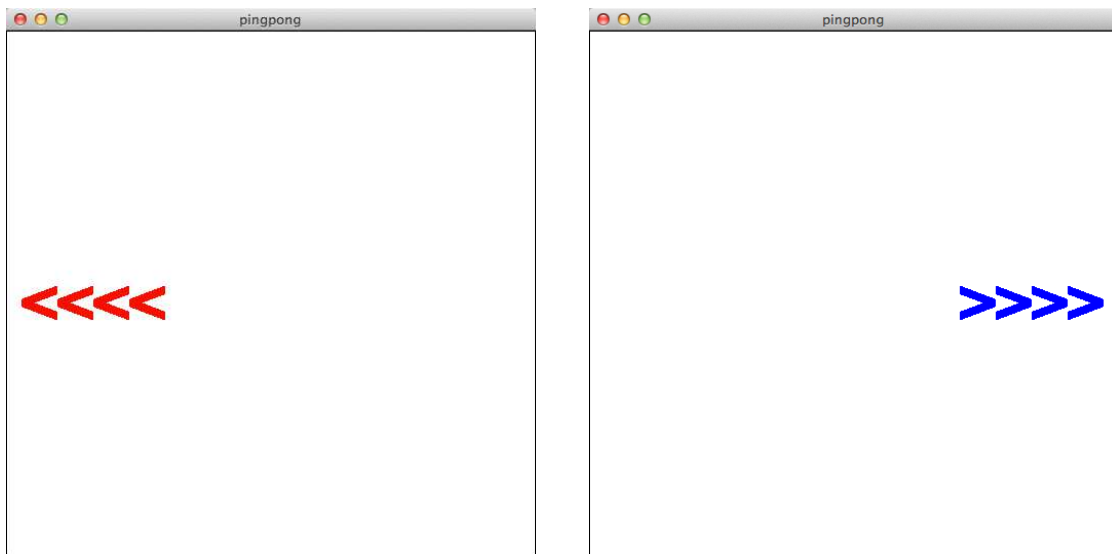
A raíz de los resultados obtenidos y tras comprobar que, dentro las limitaciones señaladas, es factible un sistema BCI con las herramientas y el esquema empleados, se proponen un par de aplicaciones prácticas sencillas para mostrar las bondades de la investigación realizada con señales EEG en este trabajo. Las aplicaciones se han creado como bloques de Simulink y se han ubicado dentro del esquema de trabajo descrito en el capítulo 6 como salida del mismo. Cabe recordar que en la literatura reciente sobre el particular se hace hincapié en prestar atención a los factores que afecten a la aceptación de la tecnología aumentativa por parte de los usuarios y, así, estas aplicaciones aquí presentadas pueden servir, amén de su funcionalidad particular, para familiarizarles con el sistema a través de un entorno algo más amigable e intuitivo. Sin ánimo de caer en la inmodestia, también considero que podrían servir de punto de partida para futuros desarrollos y funcionalidades más avanzadas.

### 8.1 Juego de ping-pong

La aplicación ping-pong, *stricto sensu* se trata de un frontón, consiste en manejar una barra horizontal dirigiéndola a izquierda y derecha para golpear una pelota y hacerla rebotar en las paredes del campo de juego. El programa consta de una primera fase de entrenamiento y una segunda fase de juego propiamente dicho.

#### 8.1.1 Fase de entrenamiento

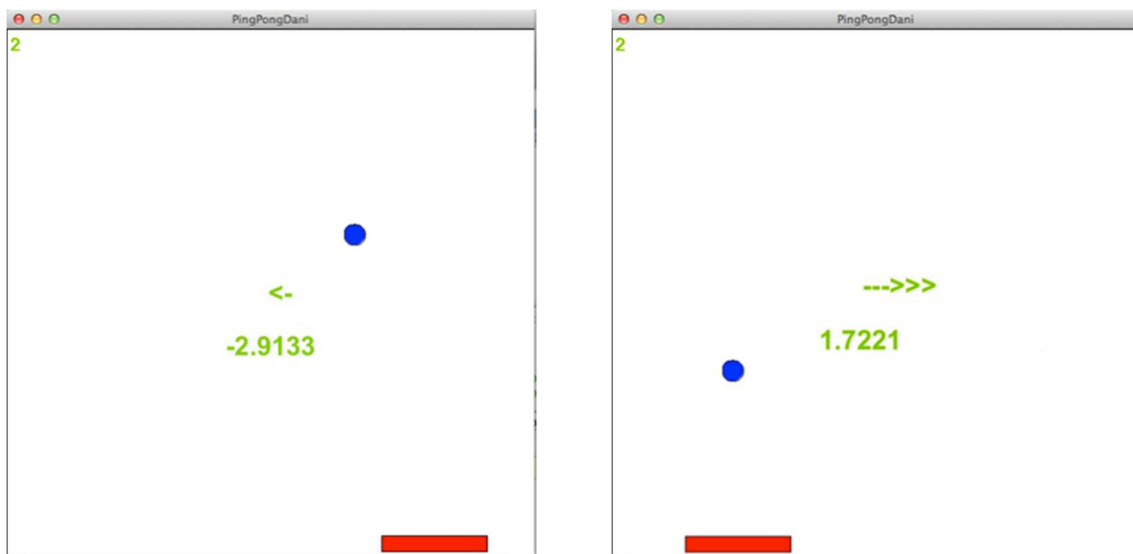
En la pantalla inicial, debemos entrenar al clasificador para que aprenda a discriminar entre las dos clases de movimientos imaginados que el usuario llevará a cabo cuando quiera desplazar la barra hacia la izquierda o hacia la derecha. El número de trials que se dedicarán al entrenamiento es configurable. Los tiempos de espera entre ensayos y de toma de datos en cada ensayo también son parámetros que podemos configurar. Se presenta una secuencia aleatoria de movimientos a izquierda y derecha señalizados con unas flechas de color rojo y azul respectivamente como se ve en la **Ilustración 8-1**.



**Ilustración 8-1.** a) Trial de la fase de entrenamiento para el movimiento hacia la izquierda. b) Idem derecha.

### 8.1.2 Fase de juego

Una vez terminada la fase de entrenamiento, aparecen la barra y la pelota. Cuando el sistema interpreta el movimiento imaginado, la barra se desplaza hacia el lado correspondiente. Si en el siguiente trial se insiste en el mismo movimiento, la barra se moverá más rápidamente hacia el mismo lado. Si por el contrario se opta por el otro movimiento imaginado, la barra cambiará de sentido de desplazamiento y se moverá lentamente. En la pantalla aparece el resultado de la última clasificación en color verde en forma de valor numérico y con una flecha sencilla o múltiple en función de si se ha cambiado de sentido o se insiste en el mismo. En la **Ilustración 8-2** se pueden ver las cuatro posibilidades de desplazamiento de la barra. El valor absoluto del indicador de la clasificación será mayor cuanto mayor sea la distancia al hiperplano de separación establecido por LDA. Con cada golpeo de pelota, el contador de la parte superior izquierda se incrementa en una unidad. El juego termina cuando la pelota rebasa la posición horizontal de la barra.



**Ilustración 8-2.** a) Movimiento lento hacia la izquierda. b) Movimiento rápido hacia la derecha.

Los usuarios que han probado la aplicación reconocen, a pesar de algunos errores de interpretación de los movimientos imaginados, un cierto grado de jugabilidad y una sensación entre la estupefacción y la satisfacción cuando la barra obedece a los deseos del jugador y se desplaza en consecuencia. El hecho de acelerar la barra cuando se repite el movimiento imaginado o el de mostrar gráfica y numéricamente el resultado del ensayo anterior, producen un efecto de *feedback* en el sistema que mejora el rendimiento y que, aunque se ha establecido de forma subjetiva, podría ser interesante calibrar.

## 8.2 Aplicación de alfabeto

Es una aplicación para deletrear con movimientos imaginados, seleccionando las letras del alfabeto que se van iluminando en la pantalla. Se hace uso de la frecuencia de aparición de las letras en las palabras de un texto arbitrariamente largo de la lengua castellana para mostrarlas en una proporción tal que sea más rápido escribir las letras más frecuentes y más costoso para las que lo son menos. No se consideran tildes ni signos de puntuación. El programa consta de una fase de entrenamiento y una fase de deletreo.

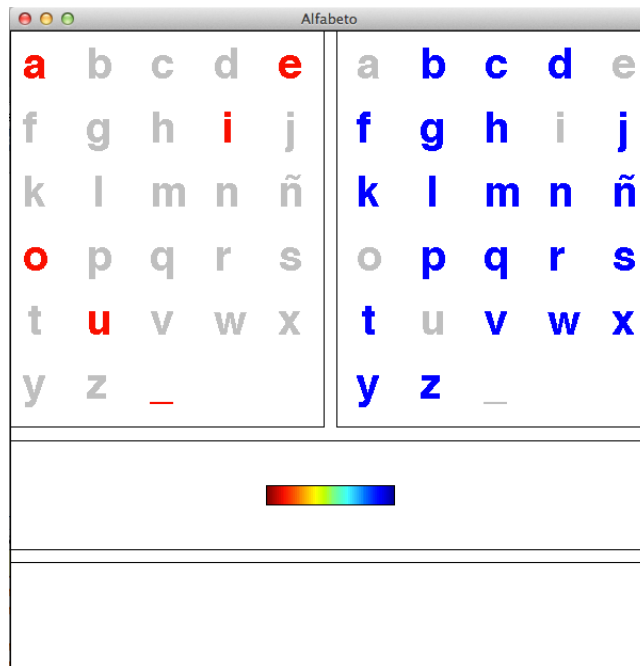
### 8.2.1 Fase de entrenamiento

De manera análoga a como se hacía en la aplicación del juego de ping-pong, se entrena al clasificador en un primer momento para aprender a discriminar entre el movimiento imaginado que corresponde a la izquierda y el de la derecha. El proceso es idéntico al descrito en el apartado **8.1.1**.

### 8.2.2 Fase de deletreo

Al finalizar la fase de entrenamiento, se presenta la pantalla inicial de deletreo visible en la **Ilustración 8-3**. En

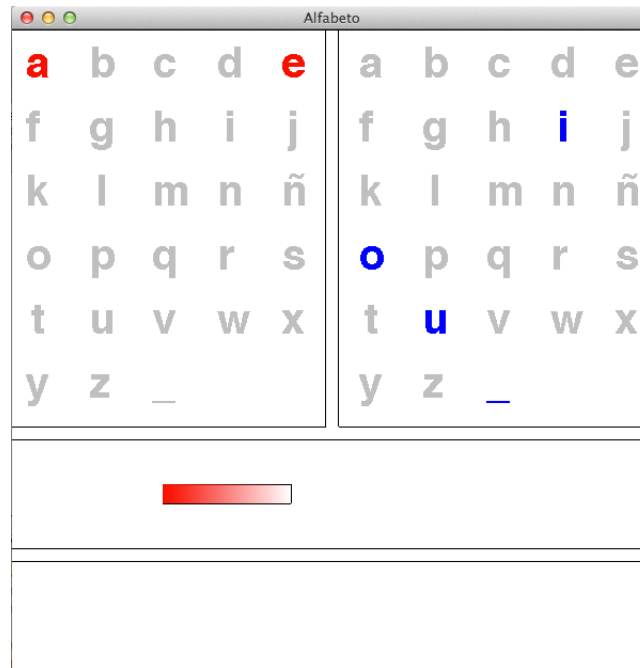
ella encontramos por duplicado a ambos lados de la ventana de la aplicación todas las letras del abecedario y el símbolo “\_” que significa un espacio. El color base de los caracteres es el gris y consideramos iluminada una letra si aparece en rojo en el tablero izquierdo o respectivamente en azul en el derecho.



**Ilustración 8-3.** Pantalla inicial de la fase de deletreo.

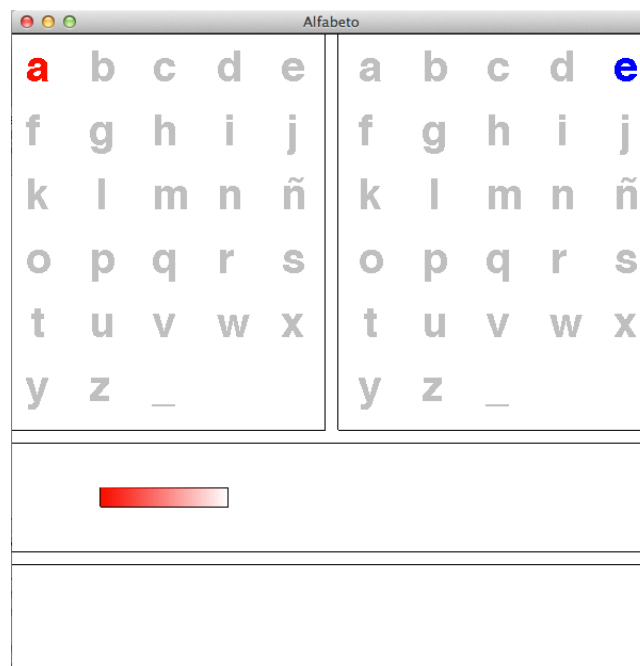
El procedimiento para escribir una letra es bien sencillo. Para comenzar nos fijamos en qué lado está iluminada la letra que queremos, y procedemos a imaginar el movimiento correspondiente. Transcurrido el tiempo de trial, el clasificador determina el lado elegido y realiza tres acciones: apaga todas las letras iluminadas del lado contrario al elegido, redistribuye en ambos lados las letras iluminadas del lado elegido y desplaza la barra inferior que ejerce como testigo, coloreándola de rojo o azul según el caso. Cuando repetimos movimiento la barra se desplaza más rápidamente y cuando cambiamos de lado, lo hace más lentamente. Esto se hace, como en la aplicación de ping-pong, para provocar un refuerzo o *feedback* en el sistema. Como es lógico, el mismo carácter nunca estará iluminado en ambos lados simultáneamente y con cada selección vamos reduciendo el número de letras iluminadas hasta llegar a la que nos interesa. Finalmente, la letra aparecerá escrita en color verde en la zona inferior de la ventana de la aplicación.

Como ejemplo, vemos en la **Ilustración 8-4**, la **Ilustración 8-5** y la **Ilustración 8-6** el proceso para escribir la letra **e**, que es la más frecuente y que por tanto requerirá, junto con la letra **a**, el menor número de trials para representarla. Partiendo de la pantalla inicial, hacemos el movimiento imaginado del lado izquierdo, que es donde encuentran las vocales y el espacio. Transcurrido el trial, se apagan las consonantes del lado derecho, se redistribuyen las vocales y se desplaza la barra coloreada de rojo a la izquierda.



**Ilustración 8-4.** Primer paso para escribir la letra **e**: movimiento imaginado izquierdo.

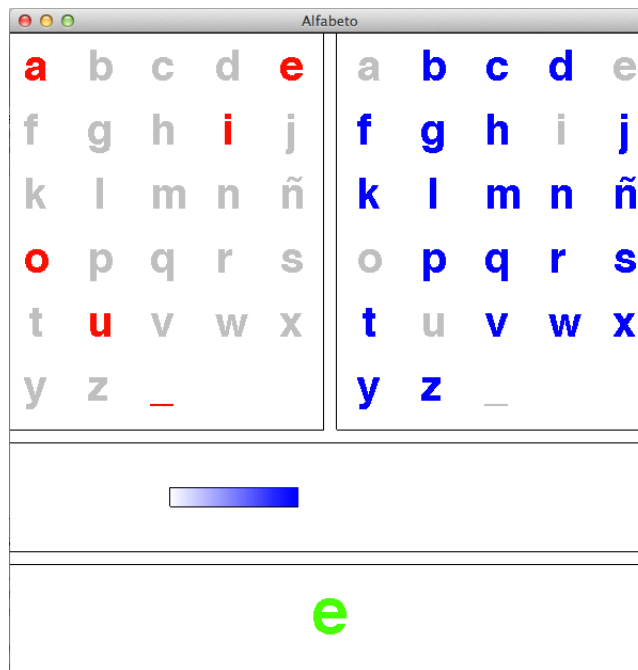
Volvemos a imaginar el movimiento del lado izquierdo para seleccionar las letras **a** y **e**. Ahora la barra se desplazará más deprisa.



**Ilustración 8-5.** Segundo paso para escribir la letra **e**: movimiento imaginado izquierdo.

Finalmente, imaginamos el movimiento del lado derecho. La letra **e** aparece ya escrita en color verde en la parte inferior y la barra coloreada de azul se desplaza a la derecha lentamente. Todas las letras vuelven a estar disponibles de nuevo para seguir escribiendo a continuación.





**Ilustración 8-6.** Tercer paso para escribir la letra e: movimiento imaginado derecho.

### 8.2.2.1 Frecuencias de aparición de las letras

La distribución de las letras en la pantalla se ha hecho siguiendo la frecuencia de su aparición en la lengua castellana indicada en la **Tabla 8-1** [51]. Se han agrupado las letras intentando que haya una relación inversa entre su frecuencia y el número de movimientos necesarios para escribirlas, aunque las vocales se encuentran algo privilegiadas en el reparto dado que solo suman el 45% de las ocurrencias de un texto. Al espacio se le asignan 4 movimientos porque se puede interpretar que su frecuencia de aparición es elevada.

Letra	Frecuencia (%)	Nº movimientos
a	12,63	3
b	1,42	6
c	4,68	5
d	5,86	5
e	13,68	3
f	0,69	7
g	1,01	6
h	0,7	7
i	6,25	4
j	0,44	7
k	0,01	8

<b>l</b>	4,97	5
<b>m</b>	3,15	5
<b>n</b>	6,71	4
<b>ñ</b>	0,2	7
<b>o</b>	8,68	4
<b>p</b>	2,51	5
<b>q</b>	0,88	7
<b>r</b>	6,87	4
<b>s</b>	7,98	4
<b>t</b>	4,63	5
<b>u</b>	3,93	4
<b>v</b>	0,9	6
<b>w</b>	0,02	8
<b>x</b>	0,22	7
<b>y</b>	0,9	6
<b>z</b>	0,52	7
<b>espacio</b>	-	4

**Tabla 8-1.** Frecuencias de las letras en español y número de movimientos necesarios para escribirlas en la aplicación alfabeto.

### 8.2.3 Rendimiento, conclusiones y posibles mejoras

El rendimiento de esta aplicación es desigual, dependiendo del tiempo de espera que se defina entre trials y el tiempo para realizar cada uno de ellos, así como de la tasa de acierto del usuario particular. En un escenario óptimo, se puede llegar a escribir 4 letras por minuto. Hay que tener en cuenta la desventaja de que cuantos más movimientos sean necesarios para escribir una letra, más fácil será que aparezca un error de clasificación en alguno de los pasos intermedios y se acabe escribiendo una letra no deseada.

Los usuarios manifiestan las mismas sensaciones que en la aplicación de ping-pong y la lógica frustración cuando el resultado de una clasificación no corresponde con el esperado. Reconocen la dificultad en el manejo de la aplicación, especialmente desde el punto de vista del resultado obtenido a tenor del esfuerzo realizado. Aunque como se indicó en la introducción de este trabajo, la lentitud de estos sistemas conviene también relativizarla colocándonos en el punto de vista del usuario incomunicado o inmovilizado.

Algunas posibles mejoras de la aplicación que mejorarían los resultados serían la opción de autocompletar las palabras, ofrecer sílabas en vez de letras o la posibilidad de corregir un movimiento erróneo.

## 9 CONCLUSIONES FINALES

---

A raíz de este trabajo ha abarcado distintos aspectos que, integrados todos ellos, han pintado el paisaje completo de un sistema BCI. Desde la pequeña neurona que dispara su potencial de acción hasta los potentes algoritmos de procesamiento empleados en la determinación de un movimiento imaginado, en cada paso se ha intentado aprender con el fin de avanzar en el conocimiento y aportar un granito a la esperanza de que algún día estos sistemas sean plenamente operativos en aplicaciones útiles.

En la primera parte hemos visto cómo a pesar del esfuerzo continuado de diversas disciplinas científicas y tecnológicas, la codificación cerebral se sigue presentando un tanto esquiva a los esfuerzos de la investigación y no acaba de mostrar todos sus secretos. La identificación y extracción de las características y el reconocimiento y clasificación de patrones de las señales cerebrales EEG que se corresponden a actividades concretas es una tarea minuciosa que pone en valor el tratamiento de señal. Los ritmos  $\mu$  y  $\beta$  provenientes de la corteza motora son nuestros actores principales. La problemática no queda ahí aparcada, pues en el terreno de la detección también hemos comprobado como se pueden hacer prácticamente inútiles los esfuerzos del procesamiento y la clasificación si no partimos de unos buenos datos sobre los que operar.

Los sistemas de interfaz cerebro-ordenador BCI son objeto de estudio desde hace varios años y la literatura disponible confirma que se trabaja en la buena dirección. El salto desde el laboratorio a las vidas de los usuarios no es siempre inmediato y si ya de por sí la meta de la eficiencia del sistema es complicada, no podemos dejar de contemplar otras facetas relevantes como la facilidad de uso, movilidad, la comodidad o la estética.

En el estudio teórico de este trabajo, hemos confirmado la importancia de la teoría de la decisión bayesiana a la hora del reconocimiento de patrones y la clasificación que se pretenda realizar posteriormente. Cómo se concibe un clasificador a partir de las funciones discriminantes y cómo se obtiene la frontera de decisión que separa las regiones de nuestros datos deriva de probabilidad bayesiana.

Las señales que se manejan cuentan con una gran dimensionalidad y reducirla para facilitar su tratamiento es la función del algoritmo PCA, que se muestra como introducción al concepto de reducción de dimensiones. En neurociencia el discriminante lineal más empleado es LDA (Linear Discriminant Analysis), que sirve para trazar las fronteras antes mencionadas entre las enmarañadas nubes de datos recogidas. Además del filtrado temporal y espectral, es necesario realizar un filtrado espacial para detectar la zona del cerebro en que se está produciendo la actividad sensoriomotora. La técnica CSP (Common Spatial Patterns) se utiliza para extraer la información espacial que nos ofrecen las poblaciones neuronales desincronizándose al unísono. La unión de CSP y LDA en este trabajo es la base del procesamiento del sistema diseñado.

En el instante en que toca arremangarse y probar en el terreno la validez de las afirmaciones teóricas, es cuando surgen los problemas reales y se contrastan las premisas iniciales. El fracaso inicial en el laboratorio ha dado pie a comprobar paso por paso la bondad del sistema BCI en tiempo real diseñado, viendo que el cuello de botella se situaba en el dispositivo de captación Emotiv EPOC, diseñado para otros menesteres más prosaicos. Las primeras pruebas de laboratorio en la que se intenta diferenciar entre los movimientos imaginados de la mano derecha y la izquierda arrojan un resultado puramente azaroso. Para solucionarlo hay que ir descartando los factores de la biseñez del usuario frente al sistema, del número escaso de pruebas, de

errores de implementación del algoritmo, de fallos en la captación de las señales y de prácticamente todo lo que pase por la mente del investigador azorado. Las sospechas de que el eslabón débil de la cadena es el dispositivo Emtiv EPOC por la mediana sensibilidad de los sensores y menor resolución espacial en la zona parietal, que es donde se genera la actividad motora de las extremidades del cuerpo, nos inducen a corroborar nuestra intuición mediante una simulación con los datos de las competiciones que han sido obtenidas de un modo, digamos, más profesional y con mejores equipos técnicos. Tras preparar los datos, se inyectan en tiempo real en el sistema diseñado simulando unos parámetros similares a los que tenemos en el trabajo con nuestras herramientas. Se comprueba que la tasa de acierto es muy elevada (95%) y, ya que se abre una vía de éxito en el sistema, podemos proceder a dilucidar qué pruebas y validaciones se llevarán a cabo para conseguir resultados tangibles.

Descartando la idea inicial de conseguir diferenciar entre movimientos imaginados de la mano derecha y la mano izquierda, se ha procedido a realizar una batería de ensayos que, en su modesto alcance, demuestra la importancia de contar con una buena resolución espacial de los sensores, la importancia del entrenamiento del usuario y el aprendizaje de la máquina, y la facilidad para los usuarios de imaginar movimientos más dispares entre sí. Con el objetivo de llegar al 70% de acierto, que es la cifra mínima establecida para una comunicación fiable, se intentan afinar en la medida de lo posible todos los elementos conjugables del sistema. Debe tenerse en cuenta que el estudio se ha hecho con pocos usuarios escasamente entrenados y con unas herramientas que, pudiendo desempeñarse en el entorno planteado, no están diseñadas específicamente para tal fin.

Una primera solución propuesta es la de intentar discriminar entre los movimientos imaginados de la lengua y las manos. Esto se hace porque la zona del cerebro encargada del movimiento de la lengua se sitúa en la zona más alejada del lóbulo parietal respecto de las manos, y se intenta expresar esta circunstancia para clasificar más fácilmente. Por desgracia, tampoco se consiguen resultados aceptables.

El segundo paso es uno hacia atrás, es decir, no se intenta distinguir entre dos movimientos imaginados sino entre un movimiento imaginado, las manos, y un estado de reposo del usuario en el que se le pide que se relaje y deje la mente en blanco. Vemos que esta rebaja en la exigencia de discriminación nos ubica en un 61% de éxito que, no siendo una maravilla, es admisible como indicativo de que el sistema puede obtener resultados.

Intentando replicar el caso anterior con la lengua en vez de las manos, no se llega a ninguna cifra que podamos engalantar y suponemos, autoexculpándonos, que el dispositivo de captación no se encuentra cómodo con esta nueva discriminación espacial que pretendemos.

El siguiente paso, tras referirnos a otros estudios y bibliografías, es el de intentar sobrepasar las dificultades que nos surgen en la fase de captación de señales. Para ello se pide a los usuarios que además de imaginar el movimiento, lo realicen físicamente de forma leve, lo cual ayuda a visualizarlo. Se descarta la presencia de artefactos en nuestra clasificación debido al filtrado interno del casco, al filtrado espectral y a la normalización de las covarianzas en el algoritmo CSP. En el caso de mover levemente las manos frente al estado de reposo, el sistema consigue tasas de entre el 65% y el 75%. Si lo que se mueve levemente es la lengua frente al estado de reposo, un 74% de acierto nos solaza en nuestras acertadas suposiciones.

Se retoma la idea primera de dos movimientos y se sigue en el mismo nicho de aciertos con un 75% de media cuando lo que se mueve es la lengua frente a las manos. Cabe decir que en este caso se midieron dos picos, uno bajo y otro alto, que reflejan la volatilidad de algunas mediciones. La media, sin embargo, concuerda con las cifras anteriores.

Siguiendo con el ajuste fino de los experimentos y explorando las fronteras del sistema, se dice a los usuarios que hagan ahora un movimiento incipiente, casi inexistente, que imaginen y noten de alguna manera el tacto de la zona del cuerpo pensada sin llegar a hacer un desplazamiento apreciable. Se quiere asegurar así la generación de la señal EEG correspondiente sin que el movimiento se introduzca en la ventana temporal utilizada para clasificarlo. Estando entre las dos aguas de los movimientos imaginados y los reales, se consigue entorno al 60% de acierto para la lengua frente a las manos, entre el 61% y el 77% para las manos frente al reposo y alrededor del 65% para la lengua frente al reposo. Son mayores las tasas para un movimiento comparado con el estado de reposo que para dos movimientos enfrentados entre sí cuando se trata de movimientos incipientes.

Las cifras obtenidas finalmente nos dejan moderadamente satisfechos y validan a nuestro entender los experimentos realizados, vista su coherencia interna. Los pasos tomados han seguido una vía lógica que ha intentado desentrañar los misterios que se escondían tras el fracaso de las primeras sesiones con el caso paradigmático de los movimientos imaginados de la mano derecha y la izquierda.

Podemos, en suma, evaluar los resultados del trabajo realizado como acordes con los de otras investigaciones, lo cual no es algo que se dé por descartado de inicio y que necesita demostrarse en la práctica. Cada pequeño paso dado con la idea de implementar mejores sistemas BCI habrá valido la pena si algunas de las consideraciones, ejemplos, problemas o soluciones sirven de estímulo hacia cotas de mayor fiabilidad, seguridad, potencia y comodidad.

Las aplicaciones que se han propuesto en la última parte, un juego y una herramienta de deletreo, distan bastante de ser revolucionarias pero suponen un ejemplo de la utilidad que se le puede dar a un sistema BCI, pueden servir como herramientas de aproximación a esta tecnología y son un camino explorable hacia otras metas más elevadas.



# ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

---

2-1. Lóbulos del cerebro humano.	5
2-2. Partes de una neurona.	6
2-3. Evolución temporal de un spike.	7
2-4. Evolución espacial de un spike.	7
2-5. Ubicación de los electrodos según el sistema internacional 10-20.	9
3-1. Esquema de un sistema BCI.	12
3-2. Espectro frecuencial y ondas EEG de la corteza motora registradas sobre el cuero cabelludo.	15
3-3. Caso Emotiv EPOC empleado en el desarrollo de este trabajo.	17
3-4. Localización de los sensores de Emotiv EPOC en el cráneo.	17
4-1. Esquema inicial de un sistema de reconocimiento de patrones.	19
4-2. Histogramas de la característica de longitud de dos categorías.	20
4-3. Espacio de dos características para dos categorías.	21
4-4. Esquema avanzado de un sistema de reconocimiento de patrones.	22
4-5. Ciclo de diseño de un sistema de reconocimiento de patrones.	24
4-6. Esquema de un clasificador como un conjunto de funciones discriminantes.	28
4-7. Distribuciones esféricas en $d$ dimensiones y frontera para $\Sigma_i = \sigma^2 I$ .	33
4-8. Regiones de decisión no conectadas de manera sencilla con dos gaussianas de distinta varianza.	35
5-1. Clasificación con LDA.	40
5-2. Resultado de aplicar 4 filtros CSP a una señal EEG continua filtrada en banda.	44
6-1. Modelo de Simulink básico empleado.	50
6-2. 22 señales sin procesar que entran en el modelo Simulink.	51
6-3. 14 señales de interés sobre las que se opera.	51
6-4. Magnitud de la respuesta en frecuencia normalizada del filtro.	52
6-5. Detalle de los bloques visuales.	55
7-1. Tasa de acierto de los experimentos en tiempo real.	60
8-1. Trials de la fase de entrenamiento para los movimientos hacia la izquierda y la derecha.	63
8-2. Movimientos de la aplicación ping-pong.	64
8-3. Pantalla inicial de la fase de deletreo.	65
8-4. Primer paso para escribir la letra e: movimiento imaginado izquierdo.	66
8-5. Segundo paso para escribir la letra e: movimiento imaginado izquierdo.	66
8-6. Tercer paso para escribir la letra e: movimiento imaginado derecho.	67





# ÍNDICE DE TABLAS

---

<b>2-1.</b> Bandas de frecuencia de las ondas cerebrales.	8
<b>7-1.</b> Porcentaje de acierto del usuario 8 del Dataset 2a.	57
<b>8-1.</b> Frecuencias de las letras en español y número de movimientos necesario.	68



# GLOSARIO

---

- BCI** Brain Computer Interface.
- EEG** Electroencefalograma.
- PCA** Principal Component Analysis.
- LDA** Linear Discriminant Analysis.
- CSP** Common Spatial Patterns.
- PET** Positron Emission Tomography
- fMRI** Functional Magnetic Resonance Imaging
- MEG** Magnetoencefalografía
- EOG** Electrooculograma
- EMG** Electromiograma
- ERS** Evento Relacionado con la Sincronización
- ERD** Evento Relacionado con la Desincronización
- EEG** Electroencefalograma
- EKG** Electrocardiograma
- ADC** Convertidor analógico-digital
- QDA** Quadratic Discriminant
- SVM** Support Vector Machine
- STC** Spike-triggered Covariance
- SCP** Slow Cortical Potential
- CSSP** Common Spatio-Spectral Pattern
- CSSSP** Common Sparse Spectral Spatial Pattern



# REFERENCIAS

---

- [1] Rita Carter, *The Brain Book*, Dorling Kindersley Limited, 2009.
- [2] Stanley Finger, *Origins of neuroscience : a history of explorations into brain function*. Oxford University Press, 1994.
- [3] Alejandro Melo Florián, *Cerebro, mente y conciencia: un enfoque multidisciplinario*, iMed- Pub, 2010.
- [4] G Buzsáki, *Rhythms of the Brain*, vol. 1, 2006.
- [5] Donald L. Wise, *Bioinstrumentation and biosensors*, Marcel Dekker, 1991.
- [6] Peter Dayan, L.F.Abbott, *Theoretical Neuroscience: Computational and Mathematical Modeling of Neural Systems*, MIT Press, 2001.
- [7] Henry Gray, *Anatomy of the Human Body*, Lea & Febiger, New York, 1918.
- [8] José Noé Argueta Flores, *Anatomía y fisiología del cerebro*, slideshare.net, 2018.
- [9] Edwin Clarke, Kenneth Dewhurst, Michael Jeffrey Aminoff, *An Illustrated History of Brain Function: Imaging the Brain from Antiquity to Present*, Norman Publishing, 1996.
- [10] Steven Telleen, *Review of Basic Neuron Anatomy*, Nervous Tissue by OpenStax College, 2018.
- [11] Djuricic M, Antic S, Chen WR, Zecevic D, *Voltage imaging from dendrites of mitral cells: EPSP attenuation and spike trigger zones*, The Journal of Neuroscience, 2004.
- [12] Sachin Sharma, Gaurav Kumar, Dipak kumar Mishra, Debasis Mohapatra, *Design and Implementation of a Variable Gain Amplifier for Biomedical Signal Acquisition*, International Journal of Advanced Research in Computer Science and Software Engineering, 2012.
- [13] Daniel Wolpert, *Neurons and their function*, beaubreeze.weebly.com, 2018.
- [14] Carlos Novo, Leticia Chacón Guerrero, José Alberto Barradas Bribiesca, *Aproximaciones al estudio de la neurociencia del comportamiento*, Universidad Autónoma de Guerrero, 2010.
- [15] Mikhail A. Lebedev, Miguel A.L. Nicolelis, *Brain-machine interfaces: past, present and future*, TRENDS in Neurosciences Vol.29 No.9, 2006.
- [16] Jonathan R. Wolpaw, Niels Birbaumer, Dennis J. McFarland, Gert Pfurtscheller, Theresa M. Vaughan. *Brain-computer interfaces for communication and control*, Laboratory of Nervous System Disorders, Wadsworth Center, New York State Department of Health, 2002.
- [17] Jonathan R. Wolpaw, Niels Birbaumer, Dennis J. McFarland, Gert Pfurtscheller, Theresa M. Vaughan. *Brain-computer interfaces for communication and control*, Clinical Neurophysiology 113 767-791, 2002.
- [18] Desney S. Tan, Anton Nijholt, *Brain-computer interfaces, Applying our Minds to Human-Computer Interaction*, Springer, 2010.

- [19] Richard O. Duda, Peter E. Hart, David G. Stork, *Pattern Classification*, John Wiley and Sons, 2001.
- [20] Trevor Hastie, Tibshirani Robert, Jerome Friedman, *The elements of statistical learning : data mining, inference, and prediction*, Springer, 2009.
- [21] Christopher M. Bishop, *Pattern recognition and machine learning*, vol. 4, 2006.
- [22] Dunai Fuentes Hitos, *Técnicas de Procesado de Señales Cerebrales*, TFG de Grado en Ingeniería de las Tecnologías de Telecomunicación de la ETSI de la Universidad de Sevilla, 2015.
- [23] K. Fukunaga, W. L. G. Koontz, *Application of the karhunen-loève expansion to feature selection and ordering*, IEEE Transactions on Computers, 1970.
- [24] *Advanced Statistics – Biology 6030*, Bowling Green State University, 2017.
- [25] I. T. Jolliffe, *Principal Component Analysis*, Springer-Verlag, 2002.
- [26] Abdi. H, Williams, L.J. *Principal Component Analysis*, Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics, 2010.
- [27] Paul L. Nunez, Ramesh Srinivasan, Andrew F. Westdorp, Ranjith S. Wijesinghe, Don M. Tucker, Richard B. Silberstein, J. Cadusch, *EEG coherency I: statistics, reference electrode, volume conduction, Laplacians, cortical imaging, and interpretation at multiple scales*. *Electroencephalogr. Clin. Neurophysiol.*, 103:499–515, 1997.
- [28] Benjamin Blankertz, Ryota Tomioka, Steven Lemm, Motoaki Kawanabe, Klaus-Robert Müller, *Optimizing Spatial Filters for Robust EEG Single-Trial Analysis*. *IEEE SIGNAL PROCESSING MAGAZINE*, VOL. XX, 2008.
- [29] Guido Dornhege, Benjamin Blankertz, Gabriel Curio, Klaus-Robert Müller, *Boosting bit rates in non-invasive EEG single-trial classifications by feature combination and multi-class paradigms*, *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 51(6):993–1002, 2004.
- [30] Steven Lemm, Benjamin Blankertz, Gabriel Curio, Klaus-Robert Müller, *Spatio-spectral filters for improving classification of single trial EEG*, *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 52(9):1541–1548, 2005.
- [31] Guido Dornhege, Benjamin Blankertz, Matthias Krauledat, Florian Losch, Gabriel Curio, Klaus-Robert Müller, *Optimizing spatio-temporal filters for improving brain-computer interfacing*. In *Advances in Neural Inf. Proc. Systems (NIPS 05)*, MIT Press, 2006.
- [32] Ryota Tomioka, Guido Dornhege, Kazuyuki Aihara, Klaus-Robert Müller, *An iterative algorithm for spatio-temporal filter optimization*. In *Proceedings of the 3rd International Brain-Computer Interface Workshop and Training Course 2006*, Verlag der Technischen Universität Graz, 2006.
- [33] Ryota Tomioka, Kazuyuki Aihara, Klaus-Robert Müller, *Logistic regression for single trial EEG classification*. In *B. Schölkopf, J. Platt, and T. Hoffman, editors, Advances in Neural Information Processing Systems 19, pages 1377–1384*, MIT Press, 2007.
- [34] J. Farquhar, N. J. Hill, T. N. Lal, B. Schölkopf, *Regularised CSP for sensor selection in BCI*. In *Proceedings of the 3rd International Brain-Computer Interface Workshop and Training Course 2006, pages 14–15*, Verlag der Technischen Universität Graz, 2006.
- [35] Matthias Krauledat, Michael Schröder, Benjamin Blankertz, Klaus-Robert Müller, *Reducing calibration time for brain-computer interfaces: A clustering approach*. In *B. Schölkopf, J. Platt, and T. Hoffman, editors, Advances in Neural Information Processing Systems 19, pages 753–760*, MIT Press, 2007.
- [36] Yuanqing Li, Cuntai Guan. *An extended EM algorithm for joint feature extraction and classification in brain-computer interfaces*, *Neural Comput.*, 18:2730–2761, 2006.
- [37] Matthias Krauledat, Pradeep Shenoy, Benjamin Blankertz, Rajesh P. N. Rao, Klaus-Robert Müller. *Adaptation in CSP-based BCI systems*. In *Toward Brain-Computer Interfacing*, MIT Press, 2007.
- [38] N. J. Hill, J. Farquhar, T. N. Lal, B. Schölkopf. *Time-dependent demixing of task-relevant EEG signals*. In *Proceedings of the 3rd International Brain-Computer Interface Workshop and Training Course 2006, pages 20–21*, Verlag der Technischen Universität Graz, 2006.
- [39] Benjamin Blankertz, Motoaki Kawanabe, Ryota Tomioka, Friederike Hohlefeld, Vadim Nikulin, Klaus-

- Robert Müller, *Invariant common spatial patterns: Alleviating nonstationarities in brain-computer interfacing*. In *Advances in Neural Information Processing Systems 20*, MIT Press, 2008.
- [40] F. Javier Olías Sánchez, *Estudio del Método Common Spatial Patterns y sus variantes en interfaces cerebro-ordenador*, TFM en Máster de Ingeniería de Telecomunicación de la ETSI de la Universidad de Sevilla, 2016.
- [41] Deepa Beeta Thiyam, Sergio Cruces, Rajkumar E. R., *ThinICA-CSP algorithm for discrimination of multiclass motor imagery movements*, IEEE TENCON 2016, 2016.
- [42] Matt Lang, *Investigating the Emotiv EPOC for cognitive control in limited training time*, Department of Computer Science, University of Canterbury, 2012.
- [43] Christoff Heunis, *Export and Analysis of Emotiv Insight EEG Data via EEGLAB*, University of Stellenbosch, 2016.
- [44] Kirill Stytsenko, Evaldas Jablonskis, Cosima Prahm. *Evaluation of consumer EEG device Emotiv EPOC*, MEi:CogDci Conference Ljubljana, 2011.
- [45] Kristen LaMarca, Disha Gupta, Aleksandra Vuckovic, Jaime A. Pineda, Christoph Guger, *Interaction of bci with the underlying neurological conditions in patients: pros and cons*, Frontiers Journals, Frontiers in Neuroengineering, 2015.
- [46] Nicholas A. Badcock, Petroula Mousikou, Yatin Mahajan, Peter de Lissa, Johnson Thie, Genevieve McArthur, *Validation of the Emotiv EPOC® EEG gaming system for measuring research quality auditory ERPs*, Badcock et al, 2013.
- [47] S. Decker, P. Goyal, A. Katko, P. Koppol, A. Rodriguez, *“Brain Control,” tech. rep.*, Governor’s School Of Engineering And Technology, 2011.
- [48] R. Lievesley, M. Wozencroft, D. Ewins, *“The Emotiv EPOC neuroheadset: an inexpensive method of controlling assistive technologies using facial expressions and thoughts?”*, Journal of Assistive Technologies, vol. 5, no. 2, pp. 67–82, 2011.
- [49] D. Cernea, P.-S. Olech, A. Ebert, A. Kerren, *“Measuring Subjectivity,” KI - Künstliche Intelligenz, vol. 26, pp. 177–182*, Springer, 2012.
- [50] M. Pike, M. Wilson, A. Divoli, A. Medelyan, *“CUES: Cognitive Usability Evaluation System”*, 2nd European Workshop on Human-Computer Interaction and Information Retrieval (M. L. Wilson, T. Russell-Rose, B. Larsen, and J. Kalbach, eds.), 2012.
- [51] Fletcher Pratt, *Secret and Urgent: the Story of Codes and Ciphers*, Blue Ribbon Books, 1939.