Capítulo 11

El modelo del dado y su influencia sobre el desarrollo de la teoría de la probabilidad. Aciertos y fracasos

MARY SOL DE MORA CHARLES
UPV/EHU, San Sebastián

Introducción

El conocido manuscrito de Cardano, que circuló por Francia antes de ser publicado póstumamente, nos ofrece la privilegiada situación de observar una investigación en su desarrollo. No es un texto acabado y corrige los errores a medida que avanza y sin retroceder nunca. Los aspectos fundamentales de su enfoque de la probabilidad han sido ya estudiados y comentados[i], como su concepto de circuito completo de posibilidades y de la mitad del circuito, que proporcionaría la probabilidad ½ y por lo tanto las condiciones para un juego justo o equitativo, donde los jugadores podrían apostar la misma cantidad sin desventaja. Estudia los juegos de dados y de cartas y en los primeros aparecen algunas variantes curiosas de la época que queremos analizar aquí.

En el texto de Cardano se ratifica una vez más la preocupación de los jugadores de todos los tiempos por impedir las trampas, en particular al lanzar los dados. Desde muy antiguo se renuncia a tirar los dados con la mano y se comienzan a utilizar cubiletes, unos pequeños vasos redondos, ordinariamente de cuerno. Con ellos se solía jugar a dados y tabas y adquieren diversos nombres y formas. Los griegos hablaban de ψηφοβολω lanzador de piedrecillas para jugar o πυργοσ (torre)[ii], que en el mundo latino se transformaría en turricula o torrecilla, orca o tonel, fimus objeto de barro, pyxis cornea o cajita (bossoli) de cuerno y sobre todo fritillus (ver figura 1). Ordinariamente no tenía fondo, era más ancho en la parte de abajo que en la superior y dentro tenía una serie de escalones inclinados que obligaban a los dados a caer de uno en otro antes de llegar a la mesa, de forma que su caída pudiera considerarse aleatoria y no provocada por un impulso voluntario del jugador. Existen numerosas citas de la antigüedad clásica en la que se menciona el fritillo y su funcionamiento: Séneca, Marcial, Juvenal, Horacio, Ausonio y otros.

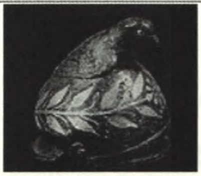

Fig. 1

Fig. 2

Pero el destino del fritillus sería mucho más complicado, debido a algunas coincidencias azarosas. Como el propio Cardano nos asegura, los dados se solían tirar, no sobre una mesa, sino sobre un tablero que garantizaba mejor la estabilidad y nivelación del terreno de juego y en tiempos de Cardano ya se había llegado a la conclusión de que ese tablero era lo que se llamaba fritillus y no sólo él sino también un juego de características especiales que luego veremos y que se jugaba con dicho tablero, se llamaba también fritillus. Por supuesto no era en absoluto necesario que el tablero fuera de ajedrez o damas, es decir que tuviera un dibujo de cuadros o ajedrezado, pero debía ser frecuente el uso de tales tableros, porque la historia natural se inmiscuyó en el asunto y podemos encontrar flores llamadas fritillarias y también determinadas mariposas, que para mayor confusión se llaman pyrgus y cuyo aspecto parece ajedrezado o a cuadros, aunque no en todos los ejemplares. En cuanto a las flores, al menos se parecen bastante en la forma a nuestro fritillus de la figura 1:

Pyrgus bellier

Pyrgus malvae

En el capítulo VII, Cardano se explica:

De los fritillos con inclinación y los dados adulterados

« Coloca el tablero (tabulas) exactamente en el centro, si oscila hacia la parte adversa, favorece al oponente y por lo tanto está contra ti; igualmente si se inclina hacia tí y está desplomado en tu favor ; si el fritillo completo permanece inmóvil, la cosa está igualada. Lo mismo sucede si el fritillo recibe luz de la parte opuesta, eso es perjudicial, pues perturba la mente; por el contrario es mejor que esté contra algo oscuro. También se dice que es beneficioso si se toma posición frente a la Luna en máximo ascenso. En cuanto al dado, existen dos clases de peligro, pues todo dado, aunque sea un dado permitido, tiene un punto favorecido, ya sea por su forma o por otra causa o por casualidad, y por ello si se cambia un número grande por uno pequeño o viceversa, se comprende que la diferencia será grande. Hay otra manera, cuando el dado está adulterado porque se ha hecho su forma más redonda o más estrecha, lo cual es fácilmente apreciable, o cuando se ha dilatado en una dirección estrechándolo en los vértices contrapuestos. Por tanto, se debe hacer una prueba triple, puesto que hay tres combinaciones de vértices opuestos y eso hace que la superficie sobresalga. De modo que estos aspectos deben considerarse cuidadosamente. »

De modo que parece identificar fritillo con tablero. Y en el capítulo XIII lo precisa aún más:

De los números compuestos, tanto hasta seis como superiores, tanto en dos dados como en tres.

«En dos dados, el doce y el once constan respectivamente de dos 6 y de 6 y 5. El diez de dos 5 y de 6 y 4, pero este último se puede variar de dos maneras, por lo tanto en total será la duodécima parte del circuito y la sexta de la igualdad. En el caso del nueve están el 5 y 4 y el 6 y 3, de forma que serán la novena parte del circuito y las dos novenas partes de la igualdad. El ocho se forma a partir de dos 4, de 3 y 5, y de 2 y 6. Estas cinco posibilidades forman aproximadamente la séptima parte del circuito y las dos séptimas partes de la igualdad. El siete se forma con 6 y 1, 2 y 5, 4 y 3, el total de los puntos es por lo tanto seis, la tercera parte de la igualdad y la sexta del circuito. El seis es como el ocho, el cinco como el nueve, el cuatro como el diez, el tres como el once y el dos como el doce. »

Hasta aquí no hay problema, todo es correcto. El texto sigue así:

« Pero en el juego del Fritillo hay que añadir once puntos, porque se puede obtener el valor con un solo dado, así el dos se obtiene de doce maneras (con la suma 1+1 o bien con 2,1; 2,2 ; 2,3...2,6 ; 1,2 ; 3,2 ;...6,2) lo que supone dos tercios de la igualdad y un tercio del circuito. El tres por lo tanto se obtiene de trece modos, el cuatro de catorce, el cinco de quince, lo que supone diez doceavos de la igualdad y cinco doceavo del circuito completo y el seis se obtiene de dieciséis modos, lo que está muy próximo de la igualdad. »

Es decir 16/36 o lo que es lo mismo, (8/18)(2/2) = (8/9)(1/2). A partir del siete, ya no se puede obtener el valor con un sólo dado y Cardano no lo escribe, o bien la edición lo ha omitido. Cardano lo resume en esta tabla, que también parece haber sido mal transcrita por los editores:

Consensus sortis in duabus Aleis.

2	12	1 uno	3	11	2 dos	4	10	3 tres	Aequal.
5	9	4 cuatro	6	8	5 cinco	7 seis	**8**	18 dieciocho en el Fritillo (igualdad)	Ad Frit.

En las Suertes se juega con la suma de los puntos y no vale considerar cada dado por separado o en conjunto, a voluntad, como en cambio sí sucede en el Fritillo (considerado aquí como un juego diferente). De ese modo, en la tabla, el ocho debería tener cinco posibilidades en las Suertes y lo mismo en el Fritillo. Se ha dejado llevar por la progresión de las posibilidades del dos al seis, añadiendo siempre 11 puntos, sin darse cuenta de que a partir del siete ya no se puede hacer así.

Estas serían las posibilidades para el Fritillo: El dos se puede hacer también con un sólo dado, es decir, de once maneras más 1 debido a dos dados,

(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(2,4),(4,2),(2,5),(5,2),(2,6),(6,2), (1,1).

(12/36)(2/2) = (2/3) (1/2).

El 3 se puede hacer de la misma manera, es decir, 11+2:

(13/36)(2/2)= (13/18) (1/2) = (6,5/9) (1/2).

El cuatro: 11+3

(14/36)(2/2) = (7/9) (1/2).

El cinco: 11+4

(15/36)(2/2) = (5/6)(1/2) = (7,5/9)(1/2).

El seis: 11+5

(16/36)(2/2) = (8/9) (1/2) muy cerca de la igualdad.

A continuación aparece la tabla para tres dados, tanto en las Suertes (ahora llamadas Aleis) como en el Fritillo:

Consensus sortis in tribus Aleis tum Frit.

Sortis			Fritilli	
			3	115
3	18	1 uno	4	125
4	17	3 tres	5	126
5	16	6 seis	6	133
6	15	10 diez	7	33
7	14	15 quince	8	36
8	13	21 veintiuno	9	37

9	12	25 venticinco	10	36
10	11	27 veintisiete	11	38
			12	26

Del mismo modo que en las Suertes, aquí hay números como:

13 que es 21 (veintiuno)
14 que es 15(quince)

Para las suertes, todos los valores son correctos:

El 3 y el 18:

(1, 1, 1) y (6, 6, 6)

El cuatro y el diecisiete:

(1,1,2), (2,1,1), (1,2,1) y (5,6,6), (6,5,6), (6,6,5) Etc.

Pero en el caso del fritillus, hay muchos problemas:

El valor para el tres es correcto:

(1,2, x), (3, x, y)

(1, 1, 1) y sus permutaciones:

(1,1,2) ~~(1,1,2)~~ (1,2,1) (2,1,2) (1,2,2) ~~(1,2,2)~~ (3,1,2) (1,3,2) (1,2,3)	7
(4,1,2) (1,4,2) (1,2,4) (5,1,2) (1,5,2) (1,2,5) (6,1,2) (1,6,2) (1,2,6)	9
~~(1,2,1)~~ (2,1,1) ~~(2,1,1)~~ (2,2,1) ~~(2,2,1)~~ ~~(2,1,2)~~ (3,2,1) (2,3,1) (2,1,3)	5
(4,2,1) (2,4,1) (2,1,4) (5,2,1) (2,5,1) (2,1,5) (6,2,1) (2,6,1) (2,1,6)	9
(1,3,1) (3,1,1) ~~(3,1,1)~~ ~~(2,3,1)~~ ~~(3,2,1)~~ ~~(3,1,2)~~ (3,3,1) ~~(3,3,1)~~ (3,1,3)	4
(4,3,1) (3,4,1)(3,1,4) (5,3,1) (3,5,1) (3,1,5) (6,3,1) (3,6,1) (3,1,6)	9
(1,1,3) ~~(1,1,3)~~ ~~(1,3,1)~~ ~~(2,1,3)~~ ~~(1,2,3)~~ ~~(1,3,2)~~ ~~(3,1,3)~~ (1,3,3) ~~(1,3,3)~~	2
(4,1,3) (1,4,3) (1,3,4) (5,1,3) (1,5,3) (1,3,5) (6,1,3) (1,6,3) (1,3,6)	9
~~(1,3,2)~~ ~~(3,1,2)~~ ~~(3,2,1)~~ (2,3,2) (3,2,2) ~~(3,2,2)~~ (3,3,2) ~~(3,3,2)~~(3,2,3)	4
(4,3,2)(3,4,2)(3,2,4) (5,3,2) (3,5,2)(3,2,5) (6,3,2)(3,6,2)(3,2,6)	9
~~(1,2,3)~~ ~~(2,1,3)~~ ~~(2,3,1)~~ (2,2,3)~~(2,2,3)~~~~(2,3,2)~~ ~~(3,2,3)~~(2,3,3)~~(2,3,3)~~	2
(4,2,3)(2,4,3)(2,3,4) (5,2,3)(2,5,3)(2,3,5) (6,2,3)(2,6,3)(2,3,6)	9
~~(1,3,4)~~~~(3,1,4)~~~~(3,4,1)~~ ~~(2,3,4)~~~~(3,2,4)~~~~(3,4,2)~~ (3,3,4)~~(3,3,4)~~(3,4,3)	2
(4,3,4)(3,4,4)~~(3,4,4)~~ (5,3,4)(3,5,4)(3,4,5) (6,3,4)(3,6,4)(3,4,6)	8
~~(1,4,3)~~~~(4,1,3)~~~~(4,3,1)~~ ~~(2,4,3)~~~~(4,2,3)~~~~(4,3,2)~~ ~~(3,4,3)~~(4,3,3)~~(4,3,3)~~	1
(4,4,3)~~(4,4,3)~~~~(4,3,4)~~ (5,4,3)(4,5,3)(4,3,5) (6,4,3)(4,6,3)(4,3,6)	7
~~(1,3,5)~~~~(3,1,5)~~~~(3,5,1)~~ ~~(2,3,5)~~~~(3,2,5)~~~~(3,5,2)~~ (3,3,5)~~(3,3,5)~~(3,5,3)	2
~~(4,3,5)~~~~(3,4,5)~~~~(3,5,4)~~ (5,3,5)(3,5,5)~~(3,5,5)~~ (6,3,5)(3,6,5)(3,5,6)	5
~~(1,5,3)~~~~(5,1,3)~~~~(5,3,1)~~ ~~(2,5,3)~~~~(5,2,3)~~~~(5,3,2)~~ ~~(3,5,3)~~(5,3,3)~~(5,3,3)~~	1
~~(4,5,3)~~~~(5,4,3)~~~~(5,3,4)~~ (5,5,3)~~(5,5,3)~~~~(5,3,5)~~ (6,5,3)(5,6,3)(5,3,6)	4
~~(1,3,6)~~~~(3,1,6)~~~~(3,6,1)~~ ~~(2,3,6)~~~~(3,2,6)~~~~(3,6,2)~~ (3,3,6)~~(3,3,6)~~(3,6,3)	2
~~(4,3,6)~~~~(3,4,6)~~~~(3,6,4)~~ ~~(5,3,6)~~~~(3,5,6)~~~~(3,6,5)~~ (6,3,6)(3,6,6)~~(3,6,6)~~	2
~~(1,6,3)~~~~(6,1,3)~~~~(6,3,1)~~ ~~(2,6,3)~~~~(6,2,3)~~~~(6,3,2)~~ ~~(3,6,3)~~(6,3,3)~~(6,3,3)~~	1
~~(4,6,3)~~~~(6,4,3)~~~~(6,3,4)~~ ~~(5,6,3)~~~~(6,5,3)~~~~(6,3,5)~~ (6,6,3)~~(6,6,3)~~~~(6,3,6)~~	1

Más (1, 1, 1), suman 115 posibilidades, tal como Cardano calculó, al parecer escribiéndolas todas como hemos hecho aquí.

Para el cuatro, tendríamos

A: (1, 1, 2), (2, 1, 1), (1,2,1) y además, con dos dados :

B :(1, 3, x) y sus permutaciones con repetición: 30

C :(2, 2, x) y sus permutaciones con repetición: 18

D: (4, x, y) y lo mismo con un solo dado. Menos los casos repetidos. Se aplica el teorema:

p(A) +p(B) + p(C)+p(D) – p(A y B) –p(A y C) –p(A y D)
– p(B y C) – p(B y D) – p(C y D) + p(A y B y C)
+p(A y B y D) + p(B y C y D) - p(A y B y C y D)

El resultado es pues 3 + 30 + 18 + 82 = 133, el resultado que él da para el seis.

Para el cinco sería: (1, 4, x), (2, 3, x), (5, x, y), (1,2,2)

(1, 1, 3) y todas sus permutaciones.

En total serían 6 + 60 + 85 = 151.

Y para el seis:

(2, 4, x) Aquí cuenta seis y son 30;

(3, 3, x) Aquí cuenta tres y son 18

(3, 3, x) Aquí cuenta tres y son 18

(1, 5, x) Aquí cuenta seis y son 30

(6, x, y), (2,2,2), (1,2,3), (1,1,4)

En total serían: 10 + 78 + 79 = 167.

Para el siete: ya sabemos que no se puede hacer con un solo dado. Con dos dados sí:

(1, 6, x) Cuenta seis, son 30; (2, 5, x) lo mismo; (3, 4, x) lo mismo,

(2, 2 ,3), (1, 3, 3), (1,1,5), (1,2,4)

En resumen serían: 15+ 90 = 105. De todas formas aquí se obtiene menos que la igualdad, como Cardano observó.

Para el ocho:

(4, 4, x) Cardano cuenta tres, es correcto.

(3, 5, x) Cuenta seis, pero son 30, si hemos de seguir la pauta establecida para el cuatro.

(2, 6, x) Lo mismo.

(1,3,4), (1,2,5), (1,1,6), (2,2,4), (2,3,3).

En resumen serían: 21 + 63 = 84 casos y no treinta y seis

Para el nueve:

(3, 6, x) Cuenta seis pero son 30
(4, 5, x) Lo mismo.
(1,4,4), (1,3,5), (1,2,6), (2,2,5), (2,3,4), (3,3,3).

En resumen serían: 25 + 60 = 85 y no treinta y siete.

Para el diez:

(5, 5, x) son 3 posibilidades
(4, 6, x) son 30, y no 6, como arriba
(1,3,6), (1,4,5), (2,2,6), (2,3,5), (2,4,4), (3,3,4).

En resumen serían: 27 + 33 = 60 y no treinta y seis

Para el once:

(6, 5, x) De nuevo cuenta seis pero son 30
(1,4,6), (2,3,6), (2,4,5), (3,3,5), (3,4,4), (5,1,5)

En resumen serían: 27 + 30 = 57 posibilidades y no treinta y ocho.

Y para el doce:

(6, 6, x) Cuenta uno pero son 18 casos.
(1,5,6), (2,4,6), (2,5,5), (3,3,6), (3,4,5), (4,4,4)

En resumen serían: 25+18 = 43 y no veintiséis.

Después del doce, ya no se puede hacer con dos dados, así que los valores son los de las suertes hasta 18. Esto es correcto.

A continuación afirma: « *Además un punto tiene 108, dos puntos tienen 11* ». Este error se subsanará más adelante, en el capítulo XIV, donde se considera la probabilidad de obtener un punto determinado al tirar tres dados (o un dado tres veces), con el primero de ellos, o con el segundo, o con el tercero o bien con dos o con los tres dados, que produce el valor 91/216. Este es su razonamiento, que nos proporciona un valioso ejemplo de la progresión de su pensamiento hacia los resultados correctos:

De los puntos combinados

« En el caso de dos dados, debemos entrar en un razonamiento del tipo siguiente, que el punto 1 tiene once tiradas (favorables) y el punto 2 igualmente y el 3, y así todos los puntos singulares, pero el punto 1 y el 2 no tienen veintidós casos sino veinte. Pues el 1 tiene once y el 2 nueve. Y así, si se añade el 3, no serán veintinueve ni treinta y uno, sino veintisiete, y los números de las tiradas que se obtienen de este modo se pueden ver en la tabla:

20 (11+9)	*11*
27 (20+7)	*9*
32 (27+5)	*7*
35 (32+3)	*5*
36 (35+1)	*3*

Así, si se consideran todas las tiradas se obtienen treinta y seis, pues con ello el circuito se hace perfecto y es necesario que todas las tiradas contengan algún punto, de modo que se completa el número del circuito. Sin embargo si alguien dice, quiero un 1 o un 3, tú sabes que son veintisiete tiradas favorables, y como en el circuito son treinta y seis, las tiradas restantes en las que estos puntos no salen serán nueve, y la proporción por tanto será de 3 a 1. En cuatro tiradas con la misma fortuna, los puntos 1, 2 o 3 saldrán tres veces, y sólo habrá una tirada en la que no esté en ninguno de ellos; sin embargo, si apuesta tres ases el que espera los puntos 1 a 3, y el otro apuesta uno, el primero ganará tres veces y ganará tres ases, el otro una vez y ganará tres ases, por tanto el circuito de cuatro tiradas será siempre equitativo. Así pues este es el razonamiento para jugar en condiciones iguales, pues si otro apuesta más, jugará en condiciones injustas y con pérdidas, y si apuesta menos, con ventaja ».

Analiza a continuación los casos de 1, 2, 3 o 4, y de dos 1 o dos 2, y pasa al caso de tres dados:

«Los mismos razonamientos se observan en tres dados, tanto en los puntos simples como en los compuestos, y proponemos como anteriormente que las tiradas para un punto son 108, por lo tanto será necesario establecer seis términos de los cuales el máximo será 108 y los restantes guardarán distancia igual entre sí respecto a aquel y tales que completen 216, como se ve en la tabla:

91 (para un punto)	30
61 (para dos puntos)	24
37 (para tres puntos)	18
19 (para cuatro puntos)	12
7 (para cinco puntos)	6.
1 (para seis puntos)	
216 (total de casos posibles)	

Pero ningún punto obtiene la mitad de todo el circuito, pues la proporción es de 91 a 125, o si la invertimos, muy próxima de 25 a 18, mayor por lo tanto de 4 a 3. Luego el que así apostase a que no salía (el punto) ganará, en tanto que en siete tiradas no haya salido, y si apuesta 4, ganará todavía 3. Del mismo modo se considera en los restantes casos, pues es evidente que con dos dados los incrementos son iguales. Pero para tres tenemos un exceso igual, como se muestra en la tabla. »

Vemos pues cómo el fritillo es en realidad el teorema de la unión de sucesos. Por otra parte, cuando intenta la generalización a varias tiradas no queda tan claro:

« Pero si fueran necesarias dos tiradas, los multiplicaremos entre sí, y si fueran tres o cuatro, haríamos lo mismo y en proporción a los números así obtenidos tendríamos que hacer la comparación. Así si fuera necesario que alguien sacara un 1 dos veces, en ese caso sabes que el número correspondiente es 91, y el resto es 125.

Así, multiplicamos cada uno de esos números por sí mismo y obtenemos 8281 y 15625, y la proporción es aproximadamente de 2 a 1. Si apostase el doble, contendería bajo condiciones injustas, aunque en opinión de algunos, la condición de que alguien ofrezca doble apuesta sería mejor. Por lo tanto, en tres tiradas sucesivas, si se necesita (en todas ellas al menos) un 1, la proporción sería de 753.571 a 1,953.125, proporción que es próxima a 5 a 2, aunque algo mayor. »

De hecho es 2,59. No obstante, esa operación no es correcta, porque implica que si $a + b = c$, también $a^n + b^n = c^n$ lo cual como sabemos no es cierto. Si queremos que un suceso determinado se repita, y en su repetición es independiente de los resultados anteriores o posteriores, la fórmula adecuada es la de intersección de probabilidades que aplica de facto Cardano: $p(A \text{ y } B \text{ y } C) = p(A) \,.\, p(B).\, p(C) = (91/216).\,(91/216).\,(91/216) = 753571/10077696 = 1/13{,}37$. Y el resto no es $(125)^3$ sino $10077696 - 753571 = 9324125$ es decir, 1 a 123,7. Lo cual muestra lo fácil que es distraerse al sacar conclusiones.

Finalmente, en el capítulo XXX, Cardano aclara aún más la interpretación que del fritillum se hacía en su época:

De los juegos de azar entre los antiguos

« ...Así, contra todas esos trucos han imaginado a la orca (tonel), por su semejanza con el pez, pues se ve que devora el dado como la orca devora otros peces más pequeños. Persius /Saty.3):

No ser engañado por el cuello de la angosta orca

Pomponio, el poeta de Bolonia:

Mientras contemplaba la orca he perdido el pequeño dado.

Horacio llama a esta pyxis (cajita) un pyrgus (torre), utilizando una palabra griega, cuando dice (Saty.9, Sermon. 2:

Pon las tabas en el pyrgus.

Pues ponían en ella no sólo los astrágalos, sino los dados; es de uso constante en Bolonia, pero no en Milán. Marcial la llama turricula (torrecilla) y dice en el Apophoreta sobre la turrícula:

> La mano impía intenta atratar y lanzar los dados, si los lanza a través de mí, siempre obtiene lo que desea.

Este juego de dados se modifica para ser jugado con el fritillus (pues ese no es el pyrgo sino un tablero de juego), digámoslo así, no quiero discutir por las palabras.»

---

[i] Véase M.S. de Mora, Los inicios de la teoría de la probabilidad, UPV/EHU, 1989, p.22-57.

[ii] Hofmann, Johann Jacob (1635-1706): Lexicon Universale, Historiam Sacram Et Profanam Omnis aevi, Leiden, 1698.voz Pyrgus.