OPTIMIZACIÓN DÍNAMICA

Lorenzo ESCOT MANGAS
Elena OLMEDA FERNÁNDEZ
Eva DEL POZO GARCÍA

OPTIMIZACIÓN DINÁMICA

Lorenzo ESCOT MANGAS
Universidad Complutense de Madrid

Elena OLMEDO FERNÁNDEZ
Universidad de Sevilla

Eva del POZO GARCÍA
Universidad Complutense de Madrid

OPTIMIZACIÓN DINÁMICA

Lorenzo Escot, Elena Olmedo y Eva del Pozo

1. INTRODUCCIÓN.

«Todos tenemos que tomar decisiones. En cada momento de nuestra vida, tanto privada como profesional, nos vemos obligados a seleccionar una alternativa dentro de un conjunto de opciones. La calidad de las decisiones que tomamos afecta radicalmente a nuestra salud, nuestro bienestar económico, las relaciones que mantenemos con otras personas, etc. Esta afirmación puede aplicarse también a las empresas, los organismos de la Administración Pública y las instituciones privadas sin fines de lucro.

La universalidad del problema de toma de decisiones da lugar a que resulte de gran interés preguntarse cuál es la metodología adecuada para tomar decisiones, entendiendo por "adecuada" aquella que proporciona un mayor grado de consecución de los objetivos deseados» (Villalba y Jerez, 1990, pp. 17). En este sentido, la *Teoría de la Optimización* constituye la herramienta matemática más "adecuada" para la solución de problemas que implican la toma de decisiones.

Una primera clasificación de los distintos métodos de optimización distingue entre la *optimización estática* y la *optimización dinámica*. La *optimización estática* proporciona una magnitud *óptima*, aislada en el tiempo, para las variables de las que depende la función objetivo del problema, entendiendo como óptima aquella magnitud compatible con las restricciones del problema que hace máxima o mínima dicha función objetivo[1]. En la optimización estática el tiempo no interviene en la formulación del problema. Cuando existe una relación intertemporal entre las variables que definen el problema[2], carece de sentido utilizar la optimización estática, ya que esa relación dinámica no queda recogida en estos métodos de optimización, no resultando por ello necesariamente óptima la solución por éstos obtenida. En estos casos, para obtener soluciones óptimas deben utilizarse las herramientas que proporciona la *optimización dinámica*[3].
La *optimización dinámica* sirve para calcular cadenas o secuencias óptimas de acciones en el tiempo, es decir, para determinar la magnitud o valor óptimo de las variables que definen el objetivo del problema en cada instante de tiempo dentro de un intervalo dado (*período de planificación*). Estas secuencias de valores será óptima en el sentido de que hacen máximos o mínimos los objetivos del problema teniendo en cuenta tanto las restricciones en éste impuesta, como la relación dinámica existente entre sus variables. La solución de un problema de optimización dinámica proporciona, por tanto, una *trayectoria temporal óptima* completa para cada variable del problema, mostrando el *mejor* valor de la variable, hoy, mañana, y así hasta el final del período de planificación[4].

A lo largo del presente trabajo, repasaremos algunos de los métodos fundamentales de optimización dinámica. Comenzaremos con un análisis global del problema de optimización dinámica en el que introduciremos las principales características del mismo. En los siguientes apartados nos centraremos en las tres formas de solucionarlo más ampliamente utilizadas: el cálculo de variaciones, la teoría del control óptimo y la programación matemática.

---

[1] La función objetivo representa el grado de consecución de los objetivos deseados en el problema de decisión. Según se defina esta función objetivo el óptimo del problema de decisión se alcanzará cuando ésta alcance un máximo o un mínimo. Por ejemplo, si la función objetivo representa los beneficios de una empresa, el óptimo se alcanzará cuando estos beneficios sean máximos, mientras que si la función objetivo se representa mediante los costes de producción, el óptimo se alcanzará cuando los costes sean mínimos.

[2] Esta retroalimentación temporal se manifiesta cuando el valor que tome alguna de esas variables en el instante t afecta al valor de esa variable en un instante $t+\tau$ con $\tau \neq t$.

[3] En este trabajo nos ocuparemos únicamente de la optimización dinámica. Sobre el concepto de Optimización estática y los distintos métodos de solución vid Borrell, J. *Métodos matemáticos para la economía. Programación matemática*. Ediciones Pirámide, Madrid, 1989.

[4] Es interesante señalar que en el caso en que no haya relación intertemporal entre las variables, la solución del problema dinámico coincide con la secuencia de soluciones que ofrece el problema estático resuelto período tras período.

2. CARACTERIZACIÓN DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN DINÁMICA.

Para analizar cuales son los integrantes esenciales que distinguen y caracterizan al problema de optimización dinámica, vamos a utilizar, a modo de introducción, un ejemplo económico en tiempo discreto, generalizándolo posteriormente para el caso continuo[5].

2.1. El problema de decisión en tiempo discreto.

Aunque la optimización dinámica es tratada frecuentemente como la obtención de una secuencia óptima en el tiempo (ya sea éste continuo o discreto), también es posible concebir el problema como la obtención de una secuencia concreta de estados óptima dentro de un proceso económico constituido por varias etapas. En este último caso, la optimización dinámica puede ser enfocada como un problema de toma de decisión multietápica más que como una toma de decisión temporal.

Supongamos, por ejemplo, una empresa que se enfrenta a la transformación de una cierta sustancia desde un estado inicial A (estado de materia prima) hasta un estado final Z (estado de producto terminado), mediante un proceso productivo que comprende cinco etapas. En cada etapa, la empresa se encuentra ante el problema de elección entre varias alternativas posibles para continuar el proceso productivo (subproceso), cada una de las cuales entraña un coste específico. El problema de decisión al que se enfrenta la empresa será el de seleccionar la secuencia de subprocesos a lo largo de las cinco etapas para minimizar el coste total.

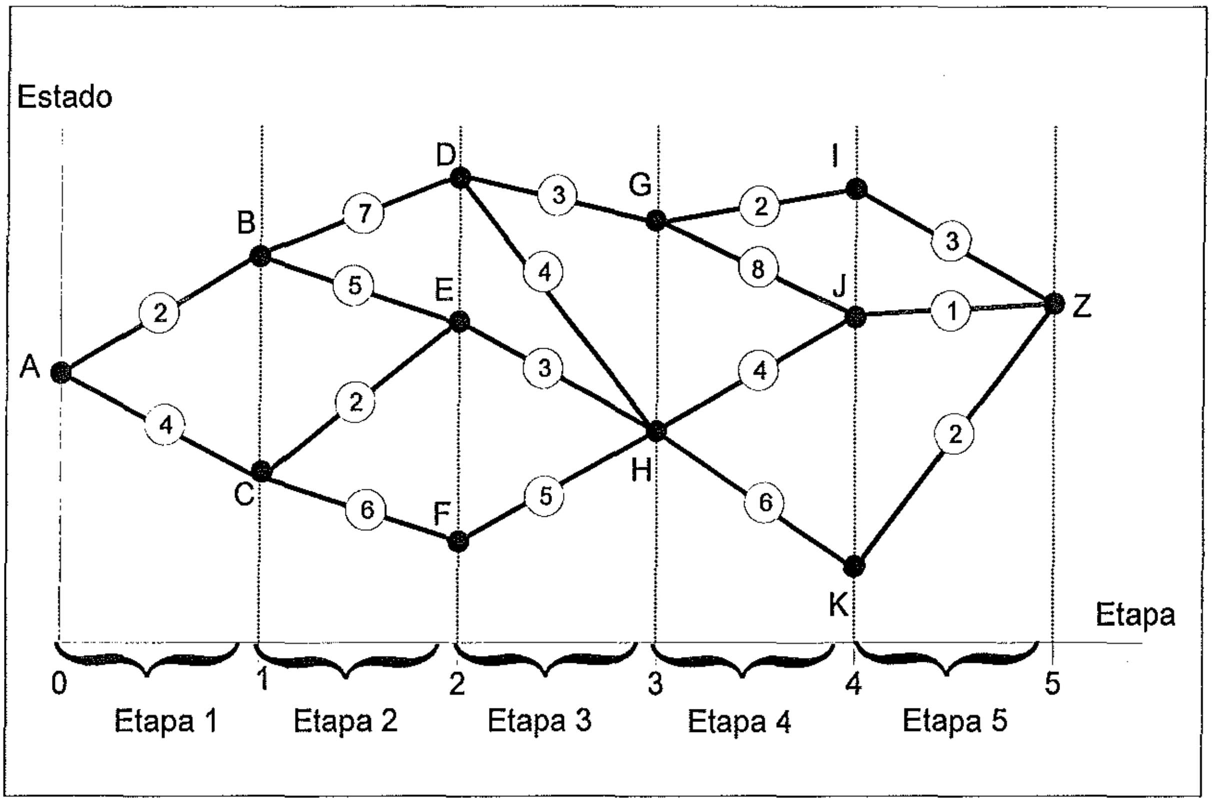


Fig 2.1

En la figura 2.1 ilustramos el problema. En el eje horizontal se representan las distintas etapas, y en el eje vertical los estados que puede tomar dicha sustancia a lo largo de todo el proceso de transformación. El estado inicial A, se representa a la izquierda y el final Z a la derecha. Los puntos $B, C, \ldots, K$, muestran los estados intermedios en los que se puede ir transformando la sustancia inicial durante el proceso de transformación. Tales puntos vienen

[5] Seguimos aquí a Chiang , A.C.: *Elements of Dynamic Optimization*. McGraw-Hill, Inc. New York, 1992. págs. 4-22

unidos por un *arco* al que se le asigna un valor (coste). Cada arco muestra la posibilidad y el coste de pasar de un estado a otro. Nuestro problema será, según el gráfico, seleccionar la secuencia de estados conectados por arcos desde el estado inicial *A* hasta el final *Z*, tales que la suma de los valores de los arcos que la componen sea mínima. En este ejemplo es fácil ver que la trayectoria óptima es *ACEHJZ*, con 14 unidades de coste. A este resultado podemos llegar enumerando todos los procesos posibles y calculando el coste para cada uno, eligiendo el que tenga el menor coste. Sin embargo, será útil encontrar algún método sistemático para encontrar la solución óptima aplicable a problemas más complicados. Sobre este punto volveremos en los siguientes apartados cuando estudiemos los distintos métodos de solución del problema de optimización. De momento señalaremos simplemente que de este sencillo ejemplo podemos extraer una importante conclusión: la elección *miope* de optimización estática etapa a etapa, no conduce por lo general a la trayectoria óptima. Como ya hemos comentado, esto se debe a que los métodos estáticos de optimización, no tienen en cuenta que la elección que se haga en una etapa determinada estará condicionando las posibilidades de elección en las etapas posteriores. Por ejemplo, para la elección estática en la primera etapa, en lugar de elegir el paso *AC* (que sería el paso óptimo a realizar considerando todo el proceso conjuntamente), se habría elegido *AB* al tener éste un menor coste en esta primera etapa. Esta elección estática etapa a etapa conduciría al proceso global representado por *ABEHJZ* con un coste total de 15 unidades, es decir, una situación distinta, con un mayor coste global, que la verdaderamente óptima.

2.2. El problema de decisión en tiempo continuo.

El ejemplo anterior está caracterizado por una variable de etapa discreta, es decir, que toma como valores sólo números enteros. Igualmente los diferentes estados pertenecen a un intervalo finito y numerable dado [*A, B, C, ..., Z*]. Si ambas variables fuesen continuas, el anterior problema de decisión multietápica se podría representar por la figura 2.2, en la cual se representan las posibles trayectorias o procesos de transformación desde *A* hasta *Z* (en este caso sólo se han representado 5). Cada trayectoria posible se ve ahora como una senda que puede tomar un infinito número de etapas en el intervalo [*0,T*]. Hay también un número infinito de estados en cada trayectoria, siendo cada estado el resultado de la elección particular hecha en una etapa específica anterior.

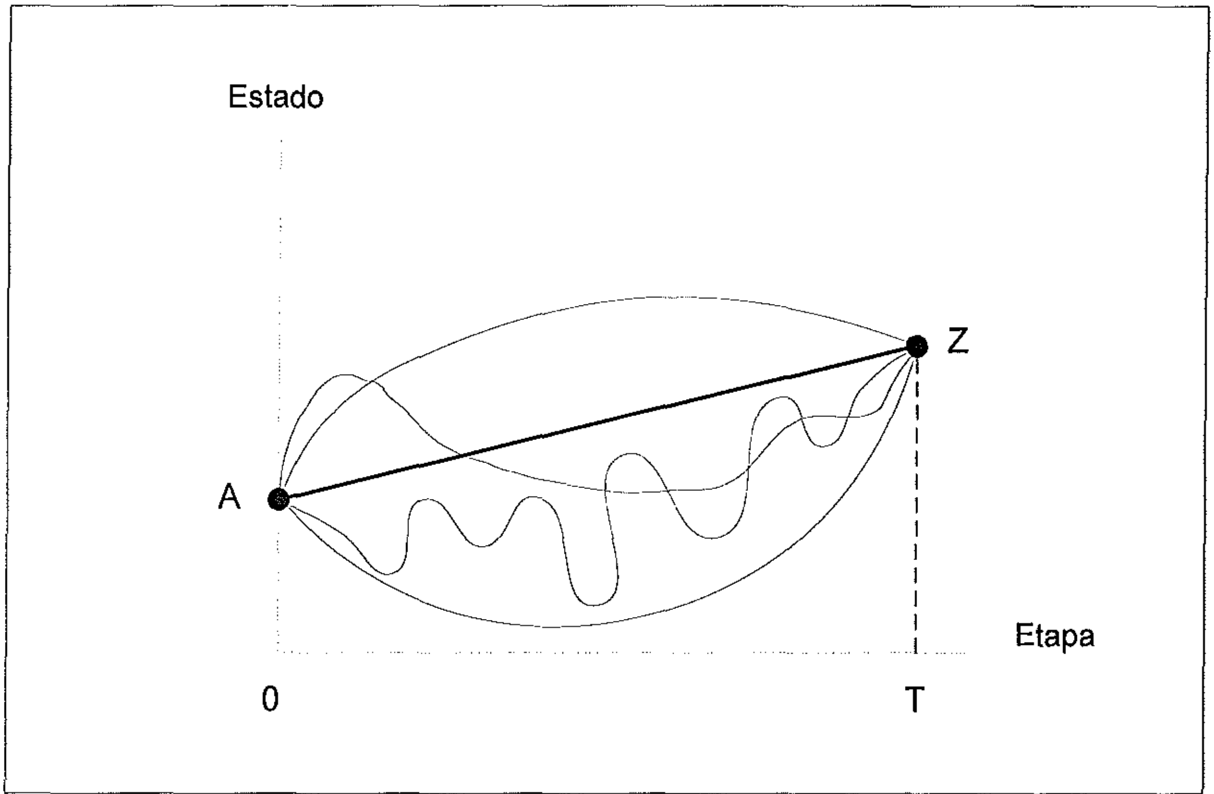


Fig 2.2

Este tipo de enfoque en tiempo continuo sirve para representar multitud de problemas de decisión. Puede suponerse, por ejemplo, que la figura 2.2 representa un mapa de carreteras, donde la variable *etapa* representa la longitud y la variable *estado* representa la latitud. El problema de optimización podría consistir en este caso en transportar una carga desde *A* hasta *Z* con el mínimo coste, seleccionando la trayectoria o ruta de viaje apropiada. El coste de cada trayectoria depende, en general, no sólo de la distancia viajada, sino además de la topografía del terreno por la que transcurre. Si suponemos que el terreno fuese homogéneo (ej. una llanura) la solución dependería simplemente de la distancia recorrida, siendo la solución óptima la trayectoria recta.

En la mayoría de los casos nuestra variable *etapa* vendrá representada por el tiempo, y los valores que toma la *variable de estado,* la que define en que estado o situación se encuentra el proceso o fenómeno en cada momento, se representarán en el eje vertical. Las curvas de la figura 2.2 serán, por tanto, trayectorias en el tiempo, siendo representada cada una de ellas por los valores que toma la variable de estado en cada instante del tiempo.

2.3. El concepto de forma funcional.

Una vez expuestos algunos ejemplos sencillos de optimización dinámica, podemos pasar a continuación a repasar algunas de sus principales características. En particular, podemos señalar que todo problema de optimización dinámica debe tener los siguientes elementos:

a) Un punto inicial y un punto final[6].
b) Un conjunto de posibles trayectorias desde el estado inicial al estado final.
c) Un conjunto de valores asociados a cada trayectoria completa.
d) Un objetivo específico que nos conduzca a la trayectoria óptima: maximizar o minimizar el valor asociado a la trayectoria.

Dejando para más adelante la clasificación de las distintas posibilidades para el punto inicial y el punto final, nos centramos ahora en la relación entre cada trayectoria y el valor asociado a la misma. Para ello representamos en la figura 2.3 un conjunto de posibles trayectorias en el tiempo y su valor asociado.

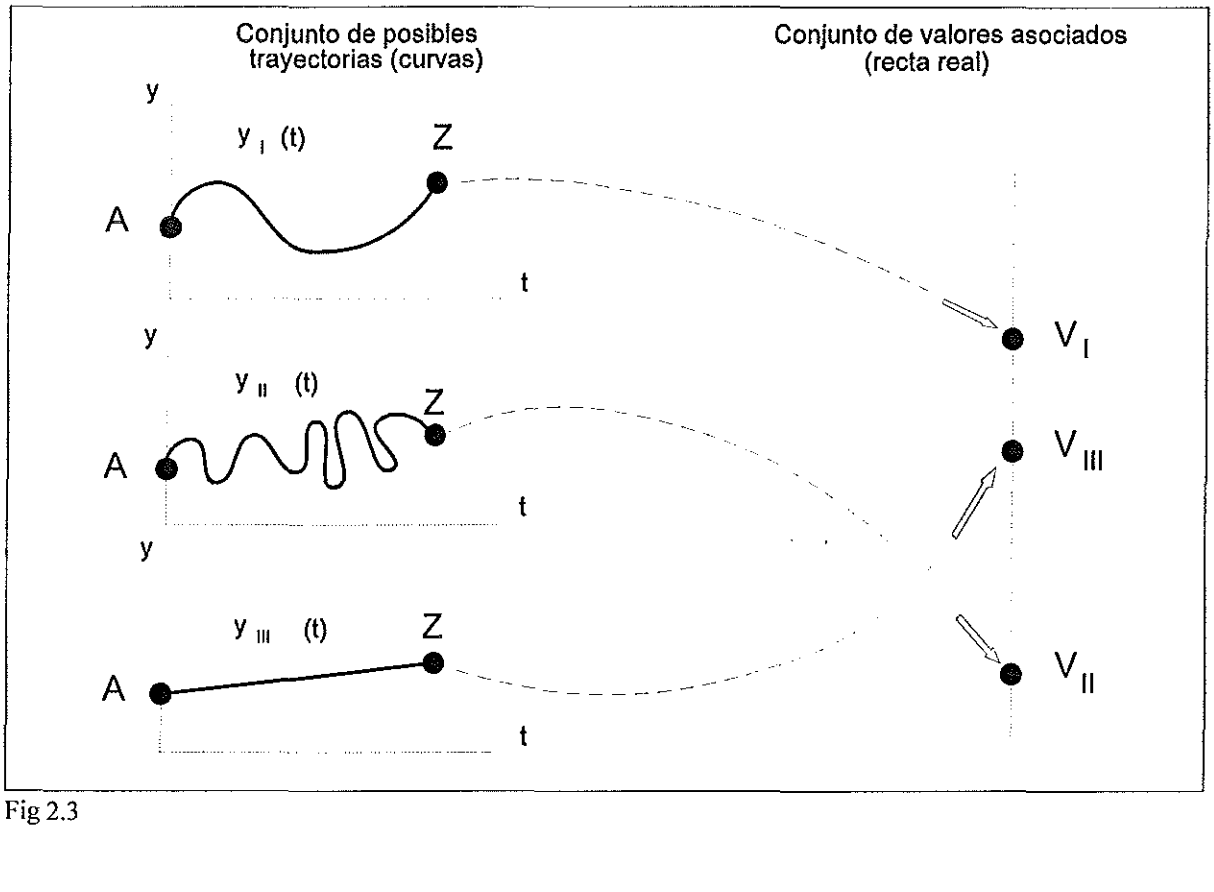


Fig 2.3

[6] A lo largo del presente trabajo consideramos, sin pérdida de generalidad, que el instante inicial t_0 toma valor cero, $t_0=0$.

La notación general de esta relación denominada como *forma funcional* es $V[y(t)]$. Hay que aclarar que en este caso el valor de V va a depender, en general, de cada trayectoria completa $y(t)$, y no explícitamente del tiempo. Es decir, esta notación no implica, a diferencia de lo que ocurre en la función compuesta $g[f(x)]$ que g es una función de x, $g(x)$. Tenemos que entender V como una función de $y(t)$ como tal, en su conjunto[7]. Es por ello que para evitar confusiones la *forma funcional* suela anotarse como $V(y)$ eliminando el tiempo. Está claro pues que sólo cambios en la posición total de la trayectoria -y- pueden conducir a cambios en el valor asociado de la trayectoria -$V(y)$-. Representamos, por tanto, cada trayectoria como y, entendiendo que es una función del tiempo y que cuando queramos representar el estado de la variable y en un instante concreto se hará de forma explícita, por ejemplo $y(0)$ representa el estado inicial A, e $y(T)$ el estado final Z. Por $y(t)$ entendemos "trayectoria y". La trayectoria óptima estará denotada por $y^*(t)$ o simplemente por trayectoria y^*.

2.4. Valores del punto final y condiciones de trasversalidad.

Anteriormente hemos simplificado el problema asumiendo que tanto el punto inicial $(0,A)$, como el punto final (T,Z) estaban dados. Sin embargo podemos flexibilizar el problema considerando que tales puntos no están predeterminados[8]. El supuesto de que el punto inicial está dado no es demasiado restrictivo, ya que en la mayoría de los problemas de optimización suele considerarse como comienzo del período la posición corriente. Así que analizaremos únicamente las distintas posibilidades que pueden aparecer en un problema de optimización para el valor del punto final, asumiendo que con los del punto inicial procederíamos de manera análoga.

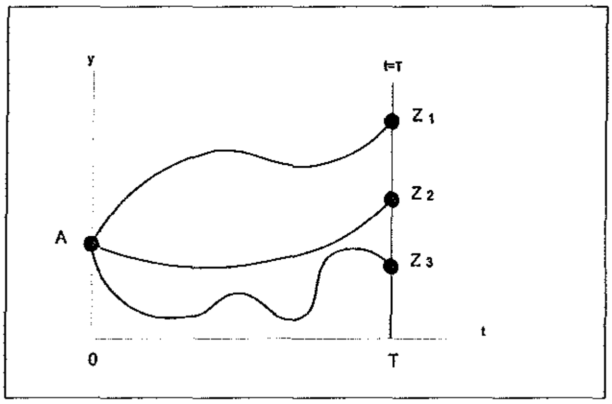


Fig 2.4. a)

Una primera posibilidad, la constituye aquella situación en la que el instante final está fijado o predeterminado en cierto valor T, pero que por el contrario, se tiene completa libertad para elegir el estado final a la hora de determinar la trayectoria óptima (Figura 2.4. a)).

En este caso, mientras el horizonte de planificación está fijo en T, cualquier punto en la vertical $t=T$ es aceptable como punto final, como pueden ser los puntos Z_1, Z_2, Z_3. Este tipo de problemas se denomina como **problema con recta final vertical** (*vertical-terminal-line problem*).

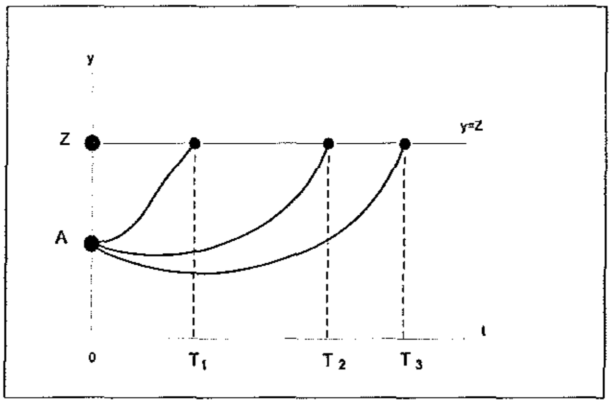


Fig. 2.4. b)

Otro tipo de posibilidades para el punto final en los problemas de optimización dinámica son las que asumen un estado final dado Z, mientras que se tiene libertad para elegir el instante final concreto en el que acaba cada trayectoria (figura 2.4. b)). En este tipo de problemas la recta horizontal $y=Z$ constituye el conjunto de puntos finales aceptables.

Este tipo de problemas se conoce con el nombre de **problema con recta final horizontal** (*horizontal-terminal-line problem*). Un ejemplo de este tipo de

[7] En los ejemplos ilustrados en las figuras 2.1 y 2.2 a cada proceso productivo completo y a cada plan o ruta de viaje le corresponde un coste total específico.

[8] Retomamos así la consideración del anterior punto a).

problemas lo constituye la producción de un bien con una determinada calidad con mínimo coste, pero no sujeta a ningún tiempo máximo de producción.

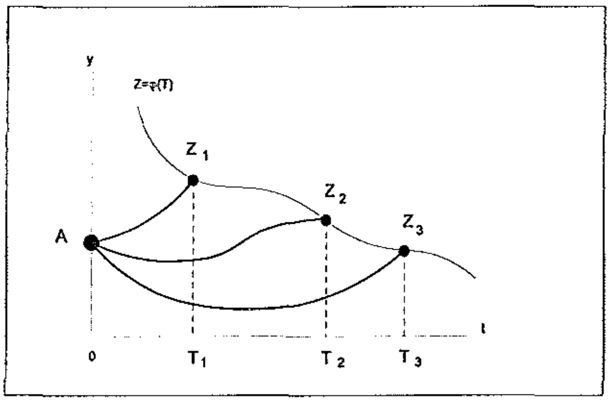


Fig 2.4. c)

El tercer tipo de valor para el punto final que puede aparecer en un problema de optimización dinámica lo constituye aquél en el que ni el instante final ni el estado final están dados a priori, aunque ambos valores vienen ligados por una restricción del tipo $Z=\varphi(T)$. Se denomina a este tipo de problemas como **problema de curva final** (*terminal-curve problem*).

En estos últimos el agente decisor tiene mayor libertad para elegir el punto final, por lo que también debe ser capaz de conseguir un mejor valor óptimo de trayectoria V^*, que el alcanzable con un punto final predeterminado (T,Z).

Para derivar la solución óptima de un problema de optimización (es decir la trayectoria óptima), tendremos que tener en cuenta este tipo de restricciones sobre el punto final. De esta forma, la introducción de este tipo de condiciones finales dará lugar a que en la resolución del problema deba de cumplirse lo que se conoce como **condición de trasversalidad**, indicando ésta como debe *atravesar* la trayectoria óptima la curva o recta final . A modo de resumen, podemos concluir que dicha condición de trasversalidad podrá adoptar las siguientes formas según sea la condición final:

a) Un punto predeterminado y único: $y(T)=Z$
b) Cualquier punto situado en una recta:
  b.1) Recta vertical $t=T$
  b.2) Recta horizontal $y=Z$
c) Cualquier punto situado en una curva: $Z=\varphi(T)$

2.5. La forma funcional como objetivo.

Una trayectoria óptima es, por definición, aquella que maximiza o minimiza el valor asociado a cada trayectoria $V(y)$. Puesto que cualquier trayectoria y debe estar definida obligatoriamente en un intervalo de tiempo o periodo de planificación (que vendrá dado por la condición inicial y la condición final), el valor total asociado a la misma puede definirse como una suma de valores asociado a la trayectoria en cada instante.

Para aclarar este punto, retomemos el ejemplo en tiempo discreto representado en la figura 2.1. En dicho problema el valor de cada trayectoria o senda completa posible, viene definido como la suma de los valores de los arcos que la componen. Generalizando para el caso continuo la suma se convierte en una integral definida para el intervalo $[0,T]$ del valor de cada arco[9]. Pero, ¿cómo definimos el *valor del arco* en el tiempo continuo?.

Para responder a esta pregunta, primero tenemos que identificar el *arco* en el tiempo continuo. La figura 2.1 sugiere tres componentes necesarios para identificar completamente cada arco:
- La etapa (tiempo) inicial de la que parte el arco.
- El valor inicial de la variable de estado (en dicha etapa) de la que parte el arco.
- La dirección en la que se dibuja el arco, ya que pueden existir varios arcos diferentes que partan del mismo punto.

[9] $V(y)= \int_0^T$ *("valor del arco") dt*

Si generalizamos estos tres componentes para el caso continuo obtendremos respectivamente, que cada arco estará definido por:

a) t
b) $y(t)$ [10]
c) $y'(t) \equiv dy/dt$

Así, para una trayectoria dada y_I, el arco asociado a un determinado punto del tiempo t_0, estará caracterizado por un único valor $y_I(t_0)$ y una única pendiente $y'_I(t_0)$ [11]. Si existiera alguna función F, que asignara a cada arco un valor, entonces el valor de dicho arco podría escribirse como $F[t_0, y_I(t_0), y'_I(t_0)]$. Igualmente, para otra trayectoria, y_{II}, el valor y la pendiente de la curva en el instante $t=t_0$ (es decir, en el mismo instante que para el caso anterior) serían $y_{II}(t_0)$ e $y'_{II}(t_0)$, respectivamente, y el valor del arco sería $F[t_0, y_{II}(t_0), y'_{II}(t_0)]$.

De esta manera, se puede llegar a la expresión general para el valor asociado a cada arco [12], $F[t, y(t), y'(t)]$, y al del valor asociado a la trayectoria, definido por la forma funcional -la suma de valores de los distintos arcos que forman la trayectoria-, que puede generalizarse escribiéndolo como la integral definida:

$$(2.1) \qquad V[y] = \int_0^T F[t, y(t), y'(t)]\, dt$$

Recordemos de nuevo que el símbolo $V[y]$ enfatiza, que sólo la variación en la trayectoria y (y_I *versus* y_{II}) es capaz de alterar la magnitud de V. Cada trayectoria o senda a lo largo del tiempo y, estará a su vez compuesta por un conjunto de *arcos* en el intervalo $[0,T]$[13], los cuales, a través de la función F (que asigna un valor a cada arco), proporcionan un conjunto de *valores de arco*, que será diferente para cada trayectoria según ésta esté compuesta por unos arcos o por otros. La integral definida sumará todos estos valores de arco para cada trayectoria proporcionando un valor V, el cual nos sirve para elegir o seleccionar la trayectoria óptima que será la que maximice o minimice dicho valor.

Una vez definida nuestra función objetivo mediante la ecuación (2.1), ésta puede generalizarse para el caso en que haya dos variables de estado z e y en el problema[14]. Para determinar el valor de los arcos para cada trayectoria tendrá que tenerse en cuenta ahora las dos variables de estado en la función objetivo, que quedará como:

$$(2.2) \qquad V[y,z] = \int_0^T F[t, y(t), z(t), y'(t), z'(t)]\, dt$$

El **problema estándar** estará constituido por aquél que tenga como objetivo la forma funcional dada por (2.1) o (2.2). Para simplificar suprimimos el argumento (t) de las variables de estado, escribiendo la integral de forma que la función F quede $F(t, y, y')$ o $F(t, y, z, y', z')$.

Un ejemplo Macroeconómico

[10] En este caso $y(t)$ no representa ninguna trayectoria sino que es el valor de la variable de estado en el instante t.

[11] $$y_I'(t_0) \equiv \left.\frac{dy'_I}{dt}\right|_{t_0}$$

[12] Nótese que en el caso continuo la dimensión del arco tiende a ser infinitesimal.

[13] Dando distintos valores a t entre $[t_0, T]$, y a través de $y(t)$ e $y'(t)$, obtendremos los distintos arcos, y por medio de F sus valores asociados.

[14] Este caso se corresponde con el problema en el cual el estado del fenómeno o proceso objeto de análisis está definido en cada instante por el valor que tomen estas dos variables

Sea el bienestar social de una economía cerrada y sin sector público medido por la utilidad del consumo.

$$U = U(C)$$

donde el *consumo, C*, es por definición aquella parte de la renta no ahorrada. Si tomamos la función de producción $Q=Q(K,L)$, y suponemos que no hay depreciación:

$$C = Q(K,L) - I = Q(K,L) - K'$$

donde $I = K'$ es la inversión neta en ausencia de depreciación. Así la función de utilidad puede escribirse

$$U(C) = U\,[Q(K,L) - K']$$

Si el objetivo social es maximizar la utilidad total a lo largo de un período $[0,T]$, la forma funcional objetivo vendría dada por :

$$\int_0^T U\,[Q(K,L) - K']\,dt$$

Esta forma funcional es de la forma (2.2), con dos variables de estado. En este ejemplo la función integral consta de K, K', L, sin que aparezca L' ni el argumento t. Es decir, F constaría sólo de tres argumentos: $F[y(t), z(t), y'(t)]$ o $F(K, L, L')$.

Ocasionalmente, es posible que en el problema de optimización aparezcan *otras formas funcionales*. El criterio de optimización de un problema puede no depender, por ejemplo, de las posiciones intermedias de la trayectoria, dependiendo exclusivamente del valor asociado a la posición del punto final. En este caso, no aparecerá ninguna integral definida en la función objetivo, ya que no es necesario sumar el valor de los *arcos* para un intervalo. Así, el objetivo aparecerá como:

(2.3) $\quad V[y] = G(T, y(T))$ **Problema de Mayer**

donde $(T, y(T))$ expresa el punto final, dependiendo la función G únicamente de lo que pase en el instante final T.

También puede darse el caso en el que tanto la integral definida (2.1) y el criterio del punto final (2.3) aparezcan simultáneamente en la forma funcional objetivo. Entonces tendríamos:

(2.4) $\quad V[y] = \int_0^T F[t, y(t), y'(t)]\,dt + G(T, y(T))$ **Problema de Bolza**

En este caso tanto la suma de los valores de los *arcos* en el intervalo $[0,T]$, como el valor asociado al punto final, se tienen en cuenta a la hora de optimizar nuestra forma funcional (2.4) y elegir una trayectoria óptima $y^*(t)$.

Es fácil ver que tanto el problema de Mayer como el Problema de Bolza, pueden generalizarse al caso en el que existan más de una variable de estado incluyéndolas tanto en la función F como en la función G.

Aunque el problema de Bolza parezca ser el más general en realidad tanto éste como el de Mayer pueden transformarse en un problema del tipo estándar (2.1), con sólo definir una nueva variable del tipo $Z(t)=G[t,y(t)]$ con condición inicial $Z(0) = 0$ [15]. Así, centraremos inicialmente nuestra atención en el problema estándar (2.1) entendiendo que el resto de problemas (Bolza y Mayer) pueden reescribirse también de esta forma.

[15] Nótese que $\int_0^T Z'(t)\,dt = Z(T)-Z(0)=Z(T)=G[T,y(T)]$

Una vez expuestas las características fundamentales del problema de optimización dinámica, debemos ahora repasar los principales métodos de resolución del problema de optimización dinámica. Existen, en principio, tres formas alternativas de abordar este tipo de problemas: el *Cálculo de Variaciones*, la *Programación Dinámica* y la *Teoría del Control Optimo*. Pasamos a continuación a repasar las principales características de cada una de ellas.

3. EL CÁLCULO DE VARIACIONES: LA ECUACIÓN DE EULER.

El *cálculo de variaciones* constituye la forma clásica de solucionar los problemas de optimización dinámica. Comenzaremos introduciendo las condiciones necesarias de optimalidad que ha de cumplir una trayectoria según el cálculo de variaciones suponiendo que la condición de trasversalidad es un punto final único y predeterminado. Este tipo de problema constituye el caso más sencillo para el cálculo de variaciones, y es conocido como problema fundamental del cálculo de variaciones. Posteriormente generalizaremos este problema para otras condiciones de trasversalidad más generales, analizando como se modifican las condiciones necesarias. Terminaremos comentando las condiciones de segundo orden o condiciones suficientes para que una trayectoria pueda ser considerada como óptima.

3.1. El problema fundamental del cálculo de variaciones.

El problema estándar de optimización dinámica, tal y como se desprende de los anteriores apartados, puede escribirse en la siguiente formulación general:

$$\textit{Maximizar o minimizar} \quad V[y] = \int_0^T F[t, y, y']\, dt$$

(3.1)

$$\textit{sujeto a} \qquad y(0) = A \qquad (A \text{ dado})$$
$$y(T) = Z \qquad (T, Z \text{ dados})$$

Este problema es conocido como **problema fundamental del cálculo de variaciones**, en el que la condición de trasversalidad es un punto final único y predeterminado. Para que dicho problema tenga significado vamos a suponer que la integral existe y converge a un valor finito, es más, exigiremos que todas las funciones que aparezcan en el problema son continuas y continuamente diferenciables. Este supuesto es necesario porque la obtención de la solución al problema se basa en el cálculo diferencial clásico. La diferencia más importante respecto a éste será que en lugar de trabajar con la diferencial dx que cambia el valor de $y=f(x)$, trabajamos con la *variación de toda una curva en el tiempo y* que cambia el valor de la forma funcional $V[y]$.

El objetivo del cálculo de variaciones es seleccionar, de entre un conjunto de trayectorias posibles -*y*-, aquella que proporciona un valor extremo de $V[y]$, trayectoria que pasaremos a denominar a partir de ahora como *trayectoria crítica*. En la búsqueda de la *trayectoria crítica*, podemos encontrarnos ante extremos absolutos (globales) o relativos (locales). En principio, el cálculo de variaciones nos conduce a extremos relativos, es decir, un valor extremo en comparación con los inmediatamente contiguos o más cercanos.

3.2. La ecuación de Euler.

Ecuación de Euler es la condición de primer orden (C.P.O.) o condición necesaria del cálculo de variaciones. Lo que buscamos en esta condición es encontrar alguna propiedad que cumpla la trayectoria crítica y que no esté presente en el resto de trayectorias posibles. Es decir, la condición necesaria que ha de cumplir $y^*(t)$ en comparación con toda la familia de trayectorias -*y*- posibles contiguas a la misma. Esto es, buscamos una condición necesaria para que una trayectoria dada sea la *trayectoria crítica*.

Dicha condición de Euler puede expresarse para el anterior problema fundamental (3.1) como[16]:

(3.2.) $$F_y - \frac{d}{dt}F_{y'} = 0 \qquad \forall t \in [\,0, T\,]$$ **Ecuación de Euler**

La ecuación de Euler se puede aplicar a cualquier función diferenciable $F(t,y,y')$. Alternativamente podemos expresar la ecuación de Euler desarrollando la derivada $dF_{y'}/dt$, teniendo en cuenta que como F depende de t, y, y' entonces $F_{y'}$ también de penderá de t, y, y', es decir:

$$\frac{d}{dt}F_{y'}' = \frac{\partial F_{y'}}{\partial t} + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y'}\cdot\frac{dy'}{dt} = F_{ty'} + F_{yy'}y'(t) + F_{y'y'}y''(t)$$

Teniendo en cuenta esta expresión, la ecuación de Euler puede expresarse también como[17]:

(3.3.) $$F_{ty'} + F_{yy'}y'(t) + F_{y'y'}y''(t) - F_y = 0 \qquad \forall t \in [\,0, T\,]$$

que es una ecuación diferencial ordinaria no-lineal de segundo orden. La trayectoria crítica que soluciona el problema fundamental se obtiene como la solución a dicha ecuación diferencial. Para obtener esta solución y debido a que la ecuación es de segundo orden necesitamos dos constantes[18]. Como disponemos de una condición inicial y de una final, podemos utilizarlas para determinar el valor de dichas constantes y así resolver la ecuación de Euler y encontrar la trayectoria óptima, $y^*(t)$.

Ejemplo

Maximizar $$V(y) = \int_0^2 (12ty + y'^2)\, dt$$

sujeto a $V(0) = 0$
$V(2) = 8$

Derivamos, en primer lugar, la ecuación de Euler correspondiente a este problema teniendo en cuenta que la función integral toma la forma:

$$F = 12ty + y'^2$$

y que las respectivas derivadas son: $F_y = 12t$; $F_{y'} = 2y'$; $F_t = 12y$; $F_{yy'} = F_{ty'} = 0$; $F_{y'y'} = 2$. Se tiene, entonces, que la ecuación de Euler a partir de (3.3.) quedaría en este problema:

$$2y''(t) - 12t = 0$$

Para encontrar la trayectoria óptima, $y^*(t)$, debemos encontrar (integrar) la solución general a la anterior ecuación dinámica:

$$y'(t) = \int y''(t)\, dt = 6\int t\, dt \Rightarrow y'(t) = 6\cdot\frac{t^2}{2} + c_1 = 3t^2 + c_1$$

---

[16] Para el estudio del desarrollo completo de la derivación de la ecuación de Euler véase Chiang, A.C.:*Elements of Dynamic.... op.cit.* págs. 32-36.

[17] Esta ecuación de Euler puede generalizarse fácilmente para el caso en el que existen más de una variable de estado o derivadas de orden superior a uno. Véase Anexo A.

[18] Una ecuación diferencial ordinaria es una ecuación en la que aparecen una o más derivadas temporales y', y'', y''', etc., de una función en el tiempo desconocida $y=f(t)$. El orden de una ecuación diferencial viene dado por la máximo orden de derivación que aparece en la ecuación. Solucionar una ecuación diferencial es precisamente encontrar la trayectoria incógnita $y = f(t)$. Sobre el concepto de ecuación diferencial, y sobre los distintos métodos de solución de ecuaciones diferenciales, véase. Gandolfo, G: *Economic Dynamic*. Study Edition. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

$$y(t) = \int y'(t)\, dt = \int (3t^2+c_1)\, dt = 3\int t^2\, dt + c_1 \int dt$$

La solución general será por tanto: $y(t) = t^3 + c_1 t + c_2$. Necesitamos ahora utilizar la condición inicial y final del problema de optimización para establecer los valores de las constantes arbitrarias c_1 y c_2:

$$y(0) = 0 = c_2$$
$$y(2) = 8 = 2^3 + c_1 \cdot 2 \; ; \; c_1 = 0$$

Así, la solución óptima al problema de optimización quedará: $y^*(t) = t^3$

3.3. Generalizaciones de la condición de trasversalidad.

La ecuación de Euler es, en general, una ecuación diferencial de segundo orden, por lo que necesita para su resolución de dos constantes. Para los problemas en los que tanto el punto inicial como el final están dados, estas condiciones proporcionan suficiente información para definir dichas constantes. Por el contrario, si el punto inicial o el final son variables tal y como vimos en el apartado 2, entonces no se pueden utilizar dichas condiciones de contorno para determinar esas constantes arbitrarias. Para suplir esta insuficiencia, y poder obtener la trayectoria óptima, introducimos la condición de trasversalidad. En este apartado desarrollamos las condiciones de trasversalidad para los distintos casos posibles introducimos en el apartado 2.4 para los valores del punto final.

Nuestro nuevo objetivo será resolver el siguiente problema de optimización dinámica:

$$\text{Maximizar o minimizar} \quad V[y] = \int_0^T F[t, y(t), y'(t)]\, dt$$

$$\text{(3.4)} \qquad \text{sujeto a} \quad y(0) = A \quad (A \text{ dado}) \qquad y(T) = y_T$$

En este caso tanto el instante final T, como el estado final y_T, pueden ser ahora *libres*, es decir, no tienen porque estar determinados por algún valor dado. Estos valores para el punto final forman, ahora, parte del proceso de elección óptima, es decir, tanto T como y_T se tienen que determinar en la propia resolución del problema de optimización. Esto se consigue introduciendo la *condición final* o *de trasversalidad* dentro de las condiciones necesarias del problema de optimización del Cálculo de Variaciones. Es decir, esta condición necesaria estará compuesta, además de la ecuación de Euler (3.3.), de una condición de trasversalidad. Para la obtención de la *trayectoria crítica* tendrá que exigirse que ambas condiciones sean satisfechas simultáneamente. La condición de trasversalidad tomará diferente formas dependiendo de los distintos puntos finales tal y como se vio en el apartado 2.4.[19]:

a) Recta final vertical.

En este caso el problema tiene un horizonte temporal fijo T (fig 2.4.a). La condición de trasversalidad será:

$$\text{(3.5)} \qquad [F_{y'}]_{t=T} = 0$$

b) Recta final horizontal.

Este caso corresponde a la figura 2.4.b en la que el valor de la variable de estado está fijo para el instante final, la condición general de trasversalidad se reduce a:

$$\text{(3.6)} \qquad [F - y'F_{y'}]_{t=T} = 0$$

[19] Véase Chiang, A.C.:*Elements of Dynamic... op.cit.* págs. 64-70

c) Curva final.

Para este tipo de condición final asociado a la figura 2.4.c, ni T ni y_T están predeterminados, pero sí que están relacionados mediante la curva final $y_T = \varphi(T)$. La condición de trasversalidad para este problema será:

$$(3.7) \qquad [F + (\varphi' - y')F_{y'}]_{t=T} = 0$$

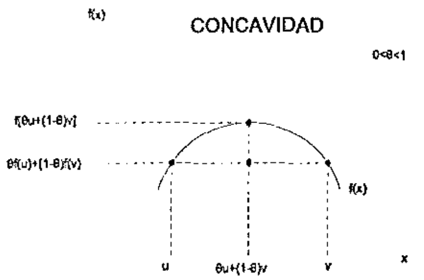
A diferencia de los anteriores casos ahora tenemos que determinar tanto y_T como T. La condición de trasversalidad (3.7) proporciona sólo uno de estos valores, el otro se obtiene mediante la ecuación $y_T = \varphi(T)$

3.4. Condiciones de segundo orden.

Hasta ahora nuestra discusión estaba centrada en la identificación de las trayectorias críticas del problema, sin prestar atención si éstos maximizaban o minimizaban la forma funcional $V[y]$. Para resolver esta cuestión analizaremos las Condiciones de Segundo Orden (C.S.O.).En la práctica como C.S.O. suelen utilizarse las *condiciones suficientes de concavidad/convexidad*:

- Si la función integral $F(t,y,y')$ es *globalmente* **cóncava** en las variables (y,y'), entonces la ecuación de Euler junto a la condición de Trasversalidad son *suficientes* para el máximo absoluto de $V[y]$. La **estricta concavidad** implicará que y^* es el *único* máximo absoluto.

- Alternativamente, si $F(t,y,y')$ es *globalmente* **convexa** en las variables (y,y'), las condiciones de primer orden son suficientes para el mínimo absoluto del problema. La estricta convexidad implica que el mínimo es único.



En este sentido, se dice que una función f es *cóncava*, si para dos puntos u distinto de v del dominio de la función, se tiene que:

$$\theta f(u) + (1-\theta)f(v) \leq f\,[\theta u + (1-\theta)v] \qquad 0<\theta<1$$

Igualmente, el signo $\geq$ implica que la función f es *convexa*. Como $F(t,y,y')$ tiene segundas derivadas continuas, la anterior condición de concavidad/convexidad puede testearse examinando el *signo* (definido o semidefinido) de la siguiente forma cuadrática [20]:

$$q = F_{yy}dy^2 + 2F_{yy'}dydy' + f_{y'y'}dy'^2$$

$F(t,y,y')$ es cóncava (convexa) en (y,y') si y sólo si, la forma cuadrática q es *semidefinida* negativa (positiva) en todo el dominio; F es estrictamente cóncava (estrictamente convexa) si (pero <u>no</u> sólo si) q es *definida* negativa (positiva) en todo el dominio.

Condiciones necesarias de LEGENDRE.

Las anteriores condiciones necesarias de concavidad/convexidad se basaban en un concepto *global*, es decir sirven para caracterizar extremos absolutos. *Las condiciones de Legendre* están basadas en la concavidad/convexidad *local*, es decir proporcionan condiciones necesarias para extremos relativos:

Máx.. de $V[y]$*: si* $F_{y'y'} \leq 0 \quad \forall t \in [0,T]$
Mín.. de $V[y]$*: si* $F_{y'y'} \geq 0 \quad \forall t \in [0,T]$ (evaluadas en el extremo)

[20] En el Anexo B se incluye un método sencillo para deducir el signo de la forma cuadrática q

4. TEORÍA DEL CONTROL ÓPTIMO: EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO.

En la *Teoría del Control Óptimo*, y a diferencia del Cálculo de Variaciones, el problema de optimización dinámica está constituido por tres tipos de variables, es decir, además de la variable tiempo -t- y la variable de estado -$y(t)$-, se considera una nueva variable: la **variable de control** -$u(t)$-. Es esta última variable la que da el nombre a este tipo de problemas y la que centra la atención del agente decisor, relegando a un segundo lugar a la variable de estado. Esto será posible únicamente en el caso en que la evolución de la variable de control $u(t)$ determine sin ambigüedad , una vez dada la condición inicial sobre y, la trayectoria correspondiente de la variable de estado $y(t)$. Por esta razón, el problema de control óptimo debe contener una ecuación dinámica que relacione la evolución de y con el valor que tome la variable de control en cada instante del tiempo u:

$$\frac{dy}{dt} = y' = f[t, y(t), u(t)]$$

Esta ecuación se denomina **ecuación de movimiento** o **ecuación de estado**. La solución a esta ecuación dinámica permite que una vez encontrada la trayectoria óptima $u^*(t)$, sea posible reconstruir la trayectoria óptima para la variable de estado $y^*(t)$. Es por ello que el objetivo del problema de control óptimo ya no será encontrar la trayectoria $y^*(t)$ óptima sino la trayectoria óptima $u^*(t)$. La elección de la variable de control requiere por una parte que ésta esté sujeta al control directo y discrecional del decisor, y que a su vez influya sobre la evolución de la variable de estado a través de la ecuación de movimiento. En el ejemplo del apartado 2.2. sobre la elección de la ruta de viaje óptima entre las dos ciudades A y Z con mínimo coste total del viaje, puede pensarse que el volante de dirección del vehículo constituye la variable de control, ya que está sujeto directamente a la decisión del conductor, a la vez que influye directamente sobre la ruta seguida en el viaje. Este problema de optimización se resuelve entonces, cuando queda determinada la dirección en la que hay que mover el volante del vehículo en cada instante del tiempo de forma que la ruta seguida sea la de menor coste.

El problema de control óptimo correspondiente al cálculo de variaciones (3.1), puede escribirse como:

$$\begin{array}{lll} \textit{Maximizar}^{21} & V[y] = \int_0^T F[t, y(t), u(t)]\, dt & \\ & & \\ \textit{sujeto a} & y(0) = A & (A \textit{ dado}) \\ & y(T) = Z & (T, Z \textit{ dados}) \\ & y'(t) = f[t, y(t), u(t)] & \\ & u(t) \in U \textit{ para } 0 \leq t \leq T & \end{array} \tag{4.1}$$

El desarrollo más sencillo de la teoría del control óptimo es el **Principio del Máximo** asociado al matemático ruso L.S. Pontryagin[22]. Gracias a las ventajas del Principio del Máximo para la solución de problemas de optimización dinámica, este principio ha sustituido en buena medida al Cálculo de Variaciones en la solución de problemas de optimización. Dichas ventajas residen, en primer lugar, en que permite el estudio de problemas donde los valores posibles para la variable de control u, están incluidas en un conjunto cerrado y convexo U permitiendo de esta manera que aparezcan soluciones esquina. Por otra parte, este problema de control óptimo constituye además una generalización del problema del cálculo de variaciones: el problema (3.1) se convierte en el (4.2) con sólo sustituir $y'(t)$ por $u(t)$ en la integral, y adoptar por ecuación de estado $y'(t) = u(t)$, con U igual a la recta real.

4.1. El Principio del Máximo.

Las condiciones necesarias o de primer orden para resolver el problema de control óptimo se resumen en las condiciones del Principio del Máximo. Estas condiciones son, al igual que en el cálculo de variaciones, las condiciones que necesariamente ha de cumplir una trayectoria para que sea la óptima. Este Principio del Máximo

[21] Nos centramos en el problema de maximización entendiendo que el problema de minimización se resuelve de forma análoga teniendo en cuenta que resolver el problema: *mín.. $V[y]$*, es equivalente a resolver el problema: *máx.. ($-V[y]$)*

[22] La aportación inicial de Pontryagin y sus colaboradores data de 1956, y fue traducida al inglés en Pontryagin, L.S.; Boltyanskii, V.G.; Gamkredlidze, R.V. y Mishchenko, E.F.: *The Mathematical Theory of Optimization*. Interscience Publisher, Nueva York, 1962.

se basa en un nuevo concepto: La *función Hamiltoniano*. Dicho Hamiltoniano se define para el anterior problema 4.1. como[23]:

$$H(t, y, u, \lambda) \equiv F(t, y, u) + \lambda(t) \cdot f(t, y, u) \qquad \textbf{Función Hamiltoniano}$$

dónde la variable auxiliar $\lambda(t)$, dependiente del tiempo, actúa como un multiplicador dinámico de Lagrange o precio sombra de la variable de estado asociada. Las condiciones del Principio del Máximo vienen dadas por[24]:

(4.2) $\underset{u \in U}{Max} \ H(t,y,u,\lambda) \quad \forall\, t \in [0, T]$[25]

(4.3) $y' = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda}$ (ecuación de movimiento para la variable de estado y)

(4.4) $\lambda' = -\dfrac{\partial H}{\partial y}$ (ecuación de movimiento para la variable auxiliar λ)

(4.5a) $y(T) = y_T$ (condición de Trasversalidad)

La solución al sistema formado por las ecuaciones (4.2)-(4.5a) proporciona las trayectorias óptimas para cada una de las variables $u^*(t)$, $y^*(t)$ y $\lambda^*(t)$[26].

Ejemplo

$$\textit{Maximizar} \qquad V = \int_0^1 -u^2\, dt$$

$$\textit{sujeto a} \quad y' = y + u$$
$$y(0) = 1$$
$$y(1) = 0$$

El primer paso para solucionar el problema será construir la función Hamiltoniano:

$$H = -u^2 + \lambda(y + u)$$

a partir de aquí aplicamos las condiciones del Principio del Máximo (4.2)-(4.5a), que para este problema quedarían:

---

[23] Aunque el Principio del Máximo se formuló inicialmente para el problema de optimización en tiempo continuo también puede generalizarse para el caso discreto. Véase Shone, R.:*Economic Dynamics. Phase diagrams and their economic application.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997, págs. 192-196

[24] Para un desarrollo de estas condiciones véase Chiang, A. C. *elements of dynamic.... op.cit.* págs.177-181

[25] Si la solución a este problema fuese interior, la anterior condición quedaría: $\partial H/\partial u = 0$. Si este problema tiene una solución esquina, la condición quedaría $u'=0$

[26] El Principio del Máximo puede generalizarse para el caso en que existen más de una variable de estado y de control. Véase Anexo C.

(1) $\frac{\partial H}{\partial u}=-2u+\lambda=0$ [27] (2) $y'=\frac{\partial H}{\partial \lambda}=y+u$

(3) $\lambda'=-\frac{\partial H}{\partial y}=-\lambda$ (4) $y(1)=0$

Para obtener a partir de este sistema de ecuaciones las trayectorias óptimas $u^*(t)$, $y^*(t)$ y $\lambda^*(t)$, debemos observar en primer lugar, que de (1) se extrae la solución para la variable de control $u(t) = \lambda(t)/2$. Sin embargo como dicha solución depende de la variable auxiliar, la trayectoria óptima $u^*(t)$ no queda todavía perfectamente determinada. Para ello debemos tener en cuenta el resto de las condiciones del Principio del Máximo. Así, a partir de (3) se obtiene la solución general para la variable auxiliar $\lambda(t)=k\,e^{-t}$, siendo k una constante arbitraria. A partir de aquí y sustituyendo los anteriores resultados en (2) se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$y'=y+(ke^{-t})/2$$

cuya solución es $y(t)=ce^{t}-(1/4)ke^{-t}$, siendo c otra constante arbitraria. Las constantes c y k se pueden determinar ahora utilizando la condición inicial y la condición de trasversalidad:

$$c=\frac{1}{1-e^2} \qquad k=\frac{4e^2}{1-e^2}$$

y a partir de ellas, se pueden obtener las trayectorias óptimas del problema de optimización:

$$y^*(t)=\frac{1}{1-e^2}\,e^{t}-\frac{e^2}{1-e^2}\,e^{-t}$$

$$\lambda^*(t)=\frac{4e^2}{1-e^2}\,e^{-t}$$

$$u^*(t)=\frac{2e^2}{1-e^2}\,e^{-t}$$

4.2. Otras condiciones de trasversalidad.

Como ya hicimos con el Cálculo de Variaciones, vamos ahora a ver como se modifican las condiciones de primer orden del Principio del Máximo cuando en el problema de control óptimo aparecen otras condiciones para el punto final tal y como se señaló en el apartado 4.2. En general, estas alternativas afectan a la condición de trasversalidad (4.5a) del Principio del Máximo, que tomaran las siguientes expresiones dependiendo de los supuestos que se hagan sobre el punto final[28]:

a) Recta final vertical: (4.5b) $\lambda(T)=0$

b) Recta final horizontal: (4.5c) $[H]_{t=T}=0$

---

[27] Ya que la función Hamiltoniano es no lineal y quela variable de control puede tomar valores en toda la recta real, la condición (4.2) equivale a (1). Además como $\partial^2H/\partial u^2=-2$, se cumple la condición suficiente para que esta solución sea realmente un máximo del Hamiltoniano

[28] Para un desarrollo de estas condiciones véase Chiang, A. C. *elements of dynamic.... op.cit.* págs.225-226.

c) Curva final: (4.5d) $[H - \lambda\varphi']_{t=T} = 0$ (con $y_T = \varphi(T)$)

4.3. Condiciones suficientes.

El Principio del Máximo constituye una condición necesaria o de primer orden para encontrar las trayectorias críticas. Sin embargo, estas condiciones no son en general suficientes. Será necesario, por tanto, que esas trayectorias cumplan además unas condiciones suficientes o de segundo orden para que sean realmente óptimas, es decir, para que realmente maximicen la forma funcional introducida en (4.1). Estas condiciones de segundo orden, como ya vimos para el problema del cálculo de variaciones, requieren que se satisfagan ciertas condiciones de concavidad. Presentamos a continuación el *teorema de Suficiencia de Arrow*[29] definido para el problema de maximización (4.1). Este teorema establece que las condiciones necesarias establecidas por el Principio del Máximo son también suficientes si se cumple que la función Hamiltoniana maximizada[30]:

$$H^0(t, y, u) = F(t, y, u^*) + \lambda f(t, y, u^*)$$

es cóncava en la variable y $\forall t \in [0,T]$, dado λ.

4.4. Teoría del control óptimo con horizonte infinito.

La teoría del control óptimo, a pesar de sus limitaciones, ha sido ampliamente utilizada en economía[31]. Entre los temas abordados bajo este enfoque se encuentra la elaboración y extensión de los modelos relativos al crecimiento económico[32]. Una característica diferencial de este tipo de aplicaciones, es que consideran un horizonte de planificación infinito. Cuando tratamos con un problema de control óptimo con horizonte de planificación infinito aparece el problema conocido como *convergencia de las funciones objetivo* la hora de aplicar el Principio del Máximo. Este problema radica en que la forma funcional objetivo:

$$V = \int_0^{\infty} F(t, y, u)\, dt \qquad (4.6)$$

es ahora una integral impropia, que puede tener un valor finito o infinito. En este último caso, es decir, si la integral diverge, pueden existir más de una trayectoria para la variable de estado y de control que conduzca a un valor infinito en la forma funcional, siendo difícil determinar cuál de ellas es la óptima. Para evitar este tipo de problemas, se suele exigir el cumplimiento de alguna condición que garantice la convergencia de la forma funcional a un valor concreto, lo que permite determinar las trayectorias óptimas $y^*(t)$ y $u^*(t)$ sin equívocos. Este tipo de condición suficiente para la convergencia de la forma funcional suele aparecer en forma de tasa de descuento, de forma que si en la integral impropia (4.6), la función integral $F(t,y,u)$ toma la forma $G(t,y,u)\cdot e^{-\rho t}$, donde ρ es una tasa positiva de descuento, y la función $G(t,y,u)$ está acotada, se garantiza que la forma funcional converge a un valor finito[33].

[29] Arrow, K. J.: «Applications of Control Theory to Economic Growth», en George B. Dantzing y Arthur F. Veinott, Jr. (eds.) *Mathematics of the Decision Sciences*, Parte 2, American Mathematical Society, Providence, 1968, pág.92.

[30] Esta función se encuentra sustituyendo el valor óptimo de la variable de control u^* que soluciona la condición (4.2) en la función Hamiltoniano.

[31] Véase Fernández Díaz, A. y Rodríguez Saiz, L.: *Introducción y Metodología de la política Económica*. Ediciones ICE, Madrid, 1986, pág 319-333.

[32] La modelización del crecimiento económico como un problema de optimización dinámica bajo este enfoque del control óptimo se recoge bajo la denominación de modelos de crecimiento óptimo. Para una amplia panorámica de este enfoque véase Barro, R.J. y Sala-i-Martin, X.:*Economic Growth*. McGraw-Hill, Inc. New York, 1995.

[33] $\int_0^{\infty} G(t,y,u)e^{-\rho t}dt \leq \int_0^{\infty} \hat{G}e^{-\rho t}dt = \frac{\hat{G}}{\rho}$ donde $\hat{G}$ es la cota superior de la función $G(t,y,u)$

Otro problema que aparece en este tipo de problemas con horizonte de planificación infinito hace referencia a las condiciones de trasversalidad, ya que en estos casos no existe un instante final T dado, rompiéndose la validez general de las condiciones de trasversalidad (4.5a-d) de las condiciones necesarias del Principio del Máximo[34]. En este tipo de problemas y para derivar las respectivas condiciones de trasversalidad, se hacen dos tipos de supuestos sobre el punto final:

a) El valor final de la variable de estado converge en el infinito a un valor concreto[35]:

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=y_\infty \qquad (\text{con } y_\infty \text{ dado})$$

En este caso, la condición de trasversalidad (4.5c) quedará sustituida por:

$$(4.7) \qquad \lim_{t\to\infty} H=0$$

b) Cuando no se introduce el supuesto sobre la convergencia de la variable de estado, es decir,

$$\lim_{t\to\infty} y(t)\neq y_\infty$$

debe utilizarse una condición de trasversalidad como la (4.5b), que ahora tomará la forma:

$$(4.8) \qquad \lim_{t\to\infty} \lambda(t)=0$$

Teniendo en cuenta estas circunstancias, el problema de control óptimo se soluciona utilizando las condiciones necesarias del Principio del Máximo (4.2)-(4.4), a las que hay que añadir las condiciones de trasversalidad (4.7) o (4.8). En cuanto a las condiciones suficientes, se aplica el teorema de la suficiencia de Arrow, en la que hay que tener en cuenta que para que las condiciones necesarias sean a su vez suficientes es necesario que además de que la función Hamiltoniana maximizada, $H^0(t, y,u)= F(t, y, u^*) + \lambda f(t, y, u^*)$, sea cóncava en la variable y $\forall t\in[0,T]$, dado λ, debe verificarse que:

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t)[y(t)-y^*(t)]\geq 0$$

4.4.1. El Hamiltoniano a valor corriente.

Una variante del Principio del Máximo analizado anteriormente, y que es utilizado en aquellos problemas de control óptimo con horizonte infinito en los que en la integral aparece el factor de descuento $e^{-\rho t}$, es el que utiliza el denominado *Hamiltoniano a valor corriente*. Este tipo de problemas se pueden formular de forma genérica como:

$$\text{Maximizar} \quad V=\int_0^\infty F[t,y,u]\,dt = \int_0^\infty G[t,y,u]\,e^{-\rho t}\,dt$$

$$(4.9) \qquad \text{sujeto a} \qquad \begin{array}{ll} y(0)=A & (A \text{ dado}) \\ y'(t)=f[t,y(t),u(t)] & \\ u(t)\in U \text{ para } 0\leq t\leq T & \end{array}$$

El Hamiltoniano a valor corriente (H_c) del problema (4.9) se construye a partir del Hamiltoniano estándar (H) como:

$$H_c \equiv H\,e^{\rho t}= G(t,y,u) + m\,f(t,y,u) \qquad (\text{con } m=\lambda\,e^{\rho t}\text{ -variable auxiliar a valor corriente})$$

A partir de este Hamiltoniano a valor corriente se construyen las nuevas condiciones de primer orden del Principio del Máximo, donde las condiciones (4.2), (4.3) y (4.4) se pueden expresar ahora como:

[34] Sobre estos problemas véase Chiang, A. C. *elements of dynamic.... op.cit.* págs.240-241.

[35] Este método para derivar la condición de trasversalidad es válido únicamente cuando la función F es autónoma, es decir, cuando en ella no aparece el tiempo, t, como argumento explícito, o cuando sólo aparece en el factor de descuento.

(4.10) $\underset{u \in U}{Max} \quad H_c \quad \forall t \in [0, \infty]$

(4.11) $y' = \frac{\partial H_c}{\partial m} = f(t,y,u)$ (ecuación de movimiento para la variable de estado y)

(4.12) $m' = -\frac{\partial H_c}{\partial y} + \rho m$ (ecuación de movimiento para la variable auxiliar a valor corriente)

y donde las condiciones de trasversalidad (4.7) y (4.8) se sustituyen ahora por:

(4.13) $\lim_{t \to \infty} H_c e^{-\rho t} = 0$ [36]

(4.14) $\lim_{t \to \infty} m(t) e^{-\rho t} = 0$

[36] En caso de que el problema sea autónomo, es decir, $G = G(y,u)$; $f = f(y,u)$, esta condición de trasversalidad se reduce a $[H_c] = 0$

5. PROGRAMACIÓN DINÁMICA: EL PRINCIPIO DE OPTIMALIDAD DE BELLMAN.

La *programación dinámica* presenta otra alternativa para abordar el problema de control óptimo mencionado en el apartado anterior. Dos son las características diferenciales de este método:

- La programación dinámica asocia el problema de control óptimo a una *familia* de problemas de control, es decir, para resolver el problema de control tenemos que resolver toda una familia de problemas.

- Para cada miembro de la familia de problemas de optimización, la atención principal se centra en el valor óptimo de V^*, y no en $y^*(t)$, como en el Cálculo de Variaciones, o en $u^*(t)$, como en el Principio del Máximo. Es decir, el valor óptimo de cada miembro de la familia se asocia al valor óptimo del problema.

En los casos discretos la resolución del problema se convierte en un proceso de iteración hacia atrás, en el que en cada etapa se calcula un óptimo. La trayectoria total (incluyendo todas las etapas) sólo será óptima si las subtrayectorias que incluye, también son óptimas para cada subproblema de optimización realizado en cada etapa o iteración. Veamos esto más claramente en un ejemplo.

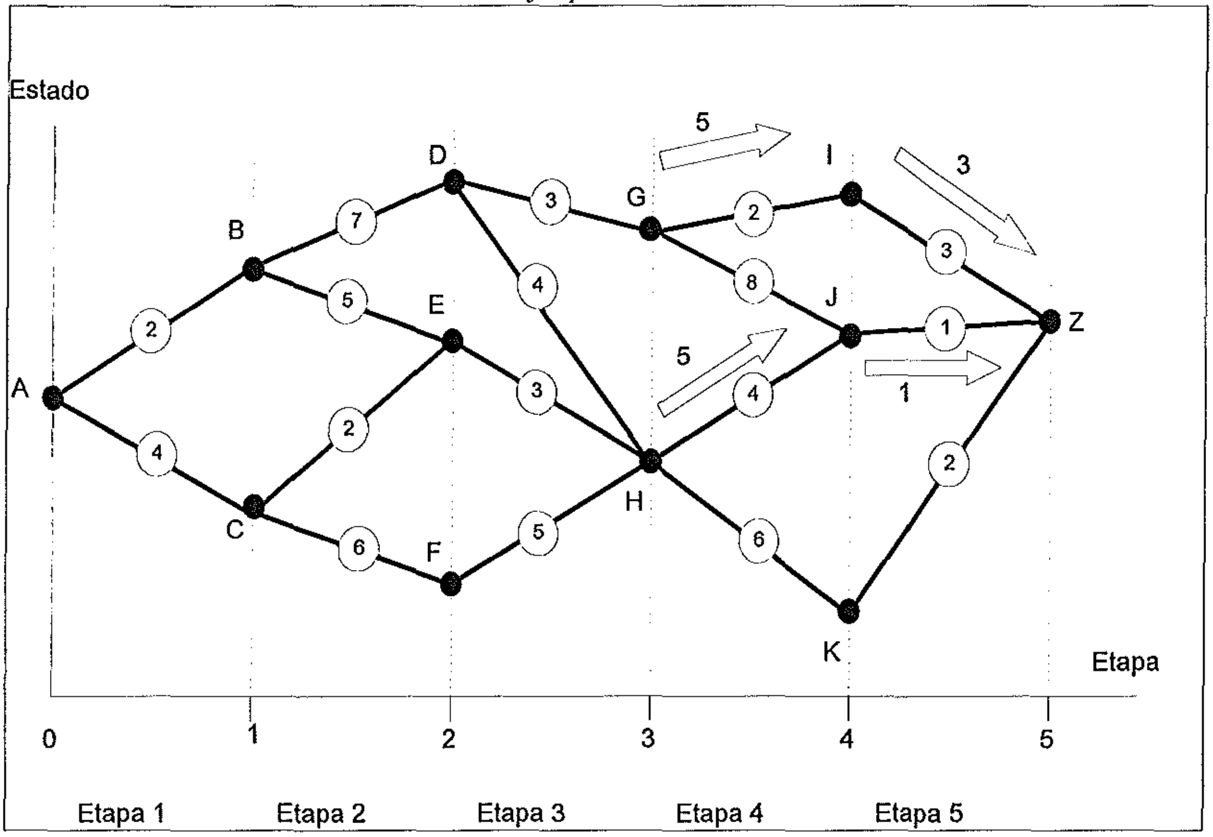


Fig 5.1.

En la figura 5.1 se representa un problema como el expuesto en el apartado 2.1. Para resolverlo dividimos el problema en una secuencia de subproblemas de optimización de forma que obtengamos los valores óptimos de las distintas subtrayectorias calculadas para cada punto inicial posible, **principio de optimalidad de Bellman**[37], es decir, tenemos que obtener:

$$V^* = V^*(i) \qquad para\ i = A, B, C, \ldots, Z.$$

[37] Para una introducción a la programación dinámica ver Bellman, R.E.: *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, 1957 y Blackwell, D.:«Discrete Dynamic Programming». *Annals of Mathematical Statistics 33*, págs. 719-726, 1962.

De esta forma, para encontrar la trayectoria óptima AZ tenemos que encontrar:

$$Mín. \{ AB + V^*(B), AC + V^*(C) \}$$

Para resolver este problema tenemos que conocer los valores de $V^*(B)$ y de $V^*(C)$, y para conocer estos a su vez hay que conocer los valores óptimos $V^*(D)$, $V^*(E)$, $V^*(F)$ y así sucesivamente. A modo de ejemplo calcularemos el valor óptimo $V^*(G)$:

$$V^*(G) = mín. \{ \text{valor del arco } GI + V^*(I), \text{ valor del arco } GJ + V^*(J) \} =$$

$$= mín. \{2+3, 8+1\} = 5 \quad \text{por lo que el arco óptimo sería } GIZ$$

Para el caso general, el problema puede expresarse en tiempo discreto como:

$$\text{Maximizar o minimizar} \quad V[y] = \sum_{0}^{T-1} F[y(k), u(k)] + G(y(T))$$

$$(5.1) \qquad \text{s.a.} \quad \begin{array}{ll} y(0) = A & (A \text{ dado}) \\ y(T) = Z & (T, Z \text{ dados}) \\ y(k+1) = f[y(k), u(k)] & \\ u(k) \in U & \text{para } 0 \leq k \leq T \end{array}$$

Siendo k, el indicador de cada periodo (k = 0, 1, 2, ..., T) y $f[y(k), u(k)]$ la ecuación de movimiento en tiempo discreto.

La resolución al problema (5.1) implica encontrar el valor de óptimo de $u(k) \in U$ que hace máximo o mínimo el valor de $V[y]$ en cada periodo empezando por el final. De esta manera el problema se convierte en T subproblemas de optimización siguiendo el principio de Bellman, donde en cada iteración tendríamos[38]:

$$V(y, k)^* = \underset{u \in U}{Max} \; [F(y, u) + V(f(x,u), k+1)]$$

con $\quad V(y(T), T)^* = G(y(T))$

Este problema puede generalizarse para el caso continuo, y para el caso en que no existe un horizonte finito de optimización. La solución matemática a estos problemas requieren una formulación matemática compleja y por esta razón no se estudiará en el presente trabajo[39].

6. BIBLIOGRAFÍA

ARROW, K. J.: «Applications of Control Theory to Economic Growth», en George B. Dantzing y Arthur F. Veinott, Jr. (eds.) *Mathematics of the Decision Sciences*, Parte 2, American Mathematical Society, Providence, 1968, pág.92.

BARRO, R.J. y SALA-I-MARTIN, X.:*Economic Growth*. McGraw-Hill, Inc. New York, 1995.

BELLMAN, R.E.: *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, 1957.

BLACKWELL, D.:«Discrete Dynamic Programming». *Annals of Mathematical Statistics 33*, págs. 719-726, 1962.

[38] Para un análisis de este problema en tiempo continuo y discreto así como algunos ejemplos ver Luenberger, D.G.: *Introduction to Dynamic Systems. Theory, Models and Applications*. John Wiley and Sons, New York, 1979, págs. 419-425.

[39] La programación dinámica ha sido ampliamente utilizada en economía. Pueden encontrarse varios ejemplos que utilizan la programación dinámica para la modelización del ciclo económico en Lorenz, H-W.: *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*. Second Edition. Springer-Verlag, Berlin, 1993. y en Nishimura, K. y Sorger, G.: «Optimal Cycles and Chaos: A Survey». *Studies in Nonlinear Dynamics and Economics*, Abril 1996, 1(1), págs. 11-28.

BORRELL, J.: *Métodos matemáticos para la economía. Programación matemática.* Ediciones Pirámide, Madrid, 1989.
CHIANG , A.C.: *Elements of Dynamic Optimization.* McGraw-Hill, Inc. New York, 1992.
FERNÁNDEZ DÍAZ, A. y RODRÍGUEZ SAIZ, L.: *Introducción y Metodología de la política Económica.* Ediciones ICE, Madrid, 1986.
GANDOLFO, G.: *Economic Dynamics.* Study Edition. Springer-Verlag, Berlín, 1997.
LORENZ, H-W.: *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion.* Second Edition. Springer-Verlag, Berlín, 1993.
LUENBERGER, D.G.: *Introduction to Dynamic Systems. Theory, Models and Applications.* John Wiley and Sons, New York, 1979.
NISHIMURA, K. y SORGER, G.: «Optimal Cycles and Chaos: A Survey». *Studies in Nonlinear Dynamics and Economics,* Abril 1996, 1(1), págs. 11-28.
PONTRYAGIN, L.S.; BOLTYANSKII, V.G.; GAMKREDLIDZE, R.V. y MISHCHENKO, E.F.: *The Mathematical Theory of Optimization.* Interscience Publisher, Nueva York, 1962.
SHONE, R.:*Economic Dynamics. Phase diagrams and their economic application.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
VILLALBA, D. y JEREZ, M.: *Sistemas de optimización para la Planificación y toma de decisiones.* Ediciones Pirámide, Madrid, 1990.

ANEXO A. GENERALIZACIONES DE LA ECUACIÓN DE EULER.

A continuación generalizamos la expresión para la ecuación de Euler (3.3) para el caso en el que existan más de una variable de estado, y para el caso en que aparezcan derivadas de orden superior en nuestro problema.

Existe más de una variable de estado.

Cuando existen $n>1$ variables de estado, el problema fundamental (3.1.) queda:

$$\text{Maximizar o minimizar} \quad V[y_1, \dots, y_n] = \int_0^T F(t; y_1, \dots, y_n; y'_1, \dots, y'_n)\, dt$$

$$\text{sujeto a:} \quad \begin{array}{l} y_1(0), \dots, y_n(0) = A_1, \dots, A_n \\ y_1(T), \dots, y_n(T) = Z_1, \dots, Z_n \end{array}$$

Nuestro objetivo será encontrar n trayectorias óptimas $y_j^*(t)$ para $j = 1,\dots, n$. La condición de primer orden de nuestro problema de maximización se convertirá en un sistema de n ecuaciones. Estas n ecuaciones de Euler simultáneas se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\text{[ecuaciones de Euler]} \qquad F_{y_j} - \frac{d}{dt}F_{y'_j} = 0 \qquad \forall t \in [\,0, T\,] \quad (j = 1 \dots n)$$

La resolución de estas n ecuaciones utilizando las $2n$ condicionesde contorno del problema de optimización, nos permitirá determinar las n trayectorias óptimas $y_1^*(t) \dots y_n^*(t)$. Tenemos que tener en cuenta que al derivar

$$\frac{dF_{y'_j}}{dt}$$

como $F(t; y_1, \dots, y_n; y'_1, \dots, y'_n)$, dicha derivada dependerá también de todas esas variables.

Ejemplo

$$\textit{Maximizar} \qquad V[y,z] = \int_0^T (y + z + y'^2 + z'^2)\, dt$$

$$\textit{sujeto a:} \qquad y(0)=A_1;\ y(T)=Z_1;\ z(0)=A_2;\ z(T)=Z_2$$

Derivamos las ecuaciones de Euler teniendo en cuenta las derivadas: $F_y = 1$; $F_z = 1$; $F_{y'} = 2y'$; $F_{z'} = 2z'$

$$1-2y''=0 \Rightarrow y''=\frac{1}{2} \Rightarrow y'=\frac{1}{2}t+c_1 \Rightarrow y^*=\frac{1}{4}t^2+c_1t+c_2$$

$$1-2z''=0 \Rightarrow z''=\frac{1}{2} \Rightarrow z'=\frac{1}{2}t+c_3 \Rightarrow z^*=\frac{1}{4}t^2+c_3t+c_4$$

Las constantes c_1 , c_2 , c_3 , c_4 que aparezcan en la solución general del anterior sistema de ecuaciones diferenciales se pueden obtener con las cuatro condiciones $y(0)$, $y(T)$, $z(0)$, $z(T)$.

Derivadas de mayor orden.

Cuando en el problema fundamental (3.1.) aparecen otras derivadas superiores a las de primer orden, la forma funcional sería del tipo:

$$V[y] = \int_0^T F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)})\, dt$$

Las condiciones iniciales reflejarán no sólo los valores inicial $y(0)$ y final $y(T)$, sino también de $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$. En total tendremos $2n$ condiciones para resolver el problema de optimización.

Para resolver este tipo de problemas transformamos las variables para que en lugar de tener una variable de estado y con n derivadas en la forma funcional objetivo, en la misma sólo tengamos primeras derivadas y n variables de estado diferentes, de tal manera que podamos aplicar los resultados obtenidos en el punto anterior.

Ejemplo

$$\textit{Maximizar} \qquad V(y) = \int_0^T (t\cdot y^2 + yy' + y''^2)\, dt$$

$$\textit{sujeto a} \qquad y(0) = A\ ;\ y(T) = Z$$
$$y'(0)=\alpha\ ;\ y'(T) = \beta$$

hacemos: $z=y' \Rightarrow z'=y''$, de forma que:

$$F = t\cdot y^2 + yy' + y''^2 = t\cdot y^2 + yz + z'^2$$

Con esta transformación podemos aplicar los resultados derivados anteriormente cuando existen más de una variable de estado, teniendo presente que ahora las condiciones iniciales y finales serán:

$$y(0) = A\ ;\ y(T) = Z$$
$$z(0)=\alpha\ ;\ z(T) = \beta$$

De forma alternativa, cuando en el problema aparecen derivadas de orden $n\geq 1$, se puede aplicar la condición de primer orden formulada por la ecuación *Euler - Poisson*:

$$F_y - \frac{d}{dt}F_{y'} + \frac{d^2}{dt^2}F_{y''} - \ldots\ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}F_{y^n} = 0 \qquad \forall t \in [0,T]$$

que será en general una ecuación diferencial de grado 2n. Para su solución se necesitará por tanto *2n* condiciones iniciales y finales que aparecen en el problema.

ANEXO B. CONDICIONES SUFICIENTES DE CONCAVIDAD.

Como ya vimos, si *F(t,y,y')* tiene segundas derivadas continuas, la condición suficiente de concavidad/convexidad puede testearse examinando el *signo* (definido o semidefinido) de la siguiente forma cuadrática:

$$q = F_{yy}dy^2 + 2F_{yy'}dydy' + f_{y'y'}dy'^2$$

Una de las formas que tenemos para deducir si la forma cuadrática q es definida o semidefinida de algún signo, es la que se basa en el signo de sus raíces características.

La ecuación característica puede escribirse como:

$$\begin{vmatrix} F_{y'y'} - r & F_{y'y} \\ F_{yy'} & F_{yy} - r \end{vmatrix} = 0$$

su resolución nos proporciona la raíces características r_1 y r_2.

q	es definida negativa	$\Leftrightarrow$	$r_1 < 0, r_2 < 0$
q	es definida positiva	$\Leftrightarrow$	$r_1 > 0, r_2 > 0$
q	es semidefinida negativa	$\Leftrightarrow$	$r_1 \leq 0, r_2 \leq 0$
q	es semidefinida positiva	$\Leftrightarrow$	$r_1 \geq 0, r_2 \geq 0$

si los signos son opuesto q es indefinido

ANEXO C. GENERALIZACIÓN DEL PRINCIPIO DEL MÁXIMO.

En el caso en el que en el problema de control óptimo aparezcan más de una variable de estado y/o más de una variable de control, el Principio del Máximo seguirá siendo válido. Las condiciones (4.2-4.5) deberán cumplirse ahora para todas y cada una de las variables que aparecen en el problema. Esto es, dado el siguiente problema de control óptimo, con n variables de estado[40] y m variables de control:

$$\text{Maximizar} \qquad V = \int_0^T F[t, y_1, y_2, \ldots, y_n, u_1, u_2, \ldots, u_m]\, dt$$

$$\text{sujeto a} \qquad y'_1 = f^1[t, y_1, y_2, \ldots, y_n, u_1, u_2, \ldots, u_m]$$

[40] Obsérvese que ahora debe aparecer una ecuación de movimiento para cada variable de estado.

$$y'_2 = f^2 [t, y_1, y_2, \dots, y_n, u_1, u_2, \dots, u_m]$$
$$\dots$$
$$y'_n = f^n [t, y_1, y_2, \dots, y_n, u_1, u_2, \dots, u_m]$$
$$y_1(0)=y_1^0;\ y_2(0)=y_2^0;\dots;\ y_n(0)=y_n^0$$
$$y_1(T)=y_1^T;\ y_2(T)=y_2^T;\dots;\ y_n(T)=y_n^T$$
$$u_1(t) \in U_1;\ u_2(t) \in U_2;\dots;u_m(t) \in U_m \text{ para } 0 \le t \le T$$

la función Hamiltoniano se podrá escribir como:

$$H = F(t, y_1, y_2, \dots, y_n, u_1, u_2, \dots, u_m) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t) \cdot f^j(t, y_1, y_2, \dots, y_n, u_1, u_2, \dots, u_m)$$

Las condiciones de primer orden vendrán dadas por el Principio del Máximo a través del siguiente sistema de ecuaciones:

1) $\underset{u_1,\dots,u_m}{Max}$ $\forall$ t $\in$ [0, T], siendo $u = u_1, u_2, \dots u_m$

2) $y_j' = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda_j}$ $\qquad (j = 1, \dots, n)$

3) $\lambda_j' = -\dfrac{\partial H}{\partial y_j}$ $\qquad (j = 1, \dots, n)$

4a) $y_j(T) = y_j^T$ $\qquad (j = 1, \dots, n)$

La solución de este sistema proporciona las $2n+m$ trayectorias óptimas (n variables de estado, m variables de control y n variables auxiliares). En el caso de que las condiciones para el punto final fuesen otras, y siguiendo con el apartado 4.2., habría que sustituir en cada caso la condición de trasversalidad 4 por las siguientes condiciones:

(4b) $\lambda_j(T) = 0$ (j = 1, ... , n) *Recta final vertical*

(4c) $[H]_{t=T}=0$ *Recta final horizontal*

(4d) $[H - \lambda_1\varphi_1' - \lambda_2\varphi_2' - \dots - \lambda_n\varphi_n']_{t=T} = 0$ siendo $y_j^T = \varphi_j(T)$ con j = 1, ... , n. las respectivas curvas finales