



FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA II

Trabajo Fin de Máster:

**Análisis de la dinámica de una gran masa sólida
soportada por una fuente.**

Daniel Fernández Mateo

Tutores:

Fernando Fernández Sánchez y Emilio Freire Macías

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mis tutores, Emilio Freire Macías y Fernando Fernández Sánchez y al profesor Miguel Pérez-Saborid por su ayuda y confianza y por haberme puesto delante un trabajo tan bonito.

También quiero agradecer mis padres, por haberme apoyado y ayudado en la decisión de cursar este Máster que, a la postre, ha resultado ser la mejor decisión posible.

Por último, aunque no menos importante, quiero dar las gracias a Rocío, pilar fundamental y apoyo imprescindible. No me quiero olvidar de Raúl, Santiago y Aitor, personas que hacen que siempre vaya en la dirección correcta.

A special thanks to: you

Índice general

1. Introducción	7
2. Anillo cilíndrico. Movimiento vertical.	11
2.1. Excentricidad nula, espesor constante.	11
2.2. Excentricidad no nula.	16
2.3. Ecuaciones de movimiento.	22
2.4. Análisis matemático de la estabilidad	29
3. Anillo cilíndrico. Caso general.	39
4. Conclusiones	49
Anexos	52
A. Esfera. Movimiento vertical.	55
B. Esfera. Caso general.	63
Bibliografía	71

Capítulo 1

Introducción

Las ecuaciones que gobiernan la dinámica de los fluidos ofrecen una gran variedad de problemas de gran interés matemático (ver, por ejemplo, Millán Barbany, 1975, y Teman, 1979, para dos enfoques muy diferentes). Incluso cuando las condiciones y geometría del movimiento fluido son tales que las ecuaciones fluidodinámicas se pueden simplificar en gran medida, como en el problema estudiado en este trabajo, todavía pueden aparecer ecuaciones de gran complejidad matemática y riqueza de soluciones si la dinámica del fluido se considera conjuntamente con la de un sólido que interacciona mecánicamente con él. Ésta es la situación del problema analizado en el presente TFM, donde el fluido está confinado en una región muy delgada entre dos superficies sólidas, por lo que las ecuaciones de Navier-Stokes se pueden linealizar al dominar las fuerzas de fricción viscosa sobre las de inercia (es el denominado límite de lubricación fluidodinámica; ver, por ejemplo, Barrero y Pérez-Saborid, 2005). Las fuerzas de fricción generan a su vez fuerzas de presión tan grandes que el fluido puede sustentar y mover sólidos de enorme peso. Y es este movimiento del sólido, generado por su interacción con el movimiento del fluido, lo que hace matemáticamente interesante el problema, pues las ecuaciones dinámicas del sólido pueden ser fuertemente no lineales.

El problema presentado más abajo está inspirado en ciertas fuentes decorativas en las que una gran esfera, generalmente de mármol muy pulido, como la que hay, por ejemplo, en la entrada del Parque de las Ciencias de Granada, está sustentada por el agua que emana por un orificio en una superficie esférica con un radio ligeramente mayor situada debajo de la esfera. También suelen ser de otros materiales, por ejemplo de granito pulido, como las que aparecen en el trabajo de Snoeijer y Van der Weele (2014). Uno de los detalles que llaman la atención en estas fuentes reside en que uno puede mover la esfera con muy poco esfuerzo, a pesar de su gran tamaño y peso, ayudado por las enormes fuerzas de presión que se generan en la capa líquida entre las dos superficies sólidas. Éste es realmente el fundamento de la lubricación

fluidodinámica, de tanta relevancia práctica y que ha sido estudiado extensivamente desde los trabajos pioneros de Reynolds y Sommerfeld para un cojinete cilíndrico (véase, por ejemplo, Barrero y Pérez-Saborid, 2005). Aquí el problema va a ser distinto al clásico de la lubricación fluidodinámica, pues se va a enfocar sobre las oscilaciones en la configuración de una fuente cuando se aparta de su posición de equilibrio.

En referencias muy recientes consultadas como, por ejemplo, Snoeijer y Van der Weele (2014), en donde se presentan modelos claramente discutibles para la estabilidad, entre otras cosas, porque se simplifica la geometría curva por una plana, es decir, se sustituye, en primera aproximación, el anillo cilíndrico o la esfera por una baldosa. En este sentido este trabajo pretende profundizar y mejorar los modelos presentados en ésta y en otras publicaciones anteriores.

En este trabajo vamos a considerar dos posibles geometrías situadas sobre la fuente: anillo cilíndrico y esfera. Para ambas geometrías estudiaremos con detalle las ecuaciones que gobiernan el movimiento en un instante determinado. Además, estudiaremos la situación donde el movimiento estará restringido al eje vertical. Bajo esta restricción distinguiremos, a su vez, el caso concreto, dentro de un estado de equilibrio, en el que la posición del objeto es fija y el caso en donde sí varía con el tiempo.

Consideremos, por tanto, un anillo cilíndrico de radio R_a , de grandes dimensiones, situada sobre una fuente y que se mueve por la acción de un cierto fluido, generalmente agua, que circulará entre ambas. En cuanto a la profundidad, vamos a trabajar por unidad de longitud, es decir, tendremos un anillo cilíndrico de $L = 1\text{m}$ de ancho. La geometría de la fuente será cóncava con un radio interior R_f , teniéndose, claramente, $R_a < R_f$. La desviación entre el centro de la esfera y el centro de la circunferencia interior de la fuente es lo que conoceremos por excentricidad y denotaremos por e . Evidentemente, para dotar de sentido físico al modelo que desarrollamos en el trabajo, tendremos que considerar una excentricidad será pequeña, $e \ll R_f$. Un esquema de la geometría de este problema lo podemos ver, en un instante determinado, en la figura 1.1. El fluido circula entre la fuente y el anillo a través de un cierto espesor h siendo $h \ll R_f$ y hará que el objeto vaya moviéndose por su interior. El espesor h está determinado por la posición relativa del anillo y de la superficie interior de la fuente. Así h será función de la excentricidad e entre los centros y del punto considerado sobre la fuente, que corresponde a un ángulo θ , medido sobre la circunferencia de la fuente desde la posición vertical inferior (ver figura 1.1). De esta manera tendremos que $h = h(\theta, \epsilon)$. El fluido saldrá de la boquilla y empezará a circular a una cierta presión P_0 , que podremos calcular en función del caudal Q , y abandonará la geometría del sistema a la presión atmosférica.

La posición del anillo respecto a la fuente sufrirá pequeños cambios debido al propio

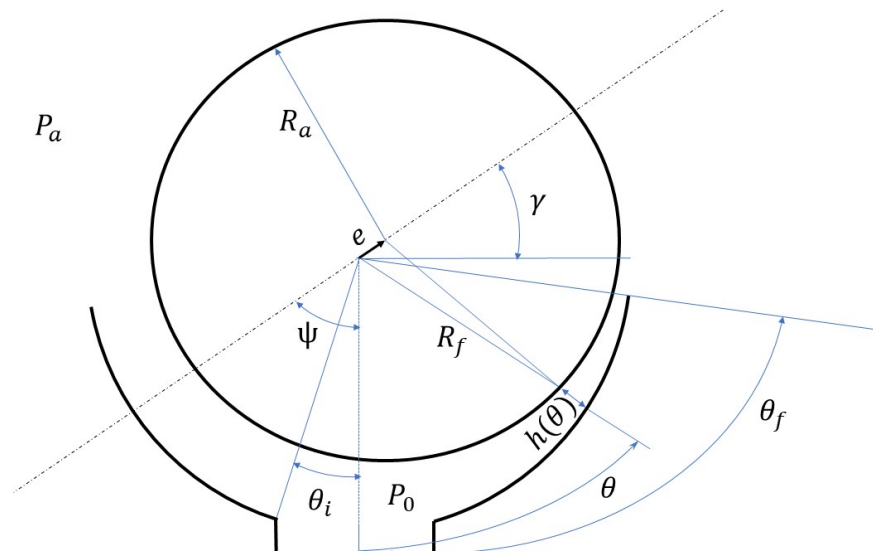


Figura 1.1: Esquema de la geometría del problema para el caso del anillo cilíndrico en un instante determinado. Plano frontal.

caudal. Es por eso que el valor de la excentricidad (y sus componentes horizontal y vertical que posteriormente definiremos como x_e y z_e) dependerá del instante en que midamos, esto es, $e = e(t)$. Tanto el valor como la dependencia con el tiempo de la excentricidad jugarán un papel determinante en la complejidad a la hora de desarrollar un modelo matemático. Es por eso que en el capítulo 2 empezamos estudiando el caso más sencillo: restringimos el movimiento de tal manera que el anillo únicamente puede moverse en el eje vertical que pasa por el centro de la fuente. Empezaremos el problema con dos casos sencillos en estático para después aplicar movimiento. Además podremos expresar mejor ideas similares que aparecerán en el caso general del capítulo 3.

Dentro de esta restricción podemos tener, conocido el peso w de la esfera, un caudal Q tal que los centros coincidan teniendo entonces un espesor constante pudiendo ser únicamente la diferencia de radios. Es decir, $h \equiv h_0 = R_f - R_b$. Este caso se verá con detalle a continuación, en la sección 2.1. Posteriormente, de manera similar, aplicaremos el mismo concepto para un caso donde la excentricidad, únicamente vertical, no sea nula.

Para finalizar el capítulo introduciremos el movimiento, que seguirá siendo vertical. En la sección 2.3 se presentarán las ecuaciones diferenciales que gobiernan este movimiento y, para finalizar, en la sección 2.4 se linealizarán estas ecuaciones y realizaremos un estudio de la estabilidad. Para concluir el caso del anillo cilíndrico en el capítulo 3, presentaremos un modelo dinámico general, en donde el anillo puede estar en cualquier posición respecto a la esfera de la fuente. En ella, llegaremos a las ecuaciones de gobiernan el movimiento que

ahora se verán duplicadas puesto que ahora tendremos dos componentes de la excentricidad (x_e y z_e).

Para cerrar el trabajo, a modo de anexo, estudiaremos el caso en donde en lugar de un anillo cilíndrico se tiene una esfera. Volvemos a empezar hablando de restricción vertical del movimiento (anexo A) y caso general (anexo B). En ambos casos únicamente modelamos de manera análoga al caso del anillo cilíndrico. Dada la complejidad que exige este caso al incorporar coordenadas esféricas y a la extensión del trabajo ya realizado, decidimos no estudiar el movimiento.

Capítulo 2

Anillo cilíndrico. Movimiento vertical.

Empezamos estudiando el caso del anillo cilíndrico aplicando una restricción en la que el anillo únicamente puede moverse en la vertical del centro de la fuente. Evidentemente en este caso la excentricidad e sólo tendrá componente en el eje de ordenadas, $\vec{e} = z_e \vec{j}$. También puede darse el caso particular donde tanto el centro del anillo como el de la fuente sean coincidentes y, por tanto, $e = 0$ y $h(\theta, e) \equiv h_0 = R_f - R_a$. Para ambos casos, intentaremos acotar, en primera aproximación, la relación peso-caudal w/Q que hará que nos mantengamos bajo la hipótesis de este capítulo. Aunque se recordará más adelante, aclaramos ahora que los cálculos se han realizado por unidad de longitud transversal.

A lo largo de los apartados 2.1 y 2.2 estudiaremos dos casos particulares donde el anillo está quieto en dos situaciones diferentes. En ambos casos, lo que medimos son posiciones dentro del estado de equilibrio. Como caso general de los dos primeros apartados, se incorporará el movimiento ($e = e(t)$) al final de la sección.

2.1. Excentricidad nula, espesor constante.

Vamos a empezar este estudio por el caso más sencillo posible, un caso concreto dentro de esta hipótesis donde el centro de nuestro anillo cilíndrico y el de la fuente son coincidentes haciendo que el espesor por el que circula fluido sea constante e igual a la diferencia de radios, $h_0 = R_f - R_a$, donde por R_a vamos a denotar al radio del anillo. En la figura 2.1 podemos ver un esquema de un plano frontal de este caso en particular.

El caudal que emana de la boquilla se va a dividir de manera simétrica al entrar en la fuente; es decir, el caudal que circula por cada una de las ranuras en la dirección θ será $Q/2$ (por unidad de longitud axial), que, a su vez viene determinado por el perfil de velocidades

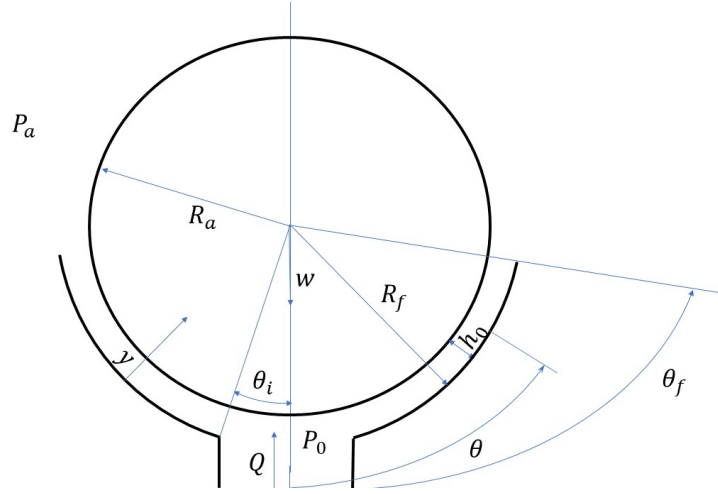


Figura 2.1: Esquema del plano frontal del problema cilíndrico en el estado de equilibrio para que $h(\theta, e) \equiv h_0 = R_f - R_a$.

v_θ mediante

$$q_\theta = \int_0^{h_0} v_\theta dy, \quad (2.1)$$

donde y es la coordenada normal a la superficie cilíndrica dentro de la región ocupada por el fluido (ver figura 2.1). Dado que las fuerzas viscosas son dominantes debido a que $h_0 \ll R_a$, la velocidad $v_\theta(y)$ a lo largo de la coordenada θ tiene un perfil de Poiseuille, gobernado por la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección θ y condiciones de contorno (ver, por ejemplo, Barrero y Pérez-Saborid, 2005):

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{R_f} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial y^2} &= 0 \\ v_\theta(y=0) &= 0 \\ v_\theta(y=h_0) &= 0 \end{aligned} \right\},$$

donde μ es la viscosidad dinámica del fluido y P la presión. Integrando dos veces la ecuación anterior proporciona el mencionado perfil parabólico de Poiseuille

$$v_\theta = -\frac{1}{2\mu R_f} \frac{\partial P}{\partial \theta} y(h_0 - y). \quad (2.2)$$

Introduciendo esta expresión en (2.1) se obtiene el caudal en cada una de las ranuras:

$$q_\theta = \int_0^{h_0} v_\theta dy = -\frac{h_0^3}{12R_f\mu} \frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{Q}{2}, \quad (2.3)$$

que proporciona el gradiente de presión en la dirección θ en función del caudal Q

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{6\mu QR_f}{h_0^3}. \quad (2.4)$$

Esta expresión para la presión podemos sustituirla en (2.2) para escribir el perfil de velocidad en función de Q :

$$v_\theta = \frac{3Q}{h_0^3} y(h_0 - y).$$

Podemos ahora, además, calcular la distribución de presión a lo largo de la fuente. Tanto si estamos en el caso del anillo como más adelante veremos en el caso de la esfera, el fluido saldrá de la boquilla a una presión P_0 y escapará de la ranura a presión atmosférica. Con estas condiciones de contorno, podemos integrar (2.4) entre $\theta_i \simeq 0$ ¹ y θ para obtener

$$P(\theta) - P_0 = -\frac{6\mu QR_f}{h_0^3} \theta.$$

El valor de P_0 en función del caudal Q y del resto de parámetros conocidos se obtiene igualando la presión en $\theta = \theta_f$ a la presión atmosférica P_a :

$$P_0 = P_a + \frac{6\mu QR_f}{h_0^3} \theta_f.$$

Así, finalmente, tenemos la distribución de presión a lo largo de la coordenada θ en función de Q

$$P(\theta) - P_a = \frac{6\mu QR_f}{h_0^3} (\theta_f - \theta). \quad (2.5)$$

Es conveniente definir una distribución de presión $\phi(\theta)$ adimensional

$$\phi = \frac{P(\theta) - P_a}{P_0 - P_a} = \frac{\theta_f - \theta}{\theta_f}. \quad (2.6)$$

Vemos que la distribución de presión varía de manera lineal a lo largo de la fuente para este caso con el espesor h constante. La pendiente de la recta depende únicamente de donde se fije el ángulo de salida θ_f . Por mostrar algunos resultados en la figura 2.2 podemos ver la variación de la distribución de presión para distintos valores de θ_f .

Dado que estamos en una posición concreta de equilibrio, el balance de fuerzas que actúan sobre la superficie del anillo será nulo. Por tanto, la diferencia de presión $P - P_a$ proyectada

¹Como la boquilla es muy estrecha, $\theta_i \ll \theta_f$ y se puede suponer, en primera aproximación y para simplificar los cálculos, que $\theta_i \simeq 0$.

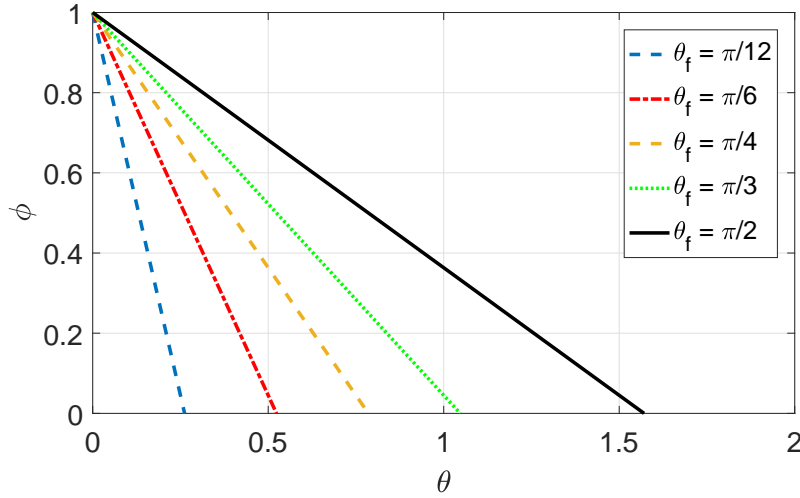


Figura 2.2: $\phi = \phi(\theta)$ para distintos valores del ángulo de salida.

sobre el eje vertical e integrada a lo largo de toda la superficie del anillo se verá contrarrestada por la acción del propio peso w del cilindro por unidad de longitud,

$$w = \int_S (P - P_a) \cos \theta dS = 2 \int_0^{\theta_f} \frac{6\mu QR_f}{h_0^3} (\theta_f - \theta) \cos \theta R_f d\theta, \quad (2.7)$$

donde hemos multiplicado por dos debido a la geometría que presenta esta caso concreto del problema y donde, de nuevo, se ha supuesto $\theta_i \ll 1$ y se ha aproximado por 0. Integrando se obtiene el peso del anillo en función del caudal y del resto de parámetros del problema:

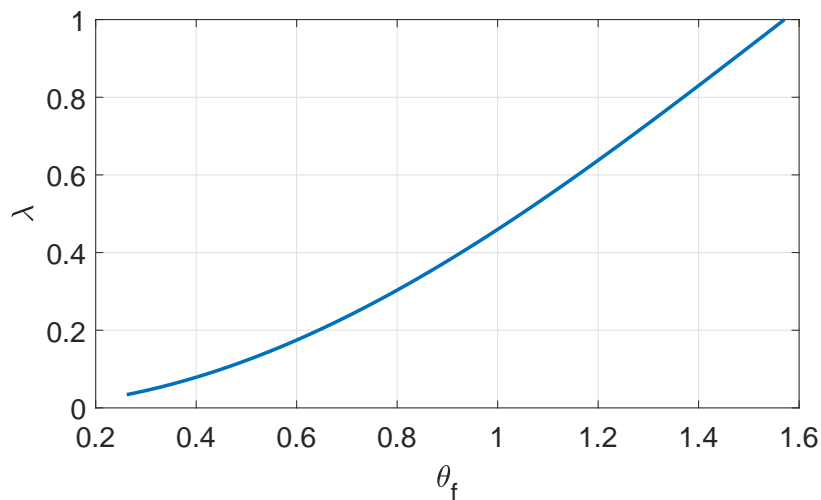
$$w = \frac{12QR_f^2\mu}{h_0^3} (1 - \cos \theta_f) \rightarrow$$

$$\rightarrow h_0 = \left[\frac{12QR_f^2\mu}{w} (1 - \cos \theta_f) \right]^{1/3} = \left[\frac{24QR_f^2\mu}{w} \sin^2 \left(\frac{\theta_f}{2} \right) \right]^{1/3}.$$

Esta expresión realmente nos proporciona un caudal Q conocido el peso w , la viscosidad μ y el geometría con $h_0 = R_f - R_a$. Es conveniente definir el siguiente peso adimensional λ , de forma tal que la expresión anterior no contenga más que dos parámetros adimensionales, θ_f y el propio λ :

$$\lambda \equiv \frac{w}{\frac{12\mu QR_f^2}{h_0^3}} = 1 - \cos \theta_f. \quad (2.8)$$

De esta manera, dado un cierto caudal Q , para cada ángulo de salida θ_f habrá un peso w que haga que el espesor h_0 por el que circula el fluido sea constante e igual a la diferencia de radios, es decir, $h_0 = R_f - R_a$. En la figura 2.3 podemos ver cómo es esta relación.

Figura 2.3: $\lambda = \lambda(\theta_f)$.

La cota superior del ángulo de salida la hemos puesto en $\pi/2$ ya que si se superara este valor, podríamos perder las características de este problema asemejándose al caso del cojinete cilíndrico. Para el caso crítico $\theta_f = \pi/2$ tenemos que $\lambda = 1$, lo que significa que para un caudal Q , el peso que hace que no haya excentricidad será

$$w = \frac{12\mu QR_f^2}{h_0^3},$$

teniendo un valor que es función del fluido que circule por el espesor y de la geometría del sistema anillo-fuente. De la expresión anterior podemos sacar una relación interesante peso-caudal cuando $\lambda = 1$ y $\theta_f = \pi/2$:

$$\frac{w}{Q} = \frac{12\mu R_f^2}{h_0^3},$$

Como, para un rango de temperaturas bastante amplio, la viscosidad dinámica del agua es aproximadamente $\mu \sim 10^{-3}\text{kg/m s}$, nuestra fuente tendrá una geometría tal que $R_f \sim 10$ m y $R_f - R_a \sim 0,1$ m, el peso w que marca que el espesor de la ranura sea constante será, aproximadamente,

$$\frac{w}{Q} \sim 1200 \rightarrow w \sim 1200Q,$$

donde w y Q están expresados en unidades del S.I. Es decir, si tenemos una fuente cuya geometría sea tal que el ángulo de salida del caudal sea $\pi/2$, el peso de nuestro anillo para que su centro y el de la propia fuente sean coincidentes debe cumplir la relación anterior.

Si nos volvemos a fijar en la figura 2.3, vemos que para ángulos de salida de la fuente pequeños, hasta $\theta_f = 0,6$ rad aproximadamente (unos $34,5^\circ$) nuestro parámetro λ está siempre por debajo de 0,2. Con esta situación tenemos

$$\lambda = \frac{w}{\frac{12\mu QR_f^2}{h_0^3}} < \frac{1}{5} \quad \rightarrow \quad w < \frac{12\mu QR_f^2}{5h_0^3};$$

es decir, para un cierto caudal Q , mientras tengamos que $\theta_f < 0,6$ el peso que hará que el espesor de la ranura sea constante estará limitado por este valor que acabamos de obtener de acuerdo con las estimaciones previas de los parámetros geométricos y las propiedades del fluido:

$$w \lesssim 250Q,$$

donde w y Q están, de nuevo, expresados en unidades del S.I. Mientras Q y w cumplan esta relación para ángulos de salida pequeños y $\theta_f < 0,6$, el espesor h_0 podrá permanecer constante.

2.2. Excentricidad no nula.

Una vez que hemos visto el caso más sencillo posible, vamos a estudiar ahora, aún estando bajo la hipótesis de movimiento vertical, el caso general de la posición de equilibrio en el que los centros del anillo y de la fuente están separados por una excentricidad, que llamaremos e . En la figura 2.4 se muestra un esquema de este caso.

Para calcular el espesor de la ranura por donde circula el fluido vamos a partir del teorema del coseno. En la figura 2.5 podemos ver un esquema de la geometría del problema en este caso que es igual al de la esfera, como se podrá comprobar en secciones venideras.

Ahora el espesor por donde circula el líquido ya no va a ser constante. Si aplicamos el teorema del coseno al esquema de la figura anterior obtenemos el espesor de la ranura en función de la posición y de la excentricidad:

$$\begin{aligned} R_b^2 &= e^2 + (R_b + h_0 - h_0(\theta))^2 - 2e(R_b + h_0 - h_0(\theta)) \cos(\pi - \theta) \rightarrow \\ &\rightarrow h(\theta, e) \simeq h_0 + e \cos \theta, \end{aligned} \quad (2.9)$$

Con h_0 nos referimos al espesor de la sección anterior que es igual a la diferencia de radios, $h_0 = R_f - R_a$.

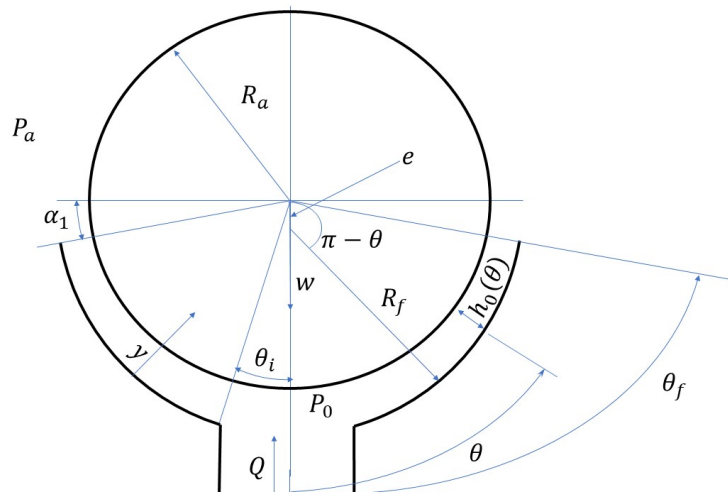


Figura 2.4: Geometría del problema para el anillo cilíndrico en el estado de equilibrio. Plano frontal.

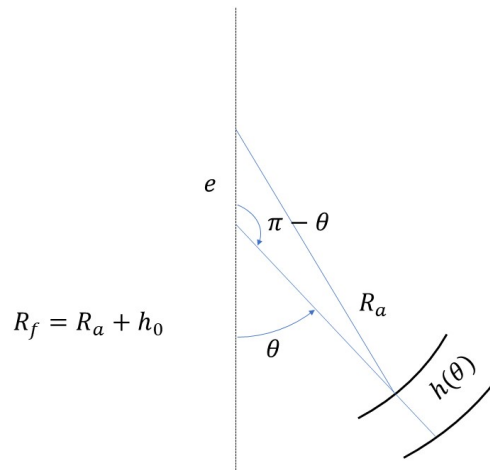


Figura 2.5: Geometría del problema en el estado de equilibrio. Plano frontal.

La expresión que nos da el caudal que circula por la fuente, es exactamente igual que para el caso de la sección anterior, que vimos en (2.3), salvo, claro está, que ahora el espesor es $h = h(\theta, \epsilon)$. Esta expresión nos dará la distribución de presiones a lo largo de la fuente:

$$q_\theta = -\frac{h^3(\theta)}{12\mu R_f} \frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{Q}{2} \rightarrow \rightarrow \frac{\partial P}{\partial \theta} = -\frac{6\mu QR_f}{h^3(\theta)}. \quad (2.10)$$

Conviene aclarar que al estar ambos centros alineados en el mismo eje vertical, podemos imponer la igualdad $q_\theta = Q/2$. En un caso general, la expresión para la presión no será tan

sencilla. Como sabemos que el caudal abandona la fuente a presión atmosférica, podemos obtener la expresión para $P(\theta)$

$$P(\theta) = P_a - 6\mu QR_f \int_{\theta}^{\theta_f} \frac{d\theta}{h^3(\theta)}.$$

Si aplicamos ahora la condición de contorno a la salida de la boquilla, cuando $\theta = \theta_i$, la presión tendrá un cierto valor P_0 .

$$P_0 = P_a - 6\mu QR_f \int_{\theta_i}^{\theta_f} \frac{d\theta}{h^3(\theta)}.$$

Podemos definir, dados los dos resultados anteriores, una variable adimensional ϕ que nos indique la distribución de presión a lo largo de toda la ranura

$$\phi = \frac{P(\theta) - P_a}{P_0 - P_a} = \frac{\int_{\theta}^{\theta_f} \frac{d\theta}{\eta^3(\theta)}}{\int_{\theta_i}^{\theta_f} \frac{d\theta}{\eta^3(\theta)}} = F(\theta, \epsilon; \theta_f), \quad (2.11)$$

Donde se ha cambiado h por su valor adimensional η . Esto es,

$$\eta(\theta, \epsilon) \equiv \frac{h(\theta, e)}{h_0} = 1 + \epsilon \cos \theta, \quad \epsilon \equiv \frac{e}{h_0}. \quad (2.12)$$

La distribución de presión adimensional será función por tanto de la excentricidad adimensional ϵ y del ángulo de salida, θ_f . Más adelante, se mostrarán resultados en forma de superficie $(\epsilon, \theta_f, \phi(\epsilon, \theta_f))$ en los que se podrá ver esta dependencia.

Aplicando las condiciones de contorno, vemos que a la salida de la boquilla, cuando $\theta = \theta_i \simeq 0$, tenemos $\phi = 1$, mientras que a la salida de la fuente ($\theta = \theta_f$), a presión atmosférica, tenemos $\phi = 0$. En la figura 2.6 podemos ver, para distintos valores de ϵ , cómo varía ϕ a lo largo de la coordenada θ fijando dos distintos valores de θ_f . Hemos impuesto primeramente, como muestra la figura 2.6(a), que $\theta \in [0, \theta_f = \pi/2]$, que es el caso que hemos fijado como límite. Podemos cambiar, evidentemente, el valor que tomará el ángulo de salida θ_f y tendremos una distribución de presión distinta. En la figura 2.6(b) podremos ver otro ejemplo en el que $\theta \in [0, \theta_f = \pi/4]$.

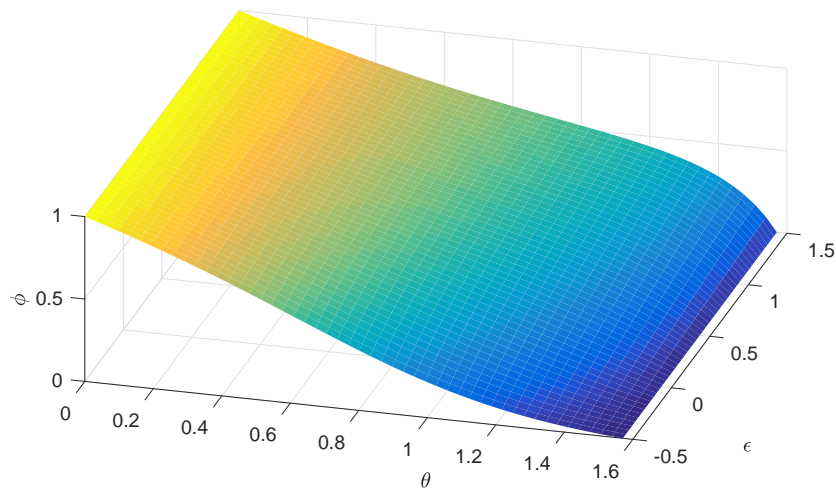
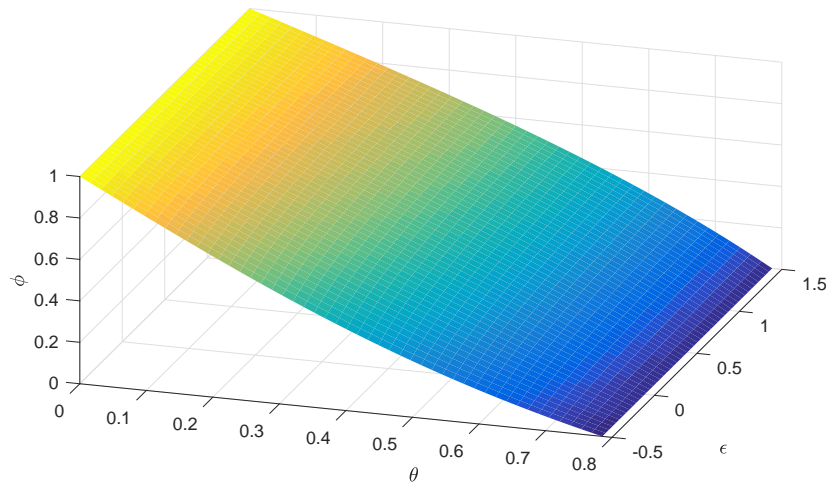

 (a) Distribución de presión adimensional para un ángulo de salida $\theta_f = \pi/2$

 (b) Distribución de presión adimensional para un ángulo de salida $\theta_f = \pi/4$.

Figura 2.6: Distribución de presión.

Si hacemos ahora un balance de fuerzas sobre el eje vertical, la integral sobre la superficie del anillo que contrarresta la acción del peso del mismo es la misma que vimos en (2.7). Si aplicamos este balance al caso que estamos tratando tenemos

$$\begin{aligned}
 w &= 2 \int_0^{\theta_f} -(P(\theta) - P_a) R_f \cos \theta d\theta \rightarrow \\
 \rightarrow w &= 12\mu Q R_f^2 \int_0^{\theta_f} \cos \theta \left[\int_{\theta}^{\theta_f} \frac{d\hat{\theta}}{(h_0 + e \cos \hat{\theta})^3} \right] d\theta,
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

donde la variable $\hat{\theta}$ se ha introducido para distinguir claramente las variables de cada una de las integrales. De nuevo, el 2 que aparece multiplicando a la integral anterior es consecuencia

de la simetría que ofrece este caso particular. Para poder ver resultados en los que se vea de manera clara la relación que hay entre el peso w y el caudal Q , es de nuevo conveniente utilizar las variables adimensionales definidas en (2.12) y además del peso adimensional λ

$$\eta = \frac{h(\theta, e)}{h_0}$$

$$\epsilon = \frac{e}{h_0}.$$

De esta manera (2.13) queda

$$\lambda = \int_0^{\theta_f} \cos \theta \left[\int_{\theta}^{\theta_f} \frac{d\hat{\theta}}{(1 + \epsilon \cos \hat{\theta})^3} \right] d\theta, \quad (2.14)$$

siendo λ el mismo peso adimensional definido en (2.8)

$$\lambda = \frac{wh_0^3}{12\mu QR_f^2} = \frac{(R_f - R_a)^3 w}{12\mu QR_f^2}. \quad (2.15)$$

Por lo tanto, nuestro espesor adimensional, ϵ , será un parámetro que dependerá de los datos conocidos del problema, $\epsilon = \epsilon(\lambda, \theta_f)$. Obviamente, si $\epsilon = 0$ tenemos el caso anterior. Es decir, todo nuestro problema va a depender de este parámetro y del ángulo de salida de la fuente. El balance de fuerzas adimensional de la expresión (2.14) queda como

$$\lambda = F(\epsilon, \theta_f) \quad (2.16)$$

donde, como ya sabemos, θ_f es el ángulo de salida en la fuente y lo vamos a acotar de tal manera que $\theta_i < \theta_f \leq \pi/2$.

Con la expresión (2.16) lo que queremos ver es la relación que debe existir entre el caudal Q y el peso w , a través del parámetro λ , conocidos ϵ y θ_f y que se mantengan las condiciones de equilibrio.

La figura 2.7 muestra los resultados de $\lambda = \lambda(\epsilon, \theta_f)$ obtenidos numéricamente de la ecuación (2.14) en forma de superficie, donde está marcada la curva correspondiente al caso $\epsilon = 0$ del apartado anterior

De esta manera podremos obtener λ (y, por consiguiente, la relación w/Q) para cualquier situación geométrica. A partir de la superficie anterior podemos obtener una gráfica, en forma de ábaco, $\lambda - \theta_f$ para distintos valores de ϵ . En la figura 2.8 se muestra este resultado.

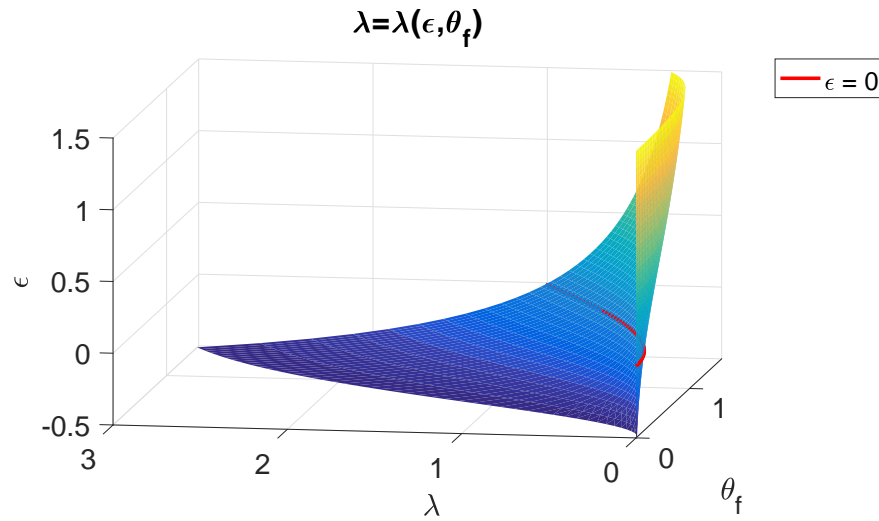


Figura 2.7: $\lambda = \lambda(\epsilon, \theta_f)$. En rojo marcada la curva correspondiente a $\epsilon = 0$

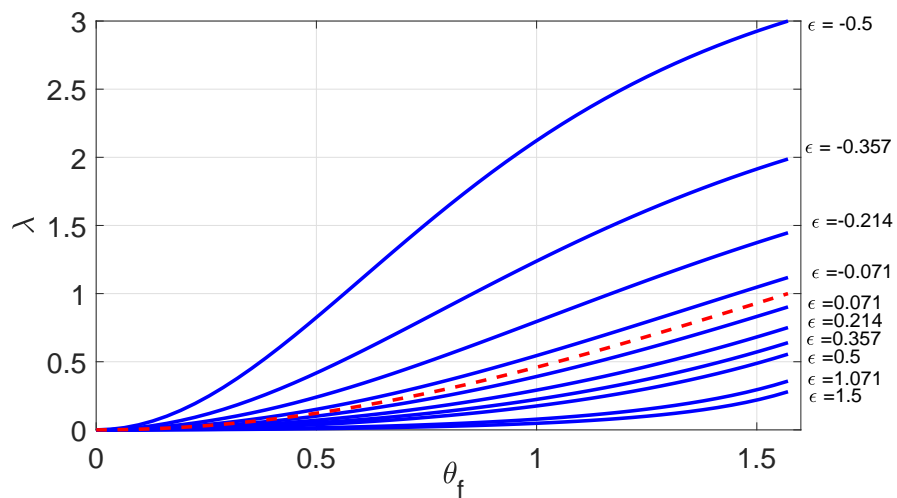


Figura 2.8: $\lambda = \lambda(\epsilon, \theta_f)$ La línea de trazos roja corresponde al caso $\epsilon = 0$.

De la figura 2.8 ya se pueden obtener las relaciones peso-caudal para multitud de situaciones dentro del caso de equilibrio. Por ejemplo, vemos que mientras $\theta_f \leq 0,5$ rad ($\sim 29^\circ$), λ siempre va a ser menor que uno. Análogamente a los razonamientos de la sección anterior, tenemos entonces

$$\lambda < 1 \rightarrow \frac{w}{Q} \lesssim 1200.$$

Mientras mantengamos esta relación tendremos definido el estado de equilibrio vertical.

2.3. Ecuaciones de movimiento.

Una vez que hemos visto primeramente el caso donde el anillo está fijo en una posición de equilibrio, vamos a abordar ahora el caso en el que la excentricidad entre los centros vaya variando con el tiempo manteniéndose en la vertical, haciendo el anillo "bote" sobre la fuente. Un resultado interesante será estudiar la oscilación del movimiento a través de la estabilidad del equilibrio. En la figura 2.9 podemos ver una esquema frontal del caso de esta sección.

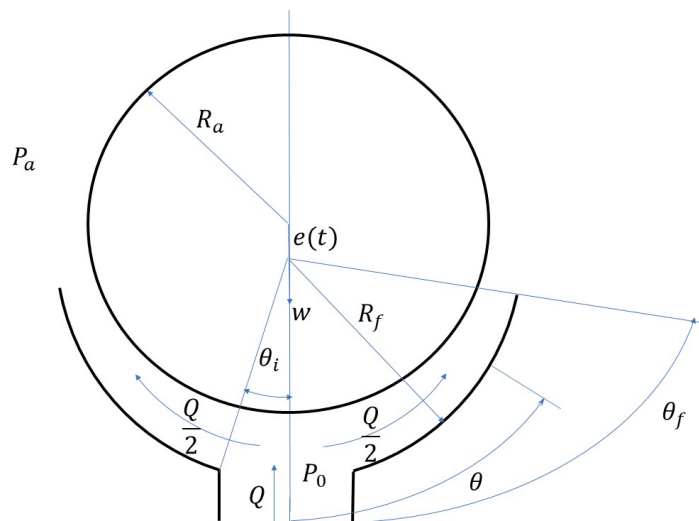
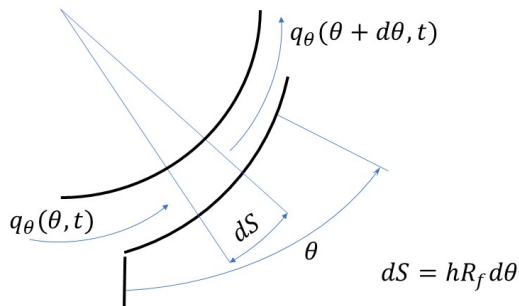


Figura 2.9: Plano frontal. Caso de equilibrio.

El primer paso que hay que dar para llegar a la ecuación que nos da la evolución temporal de la excentricidad es calcular la distribución de presión. Para ello, al haber simetría, la expresión es la misma que (2.10) con un término más debido a esta evolución temporal. Este término se obtiene a partir de ver qué cantidad de caudal atraviesa una porción de la ranura. En la figura 2.10, vemos un esquema de la situación.

Figura 2.10: Esquema obtención q_θ .

Como veremos más adelante, todos estos cálculos serán iguales cuando vayamos a abordar el caso fuera del equilibrio. Atendiendo a la figura anterior, obtenemos la siguiente ecuación para la variación del caudal con la posición y el tiempo.

$$\frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} = -R_f \frac{\partial h}{\partial t},$$

donde, al ser la expresión de $h(\theta, e)$ idéntica a la del caso anterior, tenemos $\frac{\partial h}{\partial t} = \dot{e} \cos \theta$. Introduciendo este cambio se tiene:

$$\frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} = -R_f \dot{e} \cos \theta.$$

Integramos ahora a lo largo de toda la coordenada θ teniendo en cuenta que el caudal se reparte equitativamente a ambos de la fuente

$$q_\theta - \frac{Q}{2} = -R_f \dot{e} \sin \theta \rightarrow q_\theta = \frac{Q}{2} - R_f \dot{e} \sin \theta.$$

Recuperamos ahora la ecuación (2.10) para obtener, ahora sí, la distribución de presiones

$$\begin{aligned} -\frac{h^3(\theta)}{12\mu R_f} \frac{\partial P}{\partial \theta} &= \frac{Q}{2} - R_f \dot{e} \sin \theta \rightarrow \\ \rightarrow \frac{\partial P}{\partial \theta} &= -\frac{6\mu Q R_f}{h^3(\theta)} + \frac{12\mu R_f^2}{h^3(\theta)} \dot{e} \sin \theta \end{aligned}$$

Adimensionalizamos ahora la expresión anterior con la ayuda de las variables η, ϵ, ϕ presentadas anteriormente y $\tau = t/t_c$ para el tiempo siendo t_c un tiempo característico que calcularemos más adelante. Así pues, la expresión anterior queda

$$\frac{6\mu QR_f}{h_0^3} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{6\mu QR_f}{\eta^3 h_0^3} + \frac{12\mu R_f^2 h_0}{\eta^3 h_0^3} \frac{\partial \epsilon}{t_c} \frac{\partial \tau}{\partial \tau} \sin \theta,$$

donde

$$Q = \frac{2R_f h_0}{t_c} \rightarrow t_c = \frac{2R_f h_0}{Q}. \quad (2.17)$$

Este tiempo característico veremos que será el mismo que aparecerá cuando estudiemos el caso fuera del equilibrio. Con este valor de t_c la expresión para la distribución ϕ de presión adimensional se simplifica considerablemente

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} &= -\frac{1}{\eta^3} + \dot{\epsilon} \frac{\sin \theta}{\eta^3} \rightarrow \\ \rightarrow \phi(\theta) &= -\int_{\theta}^{\theta_f} \frac{d\theta}{\eta^3} + \dot{\epsilon} \int_{\theta}^{\theta_f} \frac{\sin \theta}{\eta^3} d\theta \end{aligned}$$

Donde $\eta = \eta(\theta, \epsilon)$. La distribución de presión adimensional ϕ , tanto en (2.6) como en (2.11), es una relación entre diferencias de presión. La diferencia $P_0 - P_a$ del denominador está evaluada en el estado de equilibrio. Sin embargo, podemos establecer la condición $\theta = \theta_i \rightarrow \phi = 1$ ya que P_0 va a permanecer constante debido a los cambios en la presión que originan cuando varía el espesor $h(\theta, e)$ al alterar el estado de equilibrio.

Además, como ya sabemos las condiciones de presión a la salida de la fuente, podemos imponer $\theta = \theta_f \rightarrow \phi = 0$. Esta distribución de presión es el último paso previo a presentar la ecuación que marca la evolución temporal de la excentricidad. Esta ecuación no es otra cosa si no un balance de fuerzas idéntico al de la expresión (2.13), con la salvedad evidente que ahora estamos incluyendo el movimiento del anillo sobre la fuente.

$$2 \int_0^{\theta_f} -(P(\theta) - P_a) R_f \cos \theta d\theta - w = m\ddot{e}, \quad (2.18)$$

donde, de nuevo, aparece un 2 debido a la simetría y hemos supuesto $\theta_i \sim 0$. Por w entendemos el peso del anillo y por m su masa. Sustituimos ahora la distribución de presión por ϕ y dividimos todos los términos por el peso

$$\frac{12\mu QR_f^2}{wh_0^3} \int_0^{\theta_f} \cos \theta d\theta \left[\int_{\theta}^{\theta_f} \frac{d\hat{\theta}}{\eta^3(\epsilon, \theta)} - \dot{\epsilon} \int_{\theta}^{\theta_f} \frac{\sin \hat{\theta}}{\eta^3(\epsilon, \theta)} d\hat{\theta} \right] - 1 = \frac{\ddot{e}}{g},$$

siendo g la aceleración de la gravedad, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Como último paso, sustituimos \ddot{e} por su correspondiente versión adimensional y hacemos 1 el coeficiente de la integral

$$\begin{aligned}
& \frac{wh_0^3}{12\mu QR_f^2} \frac{12\mu QR_f^2}{wh_0^3} \int_0^{\theta_f} \cos \theta d\theta \left[\int_\theta^{\theta_f} \frac{d\hat{\theta}}{\eta^3(\epsilon, \theta)} - \dot{\epsilon} \int_\theta^{\theta_f} \frac{\sin \hat{\theta}}{\eta^3(\epsilon, \theta)} d\hat{\theta} \right] - \frac{wh_0^3}{12\mu QR_f^2} = \\
& \qquad \qquad \qquad = \frac{wh_0^3}{12\mu QR_f^2} \frac{1}{g} \frac{h_0}{t_c^2} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \tau^2} \rightarrow \\
& \qquad \qquad \qquad \rightarrow \int_0^{\theta_f} \cos \theta d\theta \left[\int_\theta^{\theta_f} \frac{d\hat{\theta}}{\eta^3(\epsilon, \hat{\theta})} - \dot{\epsilon} \int_\theta^{\theta_f} \frac{\sin \hat{\theta}}{\eta^3(\epsilon, \hat{\theta})} d\hat{\theta} \right] - \lambda = \mu^* \ddot{\epsilon} \rightarrow \quad (2.19) \\
& \rightarrow \mu^* \ddot{\epsilon} = \underbrace{\int_0^{\theta_f} \cos \theta \left[\int_\theta^{\theta_f} \frac{d\hat{\theta}}{\eta^3(\epsilon, \hat{\theta})} \right] d\theta}_{F(\epsilon, \theta_f)} - \dot{\epsilon} \underbrace{\int_0^{\theta_f} \cos \theta \left[\int_\theta^{\theta_f} \frac{\sin \hat{\theta}}{\eta^3(\epsilon, \hat{\theta})} d\hat{\theta} \right] d\theta}_{G(\epsilon, \theta_f)} - \lambda,
\end{aligned}$$

Donde la notación de F y G será usada más adelante en el análisis. Vemos que si aplicamos las condiciones de equilibrio, es decir, $\dot{\epsilon} = \ddot{\epsilon} = 0$, tenemos el caso de la sección anterior, en concreto la ecuación (2.14). Además, esta última expresión pasa a ser fundamental ya que es la que marca las características del movimiento del anillo sobre la fuente. Los parámetros λ y μ^* , por su parte, tienen la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{wh_0^3}{12\mu QR_f^2} \quad \text{como en el caso anterior} \\
\mu^* &= \frac{wh_0^3}{12\mu QR_f^2} \frac{1}{g} \frac{h_0}{t_c^2} = \lambda \frac{1}{g} \frac{h_0}{t_c^2} = \lambda \cdot \xi.
\end{aligned}$$

Siendo $\xi = \frac{1}{g} \frac{h_0}{t_c^2}$. Se recuerda que en este caso del anillo cilíndrico, todos los cálculos son por unidad de longitud. Es por eso que tomamos el mismo tiempo característico t_c que el de la expresión (2.17). Estos dos últimos parámetros, λ y μ^* , tienen gran relevancia, ya que su valor va a influir de manera considerable en la estabilidad del equilibrio. Con λ ya trabajamos a lo largo de la sección anterior, para ver la relación w/Q para que se mantuviera el estado de equilibrio.

Para presentar los primeros resultados de la estabilidad del equilibrio, un valor podría ser $\lambda = 1,5$, por otro lado, tenemos $\mu^* = \mu^*(\lambda; Q)$. Como primer resultado para mostrar, vamos a suponer que tenemos un caudal de entrada tal que $\mu^* = 4\lambda$. Con estas suposiciones podremos abordar el problema numéricamente.

Para poder ver la estabilidad del equilibrio, lo que queremos ver es cómo evoluciona con el tiempo la excentricidad ϵ y sus derivadas. En la figura 2.11 podemos ver esta evolución temporal para el caso concreto de λ y μ^* que hemos comentado. Además, hemos supuesto $\theta_i \sim 0$ y $\theta_f = \pi/4$, siendo la mitad de la cota superior.

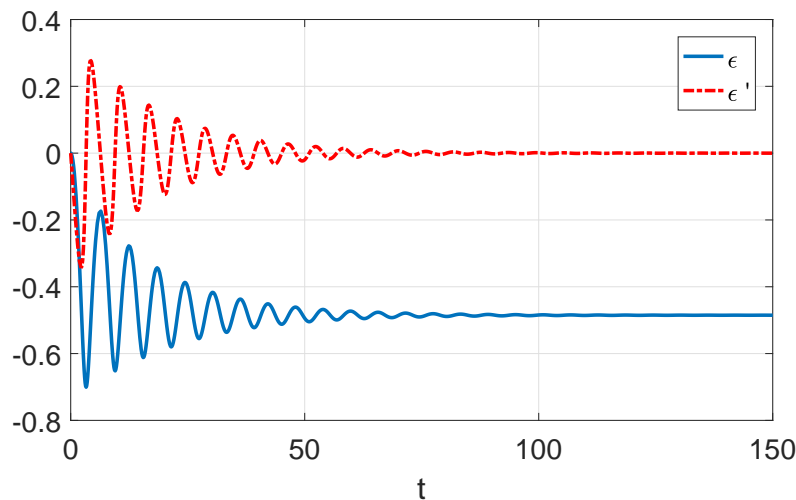


Figura 2.11: Evolución temporal de ϵ y $\dot{\epsilon}$, para $\lambda = 1,5$, $\mu^* = 4\lambda$ y $\theta_f = \pi/4$

Tal y como hemos escrito las ecuaciones anteriores, los resultados de la figura anterior concuerdan con lo que se podía prever de ellas. Lo que tenemos es un movimiento amortiguado del anillo sobre el caudal. Pasado un cierto tiempo, la excentricidad deja de oscilar y pasa a ser constante y negativa manteniéndose, bajo estas condiciones, los centros en el mismo eje vertical.

Otro resultado interesante que surge a raíz del anterior es mostrar el plano de fase $\epsilon - \dot{\epsilon}$. En la figura 2.12 vemos el plano de fase para el caso concreto anterior. Al ser un movimiento amortiguado y los valores de ϵ son siempre negativos, los valores que aparecen en dicho plano tiene lógica pensar que sean negativos.

Una buena forma de comprobar que el balance anterior es correcto, sería ver ahora qué ocurre si imponemos un valor de λ tal que verifique (2.8). Como ya vimos en la sección 2.1, si tenemos $\lambda = 1 - \cos \theta_f \forall \theta_f \leq \pi/2$, estaremos en el caso de equilibrio concreto en el que $\epsilon = 0$ y h_0 es constante. Además comprobaremos que, efectivamente, con ese valor de λ en particular, el valor de μ^* pasa a ser prácticamente irrelevante. En la figura 2.13 podemos ver cómo oscila la excentricidad ϵ a lo largo del tiempo para distintos valores de μ^* con $\theta_f = \pi/3$.

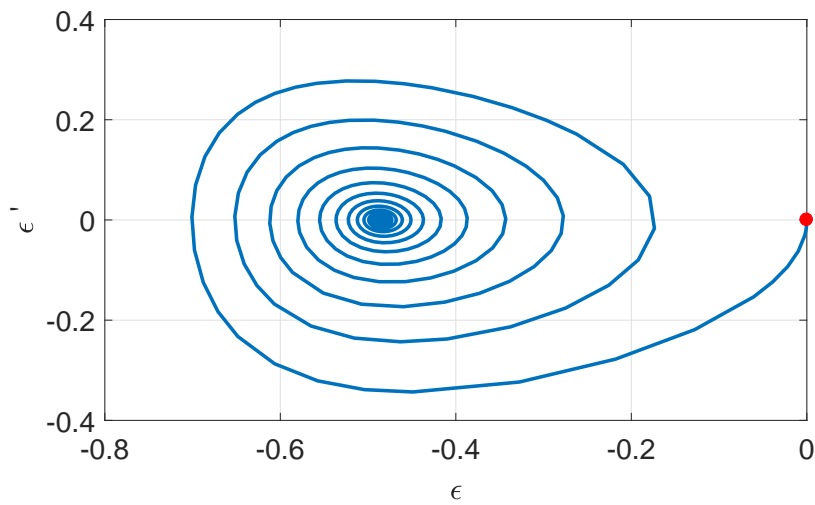


Figura 2.12: Plano de fase $\epsilon - \dot{\epsilon}$, para $\lambda = 1,5$, $\mu^* = 4\lambda$ y $\theta_f = \pi/4$. En rojo marcado el punto inicial

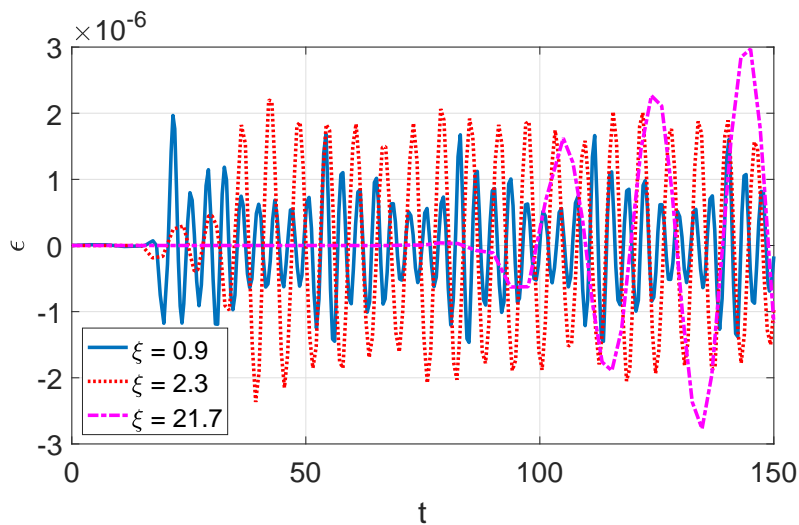


Figura 2.13: Oscilación de la excentricidad ϵ para distintos valores de ξ , con $\lambda = 1 - \cos \theta_f$, $\theta_f = \pi/3$

Aunque visualmente vemos que la oscilación de la excentricidad es mucho más caótica que en el caso anterior, si nos fijamos en la escala de los valores que toma ϵ , nos damos cuenta que, realmente, es constante a lo largo del tiempo e igual a cero. En términos de caudal, si estamos comparando dos valores de ξ tenemos

$$\xi_1 < \xi_2 \rightarrow t_{c_2} < t_{c_1} \rightarrow Q_1 < Q_2 \tag{2.20}$$

Para mantener el valor de λ constante a pesar de que a cada valor de ξ le corresponde

un caudal diferente, lo que debemos procurar es que la relación w/Q sea la que se mantenga constante. Vemos que si aumentamos ξ , lo que estamos haciendo realmente es inyectar más caudal. En términos de λ , si queremos que se mantenga constante, este aumento del caudal también conlleva un aumento del peso w para que la relación w/Q permanezca constante.

Si nos fijamos ahora en el ábaco de la figura 2.8, podemos predecir qué signo tomará, una vez que acabe la oscilación, la excentricidad ϵ de acuerdo a los valores de λ y θ_f . Realmente viendo la figura y teniendo en cuenta que $\mu^* = \lambda \cdot \xi$ vemos que este último parámetro tiene poca influencia en el valor final que toma la excentricidad. No obstante, μ^* sí que va a influir claramente en el tiempo de oscilación. Vamos a comprobarlo con un ejemplo.

Si volvemos a mirar la figura 2.8 y tomamos los valores $\theta_f = 1$ y $\lambda = 0,5$, observamos que la excentricidad tomará un valor tal que $\epsilon \in [-0,071, 0]$. En la figura 2.14 se representa la oscilación de la excentricidad a lo largo del tiempo para los citados valores de λ y θ_f para distintos valores de ξ .

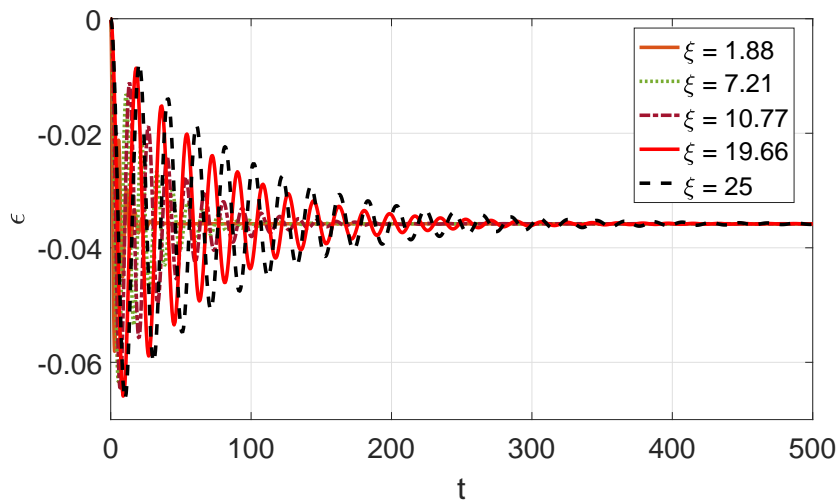


Figura 2.14: Oscilación de la excentricidad ϵ para distintos valores de ξ , con $\lambda = 0,5$, $\theta_f = 1$

Como vemos, $\epsilon \in [-0,071, 0] \approx -0,035$ como se dedujo de la figura 2.8. Efectivamente, el valor de ξ afecta al periodo de oscilación, llegando en todos los casos al mismo valor de la excentricidad. Un aumento de ξ , por consiguiente del caudal, en este caso concreto nos da un mayor tiempo de oscilación antes de llegar al estacionario.

2.4. Análisis matemático de la estabilidad

Para completar este análisis, nos fijamos de nuevo en la ecuación (2.19), que es la que nos da información sobre el movimiento de la excentricidad. Lo que haremos será linealizar esta ecuación para convertirla en una ecuación diferencial de coeficientes constantes y estudiar los signos de estos coeficientes. Como primer paso, haremos un cambio en la variable temporal de tal forma que $\tau = \Omega \hat{\tau}$, siendo Ω un parámetro desconocido por el momento. Si introducimos este cambio en la ecuación (2.19) aplicando la regla de la cadena tenemos

$$\mu^* \Omega^2 \frac{d^2 \epsilon}{d\tau^2} + \Omega \frac{d\epsilon}{d\tau} G(\epsilon, \theta_f) + \lambda - F(\epsilon, \theta_f) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega = \frac{1}{\sqrt{\mu^*}},$$

donde, por recordar la notación de la ecuación (2.19), tenemos

$$\begin{aligned} G(\epsilon, \theta_f) &= \int_0^{\theta_f} \cos \theta \left[\int_{\theta}^{\theta_f} \frac{\sin \hat{\theta}}{\eta^3(\epsilon, \hat{\theta})} d\hat{\theta} \right] d\theta \\ F(\epsilon, \theta_f) &= \int_0^{\theta_f} \cos \theta \left[\int_{\theta}^{\theta_f} \frac{d\hat{\theta}}{\eta^3(\epsilon, \hat{\theta})} \right] d\theta. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Una vez que tenemos el valor del parámetro Ω , podemos llegar a la siguiente ecuación

$$\epsilon'' + \frac{1}{\sqrt{\mu^*}} \epsilon' G(\epsilon, \theta_f) + \lambda - F(\epsilon, \theta_f) = 0. \tag{2.22}$$

La ecuación anterior es una ecuación no lineal de segundo orden. Para continuar con el análisis, linealizaremos cerca de un punto $\bar{\epsilon}$ situado cerca del equilibrio (de tal manera que tengamos $\lambda = F(\bar{\epsilon}, \theta_f)$).

Definimos primero una variable $\tilde{\epsilon} = \epsilon - \bar{\epsilon}$ (su derivadas primera y segunda coinciden con las de ϵ) y desarrollamos las funciones F y G en series de Taylor alrededor del punto de equilibrio $\epsilon = \bar{\epsilon}$.

$$\begin{aligned} G(\epsilon, \theta_f) &= G(\bar{\epsilon}, \theta_f) + G_{\epsilon}(\bar{\epsilon}, \theta_f) \cdot (\epsilon - \bar{\epsilon}) + \dots \\ F(\epsilon, \theta_f) &= \underbrace{F(\bar{\epsilon}, \theta_f)}_{\lambda} + F_{\epsilon}(\bar{\epsilon}, \theta_f) \cdot (\epsilon - \bar{\epsilon}) + \dots \end{aligned}$$

Sustituimos estos desarrollos de Taylor en (2.22)

$$\tilde{\epsilon}'' + \frac{1}{\sqrt{\mu^*}} \tilde{\epsilon}' \underbrace{G(\bar{\epsilon}, \theta_f)}_{A(\theta_f)} - \underbrace{F_{\epsilon}(\bar{\epsilon}, \theta_f)}_{B(\theta_f)} \tilde{\epsilon} = 0. \tag{2.23}$$

Donde renombrar por A y B es simplemente por remarcar que ahora estas funciones son constantes respecto de $\tilde{\epsilon}$. Esta última ecuación ya es lineal. Es ahora una ecuación diferencial

de segundo orden con coeficientes constantes. Por derivación paramétrica podemos obtener la derivada $F_\epsilon(\epsilon, \theta_f)$ partiendo de la expresión (2.21)

$$\begin{aligned} F_\epsilon(\epsilon, \theta_f) &= \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\int_0^{\theta_f} \int_\theta^{\theta_f} \frac{\cos \theta d\hat{\theta}}{(1 + \cos \hat{\theta})^3} d\theta \right) = \int_0^{\theta_f} \int_\theta^{\theta_f} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{\cos \theta}{(1 + \epsilon \cos \hat{\theta})^3} \right) d\hat{\theta} d\theta = \\ &= \int_0^{\theta_f} \int_\theta^{\theta_f} \frac{(-3) \cdot \cos \theta \cos \hat{\theta}}{(1 + \epsilon \cos \hat{\theta})^4} d\hat{\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Para completar el análisis de la estabilidad cerca del equilibrio hay que estudiar el signo de $G(\epsilon, \theta_f)$ y $F_\epsilon(\epsilon, \theta_f)$ de la ecuación (2.23) y los evaluamos en el punto $(\bar{\epsilon}, \theta_f)$.

Si nos fijamos en la expresión inmediatamente anterior, la de F_ϵ , vemos que siempre va a tener un valor negativo. Esto es debido a que los términos de coseno estando integrados entre 0 y θ_f , que está acotado por $\pi/2$, siempre van a ser positivos. Esto unido a que el espesor, evidentemente, va a ser positivo hacen que la integral siempre sea positiva. Al estar multiplicado por -3 tendremos siempre un valor negativo. Si la representamos lo veremos más claramente. En la figura 2.15 comprobamos lo que se ve simplemente viendo la expresión de F_ϵ

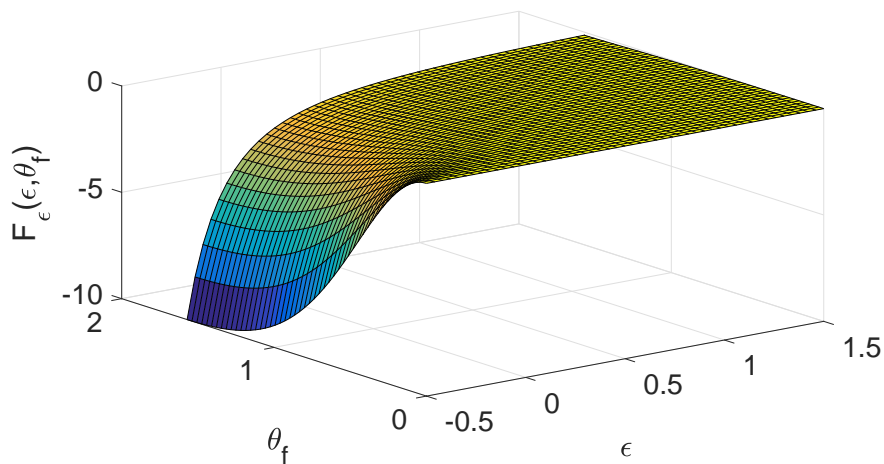


Figura 2.15: $F_\epsilon(\epsilon, \theta_f)$

Para ver más claramente la influencia del ángulo de salida en $F_\epsilon(\epsilon, \theta_f)$ podemos representar la figura anterior en un plano $\theta_f - F_\epsilon$. En la figura 2.16 podemos ver esta representación para distintos valores de la excentricidad.

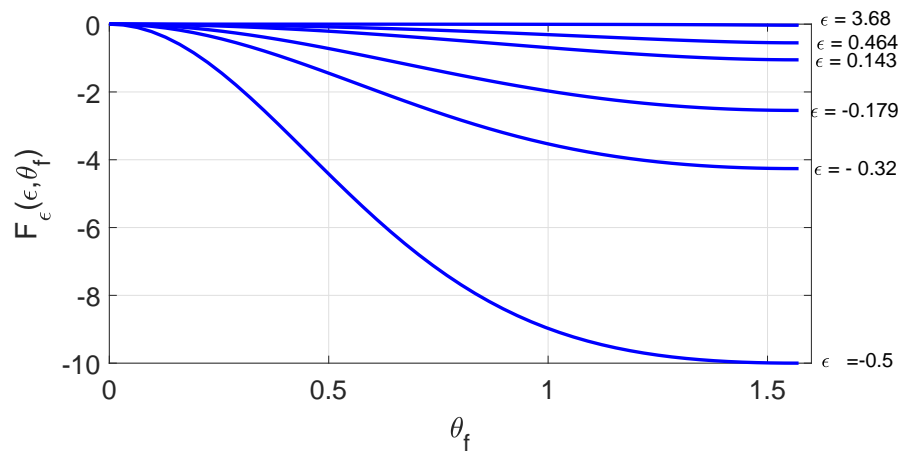


Figura 2.16: $\theta_f - F_\epsilon(\epsilon, \theta_f)$ para distintos valores de ϵ

Si repetimos el proceso ahora con la expresión de $G(\epsilon, \theta_f)$ de (2.21) vemos que en esta ocasión esta expresión tendrá siempre un valor positivo. En la figura 2.17 vemos la representación de $G(\epsilon, \theta_f)$ para un valor concreto de λ (que deriva en un valor de μ^*).

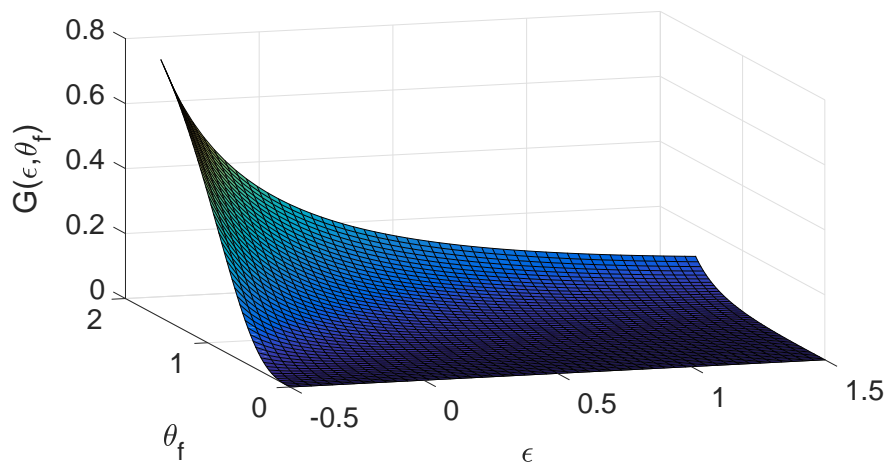


Figura 2.17: $G(\epsilon, \theta_f)$ para $\lambda = 1,5$ y $\mu^* = 4 \cdot \lambda$

Si cambiamos el valor de λ (μ^*) cambian los valores G pero siempre siendo positivos. Una vez que hemos visto los signos de los coeficientes de la ecuación (2.23) vamos a estudiar de qué tipo de equilibrio estamos hablando dependiendo del caso en que nos encontremos.

Podemos convertir esta ecuación lineal en un sistema introduciendo el siguiente cambio

$$\begin{cases} \tilde{\epsilon}' = y \\ \dot{y} = B\tilde{\epsilon} - \frac{A}{\sqrt{\mu^*}}y \end{cases}$$

Con este cambio de variable, podemos reescribir el sistema anterior de manera matricial.

$$\begin{pmatrix} \tilde{\epsilon}' & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ B & -\frac{A}{\sqrt{\mu^*}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\epsilon} \\ y \end{pmatrix}$$

Para ver qué tipo de equilibrio tenemos este caso, debemos calcular los autovalores de la matriz anterior y estudiar su signo. Para ello debemos empezar calculando la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} -\delta & 1 \\ B & -\frac{A}{\sqrt{\mu^*}} - \delta \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \delta^2 + \frac{A}{\sqrt{\mu^*}}\delta - B = 0.$$

Los autovalores serán las soluciones a la ecuación de segundo grado anterior

$$\delta = \frac{-\frac{A}{\sqrt{\mu^*}} \pm \sqrt{\left(\frac{A}{\sqrt{\mu^*}}\right)^2 + 4B}}{2}, \quad (2.24)$$

Esta ecuación nos dará dos autovalores, δ_1 y δ_2 , que dependiendo de su signo y de la relación que guarden entre ellos podremos clasificar los puntos de equilibrio del sistema anterior (ver, por ejemplo, capítulo ocho de Simmons, 1977).

- Si $\left(\frac{A}{\sqrt{\mu^*}}\right)^2 + 4B < 0$ entonces los autovalores δ_1 y δ_2 son complejos conjugados. Además, como su parte real es $\frac{A}{2\sqrt{\mu^*}}$ podremos tener tres posibles casos:
 1. Los autovalores son imaginarios puros si, y sólo si $\left(\frac{A}{\sqrt{\mu^*}}\right) = 0$. En este caso el punto crítico es un centro y tendremos estabilidad.
 2. Los autovalores tienen parte real negativa cuando $\left(\frac{A}{\sqrt{\mu^*}}\right) < 0$. En este caso el punto crítico es un foco y tendremos estabilidad asintótica.
 3. Los autovalores tienen parte real positiva cuando $\left(\frac{A}{\sqrt{\mu^*}}\right) > 0$. En este caso el punto crítico es un foco y tendremos inestabilidad.
- Si $\left(\frac{A}{\sqrt{\mu^*}}\right)^2 + 4B > \left(\frac{A}{\sqrt{\mu^*}}\right)^2$ entonces δ_1 y δ_2 son autovalores reales y de distinto signo. Se presentarán, por tanto, puntos de silla e inestabilidad.
- Si $\left(\frac{A}{\sqrt{\mu^*}}\right)^2 + 4B \geq 0$ entonces δ_1 y δ_2 serán ambos reales y del mismo signo que $\left(\frac{A}{\sqrt{\mu^*}}\right)$. En este caso el tipo de punto de equilibrio dependerá del signo de $\left(\frac{A}{\sqrt{\mu^*}}\right)$. Hay que distinguir dos casos.

$$1. \text{ Si } \left(\frac{A}{\sqrt{\mu^*}} \right) < 0$$

$$\begin{cases} \left(\frac{A}{\sqrt{\mu^*}} \right)^2 + 4B = 0 & \rightarrow \delta_1 = \delta_2; \delta_1, \delta_2 < 0. \text{ Nodo impropio y est. asintótica.} \\ \left(\frac{A}{\sqrt{\mu^*}} \right)^2 + 4B > 0 & \rightarrow \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}, \delta_1 \neq \delta_2; \delta_1, \delta_2 < 0 \text{ Nodo y est. asintótica.} \end{cases}$$

$$2. \text{ Si } \left(\frac{A}{\sqrt{\mu^*}} \right) > 0$$

$$\begin{cases} \left(\frac{A}{\sqrt{\mu^*}} \right)^2 + 4B = 0 & \rightarrow \delta_1 = \delta_2; \delta_1, \delta_2 > 0. \text{ Nodo impropio e inestabilidad.} \\ \left(\frac{A}{\sqrt{\mu^*}} \right)^2 + 4B > 0 & \rightarrow \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}, \delta_1 \neq \delta_2; \delta_1, \delta_2 > 0 \text{ Nodo e inestabilidad.} \end{cases}$$

Vamos a comprobar, para algunos casos, las afirmaciones anteriores. En primer lugar podemos empezar representando $F_\epsilon(\epsilon, \theta_f)$ y $G(\epsilon, \theta_f)$ enfrentados a ϵ para algunos valores fijos del ángulo θ_f . De esta manera podremos situarnos con más facilidad en el plano a la hora de clasificar los equilibrios. En las figuras 2.18 y 2.19 podemos ver estas representaciones que acabamos de exponer.

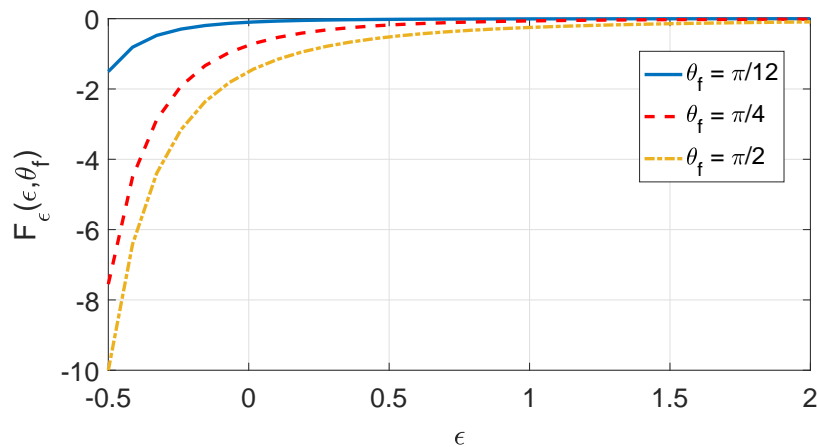


Figura 2.18: $F_\epsilon(\epsilon, \theta_f)$ para distintos valores del ángulo de salida.

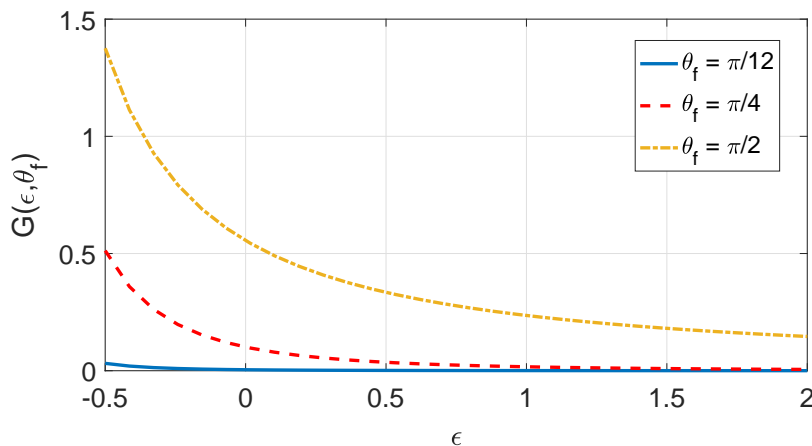


Figura 2.19: $G(\epsilon, \theta_f)$ para distintos valores del ángulo de salida.

Se han cogido tres valores representativos del ángulo de salida. El primero, $\theta_f = \pi/12$, es simplemente por acotar por abajo. También tenemos el caso que hemos fijado como límite, $\theta_f = \pi/2$, y, por último un valor que suponemos en medio, $\theta_f = \pi/4$. de esta manera tendremos acotada una franja en donde estarán todos los valores posibles.

Para comprobar la enumeración de casos anterior, empezamos cogiendo un θ_f y un ϵ al azar. Por ejemplo, tomemos $\epsilon = -0,1552$ y $\theta_f = \pi/4$. El valor negativo de ϵ quiere decir que el centro del anillo cilíndrico estará por debajo del centro de la circunferencia interior de la fuente. Para ver qué tipo de autovalores se obtendrán hacemos el siguiente cálculo para los valores de ϵ y θ_f que acabamos de fijar.

$$\left(\frac{A}{\sqrt{\mu^*}}\right)^2 + 4B = -5,3166,$$

Si nos fijamos en la enumeración de casos anterior vemos que, al salir un valor negativo, los autovalores δ_1 y δ_2 serán complejos conjugados. Además sabemos que su parte real es $\frac{A}{2\sqrt{\mu^*}} = -0,0762 < 0$. Los autovalores tendrán un valor de $\delta_{1,2} = -0,0762 \pm 1,1529i$. Con estos datos, lo que esperamos obtener en el plano de fases será una espiral o foco y que el equilibrio sea asintóticamente estable.

Para representar el plano de fases, trataremos la ecuación (2.23) ya linealizada de manera numérica, análogamente al proceso de la sección anterior. Si a esta ecuación le fijamos el valor $\theta_f = \pi/4$ y representamos el plano de fases $\tilde{\epsilon} - \tilde{\epsilon}'$ se obtendrá la espiral que ya suponíamos. En la figura 2.20 podemos ver el resultado.

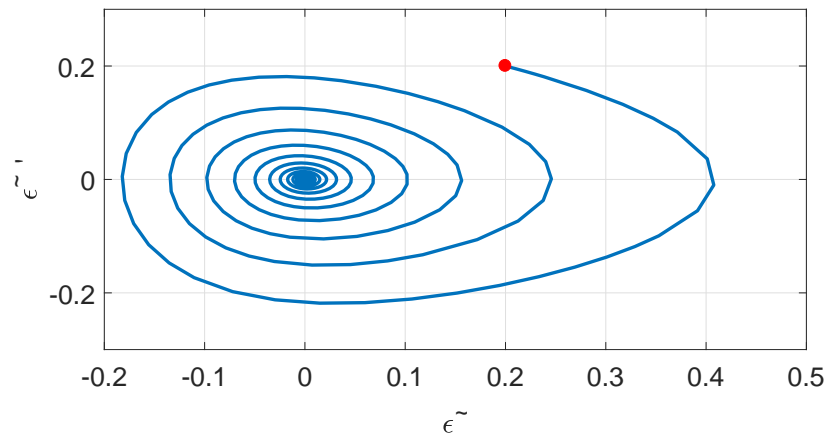


Figura 2.20: Plano de fases para $\epsilon = -0,1552$ y $\theta_f = \pi/4$ arrancando desde el punto marcado.

Finalmente, para ver que, efectivamente, el equilibrio que surge a raíz de estos valores es asintóticamente estable, debemos representar el plano $G - F_\epsilon$ y situar el punto $G(-0,1552, \pi/4), F_\epsilon(-0,1552, \pi/4)$ para ver dónde está en relación a la curva. Además veremos cómo avanza con el tiempo la nueva variable linealizada. En la figura 2.21 se muestra la curva *traza-determinante* que nos mostrará qué tipo de estabilidad nos vamos a encontrar. Sobre ella, pondremos el punto mencionado y veremos dónde se sitúa respecto a la curva $T^2 = 4D$. Por su parte, en la figura 2.22 podemos ver cómo es esta evolución temporal.

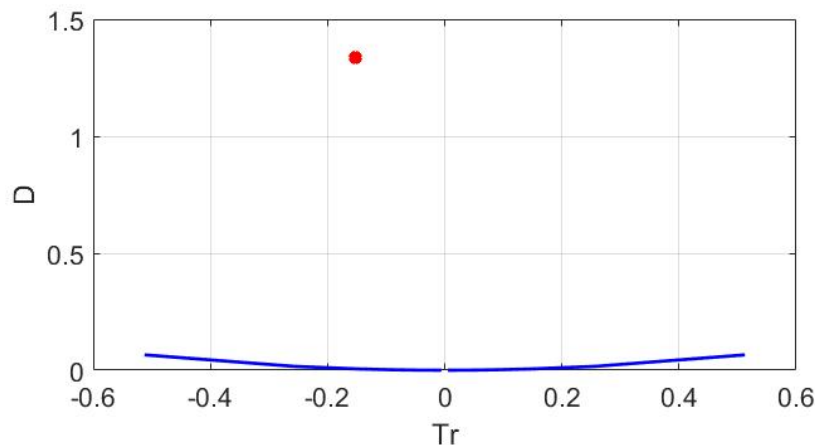


Figura 2.21: Curva $T^2 = 4D$ sobre el plano $Tr - D$.

En la figura anterior tenemos que la traza corresponde con G y el determinante con F_ϵ . Como vemos, el punto marcado $(G(-0,1552, \pi/4), F_\epsilon(-0,1552, \pi/4))$ en la figura anterior está situado en el segundo cuadrante, tal cual se podía presagiar, por lo que, como veníamos diciendo, se trata de un equilibrio asintóticamente estable.

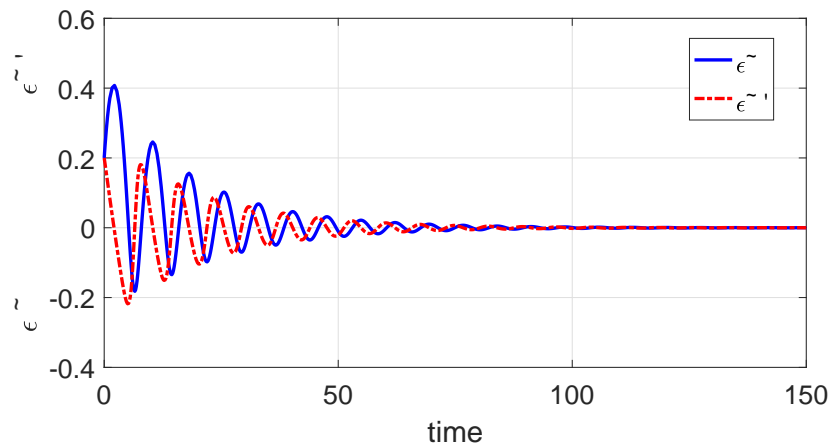


Figura 2.22: Evolución temporal de $\tilde{\epsilon}$ y $\tilde{\epsilon}'$

Probamos ahora un valor bastante más grande para la excentricidad que en el caso anterior manteniendo el valor $\theta_f = \pi/4$. Tomamos, por ejemplo, $\epsilon = 2$. Si repetimos el proceso que acabamos de hacer, tenemos que en este caso los autovalores son $\delta_{1,2} = -0,0028 \pm 0,1190i$. Volvemos a tener autovalores complejos conjugados con la parte real negativa. Es decir, deberíamos tener el mismo tipo de equilibrio que en el caso anterior. En la figura 2.23 volvemos a representar la curva $T^2 = 4D$ y el punto $(G(2, \pi/4), F_\epsilon(2, \pi/4))$

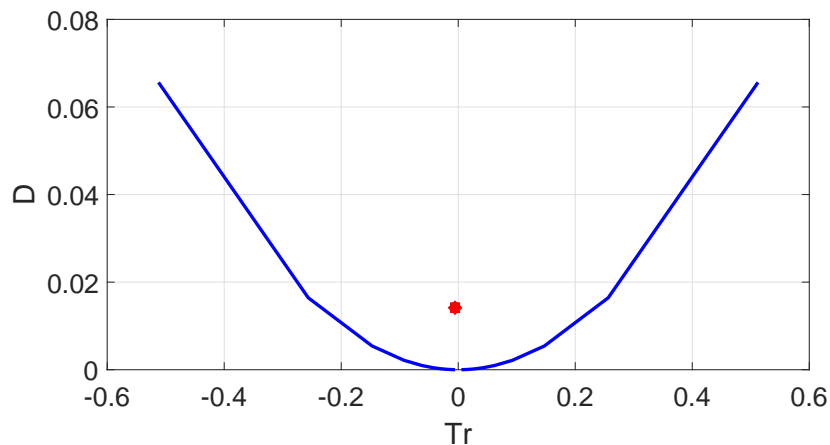


Figura 2.23: Curva $T^2 = 4D$ sobre el plano $Tr - D$.

El punto $(G(2, \pi/4), F_\epsilon(2, \pi/4))$ vemos que, aunque con menos margen que en el caso anterior, sigue estando en el segundo cuadrante. Es por eso que volveremos a tener un equilibrio asintóticamente estable. En la figura 2.24 podemos ver cómo evoluciona la excentricidad en este caso.

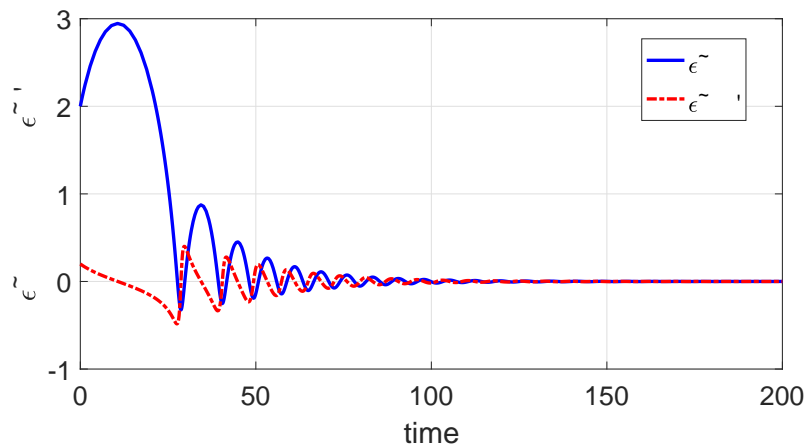


Figura 2.24: Evolución temporal de $\tilde{\epsilon}$ y $\tilde{\epsilon}'$

Un factor determinante en cuanto al tipo de oscilación vamos a ver que es el parámetro λ . Lo ilustramos con un ejemplo: incrementamos el valor del ángulo de salida, vamos a pasar de $\theta_f = \pi/4$ a, por ejemplo $\theta_f = \pi/3$. Sobre la curva $Tr - D$ que ya hemos presentado, vamos a representar, para $\epsilon = 2$ y $\theta_f = \pi/4$, dónde se sitúan los puntos para distintos valores de λ y, además, cómo varía su evolución temporal. En la figura 2.25 podemos ver los distintos puntos para los diferentes λ en la curva $Tr - D$.

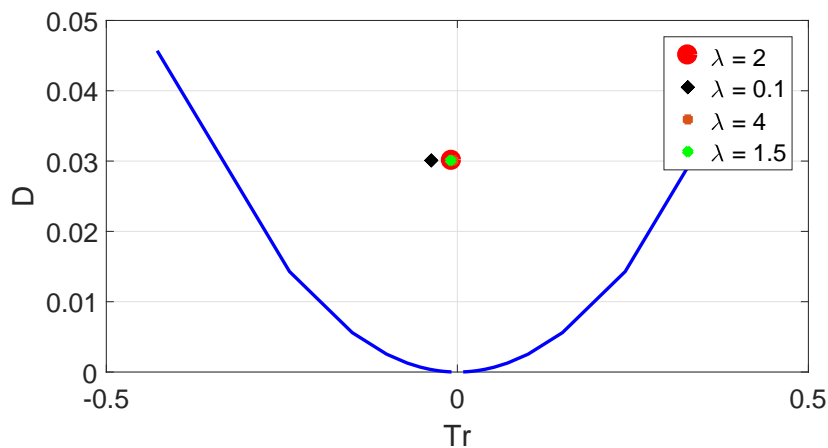


Figura 2.25: Curva $T^2 = 4D$ sobre el plano $Tr - D$. Sobre la curva, para $\epsilon = 2$ y $\theta_f = \pi/3$ diferentes valores del parámetro λ

Podemos comprobar que siempre estamos en el segundo cuadrante y que, llegado un cierto valor de λ , los puntos sobre la curva llegan a solaparse. Es en la evolución temporal donde vemos mejor la influencia de este parámetro. En la figura 2.26 podemos ver estas pequeñas variaciones.

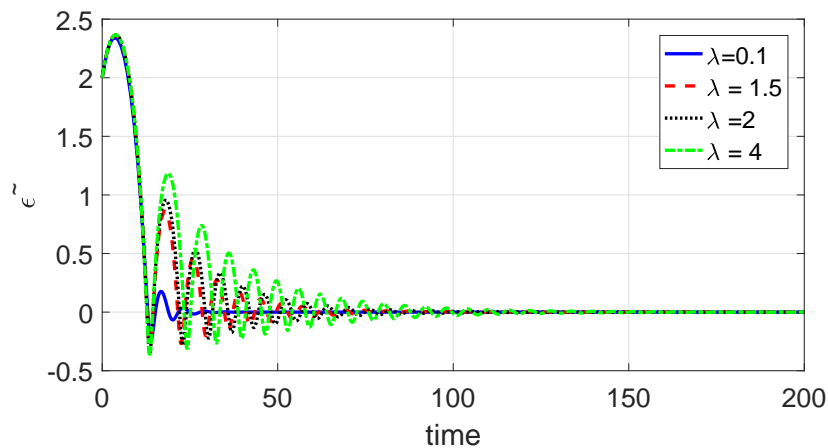


Figura 2.26: Evolución temporal de \tilde{z} , para $\epsilon = 2$ y $\theta_f = \pi/3$ diferentes valores del parámetro λ .

De la figura anterior podemos comprobar cómo el parámetro λ tiene influencia en el periodo de oscilación. Vemos que para valores pequeños de λ apenas hay oscilación. A medida que aumentamos este parámetro, vemos que necesitamos más tiempo para llegar al estado de equilibrio. Si recordamos, λ nos da una relación w/Q (ver, por ejemplo, ecuación (2.15)), es decir, que para un mismo anillo cilíndrico, una variación de λ implicará una variación del caudal. De acuerdo con la figura anterior, podemos decir que un caudal grande (lo que significa un λ pequeño) implica un periodo de oscilación sea más corto que si tuviéramos un caudal más débil.

Además de los valores del ángulo de salida que hemos tomado en las figuras 2.18 y 2.19 hemos repetido el proceso que acabamos de terminar con valores intermedios de θ_f para un rango amplio de valores de ϵ y los autovalores que se obtienen son complejos conjugados de tal manera que, como en los casos anteriores, el equilibrio resultante es asintóticamente estable.

Capítulo 3

Anillo cilíndrico. Caso general.

Nos centramos primeramente en un instante cualquiera en el que el anillo está en una posición general. Nuestra situación ahora, en el plano frontal simplemente, es similar a la de la figura B.1 del esquema de la esfera salvo por la componente φ que no aparece en este esquema geométrico al no considerar el giro. A la hora de medir el espesor por donde circula el caudal además de otras propiedades como la distribución de presión, lo haremos sobre cada una de las ranuras definiendo dos coordenadas, θ_1 y θ_2 , que avanzarán en la dirección positiva del caudal en cada una de las ranuras (derecha e izquierda).

Como comentamos anteriormente, el espesor h de la ranura fuera del estado de equilibrio dependerá de la posición en la que queramos medir y del instante en el que lo hagamos así como de la excentricidad entre los centros. En la siguiente figura se muestra en detalle la geometría alrededor de h y los parámetros que intervienen para su obtención.

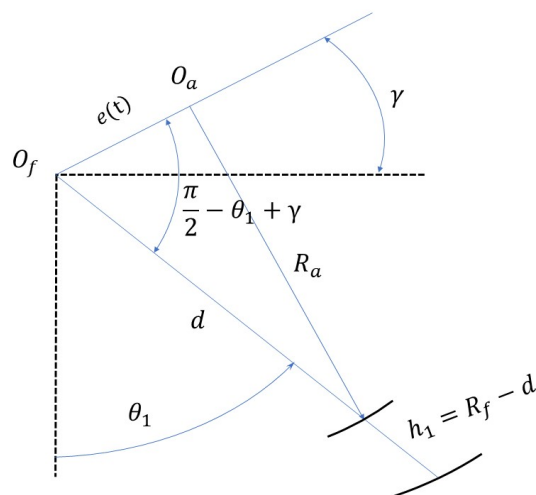


Figura 3.1: Esquema de la geometría del problema en un instante cualquiera. Detalle $h(\theta)$ en la ranura 1. Esquema análogo para la ranura 2.

Para obtener el espesor de la ranura 1, h_1 , empezamos aplicando el teorema del coseno sobre el triángulo $R_a - d - e$.

$$R_a^2 = d^2 + e^2 - \underbrace{2ed \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma - \theta_1\right)}_{\sin(\theta_1 - \gamma)},$$

donde $d^2 = R_f^2 - 2R_f h_1 + h_1^2$ Sustituyendo

$$R_a^2 = R_f^2 - 2R_f h_1 + h_1^2 + e^2 - 2e\sqrt{R_f^2 - 2R_f h_1 + h_1^2} \sin(\theta_1 - \gamma),$$

hay que tener en cuenta las dimensiones del problema, esto es, $R_f - R_a \sim h_1 \sim e \ll R_f$. Considerando además la diferencia de cuadrados $R_a^2 - R_f^2$ la expresión anterior simplificada queda:

$$h_1(\theta) = R_f - R_a - e \sin(\theta_1 - \gamma).$$

como $h_0 = R_f - R_a$

$$h_1(\theta) = h_0 - e \sin(\theta_1 - \gamma). \quad (3.1)$$

Esta última expresión nos da el espesor a lo largo de cada punto de la ranura. Dado que el anillo se va moviendo por la fuente debido al caudal, la excentricidad entre los centros e irá variando con el tiempo, $e = e(t)$ y, por tanto, $\gamma = \gamma(t)$. Entonces esta última expresión dependerá también del tiempo, $h_1 = h_1(\theta_1, t)$

Análogamente al caso de equilibrio, ecuación (2.10), podemos obtener el caudal en la dirección θ_1 teniendo en cuenta que ya no tenemos simetría respecto de la vertical

$$q_{\theta_1} = -\frac{h_1^3(\theta)}{12R_f\mu} \frac{\partial P_1}{\partial \theta_1}. \quad (3.2)$$

Calcular la distribución de presiones $P_1(\theta)$ se antoja complicado también en este caso. Un primer resultado lo podemos obtener aplicando la *ley de conservación de la masa* mediante la ecuación de Reynolds, como ya hicimos en el caso de equilibrio. Cogemos un diferencial de superficie dS de la fuente y nos fijamos en el caudal que lo atraviesa. De esta manera, haciendo el balance en dS , tenemos

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} R_f d\theta_1 = q_{\theta_1}(\theta_1, t) - q_{\theta_1}(\theta_1 + d\theta_1, t) = -\frac{\partial q_{\theta_1}}{\partial \theta_1} d\theta_1,$$

siendo

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} = -\dot{e} \sin(\theta_1 - \gamma) + e\dot{\gamma} \cos(\theta_1 - \gamma),$$

combinando las dos ecuaciones anteriores tenemos

$$\frac{\partial q_{\theta_1}}{\partial \theta_1} = -R_f \frac{\partial h_1}{\partial t} = R_f \left(\dot{e} \sin(\theta_1 - \gamma) - e\dot{\gamma} \cos(\theta_1 - \gamma) \right).$$

Integramos ahora en toda la ranura de la fuente, es decir, en el intervalo $[\theta_i \approx 0, \theta_f]$, con la condición de contorno $q_{\theta_1}(\theta_1 = \theta_i, t) = q_1$. A diferencia de los casos anteriores dentro del equilibrio, no podemos suponer simetría respecto a la vertical, es decir $q_1 \neq Q/2$ lo que complicará las expresiones venideras. Lo que evidentemente vamos a tener es $q_1 + q_2 = Q$. Como ya hemos comentado, suponemos que tenemos una boquilla estrecha, es decir, $0 \approx \theta_i \ll \theta_f$

$$q_{\theta_1}(\theta_1, t) - q_1(t) = R_f \cdot \left[-\dot{e} \cos(\theta_1 - \gamma) - e\dot{\gamma} \sin(\theta_1 - \gamma) \right],$$

por simplicidad al manejar estas expresiones, llamaremos $f(e, \gamma, \dot{e}, \dot{\gamma}, \theta_1) = \dot{e} \cos(\theta_1 - \gamma) + e\dot{\gamma} \sin(\theta_1 - \gamma)$. En la ranura 2, de manera análoga, tendremos una función $g = g(e, \gamma, \dot{e}, \dot{\gamma}, \theta_2)$. La expresión que acabamos de obtener se puede combinar con la expresión ya conocida (3.2) para llegar a la ecuación hidrodinámica para la distribución de presión a lo largo de la ranura 1.

$$\begin{aligned} q_{\theta_1}(\theta_1, t) &= -\frac{h_1^3(\theta)}{12R_f\mu} \frac{\partial P_1}{\partial \theta_1} = q_1(t) - R_f \cdot f \rightarrow \\ \rightarrow \frac{\partial P}{\partial \theta_1} &= -\frac{12\mu R_f}{h_1^3} q_{\theta_1} = -\frac{12\mu R_f q_1(t)}{h_1^3} + \frac{12\mu R_f^2}{h_1^3} f, \quad 0 \leq \theta_1 \leq \theta_f \end{aligned} \quad (3.3)$$

de la misma manera, para la ranura 2 tenemos

$$\frac{\partial P}{\partial \theta_2} = -\frac{12\mu R_f}{h_2^3} q_{\theta_2} = -\frac{12\mu R_f q_2(t)}{h_2^3} + \frac{12\mu R_f^2}{h_2^3} g, \quad 0 \leq \theta_2 \leq \theta_f \quad (3.4)$$

las condiciones de contorno adecuadas para obtener la distribución de presiones en ambas ranuras son ya conocidas: $P(\theta_1 = \theta_2 = \theta_i \sim 0) = P_0$ y $P(\theta_1 = \theta_2 = \theta_f) = P_a$. La expresión para $h_2(\theta)$ es igual a la obtenida en (3.1) pero para la coordenada θ_2 .

Esta distribución de presión a lo largo de la fuente no es la única fuerza que interviene en el problema. Como ya sabemos, es el caudal que circula por las ranuras es quien soporta el peso de nuestro cilindro, evitando que caiga. Es el balance entre estas fuerzas del caudal sobre la superficie y el propio peso del anillo quien evita que el anillo vuelque. En la figura 3.2 se muestra un diagrama de las fuerzas que intervienen en el plano frontal del problema.

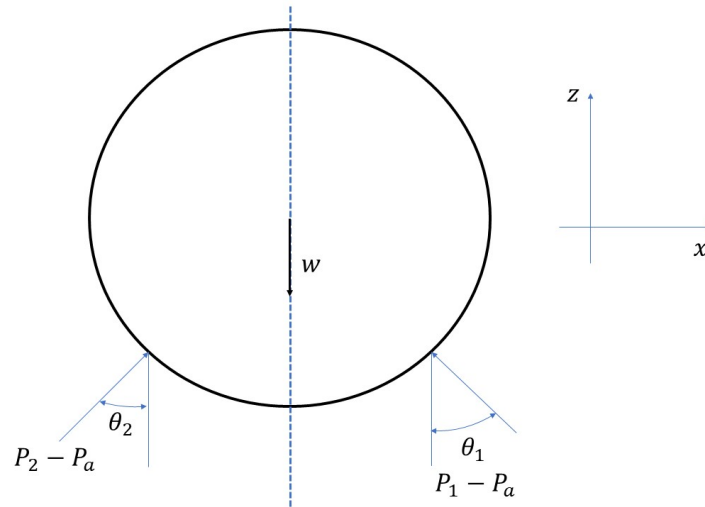


Figura 3.2: Diagrama de fuerzas en el anillo cilíndrico. Plano frontal.

De esta manera, las fuerzas tanto en el eje vertical como en el horizontal son las siguientes

$$\begin{aligned}
 F_z &= \int_0^{\theta_f} (P_1 - P_a) \cos \theta_1 d\theta_1 + \int_0^{\theta_f} (P_2 - P_a) \cos \theta_2 d\theta_2 \\
 F_x &= - \int_0^{\theta_f} (P_1 - P_a) \sin \theta_1 d\theta_1 + \int_0^{\theta_f} (P_2 - P_a) \sin \theta_2 d\theta_2
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

Una de las principales diferencias con respecto al caso de la sección anterior, es que ahora la excentricidad e no va a estar oscilando únicamente a lo largo del eje vertical z si no que también puede tener componente en el eje x . En la figura 3.3 podemos ver un esquema detalle de la geometría de la excentricidad.

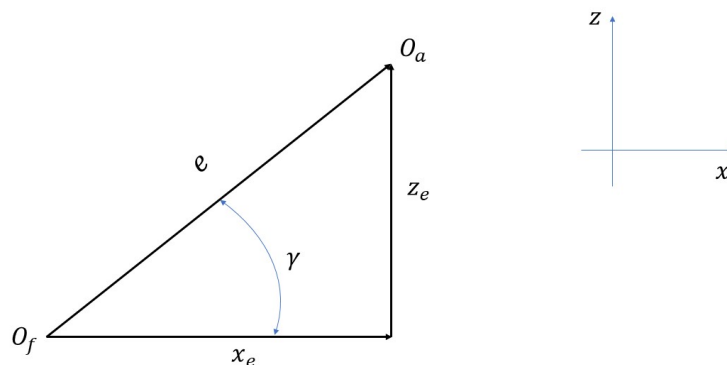


Figura 3.3: Esquema detallado de las componentes horizontal y vertical del centro del anillo.

De esta manera tendremos ahora que distinguir $z_e = e \cdot \sin \gamma$ y $x_e = e \cdot \cos \gamma$, quedando, por tanto, la excentricidad escrita de forma vectorial como

$$\vec{e} = x_e \vec{i} + z_e \vec{j} = (e \cdot \cos \gamma) \vec{i} + (e \cdot \sin \gamma) \vec{j}. \quad (3.6)$$

Una vez introducidas estas nuevas variables para este caso, podemos hacer el balance de fuerzas

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_e &= F_x \\ m\ddot{z}_e &= F_z - w, \end{aligned} \quad (3.7)$$

siendo m la masa del anillo y w su peso. Evidentemente, al no tener ahora una restricción en el movimiento, las expresiones anteriores no son sencillas desde el punto de vista algebraico ya que las distribuciones de presión que se obtienen integrando (3.3) y (3.4) tienen la tara de que el espesor es de la forma $h_i = h_i(\theta) \forall i \in \{1, 2\}$ haciendo muy difícil su resolución.

Llegados a este punto podemos adimensionalizar la distribución de presión que acabamos de obtener. Como primer paso, introducimos las siguientes variables adimensionales que ya han sido usadas para el caso de equilibrio

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{P - P_a}{(P_0 - P_a)_{eq}} \\ \eta &= h/h_0 \\ \tau &= t/t_c \\ \epsilon &= e/h_0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde la diferencia de presiones $(P_0 - P_a)_{eq}$ ha sido calculada cuando estudiamos el caso de equilibrio en la ecuación (2.5). Como ya hemos comentado anteriormente, con h_0 nos referimos al caso en el que el espesor de la ranura sea constante, pudiendo ser únicamente la diferencia de radios $R_f - R_a$. Por t_c denotamos a un cierto tiempo característico que calcularemos más adelante. De esta manera podemos adimensionalizar la ecuación para la distribución de presiones en la ranura 1.

$$\begin{aligned} \frac{6\mu QR_f}{h_0^3} \frac{\partial \phi}{\partial \theta_1} &= -\frac{12\mu QR_f}{h_0^3} \hat{q}_1(t) \frac{1}{\eta_1^3} + \\ &+ \frac{12\mu R_f^2}{h_0^3 \eta_1^3} \left[\frac{h_0}{t_c} \frac{d\epsilon}{d\tau} \cos(\theta_1 - \gamma) + \epsilon \frac{h_0}{t_c} \frac{d\gamma}{d\tau} \sin(\theta_1 - \gamma) \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Con \hat{q}_1 nos referimos al caudal que circula por la ranura 1 adimensionalizado con el caudal Q que emana de la fuente. Por su parte, el tiempo característico t_c se obtiene de tal manera

que (3.9) sea, como buscamos, adimensional. Para ello igualamos los términos dimensionales a ambos lados de la ecuación.

$$\frac{6\mu QR_f}{h_0^3} = \frac{12\mu R_f^2 h_0}{t_c h_0^3} \rightarrow t_c \sim \frac{2h_0 R_f}{Q}$$

Obteniéndose el mismo que en (2.17). Ahora sí podemos adimensionalizar finalmente la ecuación hidrodinámica en ambas ranuras

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \theta_1} &= -\frac{\hat{q}_1(\tau)}{\eta_1^3} + \frac{1}{\eta_1^3} \hat{f} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \theta_2} &= -\frac{\hat{q}_2(\tau)}{\eta_2^3} + \frac{1}{\eta_2^3} \hat{g}, \end{aligned}$$

siendo \hat{f} y \hat{g} son las funciones f y g que aparecían en (3.3) y (3.4) ya adimensionalizadas. Además los caudales adimensionales cumplen la siguiente condición:

$$q_1 + q_2 = Q \quad \rightarrow \quad \hat{q}_1(\tau) + \hat{q}_2(\tau) = 1. \quad (3.10)$$

Si integramos ahora la distribución de presión ϕ que obtuvimos en (3.9) a lo largo de toda la ranura 1 tenemos

$$\phi_1(\theta_1) = -\hat{q}_1(\tau) \int_{\theta_1}^{\theta_f} \frac{d\theta_1}{\eta_1^3(\theta)} + \epsilon \dot{\gamma} \int_{\theta_1}^{\theta_f} \frac{\sin(\theta_1 - \gamma)}{\eta_1^3(\theta)} d\theta_1 + \dot{\epsilon} \int_{\theta_1}^{\theta_f} \frac{\cos(\theta_1 - \gamma)}{\eta_1^3(\theta)} d\theta_1. \quad (3.11)$$

Lo que va a marcar la diferencia entre la distribución de cada una de las ramas es precisamente el término donde está contenido \hat{q}_i . Si particularizamos ahora en la salida de la boquilla, $\theta_1 = \theta_i \approx 0$ podremos obtener dicho término

$$\phi_1(0) = -\hat{q}_1(\tau) \underbrace{\int_{\theta_i}^{\theta_f} \frac{d\theta_1}{\eta_1^3(\theta)}}_A + \epsilon \dot{\gamma} \underbrace{\int_{\theta_i}^{\theta_f} \frac{\sin(\theta_1 - \gamma)}{\eta_1^3(\theta)} d\theta_1}_B + \dot{\epsilon} \underbrace{\int_{\theta_i}^{\theta_f} \frac{\cos(\theta_1 - \gamma)}{\eta_1^3(\theta)} d\theta_1}_C. \quad (3.12)$$

Donde se han renombrado los tres términos de la expresión anterior dado lo aparatoso de las integrales. Por tanto, el caudal adimensional que circula por la ranura 1 tendrá la siguiente expresión

$$\hat{q}_1(\tau; \dot{\epsilon}, \dot{\gamma}) = \frac{\epsilon \dot{\gamma} B + \dot{\epsilon} C - \phi_1(0)}{A} = f(\dot{\epsilon}, \dot{\gamma}; \phi(0)), \quad (3.13)$$

Para la ranura 2, el proceso para obtener \hat{q}_2 sería totalmente análogo al que acabamos de ver. Cuando estemos en la boquilla y midamos la distribución de presión, al estar suponiendo boquilla estrecha, esto es cuando $\theta_{1,2} = \theta_i \sim 0$, tendremos $\phi_1(0) \simeq \phi_2(0)$. Utilizando la

condición $\hat{q}_1 + \hat{q}_2 = 1$, podemos obtener la distribución de presión $\phi(0)$ para cualquiera de las dos ranuras. Una vez que tengamos este valor, mediante la expresión (3.13), ya podremos obtener el caudal adimensional de la primera ranura, \hat{q}_1 que será el último paso para poder calcular la distribución de presiones a lo largo de la ranura 1, cuando introduzcamos \hat{q}_1 en (3.12).

Adimensionalizamos ahora el balance de fuerzas de la ecuación (3.5). Si hemos seguido los pasos explicados anteriormente para ϕ_1 y ϕ_2 , las incógnitas que tendremos ahora serán ϵ y γ , además de parámetros como θ_f y alguno más que veremos más adelante, lo que cerraría el problema. Como hemos visto anteriormente, las ecuaciones anteriores no son fáciles de tratar desde el punto de vista analítico ya que la expresión del espesor adimensional, η , depende de la posición, θ . Recuperando las expresiones de (3.7), nos centramos primeramente en el eje vertical.

$$m\ddot{z} = \int_0^{\theta_f} (P_1 - P_a) \cos \theta_1 d\theta_1 + \int_0^{\theta_f} (P_2 - P_a) \cos \theta_2 d\theta_2 - w.$$

Vamos a repetir el proceso que seguimos en la sección anterior a partir de la expresión (2.18). Empezamos dividiendo por el peso w e introduciendo las variables adimensionales ϕ_1 y ϕ_2

$$\begin{aligned} \frac{1}{g}\ddot{z}_e &= \frac{1}{w} \left[\int_0^{\theta_f} (P_1 - P_a) \cos \theta_1 d\theta_1 + \int_0^{\theta_f} (P_2 - P_a) \cos \theta_2 d\theta_2 \right] - 1 \\ \frac{1}{g}\ddot{z}_e &= \frac{6\mu QR_f^2}{wh_0^3} \left[\int_0^{\theta_f} \phi_1 \cos \theta_1 d\theta_1 + \int_0^{\theta_f} \phi_2 \cos \theta_2 d\theta_2 \right] - 1. \end{aligned}$$

El siguiente paso sería adimensionalizar \ddot{z}_e . Hagamos una pausa ahora para definir \hat{z}_e y \hat{x}_e , que son las componentes del centro del anillo x_e y z_e adimensionalizadas con la diferencia de radios h_0 .

$$\begin{aligned} \hat{z}_e &= \frac{z_e}{h_0} = \epsilon \sin \gamma \\ \hat{x}_e &= \frac{x_e}{h_0} = \epsilon \cos \gamma \end{aligned} \tag{3.14}$$

Una vez definidas las dos nuevas variables adimensionales, retomamos

$$\frac{h_0}{t_c^2 g} \frac{\partial^2 \hat{z}_e}{\partial \tau^2} = \frac{6\mu QR_f^2}{wh_0^3} \left[\int_0^{\theta_f} \phi_1 \cos \theta_1 d\theta_1 + \int_0^{\theta_f} \phi_2 \cos \theta_2 d\theta_2 \right] - 1.$$

De nuevo, hacemos 1 el coeficiente que multiplica a la integral

$$\begin{aligned} \frac{wh_0^3}{6\mu QR_f^2} \frac{h_0}{t_c^2 g} \frac{\partial^2 \hat{z}_e}{\partial \tau^2} &= \int_0^{\theta_f} \phi_1 \cos \theta_1 d\theta_1 + \int_0^{\theta_f} \phi_2 \cos \theta_2 d\theta_2 - \frac{wh_0^3}{6\mu QR_f^2} \\ 2\lambda \frac{h_0}{t_c^2 g} \frac{\partial^2 \hat{z}_e}{\partial \tau^2} &= \int_0^{\theta_f} \phi_1 \cos \theta_1 d\theta_1 + \int_0^{\theta_f} \phi_2 \cos \theta_2 d\theta_2 - 2\lambda, \end{aligned}$$

donde $\lambda = \frac{wh_0^3}{12\mu QR_f^2}$. Ahora aparece de nuevo un parámetro que es el mismo que ya apareció cuando estudiamos este mismo caso restringido al movimiento vertical.

$$\xi = \frac{h_0}{gt_c^2},$$

recordamos que cuando trabajamos con el anillo cilíndrico lo hacemos por unidad de longitud en el sentido perpendicular. Con este último parámetro ya podemos obtener una expresión análoga a (2.19)

$$2\mu^* \ddot{z}_e = \int_0^{\theta_f} \phi_1 \cos \theta_1 d\theta_1 + \int_0^{\theta_f} \phi_2 \cos \theta_2 d\theta_2 - 2\lambda,$$

donde de nuevo volvemos a tener $\mu^* = \lambda \cdot \xi$. Si le imponemos a la ecuación anterior que la excentricidad únicamente puede moverse en el eje vertical, tenemos la expresión (2.19). Repetimos ahora este proceso sobre el eje horizontal

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_e &= - \int_0^{\theta_f} (P_1 - P_a) \sin \theta_1 d\theta_1 + \int_0^{\theta_f} (P_2 - P_a) \sin \theta_2 d\theta_2 \\ m\ddot{x}_e &= \frac{6\mu QR_f^2}{h_0^3} \left[\int_0^{\theta_f} \phi_1 \sin \theta_1 d\theta_1 + \int_0^{\theta_f} \phi_2 \sin \theta_2 d\theta_2 \right], \end{aligned}$$

de nuevo, dividimos por el peso w

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \ddot{x}_e &= \frac{6w\mu QR_f^2}{h_0^3} \left[\int_0^{\theta_f} \phi_1 \sin \theta_1 d\theta_1 + \int_0^{\theta_f} \phi_2 \sin \theta_2 d\theta_2 \right] \rightarrow \\ &\rightarrow 2\mu^* \ddot{x}_e = \int_0^{\theta_f} \phi_1 \sin \theta_1 d\theta_1 + \int_0^{\theta_f} \phi_2 \sin \theta_2 d\theta_2. \end{aligned}$$

Donde se han realizado los mismos pasos que en el caso vertical. Para cerrar este problema tenemos que volver a la expresión vectorial de la excentricidad, e , adimensionalizar y derivar dos veces respecto del tiempo (desarrollo en ecuaciones (B.14) y (B.15) del anexo B). Una vez que tengamos estas derivadas, obteniendo \ddot{x}_e y \ddot{z}_e , podremos plantear un sistema de ecuaciones con los resultados que acabamos de obtener en los balances de fuerzas. De esta manera tendríamos, para el eje de abscisa

$$\ddot{\epsilon} \cos \gamma - 2\dot{\epsilon}\dot{\gamma} \sin \gamma - \epsilon\ddot{\gamma} \sin \gamma - \epsilon(\dot{\gamma})^2 \cos \gamma = \frac{1}{2\mu^*} \left[\int_0^{\theta_f} \phi_1 \sin \theta_1 d\theta_1 + \int_0^{\theta_f} \phi_2 \sin \theta_2 d\theta_2 \right] \quad (3.15)$$

y, para el eje de ordenada

$$\ddot{\epsilon} \sin \gamma + 2\dot{\epsilon}\dot{\gamma} \cos \gamma + \epsilon\ddot{\gamma} \cos \gamma - \epsilon(\dot{\gamma})^2 \sin \gamma = \frac{1}{2\mu^*} \left[\int_0^{\theta_f} \phi_1 \cos \theta_1 d\theta_1 + \int_0^{\theta_f} \phi_2 \cos \theta_2 d\theta_2 - 2\lambda \right]. \quad (3.16)$$

Las dos ecuaciones anteriores forman un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden para $\epsilon(t)$ y $\gamma(t)$. Recordemos que la forma en que depende la distribución de presión ϕ de estos dos parámetros es una complejidad adicional a la no linealidad del sistema. Una vez resuelto, tendremos información de todos los parámetros a lo largo del tiempo y de la posición y podremos empezar a presentar resultados.

Podemos manipular las dos ecuaciones anteriores de tal manera que tengamos una ecuación para $\ddot{\epsilon}$ y otra para $\ddot{\gamma}$. Si multiplicamos (3.15) por $\cos \gamma$ y (3.16) por $\sin \gamma$ y sumamos, tenemos

$$\begin{aligned} \ddot{\epsilon} - \epsilon(\dot{\gamma})^2 &= \frac{\cos \gamma}{2\mu^*} \left[\int_0^{\theta_f} \phi_1 \sin \theta_1 d\theta_1 + \int_0^{\theta_f} \phi_2 \sin \theta_2 d\theta_2 \right] + \\ &+ \frac{\sin \gamma}{2\mu^*} \left[\int_0^{\theta_f} \phi_1 \cos \theta_1 d\theta_1 + \int_0^{\theta_f} \phi_2 \cos \theta_2 d\theta_2 - 2\lambda \right], \end{aligned} \quad (3.17)$$

que es una expresión para $\ddot{\epsilon}$. Multiplicamos ahora (3.15) por $-\sin \gamma$ y (3.16) por $\cos \gamma$ y volvemos a sumar:

$$\begin{aligned} \epsilon\ddot{\gamma} + 2\dot{\epsilon}\dot{\gamma} &= \frac{\cos \gamma}{2\mu^*} \left[\int_0^{\theta_f} \phi_1 \cos \theta_1 d\theta_1 + \int_0^{\theta_f} \phi_2 \cos \theta_2 d\theta_2 - 2\lambda \right] - \\ &- \frac{\sin \gamma}{2\mu^*} \left[\int_0^{\theta_f} \phi_1 \sin \theta_1 d\theta_1 + \int_0^{\theta_f} \phi_2 \sin \theta_2 d\theta_2 \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

De esta manera, con (3.17) y (3.18), volvemos a tener un sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden para $\epsilon(t)$ y $\gamma(t)$ reestructurado que por separado podemos obtener la excentricidad ϵ como función del ángulo γ y viceversa.

Capítulo 4

Conclusiones

A lo largo de este trabajo se han presentado varios modelos matemáticos, tanto para el caso de un anillo cilíndrico como el de una esfera, en los que hemos querido ver un poco más en profundidad la importancia de la variación del caudal Q y de la relación peso-caudal w/Q teniendo en cuenta si estamos dentro de un estado de equilibrio, esto es, el centro del perfil circular de la fuente y del objeto en cuestión están alineados sobre el mismo eje vertical, o fuera de él, donde los centros están desacoplados.

Se ha entrado mucho más en detalle en las soluciones que están dentro del estado de equilibrio ya que los modelos son más abordables tanto desde el punto de vista analítico como numérico. En particular, se ha profundizado un poco más en el caso del anillo cilíndrico dado que las ecuaciones son un poco más sencillas debido a la geometría. Dentro del estudio del caso de equilibrio, también hemos hecho una distinción en el caso particular en el que los centros de la geometría del problema son coincidentes, es decir, tenemos excentricidad nula ($e = 0$ o, si estamos trabajando con variables adimensionales, $\epsilon = 0$).

Independientemente de la geometría que se estuviera tratando, siempre se han adimensionalizado las ecuaciones del movimiento y de la distribución de presión destacando la aparición de un parámetro adimensional, λ , que caracteriza la relación w/Q ,

$$\lambda = \frac{wh_0^3}{12\mu QR_f^2},$$

siendo este parámetro válido tanto para geometría del anillo como de la esfera. Una de las conclusiones más rápidas de extraer de este trabajo es precisamente comparar el parámetro λ del anillo y de la esfera cuando la excentricidad entre los centros es nula, como se muestra en la figura A.4. En dicha figura podemos observar que λ es siempre mayor para el anillo cilíndrico, independientemente del valor que tome el ángulo de salida, θ_f . Si asumimos que en ambos casos se trata de la misma fuente, mismo R_f , y que por la ranura circula el mismo

fluido (mismo μ) un λ mayor implica que la relación w/Q debe ser mayor en el caso del anillo cilíndrico:

$$\lambda_{an} > \lambda_{esf} \rightarrow \left(\frac{w}{Q}\right)_{an} > \left(\frac{w}{Q}\right)_{esf}.$$

Si queremos tener dos casos idénticos inyectando el mismo caudal, querrá decir que el anillo deberá tener un peso mayor que el de la esfera si queremos alcanzar un estado de equilibrio tal que la excentricidad sea nula.

Si entramos en el caso donde, aún estando dentro de una solución de equilibrio, la excentricidad no es nula, tenemos que $\lambda = \lambda(\epsilon, \theta_f)$. La comparación de esta dependencia con ϵ y θ_f entre ambas geometrías se resume en las figuras A.5 y A.6. Se puede comprobar en ellas que el valor de $\lambda(\epsilon, \theta_f)$ es siempre mayor para el caso del anillo cilíndrico. Haciendo el mismo razonamiento que para el caso donde $\epsilon = 0$ podemos concluir que, por lo general, el peso del anillo cilíndrico debe ser mayor que el de la esfera si queremos que nuestro sistema se encuentre dentro del estado de equilibrio.

También se ha estudiado a lo largo del trabajo la evolución temporal de la excentricidad ϵ dentro del estado de equilibrio para el caso del anillo cilíndrico. Para ello se incluyó el término transitorio en las ecuaciones, donde aparece el nuevo parámetro adimensional μ^* , producto de λ y ξ ,

$$\mu^* = \frac{wh_0^3}{12\mu QR_f^2} \frac{1}{g} \frac{h_0}{t_c^2} = \lambda \cdot \xi,$$

siendo ξ una medida de la relación entre la inercia del cilindro y las fuerzas gravitatorias, con el tiempo característico t_c dado por $R_f^2 h_0 / Q$. Se representó la evolución temporal de la excentricidad ϵ y su derivada $\dot{\epsilon}$ para distintos valores de λ, ξ y θ_f y en todas ellas se obtuvo un movimiento amortiguado que, por otra parte, era lo que se esperaba.

Una de las conclusiones que se pueden extraer si nos fijamos en las figuras 2.13 y 2.14 es que si aumentamos ξ , es decir, si aumentamos el caudal Q para los mismos valores de los parámetros geométricos (y, por supuesto g), se hace más prolongada la oscilación del movimiento del cilindro antes de llegar al estado estacionario de equilibrio.

Tras haber obtenido el modelo final (recogido en la ecuación (2.19)) dentro de la hipótesis de movimiento vertical, se ha realizado un estudio de la estabilidad de esta solución. Para ello, se ha linealizado la ecuación (2.19) para poder convertirla en un sistema matricial y estudiar sus autovalores. En el desarrollo teórico vemos que, debido al signo que toman las integrales, siempre íbamos a tener un determinado tipo de equilibrio. Además, se barrió un amplio espectro de casos posibles (y alguno sin sentido físico) y los autovalores obtenidos fueron tales que el equilibrio era siempre, efectivamente, asintóticamente estable.

Para concluir este trabajo vamos a sustituir el anillo cilíndrico por la esfera. Al igual que en el grueso del trabajo, distinguiremos, como ya hemos comentado, a situación donde no estamos aplicando ninguna restricción al movimiento y también estudiaremos la hipótesis de movimiento vertical. Cuando estemos bajo esta restricción, se realizarán algunas comparaciones entre el parámetro λ y las superficies $\lambda - \epsilon - \theta_f$ del anillo cilíndrico y de la esfera. El caso sin restricción, que veremos en el anexo B, será análogo al capítulo correspondiente donde tratemos el caso del anillo cilíndrico. Sin embargo, veremos en detalle la complejidad adicional que supone el cambio de geometría.

Aún habiendo hecho un estudio amplio de diferentes casos para distintas geometrías, quedan líneas abiertas para posibles trabajos futuros. En primer lugar, cuando estudiamos el caso sin restricción, no se realizó un análisis detallado del movimiento, como sí se hiciera en el caso donde teníamos la restricción. Además, un estudio muy interesante sería incorporar al caudal una dependencia con el tiempo, $Q = Q(t)$, y estudiar qué tipo de equilibrios y oscilaciones tendríamos.

Anexos

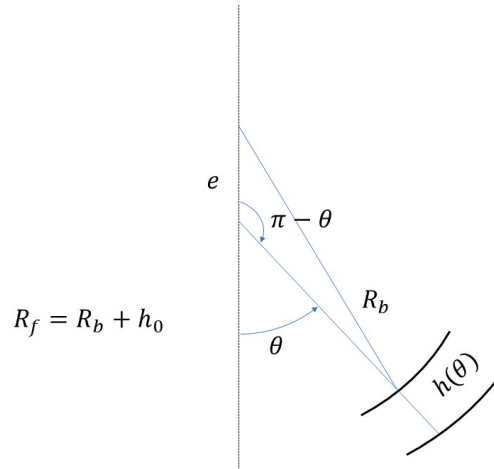


Figura A.2: Esquema ampliado en el estado de equilibrio. Detalle $h_0(\theta)$.

Si aplicamos el teorema del coseno al esquema de la figura anterior obtenemos el espesor de la ranura en función de la posición y de la excentricidad:

$$\begin{aligned} R_b^2 &= e^2 + (R_b + h_0 - h_0(\theta))^2 - 2e(R_b + h_0 - h_0(\theta)) \cos(\pi - \theta) \\ h(\theta) &= h_0 + e \cos \theta, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Vemos que la expresión es idéntica al caso del anillo ya que desde el punto de vista de la geometría en el plano los dos problemas son idénticos.

En este problema además vamos a suponer $\theta_i \ll \theta_f$. Por tanto, tendremos una boquilla estrecha. El caudal que emana de ella tendrá un valor conocido, Q . Este caudal, en coordenadas esféricas, viene determinado por la siguiente expresión:

$$Q = q_\theta 2\pi R_f \sin \theta, \quad (\text{A.2})$$

Donde q_θ es el caudal en la dirección θ cuya expresión ya ha aparecido en varias ocasiones. El perfil de velocidades a lo largo de esta dirección, en adelante v_θ , sigue un perfil de Poiseuille. Este perfil se obtiene mediante la siguiente expresión con sus correspondientes condiciones de contorno.

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{R_f} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial y^2} &= 0 \\ v_\theta(y=0) &= 0 \\ v_\theta(y=h_0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

integrando dos veces obtenemos

$$v_\theta = -\frac{1}{2\mu R_f} \frac{\partial P}{\partial \theta} y(h_0 - y) \quad (\text{A.3})$$

Para obtener el caudal que circula en la dirección de θ integramos la velocidad que acabamos de calcular a lo largo del eje y .

$$q_\theta = \int_0^{h_0} v_\theta dy = -\frac{h^3(\theta)}{12R_f\mu} \frac{\partial P}{\partial \theta}. \quad (\text{A.4})$$

Sustituimos este valor en (A.2) y despejamos el término de la presión.

$$Q = -\frac{h^3(\theta)\pi \sin \theta}{6\mu} \frac{\partial P}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = -\frac{6Q\mu}{\pi h^3(\theta) \sin \theta}. \quad (\text{A.5})$$

Esta variación de presión la podemos sustituir en (A.3) para obtener el perfil definitivo de velocidades en el eje perpendicular a la fuente

$$v_\theta = \frac{3Q}{\pi R_b h^3(\theta) \sin \theta} y(h_0 - y). \quad (\text{A.6})$$

Para hallar la distribución de presiones tenemos que integrar (A.5) con las condiciones de contorno adecuadas: El caudal sale de la boquilla a una cierta presión $P(\theta = 0) = P_0$ (Como hemos supuesto boquilla estrecha podemos poner $P(\theta = \theta_i) = P_0$) y abandona la fuente a presión atmosférica.

$$P(\theta) - P_0 = -\frac{6Q\mu}{\pi} \int_{\theta_i}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin \theta h^3(\theta)}. \quad (\text{A.7})$$

Como además sabemos que $P(\theta = \theta_f) = P_a$. Con estas condiciones de contorno podemos obtener esta P_0 :

$$P_0 = P_a + \frac{6Q\mu}{\pi h_0^3} \int_{\theta_f}^{\theta_i} \frac{d\theta}{\sin \theta (1 + \epsilon \cos \theta)^3}, \quad (\text{A.8})$$

donde los límites de integración se han cambiado para mantener el valor positivo que tiene que tener esta presión. Con esta $P_0 = P_0(P_a)$ podemos obtener la diferencia de presiones $P(\theta) - P_a$. Este valor va a tener mucha importancia, como vamos a ver a continuación, cuando calculemos la fuerza que el fluido está ejerciendo sobre la esfera. En la figura A.3 podemos ver, de manera esquemática, las fuerzas que intervienen en el estado de equilibrio.

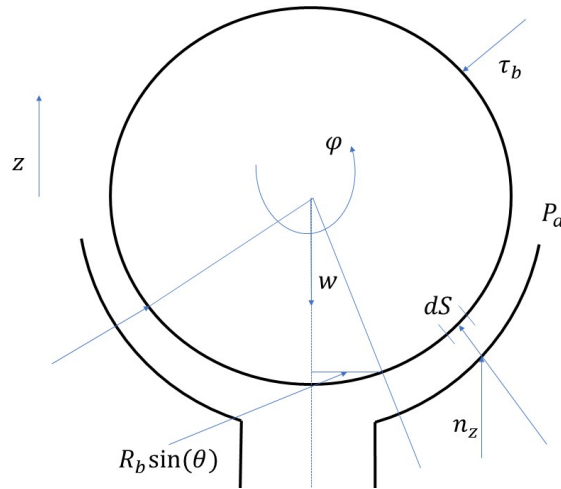


Figura A.3: Diagrama de fuerzas en el estado de equilibrio.

Podemos obtener el peso, conocido porque sabemos de antemano las dimensiones de nuestra esfera, haciendo un balance de fuerzas. Si integramos a lo largo de toda la esfera tenemos

$$w = \int \int_S (P(\theta) - P_a) \cos \theta dS,$$

donde $\cos \theta$ aparece porque proyectamos la presión sobre el eje vertical y el diferencial de superficie dS será $R_b \sin \theta d\varphi \cdot R_b d\theta$. La expresión anterior pasa a ser:

$$w = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (P(\theta) - P_a) R_b^2 \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi$$

Como suponemos que la esfera no está girando, la componente φ permanecerá constante. Entonces

$$w = 2\pi R_b^2 \int_0^{\theta_i} (P_0 - P_a) \sin \theta \cos \theta d\theta + 2\pi R_b^2 \int_{\theta_i}^{\theta_f} (P - P_a) \sin \theta \cos \theta d\theta.$$

Las relaciones entre presiones se obtienen de las expresiones anteriores. Como hemos comentado, estamos suponiendo boquilla estrecha, $\theta_i \sim 0$ por lo que el primer término podemos despreciarlo en primera aproximación. Esta expresión anterior queda entonces

$$w \approx 2\pi R_b^2 \int_0^{\theta_f} (P - P_a) \sin \theta \cos \theta d\theta \rightarrow$$

$$\rightarrow w = 12\mu Q R_b^2 \int_0^{\theta_f} \sin \theta \cos \theta \left[\int_\theta^{\theta_f} \frac{d\hat{\theta}}{\sin \hat{\theta} \cdot (h_0 + e \cos \hat{\theta})^3} \right] d\theta.$$

Como ya hemos hecho en varias ocasiones a lo largo del proyecto, podemos adimensionalizar la expresión anterior. Para ello empleamos las ya conocidas variables η y ϵ . Entonces, se obtiene

$$\lambda = \int_0^{\theta_f} \sin \theta \cos \theta \left[\int_{\theta}^{\theta_f} \frac{d\hat{\theta}}{\sin \hat{\theta} \cdot \eta^3(\hat{\theta}, \epsilon)} \right] d\theta. \quad (\text{A.9})$$

Siendo $\lambda = \frac{wh_0^3}{12\mu QR_f^3}$, expresión idéntica a la que se obtenía en el caso del anillo. Al igual que en ese caso, tenemos $\lambda = F(\theta_f, \epsilon$ siendo ahora su expresión (A.9) ligeramente más complicada.

También podemos elegir un caudal Q de tal manera que, para un peso w dado, tengamos $\epsilon = 0$, es decir, no haya excentricidad en los centros. Este sería el caso más simple que tendríamos puesto que el espesor h_0 sería constante e igual a la diferencia de radios, $h_0 = R_f - R_b$. Al trabajar ahora en coordenadas esféricas, este caso particular ya no va a ser tan sencillo como el $\lambda = 1 - \cos \theta_f$ que teníamos para el caso del anillo sino que será una expresión difícil de manejar pero asumible desde el punto de vista numérico.

Una comparación entre ambos casos, anillo y esfera, relativamente rápida de obtener y muy visual es precisamente el caso donde $h_0 = cte$. Podemos representar $\lambda = \lambda(\theta_f)$ para ambas situaciones. Superponemos a la figura 2.3 el caso de la esfera. En la figura A.4 podemos ver este resultado.

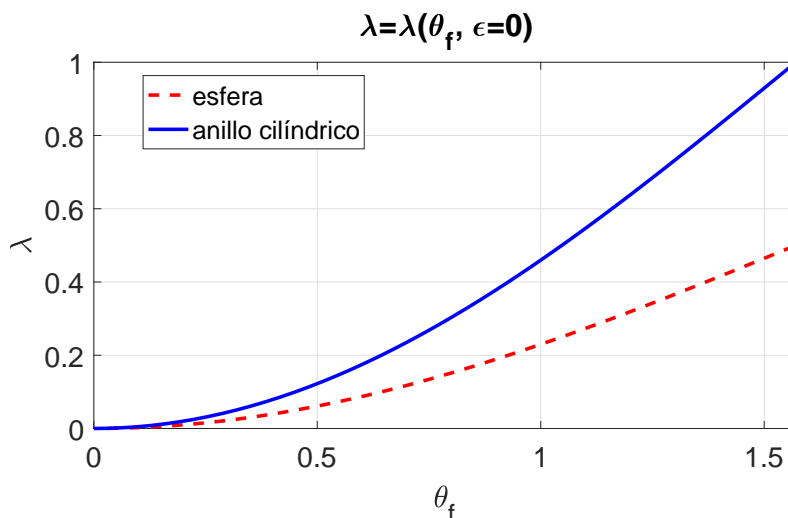


Figura A.4: $\lambda = \lambda(\theta_f)$ para anillo y para esfera.

Ya hemos comprobado que la expresión para el parámetro λ es idéntica tanto para el anillo como para la esfera. Si nos fijamos en la figura anterior, vemos que para un mismo

valor del ángulo de salida, el valor de λ será mayor para el caso del anillo cilíndrico. Si tenemos las mismas condiciones geométricas en ambos casos y estamos inyectando el mismo caudal Q , quiere decir que necesitamos que el peso del anillo sea mayor que el de la esfera si queremos tener excentricidad nula ($\lambda_1 > \lambda_2 \rightarrow w_1 > w_2$).

Si establecemos ahora una comparación entre las superficies $\lambda - \epsilon - \theta_f$ para los dos casos, veremos que las superficies son prácticamente iguales en cuanto a la forma. Superponemos a la superficie de la figura 2.7 la misma superficie para el caso de la esfera.

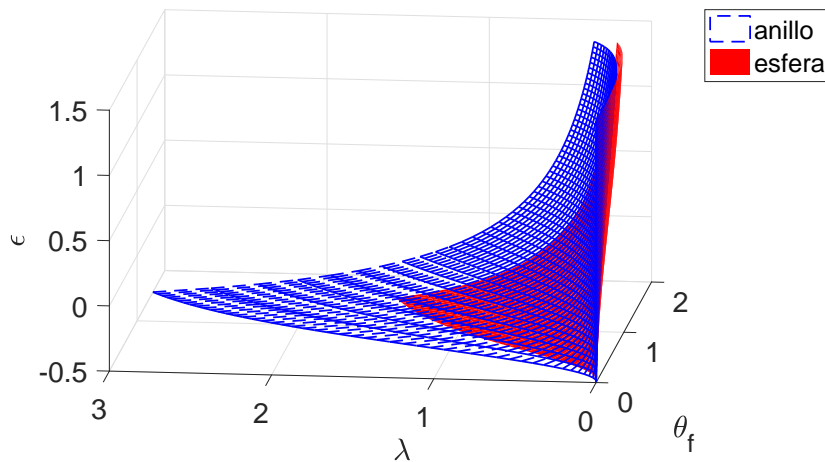
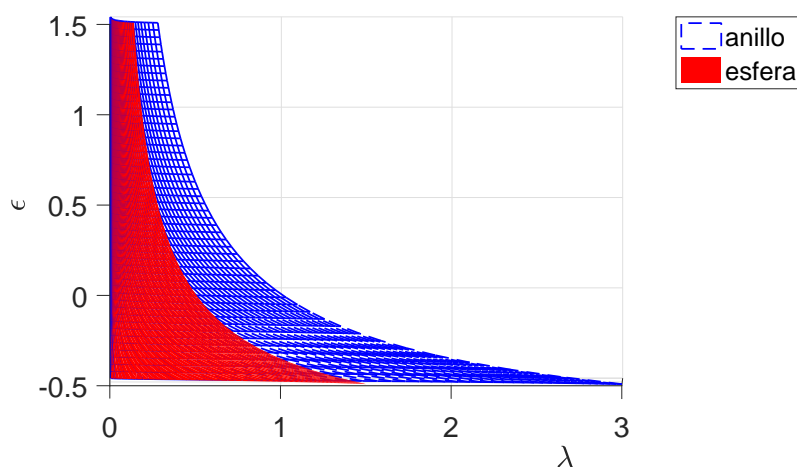
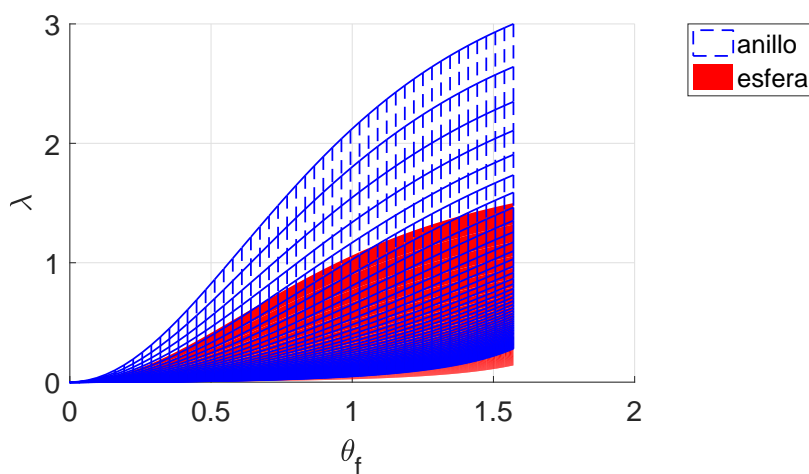


Figura A.5: $\lambda = \lambda(\epsilon, \theta_f)$ para anillo cilíndrico y esfera.

Las principales diferencias se encuentran en el plano $\theta_f - \lambda$ siendo los valores de la esfera siempre más bajos que los del anillo, tal y como se intuía para el caso de excentricidad nula de la figura A.4. Esta diferencia en cuanto a valores también la vemos en el plano $\lambda - \epsilon$. En la figura A.6 podemos ver ambas comparaciones superpuestas.



(a) Distribución de presión adimensional para un ángulo de salida $\theta_f = \pi/2$



(b) Distribución de presión adimensional para un ángulo de salida $\theta_f = \pi/4$.

Figura A.6: Comparación anillo-esfera para los planos $\lambda - \epsilon$ y $\theta_f - \lambda$.

Los valores de λ comprobamos que son siempre mayores para el caso del anillo cilíndrico. Como ya hemos comentado, esto quiere decir que, para el mismo caudal Q y la misma geometría, el anillo deberá tener un peso w mayor que el de la esfera si queremos mantener el estado de equilibrio con los centros alineados sobre la misma vertical.

Anexos B

Esfera. Caso general.

La esfera, como ya ocurriera con el caso del anillo cilíndrico, se va moviendo por la fuente debido al caudal tal como se ve en la figura B.1 de la introducción del trabajo. Mientras se esté moviendo sobre la fuente, los centros de la esfera y la fuente no tienen por qué estar alineados sobre el mismo eje vertical sino que su línea formará un ángulo ψ con él. Evidentemente, en algún momento del movimiento, los centros se encontrarán en el mismo eje vertical ($\vec{e} = z_e \vec{j}$) y estaríamos dentro de casos ya comentados. El espesor por el que circula el caudal volverá a depender entonces de la posición $0 \leq \theta \leq \theta_f$ y de la excentricidad e .

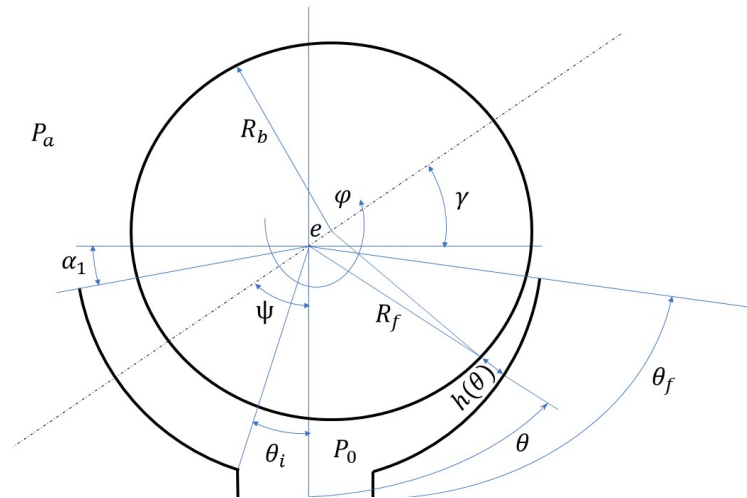


Figura B.1: Esquema de la geometría del problema para el caso de la esfera. Plano frontal.

Podemos obtener la expresión del espesor $h = h(\theta, e)$ aplicando de nuevo el teorema del coseno. En la figura B.2 se puede ver un esquema de la geometría del problema en un instante fuera del equilibrio. De nuevo, por h_0 nos referimos a la diferencia de radios, $h_0 = R_f - R_b$.

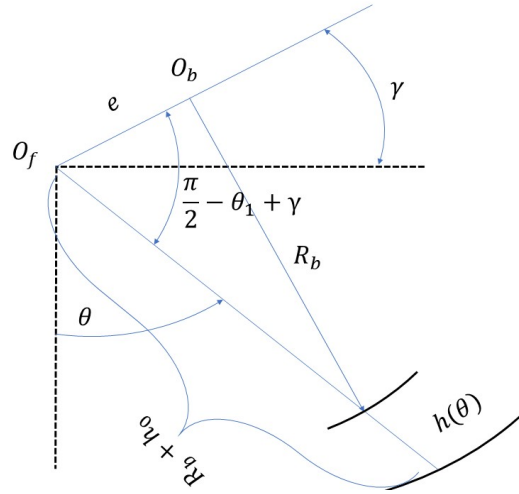


Figura B.2: Esquema de la geometría esfera-fuente en un instante al azar. Detalle $h(\theta)$.

Aplicamos entonces la fórmula del coseno

$$R_b^2 = e^2 + (R_b + h_0 - h)^2 - 2e(R_b + h_0 - h) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma - \theta_1\right).$$

En la geometría de la esfera también hacemos las suposiciones que hicimos para el caso del anillo cilíndrico. Esto es, suponemos que el espesor por el que circula el caudal es estrecho, $h(\theta) \sim h_0 \sim e \ll R_b$. La expresión anterior queda, por tanto:

$$R_b^2 \approx R_b^2 + 2R_b h_0 - 2R_b h - 2eR_b \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) \cos\theta - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) \sin\theta \right],$$

pasando a

$$2R_b h = 2R_b h_0 + 2eR_b \in (\gamma - \theta) \rightarrow h = h_0 - e \sin(\theta - \gamma). \quad (\text{B.1})$$

Dado que la esfera se está moviendo por la fuente, el ángulo γ , que marca la posición de la línea $O_f - O_b$ con la horizontal, variará con el tiempo, siendo $\gamma = \gamma(t)$.

Para obtener la distribución de presiones en la fuente, partimos de la **ecuación de Reynolds**:

$$h_\theta h_\varphi \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} (h_\phi q_\theta) = 0,$$

donde, como estamos ahora en coordenadas esféricas, $h_\theta \simeq R_b$ y $h_\phi \simeq R_b \sin\theta$. Además, el término q_θ es ya conocido del caso de equilibrio apareciendo (A.4). Por tanto, la ecuación de Reynolds queda

$$\frac{1}{12\mu} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta h^3(\theta) \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) - R_b^2 \sin \theta \frac{\partial h}{\partial t} = 0. \quad (\text{B.2})$$

Las condiciones de contorno para la presión son ya conocidas e iguales a las del caso de equilibrio, $P(\theta = 0) = P_0$ y $P(\theta = \theta_f) = P_a$. Esta P_0 está relacionada, como hemos visto, con el caudal Q de la fuente en el estado estacionario de equilibrio.

Para adimensionalizar la ecuación anterior, introducimos de nuevo las variables ϕ , η , ϵ y τ idénticas a las del caso del anillo adaptadas al caso de la esfera, es decir, ϕ adimensionalizada con la diferencia $(P_0 - P_a)_{eq}$ para la esfera, como se ve en la ecuación (A.8). Si introducimos estos cambios en (B.2) tenemos

$$\frac{Q}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \eta^3(\theta) \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) - \frac{R_b^2 h_o}{t_c} \sin \theta \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = 0. \quad (\text{B.3})$$

Para obtener el tiempo característico igualamos las dimensiones de los dos términos de la ecuación para finalmente tener una ecuación adimensional

$$\frac{R_b^2 h_o}{t_c} = Q \rightarrow t_c = \frac{R_b^2 h_o}{Q}, \quad (\text{B.4})$$

quedando (B.3) entonces como

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \eta^3(\theta) \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) - \sin \theta \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = 0, \quad (\text{B.5})$$

Para tener una distribución de presión adimensional, primero hay conseguir la expresión de η y su derivada con respecto al tiempo. Esta evolución temporal del espesor η adimensional es algo compleja de obtener. Como primer paso escribimos el término de $\eta = \eta(\epsilon, \theta)$ que es la expresión adimensional del espesor por el que circula el fluido, que obtuvimos en (B.1), siendo $\epsilon = e/h_0$ la expresión adimensional de la excentricidad

$$\eta(\epsilon, \theta) = 1 - \epsilon \sin(\theta - \gamma).$$

Con el apoyo de las variables adimensionales ya mencionadas, podemos abordar sin problemas la adimensionalización de esta evolución temporal

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = -\frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \sin(\theta - \gamma) + \epsilon \frac{\partial \gamma}{\partial \tau} \cos(\theta - \gamma).$$

Esta última expresión la podemos introducir ahora en (B.5) para obtener la distribución de presiones adimensional en toda la fuente

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \eta^3(\theta) \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 2\pi \sin \theta \left(-\frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \sin(\theta - \gamma) + \epsilon \frac{\partial \gamma}{\partial \tau} \cos(\theta - \gamma) \right),$$

donde $\phi = \phi(\theta, \epsilon, \gamma)$, es decir, la distribución de presión varía según la posición de la fuente en la que nos encontremos y de acuerdo a la posición relativa que tengan la esfera y la propia fuente. Una pequeña ventaja con respecto a este mismo caso para el anillo cilíndrico, es que, como hemos visto, ahora podemos estudiar el movimiento del fluido por la fuente de una sola vez, sin necesidad de estudiar dos ranuras por separado. Sin embargo, veremos a continuación que las expresiones para la esfera son más complejas que las del anillo. Siguiendo con el problema, podemos desarrollar la expresión anterior

$$\sin \theta \eta^3(\theta) \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\pi \dot{\epsilon}}{2} \left(\sin(\gamma - 2\theta) + 2\theta \cos \gamma \right) + \frac{\pi \epsilon \dot{\gamma}}{2} \left(2\theta \sin \gamma - \cos(\gamma - 2\theta) \right) + C_1.$$

Despejamos para obtener la expresión para la distribución de presión a lo largo de la coordenada θ , $\phi(\theta)$

$$\begin{aligned} \phi(\epsilon, \theta) = & -\frac{\pi \dot{\epsilon}}{2} \int_{\theta}^{\theta_f} \frac{\sin(\gamma - 2\theta) + 2\theta \cos \gamma}{\sin \theta \eta^3(\theta)} d\theta + \frac{\pi \epsilon \dot{\gamma}}{2} \int_{\theta}^{\theta_f} \frac{2\theta \sin \gamma - \cos(\gamma - 2\theta)}{\sin \theta \eta^3(\theta)} d\theta + \\ & + C_1 \int_{\theta}^{\theta_f} \frac{1}{\sin \theta \eta^3(\theta)} d\theta. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Para calcular la constante de integración C_1 podemos evaluar, por ejemplo, la distribución de presión a la salida de la boquilla ($\phi(0)$), es decir, cuando $\theta = \theta_i \sim 0$,

$$\begin{aligned} \phi(0) = & -\frac{\pi \dot{\epsilon}}{2} \underbrace{\int_{\theta_i}^{\theta_f} \frac{\sin(\gamma - 2\theta) + 2\theta \cos \gamma}{\sin \theta \eta^3(\theta)} d\theta}_A + \frac{\pi \epsilon \dot{\gamma}}{2} \underbrace{\int_{\theta_i}^{\theta_f} \frac{2\theta \sin \gamma - \cos(\gamma - 2\theta)}{\sin \theta \eta^3(\theta)} d\theta}_B + \\ & + C_1 \underbrace{\int_{\theta_i}^{\theta_f} \frac{1}{\sin \theta \eta^3(\theta)} d\theta}_C. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Una vez que tengamos la constante de integración C_1 , tendremos una expresión para $\phi(\theta, \epsilon)$. La expresión para el espesor por donde circula el caudal es la misma, fuera del estado de equilibrio, para el cilindro que para la esfera, como hemos visto. Por lo tanto, al tener $\eta^3(\theta, \epsilon) = (1 - \epsilon \sin(\theta - \gamma))^3$ en el denominador volvemos a tener una complejidad añadida a la hora de resolver las integrales anteriores. Es por esto por lo que en ese caso simplemente vamos a dejar indicada su resolución. De manera similar al caso del cilindro, primero tendremos que obtener C_1 de acuerdo a la condición de contorno. En este caso la constante C_1 tiene un valor de

$$C_1 = \frac{2\phi(0) + \pi\epsilon A - \pi\epsilon\dot{\gamma}B}{2C}.$$

Es este valor el que introducimos en (B.6) para obtener la distribución de presiones, $\phi(\theta)$. Una vez que tenemos la distribución de presiones podremos hacer balance de fuerzas tanto horizontal como vertical. En la figura B.3 podemos ver, en un detalle de la esfera, la proyección de la presión sobre los ejes (x, z) .

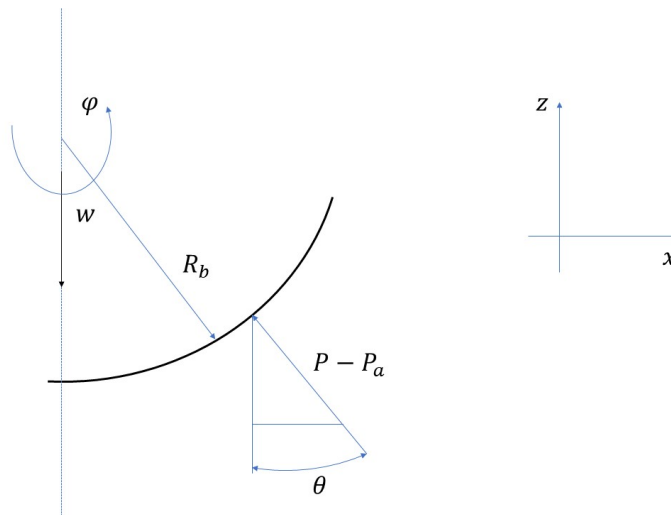


Figura B.3: Fuerzas que actúan sobre la esfera. Plano detalle.

Calculamos ahora las expresiones para las fuerzas horizontal y vertical para después hacer, como ya se hizo para el caso del anillo, el balance de fuerzas. La ecuación para la fuerza que actúa sobre la esfera en el eje vertical z tiene la siguiente expresión:

$$F_z = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (P(\theta) - P_a) R_b^2 \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Como ya se ha comentado en la introducción, vamos a suponer que la coordenada φ no interviene dado que no tenemos en cuenta el giro. Aclarado esto último y utilizando la distribución de presión adimensional de (B.6), adimensionalizamos la expresión anterior:

$$\begin{aligned} F_z &= \frac{6\mu Q R_f^2}{\pi h_0^3} 2\pi \int_0^\pi \phi \cos \theta \sin \theta d\theta \\ \hat{F}_z &= \frac{F_z}{\frac{6\mu Q R_f^2}{\pi h_0^3} 2\pi} = \int_0^\pi \phi \cos \theta \sin \theta d\theta. \end{aligned} \tag{B.8}$$

Se recuerda que para este caso tenemos $\phi = \phi(\epsilon, \theta_f)$. En el eje horizontal x la fuerza F_x tendrá una expresión similar

$$F_x = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (P(\theta) - P_a) R_f^2 \sin^2 \theta d\theta d\varphi$$

de la misma manera que teníamos en el eje vertical adimensionalizamos

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{6\mu Q R_f^2}{\pi h_0^3} 2\pi \int_0^\pi \phi \sin^2 \theta d\theta \\ \hat{F}_x &= \frac{F_x}{\frac{6\mu Q R_f^2}{\pi h_0^3} 2\pi} = \int_0^\pi \phi \sin^2 \theta d\theta. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Una vez que tenemos las expresiones para las fuerzas que intervienen tanto en el eje horizontal como el vertical, podemos, como en el capítulo 3, hacer un balance de fuerzas

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_e &= F_x \\ m\ddot{z}_e &= F_z - w \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

donde \ddot{x}_e y \ddot{z}_e serían las componentes x y z de la aceleración del centro de la esfera. Al igual que ocurría en el capítulo 3, x_e y z_e son las componentes horizontal y vertical del centro de la esfera, que se expresan en términos de e y γ :

$$\begin{aligned} x_e &= e \cos \gamma, \\ z_e &= e \sin \gamma. \end{aligned}$$

Volvemos a (B.10) y desarrollamos la expresión para el eje vertical

$$\begin{aligned} m\ddot{z}_e &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (P(\theta) - P_a) R_b^2 \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi - w \rightarrow \\ &\rightarrow m\ddot{z}_e = \frac{6\mu Q R_f^2}{\pi h_0^3} 2\pi \int_0^\pi \phi \cos \theta \sin \theta d\theta - w, \end{aligned}$$

donde únicamente hemos sustituido la distribución de presión por su versión adimensional. El siguiente paso será idéntico al del caso del anillo cilíndrico: dividimos por el peso w toda la expresión anterior, para posteriormente hacer 1 el coeficiente de la integral

$$\lambda \frac{1}{g} \ddot{z}_e = \int_0^\pi \phi \cos \theta \sin \theta d\theta - \lambda,$$

donde ha aparecido un parámetro, λ , que es el mismo que se ha venido usando a lo largo de todo el trabajo y relaciona el peso y el caudal. Como último paso para obtener un balance de fuerzas verticales adimensional, tendremos que adimensionalizar z_e (y posteriormente se hará lo propio con x_e). Las variables adimensionales \hat{z}_e y \hat{x}_e serán las mismas que en (3.14). Aclarado esto, continuamos:

$$\lambda \frac{1}{g} \frac{h_0}{t_c^2} \ddot{z}_e = \int_0^\pi \phi \cos \theta \sin \theta d\theta - \lambda. \quad (\text{B.11})$$

El tiempo característico t_c no puede ser el mismo que en el caso del anillo, dado que en ese caso se estaba trabajando por unidad transversal de longitud. Por tanto, para este caso el tiempo característico debe ser

$$t_c = \sqrt{\frac{h_0}{g}}$$

Introducimos este último cambio en (B.11) para tener ya la expresión final del balance adimensional de fuerzas verticales

$$\lambda \ddot{z}_e = \int_0^\pi \phi \cos \theta \sin \theta d\theta - \lambda \rightarrow \ddot{z}_e = \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi \phi \cos \theta \sin \theta d\theta - 1. \quad (\text{B.12})$$

Hacemos ahora el mismo proceso para el balance de fuerzas horizontal. Partimos de la primera ecuación de la expresión (B.10):

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_e &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (P(\theta) - P_a) R_b^2 \sin^2 \theta d\theta d\varphi \rightarrow \\ &\rightarrow m\ddot{x}_e = \frac{6\mu Q R_f^2}{\pi h_0^3} 2\pi \int_0^\pi \phi \sin^2 \theta d\theta, \end{aligned}$$

volvemos a dividir ambos términos de la ecuación por el peso w y aparecerá de nuevo el parámetro λ , de sobra conocido

$$\frac{1}{g} \ddot{x}_e = \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi \phi \sin^2 \theta d\theta \rightarrow \frac{1}{g} \frac{e}{t_c^2} \ddot{x}_e = \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi \phi \sin^2 \theta d\theta,$$

Por supuesto, el tiempo característico t_c es el mismo que para el caso del balance vertical. Por tanto, la expresión final para este balance de fuerzas será

$$\ddot{x}_e = \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi \phi \sin^2 \theta d\theta. \quad (\text{B.13})$$

Para poder calcular \ddot{x}_e y \ddot{z}_e , debemos volver a la expresión de la excentricidad e , escribirla de manera vectorial (ver la figura 3.3 correspondiente al caso del anillo cilíndrico) y derivar dos veces con respecto del tiempo. De esta manera, tendremos planteado nuestro sistema:

$$\vec{e} = x_e \vec{i} + z_e \vec{j} = (e \cos \gamma) \vec{i} + (e \sin \gamma) \vec{j}.$$

Antes de seguir avanzando, adimensionalizamos la expresión anterior. Para ello, rescatamos la variable ϵ utilizada a lo largo del trabajo. Posteriormente, ahora sí, derivaremos con respecto del tiempo

$$\begin{aligned}\vec{\epsilon} &= \frac{\vec{e}}{h_0} = (\epsilon \cos \gamma)\vec{i} + (\epsilon \sin \gamma)\vec{j} \\ \dot{\vec{\epsilon}} &= (\dot{\epsilon} \cos \gamma - \epsilon \dot{\gamma} \sin \gamma)\vec{i} + (\dot{\epsilon} \sin \gamma + \epsilon \dot{\gamma} \cos \gamma)\vec{j}\end{aligned}\quad (\text{B.14})$$

Volviendo a derivar respecto del tiempo mediante la regla de la cadena, queda una expresión un poco más compleja

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{\epsilon}} = (\ddot{x}_e, \ddot{z}_e) &= (\ddot{\epsilon} \cos \gamma - 2\dot{\epsilon}\dot{\gamma} \sin \gamma - \epsilon\ddot{\gamma} \sin \gamma - \epsilon(\dot{\gamma})^2 \cos \gamma)\vec{i} + \\ &+ (\ddot{\epsilon} \sin \gamma + 2\dot{\epsilon}\dot{\gamma} \cos \gamma + \epsilon\ddot{\gamma} \cos \gamma - \epsilon(\dot{\gamma})^2 \sin \gamma)\vec{j}.\end{aligned}\quad (\text{B.15})$$

Como hemos indicado, las componentes vertical y horizontal de la expresión anterior son las que obtuvimos por otro lado mediante balances de fuerzas en (B.12) y (B.13) respectivamente. De esta manera, tendremos un sistema formado por las siguientes ecuaciones

$$\ddot{\epsilon} \cos \gamma - 2\dot{\epsilon}\dot{\gamma} \sin \gamma - \epsilon\ddot{\gamma} \sin \gamma - \epsilon(\dot{\gamma})^2 \cos \gamma = \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi \phi \sin^2 \theta d\theta \quad (\text{B.16})$$

y

$$\ddot{\epsilon} \sin \gamma + 2\dot{\epsilon}\dot{\gamma} \cos \gamma + \epsilon\ddot{\gamma} \cos \gamma - \epsilon(\dot{\gamma})^2 \sin \gamma = \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi \phi \cos \theta \sin \theta d\theta - 1. \quad (\text{B.17})$$

Tenemos así un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden para $\epsilon(t)$ y $\gamma(t)$. Aparte de que es no lineal tiene la complejidad adicional de que la distribución de presión ϕ depende de una manera no explícita de ϵ y γ (como muestra la expresión (B.6)), que hay resolver matemáticamente.

Como ya hiciéramos cuando estudiamos el caso del anillo cilíndrico en una posición no forzada en el capítulo 3, podemos manipular el sistema formado por (B.16) y (B.17) de tal manera que tengamos una ecuación para $\ddot{\epsilon}$ y otra para $\ddot{\gamma}$. Si multiplicamos (B.16) por $\cos \gamma$ y (B.17) por $\sin \gamma$ y sumamos tendremos una ecuación para $\ddot{\epsilon}$:

$$\ddot{\epsilon} - \epsilon(\dot{\gamma})^2 = \frac{\cos \gamma}{\lambda} \int_0^\pi \phi \sin^2 \theta d\theta + \frac{\sin \gamma}{\lambda} \int_0^\pi \phi \cos \theta \sin \theta d\theta - \sin \gamma.$$

Análogamente, si multiplicamos (B.16) por $-\sin \gamma$ y (B.17) por $\cos \gamma$ y sumamos, tendremos la ecuación correspondiente a $\ddot{\gamma}$

$$\epsilon\ddot{\gamma} + 2\dot{\epsilon}\dot{\gamma} = \frac{\cos \gamma}{\lambda} \int_0^\pi \phi \cos \theta \sin \theta d\theta - \cos \gamma - \frac{\sin \gamma}{\lambda} \int_0^\pi \phi \sin^2 \theta d\theta.$$

De esta manera, con las dos expresiones anteriores, volvemos a tener un sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden para $\epsilon(t)$ y $\gamma(t)$ reestructurado que por separado podemos obtener la excentricidad ϵ como función del ángulo γ y viceversa.

Bibliografía

- [1] BARRERO, A. y PÉREZ-SABORID, M. *Fundamentos y aplicaciones de la mecánica de fluidos*, Mc Graw Hill, 2005.
- [2] HALE, J.K *Asymptotic behavior of dissipative sustems*, Surveys and Monographs, 1988.
- [3] HALE, J.K. y KOÇAK, H. *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag, 1996.
- [4] KUZNETSOV, Y.A. *Elements of applied bifurcation theory*, Springer-Verlag, 2004.
- [5] MILLÁN BARBANY, G. *Problemas Matemáticos de la Mecánica de Fluidos. Estructura de las Ondas de Choque y Combustión*. Real Académica de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 1975.
- [6] SIMMONS, G.F. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas* Mc Graw Hill, 1977.
- [7] SNOEIJER, J.H y VAN DER WEELE, K. *Physics of the granite sphere fountain*, American Journal of Physics, 2014.
- [8] STROGATZ, S.H. *Non-linear dynamic and chaos: with applications to physics, biology, chemistry and engineering*, Addison-Wesley, 1994.
- [9] TEMAN, R. *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, North-Holland Publishing, New York, 1979.