UNIVERSIDAD DE SEVILLA - FACULTAD DE CIENCIAS

SECCION DE MATEMATICAS

DESARROLLOS MEDIANTE AUTOFUNCIONES ASOCIADOS A UNA ECUACION DIFERENCIAL MATRICIAL

Visado en

Sevilla, junio de 1.972

EL CATEDRATICO DIRECTOR

A. Castro

Fdo. Antonio de Castro Brzezicki

Tesis que presenta F. Javier Erice Rodriguez para optar al grado de Doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas.

Sevilla junio de 1.972

J. Erice

Fdo. Fco. Javier Erice Rodrig

En estas lineas en que quiero expresar mi agradecimiento, no seria justo si no destacara de una forma preeminente a D. Antonio de Castro Brzezicki, catedratico de Matemáticas de la Universidad de Sevilla, cuya ayuda y orientaciones han sido constantes y del que siempre seré deudor. Asimismo al Seminario de Matemáticas de esta Universidad y en particular a Jeronimo Ferrer Rodriguez por la gran ayuda que me ha proporcionado, no solo poniendo a mi disposición su basta biblioteca personal, sino tambien, ayudandome a buscar titulos y trabajos en catalogos y revistas.

Igualmente a la Sección de Matematicas de la Universidad de Granada, donde me formé, y en particular agradecimiento postumo a D. Inocencio Aldanondo, catedratico que fué de aquella Facultad, cuyos consejos fueron para mi siempre orientadores, y su afición a la investigación contagiosa.

En otro plano distinto, quiero agradecer al Ministerio de Educación y Ciencia por la ayuda prestada en forma de beca, y sin la cual no hubiese dispuesto del tiempo suficiente para llegar a feliz termino.

De igual forma, a todos los que de un modo u otro, han contribuido material o moralmente a confeccionar este trabajo.

INTRODUCCION

El estudio de los problemas con condiciones de contorno trae consigo muchos e interesantes conceptos, tales como el de autovalores y autofunciones, funciones ortogonales, series de Fourier, desarrollos mediantes auto-- funciones etc. etc.

Muchos de estos problemas con condiciones de contorno homogeneas, aparecen en los problemas fisicos con un parametro λ mediante ecuaciones de la forma

$$L(Y) = \lambda Y$$

donde L es un operador determinado para cada problema. La solucion trivial $Y = 0$ existe desde luego para todo valor del paramentro λ ; sin embargo puede sudeder que existan soluciones no triviales para determinados valores de λ . Si una solucion Y_i no trivial, existe para un determinado valor de $\lambda = \lambda_i$, dicha constante recibe el nombre de autovalor o valor propio asociado con el operador L y relativo a las condiciones de contorno, y a la correspondiente solucion no trivial Y_i se le da el nombre de autofuncion o funcion propia. Dichas autofunciones se pueden determinar solvo una constante multiplicativa, es decir, que si Y_i es la autofuncion correspondiente al autovalor λ_i, tambien lo es cY_i, donde c es un numero. (L lineal)

La impoptancia de los autovalores y autofunciones, tanto en matematicas como en las ciencias en general es enorme, y mucho se ha escrito sobre ello. En Fisica por ejemplo, muchos problemas de autovalores tienen importantes interpretaciones asi, y sirvam como ejemplos tipicos, en los problemas de vibraciones, los autovalores (modernamente los cuadrados de los autovalores)son proporcionales a la frecuencia del sistema y las autofunciones dan la forma de las vibraciones. En Mecanica Cuantica, aun son mas importantes, pues los autovalores representan la sola medida posible de los valores de la energia de un sistema fisico. Desde el punto de vista matematico, el conocimiento de los autovalores y autofunciones de un operador L, nos lleva a resolver determinados tipos de ecuaciones en derivadas parciales. En un orden mas inferior si se quiere, ~~para~~ ha servido para desarrollar numerodas cuestiones de sumabilidad, convergencia, teoria espectral etc.

Respecto al concepto de funciones ortogonales, pueden considerarse vectores ortogonales de infinitas componentes. El producto escalar se define pues como una generalizacion del considerado con vectores y analogamente, la norma se define a partir de él. Un conjunto de vectores (funciones) $(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$

se diré pues ortogonal si

$$\langle \varphi_i \quad \varphi_j \rangle = \Delta_{ij}$$

con $\Delta_{ij} = K\delta_{ij}$.

En el caso de que $K = 1$, se dira que dicho conjunto es ortogonal y facilmente puede conseguirse un conjunto ortonormal partiendo del ortogonal, dividiendo cada vector por su norma.

Si un conjunto ortogonal goza de la propiedad de que la unica funcion continua ortogonal a cada uno delos elementos del conjunto es la funcion cero, se dirá que dicho conjunto es completo. Pues bien, dado un conjunto ortonormal $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ completo de funciones continuas en un intervalo (a,b), y dada una funcion f(x) continua, bajo determinadas condiciones es posible encontrar unos coeficientes α_i tales que

$$f(x) = \sum_i \alpha_i \varphi_i(x)$$

Dejando de momento los teoremas que me garanticen la posibilidad de este desarrollo, los coeficientes

$$\alpha_i = \langle f \quad \varphi_i \rangle$$

se llaman "coeficientes de Fourier", y la serie recibe el nombre de"serie generalizada de Fourier".

Ya que el sistema lo hemos supuesto completo, los α_i serán nulos si y solo si f(x) = 0, es decir, la unica funcion continua cuyos coeficientes de Fourier son identicamente nulos es la funcion cero. Esta propiedad deja de ser cierta si el sistema no fuese completo. Otra importante propiedad de los coeficientes de Fourier, es que proporcionan la mejor aproximacion posible en media cuadratica a la funcion f(x), comparada con cualquier otra combinacion lineal posible de los φ_i.

En lo sucesivo, se plantea en concreto el estudio de la ecuacion

$$L(Y) = \lambda N(\ ) \qquad a \leq x \leq b$$

con las condiciones de contorno homogeneas

$$M_a(U) = M_b(U) = 0$$

y siendo tanto el L como el N operadores diferenciales matriciales y λ un parametro. Dicho parametro pasa a ser un autovalor en el caso de que sea raiz de la ecuacion $W(\lambda) = 0$, y en correspondencia con dichos autovalores aparece un conjunto de autofunciones que forman un conjunto ortogonal(ortonormal despues de multiplicarlo por constantes adecuadas) completo.

Considerando entonces la ecuacion

$$(L - \lambda N)Y = -N(f)$$

como la no homogenea, resulta posible bajo determinadas condiciones , obtener un desarrollo de dicha funcion mediante una serie generalizada de Fourier

$$f(x) = \sum c_n \Psi_n$$

y una vez aqui, es posible demostrar que dicho desarrollo se comporta exactamente igual respecto a la convergencia (equiconvergente) que la serie de Fourier de f(x) en funcion solo de cosenos.

o

Capitulo 1º

= 1 =

Sea la ecuacion

$$(L - \lambda N)Y = 0$$

donde L es el operador matricial

$$L = \begin{pmatrix} h(x) & d/dx + d^2/dx^2 \\ d^2/dx^2 - d/dx & g(x) \end{pmatrix}$$

λ es un numero en general complejo, N el tambien operador matricial

$$N = \begin{pmatrix} p & q + d/dx \\ q - d/dx & r \end{pmatrix}$$

e Y la funcion vectorial de dos variables expresable tambien en forma matricial de la forma

$$Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \{ u, v \}$$

tal que el cociente v/u sea una funcion creciente. Las funciones h,g,p,q,r son funciones de la variable x, p= p(x), continuas en el interior de un intervalo $[a, b]$, en cuyos extremos toman valores finitos y relacionadas por la expresion

$$q = (p.r)^{1/2}$$

Entonces, la ecuacion

$$(L - \lambda N)Y = 0$$

es equivalente a un par de ecuaciones diferenciales simultaneas de segundo orden

$$hu + v' + v'' - \lambda(pu + qv + v') = 0$$
$$u'' - u' + gv - \lambda(qu - u' + rv) = 0$$

Este puede considerarse como el sistema homogeneo, siendo el correspondiente no homogeneo

$$hu + v' + v'' - \lambda(pu + qv + v') = -(pf_1 + qf_2 + f_2')$$
$$u'' - u' + gv - \lambda(qu - u' + rv) = -(qf_1 - f_1' + rf_2)$$

o con la notacion L-N

$$(L - \lambda N)Y = - N(F)$$

donde F es la funcion de dos componentes

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \{f_1 , f_2\}$$

donde ambas son funciones de la variable x, f=f(x).

Un vector $U = \{u_1 , u_2\}$ se dirá solucion de la ecuacion propuesta si $u = u_1$ y $v = u_2$ satisfacen la ecuacion homogenea o no homogenea, siendo la solucion $\{0,0\}$ la solucion trivial. Desde luego consideraremos soluciones de la ecuacion las no triviales.

Si un vector $Y = \{u,v\}$ satisface la ecuacion propuesta y unas determinadas condiciones de contorno, diremos que Y es un autovector, llamando autovalor al correspondiente valor de λ. La solucion de la ecuacion se conoce con el nombre de problema de los autovalores o bien problema de contorno.

= 2 =

Antes de comenzar con el estudio de la ecuacion

$$(L - \lambda N)Y = 0$$

merece la pena ver de cerca los operadores matriciales L y N, asi como sus propiedades fundamentales.

Comencemos por el N. Para ello, si tenemos un conjunto de funciones vectoriales Y_i

$$Y_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$$

se verifica

$$\int_a^b \left[Y_j^T N(Y_i) - Y_i^T N(Y_j)\right] dx = \left[u_j v_i - u_i v_j\right]_a^b = u_j(b)v_i(b) - u_i(a)v_j(a)$$

En efecto

$$(u_j, v_j)\begin{pmatrix} pu_i + qv_i + v_i' \\ qu_i - u_i' + rv_i \end{pmatrix} - (u_i, v_i)\begin{pmatrix} pu_j + qv_j + v_j' \\ qu_j - u_j' + rv_j \end{pmatrix} =$$

$$= pu_i u_j + qu_j v_i + u_j v_i' + qu_i v_j - v_j u_i' + rv_i v_j$$
$$- pu_i u_j - qu_i v_j - u_i v_j' - qv_i u_j + v_i u_j' - rv_i v_j =$$
$$= d/dx(u_j v_i - u_i v_j)$$

e integrando se obtiene lo que se pretendia.

Esta matriz N, particularizando los valores de $p(x) = -\gamma - \alpha/x$, $q(x) = j/x$, $r(x) = \gamma - \alpha/x$ con α, γ, j constantes y $x \in [0, \infty)$, aparece como problema de autovalores en el caso del atomo de hidrogeno en mecanica cuantica.

Respecto al operador L aparece una propiedad muy similar, a saber

$$\int_a^b \left[Y_j^T L(Y_i) - Y_j^T L(Y_i)\right] dx = \Big[(u_j v_i' - v_i u_j') + (v_j u_i' - u_i v_j') + (u_j v_i - u_i v_j)\Big]_a^b$$

El procedimiento para su demostracion es analogo por completo al efectuado con el N anteriormente, previa sustitucion por el operador L. Sin embargo merece la pena hacerse notar que el ultimo de los parentesis - en el desarrollo de la propiedad del L, coincide con el que aparece en la del N. Esto nos servirá a la hora de estudiar las condiciones de contorno, en las -- cuales desempeña un importante papel.

Operadores mas generales que el L, en el sentido de una ecuacion diferencial de mayor orden, aparecen en Hilbert, Neumark, Kodaira y Coddington and Levinson, siendo a la vez mas general que los de Hurwitz, Titchmarsh, Everitt y Chacravarty.

El estudio con dos operadores (L y N) aparece en el Collatz aunque de forma no matricial, y tambien en el reciente de Bikam Bhagat, aunque en este el segundo operador es una matriz simetrica sin que en ella intervengan derivadas, y es mas que nada una generalizacion al caso de matrices de la funcion peso.

Tanto el operador L como el N son lineales,

$$L(a + b) = L(a) + L(b)$$

$$L(Ka) = KL(a)$$

como facilmente puede comprobarse.

= 3 =

Para un vector U = u, v definimos las condiciones de contorno en x=a y x=b de la siguiente manera :

$$M_a(a,U) = a_{j1}u(a) + a_{j2}u'(a) + a_{j3}v(a) + a_{j4}v'(a) = 0$$

$$M_b(b,U) = b_{j1}u(b) + b_{j2}u'(b) + b_{j3}v(b) + b_{j4}v'(b) = 0$$

para $j = 1,2.$

Los coeficientes quedan arbitrarios de momento pero satisfacen las siguientes condiciones :

1.- a_{kj}, b_{kj} son valores independientes del parametro λ del sistema diferencial.

11.- a_{kj}, b_{kj} son valores constantes, tales que al -- menos dos de las relaciones sean distintas

$$\frac{b_{12}}{b_{22}} \neq \frac{b_{14}}{b_{24}} \qquad \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{a_{14}}{a_{24}}$$

Esto equivale a que siempre sean diferentes las expresiones de $M_a(a,U)$ con $j=1$ y $j=2$. Analogo con $M_b(b,U)$. En particular supondremos

$$a_{12}a_{24} - a_{14}a_{22} = 1$$

y relacion analoga con los "b".

111.-

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix} = 0$$

1V.-

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{14} \\ b_{21} & b_{24} \end{vmatrix}$$

cuya razon de ser de estas dos ultimas la veremos posteriormente.

= 4 =

Dadas dos funciones vectoriales

$$F = F(x) = (F_1 , F_2)$$
$$G = G(x) = (G_1 , G_2)$$

noteremos tanto con el operador L como con el N la integral de la suma

$$\int_a^b (F_1 LG_1 + F_2 LG_2)\,dx$$

mediante la expresion

$$< F , LG > .$$

Concretandonos solamente al operador L, si F(x) y G(x) son dos vectores cuyas derivadas son continuas hasta el segundo orden, entonces

$$< F \quad LG > - < G \quad LF > = \int_a^b (F_1 LG_1 + F_2 LG_2)\,dx -$$
$$- \int_a^b (G_2 LF_2 + G_1 LF_1)\,dx =$$
$$= \int_a^b [F_1 (hG_1 + G_2' + G_2'') + F_2 (G_1'' - G_1' + gG_2) -$$
$$- G_1 (hF_1 + F_2' + F_2'') - G_2 (F_1'' - F_1' + gF_2)]\,dx =$$
$$= \int_a^b [d/dx(F_1 G_2' - G_2 F_1') + d/dx(F_2 G_1' - G_1 F_2') +$$
$$+ d/dx(F_1 G_2 - G_1 F_2)]\,dx =$$
$$= \Big| F_1 G_2' - G_2 F_1' \Big]_a^b + \Big| F_2 G_1' - G_1 F_2' \Big]_a^b + \Big| F_1 G_2 - G_1 F_2 \Big]_a^b$$

que como puede verse coincide con las expresiones que obtuvimos en =2= con el estudio del L.

Pues bien, dejando libres los limites de la integral, y escribiendo el resultado en forma de determinates, obtenemos un farma bilineal asociada al operador L y que notaremos con el simbolo

$$[F \quad G]$$

Explicitamente

$$\begin{vmatrix} F_1 & G_2 \\ F_1' & G_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_2 & G_1 \\ F_2' & G_1' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_1 & G_1 \\ F_2 & G_2 \end{vmatrix} = \left[F \quad G \right]$$

donde cada F y G son funciones de x. Puede observarse que los dos primeros determinantes son wronskianos.

Estas formas bilineales, se expresarán con frecuencia usando los vectores ϕ_i y ϕ_j, donde $\phi_i = \phi_i(x) = (x_i, y_i)$ y se escribiran $[\phi_i \quad \phi_j]$ o simplemente P_{ij} siguiendo la notacion de Chacravarty y Everitt.

De las propiedades de estas formas bilineales cabe decir :

1.- $P_{ii} = P_{jj} = 0$

pues el primer determinante se hace igual al segundo cambiado de signo, mientras el tercero es identica - mente nulo.

11.- $P_{ij} = - P_{ji}$

pues equivale a cambiar las columnas dentro de cada determinante.

111.- $[\phi_i \quad a\phi_j + b\phi_k] = a[\phi_i \quad \phi_j] + b[\phi_i \quad \phi_k]$

pues una columna es combinacion lineal de otras dos. Esta propiedad nos será util en extremo.

1V.- Si ϕ_i y ϕ_j son soluciones de la ecuacion $(L - \lambda N)Y=$ para el mismo valor de λ, entonces P_{ij} es independiente de x, y por tanto funcion solo de λ.

En efecto, por ser ϕ_i solucion de la ecuacion propuesta será funcion de x y de λ. Ahora bien, multiplicando la ecuacion $(L - \lambda N)\phi_i = 0$ por ϕ_j y la $(L - \lambda N)\phi_j = 0$ por ϕ_i, restandolas tenemos

$$P_{ij} = [\phi_i \quad \phi_j] = \langle \phi_i \ , L\phi_j \rangle - \langle \phi_j \ , L\phi_i \rangle =$$

$$\equiv \lambda \int_a^b (\phi_j N \phi_i - \phi_i N \phi_j)\, dx = \lambda K$$

luego $\qquad d/dx\ P_{ij} = 0 \qquad$ c.q.d

V.- Para seis cualesquiera de ellos $\phi_i = (x_i, y_i)$ $i=1\ldots 5,6$ se verifica la siguiente identidad

$$P_{12}(P_{34}P_{56} - P_{35}P_{46} + P_{36}P_{45}) - P_{13}(P_{24}P_{56} - P_{25}P_{46} + P_{26}P_{45}) +$$
$$P_{14}(P_{23}P_{56} - P_{25}P_{36} + P_{26}P_{35}) - P_{15}(P_{23}P_{46} - P_{24}P_{36} + P_{26}P_{34}) +$$
$$P_{16}(P_{23}P_{45} - P_{24}P_{35} + P_{25}P_{34})$$

En lo sucesivo nos referiremos a ella con el nombre de P-identidad.

Su demostracion es un mero calculo, pero puede simplificarse teniendo en cuenta que las formas P_{ij} que utiliza Everitt son los dos primeros determinantes de la nuestra, y dicha identidad tambien se verifica. Dichos elementos podrán ser eliminados en nuestro producto. Entonces

$$\left(P_{12} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)\left[\left(P_{34} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}\right)\left(P_{56} + \begin{vmatrix} x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \end{vmatrix}\right) - \right.$$

$$\left(P_{35} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_5 & y_5 \end{vmatrix}\right)\left(P_{46} + \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_6 & y_6 \end{vmatrix}\right) +$$

$$\left.\left(P_{36} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_6 & y_6 \end{vmatrix}\right)\left(P_{45} + \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \end{vmatrix}\right)\right] =$$

$$\left(P_{12} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)\left[P_{34}P_{56} - P_{35}P_{46} + P_{36}P_{45} + P_{56}\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \right.$$

$$P_{34}\begin{vmatrix} x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_5 & y_5 \end{vmatrix} P_{46} - P_{35}\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_6 & y_6 \end{vmatrix} -$$

$$-\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_6 & y_6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_5 & y_5 \end{vmatrix} P_{46} - \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_6 & y_6 \end{vmatrix} P_{35} - \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_5 & y_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_6 & y_6 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_6 & y_6 \end{vmatrix} P_{45} + \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \end{vmatrix} P_{36} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_6 & y_6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \end{vmatrix} \Big]$$

verificando los productos en los terminos en que aparecen dos determinantes, tenemos

$$x_3x_5y_4y_6 - x_3x_6y_4y_5 - x_4x_5y_3y_6 + x_4x_6y_3y_5 -$$
$$x_3x_4y_5y_6 + x_3x_6y_4y_5 + x_4x_5y_3y_6 - x_5x_6y_3y_4 +$$
$$x_3x_4y_5y_6 - x_3x_5y_4y_6 - x_4x_6y_3y_5 + x_5x_6y_3y_4 = \quad 0$$

Por otra parte, los productos de los terminos en los que solo aparecen P_{ij} su suma total será nula, por la razon antes expuesta, luego operando hasta el maximo en cada uno de los cinco parantisis despues de reducir sus terminos semejantes tal y como hemos hecho con el primero de ellos, nos queda finalmente :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \Big[(x_3y_4 - x_4y_3)(x_5'y_6' - x_6'y_5') + (x_5y_6 - x_6y_5)(x_3'y_4' - x_4'y_3'$$
$$-(x_3y_5 - x_5y_3)(x_4'y_6' - x_6'y_4') - (x_4y_6 - y_4x_6)(x_3'y_5' - y_3'x_5'$$
$$+(x_3y_6 - x_3y_6)(x_4'y_5' - x_5'y_4') + (x_4y_5 - x_4y_5)(x_3'y_6' - y_3'x_6'$$

$$-\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \Big[(x_2y_4 - x_4y_2)(x_5'y_6' - x_6'y_5') + (x_5y_6 - x_6y_5)(x_2'y_4' - x_4'y_2')$$
$$-(x_2y_5 - x_5y_2)(x_4'y_6' - x_6'y_4') - (x_4y_6 - x_6y_4)(x_2'y_5' - x_5'y_2')$$
$$+(x_2y_6 - x_6y_2)(x_4'y_5' - x_5'y_4') + (x_4y_5 - x_5y_4)(x_2'y_6' - x_6'y_2')$$

$$-\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_5 & y_5 \end{vmatrix} \cdot \Big[(x_2y_3 - x_3y_2)(x_4'y_6' - x_6'y_4') + (x_4y_6 - x_6y_4)(x_2'y_3' - x_3'y_2'$$
$$-(x_2y_4 - x_4y_2)(x_3'y_6' - x_6'y_3') + (x_3y_6 - x_6y_3)(x_2'y_4' - x_4'y_2')$$
$$+(x_2y_6 - y_6x_2)(x_3'y_4' - x_4'y_3') + (x_3y_4 - x_4y_3)(x_2'y_6' - x_6'y_2')$$

$$+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} \cdot \Big[(x_2y_3 - y_3x_2)(x_5'y_6' - x_6'y_5') + (x_5y_6 - x_6y_5)(x_2'y_3' - x_3'y_2')$$
$$-(x_2y_5 - y_5x_2)(x_3'y_6' - x_6'y_3') + (x_3y_6 - x_6y_3)(x_2'y_4' - x_4'y_2')$$
$$+(x_2y_6 - y_6x_2)(x_3'y_5' - x_5'y_3') + (x_3y_5 - x_5y_3)(x_2'y_6' - x_6'y_2')$$

$$+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_6 & y_6 \end{vmatrix} \cdot \Big[(x_2y_3 - x_3y_2)(x_4'y_5' - x_5'y_4') + (x_4y_5 - x_5y_4)(x_2'y_3' - x_3'y_2')$$
$$-(x_2y_4 - y_4x_2)(x_3'y_5' - x_5'y_3') + (x_3y_5 - x_5y_3)(x_2'y_4' - x_4'y_2')$$
$$+(x_2y_5 - y_5x_2)(x_3'y_4' - x_4'y_3') + (x_3y_4 - x_4y_3)(x_2'y_5' - x_5'y_2') \Big]$$
$$= 0$$

ya que todos los terminos figuren repetidos y cambiados de signo.

= 5 =

Dado un vector $U = \{u(x), v(x)\}$ $a \leq x \leq b$

cuyas componentes junto con las de su primera derivada tomen valores constantes determinados de antemano para $x = \xi_o$ perteneciente a dicho intervalo, lo representaremos en la forma

$$U(\xi/x) = u(\xi/x), \ v(\xi/x)$$

Sean analogamente

$$\phi_i(a/x,\lambda) = \{x_i(a/x,\lambda), \ y_i(a/x,\lambda)\}$$
$$\phi_j(b/x,\lambda) = \{x_j(b/x,\lambda), \ y_j(b/x,\lambda)\}$$

tales que sus componentes tomen los siguientes valores particulares

$$y_i(a) = -a_{i2} \qquad x_i(a) = -a_{i4}$$
$$y_i'(a) = a_{i1} + a_{i2} \qquad x_i'(a) = a_{i3} - a_{i4}$$

$$y_j(b) = - b_{j2} \qquad x_j(b) = - b_{j4}$$

$$y_j'(b) = b_{j1} + b_{j2} \qquad x_j'(b) = b_{j3} - b_{j4}$$

entonces las condiciones de contorno de =3= pueden escribirse

$$M_a(a,U) = [U \quad \phi_i](a) = 0$$

$$M_b(b,U) = [U \quad \phi_j](b) = 0$$

En efecto, por una parte, las condiciones de contorno eran

$$M_a(a,U) = a_{j1}u(a) + a_{j2}u'(a) + a_{j3}v(a) + a_{j4}v'(a) = 0$$

$$M_b(b,U) = b_{j1}u(b) + b_{j2}u'(b) + b_{j3}v(b) + b_{j4}v'(b) = 0$$

para $j = 1,2$.

Por otra parte, las formas bilineales eran

$$[U \quad \phi_j](b) = \left[\begin{vmatrix} u & x_j \\ v' & y_j' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v & y_j \\ u' & x_j' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u & x_j \\ v & y_j \end{vmatrix}\right](b) =$$

$$= (y_j'(b) + y_j(b))u(b) - x_j(b)u'(b) + (x_j'(b) - x_j(b))v(b) - y(b)v'(b),$$

y para la identificacion basta llamar a los coeficientes de las u, u', v, v' respectivamente b_{j1}, b_{j2}, b_{j3}, b_{j4}.

El proceso para determinar las a_{ji} es por completo analogo. Estos son pues los valores que imponemos a los coeficientes en la expresion de las condiciones de contorno, y que en adelante se preferirá escribirlas en la forma alternante de Kodair para no tener que estar recurriendo reiteradamente a los valores de dichos coeficientes

$$M_a(a,U) = [U(a/x) \quad \phi_i] = [U \quad \phi_i](a) = 0$$

$$M_b(b,U) = [U(b/x) \quad \phi_j] = [U \quad \phi_j](b) = 0$$

para $i = 1,2$ y $j = 3,4$

Las condiciones 111.- y IV.- que impusimos a los coeficientes equivalen a que sean nulas las formas

$$[\phi_1 \quad \phi_2] = [\phi_3 \quad \phi_4] = 0$$

Tambien se cumple :

1.- ϕ_1 y ϕ_2 en los extremos del intervalo son independientes de λ.

11.- P_{12} y P_{34} son independientes de x y de λ.

111.- $\phi_i(a/x,\lambda)$ y $\phi_j(b/x,\lambda)$ son linealmente independientes en todo el intervalo (a,b), salvo en el caso que λ sea un autovalor y se cumpla una condicion suplementaria, como se verá posteriormente.

= 6 =

Dada la ecuación

$$(L - \lambda N)Y = 0$$

se dirá que esta es autoadjunta si y solo si se verifica

$$\int_a^b (u^T L(v) - v^T L(u))\,dx = 0$$

$$\int_a^b (u^T N(v) - v^T N(u))\,dx = 0$$

como puede verse en el Collatz referente a este tipo de ecuaciones. Vamos a demostrar que en nuestro caso se cumplen ambas.

En efecto, en =2= demostramos que

$$\int_a^b (Y_2^T N(Y_1) - Y_1^T N(Y_2))\,dx = \left[u_2 v_1 - u_1 v_2\right]_a^b$$

Ahora bien, sustituyendo los valores de u_i y v_i en los extremos del intervalo, segun los valores particulares que les hemos asignado en =5=, tenemos

$$b_{24}b_{12} - b_{14}b_{22} - a_{24}a_{12} + a_{14}a_{22} = -1 + 1 = 0$$

que desde luego es identicamente nulo debido a la condicion 11.- de =3=.

Para probar la primera igualdad, se puede partir de =4= y por el mismo camino se llega

$$< \phi_1 \quad L\phi_2 > - < \phi_2 \quad L\phi_1 > = P_{12} = 0$$

despues de haber hecho uso de la propiedad de =5= $P_{12} = P_{34} = 0$.

Una vez demostrado esto, la formula de Green en nuestro caso toma la forma siguiente : Si los vectores $F = F(x)$ y $G = G(x)$ satisfacen la ecuacion propuesta y sus condiciones de contorno, entonces

$$\langle F \quad LG \rangle - \langle G \quad LF \rangle = 0$$

Esta relacion que se basa en la primera de nuestras igualdades , no es necesaria demostrarla basandonos exclusivamente en las funciones ϕ_i y ϕ_j, sino que (i=1,2 j=3,4) pueden demostrarse para cualquier par de funciones U y V que satisfagan las condiciones de contorno. Sirva para ello el siguiente teorema :

TEOREMA.-

Para dos vectores $U(x) = \{ u_1(x) \ , \ v_1(x) \}$

$$V(x) = \{ u_2(x) \ , \ v_2(x) \}$$

que satisfagan las condiciones de contorno $M_a(a,U) = 0$, se verifica

$$[U \quad V](a) = 0$$

Analogamente, si satisfacen la $M_b(b,U) = 0$, entonces

$$[U \quad V](b) = 0.$$

Dicho en forma general, esto equivale a : Para dos funciones cualesquiera U y V que satisfacen las condiciones de contorno impuestas, se verifica que la expresion de la formula de Green es identicamente nula, siendo pues la ecuacion autoadjunta.

En efecto, para su demostracion, haremos solamente $[U \quad V](a) = 0$ porque demostrarlo en el punto b seria repetir los calculos en el otro extremo.

Pues bien, si satisfacen la condicion en el punto x=a, entonces por =5=

$$[U \quad \phi_i](a) = 0$$

$$[U \quad \phi_j](a) = 0$$

donde ademas $[\phi_1 \quad \phi_2] = 0.$

Utilizando la P-identidad, y llamando $\phi_5 = u \quad \phi_6 = v$ se haran nulos los terminos P_{51}, P_{52}, P_{61}, P_{62}, y P_{12}, con lo que quedará reducida a

$$P_{56}(P_{14}P_{23} - P_{24}P_{13}) = 0$$

y eligiendo los vectores ϕ_3 y ϕ_4 de forma que

$$P_{14}P_{23} - P_{24}P_{13} \neq 0 \qquad \forall \lambda$$

nos queda

$$P_{56} = 0 \Rightarrow [U \quad V](a) = 0 \quad \text{c.q.d.}$$

Notese que la validez de la demostracion es debida a la condicion IV.- de =3= o a su equivalente de =5=.

= 7 =

Dadas las funciones Y_i e Y_j soluciones de la ecuacion $(L - \lambda N)Y = 0$ correspondientes a los autovalores λ_i y λ_j respectivamente, vamos a demostrar que son ortogonales en un sentido generalizado.

En efecto, por ser soluciones de la ecuacion se cumplirá :

$$\begin{aligned} &1.- \quad L(Y_i) = \lambda_i N(Y_i) \\ &11.- \quad L(Y_j) = \lambda_j N(Y_j) \end{aligned} \qquad \forall i,j$$

multiplicando la primera por Y_j, y la segunda por Y_i, restandolas e integrando tenemos :

$$\int_a^b (Y_j L(Y_i) - Y_i L(Y_j))\,dx = \lambda_i \int_a^b Y_j N(Y_i)\,dx - \lambda_j \int_a^b Y_i N(Y_j)\,dx$$

Ahora bien,

$$\int_a^b (Y_j L(Y_i) - Y_i L(Y_j))\,dx = 0 \qquad \text{Por } =6=$$

luego

$$0 = \lambda_i \int_a^b (Y_j N(Y_i))\,dx - \lambda_j \int_a^b (Y_i N(Y_j))\,dx$$

y como $\int_a^b Y_i N(Y_j)\,dx = \int_a^b Y_j N(Y_i)\,dx$

por la formula de Green aplicada a N, se obtiene

$$0 = (\lambda_i - \lambda_j) \int_a^b Y_j N(Y_i)\,dx$$

Basta pues con imponer la condicion de que los parametros λ_i y λ_j sean distintos para obtener finalmente

$$\int_a^b Y_i N(Y_j)\,dx = 0$$

que es la expresion de la relacion de ortogonalidad generalizada que habiamos anunciado.

Puede decirse aun mas, pues si Y_i e Y_j son ortogonales respecto al operador M, tambien se cumple que son ortogonales respecto al L. Es decir

$$\int_a^b Y_i L(Y_j)\,dx = 0$$

pues basta con considerar que

$$0 = \int_a^b Y_i N(Y_j)\,dx = 1/\lambda_j \int_a^b Y_i L(Y_j)\,dx$$

habida cuenta que $\lambda_j \neq 0$.

No es necesario obtener primero la formula de Green para poder demostrar la relacion de ortogonalidad. Simplemente se ha hecho asi para poder ir utilizando las propiedades que han ido apareciendo. De todas formas, esta formula de Green podia haberse obtenido de la relacion de ortogonalidad, pues si Y_i e Y_j son

$$Y_i \perp Y_j$$

entonces

$$0 = \int_a^b (Y_i L(Y_j) - Y_j L(Y_i))\,dx$$

y teniendo en cuenta el simbolismo de $\langle\ \rangle$ se obtiene por sustitucion directa

$$\langle Y_i \quad LY_j \rangle - \langle Y_j \quad LY_i \rangle = 0 \qquad \text{c.q.d}$$

De todo esto resulta :

1.- Si $U = \{u_1, v_1\}$ y $V = \{u_2, v_2\}$ son las soluciones de la ecuacion $(L - \lambda N)Y = 0$ cumpliendo las condiciones $M_a(a,U) = M_b(b,U) = 0$ para $\lambda = \lambda_1$ y $\lambda = \lambda_2$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ entonces

$$\langle U \quad NV \rangle = 0$$

y desde ahora en adelante escribiremos asi dicha relacion de ortogonalidad.

11.- Para los vectores que determinan las condiciones las condiciones de contorno se verifica

$$\langle \phi_i(a/x,\lambda),\quad \phi_j(b/x,\lambda)\rangle = -\,d/d\lambda\; P_{ij}(\lambda)$$

para i=1,2 j=3,4.

En efecto, como $\langle F \quad LG\rangle - \langle G \quad LF\rangle = [F \quad G](b) - [F \quad G](a) = [F \quad G]_a^b$

entonces, llamando $F = \phi_i(a/x,\lambda)$ y $G = \phi_j(b/x,\lambda_1)$ tenemos

$$\langle \phi_i(a/x,\lambda) \quad L\phi_j(b/x,\lambda_1)\rangle - \langle \phi_j(b/x,\lambda_1) \quad L\phi_i(a/x,\lambda)\rangle$$

$$= P_{ij}(\lambda) - P_{ij}(\lambda_1) = \lambda_1 \langle\phi_i \quad N\phi_j\rangle - \lambda\langle\phi_j \quad N\phi_i\rangle$$

usando $\langle\phi_i \quad N\phi_j\rangle = \langle\phi_j \quad N\phi_i\rangle$

nos queda $(\lambda_1 - \lambda)\langle\phi_i \quad N\phi_j\rangle = P_{ij}(\lambda) - P_{ij}(\lambda_1)$

dividiendo por $(\lambda_1 - \lambda)$ y haciendo tender λ_1 a λ se obtiene lo que pretendiamos.

111.- Los autovalores de la ecuacion $(L - \lambda N)Y = 0$ son todos reales.

En efecto, si hubiese un autovalor complejo $\lambda = s+it$ su autofuncion correspondiente seria de la forma $Y = U + iV$. Para $\bar{\lambda} = s - it$ existiria tambien otra autofuncion $\bar{Y} = U - iV$; se verificaria pues

$$L\bar{Y} = \bar{\lambda} N\bar{Y}$$

$$LY = \lambda NY$$

Multiplicando la primera ecuacion por Y, y la segunda por $\bar{Y}$ restandolas e integrando en el intervalo (a,b), tendremos

$$0 = \int_a^b YL(\bar{Y}) - \bar{Y}L(Y))dx = \bar{\lambda}\int_a^b YN(\bar{Y})dx - \lambda\int_a^b \bar{Y}N(Y)dx$$

es decir $\quad 0 = (\bar{\lambda} - \lambda)\int_a^b YN(\bar{Y})dx$

Suponiendo que $\int_a^b YN(\bar{Y})dx \neq 0$, esto implicaria que $t = 0$ y por tanto λ seria forzosamente real. Todo consiste en demostrar que dicha integral es no nula salvo que $Y = 0$, solucion que habiamos excluido por ser la solucion trivial.

Por la linealidad del N, tenemos

$$N(U - iV) = N(U) - iN(V)$$

$$\int_a^b (U + iV)N(U - iV)dx = \int_a^b UN(U)dx + \int_a^b VN(V)dx + i\int_a^b (VN(U) - UN(V))dx$$

El ultimo de los sumandos resulta nulo por =2=, luego

$$\int_a^b YN(\bar{Y})dx = \int_a^b (UN(U) + VN(V))dx$$

Escribiendo esta ultima expresion de forma explicita, resulta :

$$pU_1^2 + 2qU_1U_2 + rU_2^2 + (U_2'U_1 - U_1'U_2) +$$
$$pV_1^2 + 2qV_1V_2 + rV_2^2 + (V_2'V_1 - V_1'V_2) .$$

Ahora bien, los sumandos no encerrados entre parentesis equivalen a $(\sqrt{p}U_1 + \sqrt{r}U_2)^2 + (\sqrt{p}V_1 + \sqrt{r}V_2)^2$

(ya que se impuso a las funciones p, q, r estuviesen ligadas por la relacion $q = (p.r)^{1/2}$)

y por tanto siempre son positivos o a lo mas nulos.

Respecto a los sumandos encerrados entre parentesis, tomemos uno de ellos, concretamente el primero y demostremos $\int_a^b (U_2'U_1 - U_1'U_2)dx > 0$

En efecto, por ser U_2/U_1 creciente, su derivada respecto de x será > 0

$$U_2'U_1 - U_1'U_2/U_1^2 > 0 \implies U_2'U_1 - U_1'U_2 > 0$$

y solo queda integrar para demostrar lo que pretendiamos.

Para el segundo parentesis, la demostracion es repetir los calculos. La demostracion pues está completa.

= 3 =

Para el estudio del Wronskiano de nuestro sistema, se puede partir de la generalidad del trabajo de Kunihico Kodaira, donde estudia el problema de contorno asociado a una ecuacion diferencial de orden $n = 2\nu$.

En él se define

$$W = [u_1 \; u_2 \; \dots \; u_n] = 1/2^{\nu} . \nu! \sum \pm [u_1 \; u_{\nu+1}] . [u_2 \; u_{\nu+2}] .$$

$$\dots\dots \; [u_\nu \; u_n]$$

donde $\pm$ corresponde a la suma de signos alternados para toda $n!$ permutaciones de las n funciones $u_1 \; u_2 \dots u_n$.

En nuestro caso

$$W = [\phi_1 \; \phi_2 \; \phi_3 \; \phi_4] = 1/2^2 . 2! \sum \pm [\phi_i \; \phi_j] \dots\dots$$

que explicitamente tomará la forma

$$\begin{aligned} &P_{12}P_{34} - P_{12}P_{43} - P_{13}P_{24} + P_{13}P_{42} + P_{14}P_{23} - P_{14}P_{32} \\ &- P_{21}P_{34} + P_{21}P_{43} + P_{23}P_{14} - P_{23}P_{41} - P_{24}P_{13} + P_{24}P_{31} \\ &+ P_{31}P_{24} - P_{31}P_{42} - P_{32}P_{14} + P_{32}P_{41} + P_{34}P_{12} - P_{34}P_{21} \\ &- P_{41}P_{23} + P_{41}P_{32} + P_{42}P_{13} - P_{42}P_{31} - P_{43}P_{12} + P_{43}P_{21} \quad = \end{aligned}$$

$$\text{donde } P_{ij} = [\phi_i \quad \phi_j]$$

usando por tres veces consecutivas $P_{ij} = - P_{ji}$ y teniendo en cuenta que $1/2^2 . 2! = 1/8$, nos queda finalmente

$$W = P_{12}P_{34} - P_{13}P_{24} + P_{14}P_{23}$$

expresion a la que también es posible llegar partiendo del determinante

$$W = \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \\ \phi_1' & \phi_2' & \phi_3' & \phi_4' \\ \phi_1'' & \phi_2'' & \phi_3'' & \phi_4'' \\ \phi_1''' & \phi_2''' & \phi_3''' & \phi_4''' \end{vmatrix}$$

formado con los vectores que determinan las condiciones de contorno

$$\phi_i = \phi_i(a/x,\lambda) = \{x_i(a/x,\lambda) \quad y_i(a/x,\lambda)\} = \{x_i \quad y_i\}$$

$$\phi_j = \phi_j(b/x,\lambda) = \{x_j(b/x,\lambda) \quad y_j(b/x,\lambda)\} = \{x_j \quad y_j\}$$

con $i= 1,2$ $j=3,4$

y usando posteriormente el metodo de Laplace para el desarrollo de un determinante.

La funcion $W = W(\lambda)$ es una funcion entera de λ e independiente de x, (los r_{ij} no dependen mas que de λ y una combinacion lineal de ellos hará el mismo efecto que una constante en el sentido de la d/dx), y toma valor real cuando λ es real. Ademas, $W(\lambda)$ no es identicamente nulo en (a,b) ya que los vectores ϕ_i (i=1,2,3,4) son linealmente independientes en ese intervalo y forman un conjunto fundamental para aquellos λ tales qqe $W(\lambda) \neq 0$. Si $W(\lambda) = 0$ para algun λ, entonces ϕ_3 y ϕ_4 son linealmente dependientes de ϕ_1 y ϕ_2.

Esta Wronskiano jugará el mismo papel en nuestro caso que el desarrollado por Titchmarsh en su libro sobre la ecuacion de segundo orden.

TEOREMA

Los autovalores de la ecuacion $(L - \lambda N)Y = 0$ son las raices de $W(\lambda) = 0$. Inversamente, si λ_n es una raiz de $W(\lambda) = 0$, existe un autovector correspondiente al autovalor λ_n.

En efecto, si Ψ_n es el autovector correspondiente al autovalor λ_n, se cumplirá, por ser Ψ_n solucion de $(L - \lambda_n N)\Psi_n = 0$

$$[\Psi_n \quad \phi_i] = [\Psi_n \quad \phi_j] = 0 \qquad i=1,2 \; j=3,4$$

y si ademas ϕ_i , ϕ_j forman un conjunto fundamental
$\Psi_n = A\phi_1 + B\phi_2 + C\phi_3 + D\phi_4$.

Por otra parte, de la expresion del Wronskiano

$$W(\lambda) = P_{12}P_{34} - P_{13}P_{24} + P_{14}P_{23}$$

y de las condiciones de contorno

$$P_{12} = [\phi_1 \quad \phi_2] = P_{34} = [\phi_3 \quad \phi_4] = 0$$

nos queda

$$W(\lambda) = P_{14}P_{23} - P_{13}P_{24}$$

Sustituyendo el valor de Ψ_n tenemos

$$CP_{13}(\lambda_n) + DP_{14}(\lambda_n) = 0$$

$$CP_{23}(\lambda_n) + DP_{24}(\lambda_n) = 0$$

teniendo en cuenta $P_{12} = P_{34} = 0$. Por eliminacion de las constantes del sistema, se obtiene

$$P_{13}(\lambda_n)P_{24}(\lambda_n) = P_{14}(\lambda_n)P_{23}(\lambda_n)$$

lo que implica $\qquad W(\lambda) = 0 \qquad$ para $\lambda = \lambda_n$

luego los autovalores son raices de $W(\lambda)$ c.q.d.

Hay que advertir que C y D no son nulas simultaneamente y tambien puede deducirse este mismo resultado inmediatamente si ϕ_i y ϕ_j no forman un conjunto fundamental.

Inversamente, si $W(\lambda) = 0$ para $\lambda = \lambda_n$, vamos a demostrar existe un vector ψ_n y unas constantes A, B, C, D tales que

$$\psi_n(x,\lambda_n) = A\phi_1 + B\phi_2 = C\phi_3 + D\phi_4$$

donde A y B no son ambas nulas(analogamente C y D tampoco), pues si lo fueran se trataban de la solucion trivial del sistema.

Para que ψ_n sea un autovector necesariamente ha de cumplir las condiciones de contorno:

$$[\psi_n \quad \phi_i] = [\psi_n \quad \phi_j] = 0$$

y sustituyendo aqui su valor se ve que lo verifica. Luego existe el autovector correspondiente a la raiz λ_n de $W(\lambda) = 0$.

La demostración puede completarse suponiendo que exista una solucion $y(x,\mu)$ para $\lambda = \mu$ tal que $W(\mu) \neq 0$. Entonces las cuatro funciones $\phi_i(x,\mu)$ $\phi_j(x,\mu)$ forman un conjunto fundamental para $(L - \lambda N)Y = 0$. Entonces

$$y(x,\mu) = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \phi_i + \sum_{j=3}^{4} \beta_j \phi_j$$

donde no todas las α_i y β_j son nulas.

Si $y(x,\mu)$ satisface las condiciones de contorno

$$\sum \alpha_i [\phi_i \quad \phi_i] + \sum \beta_j [\phi_j \quad \phi_i] = 0$$

$$\sum \alpha_i [\phi_i \quad \phi_j] + \sum \beta_j [\phi_j \quad \phi_j] = 0$$

y para que este sistema homogeneo tenga solucion no trivial, es necesario que el determinante de los coeficientes Δ sea cero $\quad \Delta = 0$.

Sin embargo
$$\Delta = - \omega(\mu) \neq 0$$
luego $\lambda = \mu$ no es un autovalor.

Usando =7= podemos completarlo diciendo que las raices de $\omega(\lambda) = 0$ son todas reales.

LEMA 1º

La condicion necesaria y suficiente para que $\phi_j(x,\lambda_n)$ $j=3,4$ sea linealmente dependiente de $\phi_i(x,\lambda_n)$ $i=1,2$ y viceversa es que $P_{ij} = 0$ para $\lambda = \lambda_n$ $\forall n$.

En efecto, por lo pronto $P_{12} = P_{34} = 0$ para $\forall\lambda$ por las condiciones de contorno impuestas. Supongamos que ϕ_j sea linealmente dependiente de ϕ_i, entonces existiran unas constantes A y B tales que
$$\phi_j(x,\lambda_n) = A\phi_1(x,\lambda_n) + B\phi_2(x,\lambda_n) \qquad j=3,4 .$$
luego para demostrar que $P_{1j} = P_{2j} = 0$ $\forall n$ basta hacer uso de 111.- en =4=, a saber
$$[\phi_1 \ \phi_j] = A[\phi_1 \ \phi_1] + B[\phi_1 \ \phi_2]$$
Inversamente, si todo $P_{ij} = 0$ para $\lambda = \lambda_n$, el lema estará totalmente probado si todo menor de orden tres de $\omega(\lambda)$ es nulo para $\lambda = \lambda_n$.

En efecto,
$$\begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1'+y_1 & y_2'+y_2 & y_3'+y_3 \end{vmatrix} = x_1'P_{23} - x_2'P_{13} + x_3'P_{12} = 0 .$$

El resultado es similar para cualquier otro menor de orden tres.

Para lo posterior es necesario lo siguiente :

LEMA 2ª

Si $U(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ y $V(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ son dos vectores de componentes reales o complejos tales que $U^T N(\bar{U})$ y $V^T N(\bar{V})$ sean integrables y se verifique $x_2 y_1 = x_1 y_2 + K$ entre sus componentes, entonces se cumple

$$\text{i)} \left| \int U^T(x) N(V(x))\,dx \right| \le \left\{ \int U^T(x) N(\overline{U(x)})\,dx \int V^T N(\overline{V(x)})\,dx \right\}^{1/2}$$

$$\text{ii)} \left| \int U^T(x) N(\overline{V(x)})\,dx \right| \le \left\{ \int U^T(x) N(\overline{U(x)})\,dx \int V^T N(\overline{V(x)})\,dx \right\}^{1/2}$$

$$\text{iii)} \left| \int \overline{U}^T(x) N(\overline{V(x)})\,dx \right| \le \left\{ \int U^T(x) N(\overline{U(x)})\,dx \int V^T N(\overline{V(x)})\,dx \right\}^{1/2}$$

$$\text{iv)} \left\{ \int (U(x) + V(x))^T N(\overline{U(x)} + \overline{V(x)})\,dx \right\}^{1/2} \le$$
$$\le \left\{ \int U^T(x) N(\overline{U(x)})\,dx \right\}^{1/2} + \left\{ \int V^T(x) N(\overline{V(x)})\,dx \right\}^{1/2}$$

donde estas desigualdades tienen ~~xxxx~~ lugar tanto para intervalo finito como infinito.

Para demostrarlas, hay que usar la trasformacion

$$X_i = \sqrt{p}\, x_i + \sqrt{r}\, y_i \qquad Y_i = \left[\left(\frac{x_i}{x_i'} - \frac{y_i}{y_i'} \right) x_i' y_i' \right]^{1/2}$$

con lo que se verifica

$$|X_1 X_2 + Y_1 Y_2|^2 \le (|X_1|^2 + |Y_1|^2)(|X_2|^2 + |Y_2|^2)$$

y utilizando la desigualdad de Schwarz se tiene i).

En efecto, $|X_1|^2 + |Y_1|^2 = |\sqrt{p}\,x_1 + \sqrt{r}\,y_1|^2 + \left|\left(\frac{x_1}{x_1'} - \frac{y_1}{y_1'}\right) x_1' y_1'\right|$

$$= p|x_1|^2 + r|y_1|^2 + 2\sqrt{pr}\,|x_1||y_1| + |x_1||y_1'| - |x_1'||y_1| = U^T N(\bar{U})$$

despues de tener en cuenta

$$q = (p.r)^{1/2}$$

Por otra parte

$$|X_1 X_2 + Y_1 Y_2| = \Big| (\sqrt{p}\,x_1 + \sqrt{r}\,y_1)(\sqrt{p}\,x_2 + \sqrt{r}\,y_2) +$$
$$+ \left(\left(\frac{x_1}{x_1'} - \frac{y_1}{y_1'} \right) x_1' y_1' x_2' y_2' \left(\frac{x_2}{x_2'} - \frac{y_2}{y_2'} \right) \right)^{1/2} \Big| =$$

$$= |p x_1 x_2 + 2\sqrt{pr}\,x_1 x_2 + r y_1 y_2 + ((x_1 y_1' - x_1' y_1)(x_2 y_2' - y_2 x_2'))^{1/2}|$$

el ultimo sumando equivale

$$(x_1x_2y_1'y_2' - x_1x_2y_1'x_2' - x_1'x_2y_1y_2' + x_1'x_2'y_1y_2)^{1/2} =$$

$$= (x_1^2y_2'^2 + y_1^2x_2'^2 - 2x_1x_2'y_1y_2')^{1/2} = ((x_1y_2' - x_2'y_1)^2)^{1/2}$$

habiendo utilizado

$$x_2y_1' = x_1y_2' \qquad x_1'y_2 = x_2'y_1$$

de lo que se deduce en primer lugar

$$x_2'x_1y_2y_1' = x_1'x_2y_1y_2'$$

con solo multiplicarlas miembro a miembro. Sumandolas tenemos $x_2y_1' + x_2'y_1 = x_1y_2' + x_1'y_2$

o sea $d/dx(x_2y_1) = d/dx(x_1y_2)$ lo que implica

$x_2y_1 = x_1y_2 + K$ que es la condicion que se impuso entre los coeficientes, con lo que

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 = U^T N(V)$$

Una vez demostrada i), son analogas ii) y iii). Para iV) hay que utilizar ii).

Analogo a la forma usual podemos definir :

Sea una sucesion $f_n(x) = \begin{pmatrix} f_{n1}(x) \\ f_{n2}(x) \end{pmatrix}$ de vectores reales o complejos, tales que para todo n $f_n^T(x)N(\overline{f_n(x)}) \in L$; entonces si $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ es un vector tal que $f(x)N(\overline{f(x)})$ L, y si la integral

$$\int (f_n(x) - f(x))^T N(\overline{f_n(x)} - \overline{f(x)})dx$$

tiende a cero cuando n tiende a infinito, decimos que $f_n(x)$ converge en medio hacia $f(x)$.

Con esto obtenemos un resultado analogo al teorema de Riesz-Fischer (Riesz and Nagy pag 58-59) que expresaremos de la siguiente forma :

LEMA 3ª.-

Sea una sucesion $f_n(x)$ de vectores $f_n(x) = \begin{pmatrix} f_{n1}(x) \\ f_{n2}(x) \end{pmatrix}$

Para que exista un vector $f(x)$ al que converja en media, es necesario y suficiente que

$$\int (f_m(x) - f_n(x))^T M(\overline{f_m(x)} - \overline{f_n(x)})dx$$

tienda a cero cuando m,n tienden a infinito.

En efecto, para demostrar lo necesario, basta utilizar iV) del lema anterior, y entonces

$$\left\{\int (f_n - f)^T M(\overline{f}_n - \overline{f})dx\right\}^{1/2} + \left\{\int (f - f_m)^T M(\overline{f} - \overline{f}_m)dx\right\}^{1/2} \geq$$

$$\left\{\int (f_n - f + f - f_m)^T M(\overline{f}_n - \overline{f} + \overline{f} - \overline{f}_m)dx\right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{\int (f_n - f_m) M(\overline{f}_n - \overline{f}_m)dx\right\}^{1/2}$$

que tiende a cero cuando f_n y f_m tienden a $f(x)$.

Para demostrar lo suficiente, tomemos una sucesion m_i

$$m_1 < m_2 < \ldots\ldots$$

Para $n > m_k$ hagamos $\int (f_n - f_{mk})^T M(\overline{f}_n - \overline{f}_{mk})dx < 2^{-K}$

En particular $\int (f_{m_{k+1}} - f_{m_k})^T M(\overline{f}_{m_{k+1}} - \overline{f}_{m_k}) < 2^{-K}$

luego $\sum_{K=1}^{\infty} \int (f_{m_{k+1}} - f_{m_k})^T M(\overline{f}_{m_{k+1}} - \overline{f}_{m_k}) < \sum_{K=1}^{\infty} 2^{-K}$

con lo que la serie $\sum (f_{m_{k+1}} - f_{m_K})$ converge hacia un limite $f(x)$. Ademas

$$\left\{\int f_{mK}^T M(\overline{f}_{mk})dx\right\}^{1/2} \leq \left\{\int f_{m1}^T M(\overline{f}_{m1})\right\}^{1/2} +$$

$$+ \left\{\int (f_{mk} - f_{m1})^T M(\overline{f}_{mk} - \overline{f}_{m1})\right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \left\{\int f_{m1}^T M(\overline{f}_{m1})dx\right\}^{1/2} + 1/2$$

resulta que $\int (f_{mk})^T M(\overline{f}_{mk})dx$ quedan acotadas, luego entonces existe

$$\int f(x)^T M(\overline{f(x)})dx$$

Haciendo igual con $\{f_{mk} - f_n\}$ con n fijo $n > m_r$

$k > r$ $\quad \left\{\int (f_{mk} - f_n)^T N(\bar{f}_{mk} - \bar{f}_n)\right\}^{1/2} \le$

$$\le \left\{\int (f_{mk} - f_{mr})^T N(\bar{f}_{mk} - \bar{f}_{mr})\right\}^{1/2} + \left\{\int (f_{mr} - f_n)^T N(\bar{f}_{mr} - \bar{f}_n)\right\}^{1/2} <$$

$$< 2.2^{-r} = 2^{-r+1}$$

luego $\int (f(x) - f_n(x))^T N(\overline{f(x)} - \overline{f_n(x)})dx \le 2^{-r+1}$

y haciendo crecer n indefinidamente, se obtiene finalmente

$$\int (f(x) - f_n(x))^T N(\overline{f(x)} - \overline{f_n(x)})dx \to 0 \qquad \text{c.q.d}$$

Tambien se verifica

Si $f_n(x)$ converge en media hacia $f(x)$ y $g_n(x)$ converge en media hacia $g(x)$, entonces

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n^T N(\bar{g}_n)dx = \int f(x)^T N(\overline{g(x)})dx$$

= 10 =

Vamos a hacer un estudio de la naturaleza de los ceros de la ecuacion $W(\lambda) = 0$ y de ello vamos a sacar importantes conclusiones respecto las autofunciones.

Para $\lambda = \lambda_n$, dos casos pueden presentarse :

1.- $W(\lambda_n) = 0$ con algun $P_{ij} \neq 0$

11.- $W(\lambda_n) = 0$ con todo $P_{ij} = 0$

Para el primer caso, consideremos uno de ellos, concretamente el $P_{23} \neq 0$. El procedimiento es por completo analogo si supusiesemos cualquier otro distinto de cero. Existe entonces, correspondiente al valor λ_n, un autovector ψ_n tal que

$$\Psi_n(x,\lambda_n) = A\phi_1 + B\phi_2 = C\phi_3 + D\phi_4$$

donde las constantes A,B y C,D como antes, no son todas nulas simultaneamente.

Por ser $\Psi_n(x,\lambda_n)$ una autofuncion, por =5=, se cumplirá

$$[\Psi_n\ \ \phi_3] = AP_{13} + BP_{23} = 0$$

$$[\Psi_n\ \ \phi_2] = CP_{23} + DP_{24} = 0$$

Como hemos supuesto $P_{23} \neq 0$, entonces si $A = 0$ implicaria $B = 0$, luego $A \neq 0$ ya que ambos simultaneamente no pueden ser nulas. Igual sucede con la segunda ecuacion, y por tanto $D \neq 0$.

Resolviendo el sistema

$$B = -\frac{AP_{13}}{P_{23}} \qquad\qquad C = -\frac{DP_{24}}{P_{23}}$$

Sustituyendo estos valorès de las constantes en la expresion del autovector Ψ_n,

$$A\phi_1 - AP_{13}/P_{23}\cdot\phi_2 = D\phi_4 - DP_{24}/P_{23}\cdot\phi_3$$

y operando

$$A(\phi_1 P_{23} - \phi_2 P_{13}) = D(\phi_4 P_{23} - \phi_3 P_{24})$$

Por otra prte sabiamos

$$J(\lambda) = -P_{13}P_{24} + P_{14}P_{23} = 0$$

$$J'(\lambda) = P_{14}P'_{23} + P_{23}P'_{14} - P_{13}P'_{24} - P_{13}P'_{24}$$

Ahora bien,

$$\int_a^b (P_{23}\ {}_1 - P_{13}\ {}_2)^T B (P_{24}\ {}_3 - P_{23}\ {}_4)\,dx =$$

$$\int P_{23}(P'_{23}P_{14} + P_{23}P'_{14} - P'_{13}P_{24} - P_{13}P'_{24})\,dx =$$

$$= P_{23}J'(\lambda)$$

utilizando la relación

$$<\phi_i\, M\phi_j> = \int_a^b \phi_i(a/x,\lambda)^T M(\phi_j(b/x,\lambda))dx = -d/d\lambda P_{ij}$$

y habiendo sustituido el termino $P_{13}P_{24}$ por el $P_{14}P_{23}$ en virtud de $W(\lambda) = 0 = P_{14}P_{23} - P_{13}P_{24}$ para $\lambda = \lambda_n$

luego

$$-P_{23}\, W'(\lambda) = \frac{A}{D}\int_a^b (P_{23}\phi_1 - P_{13}\phi_2)^T M(P_{23}\phi_1 - P_{13}\phi_2)dx$$

Aqui aparecen dos casos, que $P_{23}\phi_1 - P_{13}\phi_2$ sea $\neq 0$ ó $=0$.

En el primero de ellos, dicha integral será definida positiva y como $P_{23} \neq 0$ por hipotesis, tenemos finalmente

$$W'(\lambda) \neq 0$$

luego $\lambda_n = \lambda$ es un cero simple.

En este caso el autovector correspondiente al autovalor λ_n cuando este es un cero simple, resulta ser un multiplo constante de

$$P_{23}\phi_1 - P_{13}\phi_2$$

o de

$$P_{23}\phi_4 - P_{24}\phi_3$$

En particular, el autovector correspondiente al autovalor λ_n debidamente normalizado será :

$$\psi_n(x) = \left[\frac{k_n}{P_{23}(\lambda_n)\, W'(\lambda_n)}\right]^{1/2} \cdot \left[P_{23}(\lambda_n)\phi_1(x,\lambda_n) - P_{13}(\lambda_n)\phi_2(x,\lambda_n)\right]$$

Para el caso en que $P_{23}\phi_1 - P_{13}\phi_2 = 0$, entonces no se puede afirmar que sea raiz simple, pero siempre sucederá que el autovector sea multiplo de $P_{23}\phi_1 - P_{13}\phi_2$ y si este es nulo, tenemos entonces la solucion trivial que habiamos excluido. Este caso pues, no puede presentarse, quedandonos finalmente $W'(\lambda_n) \neq 0$, y por tanto λ_n es una raiz simple.

Para el segundo caso, que todo $P_{ij} = 0$ para $\lambda = \lambda_n$

entonces $$W(\lambda_n) = P_{14}P_{23} - P_{24}P_{13} = 0$$

$$W'(\lambda_n) = P'_{14}P_{23} + P_{14}P'_{23} - P'_{24}P_{13} - P_{24}P'_{13} = 0$$

$$W''(\lambda_n) = 2(P'_{14}P'_{23} - P'_{13}P'_{24}) + P_{14}P''_{23} + P_{23}P''_{14} -$$

$$-P_{13}P''_{24} - P_{24}P''_{13} =$$

$$= 2(P'_{14}P'_{23} - P'_{13}P'_{24})$$

Haciendo uso del lema 1º de =9=, entonces

$$\phi_3 = A\phi_1 + B\phi_2$$
$$\phi_4 = C\phi_1 + D\phi_2$$

donde $$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \Delta \neq 0$$

Sea $I_{ij} = I_{ij}(\lambda_n) = \langle \phi_i \quad N\phi_j \rangle = \langle \phi_j \quad N\phi_i \rangle = I_{ji}$

Utilizando en el sistema la relación $\langle \phi_i \quad N\phi_j \rangle =$
$= - d/d\lambda\, P_{ij}$ se verifica

$$-P'_{13} = AI_{11} + BI_{12} \qquad -P'_{23} = AI_{12} + BI_{22}$$

$$-P'_{14} = CI_{11} + DI_{12} \qquad -P'_{24} = CI_{12} + DI_{22}$$

La expresion de $W''(\lambda_n)$ pasará a ser

$$W''(\lambda_n) = 2(P'_{14}P'_{23} - P'_{13}P'_{24}) =$$
$$= 2\Delta(I_{12}^2 - I_{11}I_{22})$$

Ahora bien, $$I_{12}^2 = \left\{\int_a^b \phi_1^T N\phi_2\, dx\right\}^2 < \int_a^b \phi_1^T N\phi_1\, dx \int_a^b \phi_2^T N\phi_2\, dx$$

donde el signo igual se ha omitido por ser ϕ_1 y ϕ_2 linealmente independientes y despues de usar el lema 2º de =9=.

Luego $I_{12}^2 < I_{11}I_{22}$ lo que equivale a afirmar que $W''(\lambda_n) \neq$

Es por tanto λ_n un autovalor doble (solucion de $W(\lambda_n)=0$

de orden dos). El autovector correspondiente será en realidad dos autovectores, uno el $\psi_n^1(x, \lambda_n)$ multiplo constante de ϕ_3 y el $\psi_n^2(x,\lambda_n)$ multiplo de ϕ_4, ya que ambos son combinaciones lineales de ϕ_1 y de ϕ_2, siendo entre ellos linealmente independientes y ortogonales, en el sentido

$$\langle\psi_n^1 \quad \psi_n^2\rangle = 0$$

pues basta con tener en cuenta

$$\langle\phi_3(x,\lambda_n) \quad N(\phi_4(x,\lambda_n))\rangle = 0$$

que es posible por ser ϕ_3 y ϕ_4 combinaciones lineales de ϕ_1 y ϕ_2 y por lo tanto

$$\left[\phi_3(x,\lambda_n),\ \phi_4(x,\lambda_n)\right]_a^b = 0$$

Una combinacion lineal de $\psi_n^1(x,\lambda_n)$ y $\psi_n^2(x,\lambda_n)$ definida en la forma

$$\psi_n(x,\lambda_n) = \frac{A_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}\psi_n^1(x,\lambda_n) + \frac{B_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}\psi_n^2(x,\lambda_n)$$

donde

$$A_n = \int_a^b \psi_n^1(x,\lambda_n)^T N(f(x))dx$$

$$B_n = \int_a^b \psi_n^2(x,\lambda_n)^T N(f(x))dx$$

y $f(x)$ es un vector tal que $f(x)^T N(f(x)) \in L(a,b)$ es el autovector correspondiente al autovalor λ_n cuando λ_n es un cero doble de $D(\lambda) = 0$.

La elección de los valores A_n y B_n hacen que ψ_n sea un vector normalizado, es decir

$$\int_a^b \psi_n(x,\lambda_n)^T N(\psi_n(x,\lambda_n))dx = 1$$

= 11 =

Analogo al metodo de Titchmarsh, que supone dos funciones ψ y ϕ que satisfacen la ecuacion $(L - \lambda)Y = 0$ tales que $J(\psi\,\phi) = 1$, nosotros elegimos dos vectores θ_i en correspondencia con los ϕ_i $i=1,2$ que determinan las condiciones de contorno

$$\theta_i = \theta_i(x,\lambda) = \{x_j \quad y_j\} \quad (i=1\ j=3,\ i=2\ j=4)$$

de forma que satisfagan la ecuacion propuesta, tomen valores reales en los limites del intervalo y verifiquen

$$[\theta_1 \quad \theta_2] = 0$$

$$[\phi_r \quad \theta_s] = -1^s\,\delta_{rs} \qquad (r,s = 1,2)$$

donde δ_{rs} es el delta de Kronecker. Estos vectores toman valores independientes de λ en x=a y son funciones enteras de λ.

Para estos cuatro vectores ϕ_i, θ_i el determinante wronskiano vendrá dado por

$$W_\phi(\lambda) = [\phi_1 \quad \phi_2][\theta_1 \quad \theta_2] - [\phi_1 \quad \theta_2][\phi_2 \quad \theta_2] + [\phi_1 \quad \theta_2][\phi_2 \quad \theta_1] = 1$$

por lo que estos vectores forman un conjunto fundamental. La solucion general de la ecuacion $(L - \lambda M)Y = 0$ vendrá dada por

$$c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\theta_1 + c_4\theta_2$$

donde los c_i son constantes.

En el caso de que el sistema sea el no homogeneo, es decir, $(L - \lambda M)Y = -M(f)$, puede emplearse el metodo de variacion de constantes y demostrar que existe una solución particular $U_o(x)$ que es funcion entera de λ y tal que U_o y U_o' son nulos para x=a.

La solucion general de la no homogenea, se obtendrá añadiendo $U_o(x\lambda)$ a la correspondiente solucion general del sistema no homogeneo. La solución pués será

$$U(x\lambda) = U_o(x\lambda) + A\phi_1(x\lambda) + B\phi_2(x\lambda) + C\theta_1(x\lambda) + D\theta_2(x\lambda)$$

donde A,B,C,D son constantes a determinar.

Para ello, como $U(x\lambda)$ satisface las condiciones de contorno, para el x=a tenemos :

$$0 = [U\ \phi_i] = [U_o\ \phi_i] + C[\theta_1\ \phi_i] + D[\theta_2\ \phi_i] \qquad i=1,2$$

y como U_o y U'_o son nulos en x=a, entonces

$$[U_o\ \phi_i](a) = 0$$

lo que implica que

$$C = D = 0$$

luego

$$U(x\lambda) = U_o(x\lambda) + A\phi_1(x\lambda) + B\phi_2(x\lambda)$$

Analogamente en el punto x=b

$$0 = [U_o\ \phi_j] = [U_o\ \phi_j] + A[\phi_1\ \phi_j] + B[\phi_2\ \phi_j] \quad j=3,4$$

que nos servirá para determinar los valores de A y B, pues resolviendo el sistema para j=3, y j=4, nos resulta

$$A = \frac{P_{24}[U_o\ \phi_3] - P_{23}[U_o\ \phi_4]}{P_{13}P_{24} - P_{23}P_{14}}$$

$$B = \frac{P_{13}[U_o\ \phi_4] - P_{14}[U_o\ \phi_3]}{P_{13}P_{24} - P_{23}P_{14}}$$

donde se observa que las expresiones de los denominadores son formas del wronskiano que para que sea $\neq 0$ es necesario que $\lambda \neq \lambda_n$, luego si λ no es un autovalor, existe una unica solución del sistema completo que es analitica respecto a λ y que satisface las condiciones de contorno.

Puede afirmarse ademas, pues es posible estudiar las circunstancias que envuelven a los valores A y B ya calculados cuando precisamente λ es un autovalor.

Para ello de momento basta decir que aparecen dos casos a estudiar, dependiendo de que el autovalor sea raiz simple o doble de $J(\lambda) = 0$. Para ello, si es raiz simple, como los denominadores son nulos, tambien han de serlo los numeradores para poder aplicar la regla de L'Hopital a la indeterminacion y sacar posteriormente consecuencias, dado que en este caso la derivada de la expresion del wronskiano es no nula.

En el segundo caso, como $J' = 0$, pero $J'' \neq 0$, debe ser nula la expresion de los numeradores y de sus derivadas primeras para poder resolver la indeterminacion por el mismo procedimiento.

Las consecuencias que se obtienen, que en principio parece van a ser meras condiciones complementarias sin mayor interes, resultan valiosas en extremo, ya que por lo pronto permiten obtener una condicion necesaria y suficiente para la unicidad de la solucion para el sistema no homogeneo. Posteriormente, este resultado lo utilizaremos para demostrar una de las mas importantes conclusiones : la identidad de Parseval.

Consideremos el primer caso :

En él al menos un $P_{ij} \neq 0$, y concretamente supusimos el P_{23}; ademas, $J'(\lambda) \neq 0$. Entonces A y B podrán determinarse como limites unicos cuando $\lambda = \lambda_n$ si y solo si

$$P_{24}\left[U_0 \quad \phi_3\right] - P_{23}\left[U_0 \quad \phi_4\right] = 0 \qquad (1)$$

$$P_{13}\left[U_o \quad \phi_4\right] - P_{14}\left[U_o \quad \phi_3\right] = 0$$

Para $\lambda = \lambda_n$, $\Delta(\lambda_n) = 0 = P_{14}P_{23} - P_{13}P_{24}$; de esto ultimo se deduce

$$P_{14}P_{23}\phi_3 = P_{13}P_{24}\phi_3$$

$$P_{14}P_{23}\phi_3 - P_{13}P_{23}\phi_4 = P_{13}P_{24}\phi_3 - P_{13}P_{23}\phi_4$$

Y por ser $P_{23} \neq 0$

$$P_{14}\phi_3 - P_{13}\phi_4 = \frac{P_{13}}{P_{23}}(P_{24}\phi_3 - P_{23}\phi_4)$$

Ahora bien, el autovector ψ_n correspondiente al autovalor λ_n es un multiplo constante de $P_{23}\phi_4 - P_{24}\phi_3$ de lo que se deduce

$$\left[U_o \quad \psi_n\right](a) = 0 \qquad \left[U_o \quad \psi_n\right](b) = 0$$

ya que

$$\left[U_o \ \psi_n\right] = \left[U_o \quad P_{24}\phi_3 - P_{23}\phi_4\right] =$$

$$P_{24}\left[U_o\ \phi_3\right] - P_{23}\left[U_o \quad \phi_4\right] = 0 \quad \text{por (1)}$$

Respecto al segundo caso, para $\lambda = \lambda_n$, todo $P_{ij} = 0$ y $\Delta'(\lambda) = 0$ $\Delta''(\lambda) \neq 0$. Entonces A y B existen como limites unicos si y solo si

$$P'_{23}\left[U_o \quad \phi_4\right] - P'_{24}\left[U_o\ \phi_3\right] = 0$$

$$P'_{13}\left[U_o \quad \phi_4\right] - P'_{14}\left[U_o \quad \phi_3\right] = 0$$

luego

$$\left[U_o \quad \phi_3\right] = \left[U_o \quad \phi_4\right] = 0$$

ya que $\quad P'_{14}P'_{23} - P'_{24}P'_{13} = \Delta''(\lambda)/2 \neq 0$

El autovector ψ_n está dado ahora por una combinacion lineal de ψ_n^1 y de ψ_n^2, y como estos son multiplos constantes de ϕ_3 y de ϕ_4, entonces cuando $\lambda \to \lambda_n$

$$\left[U_o \quad \psi_n^1\right] = 0 \qquad \left[U_o \quad \psi_n^2\right] = 0 \qquad \text{para } x=a, x=b$$

luego

$$\left[U_0,\ \psi_n\right](a) = 0 \qquad \left[U_0,\ \psi_n\right](b) = 0$$

Es decir, en un caso como en otro hemos llegado a la conclusion

$$\left[U_0,\ \psi_n\right] = 0 \qquad (2)$$

en los extremos del intervalo.

Por otra parte, como

$$(L - \lambda_n N)U_0 = -N(f)$$

$$(L - \lambda_n N)\psi_n = 0$$

entonces $\quad \langle \psi_n,\ N(f) \rangle = 0 \qquad (3)$

En efecto,

$$\langle \psi_n,\ N(f)\rangle = \langle \psi_n,\ (\lambda_n N - L)U_0\rangle = \langle \psi_n,\ \lambda_n N(U_0)\rangle -$$

$$- \langle \psi_n,\ LU_0\rangle = \lambda_n \langle \psi_n,\ N(U_0)\rangle -$$

$$-\left[\psi_n,\ U_0\right]_a^b - \langle L\psi_n,\ U_0\rangle =$$

$$= \lambda_n \langle \psi_n,\ N(U_0)\rangle - \lambda_n \langle \psi_n,\ N(U_0)\rangle = 0$$

despues de haber aplicado el teorema de Green y la conclusion (2).

Inversamente, si sucede (3), se verifica

$$\left[U_0,\ \psi_n\right] = 0$$

en los extremos del intervalo. Podemos por tanto invertir los argumentos empleados en los casos primero y segundo y probar que A y U existen como limites unicos cuando $\lambda \rightarrow \lambda_n$ si y solo si se verifica (3).

Es decir, la condicion necesaria y suficiente para la existencia de una solucion unica y analitica de la ecuacion no homogenea, que satisfaga las condiciones impuestas en los extremos del intervalo, es que se verifique

$$\langle \psi_n,\ N(f)\rangle = 0$$

Vamos ahora a demostrar el siguiente

TEOREMA

Si $\psi_n(x)$ es el autovector correspondiente al autovalor λ_n; si $f(x) = \{f_1 \quad f_2\}$ es el vector del segundo miembro en la ecuacion no homogenea que posee derivadas continuas hasta el segundo orden, y si ademas

$$< \psi_n \quad M(f(x)) > \; = 0 \qquad \forall n$$

entonces f_1 y f_2 son identicamente nulas.

Por =11= sabemos bajo que condiciones existe una solucion unica del sistema no homogeneo, que satisface las condiciones de contorno y que es funcion entera de λ. Si $U_1 = \{u, v\}$ es una tal solucion, podemos desarrollarla en serie Taylos de la forma

$$U_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n Y_n$$

donde $Y_n = \{y_n^o \quad z_n\} = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|\lambda|=R} U_1(x\lambda)/\lambda^{n+1} d\lambda$

entonces $$|Y_n| \leq \frac{\max |U_1(x,R)|}{R^n} \leq \frac{M(R)}{R^n}$$

donde $M(R)$ es independiente de x en todo el intervalo.

Entonces $$\sum_0^{\infty} \lambda^n Y_n \leq M(R) \sum_0^{\infty} (R'/R)^n \quad \text{con } |\lambda| \leq R' < R$$

y por tanto la serie converge uniformemente para $x \in (a,b)$ y $|\lambda| \leq R' < R$.

Por otra parte, como U_1 satisface las condiciones de contorno impuestas, tenemos

$$0 = [U_1 \quad \phi_i] = \sum \lambda^n [Y_n \quad \phi_i] \quad i=1,2$$

$$0 = [U1 \quad \phi_j] = \sum \lambda^n [Y_n \quad \phi_j] \quad j=3,4$$

luego $\quad [Y_n \quad \phi_i] = [Y_n \quad \phi_j] = 0$

Analogamente $\quad [Y_m \quad \phi_i] = [Y_m \quad \phi_j] = 0$

y por =5= tenemos

$$[Y_m \quad Y_n](a) = [Y_m \quad Y_n](b) = 0$$

Sustituyendo el valor de U_1 por sus serie en la ecuacion $(L - \lambda M)U_1 = -M(f)$ e igualando los coeficientes de λ^n en ambos miembros, tenemos

$$LY_n = M(Y_{n-1}) \qquad n \geqslant 0$$

donde $\quad Y_{-1} = \{y_{-1} \quad z_{-1}\} = \{-M(f_1), \quad -M(f_2)\}$

Analogamente $\quad LY_m = M(Y_{m-1}) \qquad m \geqslant 0$

Aplicando el teorema de Green a esta ultima expresión, y teniendo en cuenta $[Y_m \quad Y_n](x) = $ para $x = 0$ para $x=a, x=b$, tenemos

$$\langle Y_n \quad M(Y_{m-1}) \rangle = \langle Y_m \quad M(Y_{n-1}) \rangle$$

Haciendo un cambio de notacion y llamando

$$w_r = \langle Y_o \quad M(Y_r) \rangle$$

tendremos por reiterada aplicacion de la ultima expresion

$$\langle Y_n \quad M(Y_m) \rangle = \langle Y_{n+1} \quad M(Y_{m-1}) \rangle = \dots = \langle Y_o \quad M(Y_{m+n}) \rangle =$$
$$= w_{m+n}$$

En particular $w_{2n} = \langle Y_n \quad M(Y_n) \rangle = \langle Y_{n+1} \quad M(Y_{n-1}) \rangle \geqslant 0$

Ahora bien,

$$\langle Y_o \quad M(U_1) \rangle = \sum \lambda^n \langle Y_o \quad M(Y_n) \rangle = \sum \lambda^n w_n$$

y esta serie es absolutamente convergente para todo valor de λ. Por tanto, la serie $\sum \lambda^{2n} w_{2n}$ es convergente para todo λ.

Toda la demostracion se basa en que siendo la serie convergente, y ser estos todos los terminos positivos, usando propiedades de los w_{2n}, se puede encontrar algun valor de λ tal que haga la serie divergente. Esta contradiccion viene de suponer $w_{2n} > 0$, y como siempre $w_{2n} \geqslant 0$, obtengo precisamente lo que pretendia, que $Y_o = 0$.

En efecto, por el lema 2º de -3-, se deduce

$$\{ < Y_{m-1} \quad N(Y_{m+1}) > \}^2 \leq < Y_{m-1} \quad N(Y_{m-1}) > . < Y_{m+1} \quad N(Y_{m+1}) >$$

que en terminos de w_i equivale a

$$w_{2m}^2 \leq w_{2m-2} . w_{2m+2}$$

dando a m valores de 1 a m-1 y multiplicando estas desigualdades, suponiendo w_n es mayor que cero para todo n, tenemos

$$w_{2m-2} w_2 \leq w_{2m} w_o \qquad \text{luego} \qquad w_{2m} \leq w_{2m-2} w_2 / w_o$$

analogamente

$$w_{2m-2} \leq w_{2m-4} w_2 / w_o$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$w_2 \leq w_o w_2 / w_o$$

sustituyendo

$$w_{2m} \geqslant w_{2m-2} w_2 / w_o \geqslant w_{2m-4} (w_2 / w_o)^2 \geqslant \cdots\cdots \geqslant w_o (w_2 / w_o)^m$$

con lo que la serie

$$\sum \lambda^{2m} w_{2m} \geqslant w_o \sum (\lambda (w_2 / w_o)^{1/2})^{2m}$$

y esta diverge para el valor $\lambda = (w_o / w_2)^{1/2}$ lo cual es imposible. La contradiccion viene de suponer $w_{2n} > 0 \quad \forall n$, y como estos son siempre mayores o iguales que cero, esto implica $w_{2n} = 0$ para todo n, luego $Y_n = 0$ para todo n, y en particular

$$Y_{-1} = \left\{ f_1 , f_2 \right\} = 0 \Rightarrow f_1 = f_2 = 0 \quad \text{c.q.d}$$

Puede afirmarse entonces que los autovectores $\Psi_n(x)$ forman un conjunto completo, y por tanto se verifica la identidad de Parseval :

Si el vector $f(x)$ es tal que $f^T H(f) \in L$ y $C_n = \langle \Psi_n , H(f) \rangle$ son sus coeficientes de Fourier, entonces

$$\sum^{\infty} C_n^2 = \langle f(x) , H(f(x)) \rangle$$

El paso siguiente en nuestro estudio es la construccion de la matriz de Green, que me permite expresar mediante una ecuacion integral la solucion de la ecuacion propuesta, con sus condiciones de contorno.

Podremos construir dicha matriz $G(x,y,\lambda)$ solo en el caso en que $\omega(\lambda) \neq 0$, (cuando λ no sea un autovalor, y ϕ_i , ϕ_j forman pues un conjunto fundamental). Para ello, representaremos

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} = G(x,y,\lambda)$$

de forma que cumpla las propiedades usuales. En efecto, por no ser λ un autovalor

$$G(x,y,\lambda) = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \phi_i(a/x,\lambda) + \sum_{j=3}^{4} A_j \phi_j(b/x,\lambda) \qquad y < x$$

$$G^T(y,x,\lambda) = \sum_{i=1}^{2} B_i \phi_i(a/x,\lambda) + \sum_{j=3}^{4} \beta_j \phi_j(b/x,\lambda) \qquad x < y$$

donde los coeficientes estan aun por determinar. Para ello, imponemos a G las condiciones de contorno

$$0 = [G \quad \phi_i] = \sum_i \alpha_i [\phi_i \quad \phi_i] + \sum_j A_j [\phi_i \quad \phi_j]$$

luego

$$A_3 P_{13} + A_4 P_{14} = 0$$

$$A_3 P_{23} + A_4 P_{24} = 0$$

y teniendo en cuenta que $W(\lambda) = P_{13}P_{24} - P_{14}P_{23} \neq 0$ se deduce $A_3 = A_4 = 0$. Analogamente $B_3 = B_4 = 0$.

Para determinar α_i y β_i se utiliza la discontinuidad de G en su tercera derivada en el punto x = y, con lo que

$$\sum_{i=1}^{2} \alpha_i \, \phi_i^{(k-1)}(a/x,\lambda) - \sum_{j=3}^{4} \beta_j \, \phi_j^{(k-1)}(b/x,\lambda) = \delta_{k4} =$$

$$G(x-0,x) - G(x+0,x)$$

para $1 \leq k \leq 4$.

Resolviendo el sistema se obtienen los valores

$$\alpha_1 = \frac{P_{24}\phi_3 - P_{23}\phi_4}{W(\lambda)} \qquad \alpha_2 = \frac{P_{13}\phi_4 - P_{14}\phi_3}{W(\lambda)}$$

luego

$$G(x,y,\lambda) = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2$$

puesta en forma de matriz, sus componentes serán

$$G_{11} = \frac{(P_{24}x_3 - P_{23}x_4)x_1 + (P_{13}x_4 - P_{14}x_3)x_2}{W(\lambda)}$$

$$G_{12} = ((P_{24}y_3 - P_{23}y_4)x_1 + (P_{13}y_4 - P_{14}y_3)x_2)/W(\lambda)$$

$$G_{21} = ((P_{24}x_3 - P_{23}x_4)y_1 + (P_{13}x_4 - P_{14}x_3)y_2)/W(\lambda)$$

$$G_{22} = ((P_{24}y_3 - P_{23}y_4)y_1 + (P_{13}y_4 - P_{14}y_3)y_3)/W(\lambda).$$

Utilizando la notacion de Mitsky, sean

$$\begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{pmatrix} = \Psi(x) \qquad \Lambda(x) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

Notaremos por $A_{\cdot j}$ y $A^T_{\cdot j}$ el vector de la columna j de A y A^T respectivamente. Sean

$$\Psi_{.1}^{T}(x) = \frac{P_{24\,3}(b/x,\lambda) - P_{23\,4}(b/x,\lambda)}{W(\lambda)}$$

$$\Psi_{.2}^{T}(x) = \frac{P_{13\,4}(b/x,\lambda) - P_{14\,3}(b/x,\lambda)}{W(\lambda)}$$

Entonces

$$G(x,y,\lambda) = \begin{cases} \mathcal{G}(x,y,\lambda) & y < x \\ \mathcal{G}^{T}(y,x,\lambda) & y > x \end{cases}$$

donde

$$\mathcal{G}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{11} & \mathcal{G}_{12} \\ \mathcal{G}_{21} & \mathcal{G}_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\Psi_{11}(x) \quad \Psi_{21}(x)\right)\begin{pmatrix} x_1(y) \\ x_2(y) \end{pmatrix} & \left(\Psi_{12}(x) \quad \Psi_{22}(x)\right)\begin{pmatrix} x_1(y) \\ x_2(y) \end{pmatrix} \\ \left(\Psi_{11}(x) \quad \Psi_{21}(x)\right)\begin{pmatrix} y_1(y) \\ y_2(y) \end{pmatrix} & \left(\Psi_{12}(x) \quad \Psi_{22}(x)\right)\begin{pmatrix} y_1(y) \\ y_2(y) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Para los vectores que determinan las condiciones de contorno ϕ_i y para los vectores anteriores $\Psi_i(x)$ tenemos el siguiente

LEMA

i) $\Psi_{11}y_1 + \Psi_{21}y_2 - \Psi_{12}x_1 - \Psi_{22}x_2 = 0$

ii) $\Psi'_{11}x_1 + \Psi'_{21}x_2 - \Psi_{11}x'_1 - \Psi_{21}x'_2 = -1$

iii) $\Psi'_{11}y_1 + \Psi'_{21}y_2 - \Psi_{12}x'_1 - \Psi_{22}x'_2 = 0$

iv) $\Psi'_{12}x_1 + \Psi'_{22}x_2 - \Psi_{11}y'_1 - \Psi_{21}y'_2 = 0$

v) $\Psi'_{12}y_1 + \Psi'_{22}y_2 - \Psi_{12}y'_1 - \Psi_{22}y'_2 = -1$

Su demostracion es una mera comprobacion. Como ejemplo sirva una de ellas, la i).

Escribiendo explicitamente :

$$y_1(x_3(x_2y_4' - y_4x_2' + y_2x_4' - x_4y_2' + x_2y_4 - x_4y_2)$$
$$-x_4(x_2y_3' - y_3x_2' + y_2x_3' - x_3y_2' + x_2y_3 - x_3y_2)) \quad +$$
$$y_2(x_4(x_1y_3' - y_3x_1' + y_1x_3' - x_3y_1' + x_1y_3 - x_3y_1)$$
$$-x_3(x_1y_4' - y_4x_1' + y_1x_4' - x_4y_1' + x_1y_4 - x_4y_1)) \quad -$$
$$x_1(y_3(x_2y_4' - y_4x_2' + y_2x_4' - x_4y_2' + x_2y_4 - x_4y_2)$$
$$-y_4(x_2y_3' - y_3x_2' + y_2x_3' - x_3y_2' + x_2y_3 - x_3y_2)) \quad -$$
$$x_2(y_4(x_1y_3' - y_3x_1' + y_1x_3' - x_3y_1' + x_1y_3 - x_3y_1)$$
$$-y_3(x_1y_4' - y_4x_1' + y_1x_4' - x_4y_1' + x_1y_4 - x_4y_1)) \quad =$$

despues de reducir los elementos comunes

$$= \quad x_1y_2' - y_2x_1' + y_1x_2' - x_2y_1' + x_1y_2 - x_2y_1 \quad +$$
$$x_3y_4' - y_4x_3' + y_3x_4' - x_4y_3' + x_3y_4 - x_4y_3 \quad =$$
$$[\phi_1 \quad \phi_2] \; + \; [\phi_3 \quad \phi_4] \; = 0$$

usando que $[\phi_1 \quad \phi_2] = [\phi_3 \quad \phi_4] = 0$

= 15 =

Sea $f(x) = \{ f_1(x) \quad f_2(x) \}$ un vector cuyas compoenentes son continuas y de valores reales definidas para $a \leq x \leq b$, y supongamos que λ no es un autovalor. Podemos entonces definir un nuevo vector

$$\Phi = \Phi(x\lambda) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x,\lambda) \\ \Phi_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

tal que

$$\Phi(x,\lambda) = \int_a^b G_{ij}(x,y\lambda)\, N(f(y))\, dy$$

siendo la matriz G_{ij} la estudiada en =13=.

Usando el lema de =14=, se puede demostrar, mediante una simple sustitucion directa, que $\Phi(x,\lambda)$ satisface la ecuacion $(L - \lambda N)Y = - N(f)$ asi como las condiciones $M_a(a,U) = M_b(b,U) = 0$.

En relacion con esta funcion Φ vamos a dar algunos resultados en forma de lemas.

LEMA 1º

Sea $f(x) = \{f_1 \quad f_2\}$ un vector que posee derivadas continuas hasta el segundo orden en (a,b) y que satisface las condiciones de contorno impuestas en los extremos del intervalo. Sea λ un valor distinto de cualquier autovalor; entonces

$$\lambda\Phi(x,\lambda) = f(x) + \Phi^*(x,\lambda)$$

donde Φ^* depende de $L(f)$ de la misma forma que Φ dependende de $N(f)$.

En efecto: escribiendo explicitamente la expresion de $\Phi(x,\lambda)$ en terminos de ϕ_j y de Ψ_j (j=1,2) y aplicando la formula de Green tenemos

$$\Phi(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda}\Big(\Phi^*(x,\lambda) + \Psi_1\left[\phi_1 \quad f\right](x) + \Psi_2\left[\phi_2 \quad f\right](x) - \phi_1\left[\Psi_1 \quad f\right](x) - \phi_2\left[\Psi_2 \quad f\right](x)\Big)$$

utilizando las expresiones del lema de =14=

$$\Psi_1\left[\phi_1 \quad f\right](x) + \Psi_2\left[\phi_2 22f\right](x) - \phi_1\left[\Psi_1 \quad f\right](x) - \phi_2\left[\Psi_2 \quad f\right](x) = f(x)$$

lo que prueba lo que pretendiamos.

Esta ultima expresion ha podidos ser demostrada por =4=, pues aplicando la P-identidad a los vectores f,

ϕ_j y ψ_j (j=1,2) y al vector $\{x_6 \quad y_6\}$ tal que en el intervalo (a,b) cumpla

$$x_6 = 0 \qquad x_6' = 0$$

$$y_6 = 0 \qquad y_6' = 1$$

y teniendo en cuenta que $[\phi_1 \quad \phi_2] = 0$, entonces

$$[\phi_k \quad \phi_j] \begin{cases} = 1 & k=j=1,2 \\ = 0 & K=3,4 \end{cases}$$

con lo que se obtenia la igualdad a f(x) en esta expresion. Este lema puede considerarse como una extension del 2.9 del libro de Titchmarsh.

Referente al lema 2.8 del mismo autor

$$\int |\bar{\Phi}(x,\lambda,f)|^2 dx \leq \frac{1}{\nu^2} \int |f(x)|^2 dx$$

podemos enunciar

LEMA 2º

Si $\bar{\Phi}(x,\lambda)$ es la expresion anteriormente definida y $f(x) = \{f_1 \quad f_2\}$ es un vector de valores reales y $f^T N(f)$ es integrable en (a,b) y $\lambda = \mu \pm i\nu$ con $\nu \neq 0$, entonces

$$\int_a^b \mathring{\bar{\Phi}}^T N(\bar{\Phi})\, dx \leq \frac{1}{\nu^2} \int_a^b f^T N(f)\, dx$$

En efecto, para demostrarlo, definamos una sucesion de vectores con valores reales $Q_n(x) = \{Q_{1n}(x), Q_{2n}(x)\}$ y continuas para $(a,b) \ni x$.

Entonces el vector $\bar{\Phi}(x,\lambda,Q_n)$ satisface el sistema diferencial

$$(L - \lambda N)\bar{\Phi}_n(x,\lambda,Q_n) = -N(Q_n)$$

asi como las condiciones de contorno en los extremos del intervalo.

Analogamente, como

$$\bar{\Phi}(x,\bar{\lambda},Q_n) = \overline{\bar{\Phi}(x,\lambda,Q_n)}$$

entonces $\bar{\Phi}(x,\bar{\lambda},Q_n)$ satisface tambien las condiciones de contorno, y utilizando el teorema de Green, y la relacion $\int U^T N(V) = \{ \int U^T N(\bar{U}) \int V^T N(\bar{V}) \}^{1/2}$

tenemos

$$\int_a^b \Phi^T(x,\lambda,Q_n) N(\bar{\Phi}(x,\lambda,Q_n)) dx \leq \frac{1}{\nu^2} \int_a^b Q_n^T (Q_n) dx$$

y si la sucesion $Q_n(x)$ la elegimos de forma que converja en media al vector $f(x)$, tendremos finalmente

$$\lim \int_a^b Q_n^T N(Q_n) dx = \int_a^b f^T N(f) dx$$

ya que $\Phi(x,\lambda,Q_n)$ converge uniformemente a $\Phi(x,\lambda,f)$ en el intervalo (a,b)

LEMA 3º

Sea el vector $f(x) = \{f_1 \ f_2\}$ que satisface las mismas condiciones que en el lema 1º, y $\psi_n = \psi_n(x,\lambda_n)$ el autovector correspondiente al autovalor λ_n. Sean ademas c_n y c_n^* los coeficientes de Fourier de $N(f)$ y $L(f)$ respectivamente, es decir

$$c_n = \int_a^b \psi_n N(f) dx$$

$$c_n^* = \int_a^b \psi_n L(f) dx$$

entonces

$$c_n^* = \lambda_n c_n$$

Este lema puede considerarse como una extension del 2.13 de Titchmarsh. Su demostracion es trivial, usando la formula de Green a los vectores f y ψ_n, y teniendo en cuenta la relacion $[\psi_n \ f] = 0$ en los extremos del intervalo por cumplir las condiciones de contorno.

El vector $\bar{\Phi}(x)$ definido mediante la matriz de Green, merece la pena verlo desde mas cerca, y no siempre relacionado con la solucion del sistema no homogeneo.
De él se puede expresar el siguiente teorema :
Todos los polos de $\bar{\Phi}(x)$ son simples.
En efecto, para demostrarlo, supongamos que $\bar{\Phi}(x)$ tiene un polo de orden $m>1$ en $\lambda=\lambda_n$. Entonces, para un entorno de λ_n

$$\bar{\Phi}(x,\lambda_n) = h_m(x)/(\lambda-\lambda_n)^m + h_{m-1}(x)/(\lambda-\lambda_n)^{m-1} + \dots\dots$$

Ahora bien,

$$(L-\lambda_n N)\bar{\Phi} = (\lambda-\lambda_n)N(\bar{\Phi}) - N(f)$$

con $$[\bar{\Phi}\ \phi_j](a) = [\bar{\Phi}\ \phi_k](b) = 0 \quad k=3,4 \quad j=1,2$$

entonces tenemos

$$(L-\lambda_n N)h_m(x) = 0 \qquad (L-\lambda_n N)h_{m-1}(x) = N(h_m(x))\dots$$

y $$[h_i\ \ \phi_j](a) = 0 \qquad j=1,2 \qquad i=m,m-1,\dots$$
$$[h_i\ \ \phi_k](b) = 0 \qquad k=3,4 \qquad i=m,m-1,\dots$$

Entonces, como hemos demostrado que si dos funciones f y g satisfacen las condiciones de contorno $R_a(a,U) = R_b(b,U)$ ~~xxxxxxxx~~ $= 0$

$$[f\ \ g] = 0$$

en los extremos del intervalo, y

$$[h_r\ \ h_s](a) = [h_r\ \ h_s](b) = 0 \quad r,s=m,m-1\dots$$

y por la formula de Green

$$\int_a^b h_m^{r}\,N(h_m)\,dx = 0$$

luego $h_m = 0$.
Luego para toda f, $\bar{\Phi}(x,\lambda)$ posee a lo mas un polo simple c.q.d.

Como se vió al estudiar $W(\lambda) = 0$, resulta claro que las singularidades de $\bar{\Phi}(x,\lambda)$ son los ceros de $W(\lambda)$. Vamos entonces a calcular los residuos de $\bar{\Phi}(x,\lambda)$ en los ceros del wronskiano. Dos casos se presentan :

i) λ_n es un cero simple de $W(\lambda) = 0$.

Entonces el residuo en $\lambda = \lambda_n$ está dado por

$$\lim_{\lambda \to \lambda_n} (\lambda - \lambda_n)\, \bar{\Phi}(x,\lambda)$$

y esto es equivalente (análogo en Titchmarsh 1.6) a

$$\Psi_n(x,\lambda_n) \int_a^b \Psi_n(y,\lambda_n)^T R(f(y))\,dy$$

donde

$$\Psi_n(x,\lambda_n) = \begin{pmatrix} \Psi_{1n}(x,\lambda_n) \\ \Psi_{2n}(x,\lambda_n) \end{pmatrix}$$

es el autovector correspondiente al autovalor λ_n debidamente normalizado.

ii) Si λ_n es un cero doble de $W(\lambda) = 0$, para considerar la expresion

$$\lim (\lambda - \lambda_n)\bar{\Phi}(x,\lambda)$$

análogamente al caso i) se obtiene

$$\Psi_n^1(x,\lambda_n) \int_a^b \Psi_n^1(y,\lambda_n)^T R(f(y))\,dy \; +$$

$$+ \; \Psi_n^2(x,\lambda_n) \int_a^b \Psi_n^2(y,\lambda_n)^T R(f(y))\,dy$$

donde

$$\Psi_n^1 = \begin{pmatrix} \Psi_{1n}^1 \\ \Psi_{2n}^1 \end{pmatrix} = \frac{\phi_1(x,\lambda_n)}{(I_{11}(\lambda_n))^{1/2}}$$

$$\Psi_n^2 = \begin{pmatrix} \Psi_{1n}^2 \\ \Psi_{2n}^2 \end{pmatrix} = \frac{I_{11}\phi_2(x,\lambda_n) - I_{12}\phi_1(x,\lambda_2)}{(I_{11}(I_{11}I_{22} - I_{12}^2))^{1/2}}$$

y por estar debidamente normalizados y ser ortogonales, tenemos

$$\int_a^b \psi_n^{1\,T}\, T(\psi_n^2)\, dx = 0$$

En nuestro caso la desigualdad de Bessel toma la forma

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n^2 \leq \int_a^b f^T\, T(f)\, dx$$

donde $c_n = \int_a^b \psi_n^T\, T(f)\, dx$ son los coeficientes de Fourier de $f(x) = \{f_1 \quad f_2\}$ y ψ_n es el autovector correspondiente al autovalor λ_n. Ahora bien, demostramos en =12= que se trataba de un sistema completo, y por tanto se verifica la identidad de Parseval. De acuerdo con ella tenemos finalmente y analogo al Titchmarsh 2.13 el siguiente teorema :

Sea el vector $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ dos veces diferenciable y tal que $f''(x) \in L^2(a,b)$ y satisface las condiciones de contorno impuestas.

Entonces

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \psi_n(x) \qquad a \leq x \leq b$$

siendo la serie absoluta y uniformemente convergente en ese intervalo.

Capitulo 2º

= 1 =

Una vez que se ha obtenido el desarrollo mediante funciones propias de una funcion asociada con la ecuación $(L - \lambda M)Y = 0$ donde λ es un parametro variable y las condiciones de contorno

$$M_a(a,U) = a_{i1}u(a) + a_{i2}u'(a) + a_{i3}v(a) + a_{i4}v'(a) = 0$$

$$M_b(b,U) = b_{i1}u(b) + b_{i2}u'(b) + b_{i3}v(b) + b_{i4}v'(b) = 0$$

donde los coeficientes tienen que cumplir las siguientes condiciones :

a.- a_{ij}, b_{ij} son valores constantes reales, no todos nulos e independientes del parametro λ .

b.-
$$\frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{a_{14}}{a_{24}} \qquad \frac{b_{12}}{b_{22}} \neq \frac{b_{14}}{b_{24}}$$

para evitar que sean iguales las condiciones $M_a(a,U)$ para i=1 y i=2. Analogamente con $M_b(b,U)$. En particular imponemos

$$a_{14}a_{22} - a_{24}a_{12} = 1$$

$$b_{14}b_{22} - b_{24}b_{12} = 1$$

c.- el problema se hizo autoadjunto imponiendo las condiciones
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{14} \\ b_{21} & b_{24} \end{vmatrix}$$

d.- Imponemos ademas esta nueva condicion

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{14} & a_{13} \\ a_{24} & a_{23} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} b_{12} & b_{11} \\ b_{22} & b_{21} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{14} & b_{13} \\ b_{24} & b_{23} \end{vmatrix} = 0$$

e.- Entre los coeficientes del sistema, imponemos las condiciones

$$r(x) - g(x) = 1$$

$$(2q(x) - 1)^2 + r(x)^2 - q'(x) + r'(x) = h(x) + g(x)$$

Consideremos entonces el sistema

$$\begin{cases} v'' - \lambda(pu + qv + v') = 0 \\ u'' - \lambda(qu + rv - u') = 0 \end{cases}$$

que puede escribirse en la forma

$$(L_o - \lambda N_o)Y = 0$$

siendo

$$L_o = \begin{pmatrix} 0 & D^2 \\ D & 0 \end{pmatrix} \qquad y \qquad N_o = N$$

y es por tanto un caso particular del anteriormente estudiado, ya que se ha simplificado notablemente la matriz L, y cuya solución satisface las condiciones de contorno $M_a(a,U) = M_b(b,U) = 0$ con las restricciones impuestas a los coeficientes ya mencionadas. Este sistema $(L_o - \lambda N_o)Y = 0$ lo llamaremos "sistema de Fourier" correspondiente al sistema general dado por la expresion $(L - \lambda N)Y = 0$.

El esquema de este capitulo es demostrar que bajo las condiciones impuestas xn, el desarrollo mediante autofunciones de un vector $f(x) = \{f_1, f_2\}$ asociado con el sistema $L_o - N_o$ es equiconvergente (es decir, se comporta de la misma forma respecto a la convergencia que) al correspondiente desarrollo en funciones propias de f(x) asociado al sistema L - N. Una vez establecido este resultado, demostraremos que el desarrollo asociado al sistema $L_o^* - N_o$ es a su vez equiconvergente al correspondiente de la serie de Fourier en funcion solo de cosenos.

Combinando estos dos resultados, en definitiva se demuestra la equiconvergencia del desarrollo de una funcion f(x) mediante funciones propias asociadas al sistema $(L - \lambda N)Y = 0$ con la correspondiente serie de Fourier.

= 2 =

Dada la importancia que va a tener en los calculos de lo venidero, vamos a definir un conjunto de funciones que denominaremos "conjunto unitario".

Sea para ello, el conjunto de vectores

$$\{u_i(\xi/x,\lambda),\ v_i(\xi/x,\lambda)\ =\ u_i(\xi/x),\ v_i(\xi/x)\quad i=1,2,3,4$$

que satisfacen la siguiente condición :

Para $x=\xi$, con $a \leq x \leq b$, entonces

$$\{u_i,\ v_i,\ u_i',\ v_i'\} = \varepsilon_i$$

siendo ε_i los vectores unitarios

$\varepsilon_1 = (1,0,0,0)$ $\varepsilon_2 = (0,0,0,1)$ $\varepsilon_3 = (0,1,0,0)$ $\varepsilon_4 = (0,0,1,0)$

Para ello, definimos

$$u_1(\xi/x) = \frac{1}{2}(\cos\mu(x-\xi) + \cosh\mu(x-\xi))$$
$$u_2(\xi/x) = \frac{1}{2\mu}(- \operatorname{sen}\mu(x-\xi) + \operatorname{senh}\mu(x-\xi))$$
$$u_3(\xi/x) = \frac{1}{2}(- \cos\mu(x-\xi) + \cosh\mu(x-\xi))$$
$$u_4(\xi/x) = \frac{1}{2\mu}(\operatorname{sen}\mu(x-\xi) + \operatorname{senh}\mu(x-\xi))$$

$$v_1(\xi/x) = \frac{1}{2}(- \cos\mu(x-\xi) + \cosh\mu(x-\xi))$$
$$v_2(\xi/x) = \frac{1}{2\mu}(\operatorname{sen}\mu(x-\xi) + \operatorname{senh}\mu(x-\xi))$$
$$v_3(\xi/x) = \frac{1}{2}(\cos\mu(x-\xi) + \cosh\mu(x-\xi))$$
$$v_4(\xi/x) = \frac{1}{2\mu}(- \operatorname{sen}\mu(x-\xi) + \operatorname{senh}\mu(x-\xi))$$

donde $\lambda = \mu^2$

= 3 =

Para el sistema de Fourier $(L_o - \lambda N_o)Y = 0$ con las condiciones de =1=, introducimos la siguiente notación :

$$\{\eta_i(a/x,\lambda),\ \varphi_i(a/x,\lambda)\} \quad \{\eta_j(b/x,\lambda),\ \varphi_j(b/x,\lambda)\}$$

con $i=1,2$ $j=3,4$ para los vectores que determinan las condiciones de contorno ;

$P^{(o)}_{ij}$ son los concomitantes bilineales

$W_o(\lambda)$ el determinante wronskiano de las condiciones de contorno

$g(x,y,\lambda) = g_{nm}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$ es la matriz de Green, y

$\Phi_o(x,\lambda)$ es la funcion correspondiente a la Φ en el caso general.

Para determinar la forma explicita, tomemos analogamente al caso general, dos vectores Y_1 e Y_2 correspondientes a los autovalores λ_1 y λ_2.

$$v_1'' - \lambda_1(pu_1 + qv_1 + v_1') = 0$$

$$u_1'' - \lambda_1(qu_1 + rv_1 - u_1') = 0$$

$$v_2'' - \lambda_2(pu_2 + qv_2 + v_2') = 0$$

$$u_2'' - \lambda_2(qu_2 + rv_2 - u_2') = 0$$

multiplicandolas por u_2, v_2, $-u_1$, $-v_1$, y sumando se obtiene despues de reducir los terminos semejantes

$$u_2v_1'' + v_2u_1'' - u_1v_2'' - v_1u_2'' - \lambda_1 A + \lambda_2 B = 0$$

donde las expresiones de A y B de momento no interesan.

Integrando se obtiene

$$\int d/dx(u_2v_1' - v_1u_2')dx + \int d/dx(v_2u_1' - u_1v_2')dx = \int(\lambda_1 A - \lambda_2 B)dx$$

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_1 \\ v_2' & v_1' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_2 & v_1 \\ u_2' & u_1' \end{vmatrix} = \int(\lambda_1 A - \lambda_2 B)dx$$

las formas bilineales $P_{ij}^{(o)}$ se definen pues como

$$\begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i' & y_j' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_i & y_j \\ x_i' & x_j' \end{vmatrix} = P_{ij}^{(o)}$$

Para los vectores (η, φ) que determinan las condiciones de contorno, será

$$\begin{vmatrix} u & \eta \\ v' & \varphi' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v & \varphi \\ u' & \eta' \end{vmatrix} = u\varphi' - v'\eta + v\eta' - u'\varphi$$

que para que sea identicamente nulo, y por consideraciones posteriores basta definir bajo condiciones suficientes y en función del conjunto unitario los vectores φ y η de la siguiente forma:

$$\eta_i(a/x,\lambda) = -a_{i4}u_1(a/x) + a_{i1}u_2(a/x) - a_{i2}u_3(a/x) +$$
$$+ a_{i3}u_4(a/x)$$

$$\varphi_i(a/x,\lambda) = -a_{i4}v_1(a/x) + a_{i1}v_2(a/x) - a_{i2}v_3(a/x) +$$
$$+ a_{i3}v_4(a/x)$$

$$\eta_i'(a/x,\lambda) = -\mu^2(a_{i4}u_2(a/x) + a_{i2}u_4(a/x)) +$$
$$+ a_{i1}u_3(a/x) + a_{i3}u_1(a/x)$$

$$\varphi_i'(a/x,\lambda) = -\mu^2(a_{i2}u_2(a/x) + a_{i4}u_4(a/x)) +$$
$$+ a_{i3}u_3(a/x) + a_{i1}u_1(a/x)$$

con i=1,2 y con expresiones similares para $\eta_j(b/x, \ )$ y $\eta'(b/x, \ )$.... con j=3,4

Basta pues sustituir los valores de u_i y particularizarlos en el punto $x = a$. Análogamente en el punto $x = b$. Para la identificación con las condiciones de contorno bastará

$$\begin{array}{llll} x_i(a/x,\lambda) = -a_{i4} & & x_j(b/x,\lambda) = -b_{j4} \\ y_i(a/x,\lambda) = -a_{i2} & & y_j(b/x,\lambda) = -b_{j2} \\ x_i'(a/x,\lambda) = a_{i3} & & x_j'(b/x,\lambda) = b_{j3} \\ y_i'(a/x,\lambda) = a_{i1} & & y_j'(b/x,\lambda) = b_{j1} \end{array}$$

La expresión entonces de $p_{ij}^{(o)}$ es

$$p_{i3}^{(o)} = \begin{vmatrix} x_i & x_3 \\ y_i' & y_3' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_i & y_3 \\ x_i' & x_3' \end{vmatrix} =$$

$$= x_i y_3' - x_3 y_i' + y_i x_3' - y_3 x_i' =$$

$$= \eta_i y_3' - \varphi_i' x_3 + \varphi_i x_3' - \eta_i' y_3 =$$

$$= b_{11}\eta_i(a/b) + b_{12}\eta'_i(a/b) + b_{13}\varphi_i(a/b) + b_{14}\varphi'_i(a/b)$$

Analogamente

$$p^{(o)}_{i4} = b_{21}\eta_i(a/b) + b_{22}\eta'_i(a/b) + b_{23}\varphi_i(a/b) + b_{24}\varphi'_i(a/b)$$

para i=1,2 y donde $\eta(a/b) = \eta(a/b,) = \eta$ y similarmente para η'_i φ_i y φ'_i

Ademas $$p^{(o)}_{12} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ x'_1 & x'_2 \end{vmatrix} =$$

$$= x_1y'_2 - x_2y'_1 + y_1x'_2 - y_2x'_1 =$$

$$= \eta_1\varphi'_2 - \eta_2\varphi'_1 + \varphi_1\eta'_2 - \varphi_2\eta'_1 =$$

$$= - a_{14}a_{21} + a_{24}a_{11} - a_{12}a_{23} + a_{22}a_{13} = 0$$

Analogamente

$$p^{(o)}_{34} = b_{12}b_{23} - b_{22}b_{13} - b_{11}b_{24} + b_{14}b_{21} = 0$$

despues de tener en cuenta las condiciones impuestas a los coeficientes.

La expresión del wronskiano es entonces analoga a la que tiene en el caso general, previa sustitución de los concomitantes bilineales por los mas reducidos $p^{(o)}$, y por tanto

$$W_o(\lambda) = p^{(o)}_{14}p^{(o)}_{23} - p^{(o)}_{24}p^{(o)}_{13}$$

Respecto a la formula de Green, tambien se verifica en este caso, pues

$$\langle F \quad L_oG \rangle - \langle G \quad L_oF \rangle =$$

$$= \int_a^b (F_1L_oG_1 + F_2L_oG_2)dx - \int_a^b (G_2L_oF_2 + G_1L_oF_1)dx =$$

$$= \int_a^b (F_1G''_2 + F_2G''_1 - G_1F''_2 - G_2F''_1)dx =$$

$$= \int_a^b d/dx(F_1G'_2 - G_2F'_1) + d/dx(F_2G'_1 - G_1F'_2) =$$

$$[F\ G' - G\ F']_a^b + [F\ G' - G\ F']_a^b = 0$$

después de tener en cuenta la identificación para los coeficientes y las condiciones que se le impusieron.

= 4 =

En preparación de los dos teoremas fundamentales, vamos a comenzar por el siguiente lema :

LEMA

Sean a_{ij} y b_{ij} las constantes que determinan las condiciones de contorno, con las condiciones impuestas en =1=. Entonces se tiene

$$D_o(\lambda) = -\mu^2 \operatorname{sen}\mu(b-a)\operatorname{senh}\mu(b-a) + O(|\mu|\, e^{(\sigma+t)(b-a)})$$

donde $\mu^2 = \lambda$ y $\mu = \sigma + it$ $\sigma, t > 0$.

En efecto, procediendo paso a paso, tenemos

$$u_2^2 - u_4^2 = 1/4\mu^2(\operatorname{sen}^2 + \operatorname{senh}^2 - 2\operatorname{sen}\operatorname{senh}) -$$
$$-1/4\mu^2(\operatorname{sen}^2 + \operatorname{senh}^2 + 2\operatorname{sen}\operatorname{senh}) =$$
$$= -1/\mu^2(\operatorname{sen}\mu(b-a)\operatorname{senh}\mu(b-a))$$

$$u_3^2 - u_1^2 = 1/4(\cos^2 + \cosh^2 - 2\cos\cosh) -$$
$$- 1/4(\cos^2 + \cosh^2 + 2\cos\cosh) =$$
$$= \cos\mu(b-a)\cosh\mu(b-a) =$$
$$1/2(e^{(b-a)(\sigma(i+1) + t(i-1))} +$$
$$+ e^{(b-a)(\sigma(i-1) - t(i+1))} + e^{(b-a)(\sigma(1-i) + t(1+i))} +$$
$$+ e^{(b-a)(-\sigma(i+1) - t(i-1))})$$

Ahora bien,

$$\left| \frac{e^{(b-a)(\sigma(i+1) + t(i-1))}}{e^{(\sigma+t)(b-a)}} \right| = \frac{e^{(b-a)(\sigma - t)}}{e^{(\sigma+t)(b-a)}} = \frac{e^{-t(b-a)}}{e^{t(b-a)}} =$$

$$= e^{-2t(b-a)}$$

que para $t \to \infty$ se hace menor que una constante. Igual sucede con cada sumando, y por tanto

$$u_3^2 - u_1^2 = O(e^{(\sigma + t)(b-a)})$$

$$u_1 u_4 - u_2 u_3 = 1/4\mu(\cos + \cosh)(\mathrm{sen} + \mathrm{senh})$$
$$- 1/4\mu(-\mathrm{sen} + \mathrm{senh})(-\cos + \cosh) =$$
$$= 1/4\mu(\cos\mathrm{sen} + 2\cos\mathrm{senh} + 2\mathrm{sen}\cosh + \mathrm{senh}\cosh -$$
$$- \mathrm{sen}\cos + \mathrm{sen}\cosh + \cos\mathrm{senh} - \mathrm{senh}\cosh) =$$
$$= 1/2\mu(\cos\mathrm{senh} + \mathrm{sen}\cosh)$$

ahora bien,

$$1/\mu \cos\mu(b-a)\,\mathrm{senh}\,\mu(b-a) = 1/\mu\,(e^{i(\sigma + it)(b-a)} + e^{-i(\sigma + it)(b-a)}).$$
$$.(e^{(\sigma + it)(b-a)} - e^{-(\sigma + it)(b-a)})$$

Teniendo en cuenta que

$$\left|\frac{1/\mu\; e^{(\sigma + it)(b-a)(i+1)}}{1/\mu\; e^{(\sigma + t)(b-a)}}\right| ; \frac{e^{(b-a)(\sigma + t)}}{e^{(b-a)(\sigma + t)}} \leq K$$

y como igual sucede con los demas sumandos, entonces

$$u_1 u_4 - u_2 u_3 = O(1/|\mu|\; e^{(\sigma + t)(b-a)})$$

y repitiendo los mismos calculos para $u_1 u_2 - u_3 u_4$ se obtiene

$$u_1 u_2 - u_3 u_4 = O(\,1/|\mu|\; e^{(\sigma + t)(b-a)})$$

Ahora bien, sustituyendo en las expresiones de η_i' φ_i', se tiene

$$\eta_2'\varphi_1' - \eta_1'\varphi_2' = (-\mu^2(a_{24}u_2 + a_{22}u_4) + a_{21}u_3 + a_{23}u_1).$$
$$.(-\mu^2(a_{12}u_2 + a_{14}u_4) + a_{13}u_3 + a_{11}u_1) -$$
$$- (-\mu^2(a_{14}u_2 + a_{12}u_4) + a_{11}u_3 + a_{13}u_1).$$
$$.(-\mu^2(a_{22}u_2 + a_{24}u_4) + a_{23}u_3 + a_{21}u_1) =$$

$$= \mu^4(a_{24}a_{12}u_2^2 + a_{24}a_{14}u_2u_4 + a_{22}a_{12}u_2u_4 + a_{22}a_{14}u_4^2) -$$
$$- \mu^4(a_{14}a_{22}u_2^2 + a_{12}a_{24}u_2u_4 + a_{12}a_{22}u_2u_4 + a_{12}a_{24}u_4^2) -$$
$$- \mu^2(a_{24}a_{13}u_2u_3 + a_{24}a_{11}u_1u_2 + a_{22}a_{13}u_3u_4 + a_{22}a_{11}u_1u_4 +$$
$$+ a_{21}a_{12}u_2u_3 + a_{21}a_{14}u_3u_4 + a_{23}a_{12}u_1u_2 + a_{23}a_{14}u_1u_4) +$$
$$+ \mu^2(a_{14}a_{23}u_2u_3 + a_{14}a_{21}u_1u_2 + a_{12}a_{23}u_3u_4 + a_{12}a_{21}u_1u_4 +$$
$$+ a_{11}a_{22}u_2u_3 + a_{11}a_{24}u_3u_4 + a_{13}a_{22}u_1u_2 + a_{13}a_{24}u_1u_4) +$$
$$+ a_{21}a_{13}u^2 + a_{21}a_{11}u_1u_3 + a_{23}a_{13}u_1u_3 + a_{23}a_{11}u_1^2 -$$
$$- a_{11}a_{23}u^2 + a_{11}a_{21}u_1u_3 - a_{13}a_{23}u_1u_3 - a_{13}a_{21}u_1^2 =$$
$$= \mu^4(a_{14}a_{22}(u_4^2 - u_2^2) + a_{24}a_{12}(u_2^2 - u_4^2)) +$$
$$+ \mu^2(u_2u_3(a_{11}a_{22} + a_{14}a_{23} - a_{21}a_{12} - a_{24}a_{13}) +$$
$$+ u_3u_4(a_{11}a_{24} + a_{12}a_{23} - a_{21}a_{14} - a_{22}a_{13}) +$$
$$+ u_1u_2(a_{13}a_{22} + a_{14}a_{21} - a_{23}a_{12} - a_{24}a_{11}) +$$
$$+ u_1u_4(a_{13}a_{24} + a_{12}a_{21} - a_{23}a_{14} - a_{22}a_{11})) +$$
$$+ a_{23}a_{11}(u_1^2 - u_3^2) + a_{21}a_{13}(u_3^2 - u_1^2) =$$
$$= \mu^4(u_4^2 - u_2^2)$$
$$+ \mu^2((a_{13}a_{22} + a_{14}a_{21} - a_{23}a_{12} - a_{24}a_{11})(u_1u_2 - u_3u_4) +$$
$$+ (a_{13}a_{24} + a_{12}a_{21} - a_{23}a_{14} - a_{22}a_{11})(u_1u_4 - u_2u_3))$$
$$+ (u_3^2 - u_1^2)(a_{21}a_{13} - a_{23}a_{11}) =$$
$$= \mu^2 \operatorname{sen}\mu(b-a)\operatorname{senh}\mu(b-a) + O(e^{(\sigma+t)(b-a)}) + O(|\mu| e^{(\sigma+t)(b-a)})$$

con lo que en definitiva se obtiene

$$\eta_2'\varphi_1' - \eta_1'\varphi_2' = \mu^2 \operatorname{sen}\mu(b-a)\operatorname{senh}\mu(b-a) + O(|\mu| e^{(\sigma+t)(b-a)}).$$

Con calculo similar,

$$\eta_2\varphi_1 - \eta_1\varphi_2 = (-a_{24}u_1 + a_{21}u_2 - a_{22}u_3 + a_{23}u_4)\cdot$$
$$(-a_{14}v_1 + a_{11}v_2 - a_{12}v_3 + a_{13}v_4) -$$
$$-(-a_{14}u_1 + a_{11}u_2 - a_{12}u_3 + a_{13}u_4)\cdot$$
$$(-a_{24}v_1 + a_{21}v_2 - a_{22}v_3 + a_{23}v_4) =$$

$$= a_{24}a_{14}u_1v_1 - a_{24}a_{11}u_1v_2 + a_{24}a_{12}u_1v_3 - a_{24}a_{13}u_1v_4$$
$$- a_{14}a_{24}u_1v_1 + a_{14}a_{21}u_1v_2 - a_{14}a_{22}u_1v_3 + a_{14}a_{23}u_1v_4$$
$$- a_{21}a_{14}u_2v_1 + a_{21}a_{11}u_2v_2 - a_{21}a_{12}u_2v_3 + a_{21}a_{13}u_2v_4$$
$$+ a_{11}a_{24}u_2v_1 - a_{11}a_{21}u_2v_2 + a_{11}a_{22}u_2v_3 - a_{11}a_{23}u_2v_4$$
$$+ a_{22}a_{14}u_3v_1 - a_{22}a_{11}u_3v_2 + a_{22}a_{12}u_3v_3 - a_{22}a_{13}u_3v_4$$
$$- a_{12}a_{24}u_3v_1 + a_{12}a_{21}u_3v_2 - a_{12}a_{22}u_3v_3 + a_{12}a_{23}u_3v_4$$
$$- a_{23}a_{14}u_4v_1 + a_{13}a_{22}u_4v_3 - a_{13}\,21u_4v_2 - a_{13}a_{23}u_4v_4 =$$

$$= u_1v_2(a_{14}a_{21} - a_{24}a_{11}) + u_2v_1(a_{11}a_{24} - a_{21}a_{14})$$
$$+ u_1v_3(a_{24}a_{12} - a_{14}a_{22}) + u_3v_1(a_{22}a_{14} - a_{12}a_{24})$$
$$+ u_1v_4(a_{14}a_{23} - a_{24}a_{13}) + u_4v_1(a_{13}a_{24} - a_{23}a_{14})$$
$$+ u_2v_3(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) + u_3v_2(a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11})$$
$$+ u_2v_4(a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}) + u_4v_2(a_{23}a_{11} - a_{13}a_{21})$$
$$+ u_3v_4(\ddot{a}_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) + u_4v_3(a_{13}a_{22} - a_{23}a_{12}) =$$

$$= (u_1v_2 - u_2v_1)(a_{14}a_{21} - a_{24}a_{11})(u_1u_4 - u_2u_3) +$$
$$+ (u_1v_3 - u_3v_1)(a_{24}a_{12} - a_{14}a_{22})(u_1^2 - u_3^2) +$$
$$+ (u_1v_4 - u_4v_1)(a_{14}a_{23} - a_{24}a_{13})(u_1u_2 - u_4u_3) +$$
$$+ (u_2v_3 - u_3v_2)(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})(u_2u_1 - u_3u_4) +$$
$$+ (u_2v_4 - u_4v_2)(a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23})(u_2^2 - u_4^2) +$$
$$=$$

$$+ (u_3 v_4 - u_4 v_3)(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})(u_3 u_2 - u_4 u_1) =$$

$$= (u_1 u_4 - u_2 u_3)(a_{14}a_{21} - a_{24}a_{11} - a_{13}a_{22} + a_{23}a_{12}) +$$

$$+ (u_1 u_2 - u_3 u_4)(a_{14}a_{23} - a_{22}a_{11} - a_{13}a_{24} + a_{12}a_{21}) +$$

$$+ (u_1^2 - u_3^2)(a_{24}a_{12} - a_{14}a_{22}) + (u_2^2 - u_4^2)(a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}) =$$

$$= O(e^{(\sigma+t)(b-a)})$$

$$\eta_1'\eta_2 - \eta_1\eta_2' =$$

$$(-\mu^2(a_{14}u_2 + a_{12}u_4) + a_{11}u_3 + a_{13}u_1)(-a_{24}u_1 + a_{21}u_2 -$$

$$- a_{22}u_3 + a_{23}u_4) - (-a_{14}u_1 + a_{11}u_2 - a_{12}u_3 + a_{13}u_4) \cdot$$

$$\cdot (-\mu^2(a_{24}u_2 + a_{22}u_4) + a_{21}u_3 + a_{23}u_1) =$$

$$= -\mu^2(- a_{14}a_{24}u_1u_2 + a_{14}a_{21}u_2^2 - a_{14}a_{22}u_2u_3 + a_{14}a_{23}u_2u_4$$

$$- a_{12}a_{24}u_1u_4 + a_{12}a_{23}u_4^2 - a_{12}a_{22}u_3u_4 + a_{12}a_{21}u_2u_4)$$

$$+ \mu^2(- a_{24}a_{14}u_1u_2 + a_{24}a_{11}u_2^2 - a_{24}a_{12}u_2u_3 + a_{24}a_{13}u_2u_4$$

$$- a_{22}a_{14}u_1u_4 + a_{22}a_{13}u_4^2 - a_{22}a_{12}u_3u_4 + a_{22}a_{11}u_2u_4)$$

$$- a_{11}a_{24}u_1u_3 + a_{11}a_{21}u_2u_3 - a_{11}a_{22}u_3^2 + a_{11}a_{23}u_3u_4$$

$$+ a_{21}a_{14}u_1u_3 + a_{21}a_{11}u_2u_3 + a_{21}a_{12}u_3^2 - a_{21}a_{13}u_3u_4$$

$$- a_{13}a_{24}u_1^2 + a_{13}a_{21}u_1u_2 - a_{13}a_{22}u_1u_3 + a_{13}a_{23}u_1u_4$$

$$+ a_{23}a_{14}u_1^2 - a_{23}a_{11}u_1u_2 + a_{23}a_{12}u_1u_3 - a_{23}a_{13}u_1u_4 =$$

$$= \mu^2(u_2^2(a_{24}a_{11} - a_{14}a_{21}) + u_4^2(a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23}) +$$

$$u_2u_3(a_{14}a_{22} - a_{24}a_{12}) + u_2u_4(a_{24}a_{13} - a_{14}a_{23}) +$$

$$u_1u_4(a_{12}a_{24} - a_{22}a_{14}) + u_2u_4(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}))$$

$$+ u_1u_3(a_{21}a_{14} - a_{11}a_{24} - a_{13}a_{22} + a_{23}a_{12})$$

$$+ u_2u_3(a_{11}a_{21} - a_{21}a_{11}) + u_3u_4(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})$$

$$+ u_1u_2(a_{13}a_{21} - a_{23}a_{11}) + u_1u_4(a_{13}a_{23} - a_{23}a_{13}) +$$
$$+ u_1^2(a_{23}a_{14} - a_{13}a_{24}) + u_3^2(a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}) =$$
$$= \mu^2((a_{24}a_{11} - a_{14}a_{21})(u_2^2 - u_4^2) + u_2u_4(a_{24}a_{13} - a_{14}a_{23}$$
$$+ a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}) + (u_2u_3 - u_1u_4)) +$$
$$+ (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})(u_3u_4 - u_1u_2) +$$
$$+ (a_{23}a_{14} - a_{13}a_{24})(u_1^2 - u_3^2) =$$
$$= \operatorname{sen}\mu(b-a)\operatorname{senh}\mu(b-a) + O(|\mu| e^{(\sigma+t)(b-a)}) +$$
$$O(\frac{1}{|\mu|} e^{(\sigma+t)(b-a)}) + O(e^{(\sigma+t)(b-a)}) =$$
$$= O(|\mu| e^{(\sigma+t)(b-a)}).$$

Para completar la demostración, basta recurrir a la expresión del Wrönskiano e ir sustituyendo los valores que hemos ido obteniendo separadamente. Entonces

$$W_o(\lambda) = p^{(o)}_{14}p^{(o)}_{23} - p^{(o)}_{24}p^{(o)}_{13} =$$
$$= (b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_1' + b_{23}\varphi_1 + b_{23}\varphi_1')(b_{11}\eta_2 + b_{12}\eta_2' + b_{13}\varphi_2 + b_{14}\varphi_2') -$$
$$- (b_{21}\eta_2 + b_{22}\eta_2' + b_{23}\varphi_2 + b_{24}\varphi_2')(b_{11}\eta_1 + b_{12}\eta_1' + b_{13}\varphi_1 + b_{14}\varphi_1') =$$
$$= b_{21}b_{11}\eta_1\eta_2 + b_{21}b_{12}\eta_1\eta_2' + b_{21}b_{13}\eta_1\varphi_2 + b_{21}b_{14}\eta_1\varphi_2' +$$
$$+ b_{22}b_{11}\eta_1'\eta_2 + b_{22}b_{12}\eta_1'\eta_2' + b_{23}b_{13}\eta_1'\varphi_2 + b_{22}b_{14}\eta_1'\varphi_2' +$$
$$+ b_{23}b_{11}\varphi_1\eta_2 + b_{23}b_{12}\varphi_1\eta_2' + b_{23}b_{13}\varphi_1\varphi_2 + b_{23}b_{14}\varphi_1\varphi_2' +$$
$$+ b_{24}b_{11}\varphi_1'\eta_2 + b_{24}b_{12}\varphi_1'\eta_2' + b_{24}b_{13}\varphi_1'\varphi_2 + b_{24}b_{14}\varphi_1'\varphi_2' -$$
$$-(b_{21}b_{11}\eta_2\eta_1 + b_{21}b_{12}\eta_2\eta_1' + b_{21}b_{13}\eta_2\varphi_1 + b_{21}b_{14}\eta_2\varphi_1' +$$
$$b_{22}b_{11}\eta_2'\eta_1 + b_{22}b_{12}\eta_2'\eta_1' + b_{22}b_{13}\eta_2'\varphi_1 + b_{22}b_{14}\eta_2'\varphi_1' +$$
$$b_{23}b_{11}\varphi_2\eta_1 + b_{23}b_{11}\varphi_2\eta_1' + b_{23}b_{13}\varphi_2\varphi_1 + b_{23}b_{14}\varphi_2\varphi_1' +$$
$$b_{24}b_{11}\varphi_2'\eta_1 + b_{24}b_{11}\varphi_2'\eta_1' + b_{24}b_{13}\varphi_2'\varphi_1 + b_{24}b_{14}\varphi_2'\varphi_1') =$$

$$= \eta_1 \eta_2'(b_{21}b_{12} - b_{22}b_{11}) + \eta_1' \eta_2(b_{22}b_{11} - b_{21}b_{12}) +$$
$$\varphi_1\varphi_2'(b_{23}b_{14} - b_{24}b_{13}) + \varphi_1'\varphi_2(b_{24}b_{13} - b_{23}b_{14}) +$$
$$\eta_1\varphi_2(b_{21}b_{13} - b_{23}b_{11}) + \eta_2\varphi_1(b_{23}b_{11} - b_{21}b_{13}) +$$
$$\eta_1'\varphi_2'(b_{22}b_{14} - b_{24}b_{11}) + \eta_2'\varphi_1(b_{24}b_{12} - b_{22}b_{14}) +$$
$$\eta_1\varphi_2'(b_{21}b_{14} - b_{24}b_{11}) + \eta_1'\varphi_2(b_{22}b_{13} - b_{23}b_{11}) +$$
$$\varphi_1\eta_2'(b_{23}b_{12} - b_{22}b_{13}) + \varphi_1'\eta_2(b_{24}b_{11} - b_{21}b_{14}) =$$

$$= (b_{21}b_{12} - b_{22}b_{11})(\eta_1\eta_2' - \eta_1'\eta_2) + (b_{23}b_{14} - b_{24}b_{13})(\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2)$$
$$+ (b_{21}b_{13} - b_{23}b_{11})(\eta_1\varphi_2 - \eta_2\varphi_1) + (b_{22}b_{14} - b_{24}b_{11})(\eta_1'\varphi_2' - \eta_2'\varphi_1')$$
$$+ (b_{21}b_{14} - b_{24}b_{11})(\eta_1\varphi_2' - \eta_2\varphi_1') + (b_{23}b_{12} - b_{22}b_{13})(\varphi_1\eta_2' - \varphi_2\eta_1')$$
$$= O(|\mu| e^{(\sigma + t)(b-a)}) + O(|\mu| e^{(\sigma + t)(b-a)}) +$$
$$+ O(e^{(\sigma + t)(b-a)}) - \mu^2 \operatorname{sen}\mu(b-a)\operatorname{senh}\mu(b-a) =$$
$$= O(|\mu| e^{(\sigma + t)(b-a)}) - \mu^2 \operatorname{sen}\mu(b-a)\operatorname{senh}\mu(b-a) = W_o(\lambda)$$

con lo que el lema está probado.

Una vez esto, el teorema de Rouché asegura, que si $f(\lambda)$ y $g(\lambda)$ son analíticas en el interior y sobre un contorno cerrado C, y $|g(\lambda)| < |f(\lambda)|$ sobre C, entonces $f(\lambda) + g(\lambda)$ tienen el mismo numero de ceros en el interior de C.

Sea $f(\lambda) = \lambda \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}(b-a)\operatorname{senh}\sqrt{\lambda}(b-a)$ y $g(\lambda)$ denote el O-termino en la expresión del $W_o(\lambda)$. Entonces se puede escribir $W_o(\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda)$. Sea C el contorno de Titchmarsh (1.12) con lo que $|g(\lambda)| < |f(\lambda)|$ sobre C si n es suficientemente grande, luego $W_o(\lambda)$ tiene el mismo numero de ceros en el interior del contorno de C que $-\lambda \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}(b-a)\operatorname{senh}\sqrt{\lambda}(b-a)$ y este presenta ceros para $\mu = \mp n\pi/b-a$ y $\mu i = \mp n\pi/b-a$ donde n tome valores enteros positivos. Luego, los autovalores λ_n del problema de Fourier tienden asintoticamente a

$$\mp \frac{n^2 \pi^2}{(b-a)^2}$$

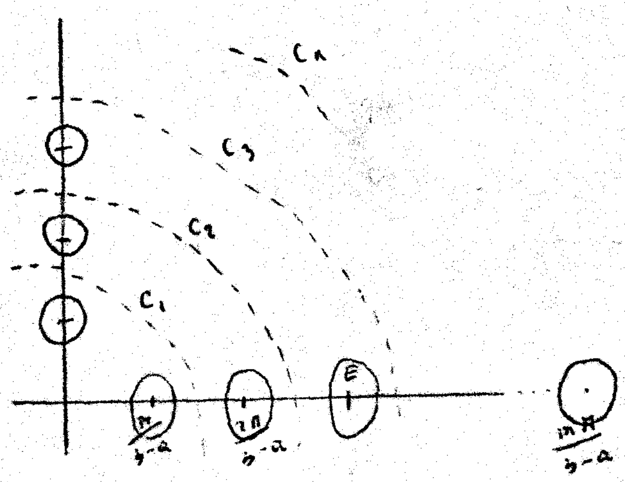
Usando ahora el metodo desarrollado en Coddington and Levinson (pag. 38), para cada punto $n\pi/b-a$ del eje real y el eje imaginario del plano de los μ, lo incluimos en circulos de centro en dichos puntos y de radio $\pi/4(b-a)$ y denotamos por E los puntos interiores a dichos circulos. Sean entonces los circulos C_n de ecuación

$$C_n : \quad |\mu| = \frac{m\pi}{(b-a)} + \frac{\pi}{2(b-a)}$$

Estos C_n no intersecan E, y por tanto ningun cero de $W_o(\lambda)$; pueden por tanto considerarse como curvas simples cerradas que envuelven los ceros de $J_o(\lambda)$.
Para $\lambda = \mu^2$, los circulos C_n se trasforman en los D_n del plano de las λ cuya ecuacion es

$$D_n : \quad |\lambda| = \frac{(n + 1/2)^2 \pi^2}{(b-a)^2} \quad \circ$$

Estas ideas las retomaremos en -3-.



= 5 =

El segundo lema que nos es necesario está basado en el cumplimiento del primero y puede enunciarse así :

LEMA 2a

Si se satisfacen las condiciones del primer lema, los elementos $g_{ij}(x,y,\ )$ con $\lambda = \mu^2$, de la matriz de Green para el problema de Fourier, satisfacen la desigualdad

$$|g_{ij}(x,y,\lambda)| \leq \frac{K}{|\mu|}(e^{-\sigma|x-y|} + e^{-t|x-y|})$$

para $|\mu|$ suficientemente grande, estando μ fuera de E, y siendo la K independiente de μ.

En efecto, del capitulo primero, se tiene que la forma ex licita para los elementos de la matriz de Green, para $y < x$ son

$$g_{11}(x,y,\lambda) = (W_0(\lambda))^{-1}.\left[(P^{(o)}_{24}\eta_1(y) - P^{(o)}_{14}\eta_2(y))\eta_3(x) + \right.$$
$$\left. + (P^{(o)}_{13}\eta_2(y) - P^{(o)}_{23}\eta_1(y))\eta_4(x)\right]$$

Sustituyendo los terminos $P^{(o)}_{23}$.... por sus valores en función de η, φ, φ', η', y estos a su vez en función de $\overset{o}{u}_i$ tenemos para el termino encerrado en corchete

$$(P_{24}\eta_1(y) - P_{14}\eta_2(y))\eta_3(x) + (P_{13}\eta_2(y) - P_{23}\eta_1(y))\eta_4(x) =$$
$$= ((b_{21}\eta_2 + b_{22}\eta'_2 + b_{23}\varphi_2 + b_{24}\varphi'_2)\eta_1(y) -$$
$$- (b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta'_1 + b_{23}\varphi_1 + b_{24}\varphi'_1)\eta_2(y))\eta_3(x) +$$
$$+ ((b_{11}\eta_1 + b_{12}\eta'_1 + b_{13}\varphi_1 + b_{14}\varphi'_1)\eta_2(y)$$
$$- (b_{11}\eta_2 + b_{12}\eta'_2 + b_{13}\varphi_2 + b_{14}\varphi'_2)\eta_1(y))\eta_4(x) =$$
$$= \eta_2\eta_1(y)(b_{21}\eta_3(x) - b_{11}\eta_4(x)) + \eta'\eta_1(y)(b_{22}\eta_3(x) - b_{12}\eta_4(x))$$

$$+ \varphi_2\eta_1(y)(b_{23}\eta_3(x)-b_{13}\eta_4(x)) + \eta'_2\eta_1(y)(b_{24}\eta_3(x) \ldots$$

$$+ \varphi_1\eta_2(y)(b_{13}\eta_4(x)-b_{23}\eta_3(x)) + \varphi'_1\eta_2(y)(b_{14}\eta_4(x) - \ldots$$

$$= (b_{21}\eta_3(x) - b_{11}\eta_4(x))(\eta_2\eta_1(y) - \eta_1\eta_2(y)) +$$

$$+ (b_{22}\eta_3(x) - b_{12}\eta_4(x))(\eta'_2\eta_1(y) - \eta'_1\eta_2(y)) +$$

$$+ (b_{23}\eta_3(x) - b_{13}\eta_4(x))(\varphi_2\eta_1(y) - \varphi_1\eta_2(y)) +$$

$$+ (b_{24}\eta_3(x) - b_{14}\eta_4(x))(\varphi'_2\eta_1(y) - \varphi'_1\eta_2(y)) =$$

$$= (b_{21}(-b_{34}u_1(x) + b_{31}u_2(x) - b_{32}u_3(x) + b_{33}u_4(x)) -$$

$$- (b_{11}(-b_{44}u_1(x) + b_{41}u_2(x) - b_{42}u_3(x) + b_{43}u_4(x)) .$$

$$((-a_{24}u_1 + a_{21}u_2 - a_{22}u_3 + a_{23}u_4)(-a_{14}u_1(y) +$$

$$+ a_{11}u_2(y) - a_{12}u_3(y) + a_{13}u_4(y)) -$$

$$-(-a_{14}u_1 + a_{11}u_2 - a_{12}u_3 + a_{13}u_4)(-a_{24}u_1(y) +$$

$$+ a_{21}u_2(y) - a_{22}u_3(y) + a_{23}u_4(y))$$

$$+ (b_{22}(-b_{34}u_1(x) + b_{31}u_2(x) - b_{32}u_3(x) + b_{33}u_4(x)) -$$

$$- (b_{12}(-b_{44}u_1(x) + b_{41}u_2(x) - b_{42}u_3(x) + b_{43}u_4(x)) .$$

$$.((- \mu^2(a_{24}u_2 + a_{22}u_4) + a_{21}u_3 + a_{23}u_1)(-a_{14}u_1(y) +$$

$$+ a_{11}u_2(y) - a_{12}u_3(y) + a_{13}u_4(y)) - (- \mu^2(a_{14}u_2 + \ldots$$

$$+ a_{11}u_3 + a_{13}u_1)(- a_{24}u_1(y) + a_{21}u_2(y) - a_{22}u_3(y) +$$

$$+ a_{23}u_4(y)) + (b_{23}(-b_{34}u_1(x) + b_{31}u_2(x) - b_{32}u_3(x)$$

$$+ b_{33}u_4(x)) - b_{13}(-b_{44}u_1(x) + b_{41}u_2(x) - b_{42}u_3(x) +$$

$$+ b_{43}u_4(x)).((-a_{24}v_1 + a_{21}v_2 - a_{22}v_3 + a_{23}v_4)(- \ldots$$

$$+ a_{11}u_2(y) - a_{12}u_3(y) + a_{13}u_4(y)) - (- a_{14}v_1 + \ldots$$

$$- a_{12}v_3 + a_{13}v_4)(-a_{24}u_1(y) + a_{21}u_2(y) - a_{22}u_3(y) +$$

$$+ a_{23}u_4(y)) + (b_{24}(-b_{34}u_1(x) + b_{31}u_2(x) - b_{32}u_3(x) + \ldots$$

$$+ b_{33}u_4(x)) - b_{14}(-b_{44}u_1(x) + b_{41}u_2(x) - b_{42}u_3(x) +$$
$$+ b_{43}u_4(x)).((-\mu^2(a_{22}u_2 + a_{24}u_4) + a_{23}u_3 + a_{21}u_1).$$
$$.(-a_{14}u_1(y) + a_{11}u_2(y) - a_{12}u_3(y) + a_{13}u_4(y)) -$$
$$-(-\mu^2(a_{12}u_2 + a_{14}u_4) + a_{13}u_3 + a_{11}u_1)(-a_{24}u_1(y) +$$
$$+ a_{21}u_2(y) - a_{22}u_3(y) + a_{23}u_4(y)) =$$
$$= (-\mu^2((u_2u_2(y) - u_4u_4(y))(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}) + u_4u_3(y) -$$
$$- u_2u_1(y) + (u_4u_2(y) - u_2u_4(y))(a_{24}a_{11} - a_{14}a_{21}))$$
$$+ (u_3u_1(y) - u_1u_3(y))(a_{13}a_{24} - a_{23}a_{14}) + (u_1u_1(y) - u_3u_3(y))$$
$$(a_{11}a_{24} - a_{21}a_{14}) + (u_3u_2(y) - u_1u_4(y))(a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}).$$
$$.(u_1(x)(b_{14}b_{44} - b_{24}b_{34}) + u_2(x)(b_{24}b_{31} - b_{14}b_{41}) +$$
$$+ u_3(x)(b_{14}b_{42} - b_{24}b_{32}) + u_4(x)(b_{24}b_{33} - b_{14}b_{43})$$
$$+ (-\mu^2((u_2u_2(y) - u_4u_4(y))(a_{24}a_{11} - a_{14}a_{21}) + u_2u_3(y) -$$
$$- u_4u_1(y) + (u_4u_2(y) - u_2u_4(y))(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})) +$$
$$+ (u_3u_1(y) - u_1u_3(y))(a_{11}a_{24} - a_{21}a_{14}) + (u_1u_1(y) - u_3u_3(y))$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) + (u_1u_2(y) - u_3u_4(y))(a_{23}a_{11} - a_{13}a_{21})).$$
$$.(u_1(x)(b_{12}b_{44} - b_{22}b_{34}) + u_2(x)(b_{22}b_{31} - b_{12}b_{41}) +$$
$$+ u_3(x)(b_{12}b_{42} - b_{22}b_{32}) + u_4(x)(b_{22}b_{33} - b_{12}b_{43}) +$$
$$+ (u_1u_1(y) - u_3u_3(y) + (u_4u_1(y) - u_2u_3(y))(a_{11}a_{24} - a_{21}a_{14}) +$$
$$+ (u_2u_1(y) - u_1u_2(y))(a_{13}a_{24} - a_{23}a_{14}) +$$
$$+ (u_3u_2(y) - u_1u_4(y))(a_{14}a_{21} - a_{24}a_{11}) +$$
$$+ (u_2u_2(y) - u_4u_4(y))(a_{23}a_{11} - a_{13}a_{21}) +$$
$$+ (u_4u_3(x) - u_3u_4(y))(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})).$$
$$.(u_1(x)(b_{13}b_{44} - b_{23}b_{34}) + u_2(x)(b_{23}b_{31} - b_{13}b_{41}) +$$

$$+\, u_3(x)(b_{13}b_{42} - b_{23}b_{32}) + u_4(x)(b_{23}b_{33} - b_{13}b_{43}))$$

$$+\, ((u_2u_1(y) - u_4u_3(y))(a_{11}a_{24} - a_{21}a_{14}) +$$

$$+\, (u_4u_1(y) - u_3u_2(y))(a_{13}a_{24} - a_{23}a_{14}) +$$

$$+\, (u_2u_4(y) - u_4u_2(y))(a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}) +$$

$$+\, (u_2u_3(y) - u_1u_4(y))(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) + u_3u_1(y) - u_1u_3(y))\,.$$

$$.\,(u_1(x)(b_{11}b_{44} - b_{21}b_{34}) + u_2(x)(b_{21}b_{31} - b_{11}b_{41}) +$$

$$+\, u_3(x)(b_{11}b_{42} - b_{21}b_{32}) + u_4(x)(b_{21}b_{33} - b_{11}b_{43})$$

una vez simplificada esta exoresión y sustituyendo los valores de u_i por sus expresiones explicitas dadas en el conjunto unitario, se obtiene despues de reagruparlos y simplificarlos por el mismo metodo que en la demostración del lema anterior, que dicha expresión esta dada por

$$-\frac{1}{2}\mu(\cos\mu(b-a)\cos\mu(y-a)\operatorname{senh}\mu(b-x) + \operatorname{sen}\mu(b-a)\cosh\mu(b-x)\cosh\mu(y-a)) +$$

$$O(e^{t(b-x)+t(y-a)+\sigma(b-a)} + e^{t(b-a)+\sigma(b-x)+\sigma(y-a)})$$

siguiendo los metodos de Titchmarsh (pag 13), tenemos

$$|\operatorname{sen}\mu(b-a)| \geq e^{t(b-a)} \quad y \quad |\operatorname{senh}\mu(b-a)| \geq A e^{\sigma(b-a)}$$

Por otra parte, de la expresión del $W_0(\lambda)$ de =4=

$$W_0(\lambda) = -\mu^2\operatorname{sen}\mu(b-a)\operatorname{senh}\mu(b-a) + O(|\mu| e^{(\sigma+t)(b-a)})$$

$$(W_0(\lambda))^{-1} = -1/\mu^2\operatorname{sen}\mu(b-a)\operatorname{senh}\mu(b-a) + O(1/|\mu|^3 e^{-(\sigma+t)(b-a)})$$

luego para $y < x$ tenemos finalmente

$$G_{11}(x,y,\lambda) = 1/2\mu\Big[(\cos\mu(b-x)\cos\mu(y-a)\operatorname{senh}\mu(b-a) + \operatorname{sen}\mu(b-a)\cosh\mu(b-x)\cosh\mu(y-a)\Big].$$

$$.\,1/\operatorname{sen}\mu(b-a)\operatorname{senh}\mu(b-a))\Big] + O$$

Similarmente

$$g_{21}(x,y,\lambda) = 1/2\mu\Big[\big(\cosh\mu(b-x)\,\mathrm{sen}\,\mu(b-a)\cosh\mu(y-a) -$$
$$-\mathrm{senh}\,\mu(b-a)\cos\mu(y-a)\cos\mu(b-x)\big)\,.$$
$$.\,1/\mathrm{sen}\,\mu(b-a)\,\mathrm{senh}\,\mu(b-a)\Big] + M$$

siendo

$$M = O\left(1/_{|\mu|}{}^{2}\left(e^{-t|x-y|} + e^{-\sigma|x-y|}\right)\right)$$

Para $g_{22}(x,y,\lambda)$ y $g_{12}(x,y,\lambda)$ las expresiones són equivalentes a las dadas por g_{11} y g_{21}.

= 6 =

Respecto a la matriz de Green del sistema $(L - \lambda H)Y =$ vamos a usar las ideas contenidas en el Coddington and Levinson (pag.305) para determinar la marcha esencial de la matriz

$$G(x,y,\lambda) = (G_{ij}(x,y,\lambda))$$

en terminos del comportamiento ya conocido de la matriz $g(x,y,\lambda)$ cuando esta satisface determinadas condiciones para $|\lambda|$ suficientemente grande.

Sean $G_i(x,y,\lambda) = \{G_{i1}\ ,\ G_{i2}\}$ los vectores de la matriz de Green y sea el vector

$$F_i(x) = \{F_{i1}(x),\ F_{i2}(x)\}$$

donde
$$F_{i1}(x) = p(x)g_{i1}(x,y,\lambda) + q(x)g_{i2}(x,y,\lambda)$$
$$F_{i2}(x) = q(x)g_{i1}(x,y,\lambda) + r(x)g_{i2}(x,y,\lambda)$$

sea tambien

$$G_i^T(x,y,\lambda) = \{G_{1i},\ G_{2i}\}$$

Consideremos como funciones de x, los vectores

$$U_i = \{G_{i1} - g_{i1}\ ,\ G_{i2} - g_{i2}\}.$$

satisfacen al sistema

$$(L - \lambda M)G_i = - M(F_i)$$

En efecto, dicho sistema equivale a

$$\begin{pmatrix} h & d/dx + d^2/dx^2 \\ d^2/dx^2 - d/dx & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G_1 - g_1 \\ G_2 - g_2 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} p & q + d/dx \\ q - d/dx & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G_1 - g_1 \\ G_2 - g_2 \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} p & q + d/dx \\ q - d/dx & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

y este a su vez a

$$h(G_1 - g_1) + (G_2 - g_2)' + (G_2 - g_2)'' - \lambda(p(G_1 - g_1) + q(G_2 - g_2) + (G_2 - g_2)') = -(pF_1 + qF_2 + F_2')$$

$$(G_1 - g_1)'' - (G_1 - g_1)' + g(G_2 - g_2) - \lambda(q(G_1 - g_1) - (G_1 - g_1)' + r(G_2 - g_2)) = -(qF_1 - F_1' + rF_2)$$

Teniendo en cuenta que el sistema al que corresponden los g_{ij} es precisamente

$$g_2'' - \lambda(pg_1 + qg_2 + g_2') = 0$$

$$g_1'' - \lambda(qg_1 + rg_2 - g_1') = 0$$

y que $\quad (L - \lambda M)G = 0$

nos queda entonces

$$hg_{i1} + g_{i2}' = pF_{i1} + qF_{i2} + F_{i2}'$$

$$g_{i1}' - gg_{i2} = qF_{i1} - F_{i1}' + rF_{i2}$$

Sustituyendo los valores de F_i e igualando coeficientes llegamos a la relación

$$(2q - 1)^2 + r^2 - q' + r' + 1 = h + r$$

que se verifica gracias a la condición e.- que impusimos en =1=.

Si se verifica entonces que

$$(L - \lambda U)U_i = -N(F_i)$$

con $U_i = \{G_{i1} - g_{i1} , G_{i2} - g_{i2}\}$

entonces

$$G_{i1}(x,y,\lambda) - g_{i1}(x,y,\lambda) = \int_a^b G_i^T(x,u,\lambda)N(F_i(u))du$$

con $i=1,2$ y similar resultado para

$$G_{i2}(x,y,\lambda) - g_{i2}(x,y,\lambda)$$

Estamos pues ya en condiciones de iniciar el estudio del comportamiento de $G(x,y,\lambda)$ conocido el de $g(x,y,\lambda)$.

= 7 =

LEMA

Si se satisfacen las condiciones del lema 2a y $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son integrables en el intervalo considerado (a,b), entonces los $G_{ik}(x,y,\lambda)$ satisfacen la desigualdad

$$|G_{ik}(x,y,\lambda)| \leq 4K/_{|\mu|}\, e^{-\tau|x-y|}$$

para $|\lambda|$ suficientemente grande, μ fuera de E, K es una constante y $\tau = \min(|\sigma|, |t|)$.

En efecto, bajo las condiciones establecidas y en virtud del lema 2a, entonces

$$|g_{ik}(x,y,\lambda)| \leq 2K/_{|\mu|}\, e^{-\tau|x-y|}$$

donde K es una constante.

Para todo μ tal que $|\mu|$ sea suficientemente grande con $\lambda = \mu^2$, definimos

$$g_i^{(n+1)}(x,y,\ )$$

por la relación

$$\left|G_{i1}^{(m+1)}(x,y,\lambda) - g_{i1}(x,y,\lambda)\right| = \langle G_i^{(m)}(x,u,\lambda) \quad F_i(u)\rangle$$

donde $i=1,2$ y $G^{(m)}(x,y,\lambda)$ es el vector de dos componentes $\left\{G_{1i}^{(m)}(x,y,\lambda)\ ,\ G_{2i}^{(m)}(x,y,\lambda)\right\}$ y con similar notación para

$$G_{i2}^{(m+1)}(x,y,\lambda) - g_{i2}(x,y,\lambda)$$

con $i=1,2$ y $m=0,1,2,\ldots\ldots$.

Para la función inicial a partir de la cual se van construyendo las demas, la definimos como

$$G_{ik}^{(0)}(x,y,\lambda) = 0$$

Vamos a demostrar que

$$\max\left|G_{ik}^{(m+1)}(x,y,\lambda) - G_{ik}^{(m)}(x,y,\lambda)\right| \leq \frac{2Ke^{-\tau|x-y|}}{|\mu|} K_m$$

En efecto :

$$G_{ik}^{(m+1)} - G_{ik}^{(m)} = g_{ik}(x,y,\lambda) + \langle G_{ik}^{(m)}, F(u)\rangle -$$

$$- g_{ik}(x,y,\lambda) - \langle G_{ik}^{(m-1)}, F(u)\rangle =$$

$$= \langle G_{ik}^{(m)} - G_{ik}^{(m-1)}, F(u)\rangle =$$

$$= \langle F(u), \langle F(u), G_{ik}^{(m-1)} - G_{ik}^{(m-2)}\rangle\rangle =$$

$$= \langle F(u), \langle F(u), \langle \overset{(m-1}{\ldots\ldots\ldots} \langle F(u), G_{ik}^{(1)} - G_{ik}^{(0)}\rangle\rangle\rangle\rangle =$$

$$= \langle F(u), \langle F(u), \langle \overset{(m-1}{\ldots\ldots\ldots} \langle F(u) \quad g(x,u,\lambda)\rangle\rangle\rangle$$

Ahora bien, como

$$\left|F_{i1}(x)\right| \leq \frac{2K}{|\mu|}(|p| + |q|)e^{-\tau|x-y|}$$

con expresión similar para F (x), y por ser p, q, y r integrables en el intervalo (a,b) podemos hacer que

$$\int_a^b (|p| + 2|q| + |r|)\,du \leq K$$

luego entonces

$$G^{(m+1)}(x,y,\lambda) - G^{(m)}(x,y,\lambda) \leq \langle F(u), \langle F(u) \langle \overset{m-1}{\cdots\cdots} \langle F(u),$$

$$, \max(2^2K^2 e^{-2\zeta|x-y|}(|p| + 2|q| + |r|)(b-a)/|\mu|^2 \rangle\rangle\rangle \leq$$

$$\max(2^m K^m e^{-m\zeta|x-y|} K^{m-1}(b-a)^{m-1}/|\mu|^m) = \frac{2}{|\mu|} e^{-\zeta|x-y|} . K_m$$

con $|\mu|$ suficientemente grande y μ fuera de E, $a \leq x \leq b$.

Para $m = 0$, se verifica con $K_0 = K$.

Vamos a demostrar que dichas constantes K_m verifican

$$K_j \leq K/2^j \qquad j = o,1,2,\ldots m$$

Para ello, efectuando la diferencia $G_{11}^{(m+2)} - G_{12}^{(m+1)}$

por dos caminos diferentes, se tiene

$$e^{-\zeta|x-y|} K_{m+1} \leq \frac{2KK_m}{|\mu|} \int_a^b (|p| + 2|q| + |r|) e^{-\zeta(|u-y| + |x-u|)} du$$

ya que para el segundo miembro hay que tener en cuenta

$$= \int_a^b F_1 G_1^{(m+1)} + F_2 G_2^{(m+1)} - F_1 G_1^{(m)} - F_2 G_2^{(m)} =$$

$$= \int_a^b F_1(G_1^{(m+1)} - G_1^{(m)}) + F_2(G_2^{(m+1)} - G_2^{(m)}) =$$

$$= \int_a^b \frac{2K}{|\mu|}(|p| + |q|) e^{-\zeta|x-u|} . \frac{2K_m}{|\mu|} e^{-\zeta|u-y|} +$$

$$+ \frac{2K}{|\mu|}(|p| + |q|) e^{-\zeta|x-u|} . \frac{2K_m}{|\mu|} e^{-\zeta|u-y|} =$$

$$= 4KK_m/|\mu|^2 . \int_a^b e^{-\zeta(|u-y|+|x-u|)}(|p| + 2|q| + |r|) du$$

simplificando se obtiene lo que pretendíamos, que

$$e^{-\zeta|x-y|} K_{m+1} \leq \frac{2KK_m}{|\mu|} \int_a^b (|p| + 2|q| + |r|) e^{-\zeta(|u-y|+|x-u|)} du$$

ahora bien, como $|x-y| \leq |u-y| + |x-u|$, tenemos

$$K_{m+1} \leq 2KK_m/|\mu| . \int_a^b (|p| + 2|q| + |r|) du$$

y como p, q y r son integrables en ese intervalo, podemos suponer

$$\frac{K}{|\mu|}\int_a^b (|p| + 2|q| + |r|)\,du \leq 1/4$$

pues basta elegir $|\mu|$ suficientemente grande, luego finalmente obtenemos

$$K_{m+1} \leq K_m/2$$

Analogamente, se habria obtenido despues de ir sustituyendo

$$K_i \leq K/2^i \quad .$$

y en particular para $i=m+1$, luego la expresión

$$K_j \leq K/2^j$$

queda probada por inducción y es pues valida para todo entero positivo m, luego entonces la sucesión $G_{ik}^{(m)}(xy\lambda)$ converge uniformemente hacia un limite que notaremos por $G_{ik}(x,y\lambda)$ cuando m tiende hacia infinito

Para terminar, hay que tener en cuenta que

$$G_{ik}^{(m)}(x,y\lambda) = G_{ik}^{(m)} - G_{ik}^{(m-1)} + G_{ik}^{(m-1)} - G_{ik}^{(m-2)} + \dots +$$

$$+ G_{ik}^{(1)} - G_{ik}^{(o)} =$$

despues de tomar modulos a

$$\leq 2e^{-\tau|x-y|}/|\mu| \cdot (K + K/2 + \dots + K/2^{m-1}) =$$

$$4e^{-\tau|x-y|}/|\mu| \cdot K(1/2 + 1/4 + \dots + 1/2^{m}) =$$

$$(1 - 1/2^{m}) \cdot 4Ke^{-\ \ x-y}$$

y haciendo tender m a infinito se obtiene la desigualdad que pretendiamos. El lema está pues probado.

= 0 =

Sea $\alpha(f(y))$ una función integrable para $a \leq y \leq x$, y donde suponemos (sin perder la generalidad) que la única discontinuidad de dicha función se encuentra en el punto y=x.

Sea $$R = \frac{(m+1/2)^2\pi^2}{(b-a)^2}$$

que desde luego tiende a infinito al crecer m hacia infinito.

Entonces, $$\left|\int_{D_m} d\lambda \int_a^x \frac{e^{-\tau|x-y|}}{|\mu|^2} g(f(y))dy\right| =$$

$$= \left|\int_{D_m}\frac{d\lambda}{|\mu|^2}\left(\int_a^{x-\delta}+\int_{x-\delta}^x\right)e^{-\tau|x-y|}g(f(y))dy\right| \leq k_1\int_{D_m}\frac{|d\lambda|}{|\mu|^2}e^{-\tau\delta} +$$
$$k_2\int_{D_m}\frac{|d\lambda|}{|\mu|}\int_{x-\delta}^x |g(f(y))| dy$$

El segundo sumando del término de la derecha es

$$2\pi k_2\int_{x-\delta}^x g(f(y))\ dy$$

que se hace arbitrariamente pequeño, después de una adecuada elección del δ. Una vez fijado este δ y suponiendo que

$$\tau = \min(|t|,|\sigma|) = |t|$$

el primer término de la derecha, será entonces

$$k\int_{D_m}\frac{|d\lambda|}{|\mu|^2}e^{-|t|\delta} = 2k_1\int_0^\pi e^{-R^{1/2}|\operatorname{sen}\theta|\delta}\,d\theta$$

donde $\lambda = Re^{i\theta}$.

Procediendo como en la Teoría de Funciones de Titchmarsh (pag 104), sea Γ un semicírculo de radio R sobre el eje real. Si R tiende a infinito,

$$\left|\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z}dz\right| = \left|\int_0^\pi e^{iRe^{i\theta}}\,i\,d\theta\right| \leq \int_0^\pi e^{-R\operatorname{sen}\theta}d\theta \leq \int_0^\delta d\theta +$$
$$\int_\delta^{\pi-\delta} e^{-R\operatorname{sen}\delta}\,d\theta + \int_{\pi-\delta}^\pi d\theta < 2\delta + \pi e^{-R\operatorname{sen}\delta}$$

Luego haciendo δ arbitrariamente pequeño, una vez fijo, el segundo término puede también hacerse lo suficientemente pequeño que se quiera tomando R suficientemente grande, luego la integral a lo largo del contorno tiende hacia cero.

Luego $$\int_0^{\pi} e^{-R^{1/2}|\mathrm{sen}\,\theta|\delta}\, d\theta$$

se hace arbitrariamente pequeña, y una conclusión similar se obtiene para

$$\int_{D_m} e^{-|\sigma|\delta} |d\lambda| / |\mu|^2$$

luego

$$\int_{D_m} d\lambda \int_a^x \frac{e^{-\tau|x-y|}}{|\mu|^2} N(f(y))\,dy = o(1)$$

cuando m tiende hacia infinito.

El resultado es similar cuando la integral interior está estendida desde x a b.

El primer teorema importante puede enunciarse de la siguiente forma :

TEOREMA

Sea $N(f(x)) = \{f_1, f_2\}$ integrable en el intervalo (a,b); entonces, el desarrollo mediante funciones propias asociado con la ecuación $(L - \lambda M)Y = 0$ de f(x), es equiconvergente con el correspondiente desarrollo de f(x) mediante funciones propias asociadas con el sistema de Fourrier.

En efecto, sean

$\Psi_n(x) = \{\Psi_{1n}(x), \Psi_{2n}(x)\}$ los autovectores asociados con la ecuación $(L - \lambda M)Y = 0$ y C_n los coeficientes de Fourier correspondientes

$$C_n = \int_a^b \Psi_n^T(x) M(f(x))dx$$

Sean además

$$\Psi_n^o(x) = \{\Psi_{1n}^o(x) \ , \ \Psi_{2n}^o(x)\} \ \text{y} \ C_n^o = \int_a^b \Psi_n^T(x) M_o(f(x))dx$$

los autovectores y los coeficientes respectivos asociados con el problema de Fourier.

Ahora bien, de la expresión

$$G_{i1}(x,y,\lambda) - g_{i2}(x,y,\lambda) = \int_a^b G_i^T(x,u,\lambda) M(F_i(u))du$$

y de las desigualdades de =7=

tenemos

$$|G_{i1}(x,y,\lambda) - g_{i1}(x,y,\lambda)| \le K_1/|\mu|^2 \cdot e^{-\zeta|x-y|}$$

con similar desigualdad para

$$|G_{i2}(x,y,\lambda) - g_{i2}(x,y,\lambda)|$$

cuando $|\mu|$ es suficientemente grande y μ no pertenece a E.

Recordemos además que los puntos en los cuales D_m corta el eje real, no pueden ser polos de $G(x,y,\lambda)$, ni tampoco de $g(x,y,\lambda)$, luego podemos suponer que los autovalores λ_{-n}, ... λ_n y λ_{-p}^o ...... λ_p^o són interiores a D_m.

Además

$$\Phi_1(x,\lambda) = \int_a^b G_1^T(x,y,\lambda) M(f(y))dy$$

$$\Phi_1^o(x,\lambda) = \int_a^b g_1^T(x,y,\lambda) M_o(f(y))dy$$

donde $g_1(x,y,\lambda) = \{g_{11}(x,y,\lambda), \ g_{21}(x,y,\lambda)\}$

entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{D_m} \Phi_1(x,\lambda)d\lambda = \sum_{r=-n}^{n} C_r \Psi_{1r}(x) = S_n$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{D_m} \Phi_1^o(x,\lambda)d\lambda = \sum_{r=-p}^{p} C_r^o \Psi_{1r}^o(x) = \sigma_p$$

entonces

entonces

$$2\pi i(S_n - \sigma_n) = \int_{D_n} d\lambda \left(\int_a^x + \int_x^b \right)(G_1(x,y,\lambda) - g_1(x,y,\lambda))R(f(y))dy$$

y tomando modulos en esta expresion y usando los resultados que demostramos en =9=

$$\int_{D_n} d\lambda \int_a^x e^{-\tau|x-y|} R(f(y))/|\mu|^2 dy = o(1)$$

y el ya demostrado de

$$|G_{11}(x,y,\lambda) - g_{11}(x,y,\lambda)| \leq K_1/|\mu|^2 . e^{-\tau|x-y|}$$

se encuentra

$$S_n - \sigma_p = o(1)$$

uniformemente en x, $a \leq x \leq b$, cuando n y p tienden hacia infinito.

El resultado es similar para $\sum c_n \psi_{2n}(x)$ y $\sum c_n^o \psi_{2n}^o(x)$.

El teorema entonces está probado.

= 10 =

El segundo teorema se puede enunciar así :

TEOREMA

Sea $R(f(x)) = \{f_1(x), f_2(x)\}$ integrable en el intervalo (a,b). Entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^o \psi_{1n}^o(x) \quad y \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^o \psi_{2n}^o(x)$$

son equiconvergentes a la correspondiente serie de Fourier en cosenos para $f_1(x)$ y $f_2(x)$ respectivamente.

En efecto, usando las desigualdades

$g_{11}(x,y,\lambda) = 1/2\mu(\cos\mu(b-x)\cos\mu(y-a)\operatorname{sen}\mu(b-a)) +$

$$\operatorname{sen}\mu(b-a)\cosh\mu(b-x)\cosh\mu(y-a)/\operatorname{sen}\mu(b-a)\operatorname{senh}\mu(b-a))$$

$$+ R$$

$$g_{21}(x,y,\lambda) = 1/2\mu(\operatorname{sen}\mu(b-a)\cosh\mu(y-a)\cosh\mu(b-x) -$$

$$\operatorname{senh}\mu(b-a)\cos\mu(y-a)\cos\mu(b-x)/\operatorname{sen}\mu(b-a)\operatorname{senh}\mu(b-a))$$

$$+ R$$

donde $R = O(\frac{1}{|\mu|^2}(e^{-t|x-y|} + e^{-\sigma|x-y|}))$

y

$$\Phi_1^0(x,\lambda) = \int_a^b g_1(x,y\lambda)R(f(y))\,dy$$

entonces la parte que contiene la integral de `a' a `x' en $\Phi_1^0(x,\lambda)$ es

$$E_1 + E_2 + O(\frac{1}{|\mu|^2}\int_a^x (e^{-|\tau||x-y|} + e^{-|\sigma||x-y|})(|f_1| + |f_2|)\,dy$$

donde

$$E_1 = 1/2\int_a^x \frac{\cosh\mu(b-x)\cosh\mu(y-a)}{\operatorname{senh}\mu(b-a)}(f_1 + f_2)\,dy$$

$$E_2 = 1/2\int_a^x \frac{\cos\mu(b-x)\cos\mu(y-a)}{\operatorname{sen}\mu(b-a)}(f_1 - f_2)\,dy$$

Integrando $\Phi_1^0(x,\lambda)$ respecto a λ a lo largo de D_m^0

se verifica usando

$$\int_{D_m} d\lambda \int_a^x \frac{e^{-\tau|x-y|}}{|\mu|^2} R(f(y))\,dy = o(1)$$

que $1/2\pi i\int_{D_m}\Phi_1^0(x,\lambda)\,d\lambda = 1/2\pi i\int_{D_m} E_1\,d\lambda + 1/2\pi i\int_{D_m} E_2\,d\lambda +$

$+\ o(1)\ +$ terminos similares que provienen de integrar desde `x' a `b',

y esta expresion es a su vez igual a

$$\sum_{r=-n}^{n} c_r^0 \psi_{1r}^0(x)$$

donde la sumatoria está extendida para todos los valores de r para los cuales los pólos de $\Phi_1^0(x,\lambda)$ están incluidos en D_m.

Ahora bien,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{D_m} E_1 \, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_a^x (f_1 + f_2)\,dy \int_{D_m} \frac{\cosh\mu(b-x)\cosh\mu(y-a)}{\operatorname{senh}\mu(b-a)}\, d\mu$$

$$= \int_a^x \left(\frac{1}{b-a} + \frac{2}{b-a}\sum_{r=1}^{n}\cos\left(r\pi\frac{x-a}{b-a}\right)\cos\left(r\pi\frac{y-a}{b-a}\right)\right)(f_1 + f_2)\,dy$$

despues de haber evaluado la integral por el teorema de los residuos.

Resultado similar se obtiene para

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{D_m} E_2 \, d\lambda$$

y para los terminos que contienen las integrales desde `x´ a `b´.

Entonces pues

$$\sum_{r=-n}^{n} c_r^o \psi_{1r}^o(x) = 2\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f_1\,dy + \frac{2}{b-a}\sum_{r=1}^{n}\cos\frac{r\pi(x-a)}{b-a}\int_a^b f_1 \cos\frac{r\pi(y-a)}{b-a}\,dy\right) + o(1)$$

con resultado similar para

$$\sum_{r=-n}^{n} c_r^o \psi_{2r}^o(x)$$

El teorema está entonces probado, pues basta comparar este resultado final con el que aparece en el Titchmarsh pag 8, con la ecuación $LY = \lambda Y$ siendo $L = q(x) - d^2/dx^2$ y admitiendo que las soluciones $\phi(x,\lambda)$, $\chi(x,\lambda)$ son tales que

$$\phi(a,\lambda) = \operatorname{sen}\alpha \qquad \phi'(a,\lambda) = -\cos\alpha$$
$$\chi(b,\lambda) = \operatorname{sen}\beta \qquad \chi'(b,\lambda) = -\cos\beta$$

con α y β constantes; entonces el caso de las series de Fourier se obtiene haciendo que la función $q(x)$ sea identicamente nula.

La ecuación entonces queda

$$Y'' + \lambda Y = 0$$

siendo pues sus soluciones $\phi_0(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}\, x$

$\chi_0(x,\lambda) = \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\, x$ y equivalente a nuestro Wronskiano, el valor $\theta_0(\lambda) = \sqrt{\lambda}$.

Particularizando los valores de las constantes α y β se tiene para $\alpha = \beta = 0$, utilizando el desarrollo en autofunciones, la serie de Fourier en solo senos

$$f(x) = \frac{2}{b-a} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(n\pi\frac{x-a}{b-a}\right) \int_a^b \operatorname{sen}\left(n\pi\frac{y-a}{b-a}\right) f(y)\,dy$$

Similarmente, para $\alpha = 1/2\pi = \beta$ se obtiene

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(y)\,dy + \frac{2}{b-a} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(n\pi\frac{x-a}{b-a}\right) \int_a^b \cos\left(n\pi\frac{y-a}{b-a}\right) f(y)\,dy$$

que es la serie de Fourier en cosenos.

BIBLIOGRAFIA

- BOURBAKI Integratión. Chapitres 7,8
- Theories Spectrales. Chapitres 1,2
  Herman and Cie. Paris 1967
- BIKAN BHAGAT Eigenfuntión Expansions
  Proc.nat.Inst.Sci. Indian 3, 1969
- COURANT and HILBERT Metodos of Mathematical Physics
  Intersc.Publ. New York 1962
- CODDINGTON and LEVINSON Theory of ordinary differen-
  tial equations. Mc Graw-Hill New York 1955
- CHAKRAVARTY Some problems in eigenfuntions expansions
  Quart. J. Math 1965 , 8
- Quart. J. Math, 6, 1968
- CALDERON and ZYMUNG Singular integral and periodic
  funtions. Studia Math. 12,1956
- COHEN A note on constructive methods in Banach algebras
  Proc. Amer. Math. Soc 54 (1961)
- COLLATZ Eigenwertaufgaben mit Technischen Anwendungen
  Academ. Verlagsauschaft. Leipzig 1949
- EVERITT The Sturn-Liouville problem for fourh-order
  differential equations.Q.J.Math. 30,1957
- Fourth Order Singular differential equa-
  tions. Math Annalen 149 (1963)
- EVERITT and CHAUDHURI On an Eigenfuntions Expansions
  for a forrh-order singular differential
  equation. Quart.J.Math. 20 (1969)
- Singular differential equations; tHe even
  order case. Math.Ann. 156.1964

- EVERITT Singular differential equations, some self-adjoint even order cases. Quart. J. Math 18, 1967

- EDWARDS Fourier Series I y II
Holt, Rinehart and Winston, Inc 1967.New York

- EDWARDS and HEWITT Pointwise limits for sequences of convolutio operator. Acta Math 113.1965

- GELFAND and VILENKIN Generalized Functions. V.4º
Academic Press, Inc New York 1964

- GODEMENT Les funtions de type positif et la theory des grups. Trans Amer. Math. Soc. 63 1948

- HALPERIN An expansions thoorem for a sistem of linear differential equations of the first order. Trans. Americam Math Soc 22 (1921)

- HURWITZ Closures and adjoints of linear differential operators. Annals Math 38 (1937)

- HARDY Divergente Seriers Oxford U. Press 1949

- HARDY and ROGOSINSKI Fourier Series.
Cambridge U. Press. New York 1964

- HARDY and LITTLEWOOD and POLYA Inequalities
Cambridge U. Press New York 1934

- HOFFMAN Banach Spaces of Analitic Functions
Prentice-Hall, Inc. New Jersey 1962

- INCE Ordinary differential equations
London 1927

+ KARAMATA Suites de fontionelles lineaires et facteurs de convergence de Series de Fourier.
J. Math Pures and Apil. 35 1956

- KUNIHICO KODAIRA On ordinary differential equations of any even order and the corresponding eigenfuntion expansions. Amer.J.Math.72.1950

- Eigenvalue problem for ordinaty differential equations of the second order and Heisemberg's theory of S-matrices. Ibid 71 1949

- KAMKE Differentialgleichumgem; Lösungsmethoden und Lösungen. New York 1948

- LORENT Approximation af Funtions
Rinehart and Winston Inc. New York 1966

- LOOMIS An introduction to Abstact Harmonic Analysis.
Van Nostrand Co Inc Priceton.New Jersey

- MYRSKY An introduction to linear algebras
Oxford 1955

-NEUMARK Lineare Differentialoperatoren
Berlin 1960

- RIESZ at BELA SZ.NAGY Lecon d'Analyse Fontionale
Blackie and Son Londres

- SCHWARTZ Theory general des fontions moyennes-periodiques. Ann. Math 48 (1947)

- SANSONE Orthogonal Funtions
Interscience 1959

- STONE Linear transformations in Hilbert Space and their aplications to analysis.
Ame. Math. Soc 1966

-TITCHMARSH The theory of funtions
Oxford U. Press 1964

- Eigenfuntion Expansions associated with second-order differential equations
Oxford at the Clarendon Press 1946

- An extensions of the Stur-Liouville expansions. Quart.J. of Math 1$, 1944

- Some eigenfuntion expansions formulas

- TAMARKIN Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansions of an arbitrary funtion in a series of fundamental funtions.
Math.Z. 27 (1927)

- TONELLI Serie Trigonometriche. Bologna 1928

- WEIS Harmonic Analysis
Ptrentice-Hall Inc. New Jersey 1965

- WEYL Uber gewöhnliche Differentialgleichumgen mit singularitäten und die Zugehörigen Entwicklungen. Mat Ann. 68 (1910)

- YOUNG Transformations of Fourier coefficientes.
Proc. Amer. Math. Soc 3 (1952)

- ZYGMUND Trigonometrical Series
Cambridge U. Press 1968

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE CIENCIAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. JAVIER ERICE RODRIGUEZ titulada "DESARROLLOS MEDIANTE AUTOFUNCIONES ASOCIADOS A UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL MATRICIAL" acordó otorgarle la calificación de SOBRESALIENTE CUM LAUDE

Sevilla, 28 de NOVIEMBRE 1.972

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

El Presidente, El Secretario, El Doctorado

A. Castro

UNIVERSIDAD DE SEVILLA - FACULTAD DE CIENCIAS -