Programa de Doctorado "Matemáticas"

PhD Dissertation

LA FORMA DE MASLOV DE UNA SUBVARIEDAD SLANT

Author
Joaquín Barrera López

Supervisor
Prof. Dr. *Alfonso Carriazo Rubio*

Co-supervisor
Prof. Dr. *Pablo S. Alegre Rueda*

June 9, 2018

A mis hermanas,
por entenderme y quererme incondicionalmente.

A mis padres,
por su apoyo eterno y por haberme dado la oportunidad de hacer realidad este sueño.

A mi amor, María,
por haber dado luz y sentido a mi vida y por demostrarme cada día que el amor infinito puede ser recíproco.

Resumen

La Forma de Maslov comenzó a estudiarse en Física en la década de los 60. No fue hasta la década de los 80 cuando empezó a estudiarse dentro de la Geometría Compleja, definiéndose ésta como la 1-forma dual del campo JH, siendo H el vector curvatura media de la subvariedad. Esta forma aparece muy relacionada con las esferas de Whitney. De hecho, se probó que toda subvariedad Lagrangiana de $\mathbb{C}^m$ tiene Forma de Maslov cerrada, siendo las esferas de Whitney las únicas subvariedades Lagrangianas compactas de $\mathbb{C}^m$ con Forma de Maslov conforme. A su vez, estos dos elementos cobran una gran importancia en el estudio de las desigualdades entre los principales invariantes intrínseco y extrínseco de la subvariedad, la curvatura escalar τ, y H, respectivamente. En una cierta desigualdad se verifica el caso de la igualdad si y sólo si la subvariedad es totalmente geodésica o una porción de una esfera de Whitney.

De ahí que el principal objetivo de nuestro proyecto sea el estudio de la Forma de Maslov y la búsqueda de nuevas desigualdades entre H y τ, dentro de la Geometría de Contacto y en S-variedades, teniendo en cuenta que en el año 2000, D. E. Blair y A. Carriazo definieron las esferas de Whitney de contacto, y siguiendo la línea llevada a cabo por A. Carriazo en los recientes estudios sobre la Forma de Maslov para subvariedades slant, también de principios de este siglo.

En primer lugar, estudiamos cuándo la Forma de Maslov es cerrada y conforme para una subvariedad anti-invariante inmersa en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante, relacionándose ambas propiedades con las anteriormente mencionadas esferas de Whitney de contacto, en el ejemplo que cierra este capítulo.

A continuación, pasamos a estudiar la Forma de Maslov para una subvariedad slant dentro de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado con estructura (α, β) trans-Sasakiana, estableciendo previamente desigualdades que relacionan los principales invariantes intrínsecos de la subvariedad, la curvatura escalar y la curvatura de Ricci, con el principal invariante extrínseco, el vector curvatura media. Además, llamamos *subvariedades $*$-slant* a las que satisfacen el caso de la igualdad en la desigualdad entre la curvatura escalar y el vector curvatura media, debido a la gran relevancia que han tenido tanto en geometría compleja como en geometría de contacto las subvariedades que satisfacían desigualdades similares entre H y τ. Además, proporcionamos interesantes ejemplos de las mismas. Para completar esta parte, establecemos una serie de obstrucciones combinando propiedades geométricas y topológicas para subvarieda-

des slant con Forma de Maslov cerrada.

Finalmente, estudiamos la Forma de Maslov para subvariedades anti-invariantes y slant propias inmersas en S-variedades, obteniéndose además para subvariedades slant no invariantes una desigualdad entre la curvatura escalar y el vector curvatura media. Como ejemplos de esta última parte aparecen las esferas de Whitney de S-variedades, definidas por L. M. Fernández y A. Prieto-Martín en el año 2011.

Abstract

The Maslov Form was first studied in Physics in the sixties. It was not until the eighties when it began to be studied in the Complex Geometry, with this Form being defined as the dual 1-form of the field JH, being H the mean curvature vector of the submanifold. This form appears closely linked whith the Whitney spheres. In fact, it was proved that any Lagrangian submanifold of $\mathbb{C}^m$ has closed Maslov Form, being the Whitney spheres the only compact Langrangian submanifolds of $\mathbb{C}^m$ with conformal Maslov Form. At the same time, these two elements are very important in the study of the inequalities between the main intrinsic and extrinsic invariants of the submanifold, the scalar curvature τ, and H, respectively. In a certain inequality is satisfied the equality case if and only if the submanifold is totally geodesic or a portion of a Whitney sphere.

Thus, the main objective of our project is the study of the Maslov Form and the search for new inequalities between H and τ, in the Contact Geometry and in S-manifolds, taking into account that in 2000, D. E. Blair y A. Carriazo defined the contact Whitney spheres, and continuing with the line carried out by A. Carriazo in the recent studies about the Maslov Form for slant submanifolds, at the beginning of this century too.

Firstly, we study when the Maslov Form is closed and conformal for an anti-invariant submanifold immersed in a Sasakian space form. Both propierties are related with the contact Whitney spheres, in the example that closes this chapter.

On the other hand, we study the Maslov Form for a slant submanifold in a generalized Sasakian space form with a trans-Sasakian structure, previously establishing inequalities that relate the main intrinsic invariants of the submanifold, the scalar curvature and the Ricci curvature, with the main extrinsic invariant, the mean curvature vector. In addition to that, we call $*$-slant submanifolds to those that satisfy the equality case in the inequality between the scalar curvature and the mean curvature vector, because of the great relevance they have had in both the complex geometry and the contact geometry, also providing interesting examples of them. To complete this part, we establish some obstructions combining geometrical and topological properties for slant submanifolds with closed Maslov Form.

Finally, we study the Maslov Form for anti-invariant and proper slant submanifolds immersed in S-manifolds. Moreover, we obtain an inequality between the scalar curva-

ture and the mean curvature vector for non-invariant slant submanifolds. As examples of this last part, the Whitney spheres of S-manifolds are included, which were defined by L. M. Fernández and A. Prieto-Martín in 2011.

Índice general

Introducción

Un caso particularmente importante dentro de la Teoría de Subvariedades es el estudio de aquéllas que presentan un comportamiento homogéneo con respecto a la estructura del espacio ambiente.

En particular, si dicho espacio es una variedad casi-Hermítica, es usual trabajar con subvariedades que presenten tal comportamiento con respecto a la estructura casi-compleja J. Así, aparecen las subvariedades complejas, en las que JX es tangente para todo campo tangente X, o las subvariedades totalmente reales, caracterizadas por ser JX normal para todo X tangente. Entre éstas, destacan las subvariedades Lagrangianas, cuya dimensión es la mitad de la dimensión de la variedad ambiente. Ello permite controlar localmente el fibrado normal de la subvariedad a partir de las imágenes por J de los campos tangentes.

Si tomamos como espacio ambiente $\mathbb{C}^m$ con su estructura Kaehleriana usual, podemos destacar las conocidas esferas de Whitney, definidas habitualmente como una familia de inmersiones Lagrangianas de la esfera unidad $\mathbb{S}^m$, centrada en el origen de $\mathbb{R}^{m+1}$, en $\mathbb{C}^m \cong \mathbb{R}^{2m}$, dadas por

$$(u_0, u_1, \dots, u_m) \to \frac{r}{1+u_0^2}(u_1, \dots, u_m, u_0u_1, \dots, u_0u_m) + B,$$

donde r es un número positivo y B es un vector de $\mathbb{C}^m$. El número r y el vector B reciben el nombre de radio y centro de la esfera de Whitney, respectivamente.

Desde un punto de vista topológico, es bien conocido que la esfera no puede ser incrustrada en $\mathbb{C}^m$ como una subvariedad Lagrangiana. Las esferas de Whitney tienen el mejor comportamiento posible, pues sólo presentan un punto doble en los polos de $\mathbb{S}^m$.

En el estudio de las esferas de Whitney aparece un elemento que juega un papel crucial: la Forma de Maslov. Ésta se define, para una subvariedad totalmente real de una variedad casi-Hermítica, como la 1-forma dual del campo JH, siendo H el vector curvatura media de la subvariedad. No obstante, la Forma de Maslov comenzó a estudiarse en Física, y posteriormente, se le dio el enfoque geométrico que consideraremos a lo largo de esta memoria. Concretamente, la Forma de Maslov aparece de forma natural en la resolución de la ecuación de Shrödinger de la Física Cuántica mediante el método de Hamilton-Jacobi. Fue descubierta en 1965 por V. P. Maslov, físico y matemático ruso, de ahí su nombre, pero el primero que la estudió relacionándola con una obstrucción de la transversalidad de una subvariedad Lagrangiana fue V. I. Arnold, matemático ruso, famoso por resolver el problema 13 de Hilbert (véase [42]). Más tarde, en 1981, J. M. Morvan, expresó la Forma de Maslov en términos del vector curvatura media H de una subvariedad Lagrangiana en [43]. En 1994, B.-Y. Chen y J. M. Morvan la caracterizaron en términos de ciertas deformaciones sobre subvariedades en [30].

Posteriormente, en distintos estudios sobre este particular (véanse [14], [24], [25] y [49]), se pone de relieve la importancia de esta forma. Así, por ejemplo, en [49], A. Ros y F. Urbano prueban que toda subvariedad Lagrangiana de $\mathbb{C}^m$ tiene Forma de Maslov cerrada, mientras que las esferas de Whitney son las únicas subvariedades Lagrangianas compactas de $\mathbb{C}^m$ con Forma de Maslov conforme y primer número de Betti nulo. Además, obtienen la siguiente relación entre uno de los principales invariantes intrínsecos de la subvariedad, la curvatura escalar τ, y el principal invariante extrínseco, el vector curvatura media H:

$$\|H\|^2 \geq \frac{2(m+2)}{m^2(m-1)}\tau.$$

Demuestran asimismo que la subvariedad M satisface el caso de la igualdad en cada punto si y sólo si su segunda forma fundamental σ viene dada por

$$\sigma(X,Y) = \frac{m}{m+2}\{g(X,Y)H + g(JX,H)JY + g(JY,H)JX\},$$

para todos X, Y tangentes a M. Además, dicha igualdad se alcanza si y sólo si la subvariedad es totalmente geodésica o una porción de una esfera de Whitney.

Por otra parte, en la geometría casi-contacto métrica aparecen los conceptos de subvariedades invariantes y anti-invariantes, análogos a los de las subvariedades complejas y totalmente reales, pero referidos a la estructura casi-contacto ϕ.

No obstante, poco se ha escrito sobre la Forma de Maslov de una subvariedad anti-invariante, definida ésta como la forma dual de ϕH. De hecho, los trabajos más significativos en este campo se han centrado en el estudio de las subvariedades integrales, es decir, aquéllas que son normales al campo de estructura ξ de la variedad ambiente. Así, podemos destacar los artículos [47] y [48], de G. Pitiş, en los que se analizan subvariedades integrales de variedades Sasakianas con un campo cerrado y conforme, definiendo las subvariedades $*$-*Legendrianas* de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$ como aquellas subvariedades M^m cuya segunda forma fundamental adquiere la expresión

$$\sigma(X,Y) = \frac{m}{m+2}\{g(X,Y)H + g(\phi X,H)\phi Y + g(\phi Y,H)\phi X\},$$

que son las que satisfacen el caso de la igualdad en la desigualdad

$$\tau \geq m(m-1)\frac{c+3}{4} + \left[m^2\left(\frac{m}{m+2}\right)^2 + 2(m-2)\right]\|H\|^2.$$

Más tarde, M. Cîrnu estableció en [31] una desigualdad similar para una subvariedad anti-invariante de una variedad de Kenmotsu y llamó *Whitney type spheres* a aquéllas subvariedades que satisfacen el caso de la igualdad.

Por otra parte, destaca el artículo [12], donde A. Carriazo y D. E. Blair introducen y caracterizan las esferas de Whitney de contacto, dadas por las inmersiones de $\mathbb{S}^m$ en $\mathbb{R}^{2m+1}$ (dotado de su estructura Sasakiana usual),

$$(u_0, u_1, \ldots, u_m) \to \frac{r}{1+u_0^2}(u_0u_1, \ldots, u_0u_m, u_1, \ldots, u_m, \frac{ru_0}{1+u_0^2} + C(1+u_0^2)) + B,$$

donde r es un número positivo, B es un vector de $\mathbb{R}^{2m+1}$ y C es una constante real. Además, estos autores también estudian subvariedades anti-invariantes que son tangentes al campo de estructura ξ de $\mathbb{R}^{2m+1}$. Además, demuestran que el caso de la igualdad en la desigualdad

$$\|H\|^2 \geq \frac{2(m+2)}{(m+1)^2(m-1)}\tau, \tag{0.0.1}$$

se alcanza si y sólo si la segunda forma fundamental de la subvariedad tiene la expresión

$$\begin{aligned}\sigma(X,Y) = \frac{m+1}{m+2}\{&(g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y))H + (g(\phi X, H)- \\ &- \frac{m+2}{m+1}\eta(X))\phi Y + (g(\phi Y, H) - \frac{m+2}{m+1}\eta(Y))\phi X\},\end{aligned} \tag{0.0.2}$$

para todos X, Y tangentes a M. Incluso van más allá probando que esta igualdad se alcanza si y sólo si la subvariedad es totalmente geodésica o el producto de una porción de una esfera de Whitney y la recta real $\mathbb{R}$.

Tanto las subvariedades complejas como las totalmente reales fueron generalizadas por B.-Y. Chen cuando éste introdujo la noción de subvariedad slant, para las que J_pX_p forma un ángulo constante θ con T_pM, independiente del campo X y del punto p de la subvariedad M (véase [26]). Las subvariedades complejas y las totalmente reales son subvariedades slant con ángulo $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$, respectivamente. Para las subvariedades slant, desigualdades entre los principales invariantes intrínsecos de la subvariedad como la curvatura escalar τ, o la curvatura de Ricci Ric, y el principal invariante extrínseco, el vector curvatura media H, han sido bastante estudiadas, sobre todo en el marco de la geometría compleja. De hecho, B.-Y. Chen introdujo en [27] las *special slant surfaces*, que satisfacen el caso de la igualdad en una desigualdad similar dentro de un espacio proyectivo o hiperbólico complejo. Además, A. Song y X. Liu obtuvieron en [50] dos desigualdades entre la curvatura de Ricci, la curvatura escalar y el vector curvatura media de subvariedades slant en un espacio de curvatura seccional holomorfa constante. Sin embargo, sobre la desigualdad entre τ y H para subvariedades slant dentro de la geometría de contacto métrica poco hay estudiado, por lo que será uno de los objetivos de nuestro trabajo.

Volviendo a la Forma de Maslov, A. Carriazo estudió en [19] cuándo la Forma de Maslov de una subvariedad slant propia M^{m+1} es cerrada en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$. Además, presentó algunas obstrucciones geométricas y topológicas para subvariedades slant cuando dicha forma es cerrada, haciendo uso de la versión de los invariantes y desigualdades de Chen para la geometría de contacto establecida por él mismo en el citado artículo.

Por otra parte, las S-variedades fueron introducidas por D. E. Blair en [10] para variedades dotadas de una f-estructura general, noción introducida por K. Yano en [51]. Dichas variedades juegan el papel de las variedades Kaehlerianas en geometría compleja y de las variedades Sasakianas en geometría de contacto. En este marco, cabe destacar que L. M. Fernández y A. Prieto-Martín establecieron en [33] la siguiente desigualdad entre H y τ, para cualquier subvariedad anti-invariante de dimensión $m+t$ de $\mathbb{R}^{2m+s}$, tangente a los campos de estructura $\xi_1, \ldots, \xi_t, \quad t = 1, \ldots, s$,

$$\|H\|^2 \geq \frac{2(m+2)}{(m+t)^2(m-1)}\tau. \tag{0.0.3}$$

Además, demostraron que el caso de la igualdad se alcanza si y sólo si la segunda forma fundamental de la subvariedad satisface la expresión

$$\begin{aligned}\sigma(X,Y) = \frac{m+t}{m+2}\{(g(X,Y) - \sum_{\alpha=1}^{t}\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y))H + (g(fX,H) - \\ - \frac{m+2}{m+t}\sum_{\alpha=1}^{t}\eta_\alpha(X))fY + (g(fY,H) - \frac{m+2}{m+t}\sum_{\alpha=1}^{t}\eta_\alpha(Y))fX\}.\end{aligned}$$

Ambas expresiones generalizan (0.0.1) y (0.0.2), respectivamente.

El objetivo fundamental de este trabajo se enmarca en un ambicioso proyecto consistente en el estudio de la Forma de Maslov en el marco de la geometría métrica de contacto para subvariedades slant, así como la obtención de nuevas desigualdades entre H y τ.

Para ello, hemos estructurado esta memoria de la siguiente manera. En primer lugar, presentamos un capítulo de preliminares, en el que se recogen los conceptos básicos que necesitaremos durante el transcurso de nuestro estudio.

El segundo capítulo se divide en dos secciones. En la primera de ellas nos centramos en el estudio de la forma de Maslov de una subvariedad anti-invariante inmersa en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante, caracterizando cuándo ésta es cerrada.

Veremos en el Corolario 2.1.13 que la Forma de Maslov es cerrada si y sólo si la variedad ambiente es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante igual a -3, modelizado por el caso $\mathbb{R}^{2m+1}$ con su estructura Sasakiana habitual. Así, cualquier subvariedad anti-invariante de $\mathbb{R}^{2m+1}$ tiene Forma de Maslov cerrada. En la segunda sección analizamos cuándo la Forma de Maslov es conforme, lo cual se alcanza para cualquier subvariedad anti-invariante que tenga su vector curvatura media H paralelo. En caso de no ser así, se proporcionan condiciones suficientes para que la Forma de Maslov de una subvariedad anti-invariante sea, si no ya conforme, al menos $\mathcal{D}$-conforme, concepto éste que se introduce de manera adecuada. Para ello, su segunda forma fundamental debe satisfacer la expresión (0.0.2), establecida en [12]. Asimismo, se ponen de manifiesto las relaciones de estas propiedades con las ya mencionadas esferas de Whitney.

Cabe mencionar que los resultados recogidos en este segundo capítulo forman parte de la memoria del Trabajo de Fin del Máster "Estudios Avanzados en Matemáticas"(véase [7]). En dicho trabajo se estudia cuándo la Forma de Maslov para una subvariedad anti-invariante tangente a ξ en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante es cerrada y conforme, siguiendo la línea llevada a cabo por A. Carriazo en [19]. Además, se incluye un capítulo en el que se estudian los campos especiales, definidos como aquellos campos cerrados y conformes tales que $\sigma(X,X) = fNX$, con f función diferenciable en la subvariedad, estudiando la expresión del endomorfismo de Weingarten de dichos campos, entre otras propiedades, según la línea establecida por G. Pitiş en [47] para subvariedades anti-invariantes ortogonales a ξ.

En el tercer capítulo, continuando los estudios llevados a cabo por A. Carriazo en [19], generalizamos la variedad ambiente y estudiamos la Forma de Maslov para subvariedades slant propias dentro de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado. Esta noción fue introducida por P. Alegre, D. E. Blair y A. Carriazo en [3], y se ha constituido desde entonces en un importante marco de trabajo en la geometría casi-contacto métrica. Además dotaremos a la variedad ambiente de una estructura (α, β) trans-Sasakiana para llevar a cabo nuestro estudio en el marco más general posible. Este capítulo, que se divide en cuatro secciones, constituye el núcleo central de este trabajo, dando nombre a la tesis doctoral.

En la primera sección establecemos desigualdades entre los principales invariantes intrínsecos de la subvariedad, la curvatura escalar y la curvatura de Ricci, y el principal invariante extrínseco, el vector curvatura media. Cabe destacar en esta sección el Teorema 3.1.3, en el que establecemos la desigualdad

$$\|H\|^2 \geq \frac{2(m+2)}{(m+1)^2(m-1)} \left[\tau - \frac{1}{2}m(m+1)f_1 - \frac{3}{2}m\cos^2\theta f_2 + mf_3 + \alpha^2 m \operatorname{sen}^2\theta \right]. \tag{0.0.4}$$

la cual generaliza la dada por (0.0.1), obtenida en [12]. Además, caracterizamos el caso de la igualdad en función de la siguiente expresión de la segunda forma fundamental de la subvariedad

$$\begin{aligned}\sigma(X,Y) \;&= \frac{m+1}{m+2}\Big\{\left(g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)\right)H \\ &\quad -\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\omega_H(X)+\alpha\frac{m+2}{m+1}\eta(X)\right)NY \\ &\quad -\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\omega_H(Y)+\alpha\frac{m+2}{m+1}\eta(Y)\right)NX\Big\},\end{aligned} \tag{0.0.5}$$

llamando a las subvariedades que la satisfacen *subvariedades $*$-slant* y proporcionando interesantes ejemplos de las mismas, según la variedad ambiente tenga estructura α-Sasakiana o β-Kenmotsu, ya que en [41], J. C. Marrero probó que si $m \geq 2$, la variedad ambiente $\widetilde{M}^{2m+1}$ presenta una de estas dos estructuras.

En la segunda sección caracterizamos cuándo la Forma de Maslov de una subvariedad slant propia es cerrada. Establecemos los resultados de forma general para un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$ con estructura (α, β) trans-Sasakina y particularizamos para obtener conclusiones haciendo distinción según la variedad ambiente tenga estructura α-Sasakiana o β-Kenmotsu. Además, proporcionamos diversos ejemplos en cada caso. Terminamos la sección definiendo una nueva forma que llamamos Forma de Maslov adaptada, la cual es cerrada al menos en el caso α-Sasakiano.

En la tercera sección, conseguimos una serie de obstrucciones combinando propiedades tanto geométricas como topológicas para subvariedades slant propias que tengan Forma de Maslov cerrada, en el caso en que la variedad ambiente $\widetilde{M}$ tenga estructura α-Sasakiana, generalizando así los resultados obtenidos por A. Carriazo en [19]. Para ello, debemos tener en cuenta los resultados obtenidos en la sección anterior. Para establecer dichas obstrucciones se relacionan los invariantes intrínsecos $\delta_M^{\mathcal{D}}$ y $\delta_M^{\mathcal{T}}$ con el vector curvatura media H de la subvariedad. Dichos invariantes fueron estudiados en [6] por P. Alegre, A. Carriazo, Y. H. Kim y D. W. Yoon, y en [21] por A. Carriazo. Para finalizar la sección, se establece una obstrucción que hace referencia a la curvatura escalar de la subvariedad cuando la Forma de Maslov es cerrada.

En la cuarta y última sección de este capítulo estudiamos la conformidad de la Forma de Maslov. Veremos que para que la Forma de Maslov sea al menos $\mathcal{D}$-conforme necesitamos imponer la condición de que $\nabla N = 0$, con lo que en el Teorema 3.4.1 establecemos que dicha condición implica que o bien la subvariedad debe ser minimal o bien la variedad ambiente sea cosimpléctica.

En el cuarto y último capítulo de esta memoria establecemos una segunda generalización de la variedad ambiente, estudiando la Forma de Maslov de subvariedades anti-invariantes y slant propias de S-variedades. En concreto, nos centraremos en el caso en que la variedad ambiente sea una S-variedad de curvatura f-seccional constante. Para ello, dividiremos este capítulo en dos secciones.

En la primera sección estudiamos el caso de las subvariedades anti-invariantes, caracterizando cuándo la Forma de Maslov es cerrada y dando condiciones suficientes para que sea $\mathcal{D}$-conforme, siguiendo la misma línea del primer capítulo.

En la segunda sección caracterizamos cuándo la Forma de Maslov es cerrada para subvariedades slant propias de S-variedades. Veremos en el Corolario 4.2.12 que la Forma de Maslov es cerrada si y sólo si la variedad ambiente es una S-variedad de curvatura f-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+s}(c)$ con $c = -3s$. Para finalizar, en la segunda parte establecemos una desigualdad entre H y τ que extiende la desigualdad (0.0.4) al caso de subvariedades slant no invariantes en S-variedades y que generaliza de forma natural la desigualdad (0.0.3), establecida por L. M. Fernández y A. Prieto-Martín en [33]. Además, caracterizamos el caso de la igualdad en función de la segunda forma fundamental de la subvariedad.

Cerramos la tesis con una lista de las referencias bibliográficas que se han ido citando a lo largo de la misma.

Cabe mencionar que los resultados recogidos en la primera sección y en la primera parte de la segunda sección de este último capítulo, se encuentran publicados en [8]. En este artículo, estudiamos en primer lugar la Forma de Maslov para una subvariedad slant propia, M^{m+s} tangente a los campos de estructura $\xi_1, \ldots, \xi_s$, dentro de una S-variedad de curvatura f-seccional constante, $\widetilde{M}^{2m+s}(c)$, estableciendo que dicha forma es cerrada si y sólo si $c = -3s$. A continuación, se estudia el caso en que la subvariedad sea anti-invariante. En este caso, llegamos también a que la Forma de Maslov es cerrada si y sólo si $c = -3s$. Por otra parte, estudiamos cuándo la Forma de Maslov es conforme en el caso en que la subvariedad sea anti-invariante y tenga Forma de Maslov cerrada. Demostramos en primer lugar que dicha forma es conforme si y sólo si el vector curvatura media H es paralelo. En otro caso, establecemos una condición suficiente para que la Forma de Maslov sea $\mathcal{D}$-conforme (es decir, conforme para los campos ortogonales a los campos de estructura de la subvariedad). Para ello, la subvariedad debe tener Forma de Maslov cerrada y satisfacer la expresión (4.1.35) de su segunda forma fundamental.

Por otra parte, en los artículos [1] y [2] hemos recogido otros resultados de la tesis. El primero de ellos se encuentra enviado para su publicación y el segundo en proceso de elaboración para ser enviado próximamente.

En [1] establecemos en primer lugar la desigualdad (0.0.4) para cualquier subvariedad slant no invariante en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado con estructura (α, β) trans-Sasakiana, estudiando qué expresión debe satisfacer la segunda forma fundamental de la subvariedad para que se alcance el caso de la igualdad. A estas subvariedades las llamamos subvariedades $*$-slant. A continuación, damos interesantes ejemplos de estas subvariedades usando tanto productos *warped* como deformaciones $\mathcal{D}$-homotéticas, siguiendo la línea llevada a cabo por P. Alegre, A. Carriazo y D. E. Blair en [3] y por P. Alegre y A. Carriazo en [4]. Finalizamos el artículo obteniendo la expresión de la curvatura de Ricci para subvariedades $*$-slant, en función del vector curvatura media y estableciendo cotas tanto inferior como superior de la misma.

En [2] damos la desigualdad (4.2.72) entre H y τ, para cualquier subvariedad slant no invariante dentro de una S-variedad de curvatura f-seccional constante, caracterizando el caso de la igualdad en función de la segunda forma fundamental de la subvariedad.

Finalmente, me gustaría aprovechar esta introducción para dar las gracias a los Profesores Dr. D. Pablo S. Alegre Rueda y Dr. D. Alfonso Carriazo Rubio por todo el tiempo y esfuerzo que me han dedicado a lo largo del proceso de elaboración de este trabajo, el cual se ha prolongado en el tiempo más de lo esperado debido a diversas situaciones. Ellos siempre han estado ahí y sin ellos este sueño nunca se hubiese hecho realidad. Gracias de todo corazón. También querría agradecer al Sr. Director del Departamento de Geometría y Topología, Profesor Dr. D. Luis Manuel Fernández Fernández, el haber puesto a mi disposición los medios necesarios para llevar a cabo mi investigación, y al Profesor Dr. D. Antonio Suárez Fernández, Coordinador del Programa de Doctorado "Matemáticas", el haber hecho posible el desarrollo normal del mismo.

Capítulo 1

Preliminares

Presentamos a continuación las definiciones y los resultados que hemos considerado imprescindibles para poder llevar a cabo una completa comprensión del resto de esta memoria.

Para ello, comenzamos con una sección de generalidades acerca de las subvariedades en la Geometría Riemanniana. En la segunda sección recordaremos los conceptos de campo cerrado y conforme. La siguiente sección está dedicada a la introducción de los tipos de variedades casi-contacto métricas y al estudio de las primeras propiedades elementales de una subvariedad de una variedad casi-contacto métrica. Para más detalles sobre Geometría Riemanniana de Contacto, recomendamos la referencia [11]. Terminaremos con unas nociones básicas sobre subvariedades de S-variedades.

Señalemos que, en lo que sigue, todas las funciones serán diferenciables en las variedades correspondientes.

1.1. Teoría general de subvariedades

Sea M una subvariedad de una variedad Riemanniana $(\widetilde{M}, g)$. Consideramos sobre M la métrica inducida por la de $\widetilde{M}$, que denotaremos también por g. Así, la inmersión de M en $\widetilde{M}$ es isométrica.

Si denotamos por ∇ y $\widetilde{\nabla}$ las conexiones de Levi-Civita de M y $\widetilde{M}$ respectivamente, entonces, las Fórmulas de Gauss y de Weingarten vienen dadas por

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sigma(X, Y), \quad (1.1.1)$$

$$\widetilde{\nabla}_X V = -A_V X + D_X V, \quad (1.1.2)$$

para todos X, Y tangentes a M y todo V normal a M, donde σ es la *segunda forma fundamental* de M en $\widetilde{M}$, A_V el *endomorfismo de Weingarten* asociado con V y D la *conexión normal*. La segunda forma fundamental σ y el operador de Weingarten A

están relacionados mediante

$$g(A_V X, Y) \;=\; g(\sigma(X,Y), V), \tag{1.1.3}$$

para todos X, Y tangentes a M y todo V normal a M.

Se define el *vector curvatura media* de M por

$$H \;=\; \frac{1}{m+1}\,\text{traza}\,\sigma \;=\; \frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{m+1}\sigma(e_i, e_i), \tag{1.1.4}$$

donde $m+1$ es la dimensión de M y $\{e_1, \ldots, e_{m+1}\}$ es una referencia local ortonormal en M. Se dice que M es *minimal* si H se anula idénticamente. Además, se dice que M es una *subvariedad totalmente umbilical* si

$$\sigma(X,Y) = g(X,Y)H,$$

para todos X, Y de M.

Si denotamos por $\widetilde{m}$ la dimensión de $\widetilde{M}$, podemos elegir una referencia local ortonormal

$$e_1, \ldots, e_{m+1}, e_{m+2}, \ldots, e_{\widetilde{m}}$$

tales que, restringidos a M, los campos $e_1, \ldots, e_{m+1}$ sean tangentes a M y, por tanto, $e_{m+2}, \ldots, e_{\widetilde{m}}$ sean normales a M. Sean $\{\omega^1, \ldots, \omega^{\widetilde{m}}\}$ sus 1-formas duales. Entonces, las *ecuaciones de estructura* de $\widetilde{M}$ vienen dadas por

$$\mathrm{d}\omega^A = -\sum_B \omega^A_B \wedge \omega^B, \qquad \omega^A_B + \omega^B_A = 0,$$

$$\mathrm{d}\omega^A_B = -\sum_C \omega^A_C \wedge \omega^C_B + \Omega^A_B, \quad \Omega^A_B = \frac{1}{2}\sum_{C,D}\widetilde{R}^A_{BCD}\omega^C \wedge \omega^D, \tag{1.1.5}$$

$1 \leq A, B, C, D \leq \widetilde{m}$, donde Ω^A_B se llaman *formas de curvatura* y $\widetilde{R}$ denota el tensor de curvatura de $\widetilde{M}$. Si restringimos estas formas a M, entonces $\omega^r = 0$, para todo $r = m+2, \ldots, \widetilde{m}$. Como $0 = \mathrm{d}\omega^r = -\sum_i \omega^r_i \wedge \omega^i$, el Lema de Cartan implica que

$$\omega^r_i \;=\; \sum_j \sigma^r_{ij}\omega^j, \qquad \sigma^r_{ij} = \sigma^r_{ji}, \tag{1.1.6}$$

donde

$$\sigma^r_{ij} \;=\; \omega^r_i(e_j) \;=\; g(A_{e_r}e_i, e_j) = g(\sigma(e_i, e_j), e_r), \tag{1.1.7}$$

$i, j = 1, \ldots, m+1$; $r = m+2, \ldots, \widetilde{m}$.

Para cada campo vectorial X tangente a la subvariedad M, podemos escribir

$$\widetilde{\nabla}_X e_i = \sum_{j=1}^{m+1} \omega_i^j(X) e_j + \sum_{s=m+2}^{\widetilde{m}} \omega_i^s(X) e_s, \tag{1.1.8}$$

$$\widetilde{\nabla}_X e_r = \sum_{j=1}^{m+1} \omega_r^j(X) e_j + \sum_{s=m+2}^{\widetilde{m}} \omega_r^s(X) e_s, \tag{1.1.9}$$

para $i = 1, \ldots, m+1$ y $r = m+2, \ldots, \widetilde{m}$. Las 1-formas ω_i^j, ω_i^s, ω_r^j y ω_r^s dadas por (1.1.8) y (1.1.9) reciben el nombre de *formas de conexión* de M en $\widetilde{M}$.

Denotemos por R y $\widetilde{R}$ los tensores de curvatura de M y $\widetilde{M}$, respectivamente, y por R^D el tensor de curvatura de la conexión normal D. Entonces, la *ecuación de Gauss* y la *ecuación de Ricci* vienen dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X,Y;Z,W) &= R(X,Y;Z,W) + g(\sigma(X,Z),\sigma(Y,W)) - \\ &\quad - g(\sigma(X,W),\sigma(Y,Z)) \end{aligned} \tag{1.1.10}$$

y

$$R^D(X,Y;U,V) = \widetilde{R}(X,Y;U,V) + g([A_U, A_V](X), Y),$$

para todos X, Y, Z, W tangentes a M y todos U, V normales a M.

En cuanto a la segunda forma fundamental σ, se define la *Derivada de Van der Waerden-Bortolotti* $\widetilde{\nabla}\sigma$ de σ con respecto a la conexión en $TM \oplus T^{\perp}M$ como

$$(\widetilde{\nabla}_X \sigma)(Y,Z) = D_X(\sigma(Y,Z)) - \sigma(\nabla_X Y, Z) - \sigma(Y, \nabla_X Z), \tag{1.1.11}$$

con X, Y, Z tangentes a M. La *ecuación de Codazzi* satisface la expresión

$$(\widetilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\widetilde{\nabla}_X \sigma)(Y,Z) - (\widetilde{\nabla}_Y \sigma)(X,Z), \tag{1.1.12}$$

para todos X, Y, Z tangentes a M, donde $(\widetilde{R}(X,Y)Z)^{\perp}$ denota la componente normal de $\widetilde{R}(X,Y)Z$.

Por otra parte, la *curvatura de Ricci* de M para cualquier campo tangente X de M viene dada por

$$Ric(X) = \sum_{1 \le i \le m+1} K(X, e_i), \tag{1.1.13}$$

donde $K(X, e_i)$ denota la *curvatura seccional* de M asociada con la sección plana generada por X y e_i, para todo campo e_i de una referencia local ortonormal de M.

De la misma forma, la *curvatura escalar* τ de M en $p \in M$ se define como

$$\tau = \sum_{1 \le i < j \le m+1} K(e_i, e_j), \tag{1.1.14}$$

donde $K(e_i, e_j)$ denota la curvatura seccional de M asociada con la sección plana generada por e_i y e_j, para todos e_i, e_j de una referencia local ortonormal de M.

Además, sabemos que la curvatura de Ricci y la curvatura escalar están relacionadas de la siguiente forma

$$\tau = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \leq m+1} Ric(e_j).$$

1.2. Campos cerrados y conformes

Dada una variedad Riemanniana $(\widetilde{M}, g)$, se dice que un campo X en $\widetilde{M}$ es *cerrado* si su 1-forma dual es cerrada. Esto es equivalente a probar que

$$g(Y, \widetilde{\nabla}_Z X) = g(Z, \widetilde{\nabla}_Y X), \tag{1.2.1}$$

para todos Y, Z en $\widetilde{M}$.

Por otra parte, se dice que X es *conforme* si $L_X g = \rho g$, donde ρ es una función en $\widetilde{M}$. Un campo cerrado X es conforme si y sólo si

$$\widetilde{\nabla}_Y X = fY, \tag{1.2.2}$$

para todo campo Y en $\widetilde{M}$, siendo f una función en $\widetilde{M}$.

Entonces si $\{e_1, \ldots, e_{m+1}\}$ es una base de campos ortonormales de $\widetilde{M}$ tenemos que

$$\widetilde{\nabla}_{e_i} X = f e_i,$$

para todo $i = 1, \ldots, m+1$.

Así, deducimos que

$$div(X) = \sum_{i=1}^{m+1} g(\widetilde{\nabla}_{e_i} X, e_i) = \sum_{i=1}^{m+1} g(f e_i, e_i) = f(m+1) = f \dim(\widetilde{M}),$$

lo cual implica que

$$f = \frac{div(X)}{\dim(\widetilde{M})},$$

y de esta forma

$$\widetilde{\nabla}_Y X = \frac{div(X)}{\dim(\widetilde{M})} Y.$$

De lo anterior también podemos deducir que

$$g(\widetilde{\nabla}_Y X, Z) + g(\widetilde{\nabla}_Z X, Y) = 2g(\widetilde{\nabla}_Y X, Z) = 2\frac{div(X)}{\dim(\widetilde{M})} g(Y, Z).$$

Por otro lado, de [49, Lema 1] se sigue que si X es un campo cerrado y conforme de una variedad Riemmaniana $\widetilde{M}^{m+1}$, entonces el tensor de curvatura R de $\widetilde{M}$ verifica que

$$\|X\|^2 R(Y,Z)X = \frac{Ric(X)}{m}(g(Z,X)Y - g(Y,X)Z),$$

donde Ric denota la curvatura de Ricci de $\widetilde{M}$.

1.3. Subvariedades de variedades casi-contacto métricas

Sea $\widetilde{M}$ una variedad diferenciable de dimensión impar. Se dice que $\widetilde{M}$ es una *variedad casi-contacto* si existen en $\widetilde{M}$ un tensor ϕ de tipo $(1,1)$, un campo vectorial global ξ (llamado *campo vectorial de estructura o campo de Reeb*) y una 1-forma global η tales que

$$\eta(\xi) = 1 \tag{1.3.1}$$

y

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \tag{1.3.2}$$

para todo X en $\widetilde{M}$. También se dice que $\widetilde{M}$ tiene una (ϕ,ξ,η)*-estructura o una estructura casi-contacto*. En estas condiciones, es inmediato probar que

$$\phi\xi = 0, \tag{1.3.3}$$

$$\eta(\phi X) = 0,$$

para todo X en $\widetilde{M}$ y que ϕ tiene rango $2m$, siendo $\dim \widetilde{M} = 2m+1$.

Sea ahora g una métrica Riemanniana sobre $\widetilde{M}$. Se dice que g es una *métrica adaptada* a la estructura casi-contacto de $\widetilde{M}$ si se verifican

$$g(X,\xi) = \eta(X), \tag{1.3.4}$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y), \tag{1.3.5}$$

para todos X, Y en $\widetilde{M}$. Se deduce de (1.3.1) y (1.3.4) que ξ es unitario para g y que η es la 1-forma dual de ξ. Una variedad casi-contacto dotada de una métrica g adaptada a la estructura se llama *variedad casi-contacto métrica* y se dice que tiene una (ϕ,ξ,η,g)*-estructura o una estructura casi-contacto métrica*. Denotaremos simplemente por $\widetilde{M}$ a una variedad casi-contacto métrica $(\widetilde{M},\phi,\xi,\eta,g)$.

En una variedad casi-contacto métrica, se cumple

$$g(\phi X, Y) + g(X, \phi Y) = 0, \tag{1.3.6}$$

para todos X, Y en $\widetilde{M}$, lo cual implica, en particular, que

$$g(X, \phi X) = 0,$$

para todo X en $\widetilde{M}$.

Se denota por Φ a la 2-forma en $\widetilde{M}$ definida por

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y),$$

para todos X, Y en $\widetilde{M}$. La 2-forma Φ recibe el nombre de *2-forma fundamental* de $\widetilde{M}$. En virtud de (1.3.6), se tiene que Φ es antisimétrica. Además, como ϕ tiene rango $2m$, se verifica que:

$$\eta \wedge \Phi^m \neq 0. \tag{1.3.7}$$

Se dice que una variedad casi-contacto métrica es *de contacto métrica* si $\Phi = \mathrm{d}\eta$. Entonces, a η se le llama *forma de contacto* y, en virtud de (1.3.7), se tiene que:

$$\eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^m \neq 0,$$

que corresponde con la manera habitual de definir una forma de contacto (sin "métrica").

Si ξ es un campo vectorial de Killing con respecto a g, la estructura de contacto métrica recibe el nombre de *estructura K-contacto*. Es fácil probar que una variedad de contacto métrica es K-contacto si y sólo si

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -\phi X, \tag{1.3.8}$$

para todo X en $\widetilde{M}$, donde $\widetilde{\nabla}$ denota la conexión de Levi-Civita de $\widetilde{M}$. Además, en una variedad K-contacto se verifica que

$$\widetilde{R}(X, \xi; \xi, X) = 1,$$

para todo X unitario, normal a ξ, donde $\widetilde{R}$ denota el tensor de curvatura de la variedad.

Se dice que la estructura casi-contacto de $\widetilde{M}$ es *normal* si

$$[\phi, \phi] + 2\mathrm{d}\eta \otimes \xi = 0,$$

donde $[\phi, \phi]$ es la torsión de Nijenhuis de ϕ, que viene dada por

$$[\phi, \phi](X, Y) = \phi^2[X, Y] + [\phi X, \phi Y] - \phi[\phi X, Y] - \phi[X, \phi Y],$$

para todos X, Y en $\widetilde{M}$. Una variedad *Sasakiana* es una variedad de contacto métrica normal. Se prueba que toda variedad Sasakiana es K-contacto y que una variedad casi-contacto métrica es Sasakiana si y sólo si

$$(\widetilde{\nabla}_X \phi) Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y) X, \tag{1.3.9}$$

para todos X, Y en $\widetilde{M}$. Además, si $\widetilde{M}$ es Sasakiana, se verifica que, para todos X, Y en $\widetilde{M}$:

$$\widetilde{R}(X,Y)\xi \;=\; \eta(Y)X - \eta(X)Y.$$

Se dice que una sección plana Π en el espacio tangente $T_x(\widetilde{M})$ en un punto x de una variedad Sasakiana $\widetilde{M}$ es una *ϕ-sección* si está generada por un vector X ortogonal a ξ y por ϕX. La curvatura seccional $K(\Pi)$ con respecto a una ϕ-sección Π determinada por un vector X recibe el nombre de *curvatura ϕ-seccional*. Se dice que una variedad Sasakiana $\widetilde{M}$ es un *espacio de curvatura ϕ-seccional constante*, y se denota por $\widetilde{M}(c)$, si tiene curvatura ϕ-seccional constante c.

El tensor de curvatura de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\widetilde{M}(c)$ viene dado por

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)Z =&\frac{c+3}{4}(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y)+\\ &\frac{c-1}{4}(g(X,\phi Z)\phi Y - g(Y,\phi Z)\phi X + 2g(X,\phi Y)\phi Z+\\ &\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi),\end{aligned} \tag{1.3.10}$$

para todos X, Y, Z en $\widetilde{M}$.

De manera usual, se considera en $\mathbb{R}^{2m+1}$ la estructura Sasakiana dada por

$$\eta \;=\; \frac{1}{2}(dz - \sum_{i=1}^{m} y_i dx_i), \quad \xi \;=\; 2\frac{\partial}{\partial z},$$

$$g \;=\; \eta\otimes\eta + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m}(dx_i\otimes dx_i + dy_i\otimes dy_i),$$

$$\phi(\sum_{i=1}^{m}(X_i\frac{\partial}{\partial x_i} + Y_i\frac{\partial}{\partial y_i}) + Z\frac{\partial}{\partial z}) \;=\; \sum_{i=1}^{m}(Y_i\frac{\partial}{\partial x_i} - X_i\frac{\partial}{\partial y_i}) + \sum_{i=1}^{m} Y_i y_i\frac{\partial}{\partial z},$$

donde (x_i, y_i, z), $i = 1, \ldots, m$, son las coordenadas cartesianas. Es bien conocido que, con esta estructura, $\mathbb{R}^{2m+1}$ es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante con $c = -3$.

Por otra parte, K. Kenmotsu definió en [38] las *variedades de Kenmotsu* como aquéllas que satisfacen las dos siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}(\widetilde{\nabla}_X\phi)Y &= g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X,\\ \widetilde{\nabla}_X\xi &= X - \eta(X)\xi.\end{aligned} \tag{1.3.11}$$

Además, introdujo el siguiente ejemplo:

Sean F una variedad Kaehleriana y la función $f(t) = ce^t$, donde c es una constante no nula. Entonces, el producto warped $\widetilde{M} = \mathbb{R}\times_f F$ tiene una estructura casi contacto métrica que satisface (1.3.11).

No obstante, existe otro caso más análogo a las variedades Kaehlerianas que las Sasakianas o las de Kenmotsu, y es aquél en el que $\widetilde{\nabla}\phi = 0$. Estas variedades reciben el nombre de *variedades cosimplécticas*, véanse [9] y [34].

El producto euclídeo con su estructura habitual es el ejemplo canónico de este tipo de variedades, $\widetilde{M} = \mathbb{R}\times F$, donde F es una variedad Kaehleriana. Obsérvese que se trata del caso particular en que la función f anteriormente mencionada en las variedades de Kenmotsu sea constante, $f = 1$.

Posteriormente, en [46], J. A. Oubiña introdujo la noción de *variedad trans-Sasakiana*, las cuales fueron caracterizadas por D. E. Blair y J. A. Oubiña en [13] como aquellas variedades que verifican que

$$(\widetilde{\nabla}_X\phi)Y = \alpha(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X) + \beta(g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X), \tag{1.3.12}$$

para todos X, Y en $\widetilde{M}$, donde α y β son dos funciones en $\widetilde{M}$. Si $\beta = 0$, se dice que $\widetilde{M}$ es una *variedad α-Sasakiana*. Las variedades Sasakianas aparecen como ejemplos de las variedades α-Sasakianas, con $\alpha = 1$. Si $\alpha = 0$, se dice que $\widetilde{M}$ es una *variedad β-Kenmotsu*. Las variedades de Kenmotsu, ya comentadas anteriormente, son casos particulares con $\beta = 1$. Finalmente, si tanto α como β son nulas, entonces $\widetilde{M}$ es una *variedad cosimpléctica*. En particular, a partir de (1.3.12) es fácil ver que se alcanzan las siguientes igualdades para una variedad trans-Sasakiana:

$$\widetilde{\nabla}_X\xi = -\alpha\phi X + \beta(X - \eta(X)\xi), \qquad d\eta = \alpha\Phi. \tag{1.3.13}$$

Respecto a las variedades trans-Sasakianas, cabe destacar que, en [41], J. C. Marrero demostró que si $m \geq 2$, la variedad ambiente $\widetilde{M}^{2m+1}$ tiene estructura o bien α-Sasakiana, o bien β-Kenmotsu. Sin embargo, sí existen variedades trans-Sasakianas con $\alpha, \beta \neq 0$ en dimensión 3.

Por otro lado, en [3], P. Alegre, D. E. Blair y A. Carriazo introdujeron la noción de *espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado* como una variedad casi-contacto métrica $(\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ cuyo tensor de curvatura viene dado por

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)Z = {} & f_1\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\} + \\ & f_2\{g(X,\phi Z)\phi Y - g(Y,\phi Z)\phi X + 2g(X,\phi Y)\phi Z\} + \\ & f_3\{\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi\},\end{aligned} \tag{1.3.14}$$

donde f_1, f_2, f_3 son funciones diferenciables de $\widetilde{M}$. Estas variedades se denotan por $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ y generalizan la noción de *espacio de curvatura ϕ-seccional constante*, $\widetilde{M}(c)$, cuyo tensor de curvatura satisface la expresión (1.3.14), con

$$f_1 = \frac{c+3}{4}, \quad f_2 = f_3 = \frac{c-1}{4},$$

como puede deducirse de manera inmediata de (1.3.10).

Estas variedades son las que tomaremos como referencia en el bloque central de la memoria, ya que nos van a permitir llevar a cabo nuestro estudio bajo el marco más general posible. Además existen ejemplos no triviales de las mismas en todas las dimensiones, como mostraremos en la sección de Ejemplos del tercer capítulo. Concretamente, fue probado en [3] que si transformamos mediante un producto warped un espacio de curvatura seccional holomorfa constante $N(c)$, obtenemos un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado

$$\widetilde{M}\left(\frac{c-4f'^2}{4f^2},\ \frac{c}{4f^2},\ \frac{c-4f'^2}{4f^2}+\frac{f''}{f}\right),$$

dotado de una estructura β trans-Sasakiana con $\beta = f'/f$. Por otra parte, P. Alegre y A. Carriazo probaron en [4] que transformando un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\widetilde{M}(c)$, mediante una deformación $\mathcal{D}$-homotética, obtenemos un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado con

$$f_1^* = \frac{1}{b}\frac{c+3}{4}, \quad f_2^* = f_3^* = \frac{1}{b}\left(\frac{c-1}{4} - \frac{a^2-b}{b}\right),$$

dotado de una estructura $(a/b, 0)$ trans-Sasakiana, donde a y b son constantes de $\widetilde{M}$, con $a \neq 0$ y $b > 0$.

Consideremos ahora M una subvariedad de una variedad casi-contacto métrica $\widetilde{M}$. Al igual que en la primera sección, consideramos sobre M la métrica inducida por la de $\widetilde{M}$, que denotaremos también por g. Dado un campo X tangente a M, escribimos

$$\phi X \ = \ TX + NX, \tag{1.3.15}$$

donde TX y NX son las componentes tangente y normal de ϕX, respectivamente. Entonces, T es un endomorfismo del fibrado tangente de M y N es una 1-forma de TM con valores en $T^{\perp}M$.

Se dice que la subvariedad M es *invariante* si N es idénticamente nula, es decir, si ϕX es tangente a M, para cada X tangente a M. Por otra parte, se dice que M es una subvariedad *anti-invariante* si T se anula idénticamente, es decir, si ϕX es normal a M, para todo X tangente a M.

Para V normal a M, escribimos

$$\phi V \ = \ tV + nV, \tag{1.3.16}$$

donde tV (resp. nV) denota la componente tangente (resp. normal) de ϕV. Entonces, t es una 1-forma de $T^{\perp}M$ con valores en TM y n es un endomorfismo de $T^{\perp}M$.

En virtud de (1.3.6), (1.3.15) y (1.3.16), se deduce que

$$\begin{aligned} g(TX,Y) &= -g(X,TY), \\ g(nV,U) &= -g(V,nU), \\ g(NX,V) &= -g(X,tV), \end{aligned}$$

para todos X, Y tangentes a M y todos U, V normales a M.

Obsérvese que, de aquí en adelante, vamos a considerar que el campo de estructura ξ sea tangente a la subvariedad M, ya que estamos interesados en estudiar subvariedades slant en general y, es fácil probar que, si ξ es normal y $\widetilde{M}$ es al menos una variedad de contacto métrica, entonces M es anti-invariante (véase [40]), por lo que no tendría sentido el caso en que M sea una subvariedad slant propia, que es el objetivo de nuestro estudio.

En esta situación, denotaremos por $\mathcal{D}$ la distribución ortogonal a ξ en el fibrado tangente TM, conocida como *distribución de contacto*. Así, podemos descomponer TM en una suma directa ortogonal de la forma:

$$TM = \mathcal{D} \oplus < \xi > .$$

En virtud de (1.3.2), (1.3.15) y (1.3.16), si ξ es tangente a M, entonces para todo X tangente y todo V normal, se tiene que:

$$\begin{aligned} -X + \eta(X)\xi &= T^2X + tNX, & (1.3.17)\\ NTX + nNX &= 0, & (1.3.18)\\ TtV + tnV &= 0, & (1.3.19)\\ -V &= NtV + n^2V. & (1.3.20) \end{aligned}$$

Podemos obtener otras fórmulas relevantes si la variedad $\widetilde{M}$ es K-contacto y ξ es tangente. En tal caso, en virtud de (1.3.8) y de las Fórmulas de Gauss (1.1.1) y de Weingarten (1.1.2), se deduce que

$$\begin{aligned} \nabla_X \xi &= -TX, & (1.3.21)\\ \sigma(X, \xi) &= -NX, & (1.3.22)\\ A_V \xi &= tV, & (1.3.23)\\ \sigma(\xi, \xi) &= 0, & (1.3.24) \end{aligned}$$

para todo X tangente y todo V normal, donde se está denotando por ∇ la conexión de Levi-Civita de M.

Por otra parte, en el caso en que $\widetilde{M}$ sea una variedad trans-Sasakiana, podemos deducir inmediatamente las siguientes fórmulas a partir de (1.3.13):

$$\begin{aligned} \nabla_X \xi &= -\alpha TX + \beta(X - \eta(X)\xi), & (1.3.25)\\ \sigma(X, \xi) &= -\alpha NX. & (1.3.26) \end{aligned}$$

Además, de (1.1.10) y usando (1.3.24) y (1.3.26) tenemos que

$$K(X \wedge \xi) = \alpha^2 \cos^2 \theta. \qquad (1.3.27)$$

Otro tipo de subvariedades que resultan de gran interés dentro de la geometría de contacto son las *subvariedades totalmente geodésicas de contacto*. Se dice que una subvariedad M de una variedad Sasakiana $\widetilde{M}$ es totalmente geodésica de contacto si

$$\sigma(X,Y) = \eta(X)\sigma(Y,\xi) + \eta(Y)\sigma(X,\xi), \tag{1.3.28}$$

para todos X, Y tangentes a M.

Finalmente, introducimos la noción de *subvariedades slant*. Estas subvariedades fueron definidas por B.-Y. Chen en [26] dentro de la geometría casi Hermítica. Posteriormente, A. Lotta definió las subvariedades slant en geometría casi-contacto métrica en [40]. Dada una subvariedad M tangente a ξ, para cada vector no nulo X tangente a M en p, tal que X no sea proporcional a ξ_p, denotamos por $\theta(X)$ el ángulo formado entre ϕX y T_pM. Entonces, se dice que M es *slant* si el ángulo $\theta(X)$ es constante, lo cual es independente de la elección de $p \in M$ y $X \in T_pM - < \xi_p >$. El ángulo θ de una inmersión slant se llama *ángulo slant* de la inmersión. Inmersiones invariantes y anti-invariantes son inmersiones slant con ángulo slant $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$, respectivamente. Una inmersión slant que no sea ni invariante ni anti-invariante se dice que es una *inmersión slant propia*. Además, fue probado en [15] que si M es una subvariedad slant, entonces

$$T^2X = -\cos^2(X - \eta(X)\xi), \tag{1.3.29}$$

para todo X tangente a M.

Obsérvese que si M es una subvariedad slant propia, ha de tener dimensión impar (y no puede ser $m = 1$, pues en tal caso no hay campos tangentes independientes de ξ). Así, si $m \neq 0, 1$, ha de ser siempre $m \geq 2$. Esta condición será considerada en todo nuestro estudio.

Las subvariedades slant de variedades Sasakianas fueron estudiadas por J. L. Cabrerizo, A. Carriazo, L. M. Fernández y M. Fernández en [15], [16], [17] y [18]. También puede consultarse el artículo [20], en el que se ofrece una visión de conjunto sobre este tema.

En [15] se probó que una subvariedad θ-slant M de una variedad casi-contacto métrica $\widetilde{M}$ satisface

$$g(TX,TY) = \cos^2\theta(g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)), \tag{1.3.30}$$

$$g(NX,NY) = \operatorname{sen}^2\theta(g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)), \tag{1.3.31}$$

para todos X, Y tangentes a M. De (1.3.30) y (1.3.31) podemos deducir que

$$\|T\|^2 = m\cos^2\theta, \quad \|N\|^2 = m\operatorname{sen}^2\theta. \tag{1.3.32}$$

Por otra parte, en [40], Lotta probó que, dada $\theta \in [0, \pi/2]$, una subvariedad M de una variedad K-contacto $\widetilde{M}$ es una subvariedad θ-slant si y sólo si

$$K(X \wedge \xi) = \cos^2\theta, \tag{1.3.33}$$

para todo campo tangente unitario X ortogonal a ξ.

En [15], J. L. Cabrerizo, A. Carriazo, L. M. Fernández y M. Fernández estudiaron las subvariedades θ-slant propias tales que, para cualesquiera campos tangentes X, Y,

$$(\nabla_X T)Y = \cos^2\theta(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X), \tag{1.3.34}$$

donde $(\nabla_X T)Y = \nabla_X TY - T\nabla_X Y$. A. Carriazo en [19], las denomina subvariedades *slant Sasakianas*, debido a la similitud con las subvariedades *slant Kaehlerianas* de la geometría compleja. Sin embargo, podemos observar que el nombre asignado no implica que, con la estructura inducida $\overline{\phi} = \sec\theta T$, la subvariedad sea Sasakiana. De hecho, es fácil comprobar que se trata de subvariedades α-Sasakianas con $\alpha = \cos\theta$ (véase [16]). En particular, en [15], se demostró que cualquier subvariedad slant propia 3-dimensional de una variedad K-contacto es una subvariedad slant Sasakiana. Además, se probó la siguiente ecuación para subvariedades slant Sasakianas de ángulo slant θ de una variedad Sasakiana:

$$A_{NY}X = A_{NX}Y + \operatorname{sen}^2\theta(\eta(Y)X - \eta(X)Y). \tag{1.3.35}$$

En la misma línea, podríamos generalizar la definición (1.3.34). Si consideramos

$$(\nabla_X\bar{\phi})Y = \bar{\alpha}(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X) + \bar{\beta}(g(\bar{\phi}X,Y)\xi - \eta(Y)\bar{\phi}X),$$

donde $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$ son funciones de M y teniendo en cuenta

$$(\nabla_X\bar{\phi})Y = \bar{\alpha}(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X) + \bar{\beta}\sec\theta(g(TX,Y)\xi - \eta(Y)TX), \tag{1.3.36}$$

y

$$(\nabla_X\bar{\phi})\bar{Y} = \nabla_X\bar{\phi}Y - \bar{\phi}\nabla_X Y = \nabla_X \sec\theta TY - \sec\theta T\nabla_X Y = \sec\theta(\nabla_X T)Y, \tag{1.3.37}$$

podemos establecer de (1.3.36) y (1.3.37) que

$$(\nabla_X T)Y = \bar{\alpha}\cos\theta(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X) + \bar{\beta}(g(TX,Y)\xi - \eta(Y)TX). \tag{1.3.38}$$

De esta forma, podemos decir que cualquier subvariedad slant M que satisfaga (1.3.38) es una subvariedad *slant trans-Sasakiana*.

En relación a ello, si consideramos una subvariedad M slant trans-Sasakiana dentro de una variedad $\widetilde{M}$ con estructura trans-Sasakiana verificando (1.3.12), cabría preguntarse qué relación guardan $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$ con α y β. Pues bien, de (1.1.1) y (1.1.2) podemos deducir

$$\begin{aligned}(\widetilde{\nabla}_X\phi)Y =&\widetilde{\nabla}_X\phi Y - \phi\widetilde{\nabla}_X Y = \\ =&\nabla_X TY + \sigma(X,TY) - A_{NY}X + D_X NY - \\ &T\nabla_X Y - N\nabla_X Y - t\sigma(X,Y) - n\sigma(X,Y).\end{aligned} \tag{1.3.39}$$

De esta forma, igualando las componentes tangentes de (1.3.12) y (1.3.39) obtenemos

$$(\nabla_X T)Y - A_{NY}X - t\sigma(X,Y) = \alpha(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X) + \beta(g(\phi X,Y)\xi - \eta(Y)TX). \tag{1.3.40}$$

Por otra parte, como $\bar{\phi} = \sec\theta T$, podemos escribir

$$\begin{aligned}(\widetilde{\nabla}_X\phi)Y =& \widetilde{\nabla}_X\phi Y - \phi\widetilde{\nabla}_X Y = \\ =& \nabla_X \sec\theta TY - \sec\theta T\nabla_X Y = \sec\theta(\nabla_X T)Y.\end{aligned} \tag{1.3.41}$$

Así, sustituyendo (1.3.38) y (1.3.40) en (1.3.41), deducimos

$$\begin{aligned}&\bar{\alpha}(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X) + \sec\theta\bar{\beta}(g(TX,Y)\xi - \eta(Y)TX) = \\ &= \sec\theta(\alpha(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X) + \beta(g(\phi X,Y)\xi - \eta(Y)TX) + A_{NY}X + t\sigma(X,Y)),\end{aligned}$$

de donde multiplicando por ξ y teniendo en cuenta (1.1.3) y (1.3.31) llegamos a

$$\begin{aligned}&\bar{\alpha}(g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)) + \sec\theta\bar{\beta}g(TX,Y) = \\ &= \sec\theta(\alpha(g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)) + \beta g(TX,Y) - \alpha\operatorname{sen}^2\theta(g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y))) = \\ &= \sec\theta(\alpha\cos^2\theta(g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)) + \beta g(TX,Y),\end{aligned}$$

o lo que es lo mismo

$$(\alpha\cos^2\theta - \bar{\alpha}\cos\theta)(g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)) + (\beta - \bar{\beta})g(TX,Y) = 0. \tag{1.3.42}$$

Ahora bien, si consideramos en (1.3.42) que $X = Y$ unitario con X ortogonal a ξ, entonces

$$\sec\theta\bar{\alpha} = \alpha, \tag{1.3.43}$$

y si consideramos en (1.3.42) que $Y = TX$ con X unitario y ortogonal a ξ, tenemos

$$\bar{\beta} = \beta. \tag{1.3.44}$$

Finalmente, de (1.3.38) podemos establecer que

$$A_{NY}X = -t\sigma(X,Y) - \alpha\operatorname{sen}^2\theta(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X), \tag{1.3.45}$$

de donde se tiene que

$$A_{NY}X = A_{NX}Y + \alpha\operatorname{sen}^2\theta(\eta(Y)X - \eta(X)Y). \tag{1.3.46}$$

1.4. Subvariedades de f-variedades métricas

Las definiciones incluidas en esta sección generalizan las de la sección 1.3, por lo que las estructuras de ambas secciones serán similares. Una variedad Riemanniana $(\widetilde{M}, g)$ de dimensión $2m+s$, dotada con una f-estructura f, es decir, un tensor f de tipo $(1,1)$ y rango $2m$ satisfaciendo la igualdad $f^3+f=0$ (ver [51]), se dice que es una *f-variedad métrica* si existen s campos $\xi_1, \ldots, \xi_s$ de $\widetilde{M}$, llamados *campos de estructura*, tales que si $\eta_1, \ldots, \eta_s$ son las 1-formas duales de $\xi_1, \ldots, \xi_s$, entonces

$$\begin{gathered}\eta_\alpha(\xi_\alpha)=1;\ f\xi_\alpha=0;\ \eta_\alpha \circ f=0; \\ f^2=-I+\sum_{\alpha=1}^{s} \eta_\alpha \otimes \xi_\alpha;\end{gathered} \tag{1.4.1}$$

$$g(X,Y)=g(fX,fY)+\sum_{\alpha=1}^{s} \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y), \tag{1.4.2}$$

para todos X, Y en $\widetilde{M}$. Por definición, la métrica g satisface que

$$g(fX,Y)+g(X,fY)=0, \tag{1.4.3}$$

para todos X, Y en $\widetilde{M}$. Sea F la 2-forma en $\widetilde{M}$ definida por $F(X,Y)=g(X,fY)$. Como f tiene rango $2m$, entonces se verifica que

$$\eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_s \wedge F^m \neq 0$$

y, en particular, $\widetilde{M}$ es orientable. La f-estructura f se dice que es *normal* si

$$[f,f]+2\sum_{\alpha=1}^{s} \xi_\alpha \otimes d\eta_\alpha=0,$$

donde $[f,f]$ denota el tensor de Nijenhuis de f.

Una f-variedad métrica se dice que es una *variedad f-contacto métrica* si $F=d\eta_\alpha$, para todo $\alpha=1,\ldots,s$. Por otra parte, una variedad f-contacto métrica se dice que es una *variedad f-K-contacto métrica* si los campos de estructura son campos de Killing. Cuando $s=1$, las variedades f-contacto métricas corresponden a variedades de contacto métricas y las variedades f-K-contacto métricas a variedades K-contacto.

Una f-variedad métrica se dice que es una *K-variedad* (véase [10]) si es normal y $dF=0$. En una K-variedad $\widetilde{M}$, los campos de estructura son campos de Killing ([10]).

Además, una K-variedad se dice que es una *S-variedad* si $F=\mathrm{d}\eta_\alpha$, para todo $\alpha=1,\ldots,s$. Podemos observar que, si $s=0$, una K-variedad correspondería a una variedad Kaehleriana y para $s=1$, una S-variedad sería una variedad Sasakiana. Cuando $s\geq 2$, podemos encontrar ejemplos no triviales en [10] y [36]. Además, la conexión Riemanniana $\widetilde{\nabla}$ de una S-variedad satisface para todos X, Y tangentes y cualquier $\alpha = 1, \dots, s$:

$$\widetilde{\nabla}_X \xi_\alpha = -fX, \tag{1.4.4}$$

$$(\widetilde{\nabla}_X f)Y = \sum_{\alpha=1}^{s} (g(fX, fY)\xi_\alpha + \eta_\alpha(Y) f^2 X). \tag{1.4.5}$$

Una sección plana Π de una f-variedad métrica $\widetilde{M}$ se dice que es una *f-sección* si está generada por un vector unitario X, ortogonal a los campos de estructura, y por fX. La curvatura seccional de Π se llama *curvatura f-seccional.* Una S-variedad se dice que es una S-variedad de curvatura f-seccional constante si tiene curvatura f-seccional constante c y, en tal caso, se denota por $\widetilde{M}(c)$. El tensor de curvatura $\widetilde{R}$ de $\widetilde{M}(c)$ satisface (véase [39]):

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X, Y, Z, W) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} &(g(fX, fW)\eta_\alpha(Y)\eta_\beta(Z) - g(fX, fZ)\eta_\alpha(Y)\eta_\beta(W) + \\ &g(fY, fZ)\eta_\alpha(X)\eta_\beta(W) - g(fY, fW)\eta_\alpha(X)\eta_\beta(Z)) + \\ &\frac{c+3s}{4}(g(fX, fW)g(fY, fZ) - g(fX, fZ)g(fY, fW)) + \\ &\frac{c-s}{4}(F(X, W)F(Y, Z) - F(X, Z)F(Y, W) - 2F(X, Y)F(Z, W)),\end{aligned} \tag{1.4.6}$$

para todos X, Y, Z, W en $\widetilde{M}$.

Por otra parte, sea M una subvariedad isométricamente inmersa en una f-variedad métrica $\widetilde{M}$. Análogamente al caso de la sección anterior, para cualquier campo tangente X en M, podemos escribir

$$fX = TX + NX, \tag{1.4.7}$$

donde TX y NX son las componentes tangente y normal de fX, respectivamente. La subvariedad M se dice que es *invariante* si N es idénticamente nula, es decir, si fX es tangente a M, para cada X tangente a M. Por otra parte, se dice que M es una subvariedad *anti-invariante* si T se anula idénticamente, es decir, si fX es normal a M, para todo X tangente a M.

Para V normal a M, escribimos

$$fV \ = \ tV + nV, \tag{1.4.8}$$

donde tV (resp. nV) denota la componente tangente (resp. normal) de fV. Entonces, t es una 1-forma de $T^\perp M$ con valores en TM y n es un endomorfismo de $T^\perp M$.

En virtud de (1.4.3), (1.4.7) y (1.4.8), se deduce que

$$\begin{aligned} g(TX,Y) &= -g(X,TY), \\ g(NX,V) &= -g(X,tV), \end{aligned}$$

para todos X,Y tangentes a M y todo V normal a M. Además, si $\widetilde{M}$ es una S-variedad y los campos de estructura son tangentes a M, de (1.1.1), (1.4.4) y (1.4.7) es fácil probar que

$$\nabla_X \xi_\alpha = -TX, \tag{1.4.9}$$

$$\sigma(X,\xi_\alpha) = -NX, \tag{1.4.10}$$

para todo X tangente a M y cualquier $\alpha = 1,\dots,s$ y, en particular, como $f\xi_\alpha = 0$, para cualquier α:

$$\sigma(\xi_\alpha,\xi_\beta) = 0,\ \ \alpha,\beta = 1,\dots,s. \tag{1.4.11}$$

Además, si extendemos la fórmula (1.4.5), teniendo en cuenta (1.1.1), obtenemos

$$A_{NY}X = (\nabla_X T)Y - t\sigma(X,Y) - \sum_{\alpha=1}^{s}[g(fX,fY)\xi_\alpha + \eta_\alpha(Y)f^2X],$$

para todos X,Y tangentes a M.

Como estamos suponiendo que los campos de estructura son tangentes a M, podemos denotar por $\mathcal{M}$ a la distribución de M generada por los campos de estructura y por $\mathcal{L}$ a su distribución complementaria ortogonal. De esta forma, si $X \in \mathcal{L}$, entonces $\eta_\alpha(X) = 0$, para todo $\alpha = 1,\dots,s$ y si $X \in \mathcal{M}$, entonces $fX = 0$.

Se define en este caso el *vector curvatura media* de M por

$$H = \frac{1}{m+s}\ \text{traza}\ \sigma = \frac{1}{m+s}\sum_{i=1}^{m+s}\sigma(e_i,e_i), \tag{1.4.12}$$

donde $m+s$ es la dimensión de M.

Respecto al comportamiento de la segunda forma fundamental de una subvariedad en una f-variedad métrica, sabemos que el estudio de subvariedades totalmente geodésicas de S-variedades se reduce al estudio de subvariedades invariantes (véase [23]). De esta forma, se hace necesario el estudio de una variación de dicho concepto, más relacionado con la estructura, las llamadas subvariedades f-geodésicas, introducidas por L. Ornea en [45]. Así, una subvariedad de una S-variedad, tangente a los campos de estructura, se dice que es una *subvariedad totalmente f-geodésica* si la distribución $\mathcal{L}$ es totalmente geodésica, es decir, si $\sigma(X,Y) = 0$, para todos $X,Y \in \mathcal{L}$. Luego, de (1.4.9), la subvariedad M es totalmente f-geodésica si y sólo si

$$\sigma(X,Y) = -\sum_{\alpha=1}^{s}(\eta_\alpha(X)NY + \eta_\alpha(Y)NX), \tag{1.4.13}$$

para todos X, Y tangentes a M. Es fácil probar que una subvariedad totalmente f-geodésica es minimal.

Finalmente, recordamos la noción de *subvariedades slant* en S-variedades. Estas subvariedades fueron introducidas por M. B. Hans Uber en [35] como aquéllas que cumplen que, para todos $x \in M$ y $X \in T_xM$, linealmente independiente de $\xi_1, \dots, \xi_s$, el ángulo entre fX y T_xM es una constante $\theta \in [0, \pi/2]$, llamada *ángulo slant* de M en $\widetilde{M}$. Además, subvariedades invariantes y anti-invariantes son subvariedades slant con ángulo slant $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$, respectivamente. Una inmersión slant que no sea ni invariante ni anti-invariante se dice que es una inmersión *slant propia*, y la subvariedad se dice que es una subvariedad *slant propia*. Cabe destacar que, al igual que en la sección anterior, si la subvariedad es slant propia, todos los campos de estructura $\xi_1, \dots, \xi_s$ deben ser tangentes, ya que tal como se recoge en [35], si existiese algún campo de estructura ξ_α normal, para $\alpha = 1, \dots, s$, la subvariedad M sería anti-invariante. De esta forma, la dimensión de la subvariedad M será $m + s$, siguiendo la línea de los capítulos anteriores.

Obsérvese que las subvariedades slant propias en variedades casi-Hermíticas son de dimensión par $(2m)$ y en variedades casi-contacto métricas (tangentes a ξ) son de dimensión impar $(2m + 1)$, mientras que ahora son de dimensión $2m + s$.

Si M es una subvariedad θ-slant no anti-invariante (es decir, si $\theta \in [0, \pi/2)$), se probó en [32] que

$$(\overline{f}, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$$

es una f-estructura métrica en M, donde $\overline{f} = (\sec\theta)T$, lo cual implica que, si $\dim(M) = m + s$, entonces m es par. Además, en una subvariedad θ-slant de una f-variedad métrica, se tiene:

$$T^2X = -\cos^2\theta(X - \sum_{\alpha=1}^{s} \eta_\alpha(X) \otimes \xi_\alpha),$$

$$g(TX, TY) = \cos^2\theta(g(X, Y) - \sum_{\alpha=1}^{s} \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)), \tag{1.4.14}$$

$$g(NX, NY) = \operatorname{sen}^2\theta(g(X, Y) - \sum_{\alpha=1}^{s} \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)), \tag{1.4.15}$$

para todos X, Y tangentes a la subvariedad (véase [22]). Además, de (1.4.14) y (1.4.15) podemos deducir que

$$\|T\|^2 = m\cos^2\theta, \quad \|N\|^2 = m\operatorname{sen}^2\theta. \tag{1.4.16}$$

Se dice que una subvariedad slant propia de una S-variedad es una subvariedad *S-slant* si

$$(\nabla_X T)Y = \cos^2\theta \sum_{\alpha=1}^{s}(g(fX, fY)\xi_\alpha + \eta_\alpha(Y)f^2X),$$

para todos X, Y tangentes a M, donde θ es el ángulo slant. Es fácil ver que, si $X, Y \in \mathcal{L}$, entonces $(\nabla_X T)Y = (\nabla_Y T)X$. Además, se tiene que

$$A_{NY}X = A_{NX}Y + \operatorname{sen}^2\theta \sum_{\alpha=1}^{s}(\eta_\alpha(Y)X - \eta_\alpha(X)Y). \tag{1.4.17}$$

Finalmente, también fue probado en [22] que toda subvariedad $(2+s)-$*dimensional* slant propia de una S-variedad es una subvariedad S-slant. Obsérvese que $2+s$ es la mínima dimensión posible para una subvariedad de una S-variedad, tangente a los campos de estructura, para que pueda ser slant propia.

Capítulo 2

La Forma de Maslov de una subvariedad anti-invariante

El objetivo principal de este trabajo es estudiar la Forma de Maslov de una subvariedad slant M con ángulo θ, no invariante, es decir $\theta \in (0, \pi/2]$.

En este capítulo, vamos a estudiar el caso en que M sea una subvariedad anti-invariante ($\theta = \pi/2$), tangente al campo de estructura ξ, dentro de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\widetilde{M}(c)$. En este caso, las dimensiones de M y $\widetilde{M}$ son $m+1$ y $2m+1$, respectivamente. Esto nos permitirá controlar el fibrado normal de la subvariedad a través de las imágenes por ϕ de los campos tangentes. Se trata por tanto del caso análogo al Lagrangiano de la geometría compleja, en el que la dimensión de la subvariedad es la mitad de la dimensión de la variedad ambiente. Una vez estudiado este caso, en el próximo capítulo procederemos a estudiar las subvariedades slant propias, es decir con $\theta \in (0, \pi/2)$ generalizando también la variedad ambiente a un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ con estructura (α, β) trans-Sasakiana.

En primer lugar, estudiaremos cuándo la Forma de Maslov de una subvariedad anti-invariante es cerrada. Veremos en la próxima sección que dicha propiedad es indispensable para plantearnos cuándo la Forma de Maslov es conforme.

2.1. Forma de Maslov cerrada

Sea M^{m+1} una subvariedad anti-invariante de una variedad Sasakiana $\widetilde{M}^{2m+1}$, tal que M es tangente a ξ y $m \geq 2$. Sea H el vector curvatura media de M. Por analogía con el caso de las subvariedades Lagrangianas de una variedad Kaehleriana (véanse, por ejemplo, [25] y [49]), o con el caso de las subvariedades integrales de una variedad Sasakiana (véanse [47] y [48]), definimos la *Forma de Maslov* de M, ω_H, como la forma dual de ϕH, es decir,

$$\omega_H(X) = g(X, \phi H), \tag{2.1.1}$$

para todo campo X tangente a M.

Podemos observar que, en las condiciones anteriores, ϕH es tangente. En efecto, dado un campo V normal cualquiera, existe Y tangente tal que $V = \phi Y$. Así,

$$g(\phi H, V) = g(\phi H, \phi Y) = g(H, Y) - \eta(H)\eta(Y) = 0,$$

pues H es normal e Y es tangente.

En la siguiente proposición establecemos que la subvariedad M ha de ser no minimal pues, en caso contrario, la Forma de Maslov sería nula y ese caso carecería de sentido:

Proposición 2.1.1. *La Forma de Maslov, ω_H, es nula si y sólo si la subvariedad M es minimal.*

Demostración. Si $\omega_H = 0$, tenemos que $\omega_H(X) = 0$, para todo campo X tangente a M, por lo que usando (2.1.1), $g(X, \phi H) = -g(\phi X, H) = 0$, para todo X. Como estamos en el caso $M^{m+1} \hookrightarrow \widetilde{M}^{2m+1}$, todo campo normal es de la forma ϕX, con X tangente a M. Luego, $H = 0$.

Recíprocamente, si M es minimal, $H = 0$ y, por tanto, $\omega_H = 0$ por (2.1.1). $\square$

Si tomamos una referencia local ortonormal $\{e_1, \ldots, e_m, \xi\}$ en M, entonces,

$$\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_m, \xi, e_{1^*}, \ldots, e_{m^*}\}$$

es una base local ortonormal de campos de $\widetilde{M}$, siendo $e_{i^*} = \phi e_i$ con $i = 1, \ldots, m$. Llamaremos a $\mathcal{B}$ una *referencia anti-invariante adaptada.*

Definimos en primer lugar la 1-forma

$$\Theta = \sum_{1=1}^{m} \omega_i^{i^*}, \tag{2.1.2}$$

donde $\omega_i^{i^*}$ son las formas de conexión dadas por las ecuaciones de estructura (1.1.5). Comenzamos estudiando esta 1-forma ya que, como veremos en el Teorema 2.1.12, está estrechamente relacionada con la Forma de Maslov (2.1.1). Vamos a calcular en primer lugar $\mathrm{d}\Theta$ cuando la variedad ambiente es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$. Para ello, necesitamos el siguiente lema:

Lema 2.1.2. *Sea M^{m+1} una subvariedad anti-invariante de una variedad Sasakiana $\widetilde{M}^{2m+1}$, tangente a ξ. Entonces, respecto a una referencia anti-invariante adaptada, se verifica:*

$$\omega_i^{j^*} = \omega_j^{i^*}, \tag{2.1.3}$$

$$\omega_{i^*}^{j^*} = \omega_i^j, \tag{2.1.4}$$

para todos $i, j = 1, \ldots, m$.

Demostración. Consideremos una referencia anti-invariante adaptada

$$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_m, \xi, e_{1^*}, \dots, e_{m^*}\},$$

siendo $e_{i^*} = \phi e_i$ con $i = 1, \dots, m$. Teniendo en cuenta (1.1.8), podemos establecer que

$$\begin{aligned}\omega_i^{j^*}(X) =& g(\widetilde{\nabla}_X e_i, e_{j^*}) = -g(e_i, \widetilde{\nabla}_X e_{j^*}) = -g(e_i, \widetilde{\nabla}_X \phi e_j) = \\ =& - g(e_i, \phi \widetilde{\nabla}_X e_j) = g(\phi e_i, \widetilde{\nabla}_X e_j) = g(e_{i^*}, \widetilde{\nabla}_X e_j) = \omega_j^{i^*},\end{aligned}$$

para todo X tangente a M, quedando demostrado (2.1.3). Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned}\omega_{i^*}^{j^*}(X) =& g(\widetilde{\nabla}_X e_{i^*}, e_{j^*}) = g(\widetilde{\nabla}_X \phi e_i, \phi e_j) = g(\phi \widetilde{\nabla}_X e_i, \phi e_j) \\ =& - g(\widetilde{\nabla}_X e_i, \phi^2 e_j) = g(\widetilde{\nabla}_X e_i, e_j) = \omega_i^j,\end{aligned}$$

concluyendo la demostración del lema. □

Si calculamos ahora $\mathrm{d}\Theta$, resulta que

$$\mathrm{d}\Theta = \sum_{i=1}^m d\omega_i^{i^*} = -\sum_{i=1}^m \sum_A \omega_A^{i^*} \wedge \omega_i^A + \sum_{i=1}^m \Omega_i^{i^*}, \tag{2.1.5}$$

en virtud de las ecuaciones de estructura (1.1.5). Determinemos en primer lugar las formas de curvatura $\Omega_i^{i^*}$:

Lema 2.1.3. *Sea M^{m+1} una subvariedad anti-invariante de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$, tangente a ξ. Entonces, respecto a una referencia anti-invariante adaptada, se verifica*

$$\Omega_i^{i^*} = -\frac{c+1}{2}\omega^i \wedge \omega^{i^*} - \frac{c-1}{2}\sum_{j=1}^m \omega^j \wedge \omega^{j^*}, \tag{2.1.6}$$

para todo $i = 1, \dots, m$.

Demostración. Partiendo de (1.1.5) resulta que

$$\begin{aligned}2\Omega_i^{i^*} =& \sum_{C,D} \widetilde{R}(e_C, e_D; e_i, e_{i^*})\omega^C \wedge \omega^D = \sum_{j,k=1}^m \widetilde{R}(e_j, e_k; e_i, e_{i^*})\omega^j \wedge \omega^k + \\ &+ \sum_{j=1}^m \widetilde{R}(e_j, \xi; e_i, e_{i^*})\omega^j \wedge \eta + \sum_{j,k=1}^m \widetilde{R}(e_j, e_{k^*}; e_i, e_{i^*})\omega^j \wedge \omega^{k^*} + \\ &+ \sum_{k=1}^m \widetilde{R}(\xi, e_k; e_i, e_{i^*})\eta \wedge \omega^k + \widetilde{R}(\xi, \xi; e_i, e_{i^*})\eta \wedge \eta + \\ &+ \sum_{k=1}^m \widetilde{R}(\xi, e_{k^*}; e_i, e_{i^*})\eta \wedge \omega^{k^*} + \sum_{j,k=1}^m \widetilde{R}(e_{j^*}, e_k; e_i, e_{i^*})\omega^{j^*} \wedge \omega^k + \\ &+ \sum_{j=1}^m \widetilde{R}(e_{j^*}, \xi; e_i, e_{i^*})\omega^{j^*} \wedge \eta + \sum_{j,k=1}^m \widetilde{R}(e_{j^*}, e_{k^*}; e_i, e_{i^*})\omega^{j^*} \wedge \omega^{k^*}.\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Calculemos ahora, a partir de (1.3.10), los distintos coeficientes de (2.1.7):

$$\widetilde{R}(e_j, e_k; e_i, e_{i^*}) = 0, \tag{2.1.8}$$

$$\widetilde{R}(e_j, \xi; e_i, e_{i^*}) = 0, \tag{2.1.9}$$

$$\widetilde{R}(e_j, e_{k^*}; e_i, e_{i^*}) = -\frac{c+3}{4}\delta_{ij}\delta_{ik} - \frac{c-1}{4}(\delta_{ij}\delta_{ik} + 2\delta_{jk}), \tag{2.1.10}$$

$$\widetilde{R}(\xi, e_k; e_i, e_{i^*}) = 0, \tag{2.1.11}$$

$$\widetilde{R}(\xi, \xi; e_i, e_{i^*}) = 0, \tag{2.1.12}$$

$$\widetilde{R}(\xi, e_{k^*}; e_i, e_{i^*}) = 0, \tag{2.1.13}$$

$$\widetilde{R}(e_{j^*}, e_k; e_i, e_{i^*}) = \frac{c+3}{4}\delta_{ij}\delta_{ik} + \frac{c-1}{4}(\delta_{ij}\delta_{ik} + 2\delta_{jk}), \tag{2.1.14}$$

$$\widetilde{R}(e_{j^*}, \xi; e_i, e_{i^*}) = 0, \tag{2.1.15}$$

$$\widetilde{R}(e_{j^*}, e_{k^*}; e_i, e_{i^*}) = 0. \tag{2.1.16}$$

Así, de (2.1.7)-(2.1.16) obtenemos:

$$\begin{aligned}
2\Omega_i^{i^*} =& -\frac{c+3}{4}\sum_{j,k=1}^{m}\delta_{ij}\delta_{ik}\omega^j \wedge \omega^{k^*} - \frac{c-1}{4}\sum_{j,k=1}^{m}(\delta_{ij}\delta_{ik} + 2\delta_{jk})\omega^j \wedge \omega^{k^*} + \\
&+ \frac{c+3}{4}\sum_{j,k=1}^{m}\delta_{ij}\delta_{ik}\omega^{j^*} \wedge \omega^k + \frac{c-1}{4}\sum_{j,k=1}^{m}(\delta_{ij}\delta_{ik} + 2\delta_{jk})\omega^{j^*} \wedge \omega^k = \\
=& -\frac{c+3}{4}\omega^i \wedge \omega^{i^*} - \frac{c-1}{4}\omega^i \wedge \omega^{i^*} - \frac{2(c-1)}{4}\sum_{j=1}^{m}\omega^j \wedge \omega^{j^*} + \\
&+ \frac{c+3}{4}\omega^{i^*} \wedge \omega^i + \frac{c-1}{4}\omega^{i^*} \wedge \omega^i + \frac{2(c-1)}{4}\sum_{j=1}^{m}\omega^{j^*} \wedge \omega^j = \\
=& -\frac{c+1}{2}\omega^i \wedge \omega^{i^*} + \frac{c+1}{2}\omega^{i^*} \wedge \omega^i - \frac{c-1}{2}\sum_{j=1}^{m}\omega^j \wedge \omega^{j^*} + \frac{c-1}{2}\sum_{j=1}^{m}\omega^{j^*} \wedge \omega^j = \\
=& -(c+1)\omega^i \wedge \omega^{i^*} - (c-1)\sum_{j=1}^{m}\omega^j \wedge \omega^{j^*},
\end{aligned}$$

con lo que queda probado (2.1.6). □

Ya podemos calcular la diferencial de la 1-forma Θ, para así analizar cuándo esta 1-forma es cerrada.

Teorema 2.1.4. *Sea M^{m+1} una subvariedad anti-invariante de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$, tangente a ξ. Entonces, la 1-forma Θ verifica:*

$$\mathrm{d}\Theta = -\frac{(m+1)c-m+3}{2}\sum_{i=1}^{m}\omega^i \wedge \omega^{i^*}. \qquad (2.1.17)$$

Demostración. Calculamos en primer lugar, a partir de (2.1.6):

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\Omega_i^{i^*} &= -\frac{c+1}{2}\sum_{i=1}^{m}\omega^i \wedge \omega^{i^*} - \frac{c-1}{2}m\sum_{j=1}^{m}\omega^j \wedge \omega^{j^*} = \\ &= -\frac{(m+1)c-m+1}{2}\sum_{i=1}^{m}\omega^i \wedge \omega^{i^*}.\end{aligned} \qquad (2.1.18)$$

Por otra parte,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{A}\omega_A^{i^*} \wedge \omega_i^A = \sum_{i,j=1}^{m}(\omega_j^{i^*} \wedge \omega_i^j + \omega_{j^*}^{i^*} \wedge \omega_i^{j^*}) + \sum_{i=1}^{m}\omega_{m+1}^{i^*} \wedge \omega_i^{m+1}, \qquad (2.1.19)$$

donde hemos denotado $e_{m+1} = \xi$. Pero, en virtud de (2.1.3) y (2.1.4), se tiene que

$$\sum_{i,j=1}^{m}(\omega_j^{i^*} \wedge \omega_i^j + \omega_{j^*}^{i^*} \wedge \omega_i^{j^*}) = 0. \qquad (2.1.20)$$

Ahora bien, para cada campo tangente X,

$$\begin{aligned}\omega_{m+1}^{i^*} =& g(\widetilde{\nabla}_X e_{m+1}, e_{i^*}) = g(\widetilde{\nabla}_X \xi, e_{i^*}) = -g(\phi X, e_{i^*}) = \\ =& g(X, \phi e_{i^*}) = -g(X, e_i),\end{aligned}$$

por lo que $\omega_{m+1}^{i^*} = -\omega^i$. Análogamente,

$$\begin{aligned}\omega_i^{m+1}(X) =& g(\widetilde{\nabla}_X e_i, e_{m+1}) = g(\widetilde{\nabla}_X e_i, \xi) = -g(e_i, \widetilde{\nabla}_X \xi) = \\ =& g(e_i, \phi X) = -g(X, e_{i^*}),\end{aligned}$$

de donde $\omega_i^{m+1} = -\omega^{i^*}$.

Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{m}\omega_{m+1}^{i^*} \wedge \omega_i^{m+1} = \sum_{i=1}^{m}\omega^i \wedge \omega^{i^*}. \qquad (2.1.21)$$

Finalmente, (2.1.17) se deduce de (2.1.5) y de (2.1.18)-(2.1.21). □

De esta forma, podemos deducir inmediatamente cuándo la 1-forma Θ es cerrada:

Corolario 2.1.5. *Sea M^{m+1} una subvariedad anti-invariante de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$, tangente a ξ. Entonces, la 1-forma Θ dada por (2.1.2) es cerrada si y sólo si*

$$c = \frac{m-3}{m+1}. \tag{2.1.22}$$

Demostración. Es inmediata, teniendo en cuenta que, por (2.1.17), $\mathrm{d}\Theta = 0$ si y sólo si se satisface (2.1.22). □

Nota 2.1.6. *Obsérvese que, en el caso de ser Θ cerrada, define una clase canónica de cohomología en M, $[\Theta] \in H^1(M;\mathbb{R})$.*

Nota 2.1.7. *Un resultado similar al Teorema 2.1.4 fue probado por A. Carriazo en [19], para el caso de subvariedades slant propias.*

Dada una subvariedad slant propia M^{m+1} con dimensión $m+1$ y ángulo slant θ, inmersa en una variedad casi-contacto métrica $\widetilde{M}^{2m+1}$ de dimensión $2m+1$, se define una referencia slant adaptada *mediante el procedimiento que describimos a continuación.*

En primer lugar, dado que m ha de ser par, podemos escribir $m = 2k$. Sea e_1 un vector tangente unitario en M, ortogonal a ξ. Tomamos:

$$e_2 = (\sec\theta)Te_1, \quad e_{1*} = (\csc\theta)Ne_1, \quad e_{2*} = (\csc\theta)Ne_2.$$

Si $k > 1$, entonces, por inducción, para cada $l = 1, \ldots, k-1$, podemos elegir un vector tangente unitario e_{2l+1} en M tal que e_{2l+1} es perpendicular a $e_1, e_2, \ldots, e_{2l-1}, e_{2l}, \xi$ y tomamos:

$$e_{2l+2} = (\sec\theta)Te_{2l+1}, \quad e_{(2l+1)*} = (\csc\theta)Ne_{2l+1}, \quad e_{(2l+2)*} = (\csc\theta)Ne_{2l+2}.$$

Se puede probar que

$$\{e_1, \ldots, e_m, \xi, e_{1*}, \ldots, e_{m*}\} \tag{2.1.23}$$

es una referencia local ortonormal tal que $e_1, \ldots, e_m \in \mathcal{D}$ y $e_{1*}, \ldots, e_{m*}$ son normales a M. Es más, mediante un cálculo directo podemos comprobar que:

$$Te_{2j-1} = (\cos\theta)e_{2j}, \quad Te_{2j} = -(\cos\theta)e_{2j-1}, \quad j = 1, \ldots, k;$$

$$Ne_i = (\operatorname{sen}\theta)e_{i^*}, \quad te_{i^*} = -(\operatorname{sen}\theta)e_i, \quad i = 1, \ldots, m;$$

$$ne_{(2j-1)*} = -(\cos\theta)e_{(2j)*}, \quad ne_{(2j)*} = (\cos\theta)e_{(2j-1)*}; \quad j = 1, \ldots, k.$$

Definiendo ahora la 1-forma Θ dada por (2.1.2) respecto a (2.1.23), en virtud de [19, Teorema 3.1] se tiene que, si la variedad ambiente es un espacio de curvatura

ϕ-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$, entonces:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Theta = &- \operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{(m+1)c-m+3}{2}\left(\sum_{j=1}^{k}\omega^{2j-1}\wedge\omega^{2j}-\sum_{j=1}^{k}\omega^{(2j-1)*}\wedge\omega^{(2j)*}\right)- \\ &- \operatorname{sen}^2\theta\frac{(m+1)c-m+3}{2}\left(\sum_{j=1}^{k}\omega^{2j-1}\wedge\omega^{(2j-1)*}+\sum_{j=1}^{k}\omega^{2j}\wedge\omega^{(2j)*}\right). \end{aligned} \tag{2.1.24}$$

Por lo tanto, en este caso también se verifica que Θ es cerrada si y sólo si

$$c = \frac{m-3}{m+1}.$$

Obsérvese cómo la ecuación (2.1.17) se correspondería con el caso $\theta = \pi/2$ de (2.1.24), si bien no podía obtenerse directamente pues las referencias anti-invariantes adaptadas no son casos particulares de referencias slant adaptadas, estando éstas últimas definidas solamente en el caso slant propio. Así pues, ha sido necesario realizar de nuevo todos los cálculos para obtener $\mathrm{d}\Theta$*.*

Dado que estamos suponiendo que la subvariedad M^{m+1} tiene dimensión $m+1$ con $m \geq 2$, el Teorema 2.1.4 implica que la 1-forma Θ no es cerrada en el caso de que $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$ sea un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $c=-3$ (como es el caso de $\mathbb{R}^{2m+1}$ con su estructura usual). No obstante, podemos definir una nueva 1-forma ω en M como

$$\omega = \Theta + m\eta. \tag{2.1.25}$$

Para estudiar cuándo ω es cerrada, vamos a calcular en el siguiente resultado $\mathrm{d}\omega$. Aplicando directamente el Teorema 2.1.4 se tiene:

Teorema 2.1.8. *Sea M^{m+1} una subvariedad anti-invariante de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$, tangente a ξ. Entonces, la 1-forma ω dada por (2.1.25) verifica:*

$$\mathrm{d}\omega = -\frac{m+1}{2}(c+3)\sum_{i=1}^{m}\omega^i\wedge\omega^{i^*}. \tag{2.1.26}$$

Demostración. De (2.1.25) se deduce que

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\Theta + m\mathrm{d}\eta. \tag{2.1.27}$$

Pero, como $\widetilde{M}(c)$ es una variedad de contacto métrica, se cumple que $\mathrm{d}\eta = \Phi$, por lo que, en función de una referencia anti-invariante adaptada, tenemos que

$$\mathrm{d}\eta(e_i,e_j) = \Phi(e_i,e_j) = g(e_i,\phi e_j) = g(e_i,e_{j^*}) = 0, \tag{2.1.28}$$

$$\mathrm{d}\eta(e_i,\xi) = \Phi(e_i,\xi) = g(e_i,\phi\xi) = 0, \tag{2.1.29}$$

$$\mathrm{d}\eta(e_i,e_{j^*}) = \Phi(e_i,e_{j^*}) = g(e_i,\phi e_{j^*}) = -g(e_i,e_j) = -\delta_{ij}, \tag{2.1.30}$$

$$\mathrm{d}\eta(e_{i^*},e_{j^*}) = \Phi(e_{i^*},e_{j^*}) = g(e_{i^*},\phi e_{j^*}) = -g(\phi e_i,e_j) = 0, \tag{2.1.31}$$

$$\mathrm{d}\eta(e_{i^*},\xi) = \Phi(e_{i^*},\xi) = g(e_{i^*},\phi\xi) = 0, \tag{2.1.32}$$

para todos $i,j = 1,\ldots,m$.

Así, de (2.1.28) a (2.1.32) se sigue que:

$$\mathrm{d}\eta = -2\sum_{i=1}^{m}\omega^i \wedge \omega^{i^*}. \tag{2.1.33}$$

Finalmente, (2.1.26) resulta de (2.1.17), (2.1.27) y (2.1.33). □

Veamos entonces cuándo la 1-forma ω es cerrada:

Corolario 2.1.9. *Sea M^{m+1} una subvariedad anti-invariante de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$, tangente a ξ. Entonces, la 1-forma ω dada por (2.1.25) es cerrada si y sólo si $c = -3$.*

Demostración. La demostración es inmediata haciendo $\mathrm{d}\omega = 0$ en (2.1.26). □

Nota 2.1.10. *Al igual que observamos para Θ, se tiene ahora que, cuando es cerrada, ω define una clase canónica de cohomología, $[\omega] \in H^1(M;\mathbb{R})$.*

Nota 2.1.11. *De manera similar a lo que ocurría con Θ, la definición de la 1-forma ω puede extenderse al caso de una subvariedad slant propia con ángulo θ tomando:*

$$\omega = \Theta + m(\operatorname{sen}\theta)\eta. \tag{2.1.34}$$

Obsérvese cómo (2.1.25) sería el caso particular de (2.1.34) para $\theta = \pi/2$. En [19, Teorema 3.2] se prueba que

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega = &-\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{m+1}{2}(c+3)\left(\sum_{j=1}^{k}\omega^{2j-1}\wedge\omega^{2j} - \sum_{j=1}^{k}\omega^{(2j-1)*}\wedge\omega^{(2j)*}\right) - \\ &-\operatorname{sen}^2\theta\frac{m+1}{2}(c+3)\left(\sum_{j=1}^{k}\omega^{2j-1}\wedge\omega^{(2j-1)*} + \sum_{j=1}^{k}\omega^{2j}\wedge\omega^{(2j)*}\right),\end{aligned} \tag{2.1.35}$$

respecto a una referencia slant adaptada, construida como se indicó en la Nota 2.1.7. De nuevo, ω es cerrada si y sólo si $c = -3$. Puede observarse aquí también cómo (2.1.26) se correspondería con el caso $\theta = \pi/2$ de (2.1.35), si bien este resultado no podía obtenerse directamente, habiendo sido necesario realizar los cálculos correspondientes.

Pero, ¿cuál es la relación entre la 1-forma ω y la Forma de Maslov ω_H? Viene dada por el siguiente resultado:

Teorema 2.1.12. *Sea M^{m+1} una subvariedad anti-invariante de una variedad Sasakiana $\widetilde{M}^{2m+1}$, tangente a ξ. Entonces,*

$$\omega_H = -\frac{1}{m+1}\omega \tag{2.1.36}$$

Demostración. Respecto a una referencia anti-invariante adaptada, se tiene

$$\omega_H(e_i) = g(e_i, \phi H) = -g(\phi e_i, H) = -g(e_{i^*}, H), \tag{2.1.37}$$

para cada $i = 1, \ldots, m$. Ahora bien, en virtud de (1.1.4) y (1.3.22):

$$H = \frac{1}{m+1}\sum_{j=1}^{m}\sigma(e_j, e_j). \tag{2.1.38}$$

Así, de (2.1.37) y (2.1.38) resulta que

$$\begin{aligned}\omega_H(e_i) =& -\frac{1}{m+1}\sum_{j=1}^{m} g(e_{i^*}, \sigma(e_j, e_j)) = -\frac{1}{m+1}\sum_{j=1}^{m} g(\phi e_i, \widetilde{\nabla}_{e_j}e_j) = \\ =&\frac{1}{m+1}\sum_{j=1}^{m} g(\widetilde{\nabla}_{e_j}\phi e_i, e_j).\end{aligned} \tag{2.1.39}$$

Por otra parte, usando (1.3.9) se tiene que:

$$\widetilde{\nabla}_{e_j}\phi e_i = \phi\widetilde{\nabla}_{e_j}e_i + \delta_{ij}\xi. \tag{2.1.40}$$

De (2.1.39) y (2.1.40) se obtiene:

$$\begin{aligned}\omega_H(e_i) =&\frac{1}{m+1}\sum_{j=1}^{m} g(\phi\widetilde{\nabla}_{e_j}e_i, e_j) = -\frac{1}{m+1}\sum_{j=1}^{m} g(\widetilde{\nabla}_{e_j}e_i, \phi e_j) = \\ =& -\frac{1}{m+1}\sum_{j=1}^{m} g(\widetilde{\nabla}_{e_j}e_i, e_{j^*}).\end{aligned} \tag{2.1.41}$$

Pero,

$$g(\widetilde{\nabla}_{e_j}e_i, e_{j^*}) = g(\sigma(e_j, e_i), e_{j^*}) = g(\sigma(e_i, e_j), e_{j^*}) = g(\widetilde{\nabla}_{e_i}e_j, e_{j^*}), \tag{2.1.42}$$

en virtud de la Fórmula de Gauss y la simetría de σ. Entonces, de (2.1.41) y (2.1.42) resulta que

$$\omega_H(e_i) = -\frac{1}{m+1}\sum_{j=1}^{m} g(\widetilde{\nabla}_{e_i}e_j, e_{j^*}) = -\frac{1}{m+1}\sum_{j=1}^{m}\omega_j^{j^*}(e_i) = -\frac{1}{m+1}\Theta(e_i), \tag{2.1.43}$$

donde hemos usado las definiciones de las formas de conexión y de la 1-forma Θ.

Por otra parte:

$$\omega_H(\xi) = g(\xi, \phi H) = -g(\phi\xi, H) = 0, \tag{2.1.44}$$

$$\begin{aligned}\Theta(\xi) =& \sum_{i=1}^{m} \omega_i^{i^*}(\xi) = \sum_{i=1}^{m} g(\widetilde{\nabla}_\xi e_i, e_{i^*}) = \sum_{i=1}^{m} g(\widetilde{\nabla}_{e_i}\xi, e_{i^*}) = \\ =& -\sum_{i=1}^{m} g(\phi e_i, e_{i^*}) = -\sum_{i=1}^{m} g(e_{i^*}, e_{i^*}) = -m,\end{aligned} \tag{2.1.45}$$

donde se ha procedido como en (2.1.42).

Usando ahora (2.1.43), (2.1.44) y (2.1.45), calculamos:

$$\begin{aligned}\omega_H =& \sum_{i=1}^{m} \omega_H(e_i)\omega^i + \omega_H(\xi)\eta = -\frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{m} \Theta(e_i)\omega^i = \\ =& -\frac{1}{m+1}(\Theta + m\eta) = -\frac{1}{m+1}\omega,\end{aligned}$$

como queríamos probar. □

Así, ya estamos en condiciones de establecer cuándo la Forma de Maslov es cerrada:

Corolario 2.1.13. *Sea M^{m+1} una subvariedad anti-invariante de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$, tangente a ξ. Entonces, la Forma de Maslov ω_H de M es cerrada si y sólo si $c = -3$.*

Demostración. Basta calcular la diferencial de ω_H en (2.1.36) y aplicar el Teorema (2.1.8). □

Nota 2.1.14. *Obsérvese que, por el Corolario 2.1.13, en $\mathbb{R}^{2m+1}$ con su estructura Sasakiana habitual, toda subvariedad anti-invariante de dimensión $m+1$, tangente al campo de estructura ξ, tiene Forma de Maslov ω_H cerrada.*

Ejemplo 2.1.15. *Siguiendo la misma línea de [12], podemos considerar la sumersión Riemanniana $\pi : \mathbb{R}^{2m+1} \to \mathbb{C}^m$ dada por*

$$\pi(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m, z) = \frac{1}{2}(y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_m),$$

y suponemos que existe una subvariedad Lagrangiana $\widehat{M}$ of $\mathbb{C}^m$, tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2m+1} \\ \downarrow & & \downarrow\ \pi \\ \widehat{M} & \longrightarrow & \mathbb{C}^m, \end{array}$$

donde M es el conjunto de fibras sobre $\widehat{M}$. Entonces la subvariedad anti-invariante M localmente isométrica al producto Riemanniano de una porción de una esfera de Whitney y $\mathbb{R}$ tiene Forma de Maslov ω_H cerrada, por el Corolario 2.1.13.

Nota 2.1.16. *Obsérvese que la importancia de este ejemplo radica en que, como veremos en la próxima sección, M es la única subvariedad anti-invariante de $\mathbb{R}^{2m+1}$ que, además de tener Forma de Maslov cerrada, tiene Forma de Maslov $\mathcal{D}$-conforme, por [12, Teorema 4.3], aparte de las subvariedades totalmente geodésicas de contacto definidas como aquéllas cuya segunda forma fundamental viene dada por (1.3.28).*

Al igual que hemos observado anteriormente con respecto a los Teoremas 2.1.4 y 2.1.8, para subvariedades slant propias se obtendría un resultado similar al Corolario 2.1.13, a partir de [19]. Así, podemos enunciar:

Corolario 2.1.17. *Sea M^{m+1} una subvariedad slant, no invariante, de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$. Entonces, la Forma de Maslov ω_H de M es cerrada si y sólo si $c = -3$.*

De nuevo podemos observar que en $\mathbb{R}^{2m+1}$ con su estructura Sasakiana habitual, toda subvariedad slant, no invariante y de dimensión $m+1$, tangente al campo de estructura ξ, tiene Forma de Maslov ω_H cerrada.

Ejemplo 2.1.18. *En [15], J. L. Cabrerizo, A. Carriazo, L. M. Fernández y M. Fernández, establecen interesantes ejemplos de subvariedades slant no minimales en $\mathbb{R}^5$, con su estructura Sasakiana habitual.*

Concretamente, en el Ejemplo 3.8, *se define para cada constante k,*

$$x(u,v,t) = 2(e^{ku}\cos u\cos v, e^{ku}\operatorname{sen} u\cos v, e^{ku}\cos u\operatorname{sen} v, e^{ku}\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v, t), \quad (2.1.46)$$

lo cual determina una subvariedad slant de dimensión 3 *con ángulo $\theta = \cos^{-1}(|k|/\sqrt{1+k^2})$ y curvatura media no constante dada por $\|H\| = 2e^{-ku}/(3\sqrt{1+k^2})$.*

Por otra parte, en el Ejemplo 3.9, *se define para cada constante k,*

$$x(u,v,t) = 2(u, k\cos v, v, k\operatorname{sen} v, t), \quad (2.1.47)$$

lo cual determina una subvariedad slant con ángulo slant $\theta = \cos^{-1}(1/\sqrt{1+k^2})$ y curvatura media constante $\|H\| = |k|/(3(1+k^2))$.

Según el Corolario 2.1.17, las subvariedades (2.1.46) y (2.1.47) tienen Forma de Maslov ω_H cerrada.

Finalmente, podemos establecer la siguiente obstrucción topológica para una subvariedad anti-invariante:

Corolario 2.1.19. *Sea M^{m+1} una variedad diferenciable de dimensión $m+1$ compacta y simplemente conexa. Si m es par, entonces M no puede ser inmersa en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+1}(-3)$ como una subvariedad anti-invariante no minimal.*

Demostración. Supongamos que M^{m+1} es una subvariedad anti-invariante no minimal de $\widetilde{M}^{2m+1}(-3)$. Como H es no nulo en cada punto, también lo es la Forma de Maslov de M^{m+1} (2.1.1). Obsérvese que podemos suponer que $H \neq 0$ en cada punto. Si no fuera así, nos restringimos al abierto $U = \{p \in M | H_p \neq 0\} \neq \emptyset$ y razonamos de manera análoga. Además, en virtud del Corolario 2.1.13, sabemos que ω_H es cerrada. Por tanto, ω_H representa una clase de cohomogía $[\omega_H] \in H^1(M; \mathbb{R})$. Ahora bien, como M es compacta, ω_H no puede ser exacta. De esta forma, $[\omega_H]$ es una clase de cohomología no trivial, luego el primer grupo de cohomología $H^1(M; \mathbb{R})$ es también no trivial. Así, M no es simplemente conexa, lo cual es una contradicción. □

Nota 2.1.20. *Obsérvese que este corolario no es contradictorio con los ejemplos dados anteriormente, ya que las subvariedades dadas en los mismos no son compactas.*

2.2. Forma de Maslov conforme

En esta sección estudiaremos cuándo la Forma de Maslov ω_H de una subvariedad anti-invariante M^{m+1}, tangente al campo de estructura ξ, es conforme, dentro de una variedad Sasakiana $\widetilde{M}^{2m+1}$.

Como hemos señalado en la Introducción, el hecho de que su Forma de Maslov sea conforme juega un papel muy importante en la caracterización de la esfera de Whitney como subvariedad Lagrangiana de $\mathbb{C}^m$. En [49], se demuestra que la esfera de Whitney es la única subvariedad Lagrangiana compacta con Forma de Maslov conforme y primer número de Betti nulo.

En primer lugar, demostramos un resultado general sobre la conformidad de la Forma de Maslov ω_H dada por (2.1.1) para cualquier subvariedad anti-invariante dentro de una variedad Sasakiana:

Teorema 2.2.1. *Sea M^{m+1} una subvariedad anti-invariante de una variedad Sasakiana $\widetilde{M}^{2m+1}$, tangente al campo de estructura ξ y tal que su Forma de Maslov es cerrada. Entonces, esta Forma de Maslov es conforme en M si y sólo si su vector curvatura media es paralelo.*

Demostración. De (1.2.1) y (1.3.21), si Y es tangente a M, tenemos

$$g(\nabla_\xi \phi H, Y) = g(\nabla_Y \phi H, \xi) = -g(\phi H, \nabla_Y \xi) = g(\phi H, TY) = 0$$

y por tanto:

$$\nabla_\xi \phi H = 0.$$

Debido a ello, usando (1.2.2) tenemos que ω_H es conforme en M si y sólo si

$$\nabla_X \phi H = 0,$$

para todo X tangente a M. Pero, como de (1.3.9), $(\widetilde{\nabla}_X\phi)H = 0$, teniendo en cuenta la componente tangente de esta fórmula, obtenemos $\nabla_X\phi H - \phi D_X H = 0$, o lo que es lo mismo, ω_H es conforme en M si y sólo si $D_X H = 0$. $\square$

Nota 2.2.2. *Las esferas de Whitney tienen vector curvatura media H no paralelo. Sin embargo, como veremos más adelante, su vector ϕH, cuya forma dual es la Forma de Maslov ω_H, sí cumple condiciones de conformidad. De ahí la importancia de estudiar las subvariedades que cumplen esta propiedad.*

En el siguiente teorema vamos a establecer una condición suficiente para que la Forma de Maslov ω_H de una subvariedad anti-invariante de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante sea conforme para aquellos campos que sean ortogonales al campo de estructura ξ. Para ello, debemos introducir el siguiente concepto, por analogía con el de campo conforme:

Definición 2.2.3. *Sea M una subvariedad tangente al campo de estructura ξ de una variedad casi-contacto métrica $\widetilde{M}$. Diremos que un campo cerrado X en M es* $\mathcal{D}$-conforme *si $\nabla_Y X = fY$, para todo Y ortogonal a ξ, siendo f una función. Asimismo, diremos que una 1-forma cerrada es* $\mathcal{D}$-conforme *si su campo dual lo es.*

Cabe destacar que la expresión que debe satisfacer la segunda forma fundamental de la subvariedad para que la subvariedad tenga Forma de Maslov $\mathcal{D}$-conforme coincide con (0.0.2), la cual fue establecida por D. E. Blair y A. Carriazo en [12], para las subvariedades anti-invariantes que satisfacen el caso de la igualdad en la desigualdad (0.0.1) entre H y τ.

Teorema 2.2.4. *Sea M^{m+1} una subvariedad anti-invariante de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+1}(-3)$, tangente a ξ, con Forma de Maslov cerrada. Si*

$$\begin{aligned} \sigma(X,Y) =& \frac{m+1}{m+2}\{(g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y))H - \\ &- (\omega_H(X) + \frac{m+2}{m+1}\eta(X))\phi Y - (\omega_H(Y) + \frac{m+2}{m+1}\eta(Y))\phi X\}, \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

para todos X, Y tangentes a M, entonces la Forma de Maslov de M es $\mathcal{D}$-conforme.

Demostración. Sea Y un campo tangente a M, unitario y ortogonal a ξ. Entonces de (2.2.1) se sigue que:

$$\sigma(Y,Y) = \frac{m+1}{m+2}\{H + 2g(\phi Y, H)\phi Y\}. \tag{2.2.2}$$

Tomemos ahora otro campo tangente X, ortogonal a Y. En primer lugar, de (1.1.11) se tiene que:

$$(\widetilde{\nabla}_X\sigma)(Y,Y) = D_X\sigma(Y,Y) - 2\sigma(\nabla_X Y, Y). \tag{2.2.3}$$

Por otra parte, a partir de (2.2.2) podemos calcular

$$D_X\sigma(Y,Y) = \frac{m+1}{m+2}\{D_XH + 2Xg(\phi Y, H)\phi Y + 2g(\phi Y, H)D_X\phi Y\}, \tag{2.2.4}$$

pero como, en virtud de (1.3.9),

$$\begin{aligned} Xg(\phi Y, H) =& g(\widetilde{\nabla}_X\phi Y, H) + g(\phi Y, \widetilde{\nabla}_X H) = \\ =& g(\phi\widetilde{\nabla}_X Y, H) + g(\phi Y, D_X H), \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

sustituyendo (2.2.5) en (2.2.4), obtenemos:

$$\begin{aligned} D_X\sigma(Y,Y) = \frac{m+1}{m+2}\{&D_XH + 2g(\phi\widetilde{\nabla}_X Y, H)\phi Y + \\ &+ 2g(\phi Y, D_X H)\phi Y + 2g(\phi Y, H)D_X\phi Y\}. \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Por otro lado, a partir de (2.2.1), calculamos

$$\sigma(\nabla_X Y, Y) = \frac{m+1}{m+2}\{g(\phi\nabla_X Y, H)\phi Y + g(\phi Y, H)\phi\nabla_X Y\}, \tag{2.2.7}$$

dado que $g(\nabla_X Y, Y) = 0 = \eta(\nabla_X Y)$.

Ahora bien, sustituyendo (2.2.6) y (2.2.7) en (2.2.3), deducimos que:

$$\begin{aligned} (\widetilde{\nabla}_X\sigma)(Y,Y) =& \frac{m+1}{m+2}\{D_XH + 2g(\phi\widetilde{\nabla}_X Y, H)\phi Y + 2g(\phi Y, D_X H)\phi Y + \\ &+ 2g(\phi Y, H)D_X\phi Y - 2g(\phi\nabla_X Y, H)\phi Y - 2g(\phi Y, H)\phi\nabla_X Y\}. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Pero, al ser ϕH tangente,

$$g(\phi\widetilde{\nabla}_X Y, H) = -g(\widetilde{\nabla}_X Y, \phi H) = -g(\nabla_X Y, \phi H) = g(\phi\nabla_X Y, H), \tag{2.2.9}$$

mientras que, al ser $(\widetilde{\nabla}_X\phi)Y = 0$, de las Fórmulas de Gauss y Weingarten se sigue que:

$$D_X\phi Y = \phi\nabla_X Y. \tag{2.2.10}$$

Así, usando (2.2.9) y (2.2.10), (2.2.8) se reduce a:

$$(\widetilde{\nabla}_X\sigma)(Y,Y) = \frac{m+1}{m+2}\{D_XH + 2g(\phi Y, D_X H)\phi Y\}. \tag{2.2.11}$$

Supongamos ahora que el campo X es también ortogonal a ξ. De nuevo, a partir de (1.1.11):

$$(\widetilde{\nabla}_Y\sigma)(X,Y) = D_Y\sigma(X,Y) - \sigma(\nabla_Y X, Y) - \sigma(X, \nabla_Y Y). \tag{2.2.12}$$

Pero, usando (2.2.1), calculamos:

$$\sigma(X,Y)=\frac{m+1}{m+2}\{g(\phi X,H)\phi Y+g(\phi Y,H)\phi X\}.$$

Así,

$$\begin{aligned} D_Y\sigma(X,Y)=\frac{m+1}{m+2}\{&g(\widetilde{\nabla}_Y\phi X,H)\phi Y+g(\phi X,\widetilde{\nabla}_Y H)\phi Y+\\ &+g(\phi X,H)D_Y\phi Y+g(\widetilde{\nabla}_Y\phi Y,H)\phi X+\\ &+g(\phi Y,\widetilde{\nabla}_Y H)\phi X+g(\phi Y,H)D_Y\phi X\}. \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

Por otra parte, utilizando de nuevo (2.2.1), tenemos

$$\begin{aligned} \sigma(\nabla_Y X,Y)=\frac{m+1}{m+2}\{&g(\nabla_Y X,Y)H+g(\phi\nabla_Y X,H)\phi Y+\\ &+g(\phi Y,H)\phi\nabla_Y X\}, \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

y además,

$$\sigma(X,\nabla_Y Y)=\frac{m+1}{m+2}\{g(X,\nabla_Y Y)H+g(\phi X,H)\phi\nabla_Y Y+g(\phi\nabla_Y Y,H)\phi X\}. \tag{2.2.15}$$

De esta forma, sustituyendo (2.2.13), (2.2.14) y (2.2.15) en (2.2.12) y teniendo en cuenta (2.2.10) y que $g((\widetilde{\nabla}_X\phi)Y,H)=0$ por (1.3.9), obtenemos:

$$(\widetilde{\nabla}_Y\sigma)(X,Y)=\frac{m+1}{m+2}\{g(\phi X,D_Y H)\phi Y+g(\phi Y,D_Y H)\phi X\}. \tag{2.2.16}$$

Ahora, teniendo en cuenta que, en virtud de (1.3.10),

$$(\widetilde{R}(X,Y)Y)^\perp=\frac{c-1}{4}\left(3g(X,\phi Y)\phi Y-g(Y,\phi Y)\phi X\right)=0,$$

al ser M anti-invariante, la ecuación de Codazzi (1.1.12) implica que

$$(\widetilde{\nabla}_X\sigma)(Y,Y)-(\widetilde{\nabla}_Y\sigma)(X,Y)=0,$$

por lo que, restando (2.2.11) y (2.2.16) llegamos a que:

$$D_X H=g(\phi X,D_Y H)\phi Y+g(\phi Y,D_Y H)\phi X-2g(\phi Y,D_X H)\phi Y. \tag{2.2.17}$$

Pero, como $(\widetilde{\nabla}_X\phi)H=0$, es fácil comprobar, usando argumentos habituales, que

$$g(D_X H,\phi Y)=-g(\nabla_X\phi H,Y)$$

y, análogamente,
$$g(D_Y H, \phi X) = -g(\nabla_Y \phi H, X).$$
Ahora bien, como M tiene Forma de Maslov cerrada, sabemos que ϕH es un campo cerrado, lo que quiere decir que las expresiones anteriores coinciden. Así, la ecuación (2.2.17) se reduce a:

$$D_X H = g(\phi Y, D_Y H)\phi X - g(\phi Y, D_X H)\phi Y. \tag{2.2.18}$$

Es más, a partir de (2.2.18), se tiene que

$$g(\phi Y, D_X H) = -g(\phi Y, D_X H),$$

pues $g(\phi X, \phi Y) = 0$ y $g(\phi Y, \phi Y) = 1$, con lo que

$$g(\phi Y, D_X H) = 0$$

y podemos escribir (2.2.18) simplemente como:

$$D_X H = g(\phi Y, D_Y H)\phi X. \tag{2.2.19}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta de nuevo que $(\widetilde{\nabla}_X \phi)H = 0$, se comprueba fácilmente que para cualquier campo Z tangente a M,

$$g(\nabla_X \phi H, Z) = -g(D_X H, \phi Z) = -g(D_Y H, \phi Y)g(X, Z),$$

donde se ha usado (2.2.19). Así,

$$\nabla_X \phi H = -g(D_Y H, \phi Y)X, \tag{2.2.20}$$

lo que significa que el campo ϕH es $\mathcal{D}$-conforme. □

Nota 2.2.5. *Observemos que el resultado anterior no puede mejorarse para obtener que ϕH sea conforme, pues se puede comprobar sin dificultad que, al ser ϕH cerrado, se tiene que*
$$\nabla_\xi \phi H = 0. \tag{2.2.21}$$

Por otra parte, para un campo tangente X cualquiera, de (2.2.20) y (2.2.21) se tendría que:
$$\nabla_X \phi H = -g(D_Y H, \phi Y)(X - \eta(X)\xi).$$

Ahora bien, cabe preguntarse qué subvariedades verifican la condición (2.2.1). Un caso particularmente importante es el de las ya mencionadas subvariedades totalmente geodésicas de contacto (1.3.28).

Está claro que una subvariedad con esta propiedad ha de ser minimal. Así, (1.3.22) y (1.3.28) implican que toda subvariedad anti-invariante y totalmente geodésica de contacto, verifica la condición (2.2.1).

Ejemplo 2.2.6. *Si tomamos* $\mathbb{R}^{2m+1}$ *como variedad ambiente, la hipótesis de tener* M *Forma de Maslov cerrada no es necesaria, tal y como se probó en la Sección 2.1. Es más, en este caso, A. Carriazo y D. E. Blair probaron en [12] que la condición (2.2.1) caracteriza a las subvariedades anti-invariantes que satisfacen el caso de la igualdad en*

$$\|H\|^2 \geq \frac{2(m+2)}{(m+1)^2(m-1)}\tau,$$

donde τ *denota la curvatura escalar de la subvariedad, de dimensión* $m+1$. *Esta desigualdad también fue establecida por los autores citados.*

Dada una subvariedad anti-invariante M *de* $\mathbb{R}^{2m+1}$, *consideremos ahora la sumersión Riemanniana* $\pi : \mathbb{R}^{2m+1} \to \mathbb{C}^m$ *dada por*

$$\pi(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m, z) = \frac{1}{2}(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_m),$$

y supongamos que existe una subvariedad Lagrangiana $\widehat{M}$ *of* $\mathbb{C}^m$, *tal que el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2m+1} \\ \downarrow & & \downarrow\ \pi \\ \widehat{M} & \longrightarrow & \mathbb{C}^m, \end{array}$$

donde M *es el conjunto de fibras sobre* $\widehat{M}$. *En estas condiciones, también se prueba en [12] que* M *verifica la condición (2.2.1) si y sólo si es totalmente geodésica de contacto o localmente isométrica al producto Riemanniano de una porción de una esfera de Whitney y* $\mathbb{R}$. *Así, el Teorema 2.2.4 implica que cada una de estas subvariedades tiene Forma de Maslov* $\mathcal{D}$*-conforme.*

Capítulo 3

La Forma de Maslov de una subvariedad slant

En este tercer capítulo vamos a estudiar la Forma de Maslov de una subvariedad slant no invariante M^{m+1}, ($m \geq 2$, $\theta \in (0, \pi/2]$), inmersa en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$, con estructura (α, β) trans-Sasakiana. Esto supone una doble generalización respecto al capítulo anterior, ya que pasaremos de subvariedades anti-invariantes a subvariedades slant, y a su vez, en cuanto a la variedad ambiente, consideraremos un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado.

Esta doble generalización se debe a que los resultados del capítulo anterior ya fueron estudiados por A. Carriazo en [19], para subvariedades slant en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$. De esta forma, nuestro objetivo es generalizar dichos resultados, así como los que hemos obtenido en el capítulo anterior para el caso anti-invariante. Además, dotaremos a $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$ de una estructura (α, β) trans-Sasakiana, para trabajar en el marco más general posible y, aunque sabemos que en [41], J. C. Marrero probó que si $m \geq 2$, la variedad ambiente $\widetilde{M}^{2m+1}$ tiene estructura o bien α-Sasakiana, o bien β-Kenmotsu, estudiaremos ambos casos conjuntamente y haremos dicha distinción cuando sea necesario.

En primer lugar, vamos a establecer una desigualdad entre el vector curvatura media H y la curvatura escalar τ y seguidamente pasaremos a estudiar cuándo la Forma de Maslov es cerrada y conforme. Este orden se debe a que, como hemos visto en el caso anti-invariante, para que la Forma de Maslov de la subvariedad sea al menos $\mathcal{D}$-conforme necesitamos que la segunda forma fundamental de dicha subvariedad tenga la expresión adecuada que satisfaga el caso de la igualdad en la desigualdad entre H y τ establecida.

3.1. Subvariedades $*$-slant

En esta sección vamos a comenzar estableciendo algunas desigualdades entre los principales invariantes intrínsecos de la subvariedad, la curvatura escalar (τ) y la curvatura de Ricci (Ric), y el principal invariante extrínseco, el vector curvatura media (H). Definiremos las subvariedades $*$-slant como aquéllas que cumplan el caso de la igualdad en la desigualdad entre H y τ. Estas subvariedades, tal y como hemos mencionado en la Introducción, ya han sido estudiadas anteriormente en otros ambientes y poseen una determinada expresión de su segunda forma fundamental, que usaremos en posteriores secciones de este capítulo. Además, presentaremos interesantes ejemplos de subvariedades $*$-slant.

En primer lugar, estableceremos en el siguiente teorema la desigualdad entre H y τ para una subvariedad slant dentro de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado con estructura (α, β) trans-Sasakiana, obteniendo la expresión de la segunda forma fundamental de las subvariedades que satisfacen el caso de la igualdad en dicha desigualdad. Como ya mencionamos en la Introducción, dicha desigualdad ha sido muy estudiada tanto en geometría compleja como en geometría de contacto. Además, la expresión que obtendremos de la segunda forma fundamental para las subvariedades que satisfacen el caso de la igualdad será utilizada en más ocasiones a lo largo de este capítulo.

Recordemos que A. Ros y F. Urbano obtuvieron en [49] la siguiente desigualdad entre H y τ, para cualquier subvariedad Lagrangiana de $\mathbb{C}^m$

$$\|H\|^2 \geq \frac{2(m+2)}{m^2(m-1)}\tau,$$

y demostraron que la subvariedad M satisface el caso de la igualdad en cada punto, si y sólo si su segunda forma fundamental σ, viene dada por

$$\sigma(X,Y) = \frac{m}{m+2}\{g(X,Y)H + g(JX,H)JY + g(JY,H)JX\},$$

para todos X, Y tangentes a M.

Posteriormente, en geometría de contacto cabe destacar el artículo [47] de G. Pitiş, en el que estudia subvariedades $*$-Legendrianas, es decir, subvariedades M^m normales al campo de estructura ξ análogas a las subvariedades Lagrangianas de la geometría compleja, dentro de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$, que cumplan la siguiente expresión de la segunda forma fundamental:

$$\sigma(X,Y) = \frac{m}{m+2}\{g(X,Y)H + g(\phi X,H)\phi Y + g(\phi Y,H)\phi X\}.$$

Dicha subvariedades satisfacen el caso de la igualdad en la desigualdad

$$\tau \geq m(m-1)\frac{c+3}{4} + \left[m^2\left(\frac{m}{m+2}\right)^2 + 2(m-2)\right]\|H\|^2.$$

Por otra parte, en [12], A. Carriazo y D. E. Blair demuestran para subvariedades anti-invariantes que son tangentes al campo de estructura ξ de $\mathbb{R}^{2m+1}$ la desigualdad

$$\|H\|^2 \geq \frac{2(m+2)}{(m+1)^2(m-1)}\tau,$$

probando además que la igualdad se alcanza si y sólo si la segunda forma fundamental de la subvariedad tiene la expresión

$$\sigma(X,Y) = \frac{n+1}{n+2}\{(g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y))H + (g(\phi X, H) - \\ - \frac{n+2}{n+1}\eta(X))\phi Y + (g(\phi Y, H) - \frac{n+2}{n+1}\eta(Y))\phi X\},$$

para todos X, Y tangentes a M.

Finalmente, en cuanto a subvariedades slant, en el campo complejo cabe destacar el artículo [50], en el que A. Song y X. Liu demuestran la siguiente desigualdad para cualquier subvariedad slant dentro de un espacio de curvatura seccional holomorfa constante generalizado $\widetilde{M}(f_1, f_2)$:

$$\|H\|^2 \geq \tau - f_1 - \frac{3f_2}{m-1}\cos^2\theta.$$

A continuación, vamos a establecer la desigualdad buscada entre H y τ para subvariedades slant de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$. Previamente, vamos a introducir un lema para detallar cómo vamos a elegir la base slant adaptada que usaremos en el Teorema principal.

Lema 3.1.1. *Sea M^{m+1} ($m \geq 2$) una subvariedad slant no minimal de una variedad trans-Sasakiana $\widetilde{M}^{2m+1}$. Entonces, si elegimos*

$$e_{1^*} = \frac{1}{\|H\|^2}H, \quad e_1 = -\csc\theta t e_{1^*},$$

se tiene que

$$e_{1^*} = \csc\theta N e_1.$$

Demostración. Sabemos que para cualquier campo U normal a M, existe un campo X tangente a M y ortogonal a ξ tal que $U = NX$. Entonces, podemos establecer que

$$n^2U = n^2NX = -nNTX = NT^2X = -\cos^2\theta NX = -\cos^2\theta U, \tag{3.1.1}$$

donde se ha usado (1.3.18) y (1.3.29). Ahora bien, sustituyendo (3.1.1) en (1.3.20) obtenemos que

$$NtU = -\operatorname{sen}^2\theta U. \tag{3.1.2}$$

Finalmente, de (3.1.2) podemos escribir que

$$Ne_1 = -\csc\theta N t e_{1^*} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta} e_{1^*} = \operatorname{sen}\theta e_{1^*},$$

de donde se tiene inmediatamente la desmostración del lema. □

Nota 3.1.2. *Obsérvese que construimos la base slant adaptada tomando en primer lugar el campo* e_{1^*} *en la dirección del vector curvatura media. A continuación tomamos el campo* e_1*, demostrando en el Lema 3.1.1 que se satisface la condición que establece la Nota 2.1.7 para obtener una base slant adaptada y, a partir de ahí, vamos construyendo el resto de la base siguiendo el procedimiento detallado en dicha nota.*

Pasemos a la demostración del teorema anteriormente mencionado que nos da la desigualdad entre H y τ.

Teorema 3.1.3. *Sea* M^{m+1} $(m \geq 2)$ *una subvariedad* θ*-slant propia de un espacio de curvatura* ϕ*-seccional constante generalizado* $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$ *con estructura* (α, β) *trans-Sasakiana. Entonces, el cuadrado del módulo de su vector curvatura media* $\|H\|^2$ *y su curvatura escalar* τ *satisfacen en cada punto la siguiente desigualdad:*

$$\|H\|^2 \geq \frac{2(m+2)}{(m+1)^2(m-1)}\left[\tau - \frac{1}{2}m(m+1)f_1 - \frac{3}{2}m\cos^2\theta f_2 + mf_3 + \alpha^2 m \operatorname{sen}^2\theta\right], \tag{3.1.3}$$

Demostración. Sea M^{m+1} una subvariedad slant propia de una variedad (α, β) trans-Sasakiana $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$. Sea $\{e_1, \ldots, e_m, \xi, e_{1*}, \ldots, e_{m*}\}$ una referencia slant adaptada. De (1.1.4), podemos deducir que

$$\begin{aligned}\|H\|^2 =& g(H,H) = \frac{1}{(m+1)^2} g\left(\sum_{i=1}^m \sigma(e_i, e_i), \sum_{j=1}^m \sigma(e_j, e_j)\right) = \\ =& \frac{1}{(m+1)^2}\left(\sum_{i=1}^m g(\sigma(e_i,e_i), \sigma(e_i,e_i)) + \sum_{i\neq j}^m g(\sigma(e_i,e_i), \sigma(e_j,e_j))\right),\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

donde los términos correspondientes a ξ son nulos, debido a (1.3.24). Además, de (1.1.10), (1.1.14) y (1.3.14), obtenemos que

$$
\begin{aligned}
2\tau &= \sum_{i\neq j}^{m+1} K(e_i,e_j) = \sum_{i\neq j}^{m+1} R(e_i,e_j,e_j,e_i) = \\
&= \sum_{i\neq j}^{m+1} \Big(\widetilde{R}(e_i,e_j;e_j,e_i) - g(\sigma(e_i,e_j),\sigma(e_i,e_j)) + g(\sigma(e_i,e_i),\sigma(e_j,e_j)) \Big) = \\
&= \sum_{i\neq j}^{m+1} (f_1 \{g(e_j,e_j)g(e_i,e_i) - g(e_i,e_j)g(e_j,e_i)\} \\
&\quad + f_2 \{g(e_i,\phi e_j)g(\phi e_j,e_i) - g(e_j,\phi e_j)g(\phi e_i,e_i) + 2g(e_i,\phi e_j)g(\phi e_j,e_i)\} \\
&\quad + f_3 \{\eta(e_i)\eta(e_j)g(e_j,e_i) - \eta(e_j)\eta(e_j)g(e_i,e_i) + g(e_i,e_j)\eta(e_j)\eta(e_i) \\
&\quad - g(e_j,e_j)\eta(e_i)\eta(e_i)\} - g(\sigma(e_i,e_j),\sigma(e_i,e_j)) + g(\sigma(e_i,e_i),\sigma(e_j,e_j))) = \\
&= (m+1)mf_1 + 3f_2\|T\|^2 - 2mf_3 - \sum_{i\neq j}^{m+1} g(\sigma(e_i,e_j),\sigma(e_i,e_j)) \\
&\quad + \sum_{i\neq j}^{m+1} g(\sigma(e_i,e_i),\sigma(e_j,e_j)),
\end{aligned} \tag{3.1.5}
$$

donde T es la componente tangente de ϕ para campos tangentes. Ahora bien, veamos en primer lugar todos los sumandos de (3.1.5) en los que aparezca el campo de estructura ξ:

$$
\begin{aligned}
&-2\sum_{i=1}^{m} g(\sigma(e_i,\xi),\sigma(e_i,\xi)) + 2\sum_{j=1}^{m} g(\sigma(\xi,\xi),\sigma(e_j,e_j)) = \\
&-2\alpha^2 \sum_{i=1}^{m} g(Ne_i,Ne_i) = -2\alpha^2 \operatorname{sen}^2\theta m,
\end{aligned} \tag{3.1.6}
$$

teniendo en cuenta que $\sigma(X,\xi) = -\alpha NX$ por (1.3.26), además la igualdad (1.3.31) y (1.3.24). Así, de (3.1.4), (3.1.5) y (3.1.6), podemos establecer que

$$
\begin{aligned}
(m+1)^2\|H\|^2 - 2\mathfrak{a}\tau = &-\mathfrak{a}\left[(m+1)mf_1 + 3f_2\|T\|^2 - 2mf_3 - 2\alpha^2\operatorname{sen}^2\theta m\right] + \\
&+ \sum_{i,j=1}^{m}(\sigma_{ii}^{j})^2 + \sum_{i\neq j}^{m}(\sigma_{jj}^{i})^2 + \\
&+ 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j<k}^{m}\sigma_{jj}^{i}\sigma_{kk}^{i} + 2\mathfrak{a}\sum_{i<j}^{m} g(\sigma(e_i,e_j),\sigma(e_i,e_j)) - \\
&- 2\mathfrak{a}\sum_{i<j}^{m} g(\sigma(e_i,e_i),\sigma(e_j,e_j) = \\
\\
= &-\mathfrak{a}\left[(m+1)mf_1 + 3f_2\|T\|^2 - 2mf_3 - 2\alpha^2\operatorname{sen}^2\theta m\right] + \\
&+ \sum_{i,j=1}^{m}(\sigma_{ii}^{j})^2 + \sum_{i\neq j}^{m}(\sigma_{jj}^{i})^2 - \\
&- 2(\mathfrak{a}-1)\sum_{i\neq j,k}^{m}\sum_{j<k}^{m}\sigma_{jj}^{i}\sigma_{kk}^{i} - 2(\mathfrak{a}-1)\sum_{j\neq k}^{m}\sigma_{jj}^{j}\sigma_{kk}^{j} + \\
&+ 2\mathfrak{a}\left[\sum_{j<k}^{m}(\sigma_{jk}^{j})^2 + (\sigma_{jk}^{k})^2 + \sum_{i\neq j,k}^{m}\sum_{j<k}^{m}(\sigma_{jk}^{i})^2\right] = \\
\\
= &-\mathfrak{a}\left[(m+1)mf_1 + 3f_2\|T\|^2 - 2mf_3 - 2\alpha^2\operatorname{sen}^2\theta m\right] + \\
&+ 2\mathfrak{a}\sum_{i\neq j,k}^{m}\sum_{j<k}^{m}(\sigma_{jk}^{i})^2 + (\mathfrak{a}-1)\sum_{i\neq j,k}^{m}\sum_{j<k}^{m}(\sigma_{jj}^{i}-\sigma_{kk}^{i})^2 + \\
&+ 2\mathfrak{a}\sum_{j<k}^{m}(\sigma_{jk}^{j})^2 - (\mathfrak{a}-1)\sum_{i\neq j,k}^{m}\sum_{j<k}^{m}((\sigma_{jj}^{i})^2 + (\sigma_{kk}^{i})^2) - \\
&- 2(\mathfrak{a}-1)\sum_{j\neq k}^{m}\sigma_{jj}^{j}\sigma_{kk}^{j} + (\sigma_{jk}^{k})^2 + \\
&+ \sum_{i\neq j}^{m}(\sigma_{jj}^{i})^2 + \sum_{j=1}^{m}(\sigma_{jj}^{j})^2,
\end{aligned}
\tag{3.1.7}
$$

donde $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$. La idea ahora es acotar la expresión (3.1.7) para luego buscar el valor adecuado de $\mathfrak{a}$. Para ello podemos agrupar los términos siguientes de (3.1.7) dentro de un cuadrado perfecto, lo que nos facilitará posteriormente la acotación de dicha expresión:

$$\begin{aligned} &2\mathfrak{a}\sum_{j<k}^{m}(\sigma_{jk}^{j})^2-(\mathfrak{a}-1)\sum_{i\neq j,k}^{m}\sum_{j<k}((\sigma_{jj}^{i})^2+(\sigma_{kk}^{i})^2)- \\ &-2(\mathfrak{a}-1)\sum_{j\neq k}^{m}\sigma_{jj}^{j}\sigma_{kk}^{j}+(\sigma_{jk}^{k})^2+\sum_{i\neq j}^{m}(\sigma_{jj}^{i})^2+\sum_{j}(\sigma_{jj}^{j})^2. \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Para agruparlos, vamos a usar una igualdad del siguiente tipo

$$\frac{1}{m-1}\sum_{j\neq k}^{m}(\sigma_{jj}^{j}-\mathfrak{b}\sigma_{kk}^{j})^2=\frac{1}{m-1}((m-1)\sum_{j=1}^{m}(\sigma_{jj}^{j})^2+\mathfrak{b}^2\sum_{j\neq k}^{m}(\sigma_{kk}^{j})^2-2\mathfrak{b}\sum_{j\neq k}^{m}\sigma_{jj}^{j}\sigma_{kk}^{j}), \tag{3.1.9}$$

donde $\mathfrak{b}\in\mathbb{R}$. De esta forma, nuestro objetivo es hallar los valores adecuados de $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$. Para ello, vamos a identificar coeficientes de las expresiones (3.1.8) y (3.1.9). En primer lugar, de los términos correspondientes a $(\sigma_{jj}^{i})^2$, para $i\neq j$, podemos establecer que

$$4\mathfrak{a}-\mathfrak{a}m+m-1=\frac{\mathfrak{b}^2}{m-1}. \tag{3.1.10}$$

Por otra parte, de los términos correspondientes a $\sigma_{jj}^{j}\cdot\sigma_{kk}^{j}$, para $j\neq k$, podemos escribir que

$$-2(\mathfrak{a}-1)=\frac{-2\mathfrak{b}}{m-1}. \tag{3.1.11}$$

De esta forma, de (3.1.10) y (3.1.11) se obtiene que $\mathfrak{b}=3$ y $\mathfrak{a}=\frac{m+2}{m-1}$, mediante un cálculo sencillo. Por tanto, teniendo en cuenta los valores obtenidos podemos establecer que

$$\begin{aligned} (m+1)^2\|H\|^2-2\frac{m+2}{m-1}\tau=&-\frac{m(m+2)}{m-1}[(m+1)f_1+3f_2\cos^2\theta-2f_3-2\alpha^2\operatorname{sen}^2\theta]+ \\ &+\frac{2(m+2)}{m-1}\sum_{i\neq j,k}^{m}\sum_{j<k}^{m}(\sigma_{jk}^{i})^2+\frac{3}{m-1}\sum_{i\neq j,k}^{m}\sum_{j<k}^{m}(\sigma_{jj}^{i}-\sigma_{kk}^{i})^2+ \\ &+\frac{1}{m-1}\sum_{j\neq k}^{m}(\sigma_{jj}^{j}-3\sigma_{kk}^{j})^2, \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

donde se ha usado (1.3.32). De aquí, tenemos inmediatamente que

$$(m+1)^2\|H\|^2-2\frac{m+2}{m-1}\tau\geq-\frac{m(m+2)}{m-1}[(m+1)f_1+3f_2\cos^2\theta-2f_3-2\alpha^2\operatorname{sen}^2\theta],$$

obteniendo la desigualdad del enunciado. □

A continuación, vamos a estudiar el caso de la igualdad de (3.1.3). Para que se cumpla dicha igualdad, teniendo en cuenta (3.1.12), debe verificarse que

$$\begin{aligned} \sigma^i_{jk} &= 0, \quad i \neq j < k, \\ \sigma^i_{jj} - \sigma^i_{kk} &= 0, \quad i \neq j, k, \quad j < k, \\ \sigma^j_{jj} - 3\sigma^j_{kk} &= 0, \quad j \neq k. \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Ahora bien, consideremos una referencia slant adaptada de $\widetilde{M}^{2m+1}$,

$$\{e_1, \ldots, e_m, \xi, e_{1^*}, \ldots, e_{m^*}\},$$

de la forma detallada en el Lema 3.1.1. Así, tenemos que

$$H = \frac{1}{m+1} \sum_{i,k=1}^{m} \sigma^k_{ii} e_{k^*} = \|H\| e_{1^*}, \tag{3.1.14}$$

por lo que

$$\sum_{i=1}^{m} \sigma^1_{ii} = (m+1)\|H\|, \qquad \sum_{i=1}^{m} \sigma^k_{ii} = 0,$$

para todo $k > 1$. Pero, usando (3.1.13), llegamos a que

$$\sum_{i=1}^{m} \sigma^1_{ii} = \sigma^1_{11} + \sum_{i=2}^{m} \sigma^1_{ii} = \sigma^1_{11} + (m-1)\sigma^1_{22} = \frac{m+2}{3}\sigma^1_{11},$$

y, por tanto,

$$\sigma^1_{11} = \frac{3(m+1)}{m+2}\|H\|, \qquad \sigma^1_{22} = \sigma^1_{ii} = \frac{m+1}{m+2}\|H\|,$$

para todo $i > 2$. Además, si $k > 1$, se tiene que

$$\sigma^k_{kk} = 3\sigma^k_{11}, \quad \sigma^k_{11} = \sigma^k_{ii},$$

para todo $i > 1, i \neq k$. Luego, teniendo en cuenta de nuevo (3.1.13), tenemos que

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \sigma^k_{ii} = \sigma^k_{11} + \sum_{i=2}^{m} \sigma^k_{ii} = (m+2)\sigma^k_{11}.$$

De esta forma, si $k > 1$, deducimos que

$$\sigma^k_{ii} = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Así, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.1.4. *Sea* M^{m+1} $(m \geq 2)$ *una subvariedad* θ*-slant propia de un espacio de curvatura* ϕ*-seccional constante generalizado con estructura* (α, β) *trans-Sasakiana,* $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$*. Entonces,* M *satisface el caso de la igualdad de (3.1.3) en cada punto si y sólo si existe una función real* λ *definida sobre* M *tal que la segunda forma fundamental de* M *satisface*

$$\begin{array}{lll} \sigma(e_1, e_1) = 3\lambda e_{1^*}, & \sigma(e_i, e_i) = \lambda e_{1^*}, & i = 2, \ldots, m, \\ \sigma(e_1, e_i) = \lambda e_{i^*}, & \sigma(e_i, e_j) = 0, & 2 \leq i \neq j \leq m, \\ \sigma(\xi, \xi) = 0, & \sigma(\xi, e_i) = -\alpha \operatorname{sen} \theta e_{i^*}, & \end{array} \tag{3.1.15}$$

respecto a cierta referencia slant adaptada $\{e_1, \ldots, e_m, \xi, e_{1^*}, \ldots, e_{m^*}\}$ *cumpliendo las condiciones del Lema 3.1.1 y con* $\lambda = \frac{m+1}{m+2}\|H\|$*.*

Finalmente, podemos demostrar el siguiente teorema donde establecemos una expresión para la segunda forma fundamental de M para el caso en que se cumpla la igualdad de (3.1.3).

Teorema 3.1.5. *Sea* M^{m+1} $(m \geq 2)$ *una subvariedad* θ*-slant propia de un espacio de curvatura* ϕ*-seccional constante generalizado con estructura* (α, β) *trans-Sasakiana* $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$*. Entonces,* M *satisface el caso de la igualdad de (3.1.3) en cada punto si y sólo si*

$$\begin{aligned} \sigma(X, Y) = \frac{m+1}{m+2} \Big\{ & (g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)) H \\ & - \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \omega_H(X) + \alpha \frac{m+2}{m+1} \eta(X) \right) NY \\ & - \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \omega_H(Y) + \alpha \frac{m+2}{m+1} \eta(Y) \right) NX \Big\}, \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

para todos X, Y tangentes a M.

Demostración. Supongamos que M satisface el caso de la igualdad de (3.1.3) en cada punto. Si tomamos una referencia slant adaptada siguiendo el procedimiento detallado en el Lema 3.1.1, tenemos que $H = \|H\| e_{1^*}$, y teniendo en cuenta que $\lambda = \frac{m+1}{m+2}\|H\|$, podemos establecer que

$$H = \frac{m+2}{m+1} \lambda e_{1^*}. \tag{3.1.17}$$

Ahora bien, si tomamos dos campos tangentes cualesquiera X, Y de M, podemos calcular:

$$\begin{aligned}
\sigma(X,Y) \ &= \sigma(\sum_{i=1}^{m+1} X^i e_i, \sum_{j=1}^{m+1} Y^j e_j) \ = \ \sum_{i,j=1}^{m+1} X^i Y^j \sigma(e_i, e_j) \ = \\
&= X^1Y^1 \frac{3\lambda(m+1)}{m+2} e_{1^*} + \sum_{i=2}^{m} X^i Y^i \frac{\lambda(m+1)}{m+2} e_{1^*} + \sum_{j=2}^{m} X^1 Y^j \frac{\lambda(m+1)}{m+2} e_{j^*} + \\
&\quad \sum_{i=2}^{m} X^i Y^1 \frac{\lambda(m+1)}{m+2} e_{i^*} + \eta(X)\sigma(\xi,Y) + \eta(Y)\sigma(X,\xi) + \eta(X)\eta(Y)\sigma(\xi,\xi) \ = \\
&= (g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)) \frac{\lambda(m+1)}{m+2} e_{1^*} + 2X^1Y^1 \frac{\lambda(m+1)}{m+2} e_{1^*} + \\
&\quad \sum_{j=2}^{m} X^1 Y^j \frac{\lambda(m+1)}{m+2} e_{j^*} + \sum_{i=2}^{m} X^i Y^1 \frac{\lambda(m+1)}{m+2} e_{i^*} - \alpha\eta(X)NY - \alpha\eta(Y)NX,
\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

donde se ha usado (1.3.24), (1.3.26), (3.1.17) y el Corolario 3.1.4. Por otra parte, teniendo en cuenta que

$$e_{i^*} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} N e_i,$$

podemos establecer que

$$NY = \sum_{i=1}^{m+1} Y^i N e_i = \operatorname{sen}\theta \sum_{i=1}^{m+1} Y^i e_{i^*}. \tag{3.1.19}$$

Además, tenemos que

$$\begin{aligned}
g(\phi X, H) &= g(\sum_{i=1}^{m+1} X^i \phi e_i, H) = g(\sum_{i=1}^{m+1} X^i N e_i, H) = g(\sum_{i=1}^{m+1} X^i \operatorname{sen}\theta e_{i^*}, H) = \\
&= \operatorname{sen}\theta g(\sum_{i=1}^{m+1} X^i e_{i^*}, \lambda e_{1^*}) = X^1 \lambda \operatorname{sen}\theta.
\end{aligned} \tag{3.1.20}$$

Así, de (3.1.18), (3.1.19) y (3.1.20) podemos deducir inmediatamente que

$$\begin{aligned}
\sigma(X,Y) \ &= \frac{m+1}{m+2} \Big\{ (g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)) H \\
&\quad + \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} g(\phi X, H) - \alpha \frac{m+2}{m+1} \eta(X) \right) NY \\
&\quad + \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} g(\phi Y, H) - \alpha \frac{m+2}{m+1} \eta(Y) \right) NX \Big\},
\end{aligned}$$

con lo que llegamos a (3.1.16).

Recíprocamente, a partir de (3.1.16), se comprueba fácilmente que se verifica (3.1.15) y, por tanto, se tiene la igualdad de (3.1.3). □

Nota 3.1.6. *Obsérvese que la expresión (3.1.16) de la segunda forma fundamental coincide con (0.0.2) en el caso en que* $\alpha = 1$ *y* $\theta = \pi/2$.

Como ya hemos comentado anteriormente, tanto en geometría compleja como en geometría de contacto, las subvariedades que cumplen el caso de la igualdad entre H y τ siempre han tenido una gran relevancia, por lo que a continuación vamos a dar nombre a las subvariedades que cumplen el caso de la igualdad de (3.1.3).

Definición 3.1.7. *Consideremos* M^{m+1} *una subvariedad slant propia de un espacio de curvatura* ϕ*-seccional constante generalizado con estructura* (α, β) *trans-Sasakiana* $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$. *Si la segunda forma fundamental,* σ, *de* M *satisface (3.1.16), o lo que es lo mismo, el caso de la igualdad del Teorema 3.1.3, diremos que* M *es una subvariedad* $*$*-slant.*

Nota 3.1.8. *Cabe mencionar que damos a estas subvariedades el nombre de subvariedades* $*$*-slant debido a la similitud con las subvariedades* $*$*-Legendrianas estudiadas por G. Pitiş en [47], de las cuales hemos hablado en la Introducción.*

Nota 3.1.9. *Es fácil comprobar que podemos extender tanto el Teorema 3.1.3 como la Definición 3.1.7 al caso en que la subvariedad* M *sea anti-invariante, ya que si consideramos una referencia anti-invariante adaptada* $\{e_1, \ldots, e_m, \xi, e_{1^*}, \ldots, e_{m^*}\}$, *es decir, una base local ortonormal de campos de* $\widetilde{M}$, *siendo* $e_{i^*} = \phi e_i$ *con* $i = 1, \ldots, m$, *siguiendo los mismos pasos que en el Teorema 3.1.3, tenemos que*

$$2\tau = (m+1)mf_1 - 2mf_3 - \sum_{i \neq j}^{m+1} g(\sigma(e_i, e_j), \sigma(e_i, e_j)) + \sum_{i \neq j}^{m+1} g(\sigma(e_i, e_i), \sigma(e_j, e_j)),$$

de donde la expresión equivalente a (3.1.12) queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(m+1)^2\|H\|^2 - 2\frac{m+2}{m-1}\tau = &-\frac{m(m+2)}{m-1}[(m+1)f_1 - 2f_3 - 2\alpha^2] + \\ &+ \frac{6(m+2)}{m-1}\sum_{i<j<k}^{m}(\sigma_{jk}^i)^2 + \frac{3}{m-1}\sum_{i \neq j,k}^{m}\sum_{j<k}^{m}(\sigma_{jj}^i - \sigma_{kk}^i)^2 + \\ &+ \frac{1}{m-1}\sum_{j \neq k}^{m}(\sigma_{jj}^j - 3\sigma_{kk}^j)^2,\end{aligned}$$

la cual nos lleva a la desigualdad:

$$\|H\|^2 \geq \frac{2(m+2)}{(m+1)^2(m-1)}\left[\tau - \frac{1}{2}m(m+1)f_1 + mf_3 + \alpha^2 m\right]. \tag{3.1.21}$$

Además, podemos observar que si la variedad ambiente fuese un espacio de curvatura ϕ-seccional constante, $\widetilde{M}(c)$, obtendríamos la desigualdad:

$$\|H\|^2 \geq \frac{2(m+2)}{(m+1)^2(m-1)}\left[\tau - \frac{1}{2}m(m-1)\frac{c+3}{4}\right], \tag{3.1.22}$$

teniendo en cuenta que $f_1 = \frac{c+3}{4}$ *y* $f_2 = f_3 = \frac{c-1}{4}$.

Por otra parte, si sustituimos en la desigualdad (3.1.21) $f_1 = 0$, $f_2 = f_3 = -1$ *y* $\alpha = 1$, *o lo que es lo mismo, hacemos* $c = -3$ *en (3.1.22), obtenemos*

$$\|H\|^2 \geq \frac{2(m+2)}{(m+1)^2(m-1)}\tau, \tag{3.1.23}$$

que se corresponde con la desigualdad (0.0.1), establecida por D. E. Blair y A. Carriazo en [12] para subvariedades anti-invariantes de $\mathbb{R}^{2m+1}$.

Ahora bien, del Teorema 3.1.3, obtenemos directamente los siguientes corolarios, cuyas demostraciones son inmediatas. El primero de ellos lo usaremos en la siguiente sección, ya que haremos referencia a ejemplos de subvariedades slant inmersas en $\mathbb{R}^{2m+1}$, las cuales deben verificar el caso de la igualdad en la desigualdad que estableceremos a continuación.

Corolario 3.1.10. *Sea* M^{m+1} $(m \geq 2)$ *una subvariedad slant no invariante de* $\mathbb{R}^{2m+1}$ *con estructura Sasakiana. Entonces, el cuadrado del módulo de su vector curvatura media* $\|H\|^2$ *y su curvatura escalar* τ *satisfacen en cada punto la siguiente desigualdad:*

$$\|H\|^2 \geq \frac{2(m+2)}{(m+1)^2(m-1)}\left[\tau + \frac{1}{2}m\cos^2\theta\right]. \tag{3.1.24}$$

Finalmente, establecemos la desigualdad entre H y τ en el caso en que la variedad ambiente sea un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\widetilde{M}(c)$.

Corolario 3.1.11. *Sea* M^{m+1} *una subvariedad slant no invariante de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante* $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$. *Entonces, el cuadrado del módulo de su vector curvatura media* $\|H\|^2$ *y su curvatura escalar* τ *satisfacen en cada punto la siguiente desigualdad:*

$$\|H\|^2 \geq \frac{2(m+2)}{(m+1)^2(m-1)}\left[\tau - \frac{1}{2}m(m+1)\frac{c+3}{4} - \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - 1\right)m\frac{c-1}{4} + m\,\mathrm{sen}^2\,\theta\right].$$

En la siguiente sección, obtendremos varios ejemplos interesantes en los que se alcanza la igualdad en (3.1.3), distinguiendo los casos en que la variedad ambiente tenga estructura α-Sasakiana o β-Kenmotsu.

3.1.1. Ejemplos

En primer lugar, mediante el siguiente lema obtenemos ejemplos en una variedad β-Kenmotsu trabajando con productos *warped.*

P. Alegre, D. E. Blair y A. Carriazo demostraron en [3] que dada una variedad casi Hermítica (N, J, G), el producto warped $M = \mathbb{R} \times_f N$, donde $f > 0$ es una función de $\mathbb{R}$, puede ser dotado de una estructura casi-contacto métrica (ϕ, ξ, η, g_f). De hecho,

$$g_f = \pi^*(g_{\mathbb{R}}) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(G)$$

es la métrica del producto warped, donde π y σ son las proyecciones de $\mathbb{R} \times N$ sobre $\mathbb{R}$ y N, respectivamente; $\phi(X) = (J\sigma_* X)^*$, para todo campo X de $\mathbb{R} \times N$, y $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$, donde t denota la coordenada de $\mathbb{R}$.

Además, si $N(c)$ es un espacio de curvatura seccional holomorfa constante, haciendo un producto warped obtenemos un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado

$$\widetilde{M}\left(\frac{c - 4f'^2}{4f^2}, \frac{c}{4f^2}, \frac{c - 4f'^2}{4f^2} + \frac{f''}{f}\right),$$

dotado de una estructura β trans-Sasakiana con $\beta = f'/f$.

El siguiente lema nos da subvariedades verificando (3.1.16) a partir de la igualdad análoga dentro de la geometría compleja ya mencionada anteriormente.

Lema 3.1.12. *Si M es una subvariedad slant no invariante de una variedad casi Hermítica N, verificando que*

$$\sigma(X, Y) = \frac{m}{m+2}\left\{g(X, Y)H^N + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} g(FX, H^N)FY + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} g(FY, H^N)FX\right\},$$

donde F es la componente tangente de J. Entonces $\mathbb{R} \times_f M$ es una subvariedad $*$-slant de $\mathbb{R} \times_f N$.

Demostración. En [15] se prueba que el producto cartesiano de una subvariedad slant por $\mathbb{R}$ sigue siendo una subvariedad slant, con el mismo ángulo. Dado que la componente vertical del producto warped es justamente el campo de estructura, y éste no afecta, por definición, al hecho de ser slant la subvariedad, el producto warped de $\mathbb{R}$ por una subvariedad slant también será slant.

Por otra parte, si tenemos una base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_m\}$ de M, la nueva base de $\mathbb{R} \times_f M$ será $\{\frac{1}{f}e_1, \ldots, \frac{1}{f}e_m\}$. De esta forma,

$$\sigma^*(\frac{1}{f}e_i, \frac{1}{f}e_i) = \frac{1}{f^2}\sigma^*(e_i, e_i) = \frac{1}{f^2}\sigma(e_i, e_i),$$

por lo que $H = \frac{m}{m+1}\frac{1}{f^2}H^N$.

Así,

$$\begin{aligned}\sigma^*(\bar{X},\bar{Y}) =& \frac{m+1}{m+2}\frac{1}{f^2}\left\{g(X,Y)H + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}g(FX,H)FY + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}g(FY,H)FX\right\} f^2 = \\ =& \frac{m+1}{m+2}\left\{(g_f(\bar{X},\bar{Y}) - \eta_f(\bar{X})\eta_f(\bar{Y}))H + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}g_f(\phi\bar{X},H)\phi\bar{Y}\right. \\ &\left. + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}g(\phi\bar{Y},H)\phi\bar{X}\right\},\end{aligned}$$

para todos $\bar{X}$, $\bar{Y}$ tangentes a $\mathbb{R}\times_f M$. Luego se cumple (3.1.16), teniendo en cuenta que $\alpha = 0$, pues $\mathbb{R}\times_f N$ es una variedad β-Kenmotsu, como ya hemos comentado. □

Ejemplo 3.1.13. *Cualquier subvariedad slant de un espacio de curvatura seccional holomorfa constante con una base ortonormal tal que*

$$\begin{array}{ll}\sigma(e_1,e_1) = 3\mu e_{1*}, & \sigma(e_2,e_2) = \cdots = \sigma(e_m,e_m) = \mu e_{1*}, \\ \sigma(e_1,e_j) = \mu e_{j^*}, & \sigma(e_j,e_k) = 0, \quad 2 \leq j \neq k \leq m,\end{array} \tag{3.1.25}$$

verifica las condiciones del lema. Y, de esta forma, podemos presentar ejemplos de subvariedades $*$-slant de cualquier dimension en una variedad β-Kenmotsu. Ahora bien, cabe preguntarse si existen ejemplos de subvariedades que verifiquen (3.1.25). La respuesta es que existen, al menos en dimensión dos.

En [27], B.-Y. Chen denominó special slant surfaces *a cualquier superficie slant M, dentro de una superficie Kaehleriana $\widetilde{M}^2$, tal que*

$$A_{e_3} = \begin{pmatrix} c\lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad A_{e_4} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

para cualquier constante c y cualquier función λ. Cualquiera de ellas verifica las condiciones del lema anterior.

Ejemplo 3.1.14. *Recordemos que las* esferas de Whitney *se definen como una familia de inmersiones Lagrangianas de la esfera unidad $\mathbb{S}^m$, centrada en el origen de $\mathbb{R}^{m+1}$, en $\mathbb{C}^m \cong \mathbb{R}^{2m}$ dada por*

$$(u_0,u_1,\ldots,u_m) \to \frac{r}{1+u_0^2}(u_1,\ldots,u_m,u_0u_1,\ldots,u_0u_m) + B, \tag{3.1.26}$$

donde r es un número positivo y B es un vector de $\mathbb{C}^m$. El número r y el vector B son llamados el radio *y el* centro *de la esfera de Whitney, respectivamente.*

Debido a que las esferas de Whitney en $\mathbb{C}^m$ son subvariedades slant ($\theta = \frac{\pi}{2}$) y verifican las condiciones del lema previo (ver [49]), haciendo un producto warped obtenemos sus respectivas subvariedades $*$-slant en una variedad β-Kenmotsu.

Por otra parte, también podemos presentar ejemplos de subvariedades $*$-slant de una variedad α-Sasakiana, usando deformaciones $\mathcal{D}$-homotéticas.

P. Alegre y A. Carriazo probaron en [4] que, dado un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $(\widetilde{M}(c), \phi, \xi, \eta, g)$, una deformación $\mathcal{D}$-homotética en el sentido de Olszak (ver [44]) dada por

$$\phi^* = \phi, \quad \xi^* = \frac{1}{a}\xi, \quad \eta^* = a\eta, \quad g^* = ag + (a^2 - b)\eta \otimes \eta,$$

donde a y b son constantes tales que $a \neq 0$ y $b > 0$, produce un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado con

$$f_1^* = \frac{1}{b}\frac{c+3}{4}, \quad f_2^* = f_3^* = \frac{1}{b}\left(\frac{c-1}{4} - \frac{a^2-b}{b}\right),$$

dotado de una estructura a/b-Sasakiana.

Veamos a continuación que las deformaciones $\mathcal{D}$-homotéticas en el sentido de Olszak respetan la estructura $*$-slant.

Lema 3.1.15. *Sea M^m una subvariedad $*$-slant de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$. Mediante una deformación $\mathcal{D}$-homotética en el sentido de Olszak, se tiene que M es una subvariedad $*$-slant de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado con estructura α-Sasakiana, con $\alpha = a/b$.*

Demostración. Como acabamos de comentar, después de la deformación obtenemos un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado, con estructura α-Sasakiana.

Además, g^* conserva las partes tangente y normal de ϕX. Entonces, si denotamos por $\phi^* X = T^* X + N^* X$ la descomposición de $\phi^* X$, se tiene que $T^* X = TX$. Así,

$$T^{*2}X = T^2 X = -\cos^2\theta(X + \eta(X)\xi) = -\cos^2\theta(X + \eta^*(X)\xi^*),$$

lo que quiere decir que M es una subvariedad slant de $(\widetilde{M}, \phi^*, \eta^*, \xi^*, g^*)$.

Por otra parte, si $\{e_1, ..., e_m, \xi\}$ es una base ortonormal de M en $(\widetilde{M}, g)$, entonces $\{\hat{e}_i = \frac{1}{\sqrt{b}}e_i, \xi\}$, $i = 1, \ldots, m$, es una base ortonormal de M en $(\widetilde{M}, g^*)$. Además, se tiene en [4] para una transformación $\mathcal{D}$-homotética que

$$\nabla^*_X Y = \nabla_X Y + \frac{2(a^2-b)}{2a^2} g(\phi X, \phi Y)\xi - \frac{2\alpha(a^2-b)}{2b}(\eta(Y)\phi X + \eta(X)\phi Y),$$

e igualando partes normales

$$\sigma^*(X,Y) = \sigma(X,Y) - \frac{2(a^2-b)}{2b}(\eta(Y)NX + \eta(X)NY).$$

Por tanto, $\sigma^*(\hat{e}_i, \hat{e}_i) = \sigma(e_i, e_i)$ y $H^* = \frac{1}{b}H$. Así,

$$\begin{aligned}\sigma^*(X,Y) \ = \ & \frac{m+1}{m+2}\left\{(g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y))\,H\right. \\ & - \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\omega_H(X) + \frac{m+2}{m+1}\eta(X)\right) NY \\ & - \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\omega_H(Y) + \frac{m+2}{m+1}\eta(Y)\right) NX \\ & \left. - \ \frac{a^2-b}{b}(\eta(Y)NX + \eta(X)NY)\right\}.\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}(g^*(X,Y) - \eta^*(X)\eta^*(Y))H^* = & (bg(X,Y) + (a^2-b)\eta(X)\eta(Y) - a^2\eta(X)\eta(Y))\frac{1}{b}H = \\ = & (g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y))H,\end{aligned}$$

$$g^*(\phi X, H^*) = bg(\phi X, \frac{1}{b}H) + (a^2-b)\eta(\phi X)\eta(H^*) = g(\phi X, H)$$

y

$$(1 + \frac{a^2-b}{b})\eta(X)NY = \frac{a^2}{b}\eta(X)NY = \frac{a}{b}\eta^*(X)NY,$$

por lo que

$$\begin{aligned}\sigma^*(X,Y) \ = \ & \frac{m+1}{m+2}\left\{(g^*(X,Y) - \eta^*(X)\eta^*(Y))\,H^*\right. \\ & + \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}g^*(\phi X, H^*) - \frac{a}{b}\frac{m+2}{m+1}\eta^*(X)\right) NY \\ & \left. + \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}g^*(\phi Y, H^*) - \frac{a}{b}\frac{m+2}{m+1}\eta^*(Y)\right) NX\right\},\end{aligned}$$

cumpliendo (3.1.16). □

Ejemplo 3.1.16. *Ya hemos comentado que en [12], D. E. Blair y A. Carriazo introdujeron la* esfera de Whitney de contacto *como la familia*

$$(u_0, u_1, \ldots, u_m) \to \frac{r}{1+u_0^2}(u_0u_1, \ldots, u_0u_m, u_1, \ldots, u_m, \frac{ru_0}{1+u_0^2} + C(1+u_0^2)) + B,$$

donde r es un número positivo, B es un vector de $\mathbb{R}^{2m+1}$ y C es una constante real. Además, probaron que si M^{m+1} es localmente isométrica al producto Riemanniano de una porción de una esfera de Whitney y $\mathbb{R}$, el caso de la igualdad de (3.1.23) se alcanza para cualquier $p \in M$. Así, si hacemos una deformación $\mathcal{D}$-homotética sobre la misma, obtenemos la respectiva subvariedad $*$-slant ($\theta = \frac{\pi}{2}$) en una variedad α-Sasakiana.

Finalmente, damos dos ejemplos de subvariedades minimales en $\mathbb{R}^5$ y $\mathbb{R}^9$, respectivamente, las cuales mediante las respectivas transformaciones $\mathcal{D}$-homotéticas pueden ser inmersas en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado con estructura α-Sasakiana.

Podemos observar que este capítulo está construido para subvariedades no minimales. Sin embargo, veamos en el siguiente lema que es posible extender el concepto de subvariedad $*$-slant para subvariedades minimales.

Lema 3.1.17. *Sea M^{m+1} una subvariedad $*$-slant de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$ con estructura (α, β) trans-Sasakiana, entonces la subvariedad M es minimal si y sólo si es totalmente geodésica de contacto.*

Demostración. Supongamos que M es minimal. En este caso, sabemos que $H \equiv 0$, por lo que teniendo en cuenta (3.1.16) podemos establecer que

$$\sigma(X, Y) = -\alpha\eta(X)NY - \alpha\eta(Y)NX = \eta(X)\sigma(Y, \xi) + \eta(Y)\sigma(X, \xi),$$

donde se ha usado (1.3.26), lo que significa que M es totalmente geodésica de contacto. Recíprocamente, si M es totalmente geodésica de contacto verifica (1.3.28), por lo que $\sigma(e_i, e_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, m$ debido a que la base $\{e_1, \ldots, e_m, \xi\}$ es ortonormal y $\sigma(\xi, \xi) = 0$ por (1.3.24). De esta forma, tenemos que

$$H = \frac{1}{m+1}\left[\sum_{i=1}^{m}\sigma(e_i, e_i) + \sigma(\xi, \xi)\right] = 0,$$

lo que significa que M es minimal. □

Ejemplo 3.1.18. *En [15, Ejemplos 3.7 y 3.12], se definen las siguientes subvariedades slant.*

La primera está definida para cualquier $\theta \in [0, \pi/2]$ como

$$x(u, v, t) = 2(ucos\theta, usin\theta, v, 0, t).$$

Es una subvariedad slant minimal tridimensional con ángulo slant θ en $\mathbb{R}^5$ con su estructura Sasakiana usual.

La segunda de ellas está definida para cualquier $\theta \in [0, \pi/2]$ como

$$x(u, v, w, s, t) = 2(u, 0, w, 0, vcos\theta, vsin\theta, scos\theta, ssin\theta, t).$$

Se trata de una subvariedad slant minimal de dimensión 5 con ángulo slant θ en $\mathbb{R}^9$ con su estructura Sasakiana usual.

Ambas son subvariedades $*$-slant ya que satisfacen el caso de la igualdad de (3.1.24) en cada punto $p \in M$. De esta forma, si hacemos una deformación $\mathcal{D}$-homotética obtendremos subvariedades $*$-slant en variedades α-Sasakianas.

3.1.2. La curvatura de Ricci

Siguiendo la misma línea, establecemos una relación entre otro de los principales invariantes intrínsecos, la curvatura de Ricci, y el principal invariante extrínseco, H sobre una *subvariedad $*$-slant* de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado. Este tema fue estudiado en primer lugar por B.-Y. Chen en [28], donde estableció la bien conocida desigualdad de Chen-Ricci para cualquier subvariedad Riemanniana m-dimensional de un espacio de curvatura seccional constante, $\widetilde{M}(c)$,

$$Ric(X) \leq (m-1)c + \frac{m^2}{4}\|H\|^2.$$

Posteriormente, estableció una desigualdad similar para subvariedades Lagrangianas en un espacio de curvatura seccional holomorfa constante, $\widetilde{M}(4c)$, en [29].

Nosotros estableceremos una igualdad que relacione la curvatura de Ricci con el cuadrado del módulo del vector curvatura media para subvariedades $*$-slant, y como corolario daremos cotas tanto inferior como superior de la curvatura de Ricci, en función del cuadrado del módulo de su vector curvatura media.

Teorema 3.1.19. *Sea M^{m+1} una subvariedad $*$-slant no invariante de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$ con estructura (α, β) trans-Sasakiana. Entonces, el módulo del cuadrado del vector curvatura media $\|H\|^2$ y la curvatura de Ricci de M para cualquier campo tangente unitario X ortogonal a ξ están relacionados por la siguiente expresión:*

$$\begin{aligned} Ric(X) &= \frac{(m+1)^2}{m+2}\left[\|H\|^2 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} g^2(NX, H)\right] + \\ &\quad + mf_1 + 3\cos^2\theta f_2 - f_3 - \alpha^2 \operatorname{sen}^2\theta. \end{aligned} \tag{3.1.27}$$

Demostración. Sea M^{m+1} una subvariedad slant de una variedad (α, β) trans-Sasakiana $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$. Sean $\{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1} = \xi, e_{1*}, \ldots, e_{m*}\}$ una referencia slant adaptada, que para el caso anti-invariante se trata simplemente de $\{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1} = \xi, \phi e_1, \ldots, \phi e_m\}$ y X un campo tangente unitario de M, ortogonal a ξ. Entonces, en virtud de (1.1.10) y (1.1.13), la curvatura de Ricci de M satisface la siguiente ecuación:

$$Ric(X) = \sum_{i=1}^{m+1} \widetilde{R}(X, e_i; e_i, X) - \sum_{i=1}^{m+1} g(\sigma(X, e_i), \sigma(X, e_i)) + g(\sigma(X, X), (m+1)H). \tag{3.1.28}$$

De (1.3.14), podemos calcular

$$\sum_{i=1}^{m+1} \widetilde{R}(X, e_i; e_i, X) = \sum_{i=1}^{m+1} [f_1\{g(e_i, e_i)g(X, X) - g(X, e_i)g(e_i, X)\}+$$
$$f_2 \{g(X, \phi e_i)g(\phi e_i, X) -$$
$$-g(e_i, \phi e_i)g(X, X) + 2g(X, \phi e_i)g(\phi e_i, X)\} +$$
$$f_3 \{\eta(X)\eta(e_i)g(e_i, X) - \eta(e_i)\eta(e_i)g(X, X)+$$
$$+g(X, e_i)\eta(X)\eta(e_i) - g(e_i, e_i)\eta(X)\eta(X)\}] = \tag{3.1.29}$$
$$= f_1 \left[\sum_{i=1}^{m+1} 1 - \sum_{i=1}^{m+1} g^2(X, e_i)\right] +$$
$$+ 3f_2 \sum_{i=1}^{m+1} g^2(\phi X, e_i) - f_3 \sum_{i=1}^{m+1} \eta^2(e_i)g(X, X) =$$
$$= mf_1 + 3\cos^2\theta f_2 - f_3.$$

Por otra parte, como M es una *subvariedad* $*$*-slant*, satisface (3.1.16), y así para cualquier campo tangente $e_i \neq \xi$ de la referencia slant adaptada que hemos tomado anteriormente, y teniendo en cuenta que X es unitario, obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{m} g(\sigma(X, e_i), \sigma(X, e_i)) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{m+1}{m+2}\right)^2 \left[g^2(X, e_i)\|H\|^2+\right.$$
$$+ \frac{1}{\operatorname{sen}^4\theta} g^2(\phi X, H)g(Ne_i, Ne_i)+$$
$$+ \frac{1}{\operatorname{sen}^4\theta} g^2(\phi e_i, H)g(NX, NX)+$$
$$+ \frac{2}{\operatorname{sen}^2\theta} g(X, e_i)g(\phi X, H)g(H, Ne_i)+$$
$$+ \frac{2}{\operatorname{sen}^2\theta} g(X, e_i)g(\phi e_i, H)g(H, NX)+$$

$$
\left.+\frac{2}{\operatorname{sen}^4\theta}g(\phi X,H)g(\phi e_i,H)g(Ne_i,NX)\right] =
$$

$$
\left(\frac{m+1}{m+2}\right)^2\left[\|H\|^2+\frac{m}{\operatorname{sen}^2\theta}g^2(NX,H)-\right.
$$

$$
-\frac{\operatorname{sen}^4\theta}{\operatorname{sen}^4\theta}\|H\|^2+\frac{2}{\operatorname{sen}^2\theta}g^2(NX,H)+ \tag{3.1.30}
$$

$$
\left.+\frac{2}{\operatorname{sen}^2\theta}g^2(NX,H)-\frac{2}{\operatorname{sen}^2\theta}g^2(NX,H)\right] =
$$

$$
=\left(\frac{m+1}{m+2}\right)^2\left[\frac{m+2}{\operatorname{sen}^2\theta}g^2(NX,H)\right].
$$

Ahora bien, en el caso de que $e_i=\xi$, al tener $\widetilde{M}$ estructura trans-Sasakiana, podemos obtener fácilmente:

$$
g(\sigma(X,\xi),\sigma(X,\xi))=g(-\alpha NX,-\alpha NX)=\alpha^2 g(NX,NX)=\alpha^2\operatorname{sen}^2\theta, \tag{3.1.31}
$$

teniendo en cuenta (1.3.26). Por otro lado, también tenemos:

$$
g(\sigma(X,X),(m+1)H)=\frac{(m+1)^2}{m+2}\left[\|H\|^2+\frac{2}{\operatorname{sen}^2\theta}g^2(NX,H)\right]. \tag{3.1.32}
$$

Entonces, sustituyendo (3.1.29), (3.1.30), (3.1.31) y (3.1.32) en (3.1.28), se tiene inmediatamente la igualdad del enunciado. □

Seguidamente, a partir de (3.1.27), podemos establecer en el siguiente corolario cotas inferior y superior de la curvatura de Ricci en función del cuadrado del vector curvatura media.

Corolario 3.1.20. *Sea M^{m+1} una subvariedad $*$-slant de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1,f_2,f_3)$ con estructura (α,β) trans-Sasakiana. Entonces, el módulo del cuadrado del vector curvatura media $\|H\|^2$ y la curvatura de Ricci de M para cualquier campo tangente unitario X ortogonal a ξ sa-*

tisfacen en cada punto las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}&\frac{(m+1)^2}{m+2}\|H\|^2 + mf_1 + 3\cos^2\theta f_2 - f_3 - \alpha^2 \operatorname{sen}^2\theta \leq Ric(X) \leq \\ \leq&\frac{(m+1)^2}{m+2}\left(1+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)\|H\|^2 + mf_1 + 3\cos^2\theta f_2 - f_3 - \alpha^2 \operatorname{sen}^2\theta.\end{aligned} \tag{3.1.33}$$

De nuevo, siguiendo la misma línea que en la sección anterior, podemos establecer como casos particulares los siguientes corolarios. Los dos primeros, tomando como variedad ambiente $\mathbb{R}^{2m+1}$ con su estructura Sasakiana habitual para los casos en que la subvariedad sea anti-invariante y slant propia, respectivamente, y el tercero para una subvariedad slant propia en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$.

Corolario 3.1.21. *Sea M^{m+1} una subvariedad $*$-slant ($\theta = \pi/2$) tangente al campo de estructura de $\mathbb{R}^{2m+1}$ con estructura Sasakiana. Entonces, el cuadrado del módulo de su vector curvatura media $\|H\|^2$ y su curvatura de Ricci para cualquier campo tangente unitario X de M ortogonal a ξ satisfacen en cada punto las siguientes desigualdades:*

$$\frac{(m+1)^2}{m+2}\|H\|^2 \leq Ric(X) \leq \frac{2(m+1)^2}{m+2}\|H\|^2.$$

Corolario 3.1.22. *Sea M^{m+1} una subvariedad $*$-slant de $\mathbb{R}^{2m+1}$ con estructura Sasakiana. Entonces, el cuadrado del módulo de su vector curvatura media $\|H\|^2$ y su curvatura de Ricci para cualquier campo tangente unitario X de M ortogonal a ξ satisfacen en cada punto las siguientes desigualdades:*

$$\frac{(m+1)^2}{m+2}\|H\|^2 - 2cos^2\theta \leq Ric(X) \leq \frac{(m+1)^2}{m+2}\left(1+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)\|H\|^2 - 2cos^2\theta.$$

Corolario 3.1.23. *Sea M^{m+1} una subvariedad $*$-slant de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$ con estructura Sasakiana. Entonces, el cuadrado del módulo de su vector curvatura media $\|H\|^2$ y su curvatura de Ricci para cualquier campo tangente unitario X de M ortogonal a ξ satisfacen en cada punto las siguientes desigualdades:*

$$\begin{aligned}&\frac{(m+1)^2}{m+2}\|H\|^2 + \frac{m(c+3)}{4} - \left(\frac{3(c-1)}{4}+1\right)\operatorname{sen}^2\theta + \frac{c-1}{2} \leq Ric(X) \leq \\ \leq&\frac{(m+1)^2}{m+2}\left(1+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)\|H\|^2 + \frac{m(c+3)}{4} - \left(\frac{3(c-1)}{4}+1\right)\operatorname{sen}^2\theta + \frac{c-1}{2}.\end{aligned}$$

Nota 3.1.24. *Obsérvese que los ejemplos comentados en la sección anterior sobre subvariedades $*$-slant satisfacen las condiciones del Teorema 3.1.19. Así, por ejemplo, para la primera subvariedad del Ejemplo 3.1.18 se tiene, según el Corolario 3.1.22, que para cualquier campo tangente unitario X, $Ric(X) = -2\cos^2\theta$.*

3.2. Forma de Maslov cerrada

En esta sección vamos a considerar una subvariedad slant propia, M^{m+1}, con ángulo slant θ, inmersa en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$ con estructura (α, β) trans-Sasakiana. De nuevo, aunque en [41], J. C. Marrero probó que si $m \geq 2$, $\widetilde{M}^{2m+1}$ es una variedad o bien α-Sasakiana o bien β-Kenmotsu, daremos los resultados, siempre que sea posible, para una variedad ambiente con estructura (α, β) trans-Sasakiana y analizaremos a partir de ahí los casos α-Sasakiano y β-Kenmotsu.

El objetivo principal de esta sección es estudiar cuándo la Forma de Maslov ω_H definida en (2.1.1) es una forma cerrada.

En primer lugar, tomamos una referencia slant adaptada construida siguiendo el procedimiento detallado en la Nota 2.1.7 y consideramos la 1-forma Θ dada por (2.1.2) y vamos a calcular dΘ cuando la variedad ambiente es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$ con estructura (α, β) trans-Sasakiana. Para ello, necesitamos el siguiente lema:

Lema 3.2.1. *Sea M^{m+1} una subvariedad slant propia de una variedad (α, β) trans-Sasakiana $\widetilde{M}^{2m+1}$. Entonces, respecto a una referencia slant adaptada, se verifica:*

$$\omega_{2i}^{(2j)^*} + \omega_{2i-1}^{(2j-1)^*} = \omega_{2j}^{(2i)^*} + \omega_{2j-1}^{(2i-1)^*}, \tag{3.2.1}$$

$$\omega_{(2i)^*}^{(2j)^*} - \omega_{(2i-1)^*}^{(2j-1)^*} = \omega_{2i}^{2j} - \omega_{2i-1}^{2j-1}, \tag{3.2.2}$$

$$\omega_{2j}^{2i-1} - \omega_{(2j)^*}^{(2i-1)^*} = \omega_{2i}^{2j-1} - \omega_{(2i)^*}^{(2j-1)^*}, \tag{3.2.3}$$

para todos $i, j = 1, \ldots, m$.

Demostración. Para cada $i, j = 1, \ldots, m$, se tiene

$$g(\phi e_{2i-1}, e_{2j-1}) = 0. \tag{3.2.4}$$

Así, calculando la derivada de (3.2.4) respecto a un campo tangente X cualquiera, resulta:

$$0 = Xg(\phi e_{2i-1}, e_{2j-1}) = g(\widetilde{\nabla}_X \phi e_{2i-1}, e_{2j-1}) + g(\phi e_{2i-1}, \widetilde{\nabla}_X e_{2j-1}). \tag{3.2.5}$$

Pero, al ser $\widetilde{M}$ trans-Sasakiana, en virtud de (1.3.12) se tiene que

$$\widetilde{\nabla}_X \phi e_{2i-1} = \phi \widetilde{\nabla}_X e_{2i-1} + \alpha g(X, e_{2i-1})\xi + \beta g(\phi X, e_{2i-1})\xi.$$

Así,

$$\begin{aligned} g(\widetilde{\nabla}_X \phi e_{2i-1}, e_{2j-1}) =& g(\phi \widetilde{\nabla}_X e_{2i-1}, e_{2j-1}) = -g(\widetilde{\nabla}_X e_{2i-1}, \phi e_{2j-1}) = \\ =& -g(\nabla_X e_{2i-1}, T e_{2j-1}) - g(\sigma(X, e_{2i-1}), N e_{2j-1}), \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

donde se ha usado la Fórmula de Gauss (1.1.1). Por otra parte:

$$g(\phi e_{2i-1}, \widetilde{\nabla}_X e_{2j-1}) = g(Te_{2i-1}, \nabla_X e_{2j-1}) + g(Ne_{2i-1}, \sigma(X, e_{2j-1})). \tag{3.2.7}$$

Así, de (3.2.5), (3.2.6) y (3.2.7) se sigue que

$$\begin{aligned} 0 = & -\cos\theta(g(\nabla_X e_{2i-1}, e_{2j}) - g(\nabla_X e_{2j-1}, e_{2i})) + \\ & + \operatorname{sen}\theta(g(e_{(2i-1)^*}, \sigma(X, e_{2j-1})) - g(e_{(2j-1)^*}, \sigma(X, e_{2i-1})), \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

de donde

$$\cot\theta(\omega_{2i-1}^{2j} - \omega_{2j-1}^{2i})(X) = (\omega_{2j-1}^{(2i-1)^*} - \omega_{2i-1}^{(2j-1)^*})(X). \tag{3.2.9}$$

De la misma forma, si partimos de $g(\phi e_{2i}, e_{2j}) = 0$ y derivamos, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 = & Xg(\phi e_{2i}, e_{2j}) = g(\widetilde{\nabla}_X \phi e_{2i}, e_{2j}) + g(\phi e_{2i}, \widetilde{\nabla}_X e_{2j}) = \\ = & -g(\nabla_X e_{2i-1}, Te_{2j-1}) - g(\sigma(X, e_{2i-1}), Ne_{2j-1}) + \\ & + g(Te_{2i-1}, \nabla_X e_{2j-1}) + g(Ne_{2i-1}, \sigma(X, e_{2j-1})) = \\ = & -\cos\theta(g(\nabla_X e_{2i-1}, e_{2j}) - g(\nabla_X e_{2j-1}, e_{2i})) + \\ & + \operatorname{sen}\theta(g(e_{(2i-1)^*}, \sigma(X, e_{2j-1})) - g(e_{(2j-1)^*}, \sigma(X, e_{2i-1})), \end{aligned}$$

donde se ha vuelto a usar la Fórmula de Gauss y que $\widetilde{M}$ tiene estructura (α, β) trans-Sasakiana. De esta forma, obtenemos

$$\cot\theta(\omega_{2i}^{2j-1} - \omega_{2j}^{2i-1})(X) = (\omega_{2i}^{(2j)^*} - \omega_{2j}^{(2i)^*})(X). \tag{3.2.10}$$

Luego, de (3.2.9) y (3.2.10) se obtiene que $\omega_{2j-1}^{(2i-1)^*} - \omega_{2i-1}^{(2j-1)^*} = \omega_{2i}^{(2j)^*} - \omega_{2j}^{(2i)^*}$ con lo que se llega a (3.2.1).

Usando el mismo procedimiento, si partimos de $g(\phi e_{2i-1}, e_{(2j-1)^*}) = \operatorname{sen}\theta\delta_{ij}$ y derivamos esta ecuación respecto de X, obtenemos que

$$\cot\theta(\omega_{2i-1}^{(2j)^*} - \omega_{2i}^{(2j-1)^*})(X) = -(\omega_{2i-1}^{2j-1} + \omega_{(2j-1)^*}^{(2i-1)^*})(X). \tag{3.2.11}$$

Por otra parte, como $g(\phi e_{2i}, e_{(2j)^*}) = \operatorname{sen}\theta\delta_{ij}$, si derivamos esta ecuación respecto de X llegamos a

$$\cot\theta(\omega_{2i}^{(2j-1)^*} - \omega_{2j-1}^{(2j)^*})(X) = (\omega_{2i}^{2j} + \omega_{(2j)^*}^{(2i)^*})(X). \tag{3.2.12}$$

Así, de (3.2.11) y (3.2.12) llegamos a (3.2.2).

Finalmente, si partimos de $g(\phi e_{(2i)^*}, e_{(2j)^*}) = 0$ y derivamos esta ecuación respecto de X, obtenemos que

$$\cot\theta(\omega_{(2i)^*}^{(2j-1)^*} - \omega_{(2j)^*}^{(2i-1)^*})(X) = (\omega_{2i}^{(2j)^*} + \omega_{2j}^{(2i)^*})(X). \tag{3.2.13}$$

De esta última expresión (3.2.13) junto con (3.2.10) obtenemos (3.2.3), concluyendo la demostración del lema. □

A continuación, nuestro objetivo es calcular $\mathrm{d}\Theta$, para estudiar cuándo es cerrada dicha 1-forma Θ. Si hacemos la diferencial directamente de (2.1.2), resulta que

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Theta = \sum_{i=1}^{m} d\omega_i^{i^*} &= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{A}\omega_A^{i^*}\wedge\omega_i^A + \sum_{i=1}^{m}\Omega_i^{i^*}\\ &= -\sum_{j=1}^{k}\sum_{A}\omega_A^{(2j-1)^*}\wedge\omega_{2j-1}^A + \sum_{j=1}^{k}\Omega_{2j-1}^{(2j-1)^*} -\\ &\quad -\sum_{j=1}^{k}\sum_{A}\omega_A^{(2j)^*}\wedge\omega_{2j}^A + \sum_{j=1}^{k}\Omega_{2j}^{(2j)^*},\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

en virtud de las ecuaciones de estructura (1.1.5). Determinemos en primer lugar las formas de curvatura $\Omega_{2j-1}^{(2j-1)^*}$ y $\Omega_{2j}^{(2j)^*}$:

Lema 3.2.2. *Sea M^{m+1} una subvariedad slant propia de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$ con estructura (α, β) trans-Sasakiana. Entonces, respecto a una referencia slant adaptada, se verifica*

$$\begin{aligned}\Omega_{2j-1}^{(2j-1)^*} =& f_2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta(-\omega^{2j-1}\wedge\omega^{2j} + \omega^{(2j-1)^*}\wedge\omega^{(2j)^*}) +\\ & f_2\cos^2\theta\omega^{2j}\wedge\omega^{(2j)^*} - (f_1 + f_2\operatorname{sen}^2\theta)\omega^{2j-1}\wedge\omega^{(2j-1)^*} +\\ & 2f_2\sum_{p=1}^{k}\{\operatorname{sen}\theta\cos\theta(-\omega^{2p-1}\wedge\omega^{2p} + \omega^{(2p-1)^*}\wedge\omega^{(2p)^*}) -\\ & \operatorname{sen}^2\theta(\omega^{2p}\wedge\omega^{(2p)^*} + \omega^{2p-1}\wedge\omega^{(2p-1)^*})\},\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{2j}^{(2j)^*} =& f_2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta(-\omega^{2j-1}\wedge\omega^{2j} + \omega^{(2j-1)^*}\wedge\omega^{(2j)^*}) -\\ & (f_1 + f_2\operatorname{sen}^2\theta)\omega^{2j}\wedge\omega^{(2j)^*} + f_2\cos^2\theta\omega^{2j-1}\wedge\omega^{(2j-1)^*} +\\ & 2f_2\sum_{p=1}^{k}\{\operatorname{sen}\theta\cos\theta(-\omega^{2p-1}\wedge\omega^{2p} + \omega^{(2p-1)^*}\wedge\omega^{(2p)^*}) -\\ & \operatorname{sen}^2\theta(\omega^{2p}\wedge\omega^{(2p)^*} + \omega^{2p-1}\wedge\omega^{(2p-1)^*})\},\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

para todo $j = 1, \ldots, k$, donde θ denota el ángulo slant de M.

Demostración. Partiendo de (1.1.5) resulta que

$$
\begin{aligned}
&2\Omega_{2j}^{(2j)^*} = \sum_{C,D} \widetilde{R}(e_C, e_D; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^C \wedge \omega^D = \\
&\sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{2p}, e_{2q}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{2p} \wedge \omega^{2q} + \sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{2p}, e_{2q-1}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{2p} \wedge \omega^{2q-1} + \\
&\sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{2p}, e_{(2q)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{2p} \wedge \omega^{(2q)^*} + \sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{2p}, e_{(2q-1)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{2p} \wedge \omega^{(2q-1)^*} + \\
&\sum_{p=1}^{k} \widetilde{R}(e_{2p}, \xi; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{2p} \wedge \eta + \sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{2p-1}, e_{2q}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{2p-1} \wedge \omega^{2q} + \\
&\sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{2p-1}, e_{2q-1}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{2p-1} \wedge \omega^{2q-1} + \sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{2p-1}, e_{(2q)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{2p-1} \wedge \omega^{(2q)^*} + \\
&\sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{2p-1}, e_{(2q-1)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{2p-1} \wedge \omega^{(2q-1)^*} + \sum_{p=1}^{k} \widetilde{R}(e_{2p-1}, \xi; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{2p-1} \wedge \eta + \\
&\sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{(2p)^*}, e_{2q}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{(2p)^*} \wedge \omega^{2q} + \sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{(2p)^*}, e_{2q-1}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{(2p)^*} \wedge \omega^{2q-1} + \\
&\sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{(2p)^*}, e_{(2q)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{(2p)^*} \wedge \omega^{(2q)^*} + \sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{(2p)^*}, e_{(2q-1)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{(2p)^*} \wedge \omega^{(2q-1)^*} + \\
&\sum_{p=1}^{k} \widetilde{R}(e_{(2p)^*}, \xi; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{(2p)^*} \wedge \eta + \sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{(2p-1)^*}, e_{2q}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{(2p-1)^*} \wedge \omega^{2q} + \\
&\sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{(2p-1)^*}, e_{2q-1}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{(2p-1)^*} \wedge \omega^{2q-1} + \sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{(2p-1)^*}, e_{(2q)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{(2p-1)^*} \wedge \omega^{(2q)^*} + \\
&\sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{(2p-1)^*}, e_{(2q-1)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{(2p-1)^*} \wedge \omega^{(2q-1)^*} + \sum_{p=1}^{k} \widetilde{R}(e_{(2p-1)^*}, \xi; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{(2p-1)^*} \wedge \eta + \\
&\sum_{q=1}^{k} \widetilde{R}(\xi, e_{2q}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\eta \wedge \omega^{2q} + \sum_{q=1}^{k} \widetilde{R}(\xi, e_{2q-1}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\eta \wedge \omega^{2q-1} + \\
&\sum_{q=1}^{k} \widetilde{R}(\xi, e_{(2q)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\eta \wedge \omega^{(2q)^*} + \sum_{q=1}^{k} \widetilde{R}(\xi, e_{(2q-1)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\eta \wedge \omega^{(2q-1)^*} + \\
&\widetilde{R}(\xi, \xi; e_{2j}, e_{(2j)^*})\eta \wedge \eta.
\end{aligned}
\tag{3.2.17}
$$

Calculemos ahora, a partir de (1.3.14), los distintos coeficientes de (3.2.17):

$$\widetilde{R}(e_{2p}, e_{2q}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{3.2.18}$$

$$\widetilde{R}(e_{2p}, e_{2q-1}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = f_2(\cos\theta\delta_{jq}\operatorname{sen}\theta\delta_{jp} + 2\cos\theta\delta_{pq}\operatorname{sen}\theta), \tag{3.2.19}$$

$$\widetilde{R}(e_{2p}, e_{(2q)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = -f_1\delta_{jp}\delta_{jq} + f_2(-\operatorname{sen}^2\theta\delta_{jq}\delta_{jp} - 2\operatorname{sen}^2\theta\delta_{pq}), \tag{3.2.20}$$

$$\widetilde{R}(e_{2p}, e_{(2q-1)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{3.2.21}$$

$$\widetilde{R}(e_{2p}, \xi; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{3.2.22}$$

$$\widetilde{R}(e_{2p-1}, e_{2q}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = f_2(-\cos\theta\delta_{jp}\operatorname{sen}\theta\delta_{jq} - 2\cos\theta\delta_{pq}\operatorname{sen}\theta), \tag{3.2.23}$$

$$\widetilde{R}(e_{2p-1}, e_{2q-1}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{3.2.24}$$

$$\widetilde{R}(e_{2p-1}, e_{(2q)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{3.2.25}$$

$$\widetilde{R}(e_{2p-1}, e_{(2q-1)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = f_2(\cos^2\theta\delta_{jp}\delta_{jq} - 2\operatorname{sen}^2\theta\delta_{pq}), \tag{3.2.26}$$

$$\widetilde{R}(e_{2p-1}, \xi; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{3.2.27}$$

$$\widetilde{R}(e_{(2p)^*}, e_{2q}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = f_2(\operatorname{sen}^2\theta\delta_{jp}\delta_{jq} + 2\operatorname{sen}^2\theta\delta_{pq}) + f_1(\delta_{jp}\delta_{jq}), \tag{3.2.28}$$

$$\widetilde{R}(e_{(2p)^*}, e_{2q-1}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{3.2.29}$$

$$\widetilde{R}(e_{(2p)^*}, e_{(2q)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{3.2.30}$$

$$\widetilde{R}(e_{(2p)^*}, e_{(2q-1)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = f_2(-\operatorname{sen}\theta\cos\theta\delta_{jp}\delta_{jq} - 2\cos\theta\delta_{pq}\operatorname{sen}\theta), \tag{3.2.31}$$

$$\widetilde{R}(e_{(2p)^*}, \xi; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{3.2.32}$$

$$\widetilde{R}(e_{(2p-1)^*}, e_{2q}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{3.2.33}$$

$$\widetilde{R}(e_{(2p-1)^*}, e_{2q-1}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = f_2(-\cos^2\theta\delta_{jp}\delta_{jq} + 2\operatorname{sen}^2\theta\delta_{pq}), \tag{3.2.34}$$

$$\widetilde{R}(e_{(2p-1)^*}, e_{(2q)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = f_2(\operatorname{sen}\theta\cos\theta\delta_{jp}\delta_{jq} + 2\cos\theta\delta_{pq}\operatorname{sen}\theta), \tag{3.2.35}$$

$$\widetilde{R}(e_{(2p-1)^*}, e_{(2q-1)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{3.2.36}$$

$$\widetilde{R}(e_{(2p-1)^*}, \xi; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{3.2.37}$$

$$\widetilde{R}(\xi, e_{2q}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{3.2.38}$$

$$\widetilde{R}(\xi, e_{2q-1}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{3.2.39}$$

$$\widetilde{R}(\xi, e_{(2q)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{3.2.40}$$

$$\widetilde{R}(\xi, e_{(2q-1)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{3.2.41}$$

$$\widetilde{R}(\xi, \xi; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{3.2.42}$$

Así, de (3.2.17)-(3.2.42), obtenemos que

$$
\begin{aligned}
2\Omega_{2j}^{(2j)^*} = &\sum_{p,q=1}^{k} f_2(\cos\theta\delta_{jq}\operatorname{sen}\theta\delta_{jp} + 2\cos\theta\delta_{pq}\operatorname{sen}\theta)\omega^{2p}\wedge\omega^{2q-1} + \\
&\sum_{p,q=1}^{k} -f_1\delta_{jp}\delta_{jq} + f_2(-\operatorname{sen}^2\theta\delta_{jq}\delta_{jp} - 2\operatorname{sen}^2\theta\delta_{pq})\omega^{2p}\wedge\omega^{(2q)^*} + \\
&\sum_{p,q=1}^{k} f_2(-\cos\theta\delta_{jp}\operatorname{sen}\theta\delta_{jq} - 2\cos\theta\delta_{pq}\operatorname{sen}\theta)\omega^{2p-1}\wedge\omega^{2q} + \\
&\sum_{p,q=1}^{k} f_2(\cos^2\theta\delta_{jp}\delta_{jq} - 2\operatorname{sen}^2\theta\delta_{pq})\omega^{2p-1}\wedge\omega^{(2q-1)^*} + \\
&\sum_{p,q=1}^{k} f_2(\operatorname{sen}^2\theta\delta_{jp}\delta_{jq} + 2\operatorname{sen}^2\theta\delta_{pq}) + f_1(\delta_{jp}\delta_{jq})\omega^{(2p)^*}\wedge\omega^{2q} + \\
&\sum_{p,q=1}^{k} f_2(-\operatorname{sen}\theta\cos\theta\delta_{jp}\delta_{jq} - 2\cos\theta\delta_{pq}\operatorname{sen}\theta)\omega^{(2p)^*}\wedge\omega^{(2q-1)^*} + \\
&\sum_{p,q=1}^{k} f_2(-\cos^2\theta\delta_{jp}\delta_{jq} + 2\operatorname{sen}^2\theta\delta_{pq})\omega^{(2p-1)^*}\wedge\omega^{2q-1} + \\
&\sum_{p,q=1}^{k} f_2(\operatorname{sen}\theta\cos\theta\delta_{jp}\delta_{jq} + 2\cos\theta\delta_{pq}\operatorname{sen}\theta)\omega^{(2p-1)^*}\wedge\omega^{(2q)^*} =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= &-2f_2\sum_{p=1}^{k}(\cos\theta\operatorname{sen}\theta\delta_{jp} + 2\cos\theta\operatorname{sen}\theta)\omega^{2p-1}\wedge\omega^{2p} + \\
&2\sum_{p=1}^{k} -f_1\delta_{jp} + f_2(-\operatorname{sen}^2\theta\delta_{jp} - 2\operatorname{sen}^2\theta)\omega^{2p}\wedge\omega^{(2p)^*} + \\
&2\sum_{p=1}^{k} f_2(\cos^2\theta\delta_{jp} - 2\operatorname{sen}^2\theta)\omega^{2p-1}\wedge\omega^{(2p-1)^*} + \\
&2\sum_{p=1}^{k} f_2(\operatorname{sen}\theta\cos\theta\delta_{jp} + 2\cos\theta\operatorname{sen}\theta)\omega^{(2p-1)^*}\wedge\omega^{(2p)^*},
\end{aligned}
\tag{3.2.43}
$$

lo que implica que

$$
\begin{aligned}
2\Omega_{2j}^{(2j)^*} =& 2f_2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta(-\omega^{2j-1}\wedge\omega^{2j}+\omega^{(2j-1)^*}\wedge\omega^{(2j)^*})- \\
& 2(f_1+f_2\operatorname{sen}^2\theta)\omega^{2j}\wedge\omega^{(2j)^*}+f_2\cos^2\theta\omega^{2j-1}\wedge\omega^{(2j-1)^*}+ \\
& 4f_2\sum_{p=1}^{k}\{\operatorname{sen}\theta\cos\theta(-\omega^{2p-1}\wedge\omega^{2p}+\omega^{(2p-1)^*}\wedge\omega^{(2p)^*})- \\
& \operatorname{sen}^2\theta(\omega^{2p}\wedge\omega^{(2p)^*}+\omega^{2p-1}\wedge\omega^{(2p-1)^*})\},
\end{aligned}
$$

de donde llegamos inmediatamente a (3.2.16). Análogamente se demuestra (3.2.15), con lo que queda demostrado el lema. □

Por tanto, ya podemos calcular la diferencial de la 1-forma Θ.

Teorema 3.2.3. *Sea M^{m+1} una subvariedad slant propia de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1,f_2,f_3)$ con estructura (α,β) trans-Sasakiana. Entonces, la 1-forma Θ dada por (2.1.2) verifica*

$$
\begin{aligned}
d\Theta =& -2\operatorname{sen}\theta\cos\theta(\alpha^2+(m+1)f_2)\left(\sum_{j=1}^{k}\omega^{2j-1}\wedge\omega^{2j}-\sum_{j=1}^{k}\omega^{(2j-1)^*}\wedge\omega^{(2j)^*}\right) \\
&+(-2\operatorname{sen}^2\theta(\alpha^2+(m+1)f_2)+\alpha^2-f_1+f_2-\beta^2)\left(\sum_{j=1}^{k}\omega^{2j-1}\wedge\omega^{(2j-1)^*}+\sum_{j=1}^{k}\omega^{2j}\wedge\omega^{(2j)^*}\right),
\end{aligned}
\tag{3.2.44}
$$

donde θ denota el ángulo slant de M.

Demostración. Calculamos en primer lugar, a partir de (3.2.15) y de (3.2.16):

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k}\Omega_{2j-1}^{(2j-1)^*}+\sum_{j=1}^{k}\Omega_{2j}^{(2j)^*} =& \sum_{j=1}^{k}\{f_2\operatorname{sen}\theta\cos\theta(-\omega^{2j-1}\wedge\omega^{2j}+\omega^{(2j-1)^*}\wedge\omega^{(2j)^*})+ \\
&+f_2\cos^2\theta\omega^{2j}\wedge\omega^{(2j)^*}-(f_1+f_2\operatorname{sen}^2\theta)\omega^{2j-1}\wedge\omega^{(2j-1)^*}\}+ \\
&+2f_2\sum_{p=1}^{k}\{\operatorname{sen}\theta\cos\theta(-\omega^{2p-1}\wedge\omega^{2p}+\omega^{(2p-1)^*}\wedge\omega^{(2p)^*})-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \operatorname{sen}^2\theta(\omega^{2p}\wedge\omega^{(2p)^*}+\omega^{2p-1}\wedge\omega^{(2p-1)^*})\}+\\
&+\sum_{j=1}^{k}\left\{f_2\operatorname{sen}\theta\cos\theta(-\omega^{2j-1}\wedge\omega^{2j}+\omega^{(2j-1)^*}\wedge\omega^{(2j)^*})-\right.\\
&\left.-(f_1+f_2\operatorname{sen}^2\theta)\omega^{2j}\wedge\omega^{(2j)^*}+f_2\cos^2\theta\omega^{2j-1}\wedge\omega^{(2j-1)^*}\right\}+\\
&+2f_2\sum_{p=1}^{k}\{\operatorname{sen}\theta\cos\theta(-\omega^{2p-1}\wedge\omega^{2p}+\omega^{(2p-1)^*}\wedge\omega^{(2p)^*})-\\
&-\operatorname{sen}^2\theta(\omega^{2p}\wedge\omega^{(2p)^*}+\omega^{2p-1}\wedge\omega^{(2p-1)^*})\}=
\end{aligned}
\tag{3.2.45}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\sum_{j=1}^{k}\left\{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta(m+1)f_2(\omega^{(2j-1)^*}\wedge\omega^{(2j)^*}-\omega^{2j-1}\wedge\omega^{2j})+\right.\\
&\left.+(-f_2\operatorname{sen}^2\theta(2m+1)+f_2\cos^2\theta-f_1)(\omega^{2j}\wedge\omega^{(2j)^*}+\omega^{2j-1}\wedge\omega^{(2j-1)^*})\right\}.
\end{aligned}
$$

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
&-\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{A}\omega_A^{(2j-1)^*}\wedge\omega_{2j-1}^A+\sum_{j=1}^{k}\sum_{A}\omega_A^{(2j)^*}\wedge\omega_{2j}^A\right)=\\
&-\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{k}\omega_{2j-1}^{(2i-1)^*}\wedge\omega_{2i-1}^{2j-1}+\sum_{j=1}^{k}\omega_{2j}^{(2i-1)^*}\wedge\omega_{2i-1}^{2j}+\right.\\
&\left.+\sum_{j=1}^{k}\omega_{(2j-1)^*}^{(2i-1)^*}\wedge\omega_{2i-1}^{(2j-1)^*}+\sum_{j=1}^{k}\omega_{(2j)^*}^{(2i-1)^*}\wedge\omega_{2i-1}^{(2j)^*}+\omega_\xi^{(2i-1)^*}\wedge\omega_{2i-1}^{\xi}\right)-\\
&-\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{k}\omega_{2j-1}^{(2i)^*}\wedge\omega_{2i}^{2j-1}+\sum_{j=1}^{k}\omega_{2j}^{(2i)^*}\wedge\omega_{2i}^{2j}+\right.\\
&\left.+\sum_{j=1}^{k}\omega_{(2j-1)^*}^{(2i)^*}\wedge\omega_{2i}^{(2j-1)^*}+\sum_{j=1}^{k}\omega_{(2j)^*}^{(2i)^*}\wedge\omega_{2i}^{(2j)^*}+\omega_\xi^{(2i)^*}\wedge\omega_{2i}^{\xi}\right).
\end{aligned}
\tag{3.2.46}
$$

Ahora bien, por el Lema 3.2.1 y siguiendo los mismos pasos de [26, Teorema 3.1], llegamos a

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{k}\omega_{2j-1}^{(2i-1)^*}\wedge\omega_{2i-1}^{2j-1}+\sum_{i,j=1}^{k}\omega_{(2j-1)^*}^{(2i-1)^*}\wedge\omega_{2i-1}^{(2j-1)^*}+\\
+&\sum_{i,j=1}^{k}\omega_{2j}^{(2i)^*}\wedge\omega_{2i}^{2j}+\sum_{i,j=1}^{k}\omega_{(2j)^*}^{(2i)^*}\wedge\omega_{2i}^{(2j)^*}=0.
\end{aligned}
\tag{3.2.47}
$$

De la misma forma, obtenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{k}\omega_{2j}^{(2i-1)^*}\wedge\omega_{2i-1}^{2j}+\sum_{i,j=1}^{k}\omega_{(2j)^*}^{(2i-1)^*}\wedge\omega_{2i-1}^{(2j)^*}+\\+\sum_{i,j=1}^{k}\omega_{2j-1}^{(2i)^*}\wedge\omega_{2i}^{2j-1}+\sum_{i,j=1}^{k}\omega_{(2j-1)^*}^{(2i)^*}\wedge\omega_{2i}^{(2j-1)^*}=0.\end{aligned}\tag{3.2.48}$$

Ahora bien, considerando un campo X cualquiera, teniendo en cuenta (1.3.13),

$$\begin{aligned}\omega_\xi^{(2j)^*}(X)=&g(\widetilde{\nabla}_X\xi,e_{(2j)^*})=\\=&g(-\alpha\phi X+\beta(X-\eta(X)\xi),e_{(2j)^*})=\\=&-\alpha g(e_{(2j)^*},\phi X)+\beta g(e_{(2j)^*},X)=\alpha g(\phi e_{(2j)^*},X)+\beta g(e_{(2j)^*},X)=\\=&-\alpha\operatorname{sen}\theta g(e_{2j},X)+\alpha\cos\theta g(e_{(2j-1)^*},X)+\beta g(e_{(2j)^*},X),\end{aligned}$$

por lo que $\omega_\xi^{(2j)^*}=\alpha(\cos\theta\omega^{(2j-1)^*}-\operatorname{sen}\theta\omega^{2j})+\beta\omega^{(2j)^*}$. Análogamente,

$$\begin{aligned}\omega_{2j}^{\xi}(X)=&g(\widetilde{\nabla}_X e_{2j},\xi)=-g(e_{2j},\widetilde{\nabla}_X\xi)=\\=&-g(e_{2j},-\alpha\phi X+\beta(X-\eta(X)\xi))=\\=&\alpha g(e_{2j},\phi X)-\beta g(e_{2j},X)=-\alpha g(\phi e_{2j},X)-\beta g(e_{2j},X)=\\=&-\alpha\operatorname{sen}\theta g(e_{(2j)^*},X)+\alpha\cos\theta g(e_{2j-1},X)-\beta g(e_{2j},X),\end{aligned}$$

de donde $\omega_{2j}^{\xi}=\alpha(\cos\theta\omega^{2j-1}-\operatorname{sen}\theta\omega^{(2j)^*})-\beta\omega^{2j}$. Luego,

$$\begin{aligned}\omega_\xi^{(2j)^*}\wedge\omega_{2j}^{\xi}=&\alpha^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\omega^{2j-1}\wedge\omega^{2j}+(\alpha^2\operatorname{sen}^2\theta+\beta^2)\omega^{2j}\wedge\omega^{(2j)^*}-\\&-\alpha^2\cos^2\theta\omega^{2j-1}\wedge\omega^{(2j-1)^*}-\alpha^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\omega^{(2j-1)^*}\wedge\omega^{(2j)^*}.\end{aligned}$$

Análogamente se tiene que

$$\begin{aligned}\omega_\xi^{(2j-1)^*}\wedge\omega_{2j-1}^{\xi}=&\alpha^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\omega^{2j-1}\wedge\omega^{2j}+(\alpha^2\operatorname{sen}^2\theta+\beta^2)\omega^{2j-1}\wedge\omega^{(2j-1)^*}-\\&-\alpha^2\cos^2\theta\omega^{2j}\wedge\omega^{(2j)^*}-\alpha^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\omega^{(2j-1)^*}\wedge\omega^{(2j)^*}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}-\sum_{j=1}^{k}(\omega_\xi^{(2j-1)^*}\wedge\omega_{2j-1}^{\xi}+\omega_\xi^{(2j)^*}\wedge\omega_{2j}^{\xi})=-2\alpha^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\sum_{j=1}^{k}\{\omega^{2j-1}\wedge\omega^{2j}+\\+(\alpha^2(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta)-\beta^2)(\omega^{2j-1}\wedge\omega^{(2j-1)^*}+\omega^{2j}\wedge\omega^{(2j)^*})+\\+2\alpha^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\omega^{(2j-1)^*}\wedge\omega^{(2j)^*}\}.\end{aligned}\tag{3.2.49}$$

Finalmente, (3.2.44) se deduce de (3.2.14) y de (3.2.45)-(3.2.49). □

En los siguientes corolarios vamos a analizar cuándo la 1-forma Θ dada por (2.1.2) es cerrada, distinguiendo los casos en que la variedad ambiente $\widetilde{M}^{2m+1}$ tenga estructura α-Sasakiana o β-Kenmotsu.

Corolario 3.2.4. *Sea M^{m+1} una subvariedad slant propia de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$ con estructura α-Sasakiana. Entonces, la 1-forma Θ dada por (2.1.2) es cerrada si y sólo si*

$$f_1 + mf_2 = 0. \tag{3.2.50}$$

Además, en dicho caso, tendríamos que $f_2 = f_3$.

Demostración. Como $\widetilde{M}^{2m+1}$ es α-Sasakiana, tenemos que $\mathrm{d}\Theta = 0$ si y sólo si $\alpha^2 + (m+1)f_2 = 0$ y $\alpha^2 - f_1 + f_2 = 0$. Ahora bien, la demostración es inmediata según [5, Teorema 4.2], el cual nos dice que si $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$ es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado con estructura α-Sasakiana ($\alpha \neq 0$), entonces f_1, f_2, f_3 son funciones constantes tales que $f_1 - \alpha^2 = f_2 = f_3$. □

Nota 3.2.5. *Podemos comprobar que en el caso de que la variedad ambiente sea un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$, llegamos a que Θ es cerrada si y sólo si*

$$c = \frac{m-3}{m+1},$$

tal como aparece en [19]. Para ello, basta tomar $f_1 = \frac{c+3}{4}$ y $f_2 = \frac{c-1}{4}$ y sustituir en (3.2.50). Además, este caso coincide con el obtenido en el Corolario 2.1.5 para el caso anti-invariante.

Corolario 3.2.6. *Sea M^{m+1} una subvariedad slant propia de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$ con estructura β-Kenmotsu. Entonces, la 1-forma Θ dada por (2.1.2) es cerrada si y sólo si*

$$f_1 = -\beta^2 \qquad y \qquad f_2 = 0.$$

Además, en dicho caso, tendríamos que $f_3 = \xi(\beta)$.

Demostración. La prueba es inmediata teniendo en cuenta que $\widetilde{M}^{2m+1}$ es β-Kenmotsu y [5, Proposición 4.3], la cual nos dice que si $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$ es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado con estructura β-Kenmotsu, entonces β sólo depende de la dirección de ξ y se satisface la ecuación $f_1 - f_3 + \xi(\beta) + \beta^2 = 0$. □

Nota 3.2.7. *Obsérvese que si M^{m+1} es una subvariedad slant propia de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$ con estructura co-simpléctica, es decir con $\alpha = \beta = 0$, entonces, Θ sería cerrada si y sólo si*

$$f_1 = f_2 = f_3 = 0,$$

por el Corolario 3.2.6, ya que las variedades cosimplécticas son β-Kenmotsu con $\beta = 0$.

Estaríamos en el caso localmente isométrico a $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^m$, ya que sabemos que $\mathbb{C}^m$ es un espacio de curvatura seccional holomorfa constante $c = 0$. Además, como ya hemos comentado anteriormente, de [3], sabemos que el producto warped $\mathbb{R} \times_f \mathbb{C}^m$ para $f = 1$, es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado

$$\widetilde{M}\left(\frac{-f'^2}{f^2}, 0, \frac{-f'^2}{f^2} + \frac{f''}{f}\right),$$

dotado de una estructura β-Kenmotsu, con $\beta = f'/f$. Por tanto, al ser $f = 1$, $\mathbb{R} \times_f \mathbb{C}^m$ tiene estructura cosimpléctica ($\alpha = \beta = 0$) y además, $f_1 = f_2 = f_3 = 0$.

Nota 3.2.8. *Obsérvese que, en el caso de ser Θ cerrada, define una clase canónica de cohomología en M, $[\Theta] \in H^1(M; \mathbb{R})$.*

Dado que estamos suponiendo que la subvariedad M^{m+1} tiene dimensión $m+1$ con $m \geq 2$, el Teorema 3.2.3 implica que la 1-forma Θ no es cerrada en el caso de que $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$ sea un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $c = -3$ (como es el caso de $\mathbb{R}^{2m+1}$ con su estructura usual). No obstante, podemos definir una nueva 1-forma ω en M a partir de Θ, similar a la Forma de Maslov de M. Sabemos que

$$\Theta = \sum_{l=1}^{2k} \omega_l^{l^*},$$

donde

$$\omega_l^{l^*} = \sum_{i=1}^{2k} \sigma_{li}^{l^*} \omega^i + \sigma_{l\xi}^{l^*} \eta,$$

con $m = 2k$, por lo que

$$\Theta = \sum_{l=1}^{2k} \sum_{i=1}^{2k} \sigma_{li}^{l^*} \omega^i + \sum_{l=1}^{2k} \sigma_{l\xi}^{l^*} \eta. \tag{3.2.51}$$

Por otra parte, sabemos que

$$\sigma_{l\xi}^{l^*} = g(\sigma(e_l, \xi), e_{l^*}) = -\alpha \csc\theta g(Ne_l, Ne_l) = -\alpha \operatorname{sen}\theta, \tag{3.2.52}$$

por lo que

$$\sum_{l=1}^{2k} \sigma_{l\xi}^{l^*} \eta = -2k\alpha \operatorname{sen}\theta\eta. \tag{3.2.53}$$

Además, si M es una subvariedad slant trans-Sasakiana,

$$\begin{aligned} \sigma_{li}^{l^*} =& g(\sigma(e_l, e_i), e_{l^*}) = \csc\theta g(\sigma(e_l, e_i), Ne_l) = \\ =& \csc\theta g(A_{Ne_l} e_i, e_l) = \csc\theta g(A_{Ne_i} e_l, e_l) = \\ =& g(\sigma(e_l, e_l), e_{i^*}) = \sigma_{ll}^{i^*}, \end{aligned} \tag{3.2.54}$$

donde hemos usado (1.3.46). Así,

$$\sum_{l=1}^{2k}\sum_{i=1}^{2k}\sigma_{li}^{l^*}\omega^i=\sum_{l=1}^{2k}\sum_{i=1}^{2k}\sigma_{ll}^{i^*}\omega^i=\sum_{i=1}^{2k}(tr\sigma^{i^*})\omega^i. \tag{3.2.55}$$

Por tanto, de (3.2.51)-(3.2.55), obtenemos que

$$\Theta=\sum_{i=1}^{2k}(tr\sigma^{i^*})\omega^i-2k\alpha\operatorname{sen}\theta\eta,$$

por lo que definimos

$$\omega=\Theta+m\alpha\operatorname{sen}\theta\eta. \tag{3.2.56}$$

Nota 3.2.9. *Obsérvese que en el caso en que M sea una subvariedad anti-invariante y $\widetilde{M}$ un espacio de curvatura ϕ-seccional constante, la 1-forma ω dada por (3.2.56) coincide con la dada en (2.1.25). Basta tomar $\alpha=1$ y $\theta=\pi/2$.*

Aplicando directamente el Teorema 3.2.3, se tiene el siguiente resultado, mediante el cual analizaremos en qué casos la 1-forma ω dada por (3.2.56) es cerrada.

Teorema 3.2.10. *Sea M^{m+1} una subvariedad slant trans-Sasakiana de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1,f_2,f_3)$ con estructura (α,β) trans-Sasakiana. Entonces, la 1-forma ω dada por (3.2.56) verifica:*

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega=&-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta(m+1)(\alpha^2+f_2)\left(\sum_{j=1}^{k}\omega^{2j-1}\wedge\omega^{2j}-\sum_{j=1}^{k}\omega^{(2j-1)^*}\wedge\omega^{(2j)^*}\right)\\&+(-2\operatorname{sen}^2\theta(m+1)(\alpha^2+f_2)+\alpha^2-f_1+f_2-\beta^2)\cdot\\&\cdot\left(\sum_{j=1}^{k}\omega^{2j-1}\wedge\omega^{(2j-1)^*}+\sum_{j=1}^{k}\omega^{2j}\wedge\omega^{(2j)^*}\right).\end{aligned} \tag{3.2.57}$$

Demostración. De (3.2.56) se deduce que

$$\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}\Theta+m\alpha\operatorname{sen}\theta\mathrm{d}\eta, \tag{3.2.58}$$

ya que α es constante, por [5, Teorema 4.2]. Pero, como $\widetilde{M}$ es una variedad con estructura (α,β) trans-Sasakiana, se cumple que $\mathrm{d}\eta(X,Y)=\alpha g(X,\phi Y)$, para todos X, Y tangentes a M, por lo que, en función de una referencia slant adaptada, tenemos que

$$\mathrm{d}\eta(e_{2p-1},e_{2q-1})=\alpha g(e_{2p-1},Te_{2q-1})=0, \tag{3.2.59}$$

$$\mathrm{d}\eta(e_{2p-1}, \xi) = 0, \tag{3.2.60}$$
$$\mathrm{d}\eta(e_{2p-1}, e_{2q}) = -\alpha \cos\theta \delta_{pq}, \tag{3.2.61}$$
$$\mathrm{d}\eta(e_{2p-1}, e_{(2q-1)^*}) = -\alpha \operatorname{sen}\theta \delta_{pq}, \tag{3.2.62}$$
$$\mathrm{d}\eta(e_{2p-1}, e_{(2q)^*}) = 0, \tag{3.2.63}$$
$$\mathrm{d}\eta(e_{2p}, e_{2q-1}) = \alpha \cos\theta \delta_{pq}, \tag{3.2.64}$$
$$\mathrm{d}\eta(e_{2p}, \xi) = 0, \tag{3.2.65}$$
$$\mathrm{d}\eta(e_{2p}, e_{2q}) = 0, \tag{3.2.66}$$
$$\mathrm{d}\eta(e_{2p}, e_{(2q-1)^*}) = 0, \tag{3.2.67}$$
$$\mathrm{d}\eta(e_{2p}, e_{(2q)^*}) = -\alpha \operatorname{sen}\theta \delta_{pq}, \tag{3.2.68}$$
$$\mathrm{d}\eta(e_{(2p-1)^*}, e_{2q-1}) = \alpha \operatorname{sen}\theta \delta_{pq}, \tag{3.2.69}$$
$$\mathrm{d}\eta(e_{(2p-1)^*}, e_{2q}) = 0, \tag{3.2.70}$$
$$\mathrm{d}\eta(e_{(2p-1)^*}, \xi) = 0, \tag{3.2.71}$$
$$\mathrm{d}\eta(e_{(2p-1)^*}, e_{(2q-1)^*}) = 0, \tag{3.2.72}$$
$$\mathrm{d}\eta(e_{(2p-1)^*}, e_{(2q)^*}) = \alpha \cos\theta \delta_{pq}, \tag{3.2.73}$$
$$\mathrm{d}\eta(e_{(2p)^*}, e_{2q-1}) = 0, \tag{3.2.74}$$
$$\mathrm{d}\eta(e_{(2p)^*}, e_{2q}) = \alpha \operatorname{sen}\theta \delta_{pq}, \tag{3.2.75}$$
$$\mathrm{d}\eta(e_{(2p)^*}, \xi) = 0, \tag{3.2.76}$$
$$\mathrm{d}\eta(e_{(2p)^*}, e_{(2q-1)^*}) = -\alpha \cos\theta \delta_{pq}, \tag{3.2.77}$$
$$\mathrm{d}\eta(e_{(2p)^*}, e_{(2q)^*}) = 0, \tag{3.2.78}$$

para todos $p, q = 1, \ldots, k$.

Así, de (3.2.59) a (3.2.78) se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\eta = &- 2\alpha \cos\theta \left(\sum_{j=1}^{k} \omega^{2j-1} \wedge \omega^{2j} - \sum_{j=1}^{k} \omega^{(2j-1)^*} \wedge \omega^{(2j)^*} \right) \\ &- 2\alpha \operatorname{sen}\theta \left(\sum_{j=1}^{k} \omega^{2j-1} \wedge \omega^{(2j-1)^*} + \sum_{j=1}^{k} \omega^{2j} \wedge \omega^{(2j)^*} \right). \end{aligned} \tag{3.2.79}$$

Finalmente, (3.2.57) resulta de (3.2.44), (3.2.58) y (3.2.79). □

Vamos a analizar en los siguientes corolarios cuándo ω es cerrada en los casos α-Sasakiano y β-Kenmotsu.

Corolario 3.2.11. *Sea M^{m+1} una subvariedad slant trans-Sasakiana de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$ con estructura α-Sasakiana. Entonces, la 1-forma ω dada por (3.2.56) es cerrada si y sólo si*

$$f_1 = 0. \tag{3.2.80}$$

Además, en dicho caso, se tiene que $f_2 = f_3 = -\alpha^2$.

Demostración. Como $\widetilde{M}^{2m+1}$ es α-Sasakiana, a partir de (3.2.57), se deduce que

$$\mathrm{d}\omega = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \quad \alpha^2 + f_2 = 0 \Leftrightarrow f_2 = -\alpha^2 \\ \text{y} \\ \quad f_1 = 0. \end{array} \right.$$

Además, [5, Teorema 4.2] establece que ambas condiciones son equivalentes, pues

$$f_1 - \alpha^2 = f_2 = f_3,$$

como ya hemos comentado anteriormente. □

Nota 3.2.12. *Podemos comprobar que en el caso de que la variedad ambiente sea un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$, llegamos a que ω es cerrada si y sólo si $c = -3$, tal y como aparece en [19].*

Corolario 3.2.13. *Sea M^{m+1} una subvariedad slant trans-Sasakiana de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$ con estructura β-Kenmotsu. Entonces, la 1-forma ω dada por (3.2.56) es cerrada si y sólo si*

$$f_1 = -\beta^2 \qquad y \qquad f_2 = 0.$$

Además, en dicho caso, tendríamos que $f_3 = \xi(\beta)$.

Demostración. La prueba es inmediata teniendo en cuenta que $\widetilde{M}^{2m+1}$ es β-Kenmotsu y [5, Proposición 4.3], ya mencionada anteriormente en esta misma sección. □

Nota 3.2.14. *Obsérvese que si M^{m+1} es una subvariedad slant trans-Sasakiana de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$ con estructura cosimpléctica, es decir con $\alpha = \beta = 0$. Entonces, ω sería cerrada si y sólo si*

$$f_1 = f_2 = f_3 = 0,$$

por [5, Teorema 4.2] ya mencionado anteriormente. Estamos de nuevo en el caso localmente isométrico a $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^m$.

Nota 3.2.15. *Al igual que observamos para Θ, se tiene ahora que, cuando es cerrada, ω define una clase canónica de cohomología, $[\omega] \in H^1(M; \mathbb{R})$.*

En el siguiente teorema veremos la relación que existe entre la 1-forma ω dada por (3.2.56) y la Forma de Maslov ω_H de M, y a partir de ahí, podremos determinar cuándo dicha Forma de Maslov es cerrada.

Teorema 3.2.16. *Sea M^{m+1} una subvariedad slant propia de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$ con estructura (α, β) trans-Sasakiana. Entonces:*

$$\omega_H = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{m+1}\omega. \tag{3.2.81}$$

Demostración. Respecto a una referencia slant adaptada, se tiene

$$\omega_H(e_i) = g(e_i, \phi H) = -g(Ne_i, H) = -\operatorname{sen}\theta g(e_{i^*}, H), \tag{3.2.82}$$

para cada $i = 1, \ldots, m$. Además, habíamos definido

$$\omega = \Theta + m\alpha \operatorname{sen}\theta\eta = \sum_{i=1}^{2k}(tr\sigma^{i^*})\omega^i.$$

Ahora bien, en virtud de (1.1.4) y (1.3.24):

$$H = \frac{1}{m+1}\sum_{j=1}^{m}\sigma(e_j, e_j). \tag{3.2.83}$$

Así, de (3.2.82) y (3.2.83) resulta que

$$\omega_H(e_i) = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{m+1}\sum_{j=1}^{2k}\sigma_{jj}^{i^*} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{m+1}\omega(e_i),$$

para cada $i = 1, \ldots, m$, y teniendo en cuenta que $\omega_H(\xi) = g(tH, \xi) = 0$, obtenemos (3.2.81). □

Nota 3.2.17. *Podemos observar que (3.2.81), en el caso en que M sea anti-invariante, coincide con (2.1.12), haciendo $\theta = \pi/2$. Sin embargo, la demostración no sería válida para este caso, pues está hecha para subvariedades slant propias.*

A continuación, determinamos cuándo la Forma de Maslov de M dada por (2.1.1) es cerrada. En primer lugar, vamos a estudiar el caso en que la variedad ambiente $\widetilde{M}$ tenga estructura α-Sasakiana.

Nota 3.2.18. *Sea M^{m+1} una subvariedad slant trans-Sasakiana propia de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$ con estructura α-Sasakiana. Entonces, la Forma de Maslov ω_H de M es cerrada si y sólo si*

$$f_1 = 0.$$

Además, en dicho caso $f_2 = f_3 = -\alpha^2$, lo cual es aplicación directa del Corolario 3.2.11.

Nota 3.2.19. *D. Jansen y L. Vanhecke introdujeron en [37] las llamadas $\mathcal{C}(\alpha)$-variedades, definidas como aquéllas cuyo tensor de curvatura tiene la expresión*

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) =& R(X,Y,\phi Z,\phi W)+ \\ & \alpha\left\{g(X,W)g(Y,Z)-g(X,Z)g(Y,W)+\right. \\ & \left. g(X,\phi Z)g(Y,\phi W)g(X,\phi W)g(Y,\phi Z)\right\}, \end{aligned}$$

para todos X,Y,Z,W de M, donde α es un número real.

Por otra parte, en [3, Ejemplo 3.3], P. Alegre, D. E. Blair y A. Carriazo, establecieron que, si además dicha variedad tiene curvatura ϕ-seccional constante igual a c, entonces su tensor de curvatura viene dado por

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z =& \frac{c+3\alpha^2}{4}\{g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\}+ \\ & \frac{c-\alpha^2}{4}\{g(X,\phi Z)\phi Y-g(Y,\phi Z)\phi X+2g(X,\phi Y)\phi Z\}+ \\ & \frac{c-\alpha^2}{4}\{\eta(X)\eta(Z)Y-\eta(Y)\eta(Z)X+g(X,Z)\eta(Y)\xi-g(Y,Z)\eta(X)\xi\}, \end{aligned}$$

y, por tanto, es un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado con

$$f_1=\frac{c+3\alpha^2}{4} \quad y \quad f_2=f_3=\frac{c-\alpha^2}{4}.$$

De esta forma, una $\mathcal{C}(\alpha)$-variedad con curvatura ϕ-seccional constante $c=-3\alpha^2$ constituye un ejemplo de la Nota 3.2.18. En este caso tendríamos un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado del tipo $\widetilde{M}^{2m+1}(0,-\alpha^2,-\alpha^2)$.

Ejemplo 3.2.20. *Recordemos que P. Alegre y A. Carriazo demostraron en [4] que haciendo una transformación $\mathcal{D}$-homotética a un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\widetilde{M}(c)$, obtenemos un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}(f_1,f_2,f_3)$ con*

$$f_1^*=\frac{1}{b}\frac{c+3}{4}, \quad f_2^*=f_3^*=\frac{1}{b}\left(\frac{c-1}{4}-\frac{a^2-b}{b}\right),$$

dotado de una estructura $\left(\frac{a}{b},0\right)$ trans-Sasakiana, donde a y b son constantes de $\widetilde{M}$, con $a\neq 0$ y $b>0$.

Ahora bien, sabemos por la Nota 3.2.18 que la Forma de Maslov ω_H es cerrada si y sólo si $f_1=0$, $f_2=f_3=-\alpha^2$. De esta forma, si consideramos el caso $c=-3$, es decir si tomamos el espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\mathbb{R}^{2m+1}$, obtendríamos un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado haciendo una transformación $\mathcal{D}$-homotética. En este caso, $a=\alpha^2$ y $b=1$ y tendríamos $f_1=0$, $f_2=f_3=-\alpha^2$. Por tanto, si consideramos cualquier subvariedad de $\mathbb{R}^{2m+1}$ con Forma de Maslov ω_H cerrada y hacemos una transformación $\mathcal{D}$-homotética, obtenemos la respectiva subvariedad con Forma de Maslov cerrada en $\mathbb{R}^{2m+1}$ con estructura α-Sasakiana.

Nota 3.2.21. *Podemos comprobar que en el caso de que la variedad ambiente sea un espacio de curvatura ϕ-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+1}(c)$, llegamos a que la Forma de Maslov ω_H de M es cerrada si y sólo si $c = -3$ (véase [19]). Así, en $\mathbb{R}^{2m+1}$ con su estructura Sasakiana habitual, toda subvariedad slant, no invariante y de dimensión $m+1$, tiene Forma de Maslov cerrada. En particular, esto será cierto para toda subvariedad anti-invariante, de dimensión $m+1$, tangente al campo de estructura ξ.*

Finalmente, vamos a establecer la siguiente obstrucción topológica para una subvariedad slant trans-Sasakiana de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado con estructura α-Sasakiana:

Corolario 3.2.22. *Sea M^{m+1} una variedad diferenciable de dimensión $m+1$ compacta y simplemente conexa tal que $H(p) \neq 0$, para todo $p \in M$. Si m es par, entonces M no puede ser inmersa en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(0, -\alpha^2, -\alpha^2)$ con estructura α-Sasakiana, como una subvariedad slant trans-Sasakiana no minimal.*

Demostración. Sea M^{m+1} una subvariedad slant trans-Sasakiana no minimal de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(0, -\alpha^2, -\alpha^2)$, con estructura α-Sasakiana. Como H es no nulo en cada punto, también lo es la Forma de Maslov de M^{m+1} por definición. Además, en virtud de la Nota 3.2.18, sabemos que ω_H es cerrada. Por tanto, ω_H representa una clase de cohomogía $[\omega_H] \in H^1(M;\mathbb{R})$. Ahora bien, como M es compacta, ω_H no puede ser exacta. De esta forma, $[\omega_H]$ es una clase de cohomología no trivial, luego el primer grupo de cohomología $H^1(M;\mathbb{R})$ es también no trivial. Así, M no es simplemente conexa, lo cual es una contradicción. □

Pasemos ahora a analizar cuándo la Forma de Maslov ω_H de la subvariedad M es cerrada en el caso en que la variedad $\widetilde{M}$ tenga estructura β-Kenmotsu.

Nota 3.2.23. *Sea M^{m+1} una subvariedad slant trans-Sasakiana propia de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$ con estructura β-Kenmotsu. Entonces, la Forma de Maslov ω_H de M es cerrada si y sólo si*

$$f_1 = -\beta^2 \qquad y \qquad f_2 = 0. \tag{3.2.84}$$

Además, en dicho caso $f_3 = \xi(\beta)$, lo cual es una aplicación directa del Corolario 3.2.13.

Ejemplo 3.2.24. *Como ya comentamos anteriormente, en [3] se demostró que si $N(c)$ es un espacio de curvatura seccional holomorfa constante, haciendo el producto warped $\widetilde{M} = \mathbb{R} \times_f N$, donde $f > 0$ es una función de $\mathbb{R}$, obtenemos el siguiente espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado*

$$\widetilde{M}\left(\frac{c - 4f'^2}{4f^2},\ \frac{c}{4f^2},\ \frac{c - 4f'^2}{4f^2} + \frac{f''}{f}\right),$$

dotado de una estructura β trans-Sasakiana con $\beta = f'/f$. De esta forma, según la Nota 3.2.23, la Forma de Maslov ω_H de una subvariedad M es cerrada si y sólo si $f_1 = -\beta^2$, $f_2 = 0$, lo cual quiere decir que estamos en el caso $c = 0$, es decir tomamos el espacio de curvatura seccional holomorfa constante $\mathbb{C}^m$, y obtenemos un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado haciendo el producto warped $\widetilde{M} = \mathbb{R} \times_f \mathbb{C}^m$, donde $f > 0$ es una función de $\mathbb{R}$, con estructura β-Kenmotsu.

Ahora bien, si consideramos cualquier subvariedad de $\mathbb{C}^m$ con Forma de Maslov ω_H cerrada, como por ejemplo las ya mencionadas esferas de Whitney dadas por (3.1.26) (ver [49]), y hacemos un producto warped obtenemos la respectiva subvariedad con Forma de Maslov cerrada en $\mathbb{C}^m$ con estructura β-Kenmotsu.

En la misma línea, podemos establecer la siguiente obstrucción topológica para el caso en el $\widetilde{M}$ tenga estructura β-Kenmotsu cuya demostración es análoga a la del Corolario 3.2.22.

Corolario 3.2.25. *Sea M^{m+1} una variedad diferenciable de dimensión $m+1$ compacta y simplemente conexa tal que $H(p) \neq 0$, para todo $p \in M$. Si m es par, entonces M no puede ser inmersa en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(-\beta^2, 0, \xi(\beta))$ con estructura β-Kenmotsu, como una subvariedad slant trans-Sasakiana no minimal.*

Nota 3.2.26. *Obsérvese que si M^{m+1} es una subvariedad slant propia de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$ con estructura co-simpléctica, es decir con $\alpha = \beta = 0$, entonces, la Forma de Maslov ω_H sería cerrada si y sólo si*

$$f_1 = f_2 = f_3 = 0,$$

por el Teorema 3.2.10, por lo que volveríamos a estar en el caso de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^m$ comentado anteriormente.

Con esto terminamos el estudio sobre cuándo la Forma de Maslov ω_H es cerrada. Ahora bien, en la siguiente nota vamos a ver que si partimos de una 1-forma $\widetilde{\Theta}$ adaptada, podemos definir una Forma de Maslov adaptada, $\widetilde{\omega}_H$, que sea cerrada siempre, al menos en el caso en el que $\widetilde{M}$ tenga estructura α-Sasakiana. Sin embargo veremos en la próxima sección que dicha 1-forma no mejora la conformidad de la Forma de Maslov ω_H.

Nota 3.2.27. *Comenzamos definiendo la 1-forma*

$$\widetilde{\Theta} = \Theta - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\alpha}(m+1)(\alpha^2 + f_2)\eta.$$

Teniendo en cuenta que $\alpha^2 - f_1 + f_2 = 0$ *por [5, Teorema 4.2], tenemos que*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\widetilde{\Theta} =& 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \alpha^2 m \left(\sum_{j=1}^{k} \omega^{2j-1} \wedge \omega^{2j} - \sum_{j=1}^{k} \omega^{(2j-1)^*} \wedge \omega^{(2j)^*} \right) + \\
&+ 2 \operatorname{sen}^2\theta \alpha^2 m \left(\sum_{j=1}^{k} \omega^{2j-1} \wedge \omega^{(2j-1)^*} + \sum_{j=1}^{k} \omega^{2j} \wedge \omega^{(2j)^*} \right),
\end{aligned}
$$

la cual no se anula debido a que la subvariedad M *es slant propia* ($m \geq 2$) *y* $\alpha \neq 0$.

Ahora bien, siguiendo el mismo procedimiento que hemos llevado a cabo anteriormente en esta misma sección para definir la Forma de Maslov, podemos ahora definir una 1*-forma* $\widetilde{\omega}$, *a partir de la* 1*-forma* $\widetilde{\Theta}$, *como*

$$\widetilde{\omega} = \widetilde{\Theta} + m\alpha \operatorname{sen}\theta\eta.$$

Si calculamos su diferencial obtenemos $\mathrm{d}\widetilde{\omega} = 0$, *lo cual quiere decir que* $\widetilde{\omega}$ *es cerrada para cualquier subvariedad* M^{m+1} *slant propia de un espacio de curvatura* ϕ*-seccional constante generalizado* $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$ *con estructura* α*-Sasakiana.*

Finalmente, podemos definir la Forma de Maslov adaptada $\widetilde{\omega}_H$, *de forma natural a partir de la* 1*-forma* $\widetilde{\omega}$ *como*

$$\widetilde{\omega}_H = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{m+1}\widetilde{\omega}. \tag{3.2.85}$$

De esta forma, esta claro que $\widetilde{\omega}_H$ *es cerrada siempre que lo sea* $\widetilde{\omega}$.

Además, podemos ver cómo queda relacionada $\widetilde{\omega}_H$ *con la Forma de Maslov* ω_H*:*

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\omega}_H =& -\frac{\operatorname{sen}\theta}{m+1}\widetilde{\omega} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{m+1}(\widetilde{\Theta} + m\alpha \operatorname{sen}\theta\eta) = \\
=& -\frac{\operatorname{sen}\theta}{m+1}(\Theta - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\alpha}(m+1)(\alpha^2 + f_2)\eta + m\alpha \operatorname{sen}\theta\eta) = \\
=& -\frac{\operatorname{sen}\theta}{m+1}(\omega - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\alpha}(m+1)(\alpha^2 + f_2)\eta) = \\
=& \omega_H + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\alpha}(\alpha^2 + f_2)\eta.
\end{aligned}
$$

Finalmente, podemos establecer la siguiente obstrucción topológica para la Forma de Maslov adaptada cuya demostración es análoga a la del Corolario 3.2.22.

Corolario 3.2.28. *Sea* M^{m+1} *una variedad diferenciable de dimensión* $m+1$ *compacta y simplemente conexa tal que* $H(p) \neq 0$, *para todo* $p \in M$. *Si* m *es par, entonces* M *no puede ser inmersa en un espacio de curvatura* ϕ*-seccional constante generalizado* $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$ *con estructura* α*-Sasakiana, como una subvariedad slant trans-Sasakiana no minimal.*

3.3. Obstrucciones geométricas y topológicas de inmersiones slant

Nuestro objetivo en esta sección es combinar propiedades topológicas y geométricas para obtener obstrucciones interesantes para subvariedades slant dentro de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado.

Sea M^{m+1} una subvariedad slant propia de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$. En [21], para cada punto $p \in M$, se define una T-sección en p como una sección plana $\Pi \subseteq T_pM$ en las que existe un campo tangente $X \in \mathcal{D}_p$ tal que Π está generada por X y TX. Además, se define

$$(\inf_T K)(p) = \inf\{K(\Pi) : \text{T-secciones } \Pi\}$$

y

$$\delta_M^T(p) = \tau(p) - \inf_T K(p), \tag{3.3.1}$$

donde $K(\Pi)$ denota la curvatura seccional de una sección plana Π.

Por otra parte, si $\Pi \subseteq T_pM$ es una sección plana en $p \in M$,

$$\Theta(\Pi) = g^2(Te_1, e_2), \tag{3.3.2}$$

es un número real en $[0, 1]$ que no depende de la elección de la base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de Π.

En [6], P. Alegre, A. Carriazo, Y. H. Kim y D. W. Yoon establecen la siguiente desigualdad que relaciona la curvatura escalar, τ, la curvatura seccional, $K(\Pi)$, y el vector curvatura media, H, de una subvariedad cualquiera de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ con estructura (α, β) trans-Sasakiana,

$$\begin{aligned}\tau - K(\Pi) \leq & \frac{m-1}{2}\left(\frac{(m+1)^2}{m}\|H\|^2 + (m+2)f_1\right) + \\ & + 3\left(\frac{\|T\|^2}{2} - \Theta(\Pi)\right) f_2 - mf_3 - \alpha^2\|N\|^2,\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

teniendo en cuenta (3.3.2). Así, podemos obtener inmediatamente el siguiente resultado para subvariedades slant:

Proposición 3.3.1. *Sea M^{m+1} una subvariedad slant de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$ con estructura (α, β) trans-Sasakiana. Entonces para cada punto $p \in M$ y cada sección plana $\Pi \subset \mathcal{D}_p$, tenemos*

$$\begin{aligned}\tau - K(\Pi) \leq & \frac{m-1}{2}\left(\frac{(m+1)^2}{m}\|H\|^2 + (m+2)f_1\right) + \\ & + 3\left(\frac{m\cos^2\theta}{2} - \Theta(\Pi)\right) f_2 - mf_3 - m\alpha^2 \operatorname{sen}^2\theta.\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Demostración. La demostración es inmediata teniendo en cuenta (1.3.32) y (3.3.3). □

De esta forma, podemos establecer la siguiente obstrucción geométrica para inmersiones slant:

Corolario 3.3.2. *Sea M^{m+1} una variedad Riemanniana tal que existe un campo global unitario $\bar{\xi}$ en M. Sea θ constante con $0 \leq \theta < \pi/2$. Si existe un punto $p \in M$ y un vector tangente $X \in T_pM$, ortogonal a $\bar{\xi}_p$, tal que X y $\nabla_X \bar{\xi}$ generan una sección plana Π, con curvatura seccional $K(\Pi)$ y existen $\bar{\alpha}, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3 \in \mathfrak{F}(M)$ satisfaciendo*

$$K(\Pi) < \tau - \frac{(m-1)(m+2)}{2}\bar{f}_1 - \frac{3}{2}(m-2)\cos^2\theta \bar{f}_2 + m\bar{f}_3 + m\bar{\alpha}^2 \operatorname{sen}^2\theta, \qquad (3.3.5)$$

entonces M no admite ninguna inmersión φ minimal y θ-slant en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{\widetilde{m}}(f_1, f_2, f_3)$ ($\widetilde{m} \geq 2m+1$), tal que $\varphi_* \bar{\xi} = \xi$ y $f_i \circ \varphi = \bar{f}_i$, $i = 1, 2, 3$.

Demostración. Supongamos que M admite una inmersión θ-slant φ en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{\widetilde{m}}(f_1, f_2, f_3)$ ($\widetilde{m} \geq 2m+1$), tal que $\varphi_* \bar{\xi} = \xi$ y $f_i \circ \varphi = \bar{f}_i$, $i = 1, 2, 3$. Ahora bien, teniendo en cuenta (3.3.5), que (1.3.30) implica que $\Theta(\Pi) = \cos^2\theta$ y que esta inmersión es minimal, obtenemos una contradicción con (3.3.4). □

Nota 3.3.3. *Obsérvese que excluimos el caso $\theta = \pi/2$, ya que si la subvariedad es anti-invariante no existen T-secciones, pues $T \equiv 0$. Sin embargo, si la subvariedad es invariante ($\theta = 0$), tenemos que $T = \phi$, por lo que las T-secciones son las ϕ-secciones.*

A continuación, en la siguiente proposición obtenemos una desigualdad entre el invariante intrínseco δ_M^T dado por (3.3.1) y el principal invariante extrínseco, H, de la subvariedad M:

Proposición 3.3.4. *Sea M^{m+1} una subvariedad slant de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$ con estructura (α, β) trans-Sasakiana. Entonces*

$$\begin{aligned} \delta_M^T \leq & \frac{m-1}{2}\left(\frac{(m+1)^2}{m}\|H\|^2 + (m+2)f_1\right) + \\ & + \frac{3}{2}(m-2)\cos^2\theta f_2 - mf_3 - m\alpha^2 \operatorname{sen}^2\theta. \end{aligned} \qquad (3.3.6)$$

Demostración. Dada una T-sección Π, podemos elegir dos campos tangentes e_1, e_2 tal que Π está generada por e_1 y e_2, siendo $e_2 = \sec\theta T e_1$. Entonces, (1.3.30) implica que $\Theta(\Pi) = \cos^2\theta$. La prueba finaliza aplicando (3.3.4). □

Nota 3.3.5. *Obsérvese que si consideramos en la Proposición 3.3.4 que la variedad ambiente sea un espacio de curvatura ϕ-seccional constante, $\widetilde{M}(c)$, o lo que es lo mismo, si hacemos $f_1 = \frac{c+3}{4}$ y $f_2 = f_3 = \frac{c-1}{4}$, la desigualdad (3.3.6) quedaría de la siguiente forma:*

$$\delta_M^T \leq \frac{(m+1)^2(m-1)}{2m}\|H\|^2 + \frac{1}{2}(m+1)(m-2)\frac{c+3}{4} + m\cos^2\theta + \frac{1}{2}(m-2)\frac{3(c-1)}{4}\cos^2\theta,$$

la cual se corresponde con la establecida por A. Carriazo en [21, Teorema 5.3].

De ahora en adelante, hasta el final de la sección, usaremos que la Forma de Maslov ω_H sea cerrada en el marco en que la variedad ambiente $\widetilde{M}$ tenga estructura α-Sasakiana, por lo que tendremos que tener en cuenta los resultados obtenidos en la sección anterior. Concretamente, según la Nota 3.2.18, M tiene Forma de Maslov cerrada si y sólo si $f_1 = 0, f_2 = f_3 = -\alpha^2$.

Consideremos, en primer lugar, el invariante $\delta_M^{\mathcal{D}}$ definido en [21] como

$$\delta_M^{\mathcal{D}}(p) = \tau(p) - \inf_{\mathcal{D}} K(p), \tag{3.3.7}$$

para todo $p \in M$, donde:

$$(\inf_{\mathcal{D}} K)(p) = \inf\{K(\Pi) : \Pi \text{ es sección plana ortogonal a } \xi_p\}.$$

De esta forma, podemos enunciar el siguiente lema en el que obtenemos una desigualdad entre el invariante $\delta_M^{\mathcal{D}}$ y el cuadrado del módulo del vector curvatura media H:

Lema 3.3.6. *Sea M^{m+1} una subvariedad slant con Forma de Maslov cerrada de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(0, -\alpha^2, -\alpha^2)$ con estructura α-Sasakiana. Entonces*

$$\delta_M^{\mathcal{D}} \leq \frac{(m+1)^2(m-1)}{2m}\|H\|^2 + m\alpha^2\cos^2\theta. \tag{3.3.8}$$

Demostración. El Corolario 4.2 de [6] dice que si $f_2 \leq 0$ se tiene que

$$\delta_M^{\mathcal{D}} \leq \frac{(m+1)^2(m-1)}{2m}\|H\|^2 + \frac{(m-1)(m+2)}{2}f_1 - mf_3 - \alpha^2\|N\|^2. \tag{3.3.9}$$

Por otra parte, la Nota 3.2.18 establece que la Forma de Maslov de M es cerrada si y sólo si

$$f_1 = 0, \quad f_2 = f_3 = -\alpha^2.$$

De esta forma, la desigualdad (3.3.8) es inmediata, teniendo en cuenta (1.3.32) y (3.3.9). □

A partir de este lema, podemos enunciar la siguiente obstrucción para una subvariedad slant propia con Forma de Maslov ω_H cerrada dentro de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado con estructura α-Sasakiana:

Teorema 3.3.7. *Sea M^{m+1} una variedad Riemanniana de dimensión $m+1 (m \geq 2)$ compacta y simplemente conexa, tal que existe un campo global $\bar{\xi}$ sobre M. Denotamos por $\bar{\mathcal{D}}$ la distribución ortogonal a $\bar{\xi}$ de M y sean θ una constante con $0 < \theta < \pi/2$ y $\bar{\alpha} \in \mathfrak{F}(M)$. Si*

$$\delta_M^{\bar{\mathcal{D}}} > m\bar{\alpha}^2 \cos^2 \theta, \tag{3.3.10}$$

entonces M no admite ninguna inmersión θ-slant trans-Sasakiana φ, dentro de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(0, -\alpha^2, -\alpha^2)$ con estructura α-Sasakiana, tal que $\varphi_* \bar{\xi} = \xi$ y $\alpha \circ \varphi = \bar{\alpha}$.

Demostración. Supongamos que M admite una inmersión θ-slant trans-Sasakiana φ en de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(0, -\alpha^2, -\alpha^2)$, con estructura α-Sasakiana, tal que $\varphi_* \bar{\xi} = \xi$ y $\alpha \circ \varphi = \bar{\alpha}$. Esto implica que $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D}$.

Si $m = 2$, entonces (1.3.33) implica que $\delta_M^{\mathcal{D}} = 2\alpha^2 \cos^2 \theta$, por lo que se obtiene una contradicción con (3.3.10).

Luego, asumimos que $m > 2$. De esta forma, de (3.3.8) y (3.3.10), el vector curvatura media $H_p \neq 0$, para todo $p \in M$. Por tanto, la Forma de Maslov ω_H es no nula en cada punto de M. Por otra parte, como la Forma de Maslov ω_H es cerrada, representa una clase de cohomología $[\omega_H] \in H^1(M, \mathbb{R})$. Además, como M es compacta, la Forma de Maslov ω_H no puede ser exacta. Luego, $[\omega_H]$ es una clase no trivial de cohomología y, por tanto, el primer grupo de cohomología $H^1(M, \mathbb{R})$ es no trivial. De esta forma, M no puede ser simplemente conexa, lo cual es una contradicción. $\square$

Nota 3.3.8. *Observemos que, como cada inmersión invariante es minimal, es fácil probar que si $\delta_M^{\bar{\mathcal{D}}} > m\bar{\alpha}^2$, entonces M no admite ninguna inmersión invariante φ, en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{\widetilde{m}}(0, -\alpha^2, -\alpha^2)$ $(\widetilde{m} \geq 2m+1, \bar{\alpha} \in \mathfrak{F}(M))$, tal que $\varphi_* \bar{\xi} = \xi$ y $\alpha \circ \varphi = \bar{\alpha}$. En este caso no es necesario que M sea compacta ni simplemente conexa.*

Finalmente, estamos interesados en encontrar alguna obstrucción que haga referencia a la curvatura escalar τ. Para ello, vamos a enunciar los siguientes lemas:

Lema 3.3.9. *Sea M^{m+1} $(m > 2)$ una subvariedad θ-slant de una variedad α-Sasakiana $\widetilde{M}$. Si $\tau > m\alpha^2 \cos^2 \theta$ en cada punto $p \in M$, entonces $\delta_M^{\mathcal{D}} > m\alpha^2 \cos^2 \theta$.*

Demostración. Si $\inf_{\mathcal{D}} K(p) > 0$, entonces todas las secciones planas ortogonales a ξ en p son positivas, luego tenemos que

$$\tau = \sum_{i \neq j}^{m} K(e_i \wedge e_j) + \sum_{i=1}^{m} K(e_i \wedge \xi) = \sum_{i \neq j}^{m} K(e_i \wedge e_j) + m\alpha^2 \cos^2 \theta,$$

con $K(e_i \wedge e_j) > 0$ para cualesquiera campos tangentes, e_i, e_j, de una base slant adaptada de M, donde se ha usado (1.3.27). De esta forma, se sigue que

$$\delta_M^{\mathcal{D}}(p) = \tau(p) - \inf_{\mathcal{D}} K(p) > m\alpha^2 \cos^2\theta.$$

Si $\inf_{\mathcal{D}} K(p) \leq 0$, es inmediato que $\delta_M^{\mathcal{D}} \geq \tau$, con lo que se concluye la demostración. $\square$

Lema 3.3.10. *Sea M^3 una subvariedad θ-slant propia de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^5(0, -\alpha^2, -\alpha^2)$ con estructura α-Sasakiana. Entonces, tenemos que*

$$9\|H\|^2 \geq 8(\tau + \alpha^2 \cos^2\theta).$$

Demostración. Se obtiene directamente de la desigualdad (3.1.3) del Teorema 3.1.3, haciendo $f_1 = 0, f_2 = f_3 = -\alpha^2$ y $m = 2$. $\square$

A partir de estos lemas, podemos establecer la siguiente obstrucción referente a la curvatura escalar de una subvariedad M slant propia:

Teorema 3.3.11. *Sea M^{m+1} una variedad Riemanniana de dimensión $m+1 (m \geq 2)$ compacta y simplemente conexa, tal que existe un campo global $\bar{\xi}$ sobre M. Denotamos por $\bar{\mathcal{D}}$ la distribución ortogonal a $\bar{\xi}$ de M y sean θ una constante con $0 < \theta < \pi/2$ y $\bar{\alpha} \in \mathfrak{F}(M)$. Si*

$$\tau > m\bar{\alpha}^2 \cos^2\theta, \tag{3.3.11}$$

entonces M no admite ninguna inmersión slant trans-Sasakiana φ, con ángulo slant θ en un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(0, -\alpha^2, -\alpha^2)$ con estructura α-Sasakiana, tal que $\varphi_*\bar{\xi} = \xi$ y $\alpha \circ \varphi = \bar{\alpha}$.

Demostración. Si $m > 2$, se tiene directamente del Teorema 3.3.7 y el Lema 3.3.9. Si $m = 2$, entonces la condición (3.3.11) y el Lema 3.3.10 implican que H es no nulo en cada punto de M. Por tanto, la prueba termina de la misma forma que la del Teorema 3.3.7. $\square$

3.4. Forma de Maslov conforme

El estudio de las subvariedades con Forma de Maslov conforme comenzó a tomar importancia en el marco de la geometría compleja, debido a que dentro del estudio de las subvariedades Lagrangianas de $\mathbb{C}^m$ las esferas euclídeas son los ejemplos más simples de hipersuperficies con vector curvatura media H constante. Sin embargo, se conocía que la esfera no puede ser incrustada en $\mathbb{C}^m$ como una subvariedad Lagrangiana. Debido a ello, se definen las esferas de Whitney. Estas esferas tienen el mejor comportamiento posible, ya que pueden ser incrustadas en $\mathbb{C}^m$ como una subvariedad Lagrangiana, excepto en los polos de $\mathbb{S}^m$ donde tienen un punto doble. Además, las esferas de Whitney no tienen vector curvatura media H constante. Sin embargo, el vector curvatura media H de cada esfera de Whitney cumple que JH es un campo conforme sobre dicha esfera. De este modo, como la forma dual de JH es la Forma de Maslov, surgió la necesidad de estudiar las subvariedades con Forma de Maslov conforme (ver [49]).

Cabe destacar que en la esfera de Whitney de contacto ([12]) se evita ese punto doble en los polos, mediante una inmersión Legendriana en $\mathbb{R}^{2m+1}$.

En esta sección vamos a estudiar si la Forma de Maslov ω_H dada por (2.1.1) es conforme o al menos $\mathcal{D}$-conforme, es decir, conforme para los campos de la distribución ortogonal al campo de estructura ξ, bajo ciertas condiciones. Este estudio lo llevaremos a cabo para una subvariedad M^{m+1} slant dentro de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}$ con estructura α-Sasakiana.

Sean M^{m+1} una subvariedad slant con Forma de Maslov cerrada de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(0,-\alpha^2,-\alpha^2)$ con estructura α-Sasakiana y X, Y dos campos tangentes de M, unitarios, tales que $X \perp Y$ y ambos son ortogonales al campo de estructura ξ. De la Ecuación de Codazzi (1.1.12), y teniendo en cuenta que, por la Nota 3.2.18, ω_H es cerrada si y sólo si $f_1 = 0, f_2 = f_3 = -\alpha^2$, podemos establecer que

$$\begin{aligned}-3\alpha^2 g(X,TY)NY =& D_X\sigma(Y,Y) - \sigma(\nabla_X Y, Y) - \sigma(\nabla_X Y, Y) - \\ &- D_Y\sigma(X,Y) + \sigma(\nabla_Y X, Y) - \sigma(X, \nabla_Y Y).\end{aligned}$$

De esta forma, si consideramos que M es $*$-slant y que por tanto su segunda forma fundamental verifica (3.1.16), dicha ecuación queda:

$$\begin{aligned}-3\frac{m+2}{m+1}\alpha^2 g(X,TY)NY = D_X H + \\ &+ \frac{2}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(g(D_X NY, H)NY + g(NY, D_X H)NY + g(NY,H)D_X NY\right) - \\ &- \frac{2}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(g(N\nabla_X Y, H)NY + g(NY,H)N\nabla_X Y\right) + \\ &+ 2\alpha\frac{m+2}{m+1}\eta(\nabla_X Y)NY - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\{g(D_Y NX, H)NY + g(NX, D_Y H)NY + \\ &+ g(NX,H)D_Y NY + g(D_Y NY, H)NX + g(NY, D_Y H)NX +\end{aligned}$$

$$+\, g(NY,H)D_Y NX - g(N\nabla_Y X,H)NY - g(NY,H)N\nabla_Y X -$$

$$-\, g(NX,H)N\nabla_Y Y - g(N\nabla_Y Y,H)NX\} - \tag{3.4.1}$$

$$-\, \alpha\frac{m+2}{m+1}\eta(\nabla_Y X)NY - \alpha\frac{m+2}{m+1}\eta(\nabla_Y Y)NX.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta (1.3.25), obtenemos

$$\begin{aligned}
\eta(\nabla_X Y) =& g(\nabla_X Y,\xi) = -g(Y,\nabla_X\xi) = \alpha g(Y,TX) = -\alpha g(X,TY),\\
\eta(\nabla_Y X) =& \alpha g(X,TY),\\
\eta(\nabla_Y Y) =& 0,
\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

con lo que, despejando $D_X H$ y sustituyendo (3.4.2) en (3.4.1), nos queda la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
D_X H =& \frac{2}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(-g(D_X NY,H)NY - g(NY,D_X H)NY - g(NY,H)D_X NY + \right.\\
& g(N\nabla_X Y,H)NY + g(NY,H)N\nabla_X Y) +\\
& \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(g(D_Y NX,H)NY + g(NX,D_Y H)NY + g(NX,H)D_Y NY + \right.\\
& g(D_Y NY,H)NX + g(NY,D_Y H)NX + g(NY,H)D_Y NX -\\
& g(N\nabla_Y X,H)NY - g(NY,H)N\nabla_Y X -\\
& g(NX,H)N\nabla_Y Y - g(N\nabla_Y Y,H)NX) =\\
=& \frac{2}{\operatorname{sen}^2\theta}\left\{g((\nabla_X N)Y,H)NY + g(NY,H)(\nabla_X N)Y - g(NY,D_X H)NY\right\} +\\
& \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left\{g((\nabla_Y N)X,H)NY + g(NX,H)(\nabla_Y N)Y + g((\nabla_Y N)Y,H)NX + \right.\\
& \left. g(NY,H)(\nabla_Y N)X + g(NX,D_Y H)NY + g(NY,D_Y H)NX\right\},
\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

donde $(\nabla_X N)Y = D_X NY - N\nabla_X Y$. Ahora bien, para poder agrupar estos términos y conseguir que la Forma de Maslov sea al menos $\mathcal{D}$-conforme de forma análoga al caso anti-invariante, necesitamos que $\nabla N = 0$ en (3.4.3). En este caso, dicha expresión nos queda:

$$D_X H = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(g(NX, D_Y H)NY + g(NY, D_Y H)NX\right), \tag{3.4.4}$$

de donde, multiplicando por el campo NY y usando (1.3.31), podemos obtener que

$$g(NY, D_X H) = g(NX, D_Y H). \tag{3.4.5}$$

Ahora bien, si sustituimos (3.4.5) en (3.4.4) llegamos a que

$$D_X H = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(g(NY, D_X H)NY + g(NY, D_Y H)NX\right), \tag{3.4.6}$$

de donde volviendo a multiplicar por NY y usando (1.3.31) podemos establecer que

$$g(NY, D_X H) = 0,$$

por lo que (3.4.4) se reduce a:

$$D_X H = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} g(NY, D_Y H)NX. \tag{3.4.7}$$

Por otra parte, como estamos en el caso en que $\widetilde{M}$ tenga estructura α-Sasakiana, sabemos que $(\widetilde{\nabla}_X\phi)H = 0$ y podemos comprobar fácilmente que para cualquier campo Z tangente a M,

$$g(\nabla_X\phi H, Z) = -g(NZ, D_X H) = -g(NY, D_Y H)g(X, Z),$$

donde se ha usado (3.4.7). De esta forma,

$$\nabla_X\phi H = -g(NY, D_Y H)X,$$

lo que significa que el campo ϕH es $\mathcal{D}$-conforme. Sin embargo, cuando $\nabla N = 0$ (condición impuesta para obtener que ϕH sea $\mathcal{D}$-conforme) podemos demostrar el siguiente resultado:

Teorema 3.4.1. *Sea M^{m+1} una subvariedad slant propia con $\nabla N = 0$, de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}^{2m+1}(f_1, f_2, f_3)$ con estructura (α,β) trans-Sasakiana. Entonces, o bien la subvariedad M es minimal, o bien la variedad $\widetilde{M}$ es cosimpléctica.*

Demostración. En primer lugar, teniendo en cuenta que la variedad $\widetilde{M}$ tiene estructura (α, β) trans-Sasakiana podemos establecer por (1.3.12) que

$$(\widetilde{\nabla}_X \phi)U = \alpha(g(X,U)\xi - \eta(U)X) + \beta(g(\phi X,U)\xi - \eta(U)\phi X) = \beta g(NX,U)\xi, \quad (3.4.8)$$

para cualesquiera campos X tangente y U normal de M. Por otra parte, teniendo en cuenta (1.1.1) y (1.1.2), sabemos que

$$\begin{aligned}(\widetilde{\nabla}_X \phi)U =& \widetilde{\nabla}_X \phi U - \phi \widetilde{\nabla}_X U = \\ =& \widetilde{\nabla}_X (tU + nU) - \phi(-A_U X + D_X U) = \\ =& \nabla_X tU + \sigma(X, tU) - A_{nU} X + D_X nU + \\ &+ TA_U X + NA_U X - tD_X U - nD_X U = \\ =& (\nabla_X t)U - A_{nU} X + TA_U X + \sigma(X, tU) + (D_X n)U + NA_U X.\end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Ahora bien, igualando las partes tangentes de (3.4.8) y (3.4.9), tenemos que

$$\beta g(NX,U)\xi = (\nabla_X t)U - A_{nU} X + TA_U X. \quad (3.4.10)$$

Si suponemos que $\nabla N = 0$, podemos comprobar que es equivalente a que $\nabla t = 0$, ya que

$$\begin{aligned}g((\nabla_X N)Y,U) =& g(D_X NY - N\nabla_X Y, U) = \\ =& Xg(NY,U) - g(NY, D_X U) + g(\nabla_X Y, tU) = \\ =& - Xg(Y,tU) + g(Y, tD_X U) + g(\nabla_X Y, tU) = \\ =& - g(\nabla_X Y, tU) - g(Y, \nabla_X tU) + g(Y, tD_X U) + g(\nabla_X Y, tU) = \\ =& - g(Y, (\nabla_X t)U),\end{aligned}$$

para todos X, Y tangentes a M y todo U normal a M. Así, haciendo $U = H$ en (3.4.10) y multiplicando por el campo de estructura ξ, obtenemos que

$$\begin{aligned}\beta g(NX,H) =& g(-A_{nH} X, \xi) = g(\widetilde{\nabla}_X nH, \xi) = -g(nH, \widetilde{\nabla}_X \xi) = \\ =& - g(nH, -\alpha\phi X + \beta(X - \eta(X))\xi) = \alpha g(nH, NX),\end{aligned} \quad (3.4.11)$$

para todo X tangente. De esta forma, el campo NX recorre todo $T^{\perp}M$, luego de (3.4.11), llegamos a que

$$\beta H = \alpha n H,$$

la cual se satisface si y sólo si, o bien $H = 0$ lo que quiere decir que la subvariedad M sea minimal, o bien $\alpha = \beta = 0$ por [41], lo que significa que la variedad ambiente $\widetilde{M}$ tiene estructura cosimpléctica. $\square$

Nota 3.4.2. *Si consideramos la Forma de Maslov adaptada (3.2.85) definida en la sección anterior, $\omega_H + \gamma\eta$, donde denotamos por $\gamma = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\alpha}(\alpha^2 + f_2)$, podemos ver fácilmente que no mejora la conformidad de la Forma de Maslov ω_H, ya que, al plantear la ecuación de Codazzi necesitaríamos de nuevo para poder agrupar los términos que $\nabla N = 0$. Por tanto, la Forma de Maslov adaptada es una 1-forma cerrada para cualquier subvariedad M slant propia de un espacio de curvatura ϕ-seccional constante generalizado $\widetilde{M}(f_1, f_2, f_3)$ con estructura α-Sasakiana, pero no es una 1-forma conforme en general.*

Finalmente, veamos en el siguiente resultado que para el caso en que la subvariedad M sea anti-invariante se cumple la condición de que $\nabla N = 0$ de forma natural. Debido a ello, podíamos demostrar en este caso que la Forma de Maslov de M fuese $\mathcal{D}$-conforme, es decir, conforme para cualquier campo tangente ortogonal al campo de estructura ξ.

Teorema 3.4.3. *Sea M^{m+1} una subvariedad anti-invariante de una variedad Sasakiana $\widetilde{M}^{2m+1}$, tangente a ξ, entonces tenemos que $\nabla N = 0$.*

Demostración. Sean X, Y dos campos tangentes a M ortogonales entre sí y, a su vez, ambos ortogonales al campo de estructura ξ. Así,

$$(\widetilde{\nabla}_X \phi)Y = 0, \tag{3.4.12}$$

donde hemos usado (1.3.9). Además, teniendo en cuenta (1.1.1) y (1.1.2) podemos establecer que

$$(\widetilde{\nabla}_X \phi)Y = -A_{NY}X + D_X NY - N\nabla_X Y - \phi\sigma(X, Y). \tag{3.4.13}$$

De esta forma, de (3.4.12) y (3.4.13) llegamos fácilmente a que

$$D_X NY - N\nabla_X Y = 0,$$

o lo que es lo mismo que $(\nabla_X N)Y = 0$. □

Capítulo 4

La Forma de Maslov en S-variedades

En este capítulo vamos a estudiar la Forma de Maslov de una subvariedad slant no invariante dentro de una S-variedad. Concretamente, estudiaremos cuándo la Forma de Maslov de una subvariedad anti-invariante es cerrada y conforme si la S-variedad ambiente es una S-variedad de curvatura f-seccional constante y en el caso de subvariedades slant propias sólo nos limitaremos a estudiar cuándo es cerrada. Además, vamos a establecer una desigualdad entre H y τ que generaliza la obtenida por L. M. Fernández y A. Prieto-Martín en [33] para subvariedades anti-invariantes de $\mathbb{R}^{2m+s}$. Hemos de indicar que los resultados correspondientes a este capítulo, a excepción de la desigualdad anteriormente mencionada, se encuentran publicados en [8].

Por otra parte, cabe señalar que muchas de las demostraciones de este capítulo son análogas a otras de capítulos anteriores. Sin embargo, hemos decidido detallar la mayoría de ellas para que pueda observarse claramente las diferencias que aparecen al trasladar la subvariedad M de un ambiente Sasakiano en el que trabajamos con un único campo de estructura ξ, a considerarla inmersa dentro de una S-variedad manejando s campos de estructura $\xi_1, \ldots, \xi_s$.

4.1. Subvariedades anti-invariantes

4.1.1. Forma de Maslov cerrada

Sea M^{m+s} una subvariedad anti-invariante de dimensión $m+s$ de una S-variedad de curvatura f-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+s}(c)$, tangente a los campos de estructura $\xi_1, \ldots, \xi_s$, la cual es un caso particular de inmersión slant para $\theta = \pi/2$. En este caso, $tH = fH$. Recordemos que la Forma de Maslov de M se define como la forma dual al campo fH, es decir,

$$\omega_H(X) = g(X, fH).$$

Además, si tomamos una referencia local ortonormal $\{e_1, \dots, e_m, \xi\}$ en M, entonces,

$$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_m, \xi_1, \dots, \xi_s,\, e_{1^*}, \dots, e_{m^*}\}$$

es una base local ortonormal de campos de $\widetilde{M}$, siendo $e_{i^*} = fe_i$ con $i = 1, \dots, m$. Llamaremos a $\mathcal{B}$ una *referencia anti-invariante adaptada.*

Consideramos de nuevo la 1-forma Θ dada por (2.1.2) y calculamos $\mathrm{d}\Theta$ cuando la variedad ambiente es una S-variedad de curvatura f-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+s}(c)$. Para ello, necesitamos el siguiente lema, análogo al Lema 2.1.2:

Lema 4.1.1. *Sea M^{m+s} una subvariedad anti-invariante de una S-variedad $\widetilde{M}^{2m+s}$, tangente a los campos de estructura $\xi_1, \dots, \xi_s$. Entonces, respecto a una referencia anti-invariante adaptada, se verifica:*

$$\omega_i^{j^*} = \omega_j^{i^*}, \tag{4.1.1}$$

$$\omega_{i^*}^{j^*} = \omega_i^j, \tag{4.1.2}$$

para todos $i, j = 1, \dots, m$.

Demostración. Consideremos una referencia anti-invariante adaptada

$$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_m, \xi_1, \dots, \xi_s, e_{1^*}, \dots, e_{m^*}\},$$

siendo $e_{i^*} = \phi e_i$ con $i = 1, \dots, m$. Teniendo en cuenta (1.1.8), podemos establecer que

$$\begin{aligned} \omega_i^{j^*}(X) =& g(\widetilde{\nabla}_X e_i, e_{j^*}) = -g(e_i, \widetilde{\nabla}_X e_{j^*}) = -g(e_i, \widetilde{\nabla}_X \phi e_j) = \\ =& -g(e_i, \phi\widetilde{\nabla}_X e_j) = g(\phi e_i, \widetilde{\nabla}_X e_j) = g(e_{i^*}, \widetilde{\nabla}_X e_j) = \omega_j^{i^*}, \end{aligned}$$

para todo X tangente a M, obteniendo de esta forma (4.1.1). Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned} \omega_{i^*}^{j^*}(X) =& g(\widetilde{\nabla}_X e_{i^*}, e_{j^*}) = g(\widetilde{\nabla}_X \phi e_i, \phi e_j) = g(\phi\widetilde{\nabla}_X e_i, \phi e_j) \\ =& -g(\widetilde{\nabla}_X e_i, \phi^2 e_j) = g(\widetilde{\nabla}_X e_i, e_j) = \omega_i^j, \end{aligned}$$

quedando demostrado el lema. □

Ahora bien, si calculamos $\mathrm{d}\Theta$, resulta que

$$\mathrm{d}\Theta = \sum_{i=1}^m d\omega_i^{i^*} = -\sum_{i=1}^m \sum_A \omega_A^{i^*} \wedge \omega_i^A + \sum_{i=1}^m \Omega_i^{i^*}, \tag{4.1.3}$$

en virtud de las ecuaciones de estructura (1.1.5). Determinemos en primer lugar las formas de curvatura $\Omega_i^{i^*}$:

Lema 4.1.2. *Sea M^{m+s} una subvariedad anti-invariante de una S-variedad de curvatura f-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+s}(c)$, tangente a los campos de estructura $\xi_1,\dots,\xi_s$. Entonces, respecto a una referencia anti-invariante adaptada, se verifica*

$$\Omega_i^{i^*} = -\frac{c+s}{2}\omega^i \wedge \omega^{i^*} - \frac{c-s}{2}\sum_{j=1}^m \omega^j \wedge \omega^{j^*}, \tag{4.1.4}$$

para todo $i = 1,\dots,m$.

Demostración. Partiendo de (1.1.5) resulta que

$$\begin{aligned}
2\Omega_i^{i^*} =& \sum_{C,D} \widetilde{R}(e_C, e_D; e_i, e_{i^*})\omega^C \wedge \omega^D = \sum_{j,k=1}^m \widetilde{R}(e_j, e_k; e_i, e_{i^*})\omega^j \wedge \omega^k + \\
&\sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^s \widetilde{R}(e_j, \xi_\alpha; e_i, e_{i^*})\omega^j \wedge \eta_\alpha + \sum_{j,k=1}^m \widetilde{R}(e_j, e_{k^*}; e_i, e_{i^*})\omega^j \wedge \omega^{k^*} + \\
&\sum_{k=1}^m \sum_{\alpha=1}^s \widetilde{R}(\xi_\alpha, e_k; e_i, e_{i^*})\eta_\alpha \wedge \omega^k + \sum_{\alpha=1}^s \widetilde{R}(\xi_\alpha, \xi_\alpha; e_i, e_{i^*})\eta_\alpha \wedge \eta_\alpha + \\
&\sum_{k=1}^m \sum_{\alpha=1}^s \widetilde{R}(\xi_\alpha, e_{k^*}; e_i, e_{i^*})\eta_\alpha \wedge \omega^{k^*} + \sum_{j,k=1}^m \widetilde{R}(e_{j^*}, e_k; e_i, e_{i^*})\omega^{j^*} \wedge \omega^k + \\
&\sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^s \widetilde{R}(e_{j^*}, \xi_\alpha; e_i, e_{i^*})\omega^{j^*} \wedge \eta_\alpha + \sum_{j,k=1}^m \widetilde{R}(e_{j^*}, e_{k^*}; e_i, e_{i^*})\omega^{j^*} \wedge \omega^{k^*}.
\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Calculemos ahora, a partir de (1.4.6), los distintos coeficientes de (4.1.5):

$$\widetilde{R}(e_j, e_k; e_i, e_{i^*}) = 0, \tag{4.1.6}$$

$$\widetilde{R}(e_j, \xi; e_i, e_{i^*}) = 0, \tag{4.1.7}$$

$$\widetilde{R}(e_j, e_{k^*}; e_i, e_{i^*}) = -\frac{c+3s}{4}\delta_{ij}\delta_{ik} - \frac{c-s}{4}(\delta_{ij}\delta_{ik} + 2\delta_{jk}), \tag{4.1.8}$$

$$\widetilde{R}(\xi, e_k; e_i, e_{i^*}) = 0, \tag{4.1.9}$$

$$\widetilde{R}(\xi, \xi; e_i, e_{i^*}) = 0, \tag{4.1.10}$$

$$\widetilde{R}(\xi, e_{k^*}; e_i, e_{i^*}) = 0, \tag{4.1.11}$$

$$\widetilde{R}(e_{j^*}, e_k; e_i, e_{i^*}) = \frac{c+3s}{4}\delta_{ij}\delta_{ik} + \frac{c-s}{4}(\delta_{ij}\delta_{ik} + 2\delta_{jk}), \tag{4.1.12}$$

$$\widetilde{R}(e_{j^*}, \xi; e_i, e_{i^*}) = 0, \tag{4.1.13}$$

$$\widetilde{R}(e_{j^*}, e_{k^*}; e_i, e_{i^*}) = 0. \tag{4.1.14}$$

Así, de (4.1.5)-(4.1.14) obtenemos:

$$\begin{aligned}
2\Omega_i^{i^*} =& -\frac{c+3s}{4}\sum_{j,k=1}^{m}\delta_{ij}\delta_{ik}\omega^j\wedge\omega^{k^*} - \frac{c-s}{4}\sum_{j,k=1}^{m}(\delta_{ij}\delta_{ik}+2\delta_{jk})\omega^j\wedge\omega^{k^*}+\\
&+\frac{c+3s}{4}\sum_{j,k=1}^{m}\delta_{ij}\delta_{ik}\omega^{j^*}\wedge\omega^{k} + \frac{c-s}{4}\sum_{j,k=1}^{m}(\delta_{ij}\delta_{ik}+2\delta_{jk})\omega^{j^*}\wedge\omega^{k}=\\
=& -\frac{c+3s}{4}\omega^i\wedge\omega^{i^*} - \frac{c-s}{4}\omega^i\wedge\omega^{i^*} - \frac{2(c-s)}{4}\sum_{j=1}^{m}\omega^j\wedge\omega^{j^*}+\\
&+\frac{c+3s}{4}\omega^{i^*}\wedge\omega^{i} + \frac{c-s}{4}\omega^{i^*}\wedge\omega^{i} + \frac{2(c-s)}{4}\sum_{j=1}^{m}\omega^{j^*}\wedge\omega^{j}=\\
=& -\frac{c+s}{2}\omega^i\wedge\omega^{i^*} + \frac{c+s}{2}\omega^{i^*}\wedge\omega^{i} - \frac{c-s}{2}\sum_{j=1}^{m}\omega^j\wedge\omega^{j^*} + \frac{c-s}{2}\sum_{j=1}^{m}\omega^{j^*}\wedge\omega^{j}=\\
=& -(c+s)\omega^i\wedge\omega^{i^*} - (c-s)\sum_{j=1}^{m}\omega^j\wedge\omega^{j^*},
\end{aligned}$$

con lo que queda probado (4.1.4). □

En el siguiente teorema calcularemos dΘ y analizaremos cuándo la 1-forma Θ es cerrada.

Teorema 4.1.3. *Sea M^{m+s} una subvariedad anti-invariante de una S-variedad de curvatura f-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+s}(c)$, tangente a los campos de estructura $\xi_1,\ldots,\xi_s$. Entonces, la 1-forma Θ dada por (2.1.2) verifica:*

$$\mathrm{d}\Theta = -\frac{(m+1)c - sm + 3s}{2}\sum_{i=1}^{m}\omega^i\wedge\omega^{i^*}. \tag{4.1.15}$$

Así, Θ es cerrada si y sólo si

$$c = \frac{s(m-3)}{m+1}.$$

Demostración. Calculamos en primer lugar, a partir de (4.1.4):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\Omega_i^{i^*} =& -\frac{c+s}{2}\sum_{i=1}^{m}\omega^i\wedge\omega^{i^*} - \frac{c-s}{2}m\sum_{j=1}^{m}\omega^j\wedge\omega^{j^*}=\\
=& -\frac{(m+1)c - sm + s}{2}\sum_{i=1}^{m}\omega^i\wedge\omega^{i^*}.
\end{aligned} \tag{4.1.16}$$

Por otra parte,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{A}\omega_A^{i^*}\wedge\omega_i^A=\sum_{i,j=1}^{m}(\omega_j^{i^*}\wedge\omega_i^j+\omega_{j^*}^{i^*}\wedge\omega_i^{j^*})+\sum_{i=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{s}\omega_{m+\alpha}^{i^*}\wedge\omega_i^{m+\alpha}, \tag{4.1.17}$$

donde hemos denotado $e_{m+\alpha}=\xi_\alpha$. Pero, en virtud de (4.1.1) y (4.1.2), se tiene que

$$\sum_{i,j=1}^{m}(\omega_j^{i^*}\wedge\omega_i^j+\omega_{j^*}^{i^*}\wedge\omega_i^{j^*})=0. \tag{4.1.18}$$

Ahora bien, para cada campo tangente X y cada $\alpha=1,\dots,s$,

$$\begin{aligned}\omega_{m+\alpha}^{i^*}=&g(\widetilde{\nabla}_X e_{m+\alpha},e_{i^*})=g(\widetilde{\nabla}_X\xi_\alpha,e_{i^*})=-g(fX,e_{i^*})=\\=&g(X,fe_{i^*})=-g(X,e_i),\end{aligned}$$

por lo que $\omega_{m+\alpha}^{i^*}=-\omega^i$, para cada $\alpha=1,\dots,s$. Análogamente,

$$\begin{aligned}\omega_i^{m+\alpha}(X)=&g(\widetilde{\nabla}_X e_i,e_{m+\alpha})=g(\widetilde{\nabla}_X e_i,\xi_\alpha)=-g(e_i,\widetilde{\nabla}_X\xi_\alpha)=\\=&g(e_i,fX)=-g(X,e_{i^*}),\end{aligned}$$

de donde $\omega_i^{m+\alpha}=-\omega^{i^*}$, para cada $\alpha=1,\dots,s$.

Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{s}\omega_{m+\alpha}^{i^*}\wedge\omega_i^{m+\alpha}=s\sum_{i=1}^{m}\omega^i\wedge\omega^{i^*}. \tag{4.1.19}$$

Finalmente, (4.1.15) se deduce de (4.1.3) y de (4.1.16)-(4.1.19). □

Nota 4.1.4. *Cabe destacar que si hacemos $s=1$ en el Teorema 4.1.3, es decir, si consideramos un único campo de estructura ξ, obtenemos las igualdades establecidas en el Teorema 2.1.4 y en el Corolario 2.1.5 para variedades Sasakianas.*

Nota 4.1.5. *Obsérvese que, en el caso de Θ cerrada, define una clase canónica de cohomología en M, $[\Theta]\in H^1(M;\mathbb{R})$.*

Dado que estamos suponiendo que la subvariedad M^{m+s} tiene dimensión $m+s$ con $m\geq 2$, el Teorema 4.1.3 implica que la 1-forma Θ no es cerrada en el caso de que $\widetilde{M}^{2m+s}(c)$ sea una S-variedad de curvatura f-seccional constante $c=-3s$ (como es el caso de $\mathbb{R}^{2m+s}$ con su estructura usual, dada en [36]). No obstante, podemos definir una nueva 1-forma ω en M como

$$\omega=\Theta+m\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha. \tag{4.1.20}$$

Aplicando directamente el Teorema 4.1.3, se tiene:

Teorema 4.1.6. *Sea M^{m+s} una subvariedad anti-invariante de una S-variedad de curvatura f-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+s}(c)$, tangente a los campos de estructura $\xi_1, \dots, \xi_s$. Entonces, la 1-forma ω dada por (4.1.20) verifica:*

$$\mathrm{d}\omega = -\frac{m+1}{2}(c+3s)\sum_{i=1}^{m} \omega^i \wedge \omega^{i^*}. \tag{4.1.21}$$

Así, ω es cerrada si y sólo si $c = -3s$.

Demostración. De (4.1.20) se deduce que

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\Theta + m \sum_{\alpha=1}^{s} \mathrm{d}\eta_\alpha. \tag{4.1.22}$$

Pero, como $\widetilde{M}^{2m+s}(c)$ es una variedad f-contacto métrica, se cumple que $\mathrm{d}\eta_\alpha = F$ para cada $\alpha = 1, \dots, s$, por lo que, en función de una referencia anti-invariante adaptada, tenemos que

$$\begin{array}{lllllllll} \mathrm{d}\eta_\alpha(e_i, e_j) & = & F(e_i, e_j) & = & g(e_i, fe_j) & = & g(e_i, e_{j^*}) & = & 0, \\ \mathrm{d}\eta_\alpha(e_i, \xi_\alpha) & = & F(e_i, \xi_\alpha) & = & g(e_i, f\xi_\alpha) & = & 0, & & \\ \mathrm{d}\eta_\alpha(e_i, e_{j^*}) & = & F(e_i, e_{j^*}) & = & g(e_i, fe_{j^*}) & = & -g(e_i, e_j) & = & -\delta_{ij}, \\ \mathrm{d}\eta_\alpha(e_{i^*}, e_{j^*}) & = & F(e_{i^*}, e_{j^*}) & = & g(e_{i^*}, fe_{j^*}) & = & -g(fe_i, e_j) & = & 0, \\ \mathrm{d}\eta_\alpha(e_{i^*}, \xi_\alpha) & = & F(e_{i^*}, \xi_\alpha) & = & g(e_{i^*}, f\xi_\alpha) & = & 0, & & \end{array} \tag{4.1.23}$$

para todos $i, j = 1, \dots, m$, $\alpha = 1, \dots, s$.

Así, de (4.1.23) se sigue que:

$$\mathrm{d}\eta_\alpha = -2\sum_{i=1}^{m} \omega^i \wedge \omega^{i^*}, \quad \text{para cada } \alpha = 1, \dots, s. \tag{4.1.24}$$

Finalmente, (4.1.21) resulta de (4.1.15), (4.1.22) y (4.1.24). □

Nota 4.1.7. *De nuevo podemos destacar que si hacemos $s = 1$ en el Teorema 4.1.6, obtenemos directamente el Teorema 2.1.8 y el Corolario 2.1.9 para el caso Sasakiano.*

Nota 4.1.8. *Al igual que observamos para Θ, se tiene ahora que, cuando es cerrada, ω define una clase canónica de cohomología, $[\omega] \in H^1(M;\mathbb{R})$.*

Siguiendo la misma línea, en el siguiente teorema, veremos la relación existente entre la 1-forma ω dada por (4.1.20) y la Forma de Maslov ω_H.

Teorema 4.1.9. *Sea M^{m+s} una subvariedad anti-invariante de una S-variedad de curvatura f-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+s}(c)$, tangente a los campos de estructura $\xi_1, \dots, \xi_s$. Entonces,*

$$\omega_H = -\frac{1}{m+s}\omega \tag{4.1.25}$$

Demostración. Respecto a una referencia anti-invariante adaptada, se tiene

$$\omega_H(e_i) = g(e_i, fH) = -g(fe_i, H) = -g(e_{i^*}, H), \tag{4.1.26}$$

para cada $i = 1, \ldots, m$. Ahora bien, en virtud de (1.4.11) y (1.4.12):

$$H = \frac{1}{m+s} \sum_{j=1}^{m} \sigma(e_j, e_j). \tag{4.1.27}$$

Así, de (4.1.26) y (4.1.27) resulta que

$$\begin{aligned} \omega_H(e_i) =& -\frac{1}{m+s} \sum_{j=1}^{m} g(e_{i^*}, \sigma(e_j, e_j)) = -\frac{1}{m+s} \sum_{j=1}^{m} g(fe_i, \widetilde{\nabla}_{e_j} e_j) = \\ =& \frac{1}{m+s} \sum_{j=1}^{m} g(\widetilde{\nabla}_{e_j} fe_i, e_j). \end{aligned} \tag{4.1.28}$$

Ahora bien, usando (1.4.5) se tiene que:

$$\widetilde{\nabla}_{e_j} fe_i = f\widetilde{\nabla}_{e_j} e_i + \delta_{ij} \sum_{\alpha=1}^{s} \xi_\alpha. \tag{4.1.29}$$

De esta forma, de (4.1.28) y (4.1.29) se obtiene:

$$\begin{aligned} \omega_H(e_i) =& \frac{1}{m+s} \sum_{j=1}^{m} g(f\widetilde{\nabla}_{e_j} e_i, e_j) = -\frac{1}{m+s} \sum_{j=1}^{m} g(\widetilde{\nabla}_{e_j} e_i, fe_j) = \\ =& -\frac{1}{m+s} \sum_{j=1}^{m} g(\widetilde{\nabla}_{e_j} e_i, e_{j^*}). \end{aligned} \tag{4.1.30}$$

Pero,

$$g(\widetilde{\nabla}_{e_j} e_i, e_{j^*}) = g(\sigma(e_j, e_i), e_{j^*}) = g(\sigma(e_i, e_j), e_{j^*}) = g(\widetilde{\nabla}_{e_i} e_j, e_{j^*}), \tag{4.1.31}$$

en virtud de la Fórmula de Gauss y la simetría de σ. Entonces, de (4.1.30) y (4.1.31) resulta que

$$\omega_H(e_i) = -\frac{1}{m+s} \sum_{j=1}^{m} g(\widetilde{\nabla}_{e_i} e_j, e_{j^*}) = -\frac{1}{m+s} \sum_{j=1}^{m} \omega_j^{j^*}(e_i) = -\frac{1}{m+s} \Theta(e_i), \tag{4.1.32}$$

donde hemos usado las definiciones de las formas de conexión y de la 1-forma Θ.

Por otra parte, para cada $\alpha = 1, \ldots, s$:

$$\omega_H(\xi_\alpha) = g(\xi_\alpha, fH) = -g(f\xi_\alpha, H) = 0, \tag{4.1.33}$$

$$
\begin{aligned}
\Theta(\xi_\alpha) &= \sum_{i=1}^{m} \omega_i^{i^*}(\xi_\alpha) = \sum_{i=1}^{m} g(\widetilde{\nabla}_{\xi_\alpha} e_i, e_{i^*}) = \sum_{i=1}^{m} g(\widetilde{\nabla}_{e_i} \xi_\alpha, e_{i^*}) = \\
&= -\sum_{i=1}^{m} g(f e_i, e_{i^*}) = -\sum_{i=1}^{m} g(e_{i^*}, e_{i^*}) = -m,
\end{aligned}
\tag{4.1.34}
$$

donde se ha procedido como en (4.1.31).

Usando ahora (4.1.32), (4.1.33) y (4.1.34), calculamos:

$$
\begin{aligned}
\omega_H &= \sum_{i=1}^{m} \omega_H(e_i)\omega^i + \omega_H(\xi_\alpha)\eta_\alpha = -\frac{1}{m+s} \sum_{i=1}^{m} \Theta(e_i)\omega^i = \\
&= -\frac{1}{m+s}(\Theta + m\eta_\alpha) = -\frac{1}{m+s}\omega,
\end{aligned}
$$

como queríamos probar. □

Corolario 4.1.10. *Sea M^{m+s} una subvariedad anti-invariante de una S-variedad de curvatura f-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+s}(c)$, tangente a los campos de estructura. Entonces, la forma de Maslov ω_H de M es cerrada si y sólo si $c = -3s$.*

Demostración. Basta calcular la diferencial de ω_H en (4.1.25) y aplicar el Teorema (4.1.6). □

Así, en $\mathbb{R}^{2m+s}$ toda subvariedad anti-invariante, de dimensión $m+s$, tangente a los campos de estructura, tiene Forma de Maslov cerrada.

Del Corolario 4.1.10 podemos establecer la siguiente obstrucción topológica de las inmersiones anti-invariantes tangentes a los campos de estructura dentro de una S-variedad de curvatura f-seccional constante $c = -3s$.

Teorema 4.1.11. *Sea M^{m+s} una variedad diferenciable compacta y simplemente conexa de dimensión $m+s$. Entonces, M no puede ser inmersa en una S-variedad de curvatura f-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+s}(-3s)$, de dimensión $2m+s$ como una subvariedad anti-invariante tangente a los campos de estructura sin puntos minimales.*

Demostración. Sea M una subvariedad anti-invariante de $\widetilde{M}(-3s)$, tangente a los campos de estructura, sin puntos minimales. Entonces, H es no nulo en todos los puntos y, por tanto, la Forma de Maslov ω_H también lo es ya que M tiene codimensión m (para probarlo, es suficiente considerar una referencia anti-invariante adaptada). Del Corolario 4.1.10, ω_H es cerrada y por tanto, representa una clase de cohomología $[\omega_H] \in H^1(M;\mathbb{R})$. Como M es compacta, ω_H no puede ser exacta. Así, $[\omega_H]$ es una clase de cohomología no trivial y por tanto, el primer grupo de cohomología $H^1(M;\mathbb{R})$ es no trivial. Así, M no es simplemente conexa, lo cual es una contradicción. □

4.1.2. Forma de Maslov conforme

En esta sección, vamos a estudiar si la Forma de Maslov de una subvariedad anti-invariante M^{m+s} de una S-variedad de curvatura f-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+s}(-3s)$, tangente a los campos de estructura, puede ser conforme en M. Se toma dicha variedad ambiente ya que según hemos visto en el Corolario 4.1.10 es el único caso en el que la subvariedad M tiene Forma de Maslov ω_H cerrada. En primer lugar, vamos a demostrar un resultado más general sobre la conformidad de M:

Teorema 4.1.12. *Sea M^{m+s} una subvariedad anti-invariante de una S-variedad $\widetilde{M}^{2m+s}$, tangente a los campos de estructura y tal que su Forma de Maslov es cerrada. Entonces, esta Forma de Maslov es conforme en M si y sólo si su vector curvatura media es paralelo.*

Demostración. De (1.2.1) y (1.4.9), si Y es tangente a M, tenemos

$$g(\nabla_{\xi_\alpha} fH, Y) = g(\nabla_Y fH, \xi_\alpha) = -g(fH, \nabla_Y \xi_\alpha) = g(fH, TY) = 0$$

y por tanto:

$$\nabla_{\xi_\alpha} fH = 0.$$

Debido a ello, usando (1.2.2), tenemos que ω_H es conforme en M si y sólo si

$$\nabla_X fH = 0,$$

para todo X tangente a M. Pero, como de (1.4.5), $(\widetilde{\nabla}_X f)H = 0$, teniendo en cuenta la componente tangente de esta fórmula, obtenemos $\nabla_X fH - fD_X H = 0$, o lo que es lo mismo, ω_H es conforme en M si y sólo si $D_X H = 0$. □

A continuación, podemos demostrar el siguiente resultado, que nos proporciona una condición suficiente para que la Forma de Maslov de una subvariedad anti-invariante sea $\mathcal{L}$-conforme, es decir, conforme para cualquier campo tangente a la subvariedad y ortogonal a los campos de estructura $\xi_1, \ldots, \xi_s$. Para ello, la segunda forma fundamental de la subvariedad M debe satisfacer una expresión análoga a (3.1.16), la cual obtuvimos analizando qué subvariedades cumplían el caso de la igualdad en la desigualdad entre H y τ, las cuales definimos como subvariedades $*$-slant.

Nota 4.1.13. *Obsérvese, que la condición de que la subvariedad M^{m+s} sea $\mathcal{L}$-conforme es equivalente a que la subvariedad M^{m+1} fuese $\mathcal{D}$-conforme en el caso Sasakiano, ya que como definimos en los Preliminares de esta memoria, la distribución $\mathcal{L}$ es la distribución complementaria ortogonal a la distribución generada por los campos de estructura $\xi_1, \ldots, \xi_s$ de M, al igual que $\mathcal{D}$ es la distribución complementaria ortogonal a ξ en el caso Sasakiano.*

Teorema 4.1.14. *Sea M^{m+s} una subvariedad anti-invariante de una S-variedad de curvatura f-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+s}(-3s)$, tangente a los campos de estructura, con Forma de Maslov cerrada. Si*

$$\begin{aligned}\sigma(X,Y) = \frac{m+s}{m+s+1}\{g(fX,fY)H - (\omega_H(X) + \frac{m+s+1}{m+s}\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(X))fY-\\ - (\omega_H(Y) + \frac{m+s+1}{m+s}\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(Y))fX\},\end{aligned} \tag{4.1.35}$$

para todos X, Y tangentes a M, entonces la Forma de Maslov de M es $\mathcal{L}$-conforme.

Demostración. Sea Y un campo tangente a M, unitario y ortogonal a ξ_α, para cada $\alpha = 1, \ldots, s$. Entonces de (4.1.35) se sigue que:

$$\sigma(Y,Y) = \frac{m+s}{m+s+1}\{H + 2g(fY,H)fY\}. \tag{4.1.36}$$

Tomemos ahora otro campo tangente X, ortogonal a Y. En primer lugar, de (1.1.11) se tiene que:

$$(\widetilde{\nabla}_X\sigma)(Y,Y) = D_X\sigma(Y,Y) - 2\sigma(\nabla_XY,Y). \tag{4.1.37}$$

Por otra parte, a partir de (4.1.36) podemos calcular

$$D_X\sigma(Y,Y) = \frac{m+s}{m+s+1}\{D_XH + 2Xg(fY,H)fY + 2g(fY,H)D_XfY\}, \tag{4.1.38}$$

pero como, en virtud de (1.4.5),

$$\begin{aligned}Xg(fY,H) =& g(\widetilde{\nabla}_XfY,H) + g(fY,\widetilde{\nabla}_XH) =\\ =& g(f\widetilde{\nabla}_XY,H) + g(fY,D_XH),\end{aligned} \tag{4.1.39}$$

sustituyendo (4.1.39) en (4.1.38), obtenemos:

$$\begin{aligned}D_X\sigma(Y,Y) = \frac{m+s}{m+s+1}\{D_XH + 2g(f\widetilde{\nabla}_XY,H)fY+\\ + 2g(fY,D_XH)fY + 2g(fY,H)D_XfY\}.\end{aligned} \tag{4.1.40}$$

Por otro lado, a partir de (4.1.35), calculamos

$$\sigma(\nabla_XY,Y) = \frac{m+s}{m+s+1}\{g(f\nabla_XY,H)fY + g(fY,H)f\nabla_XY\}, \tag{4.1.41}$$

dado que $g(\nabla_XY,Y) = 0 = \eta_\alpha(\nabla_XY)$.

Ahora bien, sustituyendo (4.1.40) y (4.1.41) en (4.1.37), deducimos que:

$$\begin{aligned}(\widetilde{\nabla}_X\sigma)(Y,Y) =& \frac{m+s}{m+s+1}\{D_XH + 2g(f\widetilde{\nabla}_XY,H)fY + 2g(fY,D_XH)fY+ \\ &+ 2g(fY,H)D_XfY - 2g(f\nabla_XY,H)fY - 2g(fY,H)f\nabla_XY\}.\end{aligned} \tag{4.1.42}$$

Pero, al ser fH tangente,

$$g(f\widetilde{\nabla}_XY,H) = -g(\widetilde{\nabla}_XY,fH) = -g(\nabla_XY,fH) = g(f\nabla_XY,H), \tag{4.1.43}$$

mientras que, al ser $(\widetilde{\nabla}_Xf)Y = 0$, de las Fórmulas de Gauss (1.1.1) y Weingarten (1.1.2) se sigue que:

$$D_XfY = f\nabla_XY. \tag{4.1.44}$$

Así, usando (4.1.43) y (4.1.44), la expresión (4.1.42) se reduce a

$$(\widetilde{\nabla}_X\sigma)(Y,Y) = \frac{m+s}{m+s+1}\{D_XH + 2g(fY,D_XH)fY\}. \tag{4.1.45}$$

Supongamos ahora que el campo X es también ortogonal a ξ_α. De nuevo, a partir de (1.1.11):

$$(\widetilde{\nabla}_Y\sigma)(X,Y) = D_Y\sigma(X,Y) - \sigma(\nabla_YX,Y) - \sigma(X,\nabla_YY). \tag{4.1.46}$$

Pero, usando (4.1.35), calculamos:

$$\sigma(X,Y) = \frac{m+s}{m+s+1}\{g(fX,H)fY + g(fY,H)fX\}.$$

Así,

$$\begin{aligned}D_Y\sigma(X,Y) =& \frac{m+s}{m+s+1}\{g(\widetilde{\nabla}_YfX,H)fY + g(fX,\widetilde{\nabla}_YH)fY + g(fX,H)D_YfY+ \\ &+ g(\widetilde{\nabla}_YfY,H)fX + g(fY,\widetilde{\nabla}_YH)fX + g(fY,H)D_YfX\}.\end{aligned} \tag{4.1.47}$$

Por otra parte, utilizando de nuevo (4.1.35), tenemos

$$\sigma(\nabla_YX,Y) = \frac{m+s}{m+s+1}\{g(\nabla_YX,Y)H + g(f\nabla_YX,H)fY + g(fY,H)f\nabla_YX\}, \tag{4.1.48}$$

y además,

$$\sigma(X,\nabla_YY) = \frac{m+s}{m++s+1}\{g(X,\nabla_YY)H + g(fX,H)f\nabla_YY + g(f\nabla_YY,H)fX\}. \tag{4.1.49}$$

De esta forma, sustituyendo (4.1.47), (4.1.48) y (4.1.49) en (4.1.46) y teniendo en cuenta (4.1.44) y que $g((\widetilde{\nabla}_X f)Y, H) = 0$ por (1.4.5), obtenemos que

$$(\widetilde{\nabla}_Y \sigma)(X, Y) = \frac{m+s}{m+s+1}\{g(fX, D_Y H)fY + g(fY, D_Y H)fX\}. \tag{4.1.50}$$

Ahora, teniendo en cuenta que, en virtud de (1.4.6), $(\widetilde{R}(X, Y)Y)^{\perp} = 0$, la ecuación de Codazzi (1.1.12) implica que

$$(\widetilde{\nabla}_X \sigma)(Y, Y) - (\widetilde{\nabla}_Y \sigma)(X, Y) = 0,$$

por lo que, restando (4.1.45) y (4.1.50) llegamos a que:

$$D_X H = g(fX, D_Y H)fY + g(fY, D_Y H)fX - 2g(fY, D_X H)fY. \tag{4.1.51}$$

Pero, como $(\widetilde{\nabla}_X f)H = 0$, es fácil comprobar, usando argumentos habituales, que

$$g(D_X H, fY) = -g(\nabla_X fH, Y)$$

y, análogamente,

$$g(D_Y H, fX) = -g(\nabla_Y fH, X).$$

Ahora bien, como M tiene Forma de Maslov cerrada, sabemos que fH es un campo cerrado, lo que quiere decir que las expresiones anteriores coinciden. Así, la ecuación (4.1.51) se reduce a

$$D_X H = g(fY, D_Y H)fX - g(fY, D_X H)fY. \tag{4.1.52}$$

Es más, a partir de (4.1.52), se tiene que

$$g(fY, D_X H) = -g(fY, D_X H),$$

pues $g(fX, fY) = 0$ y $g(fY, fY) = 1$, con lo que

$$g(fY, D_X H) = 0$$

y podemos escribir (4.1.52) simplemente como:

$$D_X H = g(fY, D_Y H)fX. \tag{4.1.53}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta de nuevo que $(\widetilde{\nabla}_X f)H = 0$, se comprueba fácilmente que para cualquier campo Z tangente a M,

$$g(\nabla_X fH, Z) = -g(D_X H, fZ) = -g(D_Y H, fY)g(X, Z),$$

donde se ha usado (4.1.53). Así,

$$\nabla_X fH = -g(D_Y H, fY)X, \tag{4.1.54}$$

lo que significa que el campo fH es $\mathcal{L}$-conforme. $\square$

Nota 4.1.15. *Podemos destacar que si consideramos un único campo de estructura ξ, es decir hacemos $s = 1$ en (4.1.35), obtenemos (2.2.1), que era la expresión de la segunda forma fundamental de la subvariedad que nos aportaba la $\mathcal{D}$-conformidad de la Forma de Maslov para subvariedades anti-invariantes en el caso Sasakiano.*

Nota 4.1.16. *Observemos que el resultado anterior no puede mejorarse para obtener que fH sea conforme, pues se puede comprobar sin dificultad que, al ser fH cerrado, se tiene que*

$$\nabla_{\xi_\alpha} fH = 0, \tag{4.1.55}$$

para $\alpha = 1, \ldots, s$. Por otra parte, para un campo tangente X cualquiera, de (4.1.54) y (4.1.55) se tendría que:

$$\nabla_X fH = -g(D_Y H, fY)(X - \eta(X)\xi_\alpha).$$

Ahora bien, cabe preguntarse qué subvariedades verifican la condición (4.1.35). Un caso particularmente importante es el de las ya mencionadas subvariedades totalmente f-geodésicas (1.4.13).

Está claro que una subvariedad con esta propiedad ha de ser minimal. Así, (1.4.10) y (1.4.13) implican que toda subvariedad anti-invariante y totalmente f-geodésica, verifica la condición (4.1.35).

Por otra parte, si tomamos $\mathbb{R}^{2m+s}$ como variedad ambiente, sabemos que la Forma de Maslov es cerrada tal y como se probó en el Corolario 4.1.10. Además, en este caso, L. M. Fernández y A. Prieto-Martín demostraron en [33] que la condición (4.1.35) caracteriza a las subvariedades anti-invariantes que satisfacen el caso de la igualdad en

$$\|H\|^2 \geq \frac{2(m+2)}{(m+s)^2(m-1)}\tau,$$

donde τ denota la curvatura escalar de la subvariedad, de dimensión $m + s$.

Dada una subvariedad anti-invariante M de $\mathbb{R}^{2m+s}$, consideremos ahora la sumersión Riemanniana $\pi : \mathbb{R}^{2m+s} \to \mathbb{C}^m$ dada por

$$\pi(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_s) = \frac{1}{2}(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_m),$$

y supongamos que existe una subvariedad Lagrangiana $\widehat{M}$ de $\mathbb{C}^m$, tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2m+s} \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \widehat{M} & \longrightarrow & \mathbb{C}^m, \end{array}$$

donde M es el conjunto de fibras sobre $\widehat{M}$. En estas condiciones, también se prueba en [33] que M verifica la condición (4.1.35) si y sólo si es totalmente f-geodésica o localmente isométrica al producto Riemanniano de una porción de una esfera de Whitney y $\mathbb{R}^s$. Así, el Teorema 4.1.14 implica que cada una de estas subvariedades tiene Forma de Maslov $\mathcal{L}$-conforme.

4.2. Subvariedades slant

4.2.1. Forma de Maslov cerrada

El objetivo de esta sección es estudiar cuándo la Forma de Maslov ω_H dada por (2.1.1) es una forma cerrada en el caso en que tengamos una subvariedad θ-slant propia M^{m+s} de dimensión $m+s$ y la S-variedad ambiente sea una S-variedad de curvatura f-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+s}(c)$ de dimensión $2m+s$. Como ya mencionamos anteriormente que m debe ser par, podemos escribir $m = 2k$. Tomamos una referencia slant adaptada al estilo de la referencia construida anteriormente en la Nota 2.1.7.

Sea e_1 un campo tangente unitario en M ortogonal a los campos de estructura $\xi_1, \ldots, \xi_s$. A continuación, tomamos:

$$e_2 = (\sec\theta)Te_1, \quad e_{1*} = (\csc\theta)Ne_1, \quad e_{2*} = (\csc\theta)Ne_2.$$

Si $k > 1$, entonces, por inducción, para cada $l = 1, \ldots, k-1$, elegimos un campo tangente unitario e_{2l+1} en M tal que e_{2l+1} es perpendicular a $e_1, e_2, \ldots, e_{2l-1}, e_{2l}, \xi_1, \ldots, \xi_s$ y tomamos:

$$e_{2l+2} = (\sec\theta)Te_{2l+1}, \quad e_{(2l+1)*} = (\csc\theta)Ne_{2l+1}, \quad e_{(2l+2)*} = (\csc\theta)Ne_{2l+2}.$$

De esta forma, tenemos la referencia slant adaptada

$$\{e_1, \ldots, e_m, \xi_1, \ldots, \xi_s, e_{1*}, \ldots, e_{m*}\},$$

donde $e_1, \ldots, e_m \in \mathcal{L}$ y $e_{1*}, \ldots, e_{m*}$ son normales a M.

Siguiendo la misma línea del capítulo anterior, consideramos en primer lugar la 1-forma Θ definida por (2.1.2) con el objetivo de calcular dΘ y estudiar cuándo esta 1-forma es cerrada. Para ello, necesitamos el siguiente lema previo cuya demostración es análoga a la del Lema 3.2.1:

Lema 4.2.1. *Sea M^{m+s} una subvariedad slant de una S-variedad $\widetilde{M}^{2m+s}$. Entonces, respecto a una referencia slant adaptada, se verifica:*

$$\omega_{2i}^{(2j)^*} + \omega_{2i-1}^{(2j-1)^*} = \omega_{2j}^{(2i)^*} + \omega_{2j-1}^{(2i-1)^*}, \tag{4.2.1}$$

$$\omega_{(2i)^*}^{(2j)^*} - \omega_{(2i-2)^*}^{(2j-1)^*} = \omega_{2i}^{2j} - \omega_{2i-1}^{2j-1}, \tag{4.2.2}$$

$$\omega_{2j}^{2i-1} - \omega_{(2j)^*}^{(2i-1)^*} = \omega_{2i}^{2j-1} - \omega_{(2i)^*}^{(2j-1)^*}, \tag{4.2.3}$$

para todos $i, j = 1, \ldots, m$.

Ahora bien, si calculamos dΘ directamente resulta que

$$
\begin{aligned}
d\Theta = \sum_{i=1}^{m} d\omega_i^{i^*} &= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{A}\omega_A^{i^*}\wedge\omega_i^A + \sum_{i=1}^{m}\Omega_i^{i^*} \\
&= -\sum_{j=1}^{k}\sum_{A}\omega_A^{(2j-1)^*}\wedge\omega_{2j-1}^A + \sum_{j=1}^{k}\Omega_{2j-1}^{(2j-1)^*} - \\
&\quad -\sum_{j=1}^{k}\sum_{A}\omega_A^{(2j)^*}\wedge\omega_{2j}^A + \sum_{j=1}^{k}\Omega_{2j}^{(2j)^*},
\end{aligned}
\tag{4.2.4}
$$

en virtud de las ecuaciones de estructura (1.1.5). Determinemos en primer lugar las formas de curvatura $\Omega_{2j-1}^{(2j-1)^*}$ y $\Omega_{2j}^{(2j)^*}$:

Lema 4.2.2. *Sea M^{m+s} una subvariedad slant de una S-variedad $\widetilde{M}^{2m+s}$. Entonces, respecto a una referencia slant adaptada, se verifica*

$$
\begin{aligned}
\Omega_{2j-1}^{(2j-1)^*} =& \frac{c-s}{4}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\left(-\omega^{2j-1}\wedge\omega^{2j}+\omega^{(2j-1)^*}\wedge\omega^{(2j)^*}\right) + \\
& \frac{c-s}{4}\cos^2\theta\omega^{2j}\wedge\omega^{(2j)^*} - \left(\frac{c+3s}{4}+\frac{c-s}{4}\operatorname{sen}^2\theta\right)\omega^{2j-1}\wedge\omega^{(2j-1)^*} + \\
& \frac{c-s}{2}\sum_{p=1}^{k}\{\operatorname{sen}\theta\cos\theta\left(-\omega^{2p-1}\wedge\omega^{2p}+\omega^{(2p-1)^*}\wedge\omega^{(2p)^*}\right) - \\
& \operatorname{sen}^2\theta(\omega^{2p}\wedge\omega^{(2p)^*}+\omega^{2p-1}\wedge\omega^{(2p-1)^*})\},
\end{aligned}
\tag{4.2.5}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega_{2j}^{(2j)^*} =& \frac{c-s}{4}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\left(-\omega^{2j-1}\wedge\omega^{2j}+\omega^{(2j-1)^*}\wedge\omega^{(2j)^*}\right) - \\
& \left(\frac{c+3s}{4}+\frac{c-s}{4}\operatorname{sen}^2\theta\right)\omega^{2j}\wedge\omega^{(2j)^*} + \frac{c-s}{4}\cos^2\theta\omega^{2j-1}\wedge\omega^{(2j-1)^*} + \\
& \frac{c-s}{2}\sum_{p=1}^{k}\{\operatorname{sen}\theta\cos\theta\left(-\omega^{2p-1}\wedge\omega^{2p}+\omega^{(2p-1)^*}\wedge\omega^{(2p)^*}\right) - \\
& \operatorname{sen}^2\theta\left(\omega^{2p}\wedge\omega^{(2p)^*}+\omega^{2p-1}\wedge\omega^{(2p-1)^*}\right)\},
\end{aligned}
\tag{4.2.6}
$$

para todo $j = 1, \dots, k$.

Demostración. Partiendo de (1.1.5) resulta que

$$2\Omega_{2j}^{(2j)^*} = \sum_{C,D} \widetilde{R}(e_C, e_D; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^C \wedge \omega^D = \sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{2p}, e_{2q}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{2p} \wedge \omega^{2q} +$$

$$\sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{2p}, e_{2q-1}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{2p} \wedge \omega^{2q-1} + \sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{2p}, e_{(2q)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{2p} \wedge \omega^{(2q)^*} +$$

$$\sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{2p}, e_{(2q-1)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{2p} \wedge \omega^{(2q-1)^*} + \sum_{p=1}^{k} \widetilde{R}(e_{2p}, \xi_\alpha; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{2p} \wedge \eta_\alpha +$$

$$\sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{2p-1}, e_{2q}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{2p-1} \wedge \omega^{2q} + \sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{2p-1}, e_{2q-1}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{2p-1} \wedge \omega^{2q-1} +$$

$$\sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{2p-1}, e_{(2q)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{2p-1} \wedge \omega^{(2q)^*} + \sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{2p-1}, e_{(2q-1)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{2p-1} \wedge \omega^{(2q-1)^*} +$$

$$\sum_{p=1}^{k} \widetilde{R}(e_{2p-1}, \xi_\alpha; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{2p-1} \wedge \eta_\alpha + \sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{(2p)^*}, e_{2q}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{(2p)^*} \wedge \omega^{2q} +$$

$$\sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{(2p)^*}, e_{2q-1}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{(2p)^*} \wedge \omega^{2q-1} + \sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{(2p)^*}, e_{(2q)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{(2p)^*} \wedge \omega^{(2q)^*} +$$

$$\sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{(2p)^*}, e_{(2q-1)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{(2p)^*} \wedge \omega^{(2q-1)^*} + \sum_{p=1}^{k} \widetilde{R}(e_{(2p)^*}, \xi; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{(2p)^*} \wedge \eta_\alpha +$$

$$\sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{(2p-1)^*}, e_{2q}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{(2p-1)^*} \wedge \omega^{2q} + \sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{(2p-1)^*}, e_{2q-1}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{(2p-1)^*} \wedge \omega^{2q-1} +$$

$$\sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{(2p-1)^*}, e_{(2q)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{(2p-1)^*} \wedge \omega^{(2q)^*} +$$

$$\sum_{p,q=1}^{k} \widetilde{R}(e_{(2p-1)^*}, e_{(2q-1)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{(2p-1)^*} \wedge \omega^{(2q-1)^*} +$$

$$\sum_{p=1}^{k} \widetilde{R}(e_{(2p-1)^*}, \xi_\alpha; e_{2j}, e_{(2j)^*})\omega^{(2p-1)^*} \wedge \eta_\alpha + \sum_{q=1}^{k} \widetilde{R}(\xi_\alpha, e_{2q}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\eta_\alpha \wedge \omega^{2q} +$$

$$\sum_{q=1}^{k} \widetilde{R}(\xi_\alpha, e_{2q-1}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\eta_\alpha \wedge \omega^{2q-1} + \sum_{q=1}^{k} \widetilde{R}(\xi_\alpha, e_{(2q)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\eta_\alpha \wedge \omega^{(2q)^*} +$$

$$\sum_{q=1}^{k} \widetilde{R}(\xi_\alpha, e_{(2q-1)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*})\eta_\alpha \wedge \omega^{(2q-1)^*} + \widetilde{R}(\xi_\alpha, \xi_\alpha; e_{2j}, e_{(2j)^*})\eta_\alpha \wedge \eta_\alpha, \tag{4.2.7}$$

para $\alpha = 1, \ldots, s$. Calculemos ahora, a partir de (1.3.10), los distintos coeficientes de (4.2.7):

$$\widetilde{R}(e_{2p}, e_{2q}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{4.2.8}$$

$$\widetilde{R}(e_{2p}, e_{2q-1}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = \frac{c-s}{4}(\cos\theta\delta_{jq}\operatorname{sen}\theta\delta_{jp} + 2\cos\theta\delta_{pq}\operatorname{sen}\theta), \tag{4.2.9}$$

$$\widetilde{R}(e_{2p}, e_{(2q)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = -\frac{c+3s}{4}\delta_{jp}\delta_{jq} + \frac{c-s}{4}(-\operatorname{sen}^2\theta\delta_{jq}\delta_{jp} - 2\operatorname{sen}^2\theta\delta_{pq}), \tag{4.2.10}$$

$$\widetilde{R}(e_{2p}, e_{(2q-1)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{4.2.11}$$

$$\widetilde{R}(e_{2p}, \xi_\alpha; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{4.2.12}$$

$$\widetilde{R}(e_{2p-1}, e_{2q}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = \frac{c-s}{4}(-\cos\theta\delta_{jp}\operatorname{sen}\theta\delta_{jq} - 2\cos\theta\delta_{pq}\operatorname{sen}\theta), \tag{4.2.13}$$

$$\widetilde{R}(e_{2p-1}, e_{2q-1}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{4.2.14}$$

$$\widetilde{R}(e_{2p-1}, e_{(2q)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{4.2.15}$$

$$\widetilde{R}(e_{2p-1}, e_{(2q-1)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = \frac{c-s}{4}(\cos^2\theta\delta_{jp}\delta_{jq} - 2\operatorname{sen}^2\theta\delta_{pq}), \tag{4.2.16}$$

$$\widetilde{R}(e_{2p-1}, \xi_\alpha; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{4.2.17}$$

$$\widetilde{R}(e_{(2p)^*}, e_{2q}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = \frac{c-s}{4}(\operatorname{sen}^2\theta\delta_{jp}\delta_{jq} + 2\operatorname{sen}^2\theta\delta_{pq}) + \frac{c+3s}{4}(\delta_{jp}\delta_{jq}), \tag{4.2.18}$$

$$\widetilde{R}(e_{(2p)^*}, e_{2q-1}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{4.2.19}$$

$$\widetilde{R}(e_{(2p)^*}, e_{(2q)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{4.2.20}$$

$$\widetilde{R}(e_{(2p)^*}, e_{(2q-1)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = \frac{c-s}{4}(-\operatorname{sen}\theta\cos\theta\delta_{jp}\delta_{jq} - 2\cos\theta\delta_{pq}\operatorname{sen}\theta), \tag{4.2.21}$$

$$\widetilde{R}(e_{(2p)^*}, \xi_\alpha; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{4.2.22}$$

$$\widetilde{R}(e_{(2p-1)^*}, e_{2q}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{4.2.23}$$

$$\widetilde{R}(e_{(2p-1)^*}, e_{2q-1}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = \frac{c-s}{4}(-\cos^2\theta\delta_{jp}\delta_{jq} + 2\operatorname{sen}^2\theta\delta_{pq}), \tag{4.2.24}$$

$$\widetilde{R}(e_{(2p-1)^*}, e_{(2q)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = \frac{c-s}{4}(\operatorname{sen}\theta\cos\theta\delta_{jp}\delta_{jq} + 2\cos\theta\delta_{pq}\operatorname{sen}\theta), \tag{4.2.25}$$

$$\widetilde{R}(e_{(2p-1)^*}, e_{(2q-1)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{4.2.26}$$

$$\widetilde{R}(e_{(2p-1)^*}, \xi_\alpha; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{4.2.27}$$

$$\widetilde{R}(\xi_\alpha, e_{2q}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{4.2.28}$$

$$\widetilde{R}(\xi_\alpha, e_{2q-1}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{4.2.29}$$

$$\widetilde{R}(\xi_\alpha, e_{(2q)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{4.2.30}$$

$$\widetilde{R}(\xi_\alpha, e_{(2q-1)^*}; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{4.2.31}$$

$$\widetilde{R}(\xi_\alpha, \xi_\alpha; e_{2j}, e_{(2j)^*}) = 0, \tag{4.2.32}$$

Así, de (4.2.7)-(4.2.32) tenemos (4.2.6). Análogamente, se demuestra (4.2.5). □

Ya podemos calcular la diferencial de la 1-forma Θ.

Teorema 4.2.3. *Sea M^{m+s} una subvariedad slant propia de una S-variedad de curvatura f-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+s}(c)$. Entonces, la 1-forma Θ dada por (2.1.2) satisface:*

$$\begin{aligned} d\Theta = & -\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{(m+1)c - s(m-3)}{2}\left(\sum_{j=1}^{k}\omega^{2j-1}\wedge\omega^{2j} - \sum_{j=1}^{k}\omega^{(2j-1)^*}\wedge\omega^{(2j)^*}\right) - \\ & -\operatorname{sen}^2\theta\frac{(m+1)c - s(m-3)}{2}\left(\sum_{j=1}^{k}\omega^{2j-1}\wedge\omega^{(2j-1)^*} + \sum_{j=1}^{k}\omega^{2j}\wedge\omega^{(2j)^*}\right), \end{aligned} \tag{4.2.33}$$

donde θ denota el ángulo slant de M.

Demostración. Calculamos en primer lugar, a partir de (4.2.5) y de (4.2.6):

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{k}\Omega_{2j-1}^{(2j-1)^*} + \sum_{j=1}^{k}\Omega_{2j}^{(2j)^*} = \sum_{j=1}^{k}\Bigg\{\frac{c-s}{4}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\left(-\omega^{2j-1}\wedge\omega^{2j} + \omega^{(2j-1)^*}\wedge\omega^{(2j)^*}\right) \\ &+\frac{c-s}{4}\cos^2\theta\omega^{2j}\wedge\omega^{(2j)^*} - \left(\frac{c+3s}{4} + \frac{c-s}{4}\operatorname{sen}^2\theta\right)\omega^{2j-1}\wedge\omega^{(2j-1)^*}\Bigg\} \\ &+2\frac{c-s}{4}\sum_{p=1}^{k}\{\operatorname{sen}\theta\cos\theta\left(-\omega^{2p-1}\wedge\omega^{2p} + \omega^{(2p-1)^*}\wedge\omega^{(2p)^*}\right) \\ &-\operatorname{sen}^2\theta\left(\omega^{2p}\wedge\omega^{(2p)^*} + \omega^{2p-1}\wedge\omega^{(2p-1)^*}\right)\} \\ &+\sum_{j=1}^{k}\Bigg\{\frac{c-s}{4}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\left(-\omega^{2j-1}\wedge\omega^{2j} + \omega^{(2j-1)^*}\wedge\omega^{(2j)^*}\right) \\ &-\left(\frac{c+3s}{4} + \frac{c-s}{4}\operatorname{sen}^2\theta\right)\omega^{2j}\wedge\omega^{(2j)^*} + \frac{c-s}{4}\cos^2\theta\omega^{2j-1}\wedge\omega^{(2j-1)^*}\Bigg\} \\ &+2\frac{c-s}{4}\sum_{p=1}^{k}\{\operatorname{sen}\theta\cos\theta\left(-\omega^{2p-1}\wedge\omega^{2p} + \omega^{(2p-1)^*}\wedge\omega^{(2p)^*}\right) \\ &-\operatorname{sen}^2\theta\left(\omega^{2p}\wedge\omega^{(2p)^*} + \omega^{2p-1}\wedge\omega^{(2p-1)^*}\right)\} = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{k} \left\{ 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \frac{c-s}{4}(m+1) \left(\omega^{(2j-1)^*} \wedge \omega^{(2j)^*} - \omega^{2j-1} \wedge \omega^{2j}\right) \right. \\
&+ \left(-\frac{c-s}{4} \operatorname{sen}^2\theta (2m+1) + \frac{c-s}{4} \cos^2\theta - \frac{c+3s}{4} \right) \cdot \\
&\left. \cdot \left(\omega^{2j} \wedge \omega^{(2j)^*} + \omega^{2j-1} \wedge \omega^{(2j-1)^*}\right) \right\}.
\end{aligned} \tag{4.2.34}
$$

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
-\sum_{j=1}^{k} \sum_{A} \omega_A^{(2j)^*} \wedge \omega_{2j}^A = -\sum_{j=1}^{k} & \left(\sum_{p=1}^{k} \omega_{2p-1}^{(2j)^*} \wedge \omega_{2j}^{2p-1} + \sum_{p=1}^{k} \omega_{2p}^{(2j)^*} \wedge \omega_{2j}^{2p} + \right. \\
& + \sum_{p=1}^{k} \omega_{(2p-1)^*}^{(2j)^*} \wedge \omega_{2j}^{(2p-1)^*} + \sum_{p=1}^{k} \omega_{(2p)^*}^{(2j)^*} \wedge \omega_{2j}^{(2p)^*} + \\
& \left. + \sum_{\alpha=1}^{s} \omega_{\xi_\alpha}^{(2j)^*} \wedge \omega_{2j}^{\xi_\alpha} \right).
\end{aligned} \tag{4.2.35}
$$

Pero, de (4.2.1), (4.2.2) y (4.2.3) y siguiendo los mismos pasos de [26, Teorema 3.1], llegamos a

$$
-\sum_{i,j=1}^{m} (\omega_j^{i^*} \wedge \omega_i^j + \omega_{j^*}^{i^*} \wedge \omega_i^{j^*}) = 0. \tag{4.2.36}
$$

Ahora bien, considerando un campo X cualquiera, para cada $\alpha = 1, \ldots, s$ y teniendo en cuenta (1.4.4), podemos establecer que

$$
\begin{aligned}
\omega_{\xi_\alpha}^{(2j)^*}(X) =& g(\widetilde{\nabla}_X \xi_\alpha, e_{(2j)^*}) = \\
=& g(-fX, e_{(2j)^*}) = g(X, fe_{(2j)^*}) = g(te_{(2j)^*}, X) + g(ne_{(2j)^*}, X) = \\
=& -\operatorname{sen}\theta g(e_{2j}, X) + \cos\theta g(e_{(2j-1)^*}, X),
\end{aligned}
$$

por lo que $\omega_{\xi_\alpha}^{(2j)^*} = \cos\theta \omega^{(2j-1)^*} - \operatorname{sen}\theta \omega^{2j}$, para cada $\alpha = 1, \ldots, s$. Análogamente,

$$
\begin{aligned}
\omega_{2j}^{\xi_\alpha}(X) =& g(\widetilde{\nabla}_X e_{2j}, \xi_\alpha) = -g(e_{2j}, \widetilde{\nabla}_X \xi_\alpha) = \\
=& g(e_{2j}, fX) = -g(fe_{2j}, X) = -g(Te_{2j}, X) - g(Ne_{2j}, X) = \\
=& -\operatorname{sen}\theta g(e_{(2j)^*}, X) + \cos\theta g(e_{2j-1}, X),
\end{aligned}
$$

de donde $\omega_{2j}^{\xi_\alpha} = \cos\theta \omega^{2j-1} - \operatorname{sen}\theta \omega^{(2j)^*}$, para cada $\alpha = 1, \ldots, s$.

Luego,

$$
\begin{aligned}
\omega_{\xi_\alpha}^{(2j)^*} \wedge \omega_{2j}^{\xi_\alpha} =& \operatorname{sen}\theta \cos\theta \omega^{2j-1} \wedge \omega^{2j} + \operatorname{sen}^2\theta \omega^{2j} \wedge \omega^{(2j)^*} - \\
& - \cos^2\theta \omega^{2j-1} \wedge \omega^{(2j-1)^*} - \operatorname{sen}\theta \cos\theta \omega^{(2j-1)^*} \wedge \omega^{(2j)^*},
\end{aligned}
$$

para cada $\alpha = 1, \ldots, s$. Análogamente se tiene que

$$\begin{aligned}\omega_{\xi_\alpha}^{(2j-1)^*} \wedge \omega_{2j-1}^{\xi_\alpha} =& \operatorname{sen}\theta\cos\theta\omega^{2j-1} \wedge \omega^{2j} + \operatorname{sen}^2\theta\omega^{2j-1} \wedge \omega^{(2j-1)^*} - \\ &- \cos^2\theta\omega^{2j} \wedge \omega^{(2j)^*} - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\omega^{(2j-1)^*} \wedge \omega^{(2j)^*},\end{aligned}$$

para cada $\alpha = 1, \ldots, s$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}-\sum_{j=1}^{k}(\omega_{\xi_\alpha}^{(2j-1)^*} \wedge \omega_{2j-1}^{\xi_\alpha} + \omega_{\xi_\alpha}^{(2j)^*} \wedge \omega_{2j}^{\xi_\alpha}) =& -2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\sum_{j=1}^{k}\big\{\omega^{2j-1} \wedge \omega^{2j} + \\ &+(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)(\omega^{2j-1} \wedge \omega^{(2j-1)^*} + \omega^{2j} \wedge \omega^{(2j)^*}) + \\ &+ 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\omega^{(2j-1)^*} \wedge \omega^{(2j)^*}\big\},\end{aligned} \tag{4.2.37}$$

para cada $\alpha = 1, \ldots, s$. Así, (4.2.33) se deduce de (4.2.4) y de (4.2.34)-(4.2.37). □

Corolario 4.2.4. *Sea M^{m+s} una subvariedad slant propia de una S-variedad de curvatura f-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+s}(c)$. Entonces, la 1-forma Θ dada por (2.1.2) es cerrada si y sólo si*

$$c = \frac{s(m-3)}{m+1}. \tag{4.2.38}$$

Demostración. La demostración es inmediata haciendo $\mathrm{d}\Theta = 0$ en el Teorema 4.2.3. □

Nota 4.2.5. *Podemos destacar que (4.2.33) y (4.2.38) coinciden con las igualdades del Teorema 4.1.3 para $\theta = \pi/2$. Además, ya habíamos comentado anteriormente que, para $s = 1$, las igualdades del Teorema 4.1.3 coinciden con las obtenidas en el Teorema 2.1.4 y en el Corolario 2.1.5 para el caso Sasakiano.*

Nota 4.2.6. *Obsérvese que, en el caso de Θ cerrada, define una clase canónica de cohomología en M, $[\Theta] \in H^1(M;\mathbb{R})$.*

Dado que estamos suponiendo que la subvariedad M^{m+s} tiene dimensión $m+s$ con $m \geq 2$, el Teorema 4.2.3 implica que la 1-forma Θ no es cerrada en el caso de que $\widetilde{M}^{2m+s}(c)$ sea una S-variedad de curvatura f-seccional constante $c = -3s$ (como es el caso de $\mathbb{R}^{2m+s}$ con su S-estructura usual, dada en [36]). No obstante, podemos definir una nueva 1-forma ω en M. Sabemos que

$$\begin{aligned}\Theta &= \sum_{l=1}^{2k}\omega_l^{l^*} \\ \omega_l^{l^*} &= \sum_{i=1}^{2k}\sigma_{li}^{l^*}\omega^i,\end{aligned}$$

por lo que

$$\Theta=\sum_{l=1}^{2k}\sum_{i=1}^{2k}\sigma_{li}^{l^*}\omega^i+\sum_{l=1}^{2k}\sum_{\alpha=1}^{s}\sigma_{l\xi_\alpha}^{l^*}\eta_\alpha. \tag{4.2.39}$$

Por otra parte, sabemos que para cada $\alpha=1,\dots,s$,

$$\sigma_{l\xi_\alpha}^{l^*}=g(\sigma(e_l,\xi_\alpha),e_{l^*})=-\csc\theta g(Ne_l,Ne_l)=-\operatorname{sen}\theta, \tag{4.2.40}$$

por lo que

$$\sum_{l=1}^{2k}\sigma_{l\xi_\alpha}^{l^*}\eta_\alpha=-2k\operatorname{sen}\theta\eta_\alpha. \tag{4.2.41}$$

Además,

$$\begin{aligned}\sigma_{li}^{l^*}&=g(\sigma(e_l,e_i),e_{l^*})=\csc\theta g(\sigma(e_l,e_i),Ne_l)=\\&=\csc\theta g(A_{Ne_l}e_i,e_l)=\csc\theta g(A_{Ne_i}e_l,e_l)=\\&=g(\sigma(e_l,e_l),e_{i^*})=\sigma_{ll}^{i^*},\end{aligned} \tag{4.2.42}$$

donde hemos usado (1.4.17). Así,

$$\sum_{l=1}^{2k}\sum_{i=1}^{2k}\sigma_{li}^{l^*}\omega^i=\sum_{l=1}^{2k}\sum_{i=1}^{2k}\sigma_{ll}^{i^*}\omega^i=\sum_{i=1}^{2k}(tr\sigma^{i^*})\omega^i. \tag{4.2.43}$$

Por tanto, de (4.2.39)-(4.2.43), obtenemos que

$$\Theta=\sum_{i=1}^{2k}(tr\sigma^{i^*})\omega^i-2k\operatorname{sen}\theta\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha,$$

por lo que definimos

$$\omega=\Theta+m\operatorname{sen}\theta\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha. \tag{4.2.44}$$

Aplicando directamente el Teorema 4.2.3, se tiene:

Teorema 4.2.7. *Sea M^{m+s} una subvariedad slant propia de una S-variedad de curvatura f-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+s}(c)$. Entonces, la 1-forma ω dada por (4.2.44) verifica:*

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega=&-\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{(m+1)(c+3s)}{2}\left(\sum_{j=1}^{k}\omega^{2j-1}\wedge\omega^{2j}-\sum_{j=1}^{k}\omega^{(2j-1)^*}\wedge\omega^{(2j)^*}\right)-\\&-\operatorname{sen}^2\theta\frac{(m+1)(c+3s)}{2}\left(\sum_{j=1}^{k}\omega^{2j-1}\wedge\omega^{(2j-1)^*}+\sum_{j=1}^{k}\omega^{2j}\wedge\omega^{(2j)^*}\right),\end{aligned} \tag{4.2.45}$$

donde θ denota el ángulo slant de M.

Demostración. De (4.2.44) se deduce que para cada $\alpha = 1, \ldots, s$,

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\Theta + m \operatorname{sen}\theta \sum_{\alpha=1}^{s} \mathrm{d}\eta_\alpha. \tag{4.2.46}$$

Pero, como $\widetilde{M}$ es una S-variedad, para cada $\alpha = 1, \ldots, s$ se cumple que $\mathrm{d}\eta_\alpha(X, Y) = g(X, fY)$, para todos X, Y tangentes en M, por lo que, en función de una referencia slant adaptada, tenemos que

$$\mathrm{d}\eta_\alpha(e_{2p-1}, e_{2q-1}) = g(e_{2p-1}, Te_{2q-1}) = 0, \tag{4.2.47}$$

$$\mathrm{d}\eta_\alpha(e_{2p-1}, \xi_\beta) = 0, \tag{4.2.48}$$

$$\mathrm{d}\eta_\alpha(e_{2p-1}, e_{2q}) = -\cos\theta\delta_{pq}, \tag{4.2.49}$$

$$\mathrm{d}\eta_\alpha(e_{2p-1}, e_{(2q-1)^*}) = -\operatorname{sen}\theta\delta_{pq}, \tag{4.2.50}$$

$$\mathrm{d}\eta_\alpha(e_{2p-1}, e_{(2q)^*}) = 0, \tag{4.2.51}$$

$$\mathrm{d}\eta_\alpha(e_{2p}, e_{2q-1}) = \cos\theta\delta_{pq}, \tag{4.2.52}$$

$$\mathrm{d}\eta_\alpha(e_{2p}, \xi_\beta) = 0, \tag{4.2.53}$$

$$\mathrm{d}\eta_\alpha(e_{2p}, e_{2q}) = 0, \tag{4.2.54}$$

$$\mathrm{d}\eta_\alpha(e_{2p}, e_{(2q-1)^*}) = 0, \tag{4.2.55}$$

$$\mathrm{d}\eta_\alpha(e_{2p}, e_{(2q)^*}) = -\operatorname{sen}\theta\delta_{pq}, \tag{4.2.56}$$

$$\mathrm{d}\eta_\alpha(e_{(2p-1)^*}, e_{2q-1}) = \operatorname{sen}\theta\delta_{pq}, \tag{4.2.57}$$

$$\mathrm{d}\eta_\alpha(e_{(2p-1)^*}, e_{2q}) = 0, \tag{4.2.58}$$

$$\mathrm{d}\eta_\alpha(e_{(2p-1)^*}, \xi_\beta) = 0, \tag{4.2.59}$$

$$\mathrm{d}\eta_\alpha(e_{(2p-1)^*}, e_{(2q-1)^*}) = 0, \tag{4.2.60}$$

$$\mathrm{d}\eta_\alpha(e_{(2p-1)^*}, e_{(2q)^*}) = \cos\theta\delta_{pq}, \tag{4.2.61}$$

$$\mathrm{d}\eta_\alpha(e_{(2p)^*}, e_{2q-1}) = 0, \tag{4.2.62}$$

$$\mathrm{d}\eta_\alpha(e_{(2p)^*}, e_{2q}) = \operatorname{sen}\theta\delta_{pq}, \tag{4.2.63}$$

$$\mathrm{d}\eta_\alpha(e_{(2p)^*}, \xi_{beta}) = 0, \tag{4.2.64}$$

$$\mathrm{d}\eta_\alpha(e_{(2p)^*}, e_{(2q-1)^*}) = -\cos\theta\delta_{pq}, \tag{4.2.65}$$

$$\mathrm{d}\eta_\alpha(e_{(2p)^*}, e_{(2q)^*}) = 0, \tag{4.2.66}$$

para todos $p, q = 1, \ldots, k$ y $\beta = 1, \ldots, s$.

Así, de (4.2.47) a (4.2.66) se sigue que para cada $\alpha = 1, \ldots, s$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\eta_\alpha = &- 2\cos\theta \sum_{j=1}^{k} \omega^{2j-1} \wedge \omega^{2j} - 2\operatorname{sen}\theta \sum_{j=1}^{k} \omega^{2j-1} \wedge \omega^{(2j-1)^*} - \\ &- 2\operatorname{sen}\theta \sum_{j=1}^{k} \omega^{2j} \wedge \omega^{(2j)^*} + 2\cos\theta \sum_{j=1}^{k} \omega^{(2j-1)^*} \wedge \omega^{(2j)^*}. \end{aligned} \tag{4.2.67}$$

Finalmente, (4.2.45) resulta de (4.2.33), (4.2.46) y (4.2.67). □

Corolario 4.2.8. *Sea M^{m+s} una subvariedad slant propia de una S-variedad de curvatura f-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+s}(c)$. Entonces, la 1-forma ω dada por (4.2.44) es cerrada si y sólo si*

$$c = -3s.$$

Demostración. La demostración es inmediata haciendo $\mathrm{d}\omega = 0$ en el Teorema 4.2.7. □

Nota 4.2.9. *De nuevo destacamos que si hacemos $\theta = \pi/2$ en el Teorema 4.2.7 llegamos al Teorema 4.1.6, el cual coincide, para $s = 1$, con el Teorema 2.1.8 y con el Corolario 2.1.9 obtenidos en el caso Sasakiano.*

Nota 4.2.10. *Al igual que observamos para Θ, se tiene ahora que, cuando es cerrada, ω define una clase canónica de cohomología, $[\omega] \in H^1(M;\mathbb{R})$.*

En el siguiente teorema veremos cuál es la relación entre la 1-forma ω y la Forma de Maslov ω_H:

Teorema 4.2.11. *Sea M^{m+s} una subvariedad slant propia de una S-variedad de curvatura f-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+s}(c)$. Entonces,*

$$\omega_H = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{m+s}\omega, \tag{4.2.68}$$

donde θ es el ángulo slant.

Demostración. Respecto a una referencia slant adaptada, se tiene

$$\omega_H(e_i) = g(e_i, fH) = -g(Ne_i, H) = -\operatorname{sen}\theta g(e_{i^*}, H), \tag{4.2.69}$$

para cada $i = 1, \ldots, m$. Además, habíamos definido

$$\omega = \Theta + m\operatorname{sen}\theta \sum_{\alpha=1}^{s} \eta_\alpha = \sum_{i=1}^{k} (tr\sigma^{i^*}\omega^i).$$

Ahora bien, en virtud de (1.4.11) y (1.4.12):

$$H = \frac{1}{m+s} \sum_{j=1}^{m} \sigma(e_j, e_j). \tag{4.2.70}$$

Así, de (4.2.69) y (4.2.70) resulta que

$$\omega_H(e_i) = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{m+s} \sum_{j=1}^{2k} \sigma_{jj}^{i^*} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{m+s} tr\sigma^{i^*}.$$

De esta forma tenemos que

$$tr\sigma^{i^*} = -(m+s)\csc\theta g(tH, e_i),$$

por lo que para todo campo X tangente a M podemos escribir:

$$\omega(X) = -(m+s)\csc\theta \sum_{i=1}^{2k} g(tH, e_i)\omega^i(X), \tag{4.2.71}$$

pero si escribimos

$$X = \sum_{i=1}^{2k} X^i e_i + \sum_{\alpha=1}^{s} \eta_\alpha(X)\xi_\alpha,$$

tenemos de (4.2.71),

$$\begin{aligned}
\omega(X) =& -(m+s)\csc\theta \sum_{i=1}^{2k} g(tH, e_i)X^i = \\
=& -(m+s)\csc\theta g(tH, \sum_{i=1}^{2k} X^i e_i) = \\
=& -(m+s)\csc\theta g(X - \sum_{\alpha=1}^{s} \eta_\alpha(X)\xi_\alpha, tH),
\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que para cada $\alpha = 1, \ldots, s$, $g(tH, \xi_\alpha) = 0$, obtenemos (4.2.68). □

Corolario 4.2.12. *Sea M^{m+s} una subvariedad slant propia de una S-variedad de curvatura f-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+s}(c)$. Entonces, la Forma de Maslov ω_H de M es cerrada si y sólo si*

$$c = -3s.$$

Demostración. Basta calcular la diferencial de ω_H en (4.2.68) y aplicar el Teorema 4.2.7. □

Nota 4.2.13. *Obsérvese que, según el Corolario 4.2.12, en* $\mathbb{R}^{2m+s}$ *con su estructura de* S*-variedad, toda subvariedad slant, no invariante y de dimensión* $m+s$*, tiene Forma de Maslov cerrada. En particular, esto será cierto para toda subvariedad anti-invariante, de dimensión* $m+s$*, tangente a los campos de estructura* $\xi_1, \ldots, \xi_s$*.*

Nota 4.2.14. *Podemos comprobar que, para* $\theta = \pi/2$*, (4.2.68) coincide con (4.1.25), la cual coincide, para* $s = 1$*, con (2.1.36) obtenida para el caso Sasakiano.*

4.2.2. Desigualdad entre H y τ

En esta última sección vamos a establecer una desigualdad entre H y τ para una subvariedad slant de una S-variedad de curvatura f-seccional constante, la cual generaliza la obtenida por L. M. Fernández y A. Prieto-Martín en [33] para subvariedades anti-invariantes de $\mathbb{R}^{2m+s}$. Además, estudiaremos el caso de la igualdad en función de la segunda forma fundamental de la desigualdad.

Teorema 4.2.15. *Sea* M^{m+s} $(m \geq 2)$ *una subvariedad* θ*-slant de una* S*-variedad de curvatura* f*-seccional constante* $\widetilde{M}^{2m+s}(c)$*. Entonces, el cuadrado del módulo de su vector curvatura media* $\|H\|^2$ *y su curvatura escalar* τ *satisfacen en cada punto la siguiente desigualdad:*

$$\|H\|^2 \geq \frac{2(m+2)}{(m+s)^2(m-1)} \left[\tau - \frac{1}{2}m(m-1)\frac{c+3s}{4} - \frac{3}{2}m\cos^2\theta\frac{c-s}{4} - sm\cos^2\theta\right]. \tag{4.2.72}$$

Demostración. Sea M^{m+s} una subvariedad slant de una S-variedad de curvatura f-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+s}(c)$. Consideremos una referencia slant adaptada

$$\{e_1, \ldots, e_m, \xi_1, \ldots, \xi_s, e_{1*}, \ldots, e_{m*}\}.$$

Teniendo en cuenta (1.4.12), podemos establecer que

$$\begin{aligned}
\|H\|^2 =& g(H,H) = \frac{1}{(m+s)^2} g\Big(\sum_{i=1}^{m+s}\sigma(e_i,e_i), \sum_{j=1}^{m+s}\sigma(e_j,e_j)\Big) = \\
=& \frac{1}{(m+s)^2}\left(\sum_{i=1}^{m+s} g(\sigma(e_i,e_i),\sigma(e_i,e_i)) + \sum_{i\neq j}^{m+s} g(\sigma(e_i,e_i),\sigma(e_j,e_j))\right),
\end{aligned} \tag{4.2.73}$$

donde $\sigma(\xi_\alpha, \xi_\beta) = 0$, para todos $\alpha, \beta = 1, \ldots, s$ debido a (1.4.11). Por otra parte, teniendo en cuenta (1.4.6), tenemos que

$$
\begin{aligned}
2\tau &= \sum_{i\neq j}^{m+s} K(e_i,e_j) = \sum_{i\neq j}^{m+s} R(e_i,e_j,e_j,e_i) = \\
&= \sum_{i\neq j}^{m+s} \Big(\widetilde{R}(e_i,e_j;e_j,e_i) - g(\sigma(e_i,e_j),\sigma(e_i,e_j)) + g(\sigma(e_i,e_i),\sigma(e_j,e_j))\Big) = \\
&= \sum_{i\neq j}^{m+s} (\frac{c+3s}{4}\left\{g(fe_i,fe_i)g(fe_j,fe_j) - g(fe_i,fe_j)g(fe_i,fe_j)\right\} \\
&\quad + \frac{c-s}{4}\left\{g(e_i,fe_i)g(e_j,fe_j) - g(e_i,fe_j)g(e_j,fe_i) - 2g(e_i,fe_j)g(e_j,fe_i)\right\} \\
&\quad + \sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{g(fe_i,fe_i)\eta_\alpha(e_j)\eta_\beta(e_j) - g(fe_i,fe_j)\eta_\alpha(e_j)\eta_\beta(e_i) + g(fe_j,fe_j)\eta_\alpha(e_i)\eta_\beta(e_i) \\
&\quad - g(fe_j,fe_i)\eta_\alpha(e_i)\eta_\beta(e_j)\} - g(\sigma(e_i,e_j),\sigma(e_i,e_j)) + g(\sigma(e_i,e_i),\sigma(e_j,e_j))),
\end{aligned}
$$

de donde podemos obtener:

$$
\sum_{i\neq j}^{m+s} \frac{c+3s}{4} g(fe_i,fe_i)g(fe_j,fe_j) = \frac{c+3s}{4} m(m-1),
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i\neq j}^{m+s} \frac{c-s}{4}(-3)g(e_i,fe_j)g(e_j,fe_i) = \sum_{i\neq j}^{m+s} \frac{3(c-s)}{4} g^2(e_i,Te_j) = \\
&= \frac{3(c-s)}{4}\|T\|^2 = \frac{3(c-s)}{4} m\cos^2\theta,
\end{aligned} \tag{4.2.74}
$$

$$
\sum_{i\neq j}^{m+s}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{g(fe_i,fe_i)\eta_\alpha(e_j)\eta_\beta(e_j) + g(fe_j,fe_j)\eta_\alpha(e_i)\eta_\beta(e_i)\} = 2sm,
$$

donde se ha usado (1.4.2), (1.4.3) y (1.4.16), y los demás términos se anulan. Así, de (4.2.74) podemos establecer que

$$
\begin{aligned}
2\tau &= \frac{c+3s}{4} m(m-1) + \frac{3(c-s)}{4} m\cos^2\theta + 2sm - \\
&\quad - \sum_{i\neq j}^{m+s} g(\sigma(e_i,e_j),\sigma(e_i,e_j)) + \sum_{i\neq j}^{m+s} g(\sigma(e_i,e_i),\sigma(e_j,e_j).
\end{aligned} \tag{4.2.75}
$$

Ahora bien, veamos los términos correspondientes a los campos de estructura ξ_α, para cada $\alpha = 1, \dots, s$:

$$\begin{aligned} &-2\sum_{i=1}^{m} g(\sigma(e_i,\xi_\alpha),\sigma(e_i,\xi_\alpha)) + 2\sum_{j=1}^{m} g(\sigma(\xi_\alpha,\xi_\alpha),\sigma(e_j,e_j)) = \\ &-2\sum_{i=1}^{m} g(Ne_i,Ne_i) = -2m\operatorname{sen}^2\theta, \end{aligned} \tag{4.2.76}$$

donde se ha aplicado (1.4.10), (1.4.11) y (1.4.15). De esta forma, de (4.2.73), (4.2.75) y (4.2.76) podemos escribir

$$\begin{aligned} (m+s)^2\|H\|^2 - 2\mathfrak{a}\tau = &-\mathfrak{a}\left[\frac{c+3s}{4}m(m-1)+\right. \\ &\left.+\frac{3(c-s)}{4}m\cos^2\theta + 2sm - 2sm\operatorname{sen}^2\theta\right]+ \\ &+\sum_{i,j=1}^{m}(\sigma_{ii}^{j})^2 + \sum_{i\neq j}^{m}(\sigma_{jj}^{i})^2 + 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j<k}^{m}\sigma_{jj}^{i}\sigma_{kk}^{i}+ \\ &+2\mathfrak{a}\sum_{i<j}^{m} g(\sigma(e_i,e_j),\sigma(e_i,e_j)) - 2\mathfrak{a}\sum_{i<j}^{m} g(\sigma(e_i,e_i),\sigma(e_j,e_j) = \\ = &-\mathfrak{a}\left[\frac{c+3s}{4}m(m-1)+\right. \\ &\left.+\frac{3(c-s)}{4}m\cos^2\theta + 2sm\cos^2\theta\right]+ \\ &+2\mathfrak{a}\sum_{i\neq j,k}^{m}\sum_{j<k}^{m}(\sigma_{jk}^{i})^2 + (\mathfrak{a}-1)\sum_{i\neq j,k}^{m}\sum_{j<k}^{m}(\sigma_{jj}^{i}-\sigma_{kk}^{i})^2+ \\ &+2\mathfrak{a}\sum_{j<k}^{m}(\sigma_{jk}^{j})^2 - (\mathfrak{a}-1)\sum_{i\neq j,k}^{m}\sum_{j<k}^{m}((\sigma_{jj}^{i})^2+(\sigma_{kk}^{i})^2)- \\ &-2(\mathfrak{a}-1)\sum_{j\neq k}^{m}\sigma_{jj}^{j}\sigma_{kk}^{j} + (\sigma_{jk}^{k})^2 + \sum_{i\neq j}^{m}(\sigma_{jj}^{i})^2 + \sum_{j=1}^{m}(\sigma_{jj}^{j})^2, \end{aligned}$$

donde $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$. Como vimos en la demostración del Teorema 3.1.3, podemos establecer la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{m-1}\sum_{j\neq k}^{m}(\sigma_{jj}^{j}-\mathfrak{b}\sigma_{kk}^{j})^2=+2\mathfrak{a}\sum_{j<k}^{m}(\sigma_{jk}^{j})^2-(\mathfrak{a}-1)\sum_{i\neq j,k}^{m}\sum_{j<k}^{m}((\sigma_{jj}^{i})^2+(\sigma_{kk}^{i})^2)-$$
$$-2(\mathfrak{a}-1)\sum_{j\neq k}^{m}\sigma_{jj}^{j}\sigma_{kk}^{j}+(\sigma_{jk}^{k})^2+\sum_{i\neq j}^{m}(\sigma_{jj}^{i})^2+\sum_{j=1}^{m}(\sigma_{jj}^{j})^2,$$

para $\mathfrak{a}=\frac{m+2}{m-1}$ y $\mathfrak{b}=3$, de donde podemos establecer que

$$\begin{aligned}(m+s)^2\|H\|^2-2\frac{m+2}{m-1}\tau=&-\frac{m+2}{m-1}\Bigg[m(m-1)\frac{c+3s}{4}+\\ &+3m\cos^2\theta\frac{c-s}{4}+2sm\cos^2\theta\Bigg]+\\ &+\frac{2(m+2)}{m-1}\sum_{i\neq j,k}^{m}\sum_{j<k}^{m}(\sigma_{jk}^{i})^2+\frac{3}{m-1}\sum_{i\neq j,k}^{m}\sum_{j<k}^{m}(\sigma_{jj}^{i}-\sigma_{kk}^{i})^2+\\ &+\frac{1}{m-1}\sum_{j\neq k}^{m}(\sigma_{jj}^{j}-3\sigma_{kk}^{j})^2,\end{aligned} \tag{4.2.77}$$

de donde podemos obtener fácilmente que

$$(m+s)^2\|H\|^2-2\frac{m+2}{m-1}\tau\geq-\frac{m+2}{m-1}\left[m(m-1)\frac{c+3s}{4}+3m\cos^2\theta\frac{c-s}{4}+2sm\cos^2\theta\right],$$

con lo que llegamos a (4.2.72). □

Nota 4.2.16. *Obsérvese que, para $s=1$, la desigualdad (4.2.72) coincide con la desigualdad obtenida en el Corolario 3.1.11 para el caso Sasakiano como caso particular del Teorema principal 3.1.3.*

A continuación, vamos a estudiar el caso de la igualdad de (4.2.72). Para que se cumpla dicha igualdad, teniendo en cuenta (4.2.77), debe verificarse que

$$\begin{aligned}\sigma_{jk}^{i}&=0,\quad i\neq j<k,\\ \sigma_{jj}^{i}-\sigma_{kk}^{i}&=0,\quad i\neq j,k,\quad j<k,\\ \sigma_{jj}^{j}-3\sigma_{kk}^{j}&=0,\quad j\neq k.\end{aligned} \tag{4.2.78}$$

Ahora bien, consideremos una referencia slant adaptada de $\widetilde{M}^{2m+1}$,

$$\{e_1,\ldots,e_m,\xi_1,\ldots,\xi_s,e_{1^*},\ldots,e_{m^*}\},$$

siguiendo el mismo procedimiento detallado en el Lema 3.1.1, es decir, tomando en primer lugar el campo e_{1^*} en la dirección del vector curvatura media y, a partir de ahí, vamos construyendo el resto de la base siguiendo el procedimiento detallado en la Nota 2.1.7. De esta forma, tenemos que

$$H = \frac{1}{m+s} \sum_{i,k=1}^{m} \sigma_{ii}^{k} e_{k^*} = \|H\| e_{1^*}, \tag{4.2.79}$$

por lo que

$$\sum_{i=1}^{m} \sigma_{ii}^{1} = (m+s)\|H\|, \qquad \sum_{i=1}^{m} \sigma_{ii}^{k} = 0,$$

para todo $k > 1$. Pero, usando (4.2.78), llegamos a que

$$\sum_{i=1}^{m} \sigma_{ii}^{1} = \sigma_{11}^{1} + \sum_{i=2}^{m} \sigma_{ii}^{1} = \sigma_{11}^{1} + (m-1)\sigma_{22}^{1} = \frac{m+2}{3}\sigma_{11}^{1},$$

y, por tanto,

$$\sigma_{11}^{1} = \frac{3(m+s)}{m+2}\|H\|, \qquad \sigma_{22}^{1} = \sigma_{ii}^{1} = \frac{m+s}{m+2}\|H\|,$$

para todo $i > 2$. Además, si $k > 1$, se tiene que

$$\sigma_{kk}^{k} = 3\sigma_{11}^{k}, \quad \sigma_{11}^{k} = \sigma_{ii}^{k},$$

para todo $i > 1$, $i \neq k$. Luego, teniendo en cuenta (4.2.79), tenemos que

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \sigma_{ii}^{k} = \sigma_{11}^{k} + \sum_{i=2}^{m} \sigma_{ii}^{k} = (m+2)\sigma_{11}^{k}.$$

De esta forma, si $k > 1$, tenemos que

$$\sigma_{ii}^{k} = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Así, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 4.2.17. *Sea M^{m+s} $(m \geq 2)$ una subvariedad slant de una S-variedad de curvatura f-seccional constante, $\widetilde{M}^{2m+s}$. Entonces, M satisface el caso de la igualdad de (4.2.72) en cada punto si y sólo si existe una función real λ definida sobre M tal que la segunda forma fundamental de M satisface*

$$\begin{array}{llll} \sigma(e_1,e_1) = 3\lambda e_{1^*}, & \sigma(e_i,e_i) = \lambda e_{1^*}, & i = 2,\ldots,m, & \\ \sigma(e_1,e_i) = \lambda e_{i^*}, & \sigma(e_i,e_j) = 0, & 2 \leq i \neq j \leq m, & \\ \sigma(\xi_\alpha,\xi_\beta) = 0, & \sigma(\xi_\alpha,e_i) = -\operatorname{sen}\theta e_{i^*}, & \alpha,\beta = 1,\ldots,s, & \end{array} \tag{4.2.80}$$

respecto a cierta referencia slant adaptada $\{e_1,\ldots,e_m,\xi_1,\ldots,\xi_s,e_{1^*},\ldots,e_{m^*}\}$, cumpliendo las condiciones del Lema 3.1.1 y $\lambda = \frac{m+s}{m+2}\|H\|$.

Seguidamente, podemos demostrar el siguiente teorema, donde establecemos una expresión para la segunda forma fundamental de M para el caso en que se cumpla la igualdad de (4.2.72).

Teorema 4.2.18. *Sea M^{m+s} una subvariedad slant de una S-variedad de curvatura f-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+s}$. Entonces, M satisface el caso de la igualdad de (4.2.72) en cada punto si y sólo si*

$$\begin{aligned}\sigma(X,Y) &= \frac{m+s}{m+2}\left\{\left(g(X,Y)-\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)\right)H\right.\\ &\quad -\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\omega_H(X)+\frac{m+2}{m+s}\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(X)\right)NY \\ &\quad \left.-\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\omega_H(Y)+\frac{m+2}{m+s}\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(Y)\right)NX\right\}.\end{aligned} \tag{4.2.81}$$

para todos X,Y tangentes a M.

Demostración. Tomando una referencia slant adaptada siguiendo el procedimiento detallado en el Lema 3.1.1, podemos establecer que

$$H=\frac{1}{m+s}\sum_{i=1}^{m+s}\sigma(e_i,e_i)=\frac{1}{m+s}(3\lambda e_{1^*}+(m-1)\lambda e_{1^*})=\frac{m+2}{m+s}\lambda e_{1^*}. \tag{4.2.82}$$

Ahora bien, si tomamos dos campos tangentes cualesquiera X,Y de M, podemos calcular

$$\begin{aligned}\sigma(X,Y) &= \sigma\Big(\sum_{i=1}^{m+s}X^ie_i,\sum_{j=1}^{m+s}Y^je_j\Big) = \sum_{i,j=1}^{m+s}X^iY^j\sigma(e_i,e_j) = \\ &= X^1Y^1\frac{3\lambda(m+s)}{m+2}e_{1^*}+\sum_{i=2}^{m}X^iY^i\frac{\lambda(m+s)}{m+2}e_{1^*}+\sum_{j=2}^{m}X^1Y^j\frac{\lambda(m+s)}{m+2}e_{j^*}+\\ &\quad \sum_{i=2}^{m}X^iY^1\frac{\lambda(m+s)}{m+2}e_{i^*}+\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(X)\sigma(\xi_\alpha,Y)+\\ &\quad \sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(Y)\sigma(X,\xi_\alpha)+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y)\sigma(\xi_\alpha,\xi_\beta) = \\ &= \left(g(X,Y)-\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)\right)\frac{\lambda(m+s)}{m+2}e_{1^*}+2X^1Y^1\frac{\lambda(m+s)}{m+2}e_{1^*}+\\ &\quad \sum_{j=2}^{m}X^1Y^j\frac{\lambda(m+s)}{m+2}e_{j^*}+\sum_{i=2}^{m}X^iY^1\frac{\lambda(m+s)}{m+2}e_{i^*}-\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(X)NY-\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(Y)NX,\end{aligned} \tag{4.2.83}$$

donde se ha usado (1.4.10), (4.2.82) y el Corolario 4.2.17. Por otra parte, teniendo en cuenta que

$$e_{i^*} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} N e_i,$$

podemos establecer que

$$NY = \sum_{i=1}^{m+s} Y^i N e_i = \operatorname{sen}\theta \sum_{i=1}^{m+s} Y^i e_{i^*}. \tag{4.2.84}$$

Además, tenemos que

$$\begin{aligned} g(fX, H) =& g(\sum_{i=1}^{m+s} X^i f e_i, H) = g(\sum_{i=1}^{m+s} X^i N e_i, H) = g(\sum_{i=1}^{m+s} X^i \operatorname{sen}\theta e_{i^*}, H) = \\ =& \operatorname{sen}\theta g(\sum_{i=1}^{m+s} X^i e_{i^*}, \lambda e_{1^*}) = X^1 \lambda \operatorname{sen}\theta. \end{aligned} \tag{4.2.85}$$

Así, de (4.2.83), (4.2.84) y (4.2.85) podemos deducir inmediatamente que

$$\begin{aligned} \sigma(X,Y) \ =& \frac{m+s}{m+2}\left\{\left(g(X,Y) - \sum_{\alpha=1}^{s} \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)\right) H \right. \\ &+ \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} g(fX,H) - \frac{m+2}{m+s}\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(X)\right) NY \\ &+ \left.\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} g(fY,H) - \frac{m+2}{m+s}\sum_{\alpha=1}^{s}\eta_\alpha(Y)\right) NX \right\}, \end{aligned}$$

con lo que llegamos a (4.2.81).

Recíprocamente, a partir de (4.2.81), se obtiene fácilmente (4.2.80) con lo que llegamos inmediatamente a la igualdad de (4.2.72). □

Nota 4.2.19. *Podemos observar que la expresión de la segunda forma fundamental (4.2.81) para $s = 1$, coincide con la expresión (3.1.16) en el caso Sasakiano.*

Siguiendo la línea del capítulo anterior, podemos dar nombre a las subvariedades que cumplen el caso de la igualdad de (4.2.72) ya que, como hemos comentado anteriormente, las subvariedades que cumplen el caso de la igualdad entre H y τ siempre han tenido una gran importancia tanto en geometría compleja como en geometría de contacto.

Definición 4.2.20. *Sea M^{m+s} una subvariedad slant propia de una S-variedad de curvatura f-seccional constante $\widetilde{M}^{2m+s}(c)$. Si la segunda forma fundamental σ de M satisface (4.2.81), o lo que es lo mismo, el caso de la igualdad del Teorema 4.2.15, diremos que M es una subvariedad $*$-slant.*

Nota 4.2.21. *De nuevo podemos comprobar que podemos extender tanto el Teorema 4.2.15 como la Definición 4.2.20 al caso en que la subvariedad M sea anti-invariante, ya que si consideramos una referencia anti-invariante adaptada*

$$\{e_1, \ldots, e_m, \xi_1, \ldots, \xi_s, e_{1^*}, \ldots, e_{m^*}\},$$

es decir, una base local ortonormal de campos de $\widetilde{M}$, siendo $e_{i^*} = fe_i$ con $i = 1, \ldots, m$, y siguiendo los mismos pasos que en el Teorema 4.2.15, tenemos que

$$2\tau = \frac{c+3s}{4}m(m-1) + 2sm - \sum_{i \neq j}^{m+s} g(\sigma(e_i, e_j), \sigma(e_i, e_j)) + \sum_{i \neq j}^{m+s} g(\sigma(e_i, e_i), \sigma(e_j, e_j),$$

de donde la expresión equivalente a (4.2.77) queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(m+1)^2\|H\|^2 - 2\frac{m+2}{m-1}\tau = & -\frac{m(m+2)}{m-1}\left[m(m-1)\frac{c+3s}{4}\right] + \\ & + \frac{6(m+2)}{m-1}\sum_{i<j<k}^{m}(\sigma_{jk}^i)^2 + \frac{3}{m-1}\sum_{i \neq j,k}^{m}\sum_{j<k}^{m}(\sigma_{jj}^i - \sigma_{kk}^i)^2 + \\ & + \frac{1}{m-1}\sum_{j \neq k}^{m}(\sigma_{jj}^j - 3\sigma_{kk}^j)^2,\end{aligned}$$

la cual nos lleva a la desigualdad:

$$\|H\|^2 \geq \frac{2(m+2)}{(m+s)^2(m-1)}\left[\tau - \frac{1}{2}m(m-1)\frac{c+3s}{4}\right]. \tag{4.2.86}$$

Ahora bien, podemos observar que si hacemos $s = 1$ en (4.2.86), llegamos a (3.1.22) obtenida para el caso Sasakiano.

Por otra parte, si consideramos $\mathbb{R}^{2m+s}$ como variedad ambiente, por lo que $c = -3s$, podemos establecer que

$$\|H\|^2 \geq \frac{2(m+2)}{(m+s)^2(m-1)}\tau, \tag{4.2.87}$$

que se corresponde con la desigualdad obtenida por L. M. Fernández y A. Prieto-Martín en [33] ya mencionada en la Introducción de esta memoria.

Además, podemos obtener directamente del Teorema 4.2.15 el siguiente corolario, cuya demostración es inmediata.

Corolario 4.2.22. *Sea M^{m+s}, una subvariedad slant de $\mathbb{R}^{2m+s}$. Entonces, el cuadrado del módulo de su vector curvatura media $\|H\|^2$ y su curvatura escalar τ satisfacen en cada punto la siguiente desigualdad:*

$$\|H\|^2 \geq \frac{2(m+2)}{(m+s)^2(m-1)}\left[\tau + \left(\frac{3}{2} - s\right)m\cos^2\theta\right].$$

Nota 4.2.23. *Obsérvese que el Corolario 4.2.22 para el caso* $s = 1$*, es decir, en el caso en que la variedad* $\widetilde{M}$ *tenga un único campo de estructura* ξ*, se corresponde con el Corolario 3.1.10, obtenido para el caso Sasakiano.*

Para finalizar, podemos establecer en el siguiente ejemplo una subvariedad $*$-slant de $\mathbb{R}^{2m+s}$:

Ejemplo 4.2.24. *Siguiendo la construcción hecha en [33], consideramos la sumersión Riemanniana* $\pi : \mathbb{R}^{2m+s} \to \mathbb{C}^m$ *dada por*

$$\pi(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_s) = \frac{1}{2}(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_m),$$

y suponemos que existe una subvariedad Lagrangiana $\widehat{M}$ *of* $\mathbb{C}^m$*, tal que el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2m+s} \\ \downarrow & & \downarrow\ \pi \\ \widehat{M} & \longrightarrow & \mathbb{C}^m, \end{array}$$

donde M *es el conjunto de fibras sobre* $\widehat{M}$*. Entonces la subvariedad anti-invariante* M *localmente isométrica al producto Riemanniano de una porción de una esfera de Whitney y* $\mathbb{R}^s$ *es una subvariedad* $*$*-slant, ya que satisface el caso de la igualdad de (4.2.87), según [33, Teorema 5.4].*

Bibliografía

[1] P. Alegre, J. Barrera and A. Carriazo. A new class of slant submanifolds in generalized Sasakian space forms. Preprint.

[2] P. Alegre, J. Barrera, A. Carriazo and L. M. Fernández. An inequality between the main extrinsic and intrinsic invariants in S-manifolds. En proceso.

[3] P. Alegre, D. E. Blair and A. Carriazo. Generalized Sasakian-space-forms. *Israel J. Math.* **141** (2004), 157–183.

[4] P. Alegre and A. Carriazo. Generalized Sasakian space forms and conformal changes of the metric. *Result.Math.* **59** (2011), 485–493.

[5] P. Alegre and A. Carriazo. Structures on generalized Sasakian-space-forms. *Differential Geom. Appl.* **26** (2008), 656–666.

[6] P. Alegre, A. Carriazo, Y. H. Kim and D. W. Yoon. B.-Y. Chen's inequality for submanifolds of generalized space forms. *Indian J. pure appl. Math.* **38** (2007).

[7] J. Barrera. Subvariedades Anti-invariantes de una Variedad Sasakiana y la Forma de Maslov. Trabajo de Fin del Máster "Estudios Avanzados en Matemáticas". Universidad de Sevilla, 2008.

[8] J. Barrera, A. Carriazo, L. M. Fernández and A. Prieto-Martín. The Maslov form in non-invariant slant submanifolds of S-space-forms. *Ann. Mat Pura Appl.* **191** (2012), 803–818.

[9] D. E. Blair. The theory of quasi-Sasakian structures. *J. Differential Geom.* **1** (1967), 53–72.

[10] D. E. Blair. Geometry of manifolds with structural group $\mathcal{U}(n) \times \mathcal{O}(s)$. *J. Differential Geom.* **4** (1970), 155–167.

[11] D. E. Blair. Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds. *Birkhäuser*, Boston, 2002.

[12] D. E. Blair and A. Carriazo. The Contact Whitney Sphere. *Note Mat.* **20** (2000/2001), no. 2, 125–133.

[13] D. E. Blair and J. A. Oubiña. Conformal and related changes of metric on the product of two almost contact metric manifolds. *Publ. Mat.* **34** (1990), 199–207.

[14] V. Borrelli, B.-Y. Chen and J. M. Morvan. Une caractérisation géométrique de la sphère de Whitney. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, Série I **321** (1995), 1485–1490.

[15] J. L. Cabrerizo, A. Carriazo, L. M. Fernández and M. Fernández. Slant submanifolds in Sasakian manifolds. *Glasg. Math. J.* **42** (2000), 125–138.

[16] J. L. Cabrerizo, A. Carriazo, L. M. Fernández and M. Fernández. Structure on a slant submanifold of a contact manifold. *Indian J. Pure Appl. Math.* **31** (2000), 857–864.

[17] J. L. Cabrerizo, A. Carriazo, L. M. Fernández and M. Fernández. Existence and uniqueness theorem for slant immersions in Sasakian-space-forms. *Publ. Math. Debrecen* **58** (2001), 559–574.

[18] J. L. Cabrerizo, A. Carriazo, L. M. Fernández and M. Fernández. Riemannian submersions and slant submanifolds. *Publ. Math. Debrecen* **61** (2002), 523–532.

[19] A. Carriazo. Obstructions to slant immersions in contact manifolds. *Ann. Mat. Pura Appl.* **179** (2001), 459–470.

[20] A. Carriazo. New developments in slant submanifolds theory. *En Applicable Mathematics in the Golden Age*, 339–356. Narosa Publising House, New Delhi, India, 2002.

[21] A. Carriazo. A contact version of B.-Y. Chen's inequality and its applications to slant immersions. *Kyungpook Math. J.* **39** (1999), no. 2, 465–476.

[22] A. Carriazo, L. M. Fernández, M. B. Hans Uber. Minimal slant submanifolds of the smallest dimension in S-manifolds. *Rev. Mat. Iberoam.* **21** (2005), no.1, 47–66.

[23] A. Carriazo, L. M. Fernández, M. B. Hans Uber. Some slant submanifolds of S-manifolds. *Acta Math. Hungar.* **107** (2005), no.4, 267–285.

[24] I. Castro. Lagrangian spheres in the complex Euclidean space satisfying a geometric equality. *Geom. Dedicata* **70** (1998), no. 2, 197–208.

[25] I. Castro and F. Urbano. Lagrangian surfaces in the complex euclidean plane with conformal Maslov form. *Tôhoku Math. J.* **45** (1993), 565–582.

[26] B.-Y. Chen. Geometry of Slant Submanifolds. Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, 1990.

[27] B.-Y. Chen. On slant surfaces. *Taiwanese J. Math.* **3** (1999), no. 2, 163–179.

[28] B.-Y. Chen. Relations between Ricci curvature and shape operator for submanifolds with arbitrary codimensions. *Glasg. Math. J.* **41** (1999), 33–44.

[29] B.-Y. Chen. On Ricci curvature of isotropic and Lagrangian submanifolds in complex space forms. *Arch. Math.* **74** (2000), 154–160.

[30] B.-Y. Chen and J. M. Morvan. Deformations of isotropic submanifolds in Kähler manifolds. *Journal of Geometry and Physics* **13** (1994), 79–104.

[31] M. Cîrnu. On a class of submanifolds of a Kenmotsu manifold. *J. Sci. Arts* **17** (2011), no.4, 425–430.

[32] L. M. Fernández, M. B. Hans Uber. Induced structures on slant submanifolds of metric f-manifolds. *Indian J. Pure Appl. Math.* **39** (2008), no.5, 411–422.

[33] L. M. Fernández and A. Prieto-Martín. The Whitney sphere in S-manifolds. *Riemannian Geom. App.* (2011), 127–144.

[34] Goldberg, S.I., Yano, K. Integrability of almost cosymplectic structures. *Pacific J. Math.* **31** (1969), 373–382.

[35] M. B. Hans Uber. Subvariedades slant en S-variedades. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla, 2005.

[36] I. Hasegawa, Y. Okuyama, T. Abe. On p-th Sasakian manifolds. *J. Hokkaido Univ. Educ. Nat. Sci., Section II A* **37** (1986), no.1, 1–16.

[37] D. Jansen and L. Vanhecke. Almost contact structures and curvature tensors. *Kodai Math. J.* **4** (1981), 1–27.

[38] K. Kenmotsu. A class of almost contact Riemannian manifolds. *Tôhoku Math. J.* **24** (1972), 93–103.

[39] M. Kobayashi, S. Tsuchiya. Invariant submanifolds of an f-manifold with complemented frames. *Kodai Math. Sem. Rep.* **24** (1972), 430–450.

[40] A. Lotta. Slant submanifolds in contact geometry. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.)* **39** (1996), 183–198.

[41] J. C. Marrero. The Local Structure of Trans-Sasakian Manifolds. *Ann. Mat Pura Appl.* **CLXII** (1992), 77–86.

[42] V. P. Maslov. Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques. 1972.

[43] L. M. Morvan. Classe de Maslov d′une immersion Lagrangienne et minimalité. *C.R. Math. Acad. Sci. Paris* **292** (1981), no. 5, 633–636.

[44] Z. Olszak. Curvature properties of quasi-Sasakian manifolds. *Tensor N.S.* **38** (1982), 19–28.

[45] L. Ornea. Suvarietati Cauchy-Riemann generice in S-varietati. *Stud. Cerc. Mat.* **36** (1984), no. 5, 435–443.

[46] J. A. Oubiña. New classes of almost contact metric structures. *Publ. Math. Debrecen* **32** (1985), 187–193.

[47] G. Pitiş. Integral submanifolds with closed conformal vector field in Sasakian manifolds. *New York J. Math.* **11** (2005), 157–170.

[48] G. Pitiş. Chern classes of integral submanifolds of some contact manifolds. *Int. J. Math. Math. Sci.* **32** (2002), 481–490.

[49] A. Ros and F. Urbano. Lagrangian submanifolds of $\mathbb{C}^n$ with conformal Maslov form and the Whitney sphere. *J. Math. Soc. Japan.* **50** (1998), no. 1, 203–226.

[50] A. Song and X. Liu. Some inequalities of slant submanifolds in generalized complex space forms. *Tamkang J. Math.* **36** (2005), no. 3, 223–229.

[51] K. Yano. On a structure defined by a tensor field f of type (1,1) satisfying $f^3+f=0$. *Tensor (N.S.)* **14** (1963), 99–109.