ESTADISTICA ESPAÑOLA
Vol. 34, Núm. 131, 1992, págs. 455 a 468

Asignación MinMax en el muestreo estratificado con una o varias características

por
MARIA TERESA AREVALO QUIJADA y AMPARO MARIA MARMOL CONDE
Departamento de Economía Aplicada. Universidad de Sevilla
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

RESUMEN

Este trabajo trata el problema de la determinación de los tamaños muestrales en el muestreo estratificado.

Para situaciones en que se pretende finalizar el proceso de muestreo en el menor tiempo posible trabajando simultáneamente en los estratos, formulamos un modelo que minimiza el máximo de los tiempos empleados en cada estrato, acotando el error cometido en la estimación, y obtenemos un método exacto que nos proporciona una expresión analítica para los tamaños muestrales, tanto en el caso de la estimación de una como de varias características.

Palabras clave: Muestreo estratificado, asignación MinMax, estimación de varias características.

Clasificación AMS: 62D05, 90C29, 90A80.

1. INTRODUCCION

En el diseño de una encuesta con un muestreo simple estratificado para la estimación de una o varias características, surge el problema de la determinación de los tamaños muestrales en cada estrato. Es frecuente que se deseen incorporar los costes de muestreo (unidades monetarias, tiempo de encuesta, distancias...) a la determinación óptima de estos tamaños muestrales, al mismo tiempo que se controla el error que se comete en la estimación de cada una de las características.

Así, si es posible definir funciones objetivos que dependan de los costes y formular las limitaciones sobre el error cometido a través de restricciones, se puede plantear un modelo matemático cuya solución nos proporcione la asignación deseada.

Si lo que se pretende es que el coste total de muestreo, medido en unidades monetarias, sea lo más pequeño posible, deberemos minimizar la suma total de los costes de muestreo en cada estrato.

En la literatura aparecen diversos estudios en este sentido. El primer tratamiento del problema de la determinación de los tamaños muestrales en los estratos para la estimación de una característica fue publicado por Neyman (1934), aunque Tschuprow (1923) independientemente había llegado a resultados análogos, permaneciendo su trabajo desconocido hasta entonces.

Estos autores dieron la expresión analítica de los tamaños muestrales que minimizan el coste total de muestreo, con una varianza prefijada para el estimador de la media de una característica y suponiendo que las funciones de coste en cada estrato son lineales.

Los intentos de generalización de la asignación obtenida por Neyman al caso de la estimación de varias características no han dado lugar hasta ahora a procedimientos exactos de resolución, en el sentido de obtener una expresión analítica para los tamaños muestrales.

Autores como Yates (1960), Dalenius (1957) y Kokan y Khan (1967) abordan el problema de la determinación de los tamaños muestrales para la estimación de varias características, obteniendo soluciones de compromiso mediante métodos iterados, y Dalenius propone también una solución gráfica para el problema con dos características.

Ahora bien, esta asignación basada en la minimización de la suma de los costes en cada estrato no siempre es la adecuada. Por ejemplo, si se desea terminar el proceso de muestreo en el menor tiempo posible, trabajando simultáneamente en los distintos estratos, no es el coste total (medido en tiempo de muestreo) el que debe determinar la asignación de estos tamaños, es decir, no sería apropiado el uso de una función objetivo que sea la suma de todos los tiempos.

Supongamos que se está diseñando una encuesta con muestreo estratificado. Se dispone de distintos entrevistadores que son especialistas en cada estrato, no pudiendo haber cambios en la asignación de los entrevistadores a los estratos. El objetivo que se persigue es la finalización de *todas* las entrevistas en el menor tiempo posible.

Así, si denotamos por t_i y n_i el tiempo de entrevista y el tamaño de la muestra, respectivamente, en el estrato i-ésimo, lógicamente una asignación que minimice $\Sigma t_i n_i$ no sería apropiada para esta situación, pues no garantiza la terminación de todas las entrevistas en un tiempo mínimo.

En este tipo de problemas es indicado la utilización del criterio MinMax, ya que, para este objetivo, sería óptima una asignación que minimice el máximo de los tiempos totales de entrevista en cada estrato para niveles de varianzas fijadas, es decir, una asignación que minimice $\text{Max}_i \{t_i n_i\}$.

En este trabajo se formalizan este tipo de situaciones. Midiendo el coste en tiempo por unidad muestreada, formulamos y resolvemos un modelo que minimiza el máximo de los tiempos empleados en cada estrato y acotamos el error cometido en la estimación, imponiendo que las varianzas totales de los estimadores de las distintas características no superen unos valores prefijados de antemano.

Obtenemos un método exacto que nos proporciona una expresión analítica para los tamaños muestrales cuando se pretende finalizar las entrevistas en el menor tiempo posible trabajando simultáneamente en los estratos, tanto para el caso de la estimación de una como de varias características.

Así, en el apartado 2 se trata el problema con una sola característica, formulándose como un problema MinMax con una restricción, pues nuestro problema puede transformarse en un problema MinMax con funciones objetivo decrecientes y una restricción lineal, y admite un tratamiento análogo al que utiliza J. R. Brown (1979) para el problema MaxMin con funciones objetivo crecientes con una restricción lineal.

De esta forma se obtiene la expresión analítica de la asignación MinMax, haciéndose notar las analogías y diferencias que presenta frente a la asignación de Neyman, e ilustrándose la situación con un caso práctico.

En el apartado 3 se generaliza al caso de varias características. El algoritmo que se presenta está basado en los resultados obtenidos por Mármol y Pelegrín

(1991) para problemas MaxMin con funciones objetivo crecientes y varias restricciones lineales. Este algoritmo tiene también en cuenta las limitaciones de que el tamaño muestral en cada estrato no ha de ser menor que la unidad, ni mayor que el tamaño del estrato, condición que otros autores no plantean hasta la conclusión de los algoritmos que resuelven el problema de la minimización de los costes. Se ilustra también el procedimiento con un ejemplo numérico.

Hay que hacer notar que, aunque el procedimiento se presenta para funciones de coste lineales en los estratos, esta metodología puede extenderse al caso más general de funciones de coste no decrecientes en los mismos.

2. DETERMINACION DEL TAMAÑO DE LA MUESTRA EN CADA ESTRATO PARA LA ESTIMACION DE UNA CARACTERISTICA

En lo que sigue supondremos una población de tamaño N dividida en L estratos y que el muestreo dentro de cada estrato es aleatorio simple sin reemplazamiento. Para el i-ésimo estrato $i=1, \ldots, L$ denotaremos por

N_i =número de unidades.

n_i =tamaño de la muestra.

Y_{ir} =valor de la característica bajo estudio para la r-ésima unidad. $r=1, \ldots, N$.

$W_i = N_i/N$.

$$Y_i = \frac{1}{N_i} \sum_{r=1}^{N_i} Y_{ir} \text{ media en el estrato.}$$

$$y_i = \frac{1}{n_i} \sum_{r=1}^{n_i} y_{ir} \text{ media muestral en el estrato.}$$

$$S_i^2 = \frac{1}{(N_i-1)} \sum_{r=1}^{N_i} (Y_{ir} - Y_i)^2 \text{ cuasivarianza en el estrato.}$$

$$s_i^2 = \frac{1}{(n_i-1)} \sum_{r=1}^{n_i} (y_{ir} - y_i)^2 \text{ cuasivarianza muestral.}$$

t_i =tiempo de muestreo por unidad en el estrato i.

V_0 =valor prefijado para la varianza del estimador de la media.

$$y_{st} = \sum_{i=1}^{L} W_i y_i \text{ estimador de la media.}$$

Con esta notación, si los tiempos son lineales en cada estrato, la función de tiempo total en cada uno de ellos será $t_i n_i$, $i=1, \ldots, n$; y la varianza total del estimador de la media cuando se quiere estimar una característica es

$$V(y_{st})=\sum_{i=1}^{L} W_i^2 S_i^2\left(\frac{1}{n_i}-\frac{1}{N_i}\right)$$

Nosotros proponemos una asignación que minimice el máximo de los tiempos empleados en cada estrato prefijando el valor para la varianza total del estimador. Con esto conseguiremos una precisión determinada en la estimación de la media.

Esta asignación es la solución al problema

$$\operatorname*{Min\,Max}_{1\leq i\leq L} \{t_i n_i\}$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_{i=1}^{L} W_i^2 S_i^2\left(\frac{1}{n_i}-\frac{1}{N_i}\right) \leq V_0$$

Problema que mediante el cambio de variable

$$x_i=\frac{1}{n_i}-\frac{1}{N_i} \qquad i=1, \ldots, L$$

se convierte en un problema MinMax con una restricción lineal y funciones objetivos decrecientes, cuya solución puede obtenerse de forma similar a la que obtiene Brown (1979) para el problema MaxMin con funciones objetivos crecientes. Esta solución es

$$n_i=\frac{1}{t_i}\;\frac{\sum_{j=1}^{L} W_j^2 S_j^2 t_j}{V_0+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{L} W_j S_j^2}$$

A esta asignación la denominaremos asignación MinMax.

Notemos que los tamaños muestrales obtenidos de esta forma son inversamente proporcionales a los tiempos por unidad de muestreo en cada estrato, por lo que a medida que el tiempo de muestreo en un estrato aumente disminuirá el tamaño de la muestra en el mismo.

Obsérvese la relación que hay entre la forma analítica de esta asignación y la asignación de Neyman, que tiene la expresión

$$n_i = \frac{W_i S_i}{\sqrt{t_i}} \frac{\sum_{j=1}^{L} W_j S_j \sqrt{t_j}}{V_0 + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{L} W_j S_j^2}$$

aunque en esta asignación los tamaños muestrales dependen, además, directamente de los tamaños de los estratos y de las varianzas de los mismos, e inversamente de las raíces de los tiempos de entrevistas, su utilización será adecuada cuando el objetivo sea la minimización de los costes totales y no en situaciones como la planteada.

De la misma forma que en el caso de la asignación de Neyman, esta solución MinMax no tiene en cuenta el hecho de que la asignación del tamaño muestral en los estratos no puede ser menor que uno ni mayor que el tamaño del estrato, es decir, $1 \leq n_i \leq N_i$. En el apartado 3, al estudiar el caso general, se incorporan estas restricciones.

A modo de ilustración, con objeto de hacer patente la diferencia entre la asignación de Neyman y la asignación MinMax, considérese la siguiente situación, modificación de un ejemplo que aparece en Pandurang y otros (1984):

Se quiere estimar la media de la variable «cultivo de trigo» en una determinada zona agrícola que comprende 340 pueblos.

Estos pueblos han sido estratificados según el tamaño de su área de cultivo en cuatro estratos, como se muestra en la columna 2 de la tabla adjunta. El número de pueblos de los diferentes estratos viene dado en la columna 3.

Las muestras serán tomadas por equipos de entrevistadores que trabajarán de forma independiente en cada uno de los estratos, siendo los tiempos de entrevista por unidad de muestra distintos según los estratos.

Los tiempos de entrevistas estimados y las desviaciones típicas de los estratos S_i para la variable vienen dados en las columnas 4 y 5 de la tabla.

ESTRATO	TAMAÑO	N_i	t_i	S_i	S_i^2
1	0-500	63	2	56,3	3.169,69
2	501-1.500	199	1	116,4	13.548,96
3	1.501-2.500	53	2	186,0	34.596,0
4	>2.500	25	3	361,3	130.537,69

Se desea terminar todas las entrevistas en el menor tiempo posible, trabajando simultáneamente en los estratos, y para controlar el error de la estimación impondremos que

$$P\{|y_{st}-Y|\leq 44,7\}=0,95 \qquad [1]$$

donde Y denota la media poblacional y y_{st} el estimador de la media. Si el estimador y_{st} se distribuye normalmente, entonces

$$P\{|y_{st}-Y|\leq 2\ SE(y_{st})\}=0,95 \qquad [2]$$

De las ecuaciones [1] y [2] se deduce que debe diseñarse la encuesta de forma que la varianza total del estimador de la media

$$V(y_{st})\leq 500$$

En estas condiciones, la asignación MinMax proporciona unos tamaños muestrales que, redondeados por exceso para conservar el nivel de varianza, dan lugar a $n_1=8$; $n_2=16$; $n_3=8$; $n_4=6$. Por tanto, se pueden finalizar todas las entrevistas en 18 unidades de tiempo y éste es el menor tiempo posible, al ser esta asignación la solución al problema

$$\text{Min Max } \{2n_1,\ n_2,\ 2n_3,\ 3n_4\}$$

$$\text{s.a.: } 108,83\left(\frac{1}{n_1}-\frac{1}{63}\right)+4.641,46\left(\frac{1}{n_2}-\frac{1}{199}\right)+840,66\left(\frac{1}{n_3}-\frac{1}{53}\right)+$$

$$+705,76\left(\frac{1}{n_4}-\frac{1}{25}\right)\leq 500$$

Ahora bien, si pretendemos minimizar la suma total de los tiempos de entrevistas será más adecuado usar la asignación de Neyman, que proporciona unos tamaños muestrales (redondeados por exceso) de $n_1=3$; $n_2=21$; $n_3=7$; $n_4=5$.

3. DETERMINACION DEL TAMAÑO DE LA MUESTRA EN CADA ESTRATO PARA LA ESTIMACION DE VARIAS CARACTERISTICAS

Trataremos el problema general donde se quieren estimar varias características con funciones de tiempo de entrevista en cada estrato lineales y crecientes, y con precisiones para la estimación de la media de cada una de las características fijadas de antemano. Lo que podemos expresar como que la varianza total del estimador de la media para cada característica sea menor o igual que un determinado valor.

Para un problema con L estratos y H características sea

S_{ij}^2= cuasivarianza de la característica j-ésima en el estrato i-ésimo, $i=1, \ldots, L$, $j=1, \ldots, H$.

V_0^j= nivel máximo prefijado para la varianza del estimador de la media de la característica j-ésima, $j=1, \ldots, H$.

La función objetivo será

$$\text{Max } \{t_i n_i\} \qquad i=1, \ldots, L$$

y las restricciones tendrán la forma

$$\sum_{i=1}^{L} W_i^2 S_{ij}^2 \left(\frac{1}{n_i} - \frac{1}{N_i}\right) \leq V_0^j \qquad j=1, \ldots, H$$

Por tanto, el problema a resolver será

$$\begin{aligned} &\text{Min} \max_{1 \leq i \leq L} \{t_i n_i\} \\ &\text{s.a.: } \sum_{i=1}^{L} W_i^2 S_{ij}^2 \left(\frac{1}{n_i} - \frac{1}{N_i}\right) \leq V_0^j \qquad j=1, \ldots, H \qquad \text{(I)} \\ &\qquad\qquad 1 \leq n_i \leq N_i \qquad i=1, \ldots, L \end{aligned}$$

Que tiene funciones objetivo lineales, pero cuyas restricciones relativas a la varianza del estimador no lo son.

Si hacemos un cambio de variable y llamamos

$$x_i = \frac{1}{n_i} - \frac{1}{N_i} \qquad i=1, \ldots, L$$

El problema se transforma en

$$\operatorname*{Min\,Max}_{1\leq i\leq L} \left\{ \frac{t_i N_i}{N_i x_i + 1} \right\}$$

$$\text{s.a.:} \sum_{i=1}^{L} W_i^2 S_{ij}^2 x_i \leq V_0^j \qquad j=1, \ldots, H$$

$$0 \leq x_i \leq 1 - \frac{1}{N_i} \qquad i=1, \ldots, L$$

Problema con restricciones lineales y cuyos objetivos son funciones estrictamente decrecientes, ya que son inversos de funciones lineales.

Mármol y Pelegrín (1991) tratan el problema de maximizar la mínima recompensa con funciones continuas y estrictamente crecientes cuando las restricciones son lineales con coeficientes positivos. En nuestro caso, tratamos de minimizar el máximo de los tiempos de entrevista en cada estrato, siendo las funciones en el objetivo continuas y decrecientes. Siguiendo una metodología análoga a la utilizada en el trabajo anteriormente citado, construimos un procedimiento para resolver nuestro problema.

En función de las variables originales, la descripción del método sería la siguiente:

Resolvemos el problema relajado

$$\operatorname*{Min\,Max}_{1\leq i\leq L} \{t_i n_i\}$$

$$\text{s.a.:} \sum_{i=1}^{L} W_i^2 S_{ij}^2 \left(\frac{1}{n_i} - \frac{1}{N_i} \right) \leq V_0^j \qquad j=1, \ldots, H \qquad \text{(II)}$$

$$n_i \geq 1 \qquad i=1, \ldots, L$$

mediante el siguiente algoritmo.

Algoritmo I

PASO 1: Para las $H+L$ restricciones del problema, hallar z_k $k=1, \ldots, H+L$ tal que

$$\sum_{i=1}^{L} W_i^2 S_{ij}^2 \left(\frac{t_i}{z_j} - \frac{1}{N_i} \right) = V_0^j \qquad j=1, \ldots, H$$

$$\frac{t_i}{z_{H+i}} = 1 \qquad i=1, \ldots, L$$

PASO 2: Sea $z^* = \max_{1 \le k \le H+L} \{z_k\}$=(por paso 1)=

$$=\max \left\{ \{t_i\}_{1 \le i \le L},\ \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{L} W_i^2 S_{ij}^2 t_i}{V_0^j + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{L} W_i S_{ij}^2} \right\}_{j=1,\dots,H} \right\}$$

PASO 3: Para $i=1, \dots, L$ $n_i = z^*/t_i$ es una solución óptima del problema relajado y el valor MinMax es z^*.

Para imponer que se verifiquen, además, las restricciones $n_i \le N_i$ $i=1, \dots, L$ de forma que resolvamos el problema original, utilizaremos el siguiente procedimiento:

FASE 1: Resolver el problema relajado (II) según el algoritmo I.

FASE 2: A partir de la solución, si $\exists\ n_k > N_k$, se demuestra (Marmol y Pelegrin (1991)) que en la solución óptima del problema original (I), $n_k = N_k$; por tanto, fijamos este valor para la variable k-ésima, eliminamos este índice del conjunto de índices y volvemos a resolver el problema que resulte con las restantes variables según el algoritmo I.

Este paso habrá que repetirlo como máximo L veces hasta obtener la solución.

FASE 3: Por (Marmol y Pelegrin (1991)) la solución obtenida será única si, en la última ejecución del algoritmo I, el máximo de los z_k se ha alcanzado en una de las H primeras restricciones, al ser todos los coeficientes de las restricciones estrictamente positivos.

Ahora bien, si este máximo se ha alcanzado en una de las últimas L restricciones, es decir, z^* es igual a un t_k, $k=1, \dots, L$, entonces la solución no tiene por qué ser única, por lo que, en la búsqueda de la mejor de las posibles soluciones MinMax, fijaremos $n_k=1$ y volveremos a resolver el problema resultante por el algoritmo I.

Este paso habría que repetirlo como mucho L veces.

Dado que el número de variables es L, el número total de veces que se ejecuta el algoritmo I será L como máximo.

Hay que hacer notar que si el máximo de la z_k se ha alcanzado en una de las H primeras restricciones, situación que es la usual a menos que alguno de los tamaños muestrales se salga de sus cotas, la expresión de n_i será

$$n_i = \frac{1}{t_i} \; \frac{\sum_{j=1}^{L} W_j^2 S_{jr}^2 t_j}{V_0^r + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{L} W_j S_{jr}^2}$$

suponiendo que el máximo se alcance para z_r.

Esto nos proporciona una expresión analítica para los tamaños muestrales en cada estrato en el caso de la estimación de varias características que resulta ser inversamente proporcional al tiempo por unidad de muestreo empleado en cada estrato (resultado obtenido para una característica).

El hecho de que se haya alcanzado el máximo en z_r indica que es el nivel impuesto para la varianza de la característica r-ésima el que va a determinar los tamaños muestrales óptimos, por lo que si quisiéramos disminuir el valor de nuestra función objetivo sería necesario permitir un mayor error en la estimación de dicha característica.

A modo de ilustración, consideremos la siguiente situación, basada en un ejemplo debido a Nordbotten (1956):

Se diseña una encuesta para obtener una estimación del nivel de empleo total y del valor de la producción en empresas de fabricación de muebles. La población se ha dividido en dos estratos según el tamaño de las empresas; los tamaños de los estratos y el coste medido en tiempo utilizado por unidad de muestreo viene dado en la tabla adjunta. Se tomarán las muestras de forma independiente en cada uno de los estratos, y el objetivo es la terminación del proceso de toma de muestras en el menor tiempo posible.

Estrato	N_i	Nivel de empleo S_{i1}^2	Valor producción S_{i2}^2	Tiempo/und. t_i
Grandes empresas	600	200	500.000	1
Pequeñas empresas	1.000	10	4.000	2

Las desviaciones típicas en cada estrato para cada una de las variables se han obtenido de anteriores experiencias.

Se desea que

$$P\{|Ny_{st}^j - NY^j| \leq 0{,}06\ NY^j\} = 0{,}95,\ j = 1{,}2$$

donde Y^j denota la media de la población para la variable j-ésima. También se sabe de experiencias pasadas que $NY^1 \leq 10.000$ y que $NY^2 \leq 400.000$. Si los estimadores y^j_{st} se distribuyen aproximadamente como una normal, se verifica que

$$P\{|Ny^j_{st} - NY^j| \leq 2\ SE(Ny^j_{st})\} = 0{,}95,\ j=1,2$$

De estas dos últimas ecuaciones se deduce que debemos de exigir unos niveles para la varianza de los estimadores de la media de $V^1_0 = 0{,}0351562$ y $V^2_0 = 56{,}25$.

Con estos datos, el problema a resolver será

$$\text{Min Max } \{n_1,\ 2n_2\}$$

$$\text{s.a. } \left(\frac{600}{1.600}\right)^2 200 \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{600}\right) + \left(\frac{1.000}{1.600}\right)^2 10 \left(\frac{1}{n_2} - \frac{1}{1.000}\right) \leq 0{,}03515625$$

$$\left(\frac{600}{1.600}\right)^2 500.000 \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{600}\right) + \left(\frac{1.000}{1.600}\right)^2 4.000 \left(\frac{1}{n_2} - \frac{1}{1.000}\right) \leq 56{,}25$$

$$1 \leq n_1 \leq 600$$

$$1 \leq n_2 \leq 1.000$$

Aplicando el procedimiento descrito para buscar la solución del problema, en la fase 1, al ejecutar el algoritmo I sobre el problema relajado, obtenemos unos tamaños muestrales de $n_1=420$, $n_2=210$ unidades a muestrear en cada estrato.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha descrito un procedimiento para hallar una asignación de los tamaños muestrales a los estratos, que es la apropiada para situaciones en que se persigue una nivelación en los tiempos de muestreo en los distintos estratos.

El método se describe para la estimación de una o de varias características cuando se han fijado de antemano unos niveles máximos para el error de la estimación, obteniéndose en ambos casos expresiones analíticas para estos tamaños muestrales.

La resolución del problema en la fase 1 incluye la restricción de que cada variable no sea menor que la unidad. Se incorpora también al procedimiento la manera de hallar la solución en el caso de que, en la primera asignación obtenida, el tamaño de la muestra en algún estrato resulte ser mayor que el tamaño del estrato.

En el trabajo se han medido los costes de muestreo como los tiempos empleados por unidad entrevistada. Este tiempo por unidad puede incluir no sólo el tiempo de entrevista, sino, en general, cualquier tiempo asociado con el número de unidades muestreadas en el estrato, por ejemplo el tiempo de desplazamiento entre las unidades. No obstante, el procedimiento es igualmente válido cuando las funciones en el objetivo miden costes cualesquiera asociados al número de unidades muestreadas, que tengan que optimizarse simultáneamente en los estratos.

Por otra parte, aunque el algoritmo está descrito para funciones de coste lineales en el tamaño de la muestra, esta metodología puede extenderse al caso más general de funciones de coste no decrecientes.

BIBLIOGRAFIA

Brown, J. R. (1979): «The sharing Problem». *Operations Research*, 27, 324-340.

Chatterjee, S. (1968): «Multivariate Stratified Surveys». *J. Amer. Stat. Assoc.*, 63, 530-535.

Cochran, W. G. (1975): «Técnicas de muestreo». Compañía Editorial Continental, S. A.

Dalenius, T. (1957): «Sampling in Sweden: Contributions to the methods and theories of sample survey practice». Stockholm: Almqvist Och Wiksell.

Folks, J. L.; Antle, C. E. (1965): «Optimum Allocation of Sampling Units to Strata when there are R responses of interest». *J. Amer. Stat. Assoc.*, 60, 225-233.

Kokan, A. R.; Khan, S. (1967): «Optimum allocation in multivariate surveys: An analytical solution». *J. Roy. Stat. Soc. Ser. B.*, 29, 115-125.

MÁRMOL, A.; PELEGRÍN, B. (1991): «Asignación de Recursos Max-Min: Propiedades y Algoritmos». *Trabajos de Investigación Operativa,* vol. 6, n.° 1, pp. 45-59.

NEYMAN, J. (1934): «On the two different aspects of the representative method: The method of stratified sampling and the method of purposive selection». *J. Roy. Stat. Soc.*, 97, 558-606.

NORDBOTTEN, S. (1956): «Allocation in stratified sampling by means of linear programming». *Skand. Akt.*, 39, 1-6.

PANDURANG V. SUKHATME y otros (1984): «Sampling Theory of Surveys with Applications». Indian Society of Agricultural Statistics, New Delhi. Tercera edición.

SUKHATME, P. V. (1935): «Contribution to the theory of the representative methods». *J. Roy. Stat. Soc.*, Suppl. 2, 253-268.

TSCHUPROW, A. A. (1923): «On the Mathematical Expectation of the Moment of frequency distributions in the case of correlated observations». *Metron 2,* n.° 4.

YATES, F. (1960): «Sampling methods for censures and surveys». 2nd Edition, Charles Griffin and Co., Ltd., London.

MINMAX ALLOCATTION IN MULTIVARIATE STRATIFIED SAMPLING

SUMMARY

This paper treats the problem of the allocation of sample sizes to strata in stratified sample surveys.

Considering situations in which the objetive is to finish the sampling as soon as possible, when it is possible to work simoultaneously in the strata, we propose a model that minimizes maximum time spent in each strata, at the same time that fixes estimation precision.

We obtain an exact method that leads to an analytic expression of the sample sizes for the general problem of estimating several characteristics in a sample survey.

Key words: Stratified sampling, Minmax allocattion, Multivariate surveys.

AMS Classification: 62D05, 90C29, 90A80.