UNIVERSIDAD DE SEVILLA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA I

GRADUACIONES NATURALES DE ÁLGEBRAS DE LEIBNIZ

Alfonso José González Regaña

Sevilla, 2004

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

COMISIÓN DE DOCTORADO

Sevilla, 15 de Julio de 2004
N/Ref.: Negociado de Tesis EL/CAR
Asunto: Enviando Tesis Doctoral Leída

ILMO. SR. DIRECTOR DE LA BIBLIOTECA
DE LA E.T.S. DE INGENIERÍA
INFORMÁTICA
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Adjunto le remito ejemplares de Tesis Doctorales leídas en Departamentos vinculados a esa Facultad a fin de que pasen a formar parte de fondos bibliográficos de consulta de ese Centro.

AUTORES DE LAS TESIS LEÍDAS

- ESCALONA CUARESMA, MARÍA JOSÉ
- GARIJO ROYO, DELIA
- GONZÁLEZ REGAÑA, ALFONSO JOSÉ

LA JEFA DE SECCIÓN DE DOCTORADO

Fdo.: Yolanda Díaz Rolando.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Departamento de Matemática Aplicada I

Graduaciones naturales de álgebras de Leibniz

Memoria presentada por Alfonso José González Regaña para optar al grado de Doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

V°. B°.
de los Directores,

Fdo. José Ramón Gómez Martín,
Catedrático de Universidad del
Departamento de Matemática
Aplicada I de la Universidad de
Sevilla.

Fdo. Luisa María Camacho Santana,
Prof. Contratada Doctora del
Departamento de Matemática
Aplicada I de la Universidad de
Sevilla.

Sevilla, Junio 2004.

A mis padres y a mi hermano Tacho

Estos son en verdad los pensamientos de todos los tiempos y tierras; no son originales y míos.
Si no son tan tuyos como míos, no son nada o casi nada.
Si no son el enigma o la solución del enigma, no son nada.
Si no se hallan tan cerca como distantes, no son nada.
Esta es la hierba que crece por doquier que haya tierra y haya agua; este es el aire compartido que envuelve el globo.

Walt Whitman,
Hojas de Hierba

Resumen

Las álgebras de Leibniz fueron introducidas por Loday [26], [27], [28] hace apenas una década y constituyen, en un cierto sentido, una generalización de las álgebras de Lie en cuanto que se suprime de la definición de estas últimas la condición de antisimetría.

Cuando se considera la filtración natural que produce la sucesión central descendente de un álgebra de Leibniz nilpotente $\mathcal{L}$, se obtiene un álgebra graduada finita que, en cierto modo, constituye la estructura básica del álgebra que se considera y que, cuando es isomorfa a $\mathcal{L}$, se dice que está graduada naturalmente.

Un álgebra de Leibniz de dimensión n se dice p-filiforme si su sucesión característica es $(n-p, 1, \cdots, 1)$. La clasificación de las álgebras de Leibniz graduadas naturalmente en dimensión arbitraria se conoce en los casos nulfiliforme (ó 0-filiforme) y 1-filiforme [2].

En este trabajo se obtiene la clasificación completa de las álgebras de Leibniz 2-filiformes y 3-filiformes graduadas naturalmente, en dimensión arbitraria finita n, para $n \geq 8$.

Agradecimientos.

Cuando yo tenía seis años...bueno, creo que así empieza "El Principito" de Antoine de Saint Exúpery pero no sé si yo he comenzado con buen pie. Quizás debería ir por otro lado y hacerles una confesión primero: desde muy pequeño una de mis grandes pasiones ha sido el cine. Las mates también, claro, pero esta es la parte menos académica de esta memoria y me voy a permitir ciertas licencias, con el permiso del lector (que si lo desea puede obviar estos párrafos y pasar directamente a la introducción).

Para los que han decidido seguir iré al grano: la cuestión es que yo, de chico (como se dice por mi tierra), seguía todos los años la ceremonia de entrega de los Oscar, hasta que cierto canal de televisión empezó a cobrar por ello. Como consecuencia, perdí el interés. Además, siempre me había parecido llena de tópicos (y, para ser sincero, bastante aburrida) la parte en la que los premiados agradecen haber sido reconocidos.

Y he ahí la clave: ahora, una vez finalizado el trabajo, llega el momento de que yo dé las gracias y deje constancia de toda la ayuda que he recibido por parte de tanta gente a lo largo de este tiempo. Pues bien, me he dado cuenta de que, en el fondo, esto de dar las gracias no se puede hacer de otra manera; al igual que los sentimientos más profundos, son difíciles de acotar con palabras.

He de decir que, de un modo u otro (e incluso sin ser conscientes de ello), hay muchas personas que me han acompañado y apoyado a lo largo de este apasionante episodio de mi vida. No sería justo, sin embargo, no dedicar mi primera mirada atrás y mi primer agradecimiento a mis directores de tesis: Lisa y José Ramón. Profesionalmente, ha sido un auténtico privilegio haber contado con directores como ellos, involucrados tan de cerca en el desarrollo de mi trabajo, y con quienes he podido disfrutar de mi formación investigadora dentro de un marco de libertad y compañerismo en el que me han hecho sentir uno más desde el primer día. En cuanto al ámbito personal, la afinidad ha sido clara también desde el principio y

estoy profundamente orgulloso de la amistad que, a estas alturas, nos une. En este punto me acuerdo también de Concha, de toda la generosidad que me ha demostrado a la hora de prescindir en muchos momentos de José Ramón en favor mío y de todo el cariño y los ánimos que me ha transmitido siempre.

Hay otra persona que ha desempeñado un importante papel en el hecho de que este barco haya llegado a buen puerto. Su labor me facilitó mucho el camino cuando decidimos introducirnos en este nuevo y poco conocido mundo de las álgebras de Leibniz. Me refiero al Doctor Bakhrom Omirov del Institute of Mathematics Academy Sciences of Uzbekistan.

También deseo enviar un recuerdo y un abrazo a los compañeros de mi grupo de investigación (Rosa, Jesús Mari, Emi,...), gracias por haberme acogido con tanta amabilidad y haber estado pendientes, en todo momento, de mi evolución.

En cuanto al Departamento de Matemática Aplicada I, desde Felipe (que me trató siempre con tanta cordialidad) hasta Juanma (que me sacó de más de un apuro), gracias a todos por vuestro seguimiento y apoyo, en especial a los compañeros de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática (Juan Carlos, Teresa, Alberto,...), y de la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Agrícola (Clara, Carmen, Natalia,...) que me prestaron todo tipo de ayuda a la hora de compartir labores docentes.

Es un hecho bien conocido que, cuando se realiza un trabajo de este tipo, es fácil que se produzcan momentos críticos que pueden alterar al más comedido así que, por supuesto, he de agradecer a mi familia y amigos en general el haberme soportado pacientemente en estas ocasiones. No obstante, quiero dar las gracias (aunque no las acepten) sobre todo a mis padres y a mi hermano, por las dosis de confianza depositadas en mí, la oportunidad que me han dado de dedicarme a lo que me gusta y las horas que, con comprensión, han pasado animándome.

Quisiera agradecer también el interés a todo lector que se sumerja en las páginas de esta memoria y me haya hecho merecedor de su atención.

Introducción

Las álgebras de Lie tienen más de un siglo de existencia y juegan un importante papel en numerosas ramas de la Física y de las Matemáticas. Formalmente se definen como un espacio vectorial $\mathcal{L}$ sobre un cuerpo $\mathbf{K}$ provisto de una aplicación bilineal, llamada *producto o ley del álgebra* $\mu : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ que verifica, $\forall X, Y, Z \in \mathcal{L}$, las condiciones

a) $\mu(X, X) = 0$
b) $\mu(X, \mu(Y, Z)) + \mu(Y, \mu(Z, X)) + \mu(Z, \mu(X, Y)) = 0$ (identidad de Jacobi).

Habitualmente se denotará $\mu(X, Y)$ por $[X, Y]$ y se le designará el *producto corchete* de X e Y. Por $\mathcal{L}$ se denota indistintamente el álgebra o el espacio vectorial subyacente. La *dimensión del álgebra* $\mathcal{L}$ es la dimensión del espacio vectorial $\mathcal{L}$.

La noción de álgebra de Leibniz es mucho más reciente, pues fue introducida por Jean Louis Loday en [27] y en el libro [26]. Presenta unas álgebras cuyo producto interno en lugar de verificar las propiedades *a*) y *b*) anteriores verifica la identidad

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] - [[X, Z], Y] \quad \forall X, Y, Z \quad (1)$$

Si ya el título del artículo es bastante sugerente, es además muy fácil comprobar que si $[X, Y] = -[Y, X] \quad \forall X, Y$, la identidad (1) coincide con la de Jacobi. Así, las álgebras de Leibniz son una generalización (en el sentido de que toda álgebra de Lie es también álgebra de Leibniz) que es "no conmutativa" (en realidad "no antisimétrica").

En estricto rigor, Bloch las había considerado ya en 1965, en [3], aunque él las llamó en ese trabajo D-álgebras.

Loday estudió las álgebras de Leibniz en relación con propiedades de homología cíclica y homología de Hochschild de álgebras de matrices. Así, no resulta extraño que una importante cantidad de artículos sobre las álgebras de Leibniz se dediquen a estudiar problemas homológicos.

En la actualidad, muchos aspectos de la teoría de las álgebras de Leibniz permanecen sin ser estudiados y otros (álgebras de Leibniz simples, álgebras de Leibniz semisimples, radical de un álgebra de Leibniz, etc.) no han sido suficientemente considerados. Merece la pena, en particular, resaltar la definición de álgebra de Leibniz simple, sugerida por Abdukassynova y Dzhumadil'daev. Un álgebra de Lie se dice simple si es no abeliana y sólo admite dos ideales, $\{0\}$ y el propio $\mathcal{L}$. En el caso de las álgebras de Leibniz es necesario admitir un tercer ideal, por tanto propio, el ideal $\mathcal{I}$ engendrado por los productos $[X, X]$ y definir álgebra de Leibniz simple como la que admite sólo tres ideales: $\{0\}, \mathcal{I}$, y $\mathcal{L}$ siendo, ella misma, no abeliana; la razón "técnica" de incluir $\mathcal{I}$ es que, como veremos más adelante, este ideal $\mathcal{I}$ existe para toda álgebra de Leibniz y es no nulo salvo si $\mathcal{L}$ es álgebra de Lie.

Cuando se aborda el estudio de estructuras algebraicas, el primer problema que se plantea es el de su clasificación, es decir, la descripción de los elementos del ente algebraico.

Dado que el problema de la clasificación de las álgebras de Lie es un problema abierto, aún habiendo sido planteado hace más de un siglo, se puede imaginar las dificultades que surgen al tratar de estudiar las álgebras de Leibniz.

El estudio de la clasificación de álgebras no asociativas nilpotente suele ser de una extraordinaria complejidad.

Ya la clasificación de un tipo particular de álgebras de Lie resolubles, las nilpotentes, se antoja imposible. Sirva como botón de muestra el hecho de que, aun cuando ya en 1891 Umlauf [31] encuentra (bien que incompletas y con errores) listas de familias de álgebras de Lie nilpotentes hasta dimensión 9, en la actualidad sólo se conoce la clasificación completa de las álgebras de Lie nilpotentes hasta dimensión 7.

Aunque era un resultado bien conocido, el primero en publicar listas completas de álgebras de Lie nilpotentes de dimensiones menores o iguales a 5 fue Dixmier en 1958 [17]. Aún antes, en 1950, Vranceanu [33] obtiene resultados relevantes sobre álgebras de Lie filiformes (bien que él no las denominaba así). En 1958 Morosov [24] da la primera lista completa de álgebras de Lie nilpotentes reales y complejas de dimensión 6. De manera independiente, Vergne en 1966 [32] vuelve a obtener los resultados de Morosov y Vranceanu aunque desde un punto de vista distinto. Es a ella a la que debemos la denominación de álgebras de Lie filiformes. Otras listas completas de dimensión 6 las proporcionan en 1983 Nielsen [25] y Cerezo [16], haciendo uso de métodos distintos.

En 1989 Ancochea y Goze [1] y Romdhani [29] dan, independientemente, las primeras listas completas de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 7 reales y complejas. Además, Seeley [30] obtiene, por distinto procedimiento, la misma clasificación. Llegados a este punto, es fácil ver la mucho mayor complejidad de la clasificación de álgebras de Lie nilpotentes (y, por ende, de las resolubles) respecto a las semisimples, pues ya en dimensión 7 aparecen familias uni-paramétricas de álgebras no isomorfas.

El trabajo citado de Ancochea y Goze tiene una enorme importancia pues introduce un nuevo invariante mucho más fino que el nilíndice, la sucesión característica o invariante de Goze, que ha permitido abordar de una manera más sencilla el problema. Así, estos mismos autores obtienen en 1988 [?] la clasificación de las álgebras de Lie filiformes de dimensión 8, Gómez y Echarte en 1991 [18] la de dimensión 9 y Boza, Echarte y Núñez en 1994 [4]la de dimensión 10.

La descomposición que da Khakimdjanov en [21] y [22] de la ley de un álgebra de Lie filiforme a partir de la del álgebra modelo y de una serie de cociclos ha permitido dar otro importante avance a la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes. Así, Gómez, Jiménez-Merchán y Khakimdjanov en 1998 [20] obtienen la clasificación de las álgebras de Lie filiformes de dimensión menor o igual a 11, haciendo uso también de computación simbólica.

La gran dificultad del problema de la clasificación de álgebras de Lie nilpotentes obliga a seleccionar subfamilias relevantes cuyo estudio pueda ser abordado. El invariante de Goze es ahora de gran ayuda. Así, Cabezas y Gómez llaman p-filiformes a las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión n e invariante de Goze $(n-p, 1, \ldots, 1)$ y, solos o junto a Camacho y Navarro estudian en [8],[7],[5],[6],[13], [12],[14] la clasificación de las álgebras de Lie p-filiformes, obteniendo algunas de ellas en dimensión arbitraria.

Por esa razón es interesante abordar la clasificación de las álgebras graduadas naturalmente de las familias, pues su conocimiento nos aporta información relevante sobre su estructura (en cierta manera, cuando se clasifica un álgebra graduada naturalmente de cierto tipo se conoce el "esqueleto" de la ley de todas las álgebras asociadas a la graduación natural considerada). También aportan información sobre las componentes irreducibles.

En el capítulo **0** únicamente se pretenden resaltar algunos conceptos y propiedades que van a ser fundamentales para el desarrollo del trabajo.

El capítulo **1** hace un estudio de las álgebras de Leibniz 2-filiformes, graduadas naturalmente. En función de si existe o no un cierto vector característico e_1 verificando la condición de que $[e_1, e_1] \neq 0$ se distinguirán, en principio, dos tipos de álgebras no isomorfas entre sí, los llamados **Tipo I** y **Tipo II**. Para las álgebras de Tipo I y teniendo en cuenta que r_1 y r_2 denotan, respectivamente, las posiciones de los vectores e_{n-1}, e_n dentro de los subespacios de la graduación natural, se obtiene que $(1,1)$ y $(1,2)$ son los únicos valores admisibles para el par (r_1,r_2) siendo todas las álgebras con $r_1=r_2=1$ escindidas. En el caso de que $(r_1,r_2)=(1,2)$ (y considerando únicamente a partir de ahora las álgebras no escindidas) se obtienen 4 álgebras no isomorfas entre sí que denotaremos, respectivamente, por $\mu^i_{(I,1,2)}$, $1\leq i\leq 4$ y cuyas leyes pueden ser consultadas en el apéndice de esta memoria (como ocurrirá con todas las leyes de las álgebras que citemos a partir de ahora en esta sección).

Para el caso de las álgebras de Tipo II sólo hay que ubicar el vector e_n y por tanto existe un único r. Los valores admisibles serán, en este caso, $r=1$ y $r=2$ y se obtendrá que, para el caso r_1, existe un único álgebra de Leibniz, no de Lie y no escindida que denotamos por $\mu_{(II,1)}$. Para álgebras de Tipo II se encuentran tanto álgebras de Leibniz como álgebras de Lie (que, recordemos, no son más que un caso particular de álgebras de Leibniz). No obstante cuando se obtengan álgebras de Lie, al encontrarse las 2-filiformes particularmente clasificadas en [19] se obviará la clasificación. En el caso de las álgebras de Leibniz no de Lie se obtienen 3 álgebras no isomorfas entre sí que denotaremos por $\mu^i_{(II,2)}$, $1\leq i\leq 3$.

Finalmente, el capítulo **2** se dedica al estudio de las álgebras de Leibniz 3-filiformes, graduadas naturalmente. Del mismo modo que en el capítulo anterior, en función de si existe o no un cierto vector característico e_1 verificando la condición de que $[e_1,e_1]\neq 0$ se vuelven a distinguir dos tipos de álgebras no isomorfas entre sí a los que volvemos a llamar **Tipo I** y **Tipo II.** En el caso de las álgebras de Tipo I falta por ubicar la posición de los vectores e_{n-2},e_{n-1} y e_n dentro de los subespacios de la graduación natural. Si llamamos r_1,r_2 y r_3 a esa posición respectivamente, llegamos a que los únicos valores admisibles son $r_1=1$, $r_2=1,2$ y $r_3=1,2,3$ siendo, de nuevo, todas las álgebras con $r_1=r_2=r_3=1$ son escindidas. Para $(r_1,r_2,r_3)=(1,1,2)$ se obtienen un total de 27 álgebras de Leibniz, no de Lie, no isomorfas entre sí, una familia 3-paramétrica, 4 familias 2-paramétricas y 13 familias uniparamétricas de álgebras de Leibniz, no de Lie, no isomorfas entre sí. Usaremos la notación $\mu^i_{(I,1,1,2)}$ ó $\mu^{i,\lambda_i}_{(I,1,1,2)}$ para referirnos a ellas. Para $(r_1,r_2,r_3)=(1,2,2)$ se obtienen 4 álgebras de Leibniz, no de Lie, no isomorfas entre sí y una familia uniparamétrica de álgebras de Leibniz, no de Lie, no isomorfas entre sí que serán denotadas por $\mu^i_{(I,1,2,2)}$ ó $\mu^{i,\lambda}_{(I,1,2,2)}$, respectivamente. Por último, para $(r_1,r_2,r_3)=(1,2,3)$ se obtienen 2 álgebras de Leibniz, no de Lie, y 2 familias uniparamétricas de álgebras no isomorfas entre sí que notaremos $\mu^i_{(I,1,2,3)}$ ó $\mu^{i,\lambda_i}_{(I,1,2,3)}$.

En el Tipo II sólo resta ubicar e_{n-1} y e_n y se obtienen que los valores admisibles de los nuevos r_1 y r_2 son $(1,1)$, $(1,2)$ y $(2,2)$. Para el caso $(r_1,r_2)=(1,1)$ todas las álgebras que se obtienen son escindidas. En el caso $(1,2)$ se obtienen 13 álgebras de

Leibniz, no de Lie, no isomorfas entre sí y 4 familias uniparamétricas de álgebras de Leibniz, no de Lie, no isomorfas entre sí.

Finalmente, en el caso $(2, 2)$ se obtiene un único álgebra y de Leibniz no de Lie. Además, al tratarse de álgebras de Tipo II, al igual que en el capítulo anterior, será posible encontrar también álgebras de Lie (de las que se sigue obviando la clasificación por encontrarse ésta ya realizada en [10]).

Índice

Capítulo 0

Preliminares

En este capítulo se dan algunas definiciones y conceptos necesarios para la realización del trabajo de investigación que se presenta.

0.1 Notaciones y terminología

Se denomina álgebra a la estructura resultante de definir en un espacio vectorial V una ley de composición interna (producto) distributiva respecto de la operación suma en V. A este producto se le denomina ley algebraica o ley del álgebra, es decir, a la forma bilineal $\mu : V \times V \longrightarrow V$ cuya bilinealidad (distributividad) garantiza la compatibilidad de la ley μ con la estructura de espacio vectorial V. Por abuso de lenguaje, se notará mediante el par (V, μ) a un álgebra (donde V es un espacio vectorial sobre un cierto cuerpo $\mathbf{K}$). En un sentido más estricto, un álgebra es una 5−upla $(V, +, \cdot\mathbf{K}, \mathbf{K}, \mu)$ donde:

a) $\mathbf{K}$ es un cuerpo,

b) $(V, +, \cdot\mathbf{K}, \mathbf{K})$ es un $\mathbf{K}$-espacio vectorial, y

c) μ es una ley algebraica.

Según sea la ley μ asociativa o no las álgebras se denominan asociativas o no asociativas. Esas son las dos grandes familias de álgebras conocidas hoy día, pero incluyen las no asociativas a otras subfamilias que suelen venir determinadas, con frecuencia, por necesidades físicas y que se suelen designar con nombres propios (álgebras de Jordan, de Leibniz y tantos otros casos, el más importante de los cuales sea, quizás, el de las álgebras de Lie).

Un álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$ sobre un cuerpo $\mathbf{K}$ es un $\mathbf{K}-$espacio vectorial $\mathcal{L}$ en el que se ha definido una multiplicación, es decir, una aplicación bilineal $\mu : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$, verificando que

$$\mu(x, \mu(y, z)) = \mu(\mu(x, y), z) - \mu(\mu(x, z), y) \quad \forall x, y, z \in \mathcal{L} \qquad \text{(identidad de Leibniz)}$$

Habitualmente se notará $\mu(X, Y)$ por $[X, Y]$ y se le designará el *producto corchete* de x e y. Por $\mathcal{L}$ se denota indistintamente el álgebra o el espacio vectorial subyacente. La *dimensión del álgebra* $\mathcal{L}$, $dim(\mathcal{L})$, es la dimensión del espacio vectorial subyacente. En este trabajo se van a considerar álgebras de Leibniz sobre $\mathbf{C}$ de dimensión finita.

Es fácil probar que toda álgebra de Lie es álgebra de Leibniz. Las álgebras de Leibniz generalizan a las de Lie en el sentido de que pierden su "conmutatividad" (en sentido estricto, su anticonmutatividad).

Si $\mathcal{L}$ es un $\mathbf{K}$-álgebra de Leibniz de dimensión n y $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base del espacio vectorial subyacente, todo par de vectores u y v se pueden expresar como

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i \quad u_i \in \mathbf{K}, \quad 1 \leq i \leq k$$

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \quad v_i \in \mathbf{K}, \quad 1 \leq i \leq k$$

de donde se tiene que

$$[u, v] = [\sum_{i=1}^{n} u_i e_i, \sum_{i=1}^{n} v_i e_i] = \sum_{i,j=1}^{n} u_i v_j [e_i e_j]$$

con lo que, para conocer el producto de dos elementos cualesquiera del álgebra basta con conocer los productos de una base cualquiera del álgebra. Así, la ley del álgebra está definida si se conocen los productos de los elementos de la base.

Como $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se tiene que $[e_i, e_j] \in \mathcal{L}$, han de existir n^3 constantes $C_{i,j}^k$, $1 \leq i, j \leq k \leq n$, llamadas *constantes de estructura del álgebra de Leibniz* $\mathcal{L}$ *asociadas a la base* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ considerada y definidas por

$$\alpha(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{n} C_{i,j}^k e_k$$

Dichas constantes han de verificar, por la identidad de Leibniz, que

$$\sum_{s=1}^{n} C_{i,l}^{s} C_{j,k}^{l} = \sum_{s=1}^{n} (C_{i,j}^{l} C_{l,k}^{s} - C_{i,k}^{l} C_{l,j}^{s}) \quad 1 \leq i,j,k \leq n \quad (1)$$

Esto es, a un álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$ y una base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, se asocian n^3 constantes con las restricciones (1), las constantes de estructura. Recíprocamente, un álgebra de Leibniz está perfectamente determinada por sus constantes de estructura (fijada la base).

Es decir, si se denota mediante $\mathcal{L}_e^n$ al conjunto de todas las álgebras de Leibniz complejas (respectivamente sobre $\mathbf{K}$) de dimensión n, se tiene que $\mathcal{L}_e^n$ posee estructura de variedad algebraica sumergida en $\mathbf{C}^{n^3}$ (respectivamente en $\mathbf{K}^{n^3}$).

Como las constantes de estructura dependen de la base elegida, parece natural fijar una base en la que la expresión de la ley sea "lo más cómoda posible" en el sentido de que se maximice el número de constantes nulas y, en caso de igualdad, se maximice el número de constantes que valen 1.

Esto tiene especial interés cuando se abordan problemas de clasificación de familias de álgebras de Leibniz.

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz. *Una subálgebra de Leibniz* de $\mathcal{L}$ es todo subespacio vectorial $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{L}$ que sea álgebra de Leibniz para la restricción a $\mathcal{L}'$ de la ley algebraica de $\mathcal{L}$.

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz y sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{J}$ subconjuntos de $\mathcal{L}$ no necesariamente subálgebras. Al menor espacio vectorial que incluya todos los elementos de la forma $[u, v]$, $u \in \mathcal{H}$, $v \in \mathcal{J}$, se le denomina *conmutador* de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{J}$ y se denota $[\mathcal{H}, \mathcal{J}]$.

Como la identidad de Leibniz es hereditaria, la definición de subálgebra es equivalente a decir que una subálgebra de Leibniz del álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$ es todo subespacio vectorial $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{L}$ que sea estable para la ley algebraica, esto es,

$\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$ subálgebra del álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$ si

a) $\mathcal{L}'$ es subespacio vectorial de $\mathcal{L}$

b) $[\mathcal{L}', \mathcal{L}'] \subset \mathcal{L}'$

Se llama *ideal (o ideal bilátero)* de un álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$ a cualquier subálgebra

$\mathcal{J}$ de $\mathcal{L}$ normal o distinguida, esto es, tal que

$$[x,y],[y,x]\in\mathcal{J}\quad\forall x\in\mathcal{J},\forall y\in\mathcal{L}$$

Si sólo se verifica que $[y,x]\in\mathcal{J}\quad\forall x\in\mathcal{J},\forall y\in\mathcal{L}$ se dice que $\mathcal{J}$ es un *ideal a la derecha* de $\mathcal{L}$.

Si sólo se verifica que $[x,y]\in\mathcal{J}\quad\forall x\in\mathcal{J},\forall y\in\mathcal{L}$ se dice que $\mathcal{J}$ es un *ideal a la izquierda* de $\mathcal{L}$.

Toda álgebra de Leibniz posee dos ideales triviales (denominados ideales impropios), $\{0\}$ y $\mathcal{L}$.

Si $\mathcal{L}$ es un álgebra de Leibniz se definen

- el subconjunto $\mathcal{I}$ como $\mathcal{I}=<[x,x]:x\in\mathcal{L}>$.
- *la subálgebra derivada* de $\mathcal{L}$ como $[\mathcal{L},\mathcal{L}]$.
- *el anulador* de $\mathcal{L}$ como $\mathcal{Z}(\mathcal{L})=\{z\in\mathcal{L}:[x,z]=[z,x]=0\quad\forall x\in\mathcal{L}\}$.
- *el anulador a derecha* del álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$, que se designa por $R(\mathcal{L})$ como
$$R(\mathcal{L})=\{z\in\mathcal{L}:[x,z]=0\quad\forall x\in\mathcal{L}\}$$
- *el anulador a izquierda* del álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$, que se designa por $L(\mathcal{L})$ como
$$L(\mathcal{L})=\{z\in\mathcal{L}:[z,x]=0\quad\forall x\in\mathcal{L}\}$$

Se verifica que $\mathcal{I}$ es un ideal abeliano de $\mathcal{L}$, la derivada, el anulador y el anulador a derecha son ideales de $\mathcal{L}$. El anulador a izquierda, $L(\mathcal{L})$, no es ideal de $\mathcal{L}$, aunque si es ideal a izquierda.

Sea A un subconjunto de un álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$. Se denomina *anulador a izquierda* de A en $\mathcal{L}$ y se denota $\mathcal{Z}^i_{\mathcal{L}}(A)$ a

$$\mathcal{Z}^i_{\mathcal{L}}(A)=\{z\in\mathcal{L}:[z,x]=0\quad\forall x\in A\}$$

Se denomina *anulador a derecha* de A en $\mathcal{L}$ y se denota $\mathcal{Z}^d_{\mathcal{L}}(A)$ a

$$\mathcal{Z}^d_{\mathcal{L}}(A)=\{z\in\mathcal{L}:[x,z]=0\quad\forall x\in A\}$$

Se denomina a *anulador* de A en $\mathcal{L}$ y se denota $\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}(A)$ a

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}(A) = \{z \in \mathcal{L} : [z,x] = 0 = [x,z] \quad \forall x \in A\}$$

Se tiene que $\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}(A) = \mathcal{Z}^i_{\mathcal{L}}(A) \cap \mathcal{Z}^d_{\mathcal{L}}(A)$.

Si $A = \mathcal{L}$ se tiene que $\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}(\mathcal{L}) = \mathcal{Z}(\mathcal{L})$, $\mathcal{Z}^i_{\mathcal{L}}(\mathcal{L}) = L(\mathcal{L})$, $\mathcal{Z}^d_{\mathcal{L}}(\mathcal{L}) = R(\mathcal{L})$

$\mathcal{Z}^i_{\mathcal{L}}(A)$, $\mathcal{Z}^d_{\mathcal{L}}(A)$ y $\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}(A)$ son subálgebras de Leibniz de $\mathcal{L}$.

Se llama *morfismo (u homomorfismo)* entre las álgebras de Leibniz $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ a cualquier aplicación que sea mórfica para las tres leyes que definen la estructura de álgebras de Leibniz.

Una derivación d de un álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$ es una aplicación lineal, $d : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, del espacio vectorial subyacente que verifica la regla de Leibniz para el producto

$$d([x,y]) = [d(x),y] + [x,d(y)] \quad \forall x,y \in \mathcal{L}$$

Se denotará $\mathcal{D}er(\mathcal{L})$ al conjunto de todas las derivaciones del álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$.

Definiendo $[d,d'] = d'd - dd'$ resulta que $(\mathcal{D}er(\mathcal{L}), +, \cdot\mathbf{K}, [,]))$ tiene estructura de álgebra de Lie $([d,d] = dd - dd = 0,\ \forall d \in \mathcal{D}er(\mathcal{L}))$.

Si $\mathcal{L}$ es un álgebra de Leibniz y si $x \in \mathcal{L}$, se llama *operador multiplicación a derecha (*respectivamente a izquierda*) de* x y se denota por R_x (respectivamente L_x) a la aplicación $R_x : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que

$$R_x(y) = [y,x]$$

$$L_x(y) = [x,y]$$

Se verifica que R_x es una derivación pero L_x no lo es en general. Además,

$$\begin{array}{rccl} R: & \mathcal{L} & \to & \mathcal{D}er\mathcal{L} \\ & x & \to & R(x) = R_x \end{array}$$

es un homomorfismo entre álgebras de Leibniz.

Estas derivaciones (R_x) son derivaciones interiores. Además, el conjunto de las derivaciones interiores a derecha del álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$ es un ideal bilátero del álgebra de Lie $\mathcal{D}er\mathcal{L}$.

0.2 Álgebras de Leibniz Resolubles

Dada un álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$, se define *la sucesión derivada* de $\mathcal{L}$, $\{\mathcal{L}^{[n]} : n \in \mathrm{N}\}$, mediante

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{[1]} &= \mathcal{L} \\ \mathcal{L}^{[i+1]} &= [\mathcal{L}^{[i]}, \mathcal{L}^{[i]}] \quad i \in \mathrm{N}\end{aligned}$$

Toda subálgebra de Leibniz que contenga a la derivada es ideal del álgebra.

Si $\mathcal{L}$ es un álgebra de Leibniz, cada elemento de la sucesión derivada de $\mathcal{L}$ es ideal del elemento anterior $(\mathcal{L}^{[i+1]} \lhd \mathcal{L}^{[i]})$.

Un álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$ con $dim(\mathcal{L}) < +\infty$ se llama *resoluble* si la sucesión de ideales $\{\mathcal{L}^{[n]} : n \in \mathrm{N}\}$ se estabiliza en cero. Al menor $k \in \mathrm{N}$ tal que $\mathcal{L}^{[k]} \neq 0 \ \wedge \ \mathcal{L}^{[k+1]} = 0$ se le llamará *índice de resolubilidad* de $\mathcal{L}$.

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz. Se tiene que

$\mathcal{L}$ es resoluble $\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}$ admite una sucesión decreciente de ideales

$$\mathcal{L}_{[1]} = \mathcal{J}_{[1]} \lhd \mathcal{J}_{[2]} \lhd \ldots \lhd \mathcal{J}_{[m]} = \{0\} \text{ tal que } [\mathcal{J}_{[k]}, \mathcal{J}_{[k]}] \subset \mathcal{J}_{[k+1]} \text{ para } 1 \leq k \leq m-1$$

Además se verifican las siguientes propiedades para álgebras de Leibniz resolubles:

1. Toda subálgebra (y, por tanto, todo ideal) de un álgebra de Leibniz resoluble es resoluble.
2. La imagen homomórfica de un álgebra de Leibniz resoluble es también un álgebra de Leibniz resoluble.
3. Si $\mathcal{L}$ es un álgebra de Leibniz resoluble y $\mathcal{J}$ un ideal de $\mathcal{L}$ $(\mathcal{J} \lhd \mathcal{L}) \Rightarrow$ el álgebra cociente $\mathcal{L}/\mathcal{J}$ es resoluble.
4. Si $\mathcal{L}$ es un álgebra de Leibniz tal que existe un ideal suyo $\mathcal{J} \lhd \mathcal{L}$ resoluble y tal que $\mathcal{L}/\mathcal{J}$ es resoluble $\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ es resoluble.

5. La intersección, suma y producto de ideales resolubles de un álgebra de Leibniz son también ideales resolubles del álgebra.

0.3 Álgebras de Leibniz Nilpotentes

Dada un álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$, se definen las siguientes sucesiones asociadas a $\mathcal{L}$

a) *sucesión central descendente a derecha* de $\mathcal{L}$, $\{\mathcal{L}^{<n>} : n \in \mathrm{N}\}$, mediante

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^{<1>} = \mathcal{L} \\ &\mathcal{L}^{<n+1>} = [\mathcal{L}^{<n>}, \mathcal{L}] \quad i \in \mathrm{N} \end{aligned}$$

b) *sucesión central descendente* de $\mathcal{L}$, $\{\mathcal{L}^{n} : n \in \mathrm{N}\}$, mediante

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}$$

$$\mathcal{L}^{n+1} = [\mathcal{L}, \mathcal{L}^n] + [\mathcal{L}^2, \mathcal{L}^{n-1}] + \ldots + [\mathcal{L}^{n-1}, \mathcal{L}^2] + [\mathcal{L}^n, \mathcal{L}] = \sum_{i=1}^{n} [\mathcal{L}^i, \mathcal{L}^{n+1-i}], \ i \in \mathrm{N}$$

Se verifica que, para toda álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$, es

$$[\mathcal{L}^{<i>}, \mathcal{L}^{<j>}] \subset \mathcal{L}^{<i+j>}$$

y como consecuencia se tiene que

$$\mathcal{L}^{<n>} = \mathcal{L}^n \quad \forall n \in \mathrm{N}$$

es decir, la sucesión central descendente a derecha y sucesión central descendente de cualquier álgebra de Leibniz coinciden. Además, cada elemento de la sucesión central descendente es ideal del anterior ($\mathcal{L}^{n+1} \lhd \mathcal{L}^n \quad \forall n \in \mathrm{N}$).

Un álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$ con $dim(\mathcal{L}) < +\infty$ se llama *nilpotente a derecha* si la sucesión de ideales $\{\mathcal{L}^{<n>} : n \in \mathrm{N}\}$ se estabiliza en cero.

Un álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$ con $dim(\mathcal{L}) < +\infty$ se llama *nilpotente* si la sucesión de ideales $\{\mathcal{L}^{n} : n \in \mathrm{N}\}$ se estabiliza en cero. Al menor entero m tal que

$$\mathcal{L}^m \neq 0 \quad \wedge \quad \mathcal{L}^{m+1} = 0$$

se dirá que es el *índice de nilpotencia o nilíndice* de $\mathcal{L}$, $nil(\mathcal{L})$.

Si $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz nilpotente. Son equivalentes

$$\mathcal{L} \text{ es nilpotente a derecha} \Leftrightarrow \mathcal{L} \text{ es nilpotente}$$

Toda álgebra de Lie nilpotente es un álgebra de Leibniz nilpotente. Si $\mathcal{L}$ es un álgebra de Lie nilpotente sus nilíndices como álgebra de Lie y como álgebra de Leibniz coinciden.

En las álgebras de Lie el nilíndice máximo es $n-1$ si $dim(\mathcal{L}) = n$. En el caso de las álgebras de Leibniz es posible obtener el nilíndice n.

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz. Las condiciones siguientes son equivalentes:

$$\mathcal{L} \text{ es nilpotente} \Leftrightarrow \mathcal{L} \text{ admite una sucesión decreciente de ideales}$$

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{J}_1 \lhd \mathcal{J}_2 \lhd \ldots \lhd \mathcal{J}_n = \{0\} \text{ tal que } [\mathcal{J}_k, \mathcal{L}] \subset \mathcal{J}_{[k+1]} \text{ para } 2 \leq k \leq n-1$$

Si $\mathcal{L}$ es nilpotente se verifican las siguientes propiedades:

1. Toda álgebra de Leibniz nilpotente es resoluble.
2. Toda subálgebra (y, por tanto, todo ideal) de un álgebra de Leibniz nilpotente es nilpotente.
3. La imagen homomórfica de un álgebra de Leibniz nilpotente es también un álgebra de Leibniz nilpotente.
4. Si $\mathcal{L}$ es un álgebra de Leibniz nilpotente y $\mathcal{J}$ un ideal de $\mathcal{L}$ $(\mathcal{J} \lhd \mathcal{L}) \Rightarrow$ el álgebra cociente $\mathcal{L}/\mathcal{J}$ es nilpotente.
5. Si $\mathcal{L}$ es un álgebra de Leibniz tal que existe un ideal suyo $\mathcal{J} \lhd \mathcal{L}$ resoluble y tal que $\mathcal{L}/\mathcal{J}$ es nilpotente $\Rightarrow \mathcal{L}$ es nilpotente.
6. La intersección, suma y producto de ideales nilpotentes de un álgebra de Leibniz son también ideales nilpotentes del álgebra.
7. Toda álgebra de Leibniz nilpotente no nula posee centro no nulo.

0.4 Bases adaptadas. Sucesión característica.

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz con $dim(\mathcal{L}) < +\infty$. Se verifica entonces, que

$$\mathcal{L} \text{ es nilpotente} \Leftrightarrow R_x \text{ es nilpotente } \forall x \in \mathcal{L}$$

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz nilpotente. De entre los generadores del (álgebra ($\equiv$ los elementos de $\mathcal{L} - \mathcal{L}^2$) se seleccionan aquellos cuyas matrices R_x del operador multiplicación a derecha tengan un bloque de Jordan lo mayor posible. De entre todos ellos, se eligen los que tengan también el segundo bloque de Jordan en tamaño lo mayor posible y así sucesivamente. Se asocia así a cada generador de $\mathcal{L}$ (a cada elemento $x \in \mathcal{L} - \mathcal{L}^2$) una sucesión finita decreciente.

$$c(x) = (n_1(x), n_2(x), \cdots, n_k(x)), \quad x \in \mathcal{L} - \mathcal{L}^2$$

que corresponde a las dimensiones de los bloques de Jordan del operador R_x con $x \in \mathcal{L} - \mathcal{L}^2$, ordenados decrecientemente. En el conjunto de estas sucesiones finitas es posible definir el orden léxico-gráfico como habitualmente, es decir

$$c(x) = (n_1, n_2, \cdots, n_k) \leq c(y) = (m_1, m_2, \cdots, m_k) \quad x, y \in \mathcal{L} - \mathcal{L}^2$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists i \in \mathbf{N} \text{ tal que } n_j = m_j \quad \forall j < i \ \wedge \ n_i < m_i$$

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz nilpotente. Para cada $x \in \mathcal{L} - \mathcal{L}^2$ se construye la sucesión finita

$$c_1(\mathcal{L}) = max\{n_1(x) : \forall x \in \mathcal{L} - \mathcal{L}^2\}$$
$$c_2(\mathcal{L}) = max\{n_2(x) : n_1(x) = c_1(\mathcal{L})\}$$
$$\vdots$$
$$c_i(\mathcal{L}) = max\{n_i(x) : n_j(x) = c_j(\mathcal{L}), 1 \leq j \leq i-1\}$$

Se llama *vector característico* de $\mathcal{L}$ a todo generador $x \in \mathcal{L} - \mathcal{L}^2$ tal que

$$c(x) = c(\mathcal{L}) = (c_1(\mathcal{L}), c_2(\mathcal{L}), \cdots)$$

y se llama *sucesión característica (o invariante de Goze)* de $\mathcal{L}$ a

$$c(\mathcal{L}) = (c_1(\mathcal{L}), c_2(\mathcal{L}), \cdots)$$

Se llama *base adaptada* de $\mathcal{L}$ a toda base $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ de $\mathcal{L}$ tal que e_1 sea vector característico y $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ una base de Jordan suya, es decir, tal que R_{e_1} venga expresado en la forma canónica de Jordan para esa base.

Se podría definir sucesión característica de $\mathcal{L}$ como la mayor de las sucesiones decrecientes de dimensiones de los bloques de Jordan de los operadores multiplicadores a derecha R_x, para cada generador de $\mathcal{L}, x$ con $x \in \mathcal{L} - \mathcal{L}^2$, ordenados en el orden léxico-gráfico. Es decir,

$$c(\mathcal{L}) = max\{c(x) : x \in \mathcal{L} - \mathcal{L}^2\}$$

Lógicamente, si $dim(\mathcal{L}) = n$ y el nilíndice de $\mathcal{L}$ es m, la dimensión del bloque mayor no puede superar al nilíndice, esto es,

$$c_1(x) \leq nil(\mathcal{L}) = m, \forall x \in \mathcal{L} - \mathcal{L}^2$$

$$c_1(\mathcal{L}) = nil(\mathcal{L}) = m$$

Cuando $\mathcal{L}$ es de Lie, la sucesión característica termina en 1, pues se tiene que en estas álgebras es $[x, x] = 0 \ \forall x \in \mathcal{L}$ lo que implica la existencia de, al menos, un bloque de Jordan de dimensión 1. Ahora, en las álgebras de Leibniz, no es obligatoria la existencia de bloques de Jordan de dimensión 1. Así son posibles sucesiones características como $(n-2, 2)$, ó $(7, 5, 5, 3, 3, 3)$.

La máxima sucesión característica posible en álgebras n-dimensionales es, precisamente, n. Es ésta la única posibilidad cuando el nilíndice es máximo, es decir, n. Recuérdese que para las álgebras de Lie el máximo nilíndice posible era $n-1$ y la máxima sucesión característica $(n-1, 1)$.

Para álgebras de nilíndice $n-1$ la única sucesión característica posible es $(n-1, 1)$, mientras que a medida que disminuye el nilíndice ($\equiv$ disminuye la dimensión del mayor bloque de Jordan de los operadores $R_x, x \in \mathcal{L} - \mathcal{L}^2$) aumentan las posibles sucesiones características. Así se tiene que

Nilíndice	Sucesión Característica
n	n
$n-1$	$(n-1,1)$
$n-2$	$(n-2,1,1),(n-2,2)$
$n-3$	$(n-3,1,1,1),(n-3,2,1),(n-3,3)$
$n-4$	$(n-4,1,1,1,1),(n-4,2,1,1),(n-4,3,1),(n-4,4)$
$\vdots$	$\vdots$
2	$(2,1,\cdots,1),(2,2,1,\cdots,1),(2,2,2,1,\cdots,1),\cdots$
1	$(1,1,1,\cdots,1)$

El caso $c(\mathcal{L}) = (1,1,\cdots,1)$ (es decir, la menor sucesión característica para las álgebras de Leibniz n-dimensionales) corresponde a álgebras abelianas, es decir, corresponden a álgebras de Lie.

Como en el caso de las álgebras de Lie, se denominarán p-filiformes a las álgebras de Leibniz de sucesión característica $(n-p,1,\cdots,1)$. Obviamente, las álgebras de Leibniz p-filiformes incluyen a las álgebras de Lie p-filiformes.

Sólo hay álgebras de Lie p-filiformes de dimensión n para $1 \le p \le n-1$. Sin embargo, existen álgebras de Leibniz p-filiformes de dimensión n para $0 \le p \le n-1$.

0.5 Álgebras de Leibniz p-filiformes

Como hemos dicho, un álgebra de Leibniz n-dimensional se llama p-filiforme si su sucesión característica es $(n-p,1,\cdots,1)$, $1 \le p \le n-1$, ahora se definirán igual, sólo que p varía en el rango $0 \le p \le n-1$. Esto significa que existe algún generador del álgebra tal que la forma de Jordan de la matriz asociada al operador multiplicación a derecha del generador tiene un bloque de orden $n-p$ y p bloques de orden 1 y, además, que no existe generador alguno cuya forma de Jordan admita un bloque de orden mayor que $n-p$ y que los que admitan un bloque de orden $n-p$ **NO** admitan ningún bloque de Jordan de orden mayor o igual a 2. Es decir, se trata de álgebras de Leibniz nilpotentes de dimensión n y nilíndice $n-p$.

En las álgebras de Lie la matriz correspondiente a la adjunta de cualquier vector posee, siempre, un bloque de orden 1. Si X_0 es vector característico $\Rightarrow X_0 \in \mathcal{L}-\mathcal{L}^2 \Rightarrow$ la primera fila de ad_{X_0} es nula (y la primera fila de la matriz adjunta de cualquier generador; como $[X_0,X_0]=0 \Rightarrow$ la primera columna es también nula). El resto de bloques siempre se podrían ordenar de mayor a menor orden, mediante sencillos cambios de base. No importa, por tanto, más que la dimensión de los bloques ya que la sucesión característica de un álgebra de Lie es siempre de la forma $(n_1, n_2, \cdots, c_{k-1})$. Ahora, hay que considerar al menos dos posibilidades según el primer bloque sea el de orden $n-p$ (ahora $[X, X] = 0$ en todos los casos) o no lo sea. En este último caso, cambios de base elementales permiten suponer que el bloque de orden $n-p$ es el segundo de la matriz de R_{e_1}.

En general, todo será ahora más difícil (o mucho más difícil) que en el caso de Lie, no sólo porque cualquier sucesión característica puede terminar en $r, 1 \leq r$ sino porque dada una misma sucesión característica pueden aparecer vectores característicos cuya matriz asociada posea bloques de Jordan de igual dimensión pero ocupando posiciones distintas. Como veremos tras, cambios de base adecuados, todo se reducirá a dos casos según posea el álgebra dada un vector característico nilpotente o no. Por todo lo anterior, parece razonable que más que intentar describir estas álgebras (es decir, clasificarlas), habrá que reducirse al "esqueleto" (es decir, a las álgebras que están graduadas naturalmente), o intentar trabajar con dimensiones pequeñas.

Un álgebra de Leibniz nilpotente n-dimensional $\mathcal{L}$ se denomina *p-filiforme* si su sucesión característica es $(n-p, 1, \cdots, 1)$.

Si $p = n-1$ queda $c(\mathcal{L}) = (1, \cdots, 1)$ que corresponderá a las álgebras abelianas y éstas son de Lie; por tanto, si se consideran sólo álgebras de Leibniz no de Lie se tiene que $0 \leq p \leq n-2$.

Si $p = 0$ queda $c(\mathcal{L}) = n$ que no se corresponde, estrictamente, con ningún caso de álgebras de Lie. A estas álgebras se las denomina *nulfiliformes ó 0-filiformes.*

Las 0-filiformes y las $(n-1)$-filiformes, corresponden a todas las álgebras de nilíndices n y 1, respectivamente. Para nilíndice $n-1$ también hay una única sucesión característica, $(n-1, 1)$, por lo que también las álgebras 1-filiformes corresponden a la totalidad de las de nilíndice $n-1$.

En general, todas las álgebras p-filiformes tienen nilíndice $n-p$ pero **NO** todas las álgebras de nilíndice $n-p$ son p-filiformes.

0.5.1 Álgebras de Leibniz nulfiliformes

Un álgebra de Leibniz nilpotente n-dimensional se llama *nulfiliforme ó 0-filiforme* si su sucesión característica es $c(\mathcal{L}) = n$.

Éstas son las de nilíndice máximo (para cada dimensión). No pueden ser álgebras de Lie pues para éstas la sucesión característica máxima es $(dim(\mathcal{L}) - 1, 1)$. Una caracterización de estas álgebras fue dada por Ayupov y Omirov en [2]

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz nilpotente n-dimensional. Las condiciones siguientes son equivalentes

1) $c(\mathcal{L}) = n$

2) $dim(\mathcal{L}^i) = n + 1 - i, \quad 1 \leq i \leq n + 1$

3) $\mathcal{L}$ tiene nilíndice n $\ (nil(\mathcal{L}) = n)$

Se ha probado [2] que para cada dimensión n existe, salvo isomorfismo, una única álgebra de Leibniz nulfiliforme, cuya ley se puede expresar en una cierta base adaptada, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ mediante

$$[e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n - 1$$

y el resto de productos nulos.

0.5.2 Álgebras de Leibniz filiformes

Se presentan aquí las álgebras de Leibniz n-dimensionales de nilíndice $n - 1$. El estudio inicial es análogo al realizado con las nulfiliformes pero, desafortunadamente, su clasificación es mucho más complicada y no se conoce, en general. Habrá que considerar algunas restricciones si queremos avanzar en su estudio o mejorar las técnicas matemáticas a utilizar (o ambas cosas).

Un álgebra de Leibniz nilpotente n-dimensional $\mathcal{L}$ se llama *filiforme ó 1-filiforme* si su sucesión característica es $c(\mathcal{L}) = (n - 1, 1)$.

Una caracterización de estas álgebras fue dada por Ayupov y Omirov en [2].

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz nilpotente n-dimensional. Las condiciones siguientes son equivalentes

1) $c(\mathcal{L}) = (n - 1, 1)$

2) $dim(\mathcal{L}^i) = n - i, \quad 2 \leq i \leq n$

3) $\mathcal{L}$ tiene nilíndice $n-1$ $(nil(\mathcal{L}) = n-1)$

La clasificación de estas álgebras para cada n resulta extraordinariamente compleja y hoy día (mayo de 2004) se está lejos de disponer de herramientas que permitan el tratamiento, salvo para muy pequeñas dimensiones.

Un problema que resulta abordable es el estudio de las álgebras de Leibniz graduadas naturalmente.

0.6 Álgebras de Leibniz filiformes graduadas naturalmente

Consideramos aquí un tipo especial de álgebras de Leibniz filiformes, aquellas que son isomorfas al álgebra de Leibniz graduada que resulta de la graduación natural, esto es, de la asociada a la filtración del álgebra que proporciona la sucesión central descendente.

Ayupov y Omirov probaron en [2] que para cada dimensión existen dos únicas álgebras de Leibniz filiformes graduadas naturalmente y no isomorfas entre sí. Son aquellas cuyas leyes se expresan, en una cierta base adaptada $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, por $\mu_1{}^n$ ó $\mu_2{}^n$ donde $\mu_i{}^n, i = 1, 2$, vienen dadas por

$$\mu_1^n : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2 \\ [e_i, e_n] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2 \end{cases}$$

$$\mu_2{}^n : [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-1$$

A partir de $p = 2$, la sucesión característica es un invariante más fino que el nilíndice pues ahora el nilíndice es $n-2$, pero a este nilíndice le corresponden álgebras con sucesión característica $(n-2, 1, 1)$ (2-filiformes) y $(n-2, 2)$.

A lo largo de la memoria se denotará por $\mathcal{L}(X, Y, Z)$ a la identidad de Leibniz

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] - [[X, Z], Y]$$

Se acaba de ver que la clasificación de las álgebras de Leibniz nulfiliformes es sencilla y la de las 1-filiformes graduadas naturalmente semejante al caso de las álgebras de Lie. Sin embargo, al aumentar p las dificultades crecerán exponencialmente en el estudio de las álgebras de Leibniz respecto a las de Lie.

0.7 Álgebras de Lie graduadas naturalmente

En el caso de álgebras de Lie graduadas naturalmente se conocen todas las álgebras p-filiformes graduadas naturalmente.

0.7.1 Álgebras de Lie filiformes graduadas naturalmente

Las álgebras de Lie filiformes se caracterizan por tener el índice de nilpotencia máximo en cada dimensión ($n-1$ si la dimensión es n).

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie filiforme graduada naturalmente de dimensión n, se cumple que

$$\begin{cases} dim(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})) & = & n-2 \\ dim(\mathcal{C}^i(\mathfrak{g})) & = & n-i-1 \quad 2 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

y que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-1}$ donde

$$dim\ \mathfrak{g}_1 = 2; \quad dim\ \mathfrak{g}_i = 1,\ 2 \leq i \leq n-1$$

Siendo $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}\}$ una base adaptada de $\mathfrak{g}$, se obtiene que

$$\mathfrak{g}_1 = < X_0, X_1 >; \quad \mathfrak{g}_i = < X_i >,\ 2 \leq i \leq n-1$$

Las álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ filiformes graduadas naturalmente de dimensión n han sido determinadas por Vergne [?], resultando que $\mathfrak{g} = \mathcal{L}_n$ si n es impar y $\mathfrak{g} = \mathcal{L}_n$ ó $\mathcal{Q}_n$ cuando n es par, siendo

$$\mathcal{L}_n : \{\ [X_0, X_i] = X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n-2.$$
$$n \geq 3$$

$$\mathcal{Q}_n : \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2, \\ [X_i, X_{n-1-i}] = (-1)^{i-1} X_{n-1} & 1 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1. \end{cases}$$
$$n \geq 6,\ n \text{ par}$$

0.7.2 Álgebras de Lie 2-filiformes graduadas naturalmente

Las álgebras de Lie 2-filiformes se caracterizan por tener el índice de nilpotencia $n-2$ si la dimensión es n.

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie 2-filiforme graduada naturalmente de dimensión n, admite una descomposición de la forma $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-2}$, cumpliéndose alguna de las siguientes condiciones:

1. $dim\ \mathfrak{g}_1 = 3,\ dim\ \mathfrak{g}_i = 1,\ 2 \leq i \leq n-2$

2. $dim\ \mathfrak{g}_1 = 2,\ \exists r\ dim\ \mathfrak{g}_r = 2,\ dim\ \mathfrak{g}_i = 1,\ 2 \leq i \leq n-2,\ i \neq r$

Las álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ 2-filiformes graduadas naturalmente de dimensión n han sido determinadas por Gómez y Jiménez Merchán [19]. Dichos autores demuestran que no todas las situaciones anteriores son admisibles, que otras dan lugar a un álgebra escindida ($\mathcal{L}_{n-1} \oplus \mathbf{C}$ o $\mathcal{Q}_{n-1} \oplus \mathbf{C}$) y que las dimensiones pequeñas ($n \leq 9$) requieren un estudio particular por su excepcionalidad. Obtienen que, siendo $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y\}$ una base adaptada, el álgebra $\mathfrak{g}$ es isomorfa a una de las siguientes

$\mathcal{L}(n,r) \quad \left(n \geq 5,\ 3 \leq r \leq 2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 1,\ r \text{ impar}\right)$:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{r-i}] = (-1)^{i-1} Y & 1 \leq i \leq \frac{r-1}{2}. \end{cases}$$

$\mathcal{Q}(n,r) \quad (n \geq 7,\ n \text{ impar};\ 3 \leq r \leq n-4,\ r \text{ impar})$:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{r-i}] = (-1)^{i-1} Y & 1 \leq i \leq \frac{r-1}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1} X_{n-2} & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}. \end{cases}$$

$\tau(n, n-4) \quad (n \text{ impar},\ n \geq 7)$:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{n-4-i}] = (-1)^{i-1} (X_{n-4} + Y) & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2}, \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i-1} \frac{(n-3-2i)}{2} X_{n-3} & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i} (i-1) \frac{(n-3-i)}{2} X_{n-2} & 2 \leq i \leq \frac{n-3}{2}, \\ [X_i, Y] = \frac{(5-n)}{2} X_{n-4+i} & 1 \leq i \leq 2. \end{cases}$$

$\tau(n, n-3)$ (n par, $n \geq 6$):

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i-1}(X_{n-3}+Y) & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}\frac{(n-2-2i)}{2}X_{n-2} & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}, \\ [X_1, Y] = \frac{(4-n)}{2}X_{n-2}. & \end{cases}$$

0.7.3 Álgebras de Lie 3-filiformes graduadas naturalmente

Las álgebras de Lie 3-filiformes se caracterizan por tener el índice de nilpotencia $n-3$ si la dimensión es n.

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie 3-filiforme graduada naturalmente con $dim(\mathfrak{g}) = n$, admite una descomposición de la forma $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-3}$, cumpliéndose las siguientes condiciones:

$dim\ \mathfrak{g}_1 = 2,\ dim\ \mathfrak{g}_i = 1,\ 2 \leq i \leq n-3,\ \ i \neq r_1, r_2,\ dim\ \mathfrak{g}_{r_1} = dim\ \mathfrak{g}_{r_2} = 2,\ 3 \leq r_1 < r_2 \leq n-3,\ r_1$ y r_2 *impares*

Las álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ 3-filiformes graduadas naturalmente de dimensión n han sido determinadas por Cabezas, Gómez y Pastor [10]. Dichos autores demuestran que las situaciones anteriores son las únicas admisibles, que en otras dan lugar a álgebras escindidas y que las dimensiones pequeñas ($n \leq 12$) requieren un estudio particular por su excepcionalidad. Obtienen que, siendo $\{X_0, X_1, \ldots X_{n-3}, Y_1, Y_2\}$ una base adaptada, el álgebra $\mathfrak{g}$ es isomorfa a una de las siguientes

$\mathcal{L}(n, r_1, r_2)$ $(n \geq 8,\ r_1, r_2$ impar, $3 \leq r_1 < r_2 \leq n-3)$:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_{r_j-i}] & = & (-1)^{i-1}Y_j & 1 \leq i \leq \frac{r_j-1}{2}, \quad 1 \leq j \leq 2 \end{cases}$$

$\mathcal{Q}(n, r_1, r_2)$ (n par, $n \geq 10$, r_1, r_2 impar, $3 \leq r_1 < r_2 \leq n-5)$:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] & = & X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_{r_j-i}] & = & (-1)^{i-1}Y_j & 1 \leq i \leq \frac{r_j-1}{2}, \quad 1 \leq j \leq 2 \\ [X_i, X_{n-3-i}] & = & (-1)^{i-1}X_{n-3} & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \end{cases}$$

$\tau(n,r,n-5)$ (n par, $n \geq 12$, r impar, $3 \leq r \leq n-7$) :

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_{r-i}] &= (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r-1}{2} \\ [X_i, X_{n-5-i}] &= (-1)^{i-1}(X_{n-5} + Y_2) & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] &= (-1)^{i-1}\frac{(n-4-2i)}{2} X_{n-4} & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] &= (-1)^{i}(i-1)\frac{(n-4-i)}{2} X_{n-3} & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2} \\ [X_i, Y_2] &= \frac{(6-n)}{2} X_{n-5+i} & 1 \leq i \leq 2 \end{cases}$$

$\tau(n,r,n-4)$ (n impar, $n \geq 9$, r impar, $3 \leq r \leq n-6$) :

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-4 \\ [X_i, X_{r-i}] &= (-1)^{i-1} Y_1 & 1 \leq i \leq \frac{r-1}{2} \\ [X_i, X_{n-4-i}] &= (-1)^{i-1}(X_{n-4} + Y_2) & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] &= (-1)^{i-1}\frac{(n-3-2i)}{2} X_{n-3} & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2} \\ [X_1, Y_2] &= \frac{(5-n)}{2} X_{n-3} \end{cases}$$

0.7.4 Álgebras de Lie p-filiformes graduadas naturalmente

Las álgebras de Lie p-filiformes se caracterizan por tener el índice de nilpotencia $n-p$ si la dimensión es n.

La clasificación de esta familia de álgebras de Lie graduadas naturalmente ha sido dada por Cabezas y Pastor en [?]. Ellos demuestran lo siguiente:

Se considera $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-p}, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{p-1}\}$ una base adaptada de $\mathfrak{g}$ donde X_0 es vector característico. Sea $p > 1$ y sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie n-dimensional graduada naturalmente y no escindida con $n \geq Max\{3p-1, p+8\}$. Sea $\mu(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-1})$ la ley de $\mathfrak{g}$ verificando $3 \leq r_1 < r_2 < \ldots < r_{p-1} \leq n-p$, y r_j, $1 \leq j \leq p-1$, todos impares. Entonces,

a) Si $r_{p-1} = n-p$,

$$\mathfrak{g} \simeq \mathcal{L}(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-2}, n-p)$$

b) Si $r_{p-1} = n-p-1$, $\mathfrak{g}$ es isomorfa a una de las siguientes leyes

$$\mathfrak{g} \simeq \mathcal{L}(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-2}, n-p-1)$$

$$\mathfrak{g} \simeq \tau(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-2}, n-p-1)$$

c) Si $r_{p-1} = n-p-2$, $\mathfrak{g}$ es isomorfa a una de las siguientes leyes

$$\mathfrak{g} \simeq \mathcal{L}(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-2}, n-p-2)$$
$$\mathfrak{g} \simeq \mathcal{Q}(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-2}, n-p-2)$$
$$\mathfrak{g} \simeq \tau(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-2}, n-p-2)$$

d) Si $2p-1 \leq r_{p-1} \leq n-p-3$,

d1) Si $n-p$ es impar, entonces $\mathfrak{g}$ es isomorfa a una de las siguientes leyes

$$\mathfrak{g} \simeq \mathcal{L}(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-1})$$
$$\mathfrak{g} \simeq \mathcal{Q}(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-1})$$

d2) Si $n-p$ es par, entonces

$$\mathfrak{g} \simeq \mathcal{L}(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-1})$$

cuyas leyes vienen dadas por

$\mathcal{L}(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-1})$

$(r_j \text{ impar}, 1 \leq j \leq p-1,\ 3 \leq r_1 < r_2 < \ldots < r_{p-1} \leq n-p)$

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-p-1 & \\ [X_i, X_{r_j-i}] &= (-1)^{i-1} Y_j & 1 \leq i \leq \frac{r_j-1}{2}, & 1 \leq j \leq p-1 \end{cases}$$

$\mathcal{Q}(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-1})$

$(r_j \text{ impar}, 1 \leq j \leq p-1,\ 3 \leq r_1 < r_2 < \ldots < r_{p-1} \leq n-p-2,\ n-p \text{ impar})$

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-p-1 & \\ [X_i, X_{r_j-i}] &= (-1)^{i-1} Y_j & 1 \leq i \leq \frac{r_j-1}{2}, & 1 \leq j \leq p-1 \\ [X_i, X_{n-p-i}] &= (-1)^{i-1} X_{n-p} & 1 \leq i \leq \frac{n-p-1}{2} & \end{cases}$$

$\tau(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-2}, n-p-1)$

$(r_j \text{ impar}, 1 \leq j \leq p-2,\ 3 \leq r_1 < r_2 < \ldots < r_{p-2} \leq n-p-3,\ n-p \text{ par})$

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-p-1 \\ [X_i, X_{r_j-i}] &= (-1)^{i-1} Y_j & 1 \leq i \leq \frac{r_j-1}{2},\ 1 \leq j \leq p-2 \\ [X_i, X_{n-p-1-i}] &= (-1)^{i-1}(X_{n-p-1} + Y_{p-1}) & 1 \leq i \leq \frac{n-p-2}{2} \\ [X_i, X_{n-p-i}] &= (-1)^{i-1} \frac{(n-p-2i)}{2} X_{n-p} & 1 \leq i \leq \frac{n-p-2}{2} \\ [X_1, Y_{p-1}] &= \frac{(p+2-n)}{2} X_{n-p} & \end{cases}$$

$\tau(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-2}, n-p-2)$

$(r_j \text{ impar}, 1 \leq j \leq p-2,\ 3 \leq r_1 < r_2 < \ldots < r_{p-2} \leq n-p-4,\ n-p \text{ impar})$

$$\begin{cases} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-p-1 \\ [X_i, X_{r_j-i}] &= (-1)^{i-1} Y_j & 1 \leq i \leq \frac{r_j-1}{2},\ 1 \leq j \leq p-2 \\ [X_i, X_{n-p-2-i}] &= (-1)^{i-1}(X_{n-p-2} + Y_{p-1}) & 1 \leq i \leq \frac{n-p-3}{2} \\ [X_i, X_{n-p-1-i}] &= (-1)^{i-1} \frac{(n-p-1-2i)}{2} X_{n-p-1} & 1 \leq i \leq \frac{n-p-3}{2} \\ [X_i, X_{n-p-i}] &= (-1)^i (i-1) \frac{(n-p-1-i)}{2} X_{n-p} & 2 \leq i \leq \frac{n-p-1}{2} \\ [X_i, Y_{p-1}] &= \frac{(p+3-n)}{2} X_{n-p-2+i} & 1 \leq i \leq 2 \end{cases}$$

Capítulo 1

Álgebras de Leibniz 2-filiformes graduadas naturalmente

Se aborda en este capítulo la clasificación, en dimensión cualquiera, de las álgebras de Leibniz 2-filiformes graduadas naturalmente de dimensión n y sucesión característica $(n-2,1,1)$; es decir, aquellas álgebras que, siendo graduadas, con la graduación inducida por la sucesión central descendente, son isomorfas al álgebra de partida.

Es el primer caso en que la sucesión característica es un invariante más fino que el nilíndice pues ahora el nilíndice es $n-2$, pero a este nilíndice le corresponden álgebras con sucesión característica $(n-2,1,1)$ (2-filiformes) y $(n-2,2)$.

Como ya se indicó en el capítulo 0, los casos 0-filiforme y 1-filiforme, fueron estudiados por Ayupov y Omirov en [2].

La determinación de las álgebras graduadas naturalmente de una familia de álgebras de Leibniz nilpotentes aporta información relevante al estudio de la misma.

En todo el capítulo $\mathcal{L}$ denotará un álgebra de Leibniz 2-filiforme graduada naturalmente de dimensión n y $c(\mathcal{L})=(n-2,1,1)$ y $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ una base adaptada de $\mathcal{L}$ con e_1 vector característico.

Un primer resultado para estas álgebras permite dividir la familia en dos subfamilias no isomorfas entre sí.

Teorema 1.0.1 *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz 2-filiforme n-dimensional. Se verifica entonces que*

a) *$\mathcal{L}$ tiene nilíndice $n-2$ $(nil(\mathcal{L}) = n-2)$*

b) *o bien*

$$dim(\mathcal{L}^i) = n-1-i, \quad 2 \leq i \leq n-2$$

o bien

$$dim(\mathcal{L}^i) = \begin{cases} n-i, & 1 \leq i \leq r \\ n-1-i, & r+1 \leq i \leq n-2 \end{cases}$$

Demostración.

a) Es inmediato, pues todo generador $x \in \mathcal{L} - \mathcal{L}^2$ verifica que $x^{n-2} = 0$, luego $z^{n-2} = 0 \; \forall z \in \mathcal{L}$, pero $\mathcal{L}^2 \neq \{0\}$.

b) Sea $e_1 \in \mathcal{L}/\mathcal{L}^2$ un vector característico, es decir, $c(e_1) = (n-2, 1, 1)$. Luego ha de existir una base (de Jordan de e_1) tal que R_{e_1} se presenta en la forma de Jordan, que en este caso tendrá un bloque J_{n-2} de orden $n-2$ y dos bloques J_1 de orden 1.

Se tienen tres casos, según sea la posición de J_{n-2}:

$$a) \quad R_{e_1} = \left(\begin{array}{c|c|c} J_{n-2} & & \\ \hline & J_1 & \\ \hline & & J_1 \end{array}\right)$$

$$b) \quad R_{e_1} = \left(\begin{array}{c|c|c} J_1 & & \\ \hline & J_{n-2} & \\ \hline & & J_1 \end{array}\right)$$

$$c) \quad R_{e_1} = \left(\begin{array}{c|c|c} J_1 & & \\ \hline & J_1 & \\ \hline & & J_{n-2} \end{array}\right)$$

pero el caso *c)* se reduce al caso *b)* sin más que hacer el cambio de base dado por

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 \\ e'_i = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-1 \\ e'_n = e_2 \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{Caso I.-}}$ Como $\mathcal{L}^{n-1} = 0 \wedge \mathcal{L}^{n-2} \neq 0 \Rightarrow$ será posible hallar una base $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ de $\mathcal{L}$ tal que

$$x_i \in \mathcal{L}^i/\mathcal{L}^{i+1}, \ 1 \leq i \leq n-3 \ \wedge \ x_{n-2} \in \mathcal{L}^{n-2}$$

Resta probar para qué valores $r_1, r_2 \in \{1, 2, \cdots, n-2\}$ se cumple que

$$x_{n-1} \in \mathcal{L}^{r_1}/\mathcal{L}^{r_1+1} \quad \wedge \quad x_n \in \mathcal{L}^{r_2}/\mathcal{L}^{r_2+1}$$

Desde luego, se puede suponer que $r_1 \leq r_2$ pues, en otro caso, basta cambiar los papeles de x_{n-1} y x_n.

Se va a probar que, en estas condiciones, se tiene que $r_1 = r_2 = 1$. En efecto, sean $1 < r_1 \leq r_2$, como $x_2 \in \mathcal{L}^2 \Rightarrow \exists y_2, z_2 \in \mathcal{L}$ tales que

$$x_2 = [y_2, z_2] = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{2i} b_{2j} [x_i, x_j] = \alpha_{11}^{(2)} [x_1, x_1] + u_3$$

con $u_3 \in \mathcal{L}^3$, $\alpha_{11}^{(2)} [x_1, x_1] \neq 0$.

Análogamente, de $x_3 \in \mathcal{L}^3 \Rightarrow \exists y_3, z_3, w_3 \in \mathcal{L}$ tales que

$$x_3 = [[y_3, z_3], w_3] = \sum_{1 \leq i,j,k \leq n} a_{3i} b_{3j} c_{3k} [[x_i, x_j], x_k] = \alpha_{111}^{(3)} [[x_1, x_1], x_1] + u_4$$

con $u_4 \in \mathcal{L}^4$ y $\alpha_{111}^{(3)} [[x_1, x_1], x_1] \neq 0$ (supuesto $3 < r_1 \leq r_2$).

Se continúa el proceso hasta llegar a $\mathcal{L}^{r_1}$ obteniéndose que, si $r_1 \neq r_2$,

$$x_{r_1} = \alpha_{11\cdots1}^{(r_1)} [\cdots, [[x_1, x_1], x_1], \cdots, x_1] + u_{r_1+1}$$

$$x_{n-1} = \alpha'^{(r_1)}_{11\cdots1} [\cdots, [[x_1, x_1], x_1], \cdots, x_1] + u'_{r_1+1}$$

con $u_{r_1+1}, u'_{r_1+1} \in \mathcal{L}^{r_1+1}$ y

$$\alpha_{11\cdots1}^{(r_1)} [\cdots, [x_1, x_1], x_1], \cdots, x_1] \neq 0, \quad \alpha'^{(r_1)}_{11\cdots1} [\cdots, [x_1, x_1], x_1], \cdots, x_1] \neq 0$$

mientras que si $r_1 = r_2$ aparece, además,

$$x_n = \alpha''^{(r_1)}_{11\cdots1} [\cdots, [x_1, x_1], x_1], \cdots, x_1] + u''_{r_1+1}$$

con $u''_{r_1+1}, \in \mathcal{L}^{r_1+1}$ y $\alpha''^{(r_1)}_{11\cdots1} [\cdots, [x_1, x_1], x_1], \cdots, x_1] \neq 0$.

En ambos casos se tiene que $x_{r_1}, \cdots, x_{n-1} \in \mathcal{L}^{r_1+1}$ $\rightarrow\leftarrow$

Luego **no** puede ser $r_1 > 1 \Rightarrow r_1 = 1$.

Como $r_1 = 1 \Rightarrow dim(\mathcal{L}/\mathcal{L}^2) \geq 2$ ($\equiv dim(\mathcal{L}/\mathcal{L}^2) \in \{2,3\}$), si $dim(\mathcal{L}/\mathcal{L}^2) = 2 \Rightarrow$ $\exists r_2 : 2 \leq r_2 \leq n-2$ tal que

$$dim(\mathcal{L}^i/\mathcal{L}^{i+1}) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad 2 \leq i \leq n-2 \wedge i \neq r_2 \\ 2, & \text{si} \quad i = r_2 \end{cases}$$

Con lo que se tiene que

$$dim(\mathcal{L}^i) = \begin{cases} n-i, & \text{si} \quad 2 \leq i \leq r_2 \\ n-1-i, & \text{si} \quad r_2+1 \leq i \leq n-2 \end{cases}$$

$dim(\mathcal{L}/\mathcal{L}^3) = 3 \Rightarrow dim(\mathcal{L}^i/\mathcal{L}^{i+1}) = 1,\ 2 \leq i \leq n-2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow dim(\mathcal{L}^i) = n-1-i,\ 2 \leq i \leq n-2$$

$\boxed{\textbf{Caso II.-}}$ En este, caso si e_1 es vector característico de $\mathcal{L}$ y $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ base de Jordan de $e_1 \Rightarrow e_1, e_2 \in \mathcal{L}/\mathcal{L}^2$ (e_1 por ser generador y e_2 porque si $e_2 \in \mathcal{L}^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow c(\mathcal{L}) > (n-2,1,1)) \Rightarrow dim(\mathcal{L}/\mathcal{L}^2) \in \{2,3\}$ y todo es como en el caso 1. □

Se denotará álgebra de **Tipo I** a cada álgebra de a) y de **Tipo II** a cada álgebra de b). Es evidente que son álgebras no son isomorfas entre sí pues para el **Tipo I** se tiene que el álgebra admite un vector característico e_1 tal que $[e_1, e_1] \neq 0$ mientras que para el **Tipo II** sólo existen vectores característicos e_1 tal que $[e_1, e_1] \neq 0$.

Nota 1.0.2 A partir de ahora se usará la notación e_1 para vector característico y $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ para base adaptada con e_1 vector característico.

1.1 Álgebras de Leibniz 2-filiformes graduadas naturalmente de Tipo I

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz 2-filiforme graduada naturalmente. Sea e_1 vector característico y $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ base adaptada. Si $\mathcal{L}$ es de Tipo I entonces,

$$R_{e_1} = \left(\begin{array}{c|c|c} J_{n-2} & & \\ \hline & J_1 & \\ \hline & & J_1 \end{array}\right)$$

es decir,

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3 \\ [e_j, e_1] = 0, & n-2 \leq j \leq n \end{cases}$$

Se considera la graduación natural $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_3 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_k$ donde $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}^i/\mathcal{L}^{i+1}$. Dicha graduación debe verificar que $\mathcal{L}^{n-2} \neq \{0\}$ y $\mathcal{L}^{n-1} = \{0\}$. Por tanto, se sigue que $k = n-2$. Es decir, se tiene que

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^2 \supset < e_2, e_3, e_4, \cdots, e_{n-2} > \\ &\mathcal{L}^3 \supset < e_3, e_4, \cdots, e_{n-2} > \\ &\qquad \vdots \\ &\mathcal{L}^i \supset < e_i, e_{i+1}, \cdots, e_{n-2} > \\ &\qquad \vdots \\ &\mathcal{L}^{n-2} \supset < e_{n-2} > \\ &\mathcal{L}^{n-1} = \{0\} \end{aligned}$$

y puesto que $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}^i/\mathcal{L}^{i+1}$, se tiene que $\mathcal{L}_i \supset < e_i >$, $1 \leq i \leq n-2$. Entonces, faltaría por conocer las posiciones en los subespacios de la graduación de los vectores e_{n-1} y e_n.

Se denotará por r_1 y r_2 las posiciones de los subespacios de la graduación natural donde aparecen los vectores e_{n-1} y e_n, respectivamente. Esto es, $e_{n-1} \in \mathcal{L}_{r_1}$ y $e_n \in \mathcal{L}_{r_2}$. Obviamente, se puede considerar que $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq n$ (en otro caso se intercambiarían los papeles de e_{n-1} y e_n). Además, si $r_2 \in \{n-1, n\}$ se tiene que $c(\mathcal{L}) \neq (n-2, 1, 1)$ lo que no es admisible. Por todo esto, se tiene que los valores admisibles para r_1 y r_2 son los comprendidos entre 1 y $n-2$, $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq n-2$. Se denotará también $\mu_{(I, r_1, r_2)}$ para indicar que es un álgebra de Leibniz de Tipo I y r_1 y r_2 las posiciones de los vectores e_{n-1} y e_n, respectivamente, en la graduación natural.

1.1.1 Valores admisibles de r_1 y r_2

Se va a probar en esta sección los valores admisibles para (r_1, r_2) son $\{(1,1), (1,2)\}$ siendo escindidas las álgebras correspondientes a $r_1 = r_2 = 1$.

Lema 1.1.1 *Los valores admisibles de r_1 y r_2 son $r_1 = 1$ y $r_2 \in \{1, 2\}$.*

Demostración. Supongamos $r_1 > 1$. Se sigue que $e_{n-1} \in \mathcal{L}^2$ y $r_1 \leq r_2 \Rightarrow e_n \in \mathcal{L}^2$ pues $\mathcal{L} \supset \mathcal{L}^2 \supset \mathcal{L}^3 \supset \cdots \supset \mathcal{L}^{n-2}$.

Como $[e_1, e_1] = e_2 \Rightarrow e_2 \in \mathcal{R}(\mathcal{L})$ y puesto que $\mathcal{R}(\mathcal{L})$ es un ideal de $\mathcal{L}$, se tiene que $e_2, e_3, \cdots, e_{n-2} \in \mathcal{R}(\mathcal{L})$. Esto prueba que

$$\boxed{[e_i, e_j] = 0, \quad 2 \leq j \leq n-2,\ 1 \leq i \leq n}$$

Por otro lado se sabe que como $r_1 > 1 \Rightarrow e_{n-1}$ y e_n deben estar generados por elementos de la base distintos de e_{n-1}, e_n.

Consecuentemente, debe estar, al menos, $e_{n-1} \in \mathcal{L}_1 = \mathcal{L} - \mathcal{L}^2$ o $e_n \in \mathcal{L}_1$ pero esto significa que $r_1 = 1$.

Por tanto sólo hay un posibilidad para r_1, $r_1 = 1$ y entonces, si se hace $r_1 = r$

$$\begin{array}{ll} \mathcal{L}_1 \supset < e_1, e_{n-1} > & \\ \mathcal{L}_i \supset < e_i >, & 2 \leq i \leq n-2 \\ \mathcal{L}_{r_2} = \mathcal{L}_r \supset < e_r, e_n > & \end{array}$$

Se tiene la siguiente familia de leyes

$$\left\{ \begin{array}{ll} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3 \\ [e_i, e_{n-1}] = \alpha_i e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \quad i \neq r-1 \\ [e_{r-1}, e_{n-1}] = \alpha_{r-1} e_r + \bar{\alpha} e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \alpha_{n-1} e_2 & \\ [e_n, e_{n-1}] = \alpha_n e_{r+1}, & r \neq n-2 \\ [e_i, e_n] = \beta_i e_{i+r}, & 1 \leq i \leq n-2-r \\ [e_{n-1}, e_n] = \beta_{n-1} e_{r+1}, & r \neq n-2 \\ [e_n, e_n] = \beta_n e_{2r}, & r \leq \frac{n-2}{2} \end{array} \right.$$

Al aplicar la identidad de Leibniz se obtienen las siguientes restricciones

(1) $\mathcal{L}(e_i, e_{n-1}, e_1), \quad 1 \leq i \leq r-3 \Rightarrow \alpha_{i+1} = \alpha_i$

$\Rightarrow \quad \alpha_i = \alpha_1, \quad 1 \leq i \leq r-2$

(2) $\mathcal{L}(e_{r-2}, e_{n-1}, e_1) \Rightarrow \alpha_{r-1} = \alpha_{r-2} \ \wedge \ \bar{\alpha} = 0$

(3) $\mathcal{L}(e_i, e_{n-1}, e_1), \quad r-1 \leq i \leq n-4 \Rightarrow \alpha_{i+1} = \alpha_i$

$\Rightarrow \quad \alpha_i = \alpha_{r-1}, \quad r-1 \leq i \leq n-3$

y por tanto $\alpha_i = \alpha$, $1 \leq i \leq n-3$ y $\overline{\alpha} = 0$. Luego, $e_n \notin \mathcal{L}^2$ y se llega a contradicción. Esto prueba que $r \in \{1, 2\}$. □

1.1.2 Álgebras de Leibniz $\mu_{(I,1,1)}$

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz 2-filiforme graduada naturalmente de dimensión $n \geq 5$ de Tipo I y tal que los vectores e_{n-1} y e_n están en el primer subespacio de la graduación natural, esto es,

$$\begin{array}{ll} \mathcal{L}_1 =< e_1, e_{n-1}, e_n > & \\ \mathcal{L}_i =< e_i >, & 2 \leq i \leq n-2 \end{array}$$

1.– *Álgebras de Leibniz escindidas.*

Proposición 1.1.2 *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz nulfiliforme graduada naturalmente $(n-2)$-dimensional de Tipo I. Entonces $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \oplus \mathbf{C}^2$ es un álgebra de Leibniz 2-filiforme graduada naturalmente de n-dimensional Tipo I.*

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz 1-filiforme graduada naturalmente $(n-1)$-dimensional de Tipo I. Entonces $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \oplus \mathbf{C}$ es un álgebra de Leibniz 2-filiforme graduada naturalmente de n-dimensional Tipo I.

Puesto que son conocidas las nulfiliformes graduadas naturalmente y las 1-filiformes se puede deducir la clasificación completa de las 2-filiformes graduadas naturalmente escindidas de Tipo I.

A continuación se van a estudiar las álgebras de Tipo I con $(r_1, r_2) = (1, 1)$, obteniendo que son todas escindidas.

Proposición 1.1.3 *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz de tipo $\mu_{(I,1,1)}$. Entonces $\mathcal{L}$ es un álgebra escindida de alguno de los tipos anteriores.*

Demostración. En las condiciones del enunciado, la ley de la familia puede ser expresada en una base adaptada $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ por

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-3 \\ [e_i, e_{n-1}] = \alpha_i e_{i+1}, & 1 \le i \le n-3 \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \alpha_{n-1} e_2 & \\ [e_n, e_{n-1}] = \alpha_n e_2 & \\ [e_i, e_n] = \beta_i e_{i+1}, & 1 \le i \le n-3 \\ [e_{n-1}, e_n] = \beta_{n-1} e_2 & \\ [e_n, e_n] = \beta_n e_2 & \end{cases}$$

De la identidad de Leibniz se obtienen las siguientes restricciones:

- $\mathcal{L}(e_i, e_{n-1}, e_1), \quad 1 \le i \le n-4 \Rightarrow \alpha_{i+1} = \alpha_i \Rightarrow \quad \alpha_i = \alpha, \quad 1 \le i \le n-3$
- $\mathcal{L}(e_i, e_n, e_1), \quad 1 \le i \le n-4 \Rightarrow \beta_{i+1} = \beta_i \Rightarrow \quad \beta_i = \beta, \quad 1 \le i \le n-3$
- $\mathcal{L}(e_{n-1}, e_{n-1}, e_1) \Rightarrow \quad \alpha_{n-1} = 0$
- $\mathcal{L}(e_n, e_{n-1}, e_1) \Rightarrow \quad \alpha_n = 0$
- $\mathcal{L}(e_{n-1}, e_n, e_1) \Rightarrow \quad \beta_{n-1} = 0$
- $\mathcal{L}(e_n, e_n, e_1) \Rightarrow \quad \beta_n = 0$

De esta forma, la ley de la familia queda reducida a la siguiente:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-3 \\ [e_i, e_{n-1}] = \alpha e_{i+1}, & 1 \le i \le n-3 \\ [e_i, e_n] = \beta e_{i+1}, & 1 \le i \le n-3 \end{cases}$$

Se puede suponer que $\beta = 0$. En otro caso se hace el siguiente cambio de base

$$\begin{cases} e'_i = e_i, & 1 \le i \le n-1 \\ e'_n = \alpha e_n - \beta e_{n-1} & \end{cases}$$

quedando la ley

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-3 \\ [e_i, e_{n-1}] = \alpha e_{i+1}, & 1 \le i \le n-3 \end{cases}$$

Es fácil probar que la nulidad de α es invariante pues

$$dim(R(\mathcal{L})) = \begin{cases} n-2 & \text{si } \alpha \neq 0 \\ n-1 & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

Entonces,

- Si $\alpha = 0$ se tiene $\mathcal{L}_{n-2}^{0F} \oplus < e_{n-1} > \oplus < e_n >$.
- Si $\alpha \neq 0$ se obtiene $\mathcal{L}_{n-2}^{1F} \oplus < e_n >$.

En ambos casos resultan álgebras escindidas. $\square$

2.– *Álgebras de Leibniz no escindidas.*

No existen álgebras de Leibniz 2-filiformes graduadas naturalmente $\mu_{(I,1,1)}$ no escindidas.

1.1.3 Álgebras de Leibniz $\mu_{(I,1,2)}$

En esta parte del capítulo se clasificarán las álgebras de Leibniz 2-filiformes graduadas naturalmente de dimensión $n \geq 6$ de Tipo I y tal que los vectores e_{n-1} y e_n están en el primer y segundo subespacio de la graduación natural, respectivamente, esto es,

$$\begin{array}{ll} \mathcal{L}_1 =< e_1, e_{n-1} > & \\ \mathcal{L}_2 =< e_2, e_n > & \\ \mathcal{L}_i =< e_i >, & 3 \leq i \leq n-2 \end{array}$$

Como las álgebras de Leibniz 2-filiformes graduadas naturalmente escindidas de Tipo I están ya consideradas en la sección anterior nos limitaremos aquí al estudio de las no escindidas.

Teorema 1.1.4 *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz no de Lie y no escindida de tipo $\mu_{(I,1,2)}$. Entonces $\mathcal{L}$ es isomorfa a una cuya ley, respecto de una base adaptada $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, está determinada por*

$\mu_{(I,1,2)}{}^1$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3 \\ [e_i, e_{n-1}] = e_n, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n & \end{array} \right.$$

$\mu_{(I,1,2)}{}^2$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_{n-1}] = e_2 + e_n & \\ [e_i, e_{n-1}] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \end{array} \right.$$

$\mu_{(I,1,2)}{}^3$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

$\mu_{(I,1,2)}{}^4$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

Demostración. En las condiciones del enunciado, la ley de la familia puede ser expresada en una base adaptada $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ por

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_{n-1}] = \alpha_1 e_2 + \gamma_1 e_n & \\ [e_i, e_{n-1}] = \alpha_i e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \alpha_{n-1} e_2 + \gamma_{n-1} e_n & \\ [e_n, e_{n-1}] = \alpha_n e_3 & \\ [e_i, e_n] = \beta_i e_{i+2}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_n] = \beta_{n-1} e_3 & \\ [e_n, e_n] = \beta_n e_4 & \end{cases}$$

con $\gamma_1 \neq 0$ ó $\gamma_{n-1} \neq 0$.

De la identidad de Leibniz se obtienen las siguientes restricciones:

- (1) $\mathcal{L}(e_i, e_{n-1}, e_1)$, $1 \leq i \leq n-5 \Rightarrow \alpha_{i+1} = \alpha_i$, $1 \leq i \leq n-4$
  Por tanto, de (1) se duduce que $\alpha_i = \alpha$, $1 \leq i \leq n-3$
- (2) $\mathcal{L}(e_1, e_1, e_{n-1}) \Rightarrow \beta_1\gamma_1 = 0$
- (3) $\mathcal{L}(e_i, e_1, e_{n-1})$, $2 \leq i \leq n-5 \Rightarrow \beta_i\gamma_1 = 0$, $2 \leq i \leq n-4$
- (4) $\mathcal{L}(e_1, e_{n-1}, e_{n-1}) \Rightarrow \beta_1\gamma_{n-1} = 0$
- (5) $\mathcal{L}(e_i, e_{n-1}, e_{n-1})$, $2 \leq i \leq n-5 \Rightarrow \beta_i\gamma_{n-1} = 0$, $2 \leq i \leq n-4$
- (2) + (3) + (4) + (5) $\Rightarrow \begin{cases} \beta_i\gamma_1 = 0, & 1 \leq i \leq n-4 \\ \beta_i\gamma_{n-1} = 0, & 1 \leq i \leq n-4 \end{cases}$

Nótese que si $\gamma_1 = 0 = \gamma_{n-1}$ entonces $e_n \notin \mathcal{L}^2$ y $\mathcal{L}$ sería suma directa. Por tanto, debe ser $\beta_i = 0$, $1 \leq i \leq n-4$.

- (6) $\mathcal{L}(e_{n-1}, e_1, e_{n-1}) \Rightarrow \gamma_1\beta_{n-1} + \alpha_{n-1} = 0$

- (7) $\mathcal{L}(e_{n-1}, e_{n-1}, e_1) \Rightarrow \quad \alpha_{n-1} = 0$
- $(6) + (7) \Rightarrow (8) \quad \gamma_1\beta_{n-1} = 0$
- (9) $\mathcal{L}(e_{n-1}, e_{n-1}, e_{n-1}) \Rightarrow \quad \beta_{n-1}\gamma_{n-1} = 0$
- $(8) + (9) \Rightarrow \quad \beta_{n-1} = 0$

Por todo lo anterior la ley de la familia queda reducida a

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_{n-1}] = \alpha e_2 + \gamma_1 e_n & \\ [e_i, e_{n-1}] = \alpha e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \gamma_{n-1} e_n & \\ [e_n, e_{n-1}] = \alpha_n e_3 & \\ [e_n, e_n] = \beta_n e_4 & \end{cases}$$

con $\gamma_1 \neq 0$ ó $\gamma_{n-1} \neq 0$.

Haciendo uso de nuevo de la identidad de Leibniz, se tiene que

- (10) $\mathcal{L}(e_{n-1}, e_{n-1}, e_n) \Rightarrow \quad \beta_n\gamma_{n-1} = 0$
- (11) $\mathcal{L}(e_1, e_{n-1}, e_n) \Rightarrow \quad \beta_n\gamma_1 = 0$
- $(10) + (11) \Rightarrow \quad \beta_n = 0$
- (12) $\mathcal{L}(e_n, e_{n-1}, e_1) \Rightarrow \quad \alpha_n = 0$

quedando la siguiente ley

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_{n-1}] = \alpha e_2 + \gamma_1 e_n & \\ [e_i, e_{n-1}] = \alpha e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \gamma_{n-1} e_n & \end{cases}$$

con $\gamma_1 \neq 0$ ó $\gamma_{n-1} \neq 0$.

Con el cambio de base genérico dado por

$$\begin{aligned} e_1' &= A_1e_1 + A_2e_2 + \cdots + A_{n-1}e_{n-1} + A_ne_n \\ e_{n-1}' &= B_1e_1 + B_2e_2 + \cdots + C_{n-1}e_{n-1} + C_ne_n \\ e_n' &= C_1e_1 + C_2e_2 + \cdots + C_{n-1}e_{n-1} + C_ne_n \end{aligned}$$

se llega a que

$$\begin{aligned}
&B_1 = B_2 = \cdots = B_{n-3} = 0\\
&C_1 = C_2 = \cdots = C_{n-3} = 0\\
&B_{n-2}(A_1\gamma_1 + A_{n-1}\gamma_{n-1}) = 0\\
&C_{n-2}(A_1\gamma_1 + A_{n-1}\gamma_{n-1}) = 0\\
&C_{n-1}\alpha = C_{n-1}\gamma_1 = C_{n-1}\gamma_{n-1} = 0 \Rightarrow C_{n-1} = 0\\
&A_1B_{n-1}(A_1 + A_{n-1}\alpha) \neq 0
\end{aligned}$$

y se obtiene que los nuevos parámetros son

$$\begin{aligned}
\alpha' &= \frac{B_{n-1}\alpha}{A_1 + A_{n-1}\alpha}\\
\gamma_1' &= \frac{A_1B_{n-1}(A_1\gamma_1 + A_{n-1}\gamma_{n-1})}{C_n(A_1 + A_{n-1}\alpha)}\\
\gamma_{n-1}' &= \frac{B_{n-1}^2\gamma_{n-1}}{C_n}
\end{aligned}$$

de donde sigue que las nulidades de α y γ_{n-1} son invariantes.

Estamos ahora en condiciones de hacer la clasificación distinguiendo los siguientes casos

- **Caso 1** $\alpha \neq 0 \ \wedge \ \gamma_{n-1} \neq 0$

  En este caso un sencillo cambio de escala permite obtener

$$\mu_{(I,1,2)}{}^1 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-3\\ [e_i, e_{n-1}] = e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

- **Caso 2** $\alpha \neq 0 \ \wedge \ \gamma_{n-1} = 0$

  En este caso se tiene que es $\gamma_1' = \frac{A_1^2B_{n-1}\gamma_1}{C_n(A_1+A_{n-1}\alpha)}$ con lo cual la nulidad de γ_1 resulta ser invariante. Para $\gamma_1 = 0$ se obtiene un álgebra escindida.

  Si $\gamma_1 \neq 0$ se obtiene el álgebra

$$\mu_{(I,1,2)}{}^2 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-3\\ [e_1, e_{n-1}] = e_2 + e_n & \\ [e_i, e_{n-1}] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-3 \end{cases}$$

- **Caso 3** $\alpha = 0 \ \wedge \ \gamma_{n-1} \neq 0$

  Un sencillo cambio de escala permite obtener

$$\mu_{(I,1,2)}{}^3 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

- **Caso 4** $\alpha = 0 \ \wedge \ \gamma_{n-1} = 0$

  De nuevo, la nulidad de γ_1 resulta invariante. Si $\gamma_1 = 0$ se obtiene un álgebra escindida.

  Finalmente, para $\gamma_1 \neq 0$ se obtiene el álgebra

$$\mu_{(I,1,2)}{}^4 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

□

1.2 Álgebras de Leibniz 2-filiformes graduadas naturalmente de Tipo II

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz 2-filiform graduada naturalmente. Sea e_1 vector característico y $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ base adaptada. Si $\mathcal{L}$ es de Tipo II entonces,

$$R_{e_1} = \left(\begin{array}{c|c|c} J_1 & & \\ \hline & J_{n-2} & \\ \hline & & J_1 \end{array}\right)$$

es decir,

$$\begin{cases} [e_1, e_1] = 0 & \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_j, e_1] = 0, & n-1 \leq j \leq n \end{cases}$$

Se considera la graduación natural $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_3 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_k$ donde $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}^i / \mathcal{L}^{i+1}$. Dicha graduación debe verificar que $\mathcal{L}^{n-2} \neq \{0\}$ y $\mathcal{L}^{n-1} = \{0\}$. Por tanto, se sigue que $k = n-2$. Es decir, se tiene que

$$\begin{array}{l} \mathcal{L}^2 \supset < e_3, e_4, \cdots, e_{n-2}, e_{n-1} > \\ \mathcal{L}^3 \supset < e_4, \cdots, e_{n-2}, e_{n-1} > \\ \quad\vdots \\ \mathcal{L}^i \supset < e_{i+1}, \cdots, e_{n-2}, e_{n-1} > \\ \quad\vdots \\ \mathcal{L}^{n-2} \supset < e_{n-1} > \\ \mathcal{L}^{n-1} = \{0\} \end{array}$$

y puesto que $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}^i / \mathcal{L}^{i+1}$, se deduce que

$$\begin{array}{l} \mathcal{L}_1 \supset < e_1, e_2 > \\ \mathcal{L}_i \supset < e_{i+1} >, \quad 2 \leq i \leq n-2 \end{array}$$

Falta por conocer la posición del subespacio de la graduación donde se encuentra el vector e_n.

Se denotará por r la posición del subespacio de la graduación natural donde aparece el vector e_n. Esto es, $e_n \in \mathcal{L}_r$. Análogamente al Tipo I se puede considerar que $1 \leq r \leq n-2$.

1.2.1 Valores admisibles de r

Se va a probar en este sección que los únicos valores de r para los que se obtienen álgebras de Leibniz que no sean de Lie o que sean no escindidas son $r = 1$ y $r = 2$.

Proposición 1.2.1 *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz 2-filiforme graduada naturalmente n-dimensional, $n \geq 5$, de Tipo II y $r > 2$, $(r \neq \{n-3, n-2, \frac{n-2}{2}\})$. Entonces, se tiene que $\mathcal{L}$ es álgebra de Lie o el caso en cuestión no es posible.*

Demostración. Si $\mathcal{L}$ está en las condiciones del enunciado del teorema, la ley de la familia puede ser expresada en una base adaptada $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ por

$$\begin{cases}
[e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\
[e_1, e_i] = \alpha_{1,i} e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2, \ i \neq r \\
[e_1, e_r] = \alpha_{1,r} e_{r+1} + \gamma_1 e_n & \\
[e_1, e_n] = \alpha_{1,n} e_{r+2} & \\
[e_i, e_j] = \alpha_{i,j} e_{i+j-1}, & 2 \leq i,j \leq n-2, \ i+j \leq n, \ i+j \neq r+2 \\
[e_i, e_{r+2-i}] = \alpha_{i,r+2-i} e_{r+1} + \gamma_i e_n, & 2 \leq i \leq r \\
[e_n, e_i] = \alpha_{n,i} e_{i+r}, & 2 \leq i \leq n-r-1 \\
[e_i, e_n] = \alpha_{i,n} e_{i+r}, & 2 \leq i \leq n-r-1 \\
[e_n, e_n] = \alpha_{n,n} e_{2r+1}, & r \leq \frac{n-2}{2}
\end{cases}$$

con algún $\gamma_i \neq 0, \ 1 \leq i \leq r$.

Haciendo uso de la identidad de Leibniz, se tiene que

(1) $\mathcal{L}(e_1, e_i, e_1), \quad 2 \leq i \leq r-3 \Rightarrow \alpha_{1,i+1} = \alpha_{1,i}, \quad 2 \leq i \leq r-2$

(2) $\mathcal{L}(e_1, e_{r-1}, e_1) \Rightarrow \alpha_{1,r} = \alpha_{1,r-1} \ \wedge \ \gamma_1 = 0$

(3) $\mathcal{L}(e_1, e_i, e_1), \quad r \leq i \leq n-3 \Rightarrow \alpha_{1,i+1} = \alpha_{1,i}, r \leq i \leq n-3$

Resulta $\alpha_{1,i} = \alpha_1, \ 2 \leq i \leq n-2 \ \wedge \ \gamma_1 = 0$

Usando de nuevo la identidad de Leibniz se obtiene que

(4) $\mathcal{L}(e_1, e_1, e_2) \Rightarrow \alpha_1(\alpha_1 + 1) = 0$

Se pueden distinguir dos casos, $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_1 = -1$.

$\boxed{\text{Caso 1.-}}$ $\alpha_1 = 0$.

En este caso, la familia se puede expresar por medio de los siguientes productos:

$$\begin{cases}
[e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\
[e_i, e_j] = \alpha_{i,j} e_{i+j-1}, & 2 \leq i,j \leq n-2, \ i+j \leq n, \ i+j \neq r+2 \\
[e_i, e_{r+2-i}] = \alpha_{i,r+2-i} e_{r+1} + \gamma_i e_n, & 2 \leq i \leq r \\
[e_n, e_i] = \alpha_{n,i} e_{i+r}, & 2 \leq i \leq n-r-1 \\
[e_i, e_n] = \alpha_{i,n} e_{i+r}, & 2 \leq i \leq n-r-1
\end{cases}$$

De la identidad de Leibniz se obtiene que

(5) $\mathcal{L}(e_i, e_{r+1-i}, e_1)$, $2 \leq i \leq r-2 \Rightarrow \gamma_i = -\gamma_{i+1}$, $2 \leq i \leq r-1 \Rightarrow \gamma_i = (-1)^i \gamma_2, 2 \leq i \leq r$

(6) $\mathcal{L}(e_i, e_1, e_{r+1-i})$, $2 \leq i \leq r-2 \Rightarrow \gamma_{i+1} = 0$, $2 \leq i \leq r-1$

Luego los γ_i, $2 \leq i \leq r$ son todos nulos, salvo que sólo exista γ_2 pues en tal caso no se anula.

Por tanto, si $r > 2$ se sigue que $e_n \notin \mathcal{L}^2$ y esto implica que $r = 1$ ó $r = 2$ lo que es contradicción pues se está suponiendo que $r > 1$.

Por tanto este caso no es admisible para ningún valor de n. En otras palabras, no es posible encontrar álgebras de Leibniz para $r > 2$ y $\alpha_1 = 0$.

$\boxed{\text{Caso 2.-}}$ $\alpha_1 = -1$.

En este caso, la familia se puede expresar por medio de los siguientes productos:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_1, e_n] = \alpha_{1,n} e_{r+2} & \\ [e_i, e_j] = \alpha_{i,j} e_{i+j-1}, & 2 \leq i, j \leq n-2, \quad i+j \leq n \quad i+j \neq r+2 \\ [e_i, e_{r+2-i}] = \alpha_{i,r+2-i} e_{r+1} + \gamma_i e_n, & 2 \leq i \leq r \\ [e_n, e_i] = \alpha_{n,i} e_{i+r}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_i, e_n] = \alpha_{i,n} e_{i+r}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_n, e_n] = \alpha_{n,n} e_{2r+1}, & r \leq \frac{n-2}{2} \end{cases}$$

con $\gamma_i \neq 0$.

De la identidad de Leibniz

(7) $\mathcal{L}(e_1, e_n, e_1) \Rightarrow \alpha_{1,n} = 0$ si $r \leq n-4$

(8) $\mathcal{L}(e_n, e_1, e_n) \Rightarrow \alpha_{n,n} = 0$ si $r \leq \frac{n-3}{2}$

Los casos $r = n-3$, $r = n-2$ y $r = \frac{n-2}{2}$ (n par) deberán ser estudiados por separado y se verán más adelante. Se va a probar a continuación que las álgebras que se obtienen son todas de Lie, comprobando lo siguiente:

$$\begin{array}{lll} (I) & [e_i, e_i] = 0, & 1 \leq i \leq n \\ (II) & [e_i, e_j] = -[e_j, e_i], & 1 \leq i, j \leq n \end{array}$$

• Probemos que $[e_i, e_i] = 0,\ 2 \le i \le n-2$. Para e_1, e_{n-1} y e_n el resultado es trivial.

De $\mathcal{L}(e_1, e_i, e_i),\ 2 \le i \le \frac{n-3}{2} \Rightarrow \alpha_{i,i} = 0,\ 2 \le i \le \frac{n-1}{2}$. El caso $i = \dfrac{n}{2}$ queda fuera pues no tendría sentido aplicar la identidad de Leibniz anterior en ese caso. Se demuestra entonces de otra forma

Si $i = \dfrac{n}{2}$ se tienen las restricciones siguientes obtenidas de la identidad de Leibniz.

(1) $\mathcal{L}(e_{\frac{n}{2}-1}, e_1, e_{\frac{n}{2}}) \Rightarrow \alpha_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} = \alpha_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}} - \alpha_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+1}$

(2) $\mathcal{L}(e_{\frac{n}{2}}, e_{\frac{n}{2}-1}, e_1) \Rightarrow \alpha_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} = \alpha_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1} - \alpha_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}-1}$

(3) $\mathcal{L}(e_{\frac{n}{2}-1}, e_{\frac{n}{2}-1}, e_1) \Rightarrow \alpha_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1} = -\alpha_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}}$

(4) $\mathcal{L}(e_1, e_{\frac{n}{2}-1}, e_{\frac{n}{2}}) \Rightarrow \alpha_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} = \alpha_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}-1} + \alpha_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}}$

De (3) + (4) se sigue que $\quad \alpha_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} = \alpha_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}-1} - \alpha_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1} \quad (5)$

De (2) + (5) se sigue que $\quad \alpha_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} = 0.$

• Probemos que $[e_i, e_j] = -[e_j, e_i],\ 2 \le i, j \le n-2$ (al igual que ocurría en (I) el resultado es trivial para e_1, e_{n-1} y e_n.

Sea $i < j$ y $3 \le j \le n-2,\ j \ne r+2-i$, entonces

$$\begin{aligned}
[e_i, e_j] &= [e_i, [e_{j-1}, e_1]] = [[e_i, e_{j-1}], e_1] - [[e_i, e_1], e_{j-1}] = \\
&= -[e_1, [e_i, e_{j-1}]] + [[e_1, e_i], e_{j-1}] = \\
&= -([[e_1, e_i], e_{j-1}] - [[e_1, e_{j-1}], e_i]) + [[e_1, e_i], e_{j-1}] = [[e_1, e_{j-1}, e_i] = -[e_j, e_i]
\end{aligned}$$

Para $j = r+2-i$,

$$\begin{aligned}
[e_i, e_{r+2-i}] &= [e_i, [e_{r+1-i}, e_1]] = [[e_i, e_{r+1-i}], e_1] - [[e_i, e_1], e_{r+1-i}] = \\
&= -[e_1, [e_i, e_{r+1-i}]] + [[e_1, e_i], e_{r+1-i}] = \\
&= -([[e_1, e_i], e_{r+1-i}] - [[e_1, e_{r+1-i}], e_i]) + [[e_1, e_i], e_{r+1-i}] = [[e_1, e_{r+1-i}], e_i] = \\
&= -[e_{r+2-i}, e_i]
\end{aligned}$$

Para $j = n,\ 2 \le i \le n-2$,

$$\begin{aligned}
[e_n, e_i] &= [e_n, [e_{i-1}, e_1]] = [[e_n, e_{i-1}], e_1] - [[e_n, e_1], e_{i-1}] = -[e_1, [e_n, e_{i-1}]] = \\
&= -([[e_1, e_n], e_{i-1}] - [[e_1, e_{i-1}], e_n]) = [[e_1, e_{i-1}], e_n] = -[e_i, e_n]
\end{aligned}$$

Finalmente, para $j = 2$,

$$\begin{cases} [e_2, e_n] = \alpha_{2,n} e_3 \\ [e_n, e_2] = \alpha_{n,2} e_3 \end{cases}$$

y de $\mathcal{L}(e_1, e_2, e_n)$ junto con $\mathcal{L}(e_n, e_1, e_2)$ se sigue que $\alpha_{2,n} = -\alpha_{n,2}$. Queda por tanto probado que son álgebras de Lie. □

A continuación se van a estudiar los casos particulares llegando a que en todos los casos se obtiene álgebra de Lie.

Lema 1.2.2 **(Caso** $r = n - 3$.) *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz 2-filiform graduada naturalmente de Leibniz n-dimensional, $n \geq 5$, de Tipo II y $r = n - 3$. Entonces, se tiene que $\mathcal{L}$ es álgebra de Lie.*

Demostración. La graduación es $\mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_{n-2}$ con $\mathcal{L}_1 = < e_1, e_2 >$, $\mathcal{L}_{i-1} = < e_i >$, $2 \leq i \leq n-3$, $\mathcal{L}_{n-3} = < e_{n-2}, e_n >$ y $\mathcal{L}_{n-2} = < e_{n-1} >$.

La ley de la familia puede ser expresada por

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_1, e_i] = \alpha_{1,i} e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-3}] = \alpha_{1,n-3} e_{n-2} + \gamma_1 e_n & \\ [e_1, e_{n-2}] = \alpha_{1,n-2} e_{n-1} & \\ [e_1, e_n] = \alpha_{1,n} e_{n-1} & \\ [e_i, e_j] = \alpha_{i,j} e_{i+j-1}, & 2 \leq i, j \leq n-4,\ i+j \leq n-2 \\ [e_i, e_{n-1-i}] = \alpha_{i,n-1-i} e_{n-2} + \gamma_i e_n, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-i}, e_i] = \alpha_{n-i,i} e_{n-1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_i, e_{n-i}] = \alpha_{i,n-i} e_{n-1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_n, e_2] = \alpha_{n,2} e_{n-1} & \\ [e_2, e_n] = \alpha_{2,n} e_{n-1} & \end{cases}$$

con algún $\gamma_i \neq 0,\ 1 \leq i \leq n-3$.

De la identidad de Leibniz se sigue que

(1) $\mathcal{L}(e_1, e_i, e_1),\quad 2 \leq i \leq n-5 \Rightarrow \alpha_{1,i+1} = \alpha_{1,i},\quad 2 \leq i \leq n-4$

(2) $\mathcal{L}(e_1, e_{n-4}, e_1) \Rightarrow \alpha_{1,n-3} = \alpha_{1,n-4}$ y $\gamma_1 = 0$

(3) $\mathcal{L}(e_1, e_{n-3}, e_1) \Rightarrow \alpha_{1,n-2} = \alpha_{1,n-3}$

Luego se tiene que $\alpha_{1,i} = \alpha_1, \quad 2 \leq i \leq n-2 \quad$ y $\quad \gamma_1 = 0$

(4) $\quad \mathcal{L}(e_1, e_1, e_2) \Rightarrow \alpha_1(\alpha_1 + 1) = 0$

El caso $\alpha_1 = 0$ ha sido ya estudiado en general en el teorema anterior y no es posible, así que se estudiará sólo el caso $\alpha_1 = -1$.

Sea $\alpha_1 = -1$, la familia puede expresarse por

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-3}] = -e_{n-2} & \\ [e_1, e_{n-2}] = -e_{n-1} & \\ [e_1, e_n] = \alpha_{1,n} e_{n-1}, & \\ [e_i, e_j] = \alpha_{i,j} e_{i+j-1}, & 2 \leq i, j \leq n-2, \; i+j \leq n-2 \\ [e_i, e_{n-1-i}] = \alpha_{i,n-1-i} e_{n-2} + \gamma_i e_n, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-i}, e_i] = \alpha_{n-i,i} e_{n-1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_i, e_{n-i}] = \alpha_{i,n-i} e_{n-1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_n, e_2] = \alpha_{n,2} e_{n-1}, & \\ [e_2, e_n] = \alpha_{2,n} e_{n-1}, & \end{cases}$$

con algún $\gamma_i \neq 0, \; 2 \leq i \leq n-3$.

Haciendo uso de nuevo de la identidad de Leibniz se tiene que

(5) $\quad \mathcal{L}(e_i, e_{n-2-i}, e_1), \quad 2 \leq i \leq n-4 \Rightarrow \gamma_i = (-1)^i \gamma_2, \quad 2 \leq i \leq n-3$

(6) $\quad \mathcal{L}(e_1, e_{n-3}, e_2) \Rightarrow \alpha_{1,n}\gamma_2 = 0$

Si $\alpha_{1,n} \neq 0 \Rightarrow \gamma_2 = 0$ y por tanto $e_n \notin \mathcal{L}^2$ llegando a que r tendría que ser 1 y se está suponiendo $r = n-3$ y $n \geq 5$. Luego $\alpha_{1,n} = 0$.

Finalmente y de manera análoga a como se hizo en el teorema anterior, es fácil probar que se trata de una familia de álgebras de Lie. $\square$

Lema 1.2.3 (**Caso** $r = n-2$.) *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz 2-filiform graduada naturalmente de Leibniz n-dimensional, $n \geq 5$, de Tipo II y $r = n-2$. Entonces, se tiene que $\mathcal{L}$ es álgebra de Lie.*

Demostración. La graduación es $\mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_{n-2}$ con $\mathcal{L}_1 =< e_1, e_2 >$, $\mathcal{L}_{i-1} =< e_i >$, $3 \leq i \leq n-2$ y $\mathcal{L}_{n-2} =< e_{n-1}, e_n >$.

La ley de la familia puede ser expresada por medio de los siguientes productos:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_1, e_i] = \alpha_{1,i} e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_{n-2}] = \alpha_{1,n-2} e_{n-1} + \gamma_1 e_n, & \\ [e_i, e_j] = \alpha_{i,j} e_{i+j-1}, & 2 \leq i, j \leq n-3, \ i+j \leq n-1 \\ [e_i, e_{n-i}] = \alpha_{i,n-i} e_{n-1} + \gamma_i e_n, & 2 \leq i \leq n-2 \end{cases}$$

con algún $\gamma_i \neq 0, \ 1 \leq i \leq n-2$.

De la identidad de Leibniz se obtiene que:

(1) $\mathcal{L}(e_1, e_i, e_1), \quad 2 \leq i \leq n-5 \Rightarrow \alpha_{1,i+1} = \alpha_{1,i}, \quad 2 \leq i \leq n-4$

(2) $\mathcal{L}(e_1, e_{n-3}, e_1) \Rightarrow \alpha_{1,n-2} = \alpha_{1,n-3} \quad \wedge \quad \gamma_1 = 0$

Luego se tiene que $\alpha_{1,i} = \alpha_1, \quad 2 \leq i \leq n-2 \quad$ y $\quad \gamma_1 = 0$

(4) $\mathcal{L}(e_1, e_1, e_2) \Rightarrow \alpha_1(\alpha_1 + 1) = 0$

El caso $\alpha_1 = 0$ ha sido ya estudiado en el caso general y no es posible. Se estudiará el caso $\alpha_1 = -1$.

Si $\alpha_1 = -1$, se tiene que la ley de la familia queda expresada por

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_i, e_j] = \alpha_{i,j} e_{i+j-1}, & 2 \leq i, j \leq n-3, \ i+j \leq n-1 \\ [e_i, e_{n-i}] = \alpha_{i,n-i} e_{n-1} + \gamma_i e_n, & 2 \leq i \leq n-2 \end{cases}$$

con $\gamma_i \neq 0$.

De manera análoga a los demás casos es fácil ver que se trata de una familia de álgebras de Lie. $\square$

Finalmente, se aborda el último caso particular.

Lema 1.2.4 (Caso $r = \frac{n-2}{2}$). *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz 2-filiform graduada naturalmente de Leibniz n-dimensional, $n \geq 5$, de Tipo II y $r = \frac{n-2}{2}$. Entonces, se tiene que $\mathcal{L}$ es álgebra de Lie.*

Demostración. La graduación es $\mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_{n-2}$ con $\mathcal{L}_1 =< e_1, e_2 >$, $\mathcal{L}_2 =< e_3 >$, $\cdots$, $\mathcal{L}_{i-1} =< e_i >$, $\cdots$, $\mathcal{L}_{\frac{n-4}{2}} =< e_{\frac{n-2}{2}} >$, $\mathcal{L}_{\frac{n-2}{2}} =< e_{\frac{n}{2}}, e_n >$, $\mathcal{L}_{\frac{n}{2}} =< e_{\frac{n+2}{2}} >$ y $\mathcal{L}_{n-2} =< e_{n-1} >$.

El procedimiento es análogo a los casos anteriores. □

Así, los únicos valores de r para los que se obtienen álgebras de Leibniz no de Lie son $r = 1$ ó $r = 2$.

Nota 1.2.5 Se denotará por $\mu_{(II,r)}$ a las álgebras de Leibniz 2-filiformes graduadas naturalmente de dimensión n de Tipo II y $r \in \{1, 2\}$.

1.2.2 Álgebras de Leibniz $\mu_{(II,1)}$

En esta parte del capítulo se aborda la clasificación de las álgebras de Leibniz 2-filiformes graduadas naturalmente de dimensión n, $n \geq 5$, de Tipo II y con $r = 1$. La graduación natural es la siguiente:

$$\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_{n-2}$$

con

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_1 =< e_1, e_2, e_n > \\ &\mathcal{L}_i =< e_{i+1} > \qquad 2 \leq i \leq n-2 \end{aligned}$$

1.– *Álgebras de Leibniz escindidas*

Proposición 1.2.6 *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz 1-filiforme graduada naturalmente $(n-1)$-dimensional de Tipo II. Entonces $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \oplus \mathbf{C}$ es un álgebra de Leibniz 2-filiforme graduada naturalmente de n-dimensional Tipo II.*

Puesto que la son conocidas las 1-filiformes se puede deducir la clasificación completa de las 2-filiformes graduadas naturalmente escindidas de Tipo II.

Se van a clasificar aquí las 2-filiformes graduadas naturalmente no escindidas de Tipo II con $r = 1$.

2.– *Álgebras de Leibniz no escindidas*

Teorema 1.2.7 *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz de tipo $\mu_{(II,1)}$. Si $\mathcal{L}$ es de Leibniz, no de Lie y no escindida entonces $\mathcal{L}$ es isomorfa al álgebra de ley*

$$\mu_{(II,1)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_n, e_{n-2}] = e_{n-1} \end{cases}$$

Demostración. En las condiciones del enunciado, la ley de la familia puede ser expresada en una base adaptada $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ por

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_1, e_i] = \alpha_{1,i} e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_1, e_n] = \alpha_{1,n} e_3 \\ [e_i, e_j] = \alpha_{i,j} e_{i+j-1}, & 2 \leq i, j \leq n-2, \quad i+j \leq n \\ [e_n, e_i] = \alpha_{n,i} e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_i, e_n] = \alpha_{i,n} e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_n, e_n] = \alpha_{n,n} e_3 \end{cases}$$

De la identidad de Leibniz se obtienen las siguientes restricciones:

- (1) $\mathcal{L}(e_1, e_i, e_1)$, $2 \leq i \leq n-4 \Rightarrow \alpha_{1,i} = \alpha_{1,i+1}$, $2 \leq i \leq n-3$
  Luego $\alpha_{1,i} = \alpha_1$, $2 \leq i \leq n-2$
- (2) $\mathcal{L}(e_1, e_1, e_2) \Rightarrow \quad \alpha_1(\alpha_1 + 1) = 0$
- (3) $\mathcal{L}(e_1, e_n, e_1) \Rightarrow \quad \alpha_{1,n} = 0$
- (4) $\mathcal{L}(e_n, e_1, e_n) \Rightarrow \quad \alpha_{n,n} = 0$

- Si $\alpha_1 = 0$ se tiene que la ley de la familia es la siguiente:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_i, e_j] = \alpha_{i,j} e_{i+j-1}, & 2 \leq i, j \leq n-2, \quad i+j \leq n \\ [e_n, e_i] = \alpha_{n,i} e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_i, e_n] = \alpha_{i,n} e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \end{cases}$$

De la identidad de Leibniz se obtiene que:

- (5) $\mathcal{L}(e_i, e_1, e_j)$, $2 \leq i, j \leq n-4 \Rightarrow \alpha_{i,j} = \alpha_j$, $2 \leq i, j \leq n-2$
- (6) $\mathcal{L}(e_i, e_j, e_1)$, $3 \leq j \leq n-3 \Rightarrow \alpha_j = 0$, $3 \leq j \leq n-2$
- (7) $\mathcal{L}(e_i, e_1, e_n)$, $2 \leq i \leq n-4 \Rightarrow$ $\alpha_{i+1,n} = \alpha_{i,n}$, $2 \leq i \leq n-3$
  $\Rightarrow \alpha_{i,n} = \alpha_n$, $2 \leq i \leq n-2$
- (8) $\mathcal{L}(e_n, e_1, e_i)$, $2 \leq i \leq n-4 \Rightarrow$ $\alpha_{n,i} = 0$, $2 \leq i \leq n-3$

Sustituyendo en la familia anterior se tiene que

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_i, e_2] = \alpha_2 e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_i, e_n] = \alpha_n e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_n, e_{n-2}] = \alpha_{n,n-2} e_{n-1} & \end{cases}$$

El cambio de base siguiente

$$\begin{cases} e'_2 = e_2 - \alpha_2 e_1 & \\ e'_n = e_n - \alpha_n e_1 & \\ e'_i = e_i, & i \neq 2 \end{cases}$$

permite suponer $\alpha_2 = \alpha_n = 0$ y se llega a la siguiente familia

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_n, e_{n-2}] = \alpha e_{n-1} & \end{cases}$$

La nulidad de α es invariante pues

$$\mathcal{Z}(\mathcal{L}) = \begin{cases} < e_{n-1} >, & \text{si} \quad \alpha \neq 0 \\ < e_{n-1}, e_n >, & \text{si} \quad \alpha = 0 \end{cases}$$

obteniendo que

1.– Si $\alpha = 0$ se obtiene un álgebra escindida.

2.– Si $\alpha \neq 0$ haciendo un cambio de escala

$$\begin{cases} e'_i = e_i, & 1 \leq i \leq n-1 \\ e'_n = \frac{1}{\alpha} e_n \end{cases}$$

se tiene $\mu_{(II,1)}$ dada por

$$\mu_{(II,1)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_n, e_{n-2}] = e_{n-1} \end{cases}$$

• Si $\alpha_1 = -1$, la ley viene dada por

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_i, e_j] = \alpha_{i,j} e_{i+j-1}, & 2 \leq i, j \leq n-2, \quad i+j \leq n \\ [e_n, e_i] = \alpha_{n,i} e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_i, e_n] = \alpha_{i,n} e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \end{cases}$$

Falta por probar que se trata de una familia de álgebras de Lie. Habría que probar que

$$\begin{array}{lll} (I) & [e_i, e_i] = 0, & 1 \leq i \leq n \\ (II) & [e_i, e_j] = -[e_j, e_i], & 1 \leq i, j \leq n \end{array}$$

• Probemos que $[e_i, e_i] = 0, \ 2 \leq i \leq n-2$. Para e_1, e_{n-1} y e_n el resultado es trivial.

De $\mathcal{L}(e_1, e_i, e_i), \ 2 \leq i \leq \frac{n-3}{2} \Rightarrow \alpha_{i,i} = 0, \ 2 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$. El caso $i = \dfrac{n}{2}$ queda fuera pues no tendría sentido aplicar la identidad de Leibniz anterior en ese caso. Se demuestra entonces de otra forma

Si $i = \dfrac{n}{2}$ se tienen las restricciones siguientes obtenidas de la identidad de Leibniz.

(1) $\mathcal{L}(e_{\frac{n}{2}-1}, e_1, e_{\frac{n}{2}}) \Rightarrow \alpha_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} = \alpha_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}} - \alpha_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+1}$

(2) $\mathcal{L}(e_{\frac{n}{2}}, e_{\frac{n}{2}-1}, e_1) \Rightarrow \alpha_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} = \alpha_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1} - \alpha_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}-1}$

(3) $\mathcal{L}(e_{\frac{n}{2}-1}, e_{\frac{n}{2}-1}, e_1) \Rightarrow \alpha_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1} = -\alpha_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}}$

(4) $\mathcal{L}(e_1, e_{\frac{n}{2}-1}, e_{\frac{n}{2}}) \Rightarrow \alpha_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} = \alpha_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}-1} + \alpha_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}}$

De esta forma se tendría probado (I).

Sea $i < j$ y $3 \leq j \leq n-2$ (al igual que ocurría en (I) el resultado es trivial para e_1, e_{n-1} y e_n), entonces

$$\begin{aligned}
[e_i, e_j] &= [e_i, [e_{j-1}, e_1]] = [[e_i, e_{j-1}], e_1] - [[e_i, e_1], e_{j-1}] = -[e_1, [e_i, e_{j-1}]]+ \\
&+ [[e_1, e_i], e_{j-1}] = -([[e_1, e_i], e_{j-1}] - [[e_1, e_{j-1}], e_i]) + [[e_1, e_i], e_{j-1}] \\
&\Rightarrow [e_i, e_j] = -[e_j, e_i]
\end{aligned}$$

Para $j = n$,

$$\begin{aligned}
[e_n, e_i] &= [e_n, [e_{i-1}, e_1]] = [[e_n, e_{i-1}], e_1] - [[e_n, e_1], e_{i-1}] = -[e_1, [e_n, e_{i-1}]] = \\
&= -([[e_1, e_n], e_{i-1}] - [[e_1, e_{i-1}], e_n]) = [[e_1, e_{i-1}], e_n] = \\
&= -[e_i, e_n]
\end{aligned}$$

Finalmente, para $j = 2$,

$$\begin{cases} [e_2, e_n] = \alpha_{2,n} e_3 \\ [e_n, e_2] = \alpha_{n,2} e_3 \end{cases}$$

y de $\mathcal{L}(e_1, e_2, e_n) \Rightarrow \alpha_{2,n} = \alpha_{3,n} = -\alpha_{n,3}$ junto con $\mathcal{L}(e_n, e_1, e_2) \Rightarrow -\alpha_{n,3} = -\alpha_{n,2}$ lo que prueba (II). □

1.2.3 Álgebras de Leibniz $\mu_{(II,2)}$

En esta parte del capítulo se aborda la clasificación de las álgebras de Leibniz 2-filiformes graduadas naturalmente de dimensión n, $n \geq 7$, de Tipo II y con $r = 2$. La graduación natural es la siguiente:

$$\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_{n-2}$$

con

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_1 =< e_1, e_2 > \\
&\mathcal{L}_2 =< e_3, e_n > \\
&\mathcal{L}_i =< e_{i+1} > \qquad 3 \leq i \leq n-2
\end{aligned}$$

Como las álgebras de Leibniz 2-filiformes graduadas naturalmente escindidas de Tipo II están ya consideradas en la sección anterior nos limitaremos aquí al estudio de las no escindidas.

Teorema 1.2.8 *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz, no de Lie, no escindida y de tipo $\mu_{(II,2)}$. Entonces $\mathcal{L}$ es isomorfa a una de las siguientes álgebras de leyes*

$\mu^1_{(II,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_1, e_2] = e_n \\ [e_2, e_2] = e_n \end{cases}$$

$\mu^2_{(II,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_2, e_2] = e_n \end{cases}$$

$\mu^3_{(II,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_1, e_2] = e_n \end{cases}$$

Demostración. En las condiciones del enunciado, la ley de la familia puede ser expresada en una base adaptada $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ por

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_1, e_2] = \alpha_{1,2}e_3 + \gamma_1 e_n \\ [e_1, e_i] = \alpha_{1,i}e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-2 \\ [e_1, e_n] = \alpha_{1,n}e_4 \\ [e_2, e_2] = \alpha_{2,2}e_3 + \gamma_2 e_n \\ [e_i, e_j] = \alpha_{i,j}e_{i+j-1}, & 2 \leq i, j \leq n-2, \ i+j \leq n, \ i+j \neq 4 \\ [e_n, e_i] = \alpha_{n,i}e_{i+2}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_i, e_n] = \alpha_{i,n}e_{i+2}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_n, e_n] = \alpha_{n,n}e_5, \end{cases}$$

con algún $\gamma_i \neq 0, \ 1 \leq i \leq 2$.

Usando la identidad de Leibniz se obtiene que

(1) $\mathcal{L}(e_1, e_i, e_1), \quad 2 \leq i \leq n-4 \Rightarrow \alpha_{1,i+1} = \alpha_{1,i} = \alpha_1, \quad 2 \leq i \leq n-3$

$$\Rightarrow \alpha_{1,i} = \alpha_1, \quad 2 \leq i \leq n-2.$$

(2) $\mathcal{L}(e_1, e_n, e_1) \Rightarrow \alpha_{1,n} = 0$

(3) $\mathcal{L}(e_n, e_1, e_n) \Rightarrow \alpha_{n,n} = 0$

(4) $\mathcal{L}(e_1, e_1, e_2) \Rightarrow \alpha_1(1 + \alpha_1) = 0$

Teniendo en cuenta el valor de α_1 se van a distinguir dos casos:

$\boxed{\text{Caso 1}}$ $\alpha_1 = 0$.

En este caso, la ley de la familia puede expresarse mediante:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_1, e_2] = \gamma_1 e_n & \\ [e_i, e_j] = \alpha_{i,j} e_{i+j-1}, & 2 \leq i, j \leq n-2, \ i+j \leq n, \ i+j \neq 4 \\ [e_2, e_2] = \alpha_{2,2} e_3 + \gamma_2 e_n & \\ [e_n, e_i] = \alpha_{n,i} e_{i+2}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_i, e_n] = \alpha_{i,n} e_{i+2}, & 2 \leq i \leq n-3 \end{cases}$$

con algún $\gamma_i \neq 0, \ i = 1, 2$.

Haciendo uso de nuevo de la identidad de Leibniz se llega a:

(5) $\mathcal{L}(e_i, e_1, e_j), \quad 3 \leq i, j \leq n-4$

$$\Rightarrow \alpha_{i,j} = \alpha_j, \quad 2 \leq i, j \leq n-2$$

(6) $\mathcal{L}(e_i, e_j, e_1), \quad 3 \leq j \leq n-3 \Rightarrow \ \alpha_j = 0, \quad 3 \leq j \leq n-2$

(7) $\mathcal{L}(e_i, e_1, e_n), \quad 2 \leq i \leq n-5 \Rightarrow \ \alpha_{i+1,n} = \alpha_{i,n}, \quad 2 \leq i \leq n-4$

$$\Rightarrow \alpha_{i,n} = \alpha_n, \quad 2 \leq i \leq n-3$$

(8) $\mathcal{L}(e_n, e_1, e_i), \quad 2 \leq i \leq n-4 \Rightarrow \ \alpha_{n,i} = 0, \quad 2 \leq i \leq n-3$

(9) $\mathcal{L}(e_i, e_2, e_2), \quad 2 \leq i \leq n-3 \Rightarrow \quad \alpha_n \gamma_2 = 0$

(10) $\mathcal{L}(e_i, e_2, e_1), \ 2 \leq i \leq n-4 \Rightarrow \ \alpha_{i+1,2} = \alpha_{i,2}, \quad 3 \leq i \leq n-3$

$$\Rightarrow \alpha_{i,2} = \alpha_2, \quad 3 \leq i \leq n-2$$

(11) $\mathcal{L}(e_2, e_2, e_1) \Rightarrow \quad \alpha_{2,2} = \alpha_2$

(12) $\mathcal{L}(e_2, e_1, e_2) \Rightarrow \quad \alpha_n \gamma_1 = 0$

De (9) y (11) se sigue que $\alpha_n = 0$ puesto que γ_1 y γ_2 no se anulan simultáneamente (pues estamos considerando álgebras no escindidas). La ley de la familia queda resumida a la siguiente ley:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_1, e_2] = \gamma_1 e_n \\ [e_2, e_2] = \alpha_2 e_3 + \gamma_2 e_n \\ [e_i, e_2] = \alpha_2 e_{i+1}, \quad 3 \leq i, j \leq n-2 \end{cases}$$

con $\gamma_1 \neq 0$ ó $\gamma_2 \neq 0$.

El cambio de base dado por:

$$\begin{cases} e'_2 = e_2 - \alpha_2 e_1 \\ e'_i = e_i, \quad i \neq 2 \end{cases}$$

permite suponer $\alpha_2 = 0$.

Se llega a la ley siguiente

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_1, e_2] = \gamma_1 e_n \\ [e_2, e_2] = \gamma_2 e_n \end{cases}$$

con $\gamma_1 \neq 0$ ó $\gamma_2 \neq 0$.

La nulidad de γ_2 es invariante pues

$$dim(\mathcal{I}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma_2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } \gamma_2 = 0 \end{cases}$$

Haciendo uso de cambios de base genéricos se va a probar que la nulidad de γ_1 es también invariante.

$$\begin{aligned} e'_1 &= A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 + \cdots + A_{n-3} e_{n-3} + A_{n-2} e_{n-2} + A_{n-1} e_{n-1} + A_n e_n \\ e'_2 &= B_1 e_1 + B_2 e_2 + B_3 e_3 + \cdots + B_{n-3} e_{n-3} + B_{n-2} e_{n-2} + B_{n-1} e_{n-1} + B_n e_n \\ e'_n &= C_1 e_1 + C_2 e_2 + C_3 e_3 + \cdots + C_{n-3} e_{n-3} + C_{n-2} e_{n-2} + C_{n-1} e_{n-1} + C_n e_n \end{aligned}$$

El nuevo parámetro queda

$$\gamma'_1 = \frac{A_1 B_2}{C_n} \gamma_1, \qquad A_1 B_2 C_n \neq 0$$

Los casos a distinguir son los siguientes:

$$\begin{cases} \gamma_2 \neq 0 \begin{cases} \gamma_1 \neq 0 & \textbf{Caso 1} \\ \gamma_1 = 0 & \textbf{Caso 2} \end{cases} \\ \gamma_2 = 0 \Rightarrow \gamma_1 \neq 0 \quad \textbf{Caso 3} \end{cases}$$

Caso 1 $\gamma_1\gamma_2 \neq 0$. Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^1_{(II,2)}$ cuya ley viene dada por

$$\mu^1_{(II,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_1, e_2] = e_n \\ [e_2, e_2] = e_n \end{cases}$$

Caso 2 $\gamma_2 \neq 0$, $\gamma_1 = 0$. Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^2_{(II,2)}$ cuya ley viene dada por

$$\mu^2_{(II,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_2, e_2] = e_n \end{cases}$$

Caso 3 $\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_2 = 0$. Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^3_{(II,2)}$ cuya ley viene dada por

$$\mu^3_{(II,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_1, e_2] = e_n \end{cases}$$

$\boxed{\text{Caso 1}}$ $\alpha_1 = -1$. En este caso todas las álgebras de Leibniz que se obtienen son álgebras de Lie. La demostración es análoga a la de casos anteriores. $\square$

Capítulo 2

Álgebras de Leibniz 3-filiformes graduadas naturalmente

Se aborda en este capítulo el estudio de las álgebras de Leibniz 3-filiformes graduadas naturalmente de dimensión n, es decir, aquellas que tienen $(n-3,1,1,1)$ como sucesión característica. Estas álgebras tienen nilíndice $n-3$, pero en este nilíndice hay álgebras de sucesión característica $(n-3,1,1,1)$ (3-filiformes), $(n-3,2,1)$ y $(n-3,3)$.

Este caso es bastante más complejo que el caso 2-filiformes pues en esta ocasión no es conocida la posición de tres vectores.

La estructura que se va a seguir en el trabajo va a ser similar a la del capítulo anterior, en primer lugar se verán los tipos de familias que existen, a continuación los valores admisibles para las posiciones de los tres vectores en la graduación natural y finalmente se clasificarán los casos posibles.

A lo largo de este capítulo $\mathcal{L}$ denotará un álgebra de Leibniz nilpotente 3-filiforme ($c(\mathcal{L}) = (n-3,1,1,1)$) graduada naturalmente de dimensión n y $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ una base adaptada de $\mathcal{L}$ con e_1 vector característico.

El lema siguiente permite dividir la familia anterior en dos subfamilias no isomorfas entre sí.

Lema 2.0.9 *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz 3-filiforme n-dimensional. Entonces $\mathcal{L}$ posee un vector característico e_1 cuyo operador multiplicador a derecha tiene una de las siguientes formas:*

$$a)\quad R_{e_1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} J_{n-3} & & & \\ \hline & J_1 & & \\ \hline & & J_1 & \\ \hline & & & J_1 \end{array}\right) \qquad b)\quad R_{e_1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} J_1 & & & \\ \hline & J_{n-3} & & \\ \hline & & J_1 & \\ \hline & & & J_1 \end{array}\right)$$

donde J_i representan bloques de Jordan de dimensión i. Además, corresponden a álgebras no isomorfas entre sí.

Demostración. Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz en las condiciones del enunciado. Existen cuatro posibilidades para la forma de Jordan de R_{e_1} que, en cualquier caso, tiene un bloque de Jordan de orden $n-3$ y 3 bloques de orden 1.

$$a)\quad R_{e_1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} J_{n-3} & & & \\ \hline & J_1 & & \\ \hline & & J_1 & \\ \hline & & & J_1 \end{array}\right) \qquad b)\quad R_{e_1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} J_1 & & & \\ \hline & J_{n-3} & & \\ \hline & & J_1 & \\ \hline & & & J_1 \end{array}\right)$$

$$c)\quad R_{e_1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} J_1 & & & \\ \hline & J_1 & & \\ \hline & & J_{n-3} & \\ \hline & & & J_1 \end{array}\right) \qquad d)\quad R_{e_1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} J_1 & & & \\ \hline & J_1 & & \\ \hline & & J_1 & \\ \hline & & & J_{n-3} \end{array}\right)$$

Es fácil comprobar que el cambio de base en $c)$ dado por

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 & \\ e'_i = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ e'_{n-1} = e_2 & \\ e'_n = e_n & \end{cases}$$

lleva álgebras del tipo $c)$ a álgebras del tipo $b)$.

De manera similar, el cambio de base en $d)$ dado por

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 & \\ e'_i = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ e'_{n-1} = e_2 & \\ e'_n = e_3 & \end{cases}$$

prueba que toda álgebra de $d)$ es isomorfa a una de $b)$.

Luego el estudio se reduce a las familias $a)$ y $b)$. Es evidente que son no isomorfas entre sí pues para las álgebras de $a)$ se tiene que $[e_1, e_1] \neq 0$ pero para las álgebras de $b)$ no existe un vector característico e_1 tal que $[e_1, e_1] \neq 0$. $\square$

Nota 2.0.10 Se llamará álgebra de **Tipo I** a cada álgebra de *a*) y álgebra de **Tipo II** a cada álgebra de *b*).

2.1 Álgebras de Leibniz 3-filiformes graduadas naturalmente de Tipo I

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz 3-filiforme graduada naturalmente, e_1 un vector característico y $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ una base adaptada de $\mathcal{L}$. Si $\mathcal{L}$ es de Tipo I se sigue que

$$R_{e_1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} J_{n-3} & & & \\ \hline & J_1 & & \\ \hline & & J_1 & \\ & & & J_1 \end{array} \right)$$

es decir,

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_j, e_1] = 0, & n-3 \leq j \leq n \end{cases}$$

Se considera la graduación natural $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_3 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_k$ donde $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}^i/\mathcal{L}^{i+1}$. Dicha graduación debe verificar que $\mathcal{L}^{n-3} \neq \{0\}$ y $\mathcal{L}^{n-2} = \{0\}$. Por tanto, se sigue que $k = n-3$. Es decir, se tiene que

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^2 \supset < e_2, e_3, e_4, \cdots, e_{n-3} > \\ &\mathcal{L}^3 \supset < e_3, e_4, \cdots, e_{n-3} > \\ &\qquad \vdots \\ &\mathcal{L}^i \supset < e_i, e_{i+1}, \cdots, e_{n-3} > \\ &\qquad \vdots \\ &\mathcal{L}^{n-3} \supset < e_{n-3} > \\ &\mathcal{L}^{n-2} = \{0\} \end{aligned}$$

y puesto que $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}^i/\mathcal{L}^{i+1}$, se tiene que $\mathcal{L}_i \supset < e_i >$, $1 \leq i \leq n-3$. Entonces, faltaría por conocer las posiciones en los subespacios de la graduación de los vectores e_{n-2}, e_{n-1} y e_n.

Se denotará por r_1, r_2 y r_3 las posiciones en los subespacios de la graduación natural de los vectores e_{n-2}, e_{n-1} y e_n, respectivamente. Esto es, $e_{n-2} \in \mathcal{L}_{r_1}$, $e_{n-1} \in \mathcal{L}_{r_2}$ y $e_n \in \mathcal{L}_{r_3}$. Obviamente, se puede considerar que $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq n$ (en otro caso se intercambian). Además, si $r_3 \geq n-2$ se tiene que $c(\mathcal{L}) \neq (n-3, 1, 1, 1)$

luego se tiene que los valores admisibles para r_1, r_2 y r_3 son los comprendidos entre 1 y $n-3$, $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq n-3$. Se usará $\mu_{(I,r_1,r_2,r_3)}$ para indicar que es un álgebra de Leibniz 3-filiforme graduada naturalmente de Tipo I ocupando los vectores e_{n-2}, e_{n-1}, e_n las posiciones r_1, r_2, r_3 en la graduación natural.

2.1.1 Valores admisibles de r_1, r_2 y r_3

Se va a probar en esta sección que los valores admisibles para (r_1, r_2, r_3) son $\{(1,1,1),$ $(1,1,2), (1,2,2), (1,2,3)\}$, siendo escindidas las álgebras correspondientes a los valores $r_1 = r_2 = r_3 = 1$.

Lema 2.1.1 *Los valores admisibles de r_1, r_2, y r_3 son*

$$(r_1, r_2, r_3) \in \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,2), (1,2,3)\}$$

Demostración.

• $\boxed{r_1 = 1}$. Supóngase que $r_1 > 1$. Si $r_1 > 1 \Rightarrow 1 < r_1 \leq r_2 \leq r_3$. Se tiene que e_{n-2} **no** es generador ($e_{n-2} \notin \mathcal{L} - \mathcal{L}^2 = \mathcal{L}_1$) ni, por tanto, e_{n-1}, e_n.

Como $\mathcal{L}_{r_1} \supset < e_{r_1}, e_{n-2} > \Rightarrow e_{n-2}$ ha de ser generado por productos del tipo $[e_i, e_{r_1-i}]$, $1 \leq i \leq r_1 - 1$ (es decir, al ser $e_{n-2} \in \mathcal{L}_{r_1}$ ha de ser generado por elementos de subespacios homogéneos "anteriores" al $\mathcal{L}_{r_1}$).

Se tienen tres posibilidades:

1) $r_1 = r_2 = r_3 = r$. En este caso

$$[e_i, e_{r-i}] = \alpha_{i,r-i}e_r + \beta_i e_{n-2} + \gamma_i e_{n-1} + \delta_i e_n, \; 1 \leq i \leq r_1 - 1$$

2) $r_1 = r_2 = r < r_3$. En este caso

$$[e_i, e_{r-i}] = \alpha_{i,r-i}e_r + \beta_i e_{n-2} + \gamma_i e_{n-1}, \; 1 \leq i \leq r_1 - 1$$

3) $r_1 < r_2$. En este caso

$$[e_i, e_{r_1-i}] = \alpha_{i,r_1-i}e_{r_1} + \beta_i e_{n-2}, \; 1 \leq i \leq r_1 - 1$$

Para este caso se tomará $r_1 = r$.

Nótese que $\{e_2, e_3, \cdots, e_{r-1}\} \subset \{e_2, e_3, \cdots, e_{n-3}\} \subset R(\mathcal{L})$ pues $[e_1, e_1] = e_2 \in \mathcal{I}$ e $\mathcal{I} \subset R(\mathcal{L})$ es ideal por lo cual $[e_i, e_1] = e_{i+1} \subset R(\mathcal{L}), \quad 2 \leq i \leq n-3$.

Se va a hacer un estudio conjunto para los tres casos.

- $1 \leq i \leq r-2 \Rightarrow 2 \leq r-i \leq r-1 \Rightarrow e_{r-i} \in \{e_2, e_3, \cdots, e_{r-1}\} \subset \{e_2, e_3, \cdots, e_{n-3}\}$ todos estos vectores están en $R(\mathcal{L})$

$$\Rightarrow [e_i, e_{r-i}] = 0, \ 1 \leq i \leq r-2 \Rightarrow \beta_i = 0, \ 1 \leq i \leq r-2$$

- $i = r-1$ se tiene que $[e_{r-1}, e_1] = \alpha_{r-1,1} e_r + \beta_{r-1} e_{n-2} + \cdots$, pero

$$[e_{r-1}, e_1] = e_r \Rightarrow \alpha_{r-1,1} = 1 \quad \text{y} \quad \beta_{r-1} = 0$$

Luego $e_{n-2} \notin \mathcal{L}^2 \Rightarrow e_{n-2} \in \mathcal{L}_1 \Rightarrow r_1 = 1$.

A continuación se probará que $r_2 \in \{1, 2\}$.

- $\boxed{r_2 \in \{1, 2\}}$.

De nuevo, por reducción al absurdo, supóngase que $2 < r_2 \leq r_3$ y $r = r_2$. Del mismo modo, e_{n-1} habrá de ser generado por productos de los tipos

$$[e_i, e_{r-i}], \ 1 \leq i \leq r-1, \quad \text{ó} \quad [e_{n-2}, e_{r-1}], \quad \text{ó} \quad [e_{r-1}, e_{n-2}]$$

Se presentan dos posibilidades

1) Si $2 < r_2 = r_3 = r$, se tiene que $< e_r, e_{n-1} > \subset \mathcal{L}_r$. Teniendo en cuenta los productos que han de generar a e_{n-1},
   $[e_i, e_{r-i}] = \alpha_{i,r-i} e_r + \beta_i e_{n-1} + \gamma_i e_n, \quad 1 \leq i \leq r-1$
   $[e_{n-2}, e_{r-1}] = \overline{\alpha}_{r-1} e_r + \overline{\beta} e_{n-1} + \overline{\gamma} e_n$
   $[e_{r-1}, e_{n-2}] = \overline{\overline{\alpha}}_{r-1} e_r + \overline{\overline{\beta}} e_{n-1} + \overline{\overline{\gamma}} e_n$
   De nuevo $e_{r-i} \in \{e_2, e_3, \cdots, e_{r-1}\} \subset R(\mathcal{L})$ si $1 \leq i \leq r-2$
   $\Rightarrow \beta_i = 0, \ 1 \leq i \leq r-2$
   Si $i = r-1$ resulta $[e_{r-1}, e_1] = e_r$, pero $[e_{r-1}, e_1] = e_r \Rightarrow \beta_{r-1} = 0$
   Por otra parte,

$\mathcal{L}(e_{n-2}, e_{r-2}, e_1) \Rightarrow \overline{\beta} = 0$

$\mathcal{L}(e_{r-2}, e_1, e_{n-2}) \Rightarrow \overline{\overline{\beta}} = 0$

Nótese que e_{r-2} tiene sentido porque se supone $r \geq 3$.

2) Si $2 < r_2 = r < r_3$, $< e_r, e_{n-1} > \subset \mathcal{L}_r$. Este caso es igual que el anterior pero ahora $\gamma_i = \overline{\gamma} = \overline{\overline{\gamma}} = 0$.

$[e_i, e_{r-i}] = \alpha_{i,r-i}e_r + \beta_i e_{n-1}, \quad 1 \leq i \leq r-1$

$[e_{n-2}, e_{r-1}] = \overline{\alpha}_{r-1}e_r + \overline{\beta}e_{n-1}$

$[e_{r-1}, e_{n-2}] = \overline{\overline{\alpha}}_{r-1}e_r + \overline{\overline{\beta}}e_{n-1}$

Un razonamiento similar permite obtener los mismos resultados.

Luego $r_2 \not> 2 \Rightarrow r_2 \in \{1, 2\}$

Finalmente, se va a probar que $r_3 \in \{1, 2, 3\}$.

- $\boxed{r_3 \in \{1, 2, 3\}}$.

1). Si $r_1 = r_2 = 1$ y $r_3 = r$, se va a probar que $r_3 \in \{1, 2\}$.

Si $r_3 = r > 2 \Rightarrow e_n$ estará generado por los productos de la forma

$$\begin{array}{ll} [e_i, e_{r-i}], & 1 \leq i \leq r-1 \\ [e_j, e_{r-1}], & j \in \{n-2, n-1\} \\ [e_{r-1}, e_j], & j \in \{n-2, n-1\} \end{array}$$

es decir,

$$\begin{array}{ll} [e_i, e_{r-i}] = \alpha_{i,r-i}e_r + \beta_i e_n, & 1 \leq i \leq r-1 \\ [e_{n-2}, e_{r-1}] = \alpha_{n-2,r-1}e_r + \beta_{n-2}e_n & \\ [e_{n-1}, e_{r-1}] = \alpha_{n-1,r-1}e_r + \beta_{n-1}e_n & \\ [e_{r-1}, e_{n-2}] = \alpha_{r-1,n-2}e_r + \overline{\beta}_{n-2}e_n & \\ [e_{r-1}, e_{n-1}] = \alpha_{r-1,n-1}e_r + \overline{\beta}_{n-2}e_n & \end{array}$$

De nuevo, $e_i \in R(\mathcal{L})$ si $1 \leq i \leq r-2$ y $[e_{r-1}, e_1] = e_r \Rightarrow \beta_i = 0, \; 1 \leq i \leq r-1$.

Usando la identidad de Leibniz se obtiene que

$\mathcal{L}(e_{n-2}, e_{r-2}, e_1) \Rightarrow \beta_{n-2} = 0$

$\mathcal{L}(e_{n-1}, e_{r-2}, e_1) \Rightarrow \beta_{n-1} = 0$

$\mathcal{L}(e_{r-2}, e_{n-2}, e_1) \Rightarrow \overline{\beta}_{n-2} = 0$

$\mathcal{L}(e_{r-2}, e_{n-1}, e_1) \Rightarrow \overline{\beta}_{n-1} = 0$

Luego, si $r_1 = r_2 = 1 \Rightarrow r_3 \in \{1, 2\}$. Además, no se puede deducir de aquí que $r_3 = 1$ porque para que tenga sentido e_{r-2} ha de ser $r > 2$.

2). Sean $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = r$. Se va a probar que, en tal caso, es $r_3 \in \{2, 3\}$

Supóngase $r > 3$. Se tiene ahora que

$$\begin{array}{ll} \mathcal{L}_1 < e_1, e_{n-2} > & \\ \mathcal{L}_2 =< e_2, e_{n-1} > & \\ \mathcal{L}_i =< e_i > & 3 \leq i \leq n-3, \quad i \neq r \\ \mathcal{L}_r =< e_r, e_n >, & \end{array}$$

En este caso, los productos que pueden generar e_n son

$$\begin{array}{ll} [e_i, e_{r-i}] = \alpha_{i,r-i} e_r + \beta_i e_n, & 1 \leq i \leq r-1 \\ [e_{n-2}, e_{r-1}] = \alpha_{n-2,r-1} e_r + \beta_{n-2} e_n & \\ [e_{n-1}, e_{r-2}] = \alpha_{n-1,r-2} e_r + \beta_{n-1} e_n & \\ [e_{r-1}, e_{n-2}] = \alpha_{r-1,n-2} e_r + \overline{\beta}_{n-2} e_n & \\ [e_{r-2}, e_{n-1}] = \alpha_{r-2,n-1} e_r + \overline{\beta}_{n-1} e_n & \end{array}$$

Un razonamiento similar a los casos anteriores prueba que $\beta_i = 0, \quad 1 \leq i \leq r-1$.

Haciendo uso, de nuevo, de la identidad de Leibniz se llega a

$\mathcal{L}(e_{n-1}, e_{r-3}, e_1) \Rightarrow \beta_{n-1} = 0$

$\mathcal{L}(e_{n-2}, e_{r-2}, e_1) \Rightarrow \beta_{n-2} = 0$

$\mathcal{L}(e_{r-2}, e_1, e_{n-2}) \Rightarrow \overline{\beta}_{n-2} = 0$

$\mathcal{L}(e_{r-3}, e_1, e_{n-1}) \Rightarrow \overline{\beta}_{n-1} = 0$

Luego, si $(r_1, r_2) = (1, 2) \Rightarrow r_3 \leq 3$. □

2.1.2 Álgebras de Leibniz $\mu_{(I,1,1,1)}$

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz 3-filiforme graduada naturalmente de dimensión $n \geq 8$ de Tipo I y tal que los vectores e_{n-2}, e_{n-1} y e_n están en el primer subespacio de la graduación natural, esto es,

$$\begin{array}{ll} \mathcal{L}_1 =< e_1, e_{n-2}, e_{n-1}, e_n > & \\ \mathcal{L}_i =< e_i >, & 2 \leq i \leq n-3 \end{array}$$

1.– *Álgebras de Leibniz escindidas.*

Proposición 2.1.2 *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz nulfiliforme graduada naturalmente $(n-3)$-dimensional de Tipo I. Entonces $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \oplus \mathbf{C}^3$ es un álgebra de Leibniz 3-filiforme graduada naturalmente de n-dimensional Tipo I.*

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz 1-filiforme graduada naturalmente $(n-2)$-dimensional de Tipo I. Entonces $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \oplus \mathbf{C}^2$ es un álgebra de Leibniz 3-filiforme graduada naturalmente de n-dimensional Tipo I.

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz 2-filiforme graduada naturalmente $(n-1)$-dimensional de Tipo I. Entonces $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \oplus \mathbf{C}$ es un álgebra de Leibniz 3-filiforme graduada naturalmente de n-dimensional Tipo I.

Puesto que son conocidas las nulfiliformes, las 1-filiformes y las 2-filiformes (capítulo anterior) graduadas naturalmente y se puede deducir la clasificación completa de las 3-filiformes graduadas naturalmente escindidas de Tipo I.

A continuación se va a estudiar las álgebras de Tipo I con $(r_1, r_2, r_3) = (1, 1, 1)$, obteniendo que son todas escindidas.

Proposición 2.1.3 *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz de tipo $\mu_{(I,1,1,1)}$. Entonces $\mathcal{L}$ es un álgebra escindida de alguno de los tipos anteriores.*

Demostración. Si $\mathcal{L}$ está en las condiciones del enunciado, la ley de la familia puede ser expresada en una base adaptada $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ mediante:

$$\begin{cases}
[e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\
[e_i, e_{n-2}] = \alpha_{i,n-2}e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\
[e_{n-2}, e_{n-2}] = \alpha_{n-2,n-2}e_2 & \\
[e_{n-1}, e_{n-2}] = \alpha_{n-1,n-2}e_2 & \\
[e_n, e_{n-2}] = \alpha_{n,n-2}e_2 & \\
[e_i, e_{n-1}] = \alpha_{i,n-1}e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\
[e_{n-2}, e_{n-1}] = \alpha_{n-2,n-1}e_2 & \\
[e_{n-1}, e_{n-1}] = \alpha_{n-1,n-1}e_2 & \\
[e_n, e_{n-1}] = \alpha_{n,n-1}e_2 & \\
[e_i, e_n] = \alpha_{i,n}e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\
[e_{n-2}, e_n] = \alpha_{n-2,n}e_2 & \\
[e_{n-1}, e_n] = \alpha_{n-1,n}e_2 & \\
[e_n, e_n] = \alpha_{n,n}e_2 &
\end{cases}$$

Usando la identidad de Leibniz se tiene que

(1) $\mathcal{L}(e_i, e_1, e_{n-2}),\quad 1 \leq i \leq n-5 \Rightarrow \alpha_{i+1,n-2} = \alpha_{i,n-2}$
$\Rightarrow \alpha_{i,n-2} = \alpha_{n-2},\quad 1 \leq i \leq n-4$

(2) $\mathcal{L}(e_i, e_1, e_{n-1}),\quad 1 \leq i \leq n-5 \Rightarrow \alpha_{i+1,n-1} = \alpha_{i,n-1}$
$\Rightarrow \alpha_{i,n-1} = \alpha_{n-1},\quad 1 \leq i \leq n-4$

(3) $\mathcal{L}(e_i, e_1, e_n),\quad 1 \leq i \leq n-5 \Rightarrow \alpha_{i+1,n} = \alpha_{i,n}$
$\Rightarrow \alpha_{i,n} = \alpha_n,\quad 1 \leq i \leq n-4$

Sean ahora $j, h \in \{n-2, n-1, n\}$, se considera la identidad de Leibniz dada por $\mathcal{L}(e_j, e_h, e_1)) \Rightarrow \alpha_{j,h} = 0$, $j, h \in \{n-2, n-1, n\}$, es decir

$$\begin{aligned}
\alpha_{n-2,n-2} = \alpha_{n-1,n-2} = \alpha_{n,n-2} = 0 \\
\alpha_{n-2,n-1} = \alpha_{n-1,n-1} = \alpha_{n,n-1} = 0 \\
\alpha_{n-2,n} = \alpha_{n-1,n} = \alpha_{n,n} = 0
\end{aligned}$$

Resulta la familia

$$\begin{cases}
[e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\
[e_i, e_{n-2}] = \alpha_{n-2}e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\
[e_i, e_{n-1}] = \alpha_{n-1}e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\
[e_i, e_n] = \alpha_n e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4
\end{cases}$$

Los casos a distinguir son los siguientes:

- Si $\alpha_{n-2} = \alpha_{n-1} = \alpha_n = 0$ se tendría un álgebra escindida que ya se ha clasificado.
- Si existen $\alpha_{j_1} = 0 = \alpha_{j_2}$ y $\alpha_{j_3} \neq 0$, con $\{j_1, j_2, j_3\} = \{n-2, n-1, n\}$ se puede siempre suponer, sin pérdida de generalidad que $\alpha_{n-1} = \alpha_n = 0$ (una simple reordenación) y se obtiene de nuevo un álgebra escindida.
- Si existen $\alpha_{j_1} = 0$ y $\alpha_{j_2} \neq 0 \neq \alpha_{j_3}$, con $\{j_1, j_2, j_3\} = \{n-2, n-1, n\}$ se puede siempre suponer que $\alpha_n = 0$ y se obtiene un álgebra escindida.
- Si $\alpha_{n-2} \neq 0$, $\alpha_{n-1} \neq 0$ y $\alpha_n \neq 0$, con el cambio de base dado por

$$\begin{cases} e'_{n-1} = \alpha_{n-2}e_{n-1} - \alpha_{n-1}e_{n-2} \\ e'_n = \alpha_{n-2}e_n - \alpha_n e_{n-2} \end{cases}$$

  se llega a un álgebra escindida.

En todos los casos se obtienen álgebras escindidas. □

2.– *Álgebras de Leibniz no escindidas.*

No existen álgebras de Leibniz 3-filiformes graduadas naturalmente $\mu_{(I,1,1,1)}$ no escindidas.

2.1.3 Álgebras de Leibniz $\mu_{(I,1,1,2)}$

En esta sección se clasificarán las álgebras de Leibniz 3-filiformes graduadas naturalmente de dimensión n, $n \geq 8$, de Tipo I y tal que los vectores e_{n-2}, e_{n-1} están en el primer subespacio y e_n en el segundo subespacio de la graduación natural, es decir,

$$< e_1, e_{n-2}, e_{n-1} > \oplus < e_2, e_n > \oplus < e_3 > \cdots \oplus < e_{n-4} > \oplus < e_{n-3} >$$

Como las álgebras de Leibniz 3-filiformes graduadas naturalmente escindidas Tipo I están ya consideradas en la sección anterior nos limitaremos aquí al estudio de las no escindidas.

Teorema 2.1.4 *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz de tipo $\mu_{(I,1,1,2)}$. Entonces $\mathcal{L}$ es isomorfa a una cuya ley, respecto de una base adaptada $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, está determinada por:*

$\mu^{1,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}_{(I,1,1,2)}|_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\neq 0}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_2 + e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \lambda_1 e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = \lambda_2 e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \lambda_3 e_n & \end{cases}$$

$\mu^{2,\lambda_1,\lambda_2}_{(I,1,1,2)}|_{\lambda_1\lambda_2\neq 0}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = \lambda_1 e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \lambda_2 e_n & \end{cases}$$

$\mu^{3,\lambda_1,\lambda_2}_{(I,1,1,2)}|_{\lambda_1\lambda_2\neq 0}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_2 + e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \lambda_1 e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = \lambda_2 e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

$\mu^{4}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

$\mu^{5}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

$\mu^{6}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

$\mu^{7}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = -e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

$\mu^{8}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_2 - e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = -e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

$\mu^{9}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_2 + e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-4 \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

$\mu^{10}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_2 + e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

$\mu^{11}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

$\mu^{12}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

$\mu^{13,\lambda_1,\lambda_2}_{(I,1,1,2)}|_{\lambda_1\neq 0,\lambda_2\neq 0,-1}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_2 + e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = \lambda_1 e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = \lambda_2 e_n & \end{cases}$$

$\mu^{14,\lambda_1,\lambda_2}_{(I,1,1,2)}|_{\lambda_1\neq 0,\lambda_2\neq 0,-1}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = \lambda_1 e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = \lambda_2 e_n & \end{cases}$$

$\mu^{15,\lambda_1}_{(I,1,1,2)}|_{\lambda_1\neq 0}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = \lambda_1 e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -e_n & \end{cases}$$

$\mu^{16,\lambda_1}_{(I,1,1,2)}|_{\lambda_1\neq 0}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_2 + e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \lambda_1 e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -e_n & \end{cases}$$

$\mu^{17}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -e_n & \end{cases}$$

$\mu^{18}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -e_n & \end{cases}$$

$\mu^{19}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_2 + e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

$\mu^{20}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_2 + e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-4 \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

$\mu^{21}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

$\mu^{22}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

$\mu^{23}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

$\mu^{24,\lambda}_{(I,1,1,2)}\{|_{\lambda \neq 0,-1}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = \lambda e_n & \end{cases}$$

$\mu^{25,\lambda}_{(I,1,1,2)} \{|_{\lambda\neq 0,-1}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = \lambda e_n & \end{cases}$$

$\mu^{26,\lambda}_{(I,1,1,2)} \{|_{\lambda\neq 0,-1}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = \lambda e_n & \end{cases}$$

$\mu^{27}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -e_n & \end{cases}$$

$\mu^{28}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -e_n & \end{cases}$$

$\mu^{29}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -e_n & \end{cases}$$

$\mu^{30}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -e_n & \end{cases}$$

$\mu^{31}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -e_n & \end{cases}$$

$\mu^{33}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta_4 e_n & \end{cases}$$

$\mu^{34}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n \end{cases}$$

$\mu^{35}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_n \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

Demostración. Si $\mathcal{L}$ está en las condiciones del enunciado la ley de la familia viene dada por:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = \alpha_{1,n-2}e_2 + \beta_{1,n-2}e_n \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha_{i,n-2}e_{i+1}, & 2 \le i \le n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \alpha_{n-2,n-2}e_2 + \beta_{n-2,n-2}e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \alpha_{n-1,n-2}e_2 + \beta_{n-1,n-2}e_n \\ [e_n, e_{n-2}] = \alpha_{n,n-2}e_3 \\ [e_1, e_{n-1}] = \alpha_{1,n-1}e_2 + \beta_{1,n-1}e_n \\ [e_i, e_{n-1}] = \alpha_{i,n-1}e_{i+1}, & 2 \le i \le n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = \alpha_{n-2,n-1}e_2 + \beta_{n-2,n-1}e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \alpha_{n-1,n-1}e_2 + \beta_{n-1,n-1}e_n \\ [e_n, e_{n-1}] = \alpha_{n,n-1}e_3 \\ [e_i, e_n] = \alpha_{i,n}e_{i+2}, & 1 \le i \le n-5 \\ [e_{n-2}, e_n] = \alpha_{n-2,n}e_3 \\ [e_{n-1}, e_n] = \alpha_{n-1,n}e_3 \\ [e_n, e_n] = \alpha_{n,n}e_4 \end{cases}$$

Usando ahora la identidad de Leibniz se tiene que

(1) $\mathcal{L}(e_i, e_{n-2}, e_1)$, $1 \le i \le n-5 \Rightarrow \alpha_{i+1,n-2} = \alpha_{i,n-2}$

$\Rightarrow \alpha_{i,n-2} = \alpha_{n-2}$, $1 \le i \le n-4$

(2) $\mathcal{L}(e_i, e_{n-1}, e_1)$, $1 \le i \le n-5 \Rightarrow \alpha_{i+1,n-1} = \alpha_{i,n-1}$

$\Rightarrow \alpha_{i,n-1} = \alpha_{n-1}$, $1 \le i \le n-4$

(3) $\mathcal{L}(e_i, e_n, e_1)$, $1 \le i \le n-6 \Rightarrow \alpha_{i+1,n} = \alpha_{i,n}$

$\Rightarrow \alpha_{i,n} = \alpha_n$, $1 \le i \le n-5$

(5) $\mathcal{L}(e_1, e_1, e_{n-2}) \Rightarrow \alpha_n \beta_{1,n-2} = 0$

(6) $\mathcal{L}(e_1, e_1, e_{n-1}) \Rightarrow \alpha_n \beta_{1,n-1} = 0$

(7) $\mathcal{L}(e_1, e_{n-2}, e_{n-2}) \Rightarrow \alpha_n \beta_{n-2,n-2} = 0$

Sean ahora $j, h \in \{n-2, n-1, n\}$, se considera la identidad de Leibniz dada por $\mathcal{L}(e_j, e_h, e_1)) \Rightarrow \alpha_{j,h} = 0$, $j, h \in \{n-2, n-1, n\}$, es decir

$$\begin{array}{l} \alpha_{n-2,n-2} = \alpha_{n-1,n-2} = \alpha_{n,n-2} = 0 \\ \alpha_{n-2,n-1} = \alpha_{n-1,n-1} = \alpha_{n,n-1} = 0 \\ \alpha_{n-2,n} = \alpha_{n-1,n} = \alpha_{n,n} = 0 \end{array}$$

(8) $\mathcal{L}(e_1, e_{n-2}, e_{n-1}) \Rightarrow \alpha_n \beta_{n-2,n-1} = 0$

(9) $\mathcal{L}(e_1, e_{n-1}, e_{n-2}) \Rightarrow \alpha_n \beta_{n-1,n-2} = 0$

(10) $\mathcal{L}(e_1, e_{n-1}, e_{n-1}) \Rightarrow \alpha_n \beta_{n-1,n-1} = 0$

De (5) hasta (10) se sigue que $\alpha_n = 0$ pues si $\alpha_n \neq 0 \Rightarrow \beta_{i,j} = 0$, $\forall i, j$ lo que implica que $e_n \notin \mathcal{L}^2$ y por tanto $r_3 = 1$ en contra de lo supuesto en esta sección pues es $r_3 = 2$.

Resulta entonces la ley

$$\left\{ \begin{array}{ll} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = \alpha_1 e_2 + \beta_1 e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha_1 e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \beta_2 e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = \alpha_2 e_2 + \beta_4 e_n & \\ [e_i, e_{n-1}] = \alpha_2 e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = \beta_5 e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \beta_6 e_n & \end{array} \right.$$

con $\beta_i \neq 0$ para algún $i \in \{1, 2, \cdots, 6\}$.

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer además que $\alpha_2 = 0$. En efecto:

- Si $\alpha_2 = 0$ obvio.
- Si $\alpha_2 \neq 0$ y $\alpha_1 = 0$ el cambio de base dado por:

$$\begin{cases} e'_i = e_i, & i \neq n-1, n-2 \\ e'_{n-1} = e_{n-2} \\ e'_{n-2} = e_{n-1} \end{cases}$$

permite suponer $\alpha_2 = 0$

- Si $\alpha_2 \neq 0 \neq \alpha_1$ el cambio de base dado por:

$$\begin{cases} e'_i = e_i, & i \neq n-1 \\ e'_{n-1} = -\alpha_2 e_{n-2} + \alpha_1 e_{n-1} \end{cases}$$

permite suponer $\alpha_2 = 0$

Con todo esto la ley del álgebra puede ser expresada por medio de los siguientes productos:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = \alpha e_2 + \beta_1 e_n \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \beta_2 e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta_4 e_n \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = \beta_5 e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \beta_6 e_n \end{cases}$$

con $\beta_i \neq 0$ para algún $i \in \{1, 2, \cdots, 6\}$.

Realizando ahora un cambio de base genérico dado por

$$\begin{aligned} e'_1 &= A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 + \cdots + A_{n-3} e_{n-3} + A_{n-2} e_{n-2} + A_{n-1} e_{n-1} + A_n e_n \\ e'_2 &= (A_1 + A_{n-2}\alpha)(A_1 e_2 + A_2 e_3 + \cdots + A_{n-4} e_{n-3}) + (A_1(A_{n-2}\beta_1 + A_{n-1}\beta_4) + \\ &\quad + A_{n-2}(A_{n-2}\beta_2 + A_{n-1}\beta_5) + A_{n-1}(A_{n-2}\beta_3 + A_{n-1}\beta_6))e_n \\ e'_3 &= (A_1 + A_{n-2}\alpha)^2 (A_1 e_3 + A_2 e_4 + \cdots + A_{n-5} e_{n-3}) \\ e'_4 &= (A_1 + A_{n-2}\alpha)^3 (A_1 e_4 + A_2 e_5 + \cdots + A_{n-6} e_{n-3}) \\ &\vdots \\ e'_{n-4} &= (A_1 + A_{n-2}\alpha)^{n-5} (A_1 e_{n-4} + A_2 e_{n-3}) \\ e'_{n-3} &= (A_1 + A_{n-2}\alpha)^{n-4} A_1 e_{n-3} \end{aligned}$$

$$e'_{n-2} = B_1e_1 + B_2e_2 + B_3e_3 + \cdots + B_{n-3}e_{n-3} + B_{n-2}e_{n-2} + B_{n-1}e_{n-1} + B_ne_n$$
$$e'_{n-1} = C_1e_1 + C_2e_2 + C_3e_3 + \cdots + C_{n-3}e_{n-3} + C_{n-2}e_{n-2} + C_{n-1}e_{n-1} + C_ne_n$$
$$e'_{n} = D_1e_1 + D_2e_2 + D_3e_3 + \cdots + D_{n-3}e_{n-3} + D_{n-2}e_{n-2} + D_{n-1}e_{n-1} + D_ne_n$$

con $A_1(A_1 + A_{n-2}\alpha) \neq 0$.

Para no salirse de la familia se ha de verificar que:

$$[e'_{n-2}, e'_1] = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} B_i = 0, & 1 \leq i \leq n-4 \\ B_{n-2}(A_{n-2}\beta_2 + A_{n-1}\beta_5) + B_{n-1}(A_{n-2}\beta_3 + A_{n-1}\beta_6) = 0 \end{cases}$$

$$[e'_{n-1}, e'_1] = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_i = 0, & 1 \leq i \leq n-4 \\ C_{n-2}(A_{n-2}\beta_2 + A_{n-1}\beta_5) + C_{n-1}(A_{n-2}\beta_3 + A_{n-1}\beta_6) = 0 \end{cases}$$

$$[e'_{n}, e'_1] = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} D_i = 0, & 1 \leq i \leq n-4 \\ D_{n-2}(A_{n-2}\beta_2 + A_{n-1}\beta_5) + D_{n-1}(A_{n-2}\beta_3 + A_{n-1}\beta_6) = 0 \end{cases}$$

$$[e'_{n-4}, e'_{n-1}] = 0 \quad \Rightarrow \quad C_{n-2}\alpha = 0$$

Además, el determinante del cambio ha de ser distinto de cero, es decir,

$$A_1(A_1 + A_{n-2}\alpha)\det \begin{pmatrix} B_{n-2} & C_{n-2} & D_{n-2} \\ B_{n-1} & C_{n-1} & D_{n-1} \\ B_n & C_n & D_n \end{pmatrix} \neq 0$$

Los nuevos parámetros resultan:

$$\alpha' = \frac{B_{n-2}\alpha}{A_1 + A_{n-2}\alpha}$$

$$\beta'_1 = \frac{A_1(B_{n-2}\beta_1 + B_{n-1}\beta_4) + A_{n-2}(B_{n-2}\beta_2 + B_{n-1}\beta_5) + A_{n-1}(B_{n-2}\beta_3 + B_{n-1}\beta_6)}{D_n}$$

$$\beta'_2 = \frac{B_{n-2}^2\beta_2 + B_{n-2}B_{n-1}(\beta_3 + \beta_5) + B_{n-1}^2\beta_6}{D_n}$$

$$\beta'_3 = \frac{B_{n-2}C_{n-2}\beta_2 + B_{n-1}C_{n-2}\beta_5 + B_{n-2}C_{n-1}\beta_3 + B_{n-1}C_{n-1}\beta_6}{D_n}$$

$$\beta_4' = \frac{A_1(C_{n-2}\beta_1 + C_{n-1}\beta_4) + A_{n-2}(C_{n-2}\beta_2 + C_{n-1}\beta_5) + A_{n-1}(C_{n-2}\beta_3 + C_{n-1}\beta_6)}{D_n}$$
$$\beta_5' = \frac{B_{n-2}C_{n-2}\beta_2 + B_{n-2}C_{n-1}\beta_5 + B_{n-1}C_{n-2}\beta_3 + B_{n-1}C_{n-1}\beta_6}{D_n}$$
$$\beta_6' = \frac{C_{n-2}^2\beta_2 + C_{n-2}C_{n-1}(\beta_3 + \beta_5) + C_{n-1}^2\beta_6}{D_n}$$

con $\beta_i' D_{n-3} = 0$, $\beta_i' D_{n-2} = 0$, $\beta_i' D_{n-1} = 0$, $1 \leq i \leq 6$ pero se ha de tener algún $\beta_i' \neq 0$ lo que lleva a $D_{n-3} = D_{n-2} = D_{n-1} = 0$.

Además, se tenían algunas restricciones,

$$\begin{array}{ll}
(1) & C_{n-2}\alpha = 0 \\
(2) & B_{n-2}(A_{n-2}\beta_2 + A_{n-1}\beta_5) + B_{n-1}(A_{n-2}\beta_3 + A_{n-1}\beta_6) = 0 \\
(3) & C_{n-2}(A_{n-2}\beta_2 + A_{n-1}\beta_5) + C_{n-1}(A_{n-2}\beta_3 + A_{n-1}\beta_6) = 0 \\
(4) & A_1(A_1 + A_{n-2}\alpha)D_n(B_{n-2}C_{n-1} - B_{n-1}C_{n-2}) \neq 0
\end{array}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (2) y (3) se llega a que

$$A_{n-2}\beta_2 + A_{n-1}\beta_5 = 0 = A_{n-2}\beta_3 + A_{n-1}\beta_6$$

pues se trataría de un sistema de ecuaciones homogéneo donde la única solución es la nula. Esto permite simplificar algunas expresiones:

$$\alpha' = \frac{B_{n-2}\alpha}{A_1 + A_{n-2}\alpha}$$
$$\beta_1' = \frac{A_1(B_{n-2}\beta_1 + B_{n-1}\beta_4) + (A_{n-1}B_{n-2} - A_{n-2}B_{n-1})(\beta_3 - \beta_5)}{D_n}$$
$$\beta_2' = \frac{B_{n-2}^2\beta_2 + B_{n-2}B_{n-1}(\beta_3 + \beta_5) + B_{n-1}^2\beta_6}{D_n}$$
$$\beta_3' = \frac{B_{n-2}C_{n-2}\beta_2 + B_{n-1}C_{n-2}\beta_5 + B_{n-2}C_{n-1}\beta_3 + B_{n-1}C_{n-1}\beta_6}{D_n}$$
$$\beta_4' = \frac{A_1(C_{n-2}\beta_1 + C_{n-1}\beta_4) + (A_{n-1}C_{n-2} - A_{n-2}C_{n-1})(\beta_3 - \beta_5)}{D_n}$$
$$\beta_5' = \frac{B_{n-2}C_{n-2}\beta_2 + B_{n-2}C_{n-1}\beta_5 + B_{n-1}C_{n-2}\beta_3 + B_{n-1}C_{n-1}\beta_6}{D_n}$$
$$\beta_6' = \frac{C_{n-2}^2\beta_2 + C_{n-2}C_{n-1}(\beta_3 + \beta_5) + C_{n-1}^2\beta_6}{D_n}$$

con

$$
\begin{aligned}
&C_{n-2}\alpha = 0\\
&A_{n-2}\beta_2 + A_{n-1}\beta_5 = 0\\
&A_{n-2}\beta_3 + A_{n-1}\beta_6 = 0\\
&A_1(A_1 + A_{n-2}\alpha)D_n(B_{n-2}C_{n-1} - B_{n-1}C_{n-2}) \neq 0
\end{aligned}
$$

Efectuando algunos cálculos se tiene que las siguientes nulidades son invariantes:

$$
\begin{aligned}
&(I) \quad \beta_3' - \beta_5' = \frac{(B_{n-2}C_{n-1} - B_{n-1}C_{n-2})(\beta_3 - \beta_5)}{D_n}\\
&(II) \quad \beta_2'\beta_6' - \beta_3'\beta_5' = \frac{(B_{n-2}C_{n-1} - B_{n-1}C_{n-2})^2(\beta_2\beta_6 - \beta_3\beta_5)}{D_n}\\
&(II) \quad \beta_1'\beta_6' - \beta_2'\beta_4' = \frac{(B_{n-2}C_{n-1} - B_{n-1}C_{n-2})^2(\beta_1\beta_6 - \beta_2\beta_4)}{D_n}
\end{aligned}
$$

Esto, permite distinguir los siguientes casos:

• **Caso A** En este caso, sea $\alpha \neq 0$ lo que implica que $C_{n-2} = 0$. Es fácil ver que en este caso se tiene que la nulidad de β_6 es invariante.

⋆ **Caso A1** $\beta_6 \neq 0$. Según se vio antes, la nulidad de $\beta_2\beta_6 - \beta_3\beta_5$ es invariante pudiéndose distinguir:

$$\boxed{\text{Caso } \beta_2\beta_6 - \beta_3\beta_5 \neq 0}$$

En este caso se tiene que $A_{n-2} = A_{n-1} = 0$ pues verifican el sistema de ecuaciones homogéneo siguiente con determinante distinto de cero

$$
\begin{aligned}
A_{n-2}\beta_2 + A_{n-1}\beta_5 = 0\\
A_{n-2}\beta_3 + A_{n-1}\beta_6 = 0
\end{aligned}
$$

Se puede simplificar la expresión de los parámetros, quedando

$$
\begin{aligned}
\alpha' &= \frac{B_{n-2}\alpha}{A_1}\\
\beta_1' &= \frac{A_1(B_{n-2}\beta_1 + B_{n-1}\beta_4)}{D_n}\\
\beta_2' &= \frac{B_{n-2}^2\beta_2 + B_{n-2}B_{n-1}(\beta_3 + \beta_5) + B_{n-1}^2\beta_6}{D_n}
\end{aligned}
$$

$$\beta_3' = \frac{C_{n-1}(B_{n-2}\beta_3 + B_{n-1}\beta_6)}{D_n}$$
$$\beta_4' = \frac{A_1 C_{n-1}\beta_4}{D_n}$$
$$\beta_5' = \frac{C_{n-1}(B_{n-2}\beta_5 + B_{n-1}\beta_6)}{D_n}$$
$$\beta_6' = \frac{C_{n-1}^2\beta_6}{D_n}$$

con $A_1 D_n B_{n-2} C_{n-1} \neq 0$.

Puesto que $\beta_6 \neq 0$, se elige $B_{n-1} = -\dfrac{B_{n-2}\beta_5}{\beta_6}$ y permite hacer $\beta_5 = 0$. Sustituyendo en los parámetros resulta:

$$\beta_1' = \frac{A_1 B_{n-2}}{\beta_6 D_n}(\beta_1\beta_6 - \beta_4\beta_5)$$
$$\beta_2' = \frac{B_{n-2}^2}{\beta_6 D_n}(\beta_2\beta_6 - \beta_3\beta_5) \neq 0$$
$$\beta_3' = \frac{C_{n-1}B_{n-2}}{D_n}(\beta_3 - \beta_5)$$
$$\beta_4' = \frac{A_1 C_{n-1}\beta_4}{D_n}$$
$$\beta_5' = 0$$
$$\beta_6' = \frac{C_{n-1}^2\beta_6}{D_n}$$

con $A_1 D_n B_{n-2} C_{n-1} \neq 0$. Es fácil comprobar que la nulidad de $\beta_1\beta_6 - \beta_4\beta_5$ es ahora invariante pues

$$\beta_1'\beta_6' - \beta_4'\beta_5' = \frac{A_1 B_{n-2} C_{n-1}^2}{D_n^2}(\beta_1\beta_6 - \beta_4\beta_5)$$

y se probó antes que la nulidad de $\beta_3 - \beta_5$ es invariante. Con todo esto, se tiene que:

• Si $\beta_3 - \beta_5 \neq 0$:

$$\beta_3 - \beta_5 \neq 0 \Rightarrow \beta_3' \neq 0 \begin{cases} \beta_1\beta_6 - \beta_4\beta_5 \neq 0 \Rightarrow \beta_1' \neq 0 \begin{cases} \beta_4 \neq 0 & \textbf{Caso 1} \\ \beta_4 = 0 & \textbf{Caso 2} \end{cases} \\ \\ \beta_1\beta_6 - \beta_4\beta_5 = 0 \Rightarrow \beta_1' = 0 \begin{cases} \beta_4 \neq 0 & \textbf{Caso 3} \\ \beta_4 = 0 & \textbf{Caso 4} \end{cases} \end{cases}$$

Caso 1 $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_6 \neq 0$, $\beta_5 = 0$. Se tiene la siguiente ley del álgebra:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = \alpha e_2 + \beta_1 e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \beta_2 e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta_4 e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \beta_6 e_n & \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu_{(I,1,1,2)}^{1,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}$ con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{C} - \{0\}$, cuya ley se puede expresar por:

$$\mu_{(I,1,1,2)}^{1,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}|_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_2 + e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \lambda_1 e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = \lambda_2 e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \lambda_3 e_n & \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C} - \{0\} \end{cases}$$

Caso 2 $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_6 \neq 0$, $\beta_4 = \beta_5 = 0$. La ley del álgebra viene dada por:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = \alpha e_2 + \beta_1 e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \beta_2 e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \beta_6 e_n & \end{cases}$$

Haciendo uso de cambios de escalas se obtiene $\mu_{(I,1,1,2)}^{1,\lambda_1,0,\lambda_3}$ con $\lambda_1, \lambda_3 \in \mathbf{C} - \{0\}$.

Caso 3 $\beta_2\beta_3\beta_4\beta_6 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_5 = 0$. La ley del álgebra viene dada por:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \beta_2 e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta_4 e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \beta_6 e_n \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu_{(I,1,1,2)}^{2,\lambda_1,\lambda_2}$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C} - \{0\}$, cuya ley se puede expresar por:

$$\mu_{(I,1,1,2)}^{2,\lambda_1,\lambda_2}|_{\lambda_1\lambda_2\neq 0} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n \\ [e_1, e_{n-1}] = \lambda_1 e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \lambda_2 e_n & \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C} - \{0\} \end{cases}$$

Caso 4 $\beta_2\beta_3\beta_6 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_4 = \beta_5 = 0$. La ley del álgebra será:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \beta_2 e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \beta_6 e_n \end{cases}$$

Haciendo uso de cambios de escalas se obtiene $\mu_{(I,1,1,2)}^{2,0,\lambda_2}$ con $\lambda_2 \in \mathbf{C} - \{0\}$.

- Si $\beta_3 - \beta_5 = 0$:

$$\beta_3 - \beta_5 = 0 \Rightarrow \beta_3' = 0 \begin{cases} \beta_1\beta_6 - \beta_4\beta_5 \neq 0 \Rightarrow \beta_1' \neq 0 \begin{cases} \beta_4 \neq 0 & \textbf{Caso 5} \\ \beta_4 = 0 & \textbf{Caso 6} \end{cases} \\ \beta_1\beta_6 - \beta_4\beta_5 = 0 \Rightarrow \beta_1' = 0 \begin{cases} \beta_4 \neq 0 & \textbf{Caso 7} \\ \beta_4 = 0 & \textbf{Caso 8} \end{cases} \end{cases}$$

Caso 5 $\beta_1\beta_2\beta_4\beta_6 \neq 0$, $\beta_3 = \beta_5 = 0$. Se tiene la siguiente ley del álgebra:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = \alpha e_2 + \beta_1 e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \beta_2 e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta_4 e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \beta_6 e_n & \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{3,\lambda,\lambda_1}_{(I,1,1,2)}$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C} - \{0\}$, cuya ley se puede expresar por:

$$\mu^{3,\lambda_1,\lambda_2}_{(I,1,1,2)}|_{\lambda_1\lambda_2\neq 0} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_2 + e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \lambda_1 e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = \lambda_2 e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n & \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C} - \{0\} \end{cases}$$

Caso 6 $\beta_1\beta_2\beta_6 \neq 0$, $\beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$. La ley del álgebra viene dada por:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = \alpha e_2 + \beta_1 e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \beta_2 e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \beta_6 e_n & \end{cases}$$

Haciendo uso de cambios de escalas se obtiene $\mu^{3,\lambda_1,0}_{(I,1,1,2)}$ con $\lambda_1 \in \mathbf{C} - \{0\}$.

Caso 7 $\beta_2\beta_4\beta_6 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_3 = \beta_5 = 0$. La ley viene dada por:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \beta_2 e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta_4 e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \beta_6 e_n & \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^4_{(I,1,1,2)}$, cuya ley se puede expresar por:

$$\mu^4_{(I,1,1,2)}: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

Caso 8 $\beta_2\beta_6 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$. La ley del álgebra será:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \beta_2 e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \beta_6 e_n & \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^5_{(I,1,1,2)}$, cuya ley se puede expresar por:

$$\mu^5_{(I,1,1,2)}: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Caso } \beta_2\beta_6 - \beta_3\beta_5 = 0}$$

En este caso, los parámetros se pueden reescribir de la siguiente forma:

$$\alpha' = \frac{B_{n-2}\alpha}{A_1 + A_{n-2}\alpha}$$

$$\beta_1' = \frac{A_1(B_{n-2}\beta_1 + B_{n-1}\beta_4) + (A_{n-1}B_{n-2} - A_{n-2}B_{n-1})(\beta_3 - \beta_5)}{D_n}$$

$$\beta_2' = \frac{B_{n-2}^2\beta_2 + B_{n-2}B_{n-1}(\beta_3 + \beta_5) + B_{n-1}^2\beta_6}{D_n}$$

$$\beta_3' = \frac{C_{n-1}(B_{n-2}\beta_3 + B_{n-1}\beta_6)}{D_n}$$

$$\beta_4' = \frac{C_{n-1}(A_1\beta_4 - A_{n-2}(\beta_3 - \beta_5))}{D_n}$$
$$\beta_5' = \frac{C_{n-1}(B_{n-2}\beta_5 + B_{n-1}\beta_6)}{D_n}$$
$$\beta_6' = \frac{C_{n-1}^2\beta_6}{D_n}$$

con

$$A_{n-2}\beta_2 + A_{n-1}\beta_5 = 0$$
$$A_1(A_1 + A_{n-2}\alpha)D_nB_{n-2}C_{n-1}) \neq 0$$

Es fácil ver que se puede hacer $\beta_5' = 0$ pues $\beta_6 \neq 0$, eligiendo $B_{n-1} = -\dfrac{B_{n-2}\beta_5}{\beta_6}$. Sustituyendo en el resto de parámetros se tiene:

$$\beta_2' = \frac{B_{n-2}^2}{\beta_6 D_n}(\beta_2\beta_6 - \beta_3\beta_5) = 0$$
$$\beta_3' = \frac{B_{n-2}C_{n-1}}{D_n}(\beta_3 - \beta_5)$$
$$\beta_1' = \frac{B_{n-2}}{\beta_6 D_n}(A_1(\beta_1\beta_6 - \beta_4\beta_5) - A_{n-2}(\beta_3 - \beta_5)^2)$$

• Si $\beta_3 - \beta_5 \neq 0 \Rightarrow \beta_3' \neq 0$. Si se elige $A_{n-2} = \dfrac{A_1\beta_4}{\beta_3 - \beta_5}$ se consigue hacer $\beta_4' = 0$, pero hay que tener en cuenta las restricciones anteriores y sustituyendo se tiene que

$$A_{n-2}\beta_3 + A_{n-1}\beta_6 = 0 \Leftrightarrow A_{n-1} = -\frac{A_1\beta_3\beta_4}{\beta_6}(\beta_3 - \beta_5)$$

y por otro lado

$$A_1 + A_{n-2}\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \beta_3 - \beta_5 + \beta_4\alpha \neq 0$$

Es fácil ver que las nulidades de $\beta_3\beta_4 - \beta_1\beta_6$ y la de $\beta_3 - \beta_5 + \beta_4\alpha$ son invariantes pues

$$\beta_1'\beta_6' - \beta_3'\beta_4' = \frac{A_1B_{n-2}C_{n-1}^2}{D_n{}^2}(\beta_1\beta_6 - \beta_3\beta_4)$$
$$\beta_3' - \beta_5' + \beta_4'\alpha' = \frac{A_1B_{n-2}C_{n-1}}{D_n(A_1 + A_{n-2}\alpha)}(\beta_3 - \beta_5 + \beta_4\alpha)$$

$\beta_3 - \beta_5 \neq 0 \Rightarrow \beta_3' \neq 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \beta_3-\beta_5+\beta_4\alpha\neq 0 \begin{cases} \beta_1\beta_6-\beta_3\beta_4\neq 0\Rightarrow \beta_1'\neq 0 \text{ y } \beta_4'=0 & \textbf{Caso 9}\\ \beta_1\beta_6-\beta_3\beta_4=0\Rightarrow \beta_1'=\beta_4'=0 & \textbf{Caso 10}\end{cases}\\ \beta_3-\beta_5+\beta_4\alpha=0\Rightarrow \beta_4'=-\dfrac{\beta_3'}{\alpha'}\begin{cases} \beta_1\beta_6-\beta_3\beta_4\neq 0\Rightarrow \beta_1'\neq 0 & \textbf{Caso 11}\\ \beta_1\beta_6-\beta_3\beta_4=0\Rightarrow \beta_1'=-\dfrac{(\beta_3')^2}{\alpha'\beta_6'} & \textbf{Caso 12}\end{cases}\end{cases}$$

Nótese que si $\beta_3-\beta_5+\beta_4\alpha\neq 0\Rightarrow \beta_4'=0$ (eligiendo A_{n-2} como se indicaba antes) que sustituyendo en β_1' queda:

$$\beta_1'=\frac{A_1B_{n-2}}{\beta_6D_n}(\beta_1\beta_6-\beta_3\beta_4)$$

Caso 9 $\beta_2=\beta_4=\beta_5=0$, $\beta_1\beta_3\beta_6\neq 0$.

En este caso, $\beta_3\beta_4-\beta_1\beta_6\neq 0\Rightarrow \beta_1'\neq 0$. En resumen, se tiene la ley

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4\\ [e_1,e_{n-2}]=\alpha e_2+\beta_1e_n & \\ [e_i,e_{n-2}]=\alpha e_{i+1}, & 2\leq i\leq n-4\\ [e_{n-1},e_{n-2}]=\beta_3e_n & \\ [e_{n-1},e_{n-1}]=\beta_6e_n & \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{1,0,0,\lambda_3}_{(I,1,1,2)}$.

Caso 10 $\beta_3\beta_6\neq 0$, $\beta_1=\beta_2=\beta_4=\beta_5=0$.

En este caso $\beta_3\beta_4-\beta_1\beta_6=0\Rightarrow \beta_1'=0$. Se tiene la ley

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4\\ [e_i,e_{n-2}]=\alpha e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4\\ [e_{n-1},e_{n-2}]=\beta_3e_n & \\ [e_{n-1},e_{n-1}]=\beta_6e_n & \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{6}_{(I,1,1,2)}$ cuya ley se puede expresar por:

$$\mu^6_{(I,1,1,2)}:\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-4\\ [e_i,e_{n-2}]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-4\\ [e_{n-1},e_{n-2}]=e_n & \\ [e_{n-1},e_{n-1}]=e_n & \end{cases}$$

Nótese que si $\beta_3-\beta_5+\beta_4\alpha=0\Rightarrow\beta_4=-\dfrac{(\beta_3-\beta_5)}{\alpha}$, en este caso es posible elegir adecuadamente A_{n-2}, $A_{n-2}=-\dfrac{A_1(\beta_1\beta_6-\beta_4\beta_5)}{(\beta_3-\beta_5)^2}$ y teniendo en cuenta que $A_{n-2}\beta_3+A_{n-1}\beta_6=0$ queda determinado A_{n-1} y todo esto permite hacer $\beta_1'=0$ si

$$A_1+A_{n-2}\alpha\neq 0\Leftrightarrow\frac{A_1}{\beta_4^2\alpha}(\beta_1\beta_6-\beta_3\beta_4)\neq 0$$

Caso 11 $\beta_1=\beta_2=\beta_5=0$, $\beta_3\beta_6\neq 0$, $\beta_4=-\dfrac{\beta_3}{\alpha}$.

En este caso $\beta_1\beta_6-\beta_3\beta_4\neq 0\Rightarrow\beta_1=0$. En resumen,

$$\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-4\\ [e_i,e_{n-2}]=\alpha e_{i+1}, & 1\le i\le n-4\\ [e_{n-1},e_{n-2}]=\beta_3e_n & \\ [e_1,e_{n-1}]=-\frac{\beta_3}{\alpha}e_n & \\ [e_{n-1},e_{n-1}]=\beta_6e_n & \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^7_{(I,1,1,2)}$ cuya ley se puede expresar por:

$$\mu^7_{(I,1,1,2)}:\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-4\\ [e_i,e_{n-2}]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-4\\ [e_{n-1},e_{n-2}]=e_n & \\ [e_1,e_{n-1}]=-e_n & \\ [e_{n-1},e_{n-1}]=e_n & \end{cases}$$

Caso 12 $\beta_2 = \beta_5 = 0$, $\beta_3\beta_6 \neq 0$, $\beta_4 = -\dfrac{\beta_3}{\alpha}$, $\beta_1 = -\dfrac{{\beta_3}^2}{\alpha\beta_6}$.

En este caso $\beta_1\beta_6 - \beta_3\beta_4 = 0 \Rightarrow \beta_1 = \dfrac{\beta_3\beta_4}{\beta_6}$. En resumen

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = \alpha e_2 - \frac{\beta_3^2}{\alpha\beta_6} e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = -\frac{\beta_3}{\alpha} e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \beta_6 e_n & \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^8_{(I,1,1,2)}$ cuya ley se puede expresar por:

$$\mu^8_{(I,1,1,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_2 - e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = -e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

• Si $\beta_3 - \beta_5 = 0 \Rightarrow \beta_3' = 0$. Además, se tenía $\beta_2' = \beta_5' = 0$. Si se quieren hacer esos cambios, los parámetros resultan:

$$\alpha' = \frac{B_{n-2}\alpha}{A_1 + A_{n-2}\alpha}$$

$$\beta_1' = \frac{A_1 B_{n-2}}{\beta_6 D_n}(\beta_1\beta_6 - \beta_4\beta_5)$$

$$\beta_4' = \frac{A_1 C_{n-1}\beta_4}{D_n}$$

$$\beta_6' = \frac{C_{n-1}^2\beta_6}{D_n}$$

Nótese que en este caso, $\beta_3 - \beta_5 = 0$, se tiene que la nulidad de $\beta_1\beta_6 - \beta_4\beta_5$ es invariante pues

$$\beta_1'\beta_6' - \beta_4'\beta_5' = \frac{A_1 B_{n-2} C_{n-1}^2}{D_n^2}(\beta_1\beta_6 - \beta_4\beta_5)$$

Además, si $\beta_1\beta_6 - \beta_4\beta_5 \neq 0 \Rightarrow \beta_1' \neq 0$ y si $\beta_1\beta_6 - \beta_4\beta_5 = 0 \Rightarrow \beta_1' = 0$.

$$\beta_3 - \beta_5 = 0 \Rightarrow \beta_3 = 0 \begin{cases} \beta_1\beta_6 - \beta_4\beta_5 \neq 0 \Rightarrow \beta_1' \neq 0 \begin{cases} \beta_4 \neq 0 & \textbf{Caso 13} \\ \beta_4 = 0 & \textbf{Caso 14} \end{cases} \\ \beta_1\beta_6 - \beta_4\beta_5 = 0 \Rightarrow \beta_1' = 0 \begin{cases} \beta_4 \neq 0 & \textbf{Caso 15} \\ \beta_4 = 0 & \textbf{Caso 16} \end{cases} \end{cases}$$

Caso 13 $\beta_1\beta_4\beta_6 \neq 0$, $\beta_2 = \beta_3 = \beta_5 = 0$. En resumen,

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = \alpha e_2 + \beta_1 e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta_4 e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \beta_6 e_n & \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^9_{(I,1,1,2)}$ cuya ley se puede expresar por:

$$\mu^9_{(I,1,1,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_2 + e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

Caso 14 $\beta_1\beta_6 \neq 0$, $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$. En resumen,

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = \alpha e_2 + \beta_1 e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \beta_6 e_n & \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{10}_{(I,1,1,2)}$ cuya ley se puede expresar por:

$$\mu^{10}_{(I,1,1,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_2 + e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

Caso 15 $\beta_4\beta_6 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_5 = 0$. En resumen,

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta_4 e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \beta_6 e_n \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{11}_{(I,1,1,2)}$ cuya ley se puede expresar por:

$$\mu^{11}_{(I,1,1,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

Caso 16 $\beta_6 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$. En resumen,

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \beta_6 e_n \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{12}_{(I,1,1,2)}$ cuya ley se puede expresar por:

$$\mu^{12}_{(I,1,1,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

$\star$ **Caso A2** $\beta_6 = 0$. En este caso, se tiene que,

$$\alpha' = \frac{B_{n-2}\alpha}{A_1 + A_{n-2}\alpha}$$

$$\beta_1' = \frac{A_1(B_{n-2}\beta_1 + B_{n-1}\beta_4) + (A_{n-1}B_{n-2} - A_{n-2}B_{n-1})(\beta_3 - \beta_5)}{D_n}$$

$$\beta_2' = \frac{B_{n-2}^2\beta_2 + B_{n-2}B_{n-1}(\beta_3 + \beta_5)}{D_n}$$

$$\beta_3' = \frac{B_{n-2}C_{n-1}\beta_3}{D_n}$$
$$\beta_4' = \frac{A_1C_{n-1}\beta_4 + A_{n-2}C_{n-1}(\beta_3 - \beta_5)}{D_n}$$
$$\beta_5' = \frac{B_{n-2}C_{n-1}\beta_5}{D_n}$$

con

$$A_{n-2}\beta_2 + A_{n-1}\beta_5 = 0$$
$$A_{n-2}\beta_3 = 0$$
$$A_1(A_1 + A_{n-2}\alpha)D_nB_{n-2}C_{n-1} \neq 0$$

Es fácil ver que las nulidades de β_3, β_5 y $\beta_3 + \beta_5$ son invariantes.

$\boxed{\beta_3 \neq 0} \Rightarrow A_{n-2} = 0 \Rightarrow A_{n-1}\beta_5 = 0$. Reescribiendo de nuevo los parámetros se tiene que

$$\alpha' = \frac{B_{n-2}\alpha}{A_1 + A_{n-2}\alpha}$$
$$\beta_1' = \frac{A_1(B_{n-2}\beta_1 + B_{n-1}\beta_4) + A_{n-1}B_{n-2}\beta_3}{D_n}$$
$$\beta_2' = \frac{B_{n-2}^2\beta_2 + B_{n-2}B_{n-1}(\beta_3 + \beta_5)}{D_n}$$
$$\beta_3' = \frac{B_{n-2}C_{n-1}\beta_3}{D_n}$$
$$\beta_4' = \frac{A_1C_{n-1}\beta_4}{D_n}$$
$$\beta_5' = \frac{B_{n-2}C_{n-1}\beta_5}{D_n}$$

con

$$A_{n-1}\beta_5 = 0$$
$$A_1D_nB_{n-2}C_{n-1} \neq 0$$

Se van a distinguir los casos según se refleja en la tabla siguiente:

Si $\beta_5 \neq 0 \Rightarrow A_{n-1} = 0$.

$$\beta_5 \neq 0 \begin{cases} \beta_3+\beta_5\neq 0 \begin{cases} \beta_1(\beta_3+\beta_5)-\beta_2\beta_4 \neq 0 \Rightarrow \beta_1'\neq 0 \begin{cases}\beta_4\neq 0 & \textbf{Caso 17}\\ \beta_4=0 & \textbf{Caso 18}\end{cases}\\ \beta_1(\beta_3+\beta_5)-\beta_2\beta_4 = 0 \Rightarrow \beta_1'= 0 \begin{cases}\beta_4\neq 0 & \textbf{Caso 19}\\ \beta_4=0 & \textbf{Caso 20}\end{cases}\end{cases}\\ \beta_3+\beta_5=0 \begin{cases} \beta_4\neq 0\Rightarrow \beta_1'=0 \begin{cases}\beta_2\neq 0 & \textbf{Caso 21}\\ \beta_2=0 & \textbf{Caso 22}\end{cases}\\ \beta_4=0 \begin{cases}\beta_1\neq 0 \begin{cases}\beta_2\neq 0 & \textbf{Caso 23}\\ \beta_2=0 & \textbf{Caso 24}\end{cases}\\ \beta_1=0\begin{cases}\beta_2\neq 0 & \textbf{Caso 25}\\ \beta_2=0 & \textbf{Caso 26}\end{cases}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

- Si $\beta_3+\beta_5\neq 0$, eligiendo $B_{n-1}=-\dfrac{B_{n-2}\beta_2}{\beta_3+\beta_5}$ se tiene $\beta_2'=0$. Sustituyendo en los parámetros,

$$\beta_1'=\frac{A_1B_{n-2}}{D_n}(\beta_1(\beta_3+\beta_5)-\beta_2\beta_4)$$

Una simple comprobación prueba que la nulidad de $\beta_1(\beta_3+\beta_5)-\beta_2\beta_4$ es invariante pues,

$$\beta_1'(\beta_3'+\beta_5')-\beta_2'\beta_4'=\frac{A_1B_{n-2}^2C_{n-1}}{D_n^2}(\beta_1(\beta_3+\beta_5)-\beta_2\beta_4)$$

Nótese que si $\beta_1(\beta_3+\beta_5)-\beta_2\beta_4\neq 0\Rightarrow \beta_1'\neq 0$.

Caso 17 $\beta_1\beta_3\beta_4\beta_5\neq 0$, $\beta_2=\beta_6=0$. En resumen,

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4\\ [e_1,e_{n-2}]=\alpha e_2+\beta_1 e_n & \\ [e_i,e_{n-2}]=\alpha e_{i+1}, & 2\leq i\leq n-4\\ [e_{n-1},e_{n-2}]=\beta_3 e_n & \\ [e_1,e_{n-1}]=\beta_4 e_n & \\ [e_{n-2},e_{n-1}]=\beta_5 e_n & \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{13,\lambda_1,\lambda_2}_{(I,1,1,2)}$ con $\lambda_1 \in \mathbf{C}-\{0\}$, $\lambda_2 \in \mathbf{C}-\{0,-1\}$, cuya ley se puede expresar por:

$$\mu^{13,\lambda_1,\lambda_2}_{(I,1,1,2)} : |_{\lambda_1\lambda_2\neq 0} \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_2 + e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = \lambda_1 e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = \lambda_2 e_n & \lambda_1 \in \mathbf{C}-\{0\},\ \lambda_2 \in \mathbf{C}-\{0,-1\} \end{cases}$$

Caso 18 $\beta_1\beta_3\beta_5 \neq 0$, $\beta_2 = \beta_4 = \beta_6 = 0$. En resumen,

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = \alpha e_2 + \beta_1 e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = \beta_5 e_n & \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{13,0,\lambda_2}_{(I,1,1,2)}$ con $\lambda_2 \in \mathbf{C}-\{0,-1\}$.

Téngase en cuenta que si $\beta_1(\beta_3+\beta_5) - \beta_2\beta_4 = 0 \Rightarrow \beta_1' = 0$.

Caso 19 $\beta_3\beta_4\beta_5 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_6 = 0$. En resumen,

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta_4 e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = \beta_5 e_n & \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{14,\lambda_1,\lambda_2}_{(I,1,1,2)}$ con $\lambda_1 \in \mathbf{C}-\{0\}$, $\lambda_2 \in \mathbf{C}-\{0,-1\}$, cuya ley se puede expresar por:

$$\mu^{14,\lambda_1,\lambda_2}_{(I,1,1,2)} : |_{\lambda_1\lambda_2\neq 0} \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = \lambda_1 e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = \lambda_2 e_n & \lambda_1 \in \mathbf{C}-\{0\}, \lambda_2 \in \mathbf{C}-\{0,-1\} \end{cases}$$

Caso 20 $\beta_3\beta_5 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_4 = \beta_6 = 0$. En resumen,

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = \beta_5 e_n & \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{14,0,\lambda_2}_{(I,1,1,2)}$ con $\lambda_2 \in \mathbf{C} - \{0, -1\}$.

- $\beta_3 + \beta_5 = 0$. En este caso se tiene que la nulidad de β_2 es invariante.

Caso 21 $\beta_3\beta_4\beta_2 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_6 = 0$, $\beta_5 = -\beta_3$. Como $\beta_4 \neq 0$, eligiendo adecuadamente B_{n-1} se consigue $\beta_1' = 0$. En resumen,

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \beta_2 e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta_4 e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -\beta_3 e_n & \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{15,\lambda_1}_{(I,1,1,2)}$ con $\lambda_1 \in \mathbf{C} - \{0\}$, cuya ley se puede expresar por:

$$\mu^{15,\lambda_1}_{(I,1,1,2)}|_{\lambda_1 \neq 0} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = \lambda_1 e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -e_n & \lambda_1 \in \mathbf{C} - \{0\} \end{cases}$$

Caso 22 $\beta_3\beta_4 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_6 = 0$, $\beta_5 = -\beta_3$. En resumen,

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta_4 e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -\beta_3 e_n & \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{15,\lambda_1,-1}_{(I,1,1,2)}$.

Caso 23 $\beta_1\beta_2\beta_3 \neq 0$, $\beta_4 = 0$, $\beta_5 = -\beta_3$. En resumen,

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = \alpha e_2 + \beta_1 e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \beta_2 e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -\beta_3 e_n & \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{16,\lambda_1}_{(I,1,1,2)}$ con $\lambda_1 \in \mathbf{C} - \{0\}$, cuya ley se puede expresar por:

$$\mu^{16,\lambda_1}_{(I,1,1,2)}|_{\lambda_1\neq 0} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_2 + e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \lambda_1 e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -e_n & \end{cases}$$

Caso 24 $\beta_1\beta_3 \neq 0$, $\beta_2 = \beta_4 = 0$, $\beta_5 = -\beta_3$. En resumen,

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = \alpha e_2 + \beta_1 e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -\beta_3 e_n & \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{16,0}_{(I,1,1,2)}$.

Caso 25 $\beta_2\beta_3 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_4 = 0$, $\beta_5 = -\beta_3$. En resumen,

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \beta_2 e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -\beta_3 e_n & \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{17}_{(I,1,1,2)}$ cuya ley se puede expresar por:

$$\mu^{17}_{(I,1,1,2)}: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -e_n & \end{cases}$$

Caso 26 $\beta_1 = \beta_2 = \beta_4 = 0$, $\beta_3 \neq 0$, $\beta_5 = -\beta_3$. En resumen,

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -\beta_3 e_n & \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{18}_{(I,1,1,2)}$ cuya ley se puede expresar por:

$$\mu^{18}_{(I,1,1,2)}: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -e_n & \end{cases}$$

Si $\beta_5 = 0$. Se tiene que:

$$\alpha' = \frac{B_{n-2}\alpha}{A_1 + A_{n-2}\alpha}$$

$$\beta_1' = \frac{A_1(B_{n-2}\beta_1 + B_{n-1}\beta_4) + A_{n-1}B_{n-2}\beta_3}{D_n}$$

$$\beta_2' = \frac{B_{n-2}(B_{n-2}\beta_2 + B_{n-1}\beta_3)}{D_n}$$

$$\beta_3' = \frac{B_{n-2}C_{n-1}\beta_3}{D_n}$$

$$\beta_4' = \frac{A_1 C_{n-1}\beta_4}{D_n}$$

con $A_1 D_n B_{n-2} C_{n-1} \neq 0$ y $\beta_3 \neq 0$.

Si elegimos $B_{n-1} = -\dfrac{B_{n-2}\beta_2}{\beta_3}$ se tendría $\beta_2' = 0$, y sustituyendo en β_1'

$$\beta_1' = \frac{A_1 B_{n-2}}{\beta_3 D_n}(\beta_1\beta_3 - \beta_2\beta_4) + \frac{A_{n-1}B_{n-2}}{D_n}\beta_3$$

es posible escoger A_{n-1} adecuadamente para conseguir $\beta_1' = 0$ puesto que no se tiene ninguna restricción sobre él.

En resumen:

$$\beta_5 = 0 \begin{cases} \beta_4 \neq 0 & \textbf{Caso 27} \\ \\ \beta_4 = 0 & \textbf{Caso 28} \end{cases}$$

Caso 27 $\beta_1 = \beta_2 = \beta_5 = 0$, $\beta_3\beta_4 \neq 0$. En resumen,

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta_4 e_n & \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{15,\lambda_1,0}_{(I,1,1,2)}$ con $\lambda_1 \in \mathbf{C} - \{0\}$.

Caso 28 $\beta_1 = \beta_2 = \beta_4 = \beta_5 = 0$, $\beta_3 \neq 0$. En resumen,

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n & \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{15,0,0}_{(I,1,1,2)}$.

• $\beta_3 = 0 \Rightarrow A_{n-2}\beta_2 + A_{n-1}\beta_5 = 0$. Se resumen a continuación los casos que se van a estudiar:

$$\beta_5 \neq 0 \begin{cases} \beta_1\beta_5 - \beta_2\beta_4 \neq 0 \Rightarrow \beta_1' \neq 0 \begin{cases} \beta_5 - \beta_4\alpha \neq 0 \Rightarrow \beta_4' = 0 & \textbf{Caso 29} \\ \beta_5 - \beta_4\alpha = 0 \Rightarrow \beta_4' = \dfrac{\beta_5}{\alpha} & \textbf{Caso 30} \end{cases} \\ \beta_1\beta_5 - \beta_2\beta_4 = 0 \Rightarrow \beta_1' = 0 \begin{cases} \beta_5 - \beta_4\alpha \neq 0 \Rightarrow \beta_4' = 0 & \textbf{Caso 31} \\ \beta_5 - \beta_4\alpha = 0 \Rightarrow \beta_4' = \dfrac{\beta_5}{\alpha} & \textbf{Caso 32} \end{cases} \end{cases}$$

Si $\beta_5 \neq 0$. Eligiendo $A_{n-2} = -\dfrac{A_1\beta_4}{\beta_5} \Rightarrow \beta_4' = 0$, pero se ha de verificar que

$$A_1 + A_{n-2}\alpha = \frac{A_1}{\beta_5}(\beta_5 - \beta_4\alpha) \neq 0$$

Por otro lado sustituyendo en β_1', se tiene que:

$$\beta_1' = \frac{A_1 B_{n-2}}{\beta_5 D_n}(\beta_1\beta_5 - \beta_2\beta_4)$$

Es fácil ver que las nulidades de $\beta_1\beta_5 - \beta_2\beta_4$ y de $\beta_5 - \beta_4\alpha$ son invariantes pues

$$\beta_1'\beta_5' - \beta_2'\beta_4' = \frac{A_1 C_{n-1}}{D_n}(\beta_1\beta_5 - \beta_2\beta_4)$$
$$\beta_5' - \beta_4'\alpha' \frac{A_1 C_{n-1}}{D_n(A_1 + A_{n-2}\alpha)}(\beta_5 - \beta_4\alpha)$$

Se tiene que $\beta_1\beta_5 - \beta_2\beta_4 \neq 0 \Rightarrow \beta_1' \neq 0$.

Caso 29 $\beta_1\beta_5 \neq 0$, $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$. En resumen,

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = \alpha e_2 + \beta_1 e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = \beta_5 e_n & \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{19}_{(I,1,1,2)}$ cuya ley se puede expresar por:

$$\mu^{19}_{(I,1,1,2)}:\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-4\\ [e_1,e_{n-2}]=e_2+e_n & \\ [e_i,e_{n-2}]=e_{i+1}, & 2\le i\le n-4\\ [e_{n-2},e_{n-1}]=e_n & \end{cases}$$

Caso 30 $\beta_1\beta_5\neq 0$, $\beta_2=\beta_3=0$, $\beta_4=\frac{\beta_5}{\alpha}$. En resumen,

$$\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-4\\ [e_1,e_{n-2}]=\alpha e_2+\beta_1 e_n & \\ [e_i,e_{n-2}]=\alpha e_{i+1}, & 2\le i\le n-4\\ [e_1,e_{n-1}]=\frac{\beta_5}{\alpha}e_n & \\ [e_{n-2},e_{n-1}]=\beta_5 e_n & \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{20}_{(I,1,1,2)}$ cuya ley se puede expresar por:

$$\mu^{20}_{(I,1,1,2)}:\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-4\\ [e_1,e_{n-2}]=e_2+e_n & \\ [e_i,e_{n-2}]=e_{i+1}, & 2\le i\le n-4\\ [e_1,e_{n-1}]=e_n & \\ [e_{n-2},e_{n-1}]=e_n & \end{cases}$$

Si $\beta_1\beta_5-\beta_2\beta_4=0\Rightarrow\beta_1'=0$, entonces

Caso 31 $\beta_5\neq 0$, $\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4=0$. En resumen,

$$\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-4\\ [e_i,e_{n-2}]=\alpha e_{i+1}, & 1\le i\le n-4\\ [e_{n-2},e_{n-1}]=\beta_5 e_n & \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{21}_{(I,1,1,2)}$ cuya ley se puede expresar por:

$$\mu^{21}_{(I,1,1,2)}:\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-4\\ [e_i,e_{n-2}]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-4\\ [e_{n-2},e_{n-1}]=e_n & \end{cases}$$

Caso 32 $\beta_5 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, $\beta_4 = \frac{\beta_5}{\alpha}$. En resumen,

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-1}] = \frac{\beta_5}{\alpha} e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = \beta_5 e_n & \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{22}_{(I,1,1,2)}$ cuya ley se puede expresar por:

$$\mu^{22}_{(I,1,1,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

- Si $\beta_5 = 0 \Rightarrow A_{n-2}\beta_2 = 0$.

$$\alpha' = \frac{B_{n-2}\alpha}{A_1 + A_{n-2}\alpha}$$

$$\beta_1' = \frac{A_1(B_{n-2}\beta_1 + B_{n-1}\beta_4)}{D_n}$$

$$\beta_2' = \frac{B_{n-2}^2\beta_2}{D_n}$$

$$\beta_4' = \frac{A_1 C_{n-1}\beta_4}{D_n}$$

con $A_1 D_n B_{n-2} C_{n-1} \neq 0$.

En resumen,

$$\beta_5 = 0 \begin{cases} \beta_4 \neq 0 \Rightarrow \beta_1' = 0 \begin{cases} \beta_2 \neq 0 & \textbf{Caso 33} \\ \beta_2 = 0 & \textbf{Caso 34} \end{cases} \\ \beta_4 = 0 \text{son todas escindidas} \end{cases}$$

Hay que tener en cuenta que si $\beta_4 \neq 0$, eligiendo adecuadamente B_{n-1} se consigue hacer $\beta_1' = 0$ y si $\beta_4 = 0$ la nulidad de $\beta_1 = 0$ es invariante. Además, debe existir algún $\beta_i \neq 0$.

Caso 33 $\beta_2\beta_4 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_3 = \beta_5 = 0$. En resumen,

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \beta_2 e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta_4 e_n & \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{2,0,0}_{(I,1,1,2)}$.

Caso 34 $\beta_4 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_5 = 0$. En resumen,

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta_4 e_n & \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{23}_{(I,1,1,2)}$ cuya ley se puede expresar por:

$$\mu^{23}_{(I,1,1,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

- **Caso B** En este caso, sea $\alpha = 0$.

Es posible hacer $\beta_6 = 0$ siempre pues si $\beta_6 \neq 0$ se puede elegir C_{n-1} de forma que $\beta_6' = 0$.

$$\beta_6' = \frac{C_{n-2}^2\beta_2 + C_{n-2}C_{n-1}(\beta_3 + \beta_5) + C_{n-1}^2\beta_6}{D_n} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C_{n-1} = \frac{-C_{n-2}(\beta_3 + \beta_5) \pm \sqrt{{C_{n-2}}^2(\beta_3 + \beta_5)^2 - 4{C_{n-2}}^2\beta_2\beta_6}}{2\beta_6}$$

hay que tener en cuenta que $B_{n-2}C_{n-1} - B_{n-1}C_{n-2} \neq 0$ y para ello basta elegir

$$B_{n-1} \neq \frac{-(\beta_3 + \beta_5) \pm \sqrt{(\beta_3 + \beta_5)^2 - 4\beta_2\beta_6}}{2\beta_6}$$

Por tanto, se puede suponer $\beta_6 = 0$. Rehacemos los cambios de base y se obtiene que:

$$\beta_1' = \frac{A_1(B_{n-2}\beta_1 + B_{n-1}\beta_4) + (A_{n-1}B_{n-2} - A_{n-2}B_{n-1})(\beta_3 - \beta_5)}{D_n}$$
$$\beta_2' = \frac{B_{n-2}^2\beta_2 + B_{n-2}B_{n-1}(\beta_3 + \beta_5)}{D_n}$$
$$\beta_3' = \frac{B_{n-2}C_{n-2}\beta_2 + B_{n-1}C_{n-2}\beta_5 + B_{n-2}C_{n-1}\beta_3}{D_n}$$
$$\beta_4' = \frac{A_1(C_{n-2}\beta_1 + C_{n-1}\beta_4) + (A_{n-1}C_{n-2} - A_{n-2}C_{n-1})(\beta_3 - \beta_5)}{D_n}$$
$$\beta_5' = \frac{B_{n-2}C_{n-2}\beta_2 + B_{n-2}C_{n-1}\beta_5 + B_{n-1}C_{n-2}\beta_3}{D_n}$$

con

$$C_{n-2}(C_{n-2}\beta_2 + C_{n-1}(\beta_3 + \beta_5)) = 0$$
$$A_{n-2}\beta_2 + A_{n-1}\beta_5 = 0$$
$$A_{n-2}\beta_3 = 0$$
$$A_1D_n(B_{n-2}C_{n-1} - B_{n-1}C_{n-2}) \neq 0$$

La nulidad de $\beta_3\beta_5$ es invariante pues

$$\beta_3'\beta_5' = \frac{(B_{n-1}C_{n-2} - B_{n-2}C_{n-1})^2}{D_n^2}\beta_3\beta_5$$

$\star$ $\beta_3\beta_5 \neq 0 \Rightarrow A_{n-2} = A_{n-1} = 0$.

Si $C_{n-2} = 0 \Rightarrow$

$$\beta_3' = \frac{B_{n-2}C_{n-1}\beta_3}{D_n} \neq 0 \qquad \text{y} \qquad \beta_5' = \frac{B_{n-2}C_{n-1}\beta_5}{D_n} \neq 0$$

Si $C_{n-2}\beta_2 + C_{n-1}(\beta_3 + \beta_5) = 0 \Rightarrow$

$$\beta_3' = \frac{B_{n-1}C_{n-2} - B_{n-2}C_{n-1}}{D_n}\beta_5 \neq 0 \qquad \text{y} \qquad \beta_5' = \frac{B_{n-1}C_{n-2} - B_{n-2}C_{n-1}}{D_n}\beta_3 \neq 0$$

Es fácil ver que en ambos casos la nulidad de $\beta_3 + \beta_5$ es invariante.

Si $\beta_3+\beta_5 \neq 0$, eligiendo $B_{n-1} = -\dfrac{B_{n-2}\beta_2}{\beta_3+\beta_5}$ se consigue hacer $\beta_2' = 0$ y para mantener las restricciones basta elegir $C_{n-2}=0$.

En este momento, se vuelven a efectuar los cambios de base y se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\beta_1' &= \frac{A_1(B_{n-2}\beta_1 + B_{n-1}\beta_4)}{D_n} \\
\beta_2' &= 0 \\
\beta_3' &= \frac{B_{n-1}C_{n-2}\beta_5 + B_{n-2}C_{n-1}\beta_3}{D_n} \\
\beta_4' &= \frac{A_1(C_{n-2}\beta_1 + C_{n-1}\beta_4)}{D_n} \\
\beta_5' &= \frac{B_{n-2}C_{n-1}\beta_5 + B_{n-1}C_{n-2}\beta_3}{D_n} \\
\beta_6' &= 0
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
&C_{n-2}C_{n-1}(\beta_3+\beta_5)) = 0 \\
&B_{n-2}B_{n-1}(\beta_3+\beta_5)) = 0 \\
&A_1D_n(B_{n-2}C_{n-1} - B_{n-1}C_{n-2}) \neq 0
\end{aligned}$$

como $\beta_3+\beta_5 \neq 0 \Rightarrow C_{n-2}C_{n-1} = 0$ y $B_{n-2}B_{n-1} = 0$.

Sólo se pueden dar dos situaciones ó $B_{n-2} = C_{n-1} = 0$ ó $B_{n-1} = C_{n-2} = 0$.

Caso $B_{n-2} = C_{n-1} = 0$, sustituyendo en β_1' y β_4' se llega a

$$\beta_1' = \frac{A_1B_{n-1}}{D_n}\beta_4 \qquad \text{y} \qquad \beta_4' = \frac{A_1C_{n-2}}{D_n}\beta_1$$

Caso $B_{n-1} = C_{n-2} = 0$, sustituyendo en β_1' y β_4' se llega a

$$\beta_1' = \frac{A_1B_{n-2}}{D_n}\beta_1 \qquad \text{y} \qquad \beta_4' = \frac{A_1C_{n-1}}{D_n}\beta_4$$

Queda claro que la nulidad de $\beta_1\beta_4$ es invariante pudiéndose distinguir los caso resumidos a continuación:

$\beta_3\beta_5 \neq 0 \Rightarrow$

$$\beta_3+\beta_5 \neq 0 \Rightarrow \beta_2 = 0 \begin{cases} \beta_1\beta_4 \neq 0 \Rightarrow \beta_1 \neq 0 \neq \beta_4 & \textbf{Caso 35} \\ \beta_1\beta_4 = 0 \begin{cases} \beta_1 \neq 0\ \beta_4 = 0 \Leftrightarrow \beta_4 \neq 0\ \beta_1 = 0 & \textbf{Caso 36} \\ \beta_1 = \beta_4 = 0 & \textbf{Caso 37} \end{cases} \end{cases}$$

El caso $\beta_3+\beta_5 = 0$ se verá más adelante. Es claro que el **Caso 35** es no isomorfo al **Caso 36** y al **Caso 37**. Los casos 36 y 37 no son isomorfos pues no existe isomorfismo que lleve uno en otro.

Caso 35 $\beta_1\beta_3\beta_4\beta_5 \neq 0$, $\beta_2 = \beta_6 = 0$. La ley del álgebra viene dada por:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = \beta_1 e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta_4 e_n \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = \beta_5 e_n \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{24,\lambda}_{(I,1,1,2)}$ con $\lambda \in \mathbf{C} - \{0\}$, cuya ley viene dada por

$$\mu^{24,\lambda}_{(I,1,1,2)}\{|_{\lambda\neq 0,-1} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = \lambda e_n & \lambda \in \mathbf{C} - \{0, -1\} \end{cases}$$

Caso 36 $\beta_1\beta_3\beta_5 \neq 0$, $\beta_2 = \beta_4 = \beta_6 = 0$. La ley del álgebra viene dada por:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = \beta_1 e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = \beta_5 e_n \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{25,\lambda}_{(I,1,1,2)}$ con $\lambda \in \mathbf{C} - \{0, -1\}$, cuya ley viene dada por

$$\mu^{25,\lambda}_{(I,1,1,2)}\{|_{\lambda\neq 0,-1}: \begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4 \\ [e_1,e_{n-2}]=e_n & \\ [e_{n-1},e_{n-2}]=e_n & \\ [e_{n-2},e_{n-1}]=\lambda e_n & \lambda\in\mathbf{C}-\{0,-1\} \end{cases}$$

Caso 37 $\beta_3\beta_5\neq 0$, $\beta_1=\beta_2=\beta_4=\beta_6=0$. La ley del álgebra viene dada por:

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4 \\ [e_{n-1},e_{n-2}]=\beta_3 e_n & \\ [e_{n-2},e_{n-1}]=\beta_5 e_n & \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{26,\lambda}_{(I,1,1,2)}$ con $\lambda\in\mathbf{C}-\{0,-1\}$, cuya ley viene dada por

$$\mu^{26,\lambda}_{(I,1,1,2)}\{|_{\lambda\neq 0,-1}: \begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4 \\ [e_{n-1},e_{n-2}]=e_n & \\ [e_{n-2},e_{n-1}]=\lambda e_n & \lambda\in\mathbf{C}-\{0,-1\} \end{cases}$$

Si $\beta_3+\beta_5=0\Rightarrow\beta_5=-\beta_3\neq 0$. Además $C_{n-2}\beta_2=0$. Reescribiendo los parámetros se tiene que:

$$\begin{aligned} \beta_1' &= \frac{A_1(B_{n-2}\beta_1+B_{n-1}\beta_4)}{D_n} \\ \beta_2' &= \frac{B_{n-2}^2\beta_2}{D_n} \\ \beta_3' &= \frac{(B_{n-2}C_{n-1}-B_{n-1}C_{n-2})\beta_3}{D_n} \\ \beta_4' &= \frac{A_1(C_{n-2}\beta_1+C_{n-1}\beta_4)}{D_n} \\ \beta_5' &= -\frac{(B_{n-2}C_{n-1}-B_{n-1}C_{n-2})\beta_3}{D_n}=-\beta_3' \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} &C_{n-2}\beta_2=0 \\ &A_1D_n(B_{n-2}C_{n-1}-B_{n-1}C_{n-2})\neq 0 \end{aligned}$$

Se tiene que la nulidad de β_2 es invariante pues si $\beta_2 = 0 \Rightarrow \beta_2' = 0$ y si $\beta_2 \neq 0 \Rightarrow C_{n-2} = 0 \Rightarrow B_{n-2} \neq 0 \Rightarrow \beta_2' \neq 0$.

Se resume a continuación los casos que se tienen

$$\beta_3 + \beta_5 = 0 \Rightarrow \beta_5 = -\beta_3 \neq 0 \begin{cases} \beta_2 \neq 0 \begin{cases} \beta_4 \neq 0 \Rightarrow \beta_1 = 0 & \textbf{Caso 4} \\ \beta_4 = 0 \begin{cases} \beta_1 \neq 0 & \textbf{Caso 38} \\ \beta_1 = 0 & \textbf{Caso 39} \end{cases} \end{cases} \\ \beta_2 = 0 \Rightarrow \beta_4 = 0 \begin{cases} \beta_1 \neq 0 & \textbf{Caso 40} \\ \beta_1 = 0 & \textbf{Caso 41} \end{cases} \end{cases}$$

• Si $\beta_2 \neq 0 \Rightarrow C_{n-2} = 0 \Rightarrow B_{n-2} \neq 0$ y se tendría que la nulidad de β_4 es invariante. Además, si $\beta_4 \neq 0$ eligiendo adecuadamente B_{n-1} se consigue hacer $\beta_1' = 0$.

Caso 38 $\beta_2\beta_3\beta_4 \neq 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_5 = -\beta_3$. La ley vendrá dada por:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \beta_2 e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta_4 e_n \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -\beta_3 e_n \end{cases}$$

Un sencillo cambio de base lleva a $\mu^{27}_{(I,1,1,2)}$ cuya ley viene dada por:

$$\mu^{27}_{(I,1,1,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -e_n \end{cases}$$

Caso 39 $\beta_1\beta_2\beta_3 \neq 0$, $\beta_4 = 0$, $\beta_5 = -\beta_3$. La ley vendrá dada por:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = \beta_1 e_n \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \beta_2 e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -\beta_3 e_n \end{cases}$$

Un sencillo cambio de base lleva a $\mu^{28}_{(I,1,1,2)}$ cuya ley viene dada por:

$$\mu^{28}_{(I,1,1,2)}: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_n \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -e_n \end{cases}$$

Caso 40 $\beta_2\beta_3 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_4 = 0$, $\beta_5 = -\beta_3$. La ley vendrá dada por:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \beta_2 e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -\beta_3 e_n \end{cases}$$

Un sencillo cambio de base lleva a $\mu^{29}_{(I,1,1,2)}$ cuya ley viene dada por:

$$\mu^{29}_{(I,1,1,2)}: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -e_n \end{cases}$$

- Si $\beta_2 = 0$, se tiene que $\beta_5 = -\beta_3 \neq 0$ y

$$\beta_1' = \frac{A_1(B_{n-2}\beta_1 + B_{n-1}\beta_4)}{D_n}$$

$$\beta_4' = \frac{A_1(C_{n-2}\beta_1 + C_{n-1}\beta_4)}{D_n}$$

con

$$A_1 D_n (B_{n-2}C_{n-1} - B_{n-1}C_{n-2}) \neq 0$$

Se puede suponer que $\beta_4 = 0$, pues

- Si $\beta_4 = 0$ se elige $C_{n-2} = 0$ y se consigue $\beta_4' = 0$.

- Si $\beta_4 \neq 0$ se elige $C_{n-1} = -\dfrac{C_{n-2}\beta_1}{\beta_4}$ y $B_{n-1} \neq -\dfrac{B_{n-2}\beta_1}{\beta_4}$. De esta forma se consigue $\beta_4' = 0$

Por tanto, la nulidad de β_1 es invariante.

Caso 41 $\beta_1\beta_3 \neq 0$, $\beta_2 = \beta_4 = 0$, $\beta_5 = -\beta_3$. La ley vendrá dada por:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = \beta_1 e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -\beta_3 e_n \end{cases}$$

Un sencillo cambio de base lleva a $\mu^{30}_{(I,1,1,2)}$ cuya ley viene dada por:

$$\mu^{30}_{(I,1,1,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -e_n \end{cases}$$

Caso 42 $\beta_3 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_4 = 0$, $\beta_5 = -\beta_3$. La ley vendrá dada por:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -\beta_3 e_n \end{cases}$$

Un sencillo cambio de base lleva a $\mu^{31}_{(I,1,1,2)}$ cuya ley viene dada por:

$$\mu^{31}_{(I,1,1,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -e_n \end{cases}$$

$\star$ $\beta_3\beta_5 = 0$. Los parámetros resultan:

$$\beta_1' = \frac{A_1(B_{n-2}\beta_1 + B_{n-1}\beta_4) + (A_{n-1}B_{n-2} - A_{n-2}B_{n-1})(\beta_3 - \beta_5)}{D_n}$$
$$\beta_2' = \frac{B_{n-2}^2\beta_2 + B_{n-2}B_{n-1}(\beta_3 + \beta_5)}{D_n}$$
$$\beta_3' = \frac{B_{n-2}C_{n-2}\beta_2 + B_{n-1}C_{n-2}\beta_5 + B_{n-2}C_{n-1}\beta_3}{D_n}$$
$$\beta_4' = \frac{A_1(C_{n-2}\beta_1 + C_{n-1}\beta_4) + (A_{n-1}C_{n-2} - A_{n-2}C_{n-1})(\beta_3 - \beta_5)}{D_n}$$
$$\beta_5' = \frac{B_{n-2}C_{n-2}\beta_2 + B_{n-2}C_{n-1}\beta_5 + B_{n-1}C_{n-2}\beta_3}{D_n}$$

con

$$C_{n-2}(C_{n-2}\beta_2 + C_{n-1}(\beta_3 + \beta_5)) = 0$$
$$A_{n-2}\beta_2 + A_{n-1}\beta_5 = 0$$
$$A_{n-2}\beta_3 = 0$$
$$A_1D_n(B_{n-2}C_{n-1} - B_{n-1}C_{n-2}) \neq 0$$

Obsérvese que la nulidad de $\beta_3 + \beta_5$ es invariante pues:

- Si $C_{n-2} = 0$ se tiene que $\beta_3' = \dfrac{B_{n-2}C_{n-1}\beta_3}{D_n}$ y $\beta_5' = \dfrac{B_{n-2}C_{n-1}\beta_5}{D_n}$.
- Si $C_{n-2}\beta_2 + C_{n-1}(\beta_3 + \beta_5) = 0$ se tiene que $\beta_3' = \dfrac{B_{n-1}C_{n-2} - B_{n-2}C_{n-1})\beta_5}{D_n}$ y $\beta_5' = \dfrac{B_{n-1}C_{n-2} - B_{n-2}C_{n-1})\beta_3}{D_n}$

Si $\beta_3 + \beta_5 \neq 0$ de manera análoga al caso anterior es posible hacer $\beta_2' = 0$, rehaciendo los cambios,

$$\beta_1' = \frac{A_1(B_{n-2}\beta_1 + B_{n-1}\beta_4) + (A_{n-1}B_{n-2} - A_{n-2}B_{n-1})(\beta_3 - \beta_5)}{D_n}$$
$$\beta_2' = \frac{B_{n-2}^2\beta_2 + B_{n-2}B_{n-1}(\beta_3 + \beta_5)}{D_n}$$
$$\beta_3' = \frac{B_{n-1}C_{n-2}\beta_5 + B_{n-2}C_{n-1}\beta_3}{D_n}$$

$$\beta_4' = \frac{A_1(C_{n-2}\beta_1 + C_{n-1}\beta_4) + (A_{n-1}C_{n-2} - A_{n-2}C_{n-1})(\beta_3 - \beta_5)}{D_n}$$

$$\beta_5' = \frac{B_{n-2}C_{n-1}\beta_5 + B_{n-1}C_{n-2}\beta_3}{D_n}$$

con

$$\begin{aligned}
&C_{n-2}C_{n-1}(\beta_3 + \beta_5)) = 0\\
&B_{n-2}B_{n-1}(\beta_3 + \beta_5)) = 0\\
&A_{n-1}\beta_5 = 0\\
&A_{n-2}\beta_3 = 0\\
&A_1D_n(B_{n-2}C_{n-1} - B_{n-1}C_{n-2}) \neq 0
\end{aligned}$$

puesto que $\beta_3 + \beta_5 \neq 0 \Rightarrow B_{n-1} = 0 = C_{n-2}$ ó $B_{n-2} = 0 = C_{n-1}$. Se tiene también que $\beta_3\beta_5 = 0$ lo que nos lleva a distinguir dos casos:

1) $\beta_3 \neq 0$ y $\beta_5 = 0$

2) $\beta_3 = 0$ y $\beta_5 \neq 0$. En este caso, si se elige $B_{n-2} = 0 = C_{n-1}$ se llegaría a que

$$\beta_3' = \frac{B_{n-1}C_{n-2}}{D_n}\beta_5 \neq 0$$

$$\beta_5' = \frac{B_{n-1}C_{n-2}}{D_n}\beta_3 = 0$$

que corresponde con el caso 1).

Así, $\beta_3 \neq 0$ y $\beta_5 = 0$ lo que implica que $A_{n-2} = 0$. Se queda:

$$\beta_1' = \frac{A_1(B_{n-2}\beta_1 + B_{n-1}\beta_4) + A_{n-1}B_{n-2}\beta_3}{D_n}$$

$$\beta_4' = \frac{A_1(C_{n-2}\beta_1 + C_{n-1}\beta_4) + A_{n-1}C_{n-2}\beta_3}{D_n}$$

con $B_{n-1} = C_{n-2} = 0$ ó $B_{n-2} = C_{n-1} = 0$ y $A_1D_n(B_{n-2}C_{n-1} - B_{n-1}C_{n-2}) \neq 0$.

En este caso, la familia viene dada por la siguiente ley:

$$\begin{cases}
[e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4\\
[e_1, e_{n-2}] = \beta_1 e_n\\
[e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n\\
[e_1, e_{n-1}] = \beta_4 e_n
\end{cases}$$

La nulidad de β_4 es invariante pues

$$dim(R(\mathcal{L})) = \begin{cases} n-2 & \text{si } \beta_4 \neq 0 \\ n-3 & \text{si } \beta_4 = 0 \end{cases}$$

Caso 43 $\beta_3\beta_4 \neq 0$, $\beta_2 = \beta_5 = 0$. En este caso, si se elige $B_{n-1} = C_{n-2} = 0$ y $A_{n-1} = -\dfrac{A_1\beta_1}{\beta_3}$ se consigue $\beta_1' = 0$ y $\beta_4' \neq 0$. La ley viene dada por:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta_4 e_n \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala lleva a $\mu^{33}_{(I,1,1,2)}$ cuya ley viene dada por:

$$\mu^{33}_{(I,1,1,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta_4 e_n \end{cases}$$

Caso 44 $\beta_3 \neq 0$, $\beta_2 = \beta_4 = \beta_5 = 0$. En este caso se tendría:

$$\beta_1' = \frac{B_{n-2}(A_1\beta_1 + A_{n-1}\beta_3)}{D_n}$$

$$\beta_4' = \frac{C_{n-2}(A_1\beta_1 + A_{n-1}\beta_3)}{D_n}$$

escogiendo $A_{n-1} = -\dfrac{A_1\beta_1}{\beta_3}$ se consigue $\beta_1' = \beta_4' = 0$. La ley queda:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \beta_3 e_n \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala lleva a $\mu^{34}_{(I,1,1,2)}$ cuya ley viene dada por:

$$\mu^{34}_{(I,1,1,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n \end{cases}$$

Si $\beta_3 + \beta_5 = 0$ y $\beta_3\beta_5 = 0 \Rightarrow \beta_3 = \beta_5 = 0$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\beta_1' &= \frac{A_1(B_{n-2}\beta_1 + B_{n-1}\beta_4)}{D_n} \\
\beta_2' &= \frac{B_{n-2}^2\beta_2}{D_n} \\
\beta_3' &= 0 \\
\beta_4' &= \frac{A_1(C_{n-2}\beta_1 + C_{n-1}\beta_4)}{D_n} \\
\beta_5' &= 0
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
&C_{n-2}\beta_2 = 0 \\
&A_{n-2}\beta_2 = 0 \\
&A_1D_n(B_{n-2}C_{n-1} - B_{n-1}C_{n-2}) \neq 0
\end{aligned}$$

De manera análoga a casos anteriores se tiene que la nulidad de β_2 es invariante pues si $\beta_2 = 0 \Rightarrow \beta_2' = 0$ y si $\beta_2 \neq 0 \Rightarrow C_{n-2} = 0 \Rightarrow B_{n-2} \neq 0 \Rightarrow \beta_2' \neq 0$. Por otro lado la nulidad de β_4 también lo es pues

$$dim(R(\mathcal{L})) = \begin{cases} n-2 & \text{si } \beta_4 \neq 0 \\ n-3 & \text{si } \beta_4 = 0 \end{cases}$$

Obsérvese que si $\beta_4 \neq 0$ eligiendo $B_{n-1} = -\dfrac{B_{n-2}\beta_1}{\beta_4}$ y $C_{n-1} \neq -\dfrac{C_{n-2}\beta_1}{\beta_4}$ se consigue hacer $\beta_1' = 0$. Téngase en cuenta que se están clasificando las no escindidas, por tanto el único caso que da álgebras no escindidas es el siguiente:

$$\beta_3 = \beta_5 = 0 \Rightarrow \beta_2 \neq 0 \Rightarrow \beta_4 \neq 0 \Rightarrow \beta_1 = 0 \quad \textbf{Caso 45}$$

Caso 45 $\beta_2\beta_4 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_3 = \beta_5 = 0$. La ley viene dada por:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \beta_2 e_n \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta_4 e_n \end{cases}$$

Un sencillo cambio de escala lleva a $\mu^{35}_{(I,1,1,2)}$ cuya ley viene dada por:

$$\mu^{35}_{(I,1,1,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_n \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

□

2.1.4 Álgebras de Leibniz $\mu_{(I,1,2,2)}$

En esta sección se clasificarán las álgebras de Leibniz 3-filiformes graduadas naturalmente de dimensión n, $n \geq 8$, de Tipo I y tal que e_{n-2} está en el primer subespacio, e_{n-1} y e_n en el segundo subespacio de la graduación natural, es decir,

$$< e_1, e_{n-2} > \oplus < e_2, e_{n-1}, e_n > \oplus < e_3 > \cdots \oplus < e_{n-4} > \oplus < e_{n-3} >$$

Como las álgebras de Leibniz 3-filiformes graduadas naturalmente escindidas Tipo I están ya consideradas en la sección anterior nos limitaremos aquí al estudio de las no escindidas.

Teorema 2.1.5 *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz de tipo $\mu_{(I,1,2,2)}$. Entonces $\mathcal{L}$ es isomorfa a una cuya ley, respecto de una base adaptada $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, está determinada por:*

$\mu^1_{(I,1,2,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_2 + e_{n-1} \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_n \end{cases}$$

$\mu^2_{(I,1,2,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_{n-1} \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_n \end{cases}$$

$\mu^{3,k}_{(I,1,2,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_2 + e_n \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = ke_n & k \in \mathbf{C} \\ [e_i, e_{n-1}] = e_{i+2}, & 1 \leq i \leq n-5 \end{cases}$$

$\mu^4_{(I,1,2,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_n \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_n \\ [e_i, e_{n-1}] = e_{i+2}, & 1 \leq i \leq n-5 \end{cases}$$

$\mu^5_{(I,1,2,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_i, e_{n-1}] = e_{i+2}, & 1 \le i \le n-5 \end{cases}$$

Demostración. Si $\mathcal{L}$ está en las condiciones del enunciado la ley de la familia viene dada por:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = \alpha_{1,n-2}e_2 + \beta_{1,n-2}e_{n-1} + \gamma_{1,n-2}e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha_{i,n-2}e_{i+1}, & 2 \le i \le n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \alpha_{n-2,n-2}e_2 + \beta_{n-2,n-2}e_{n-1} + \gamma_{n-2,n-2}e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \alpha_{n-1,n-2}e_3 & \\ [e_n, e_{n-2}] = \alpha_{n,n-2}e_3 & \\ [e_i, e_{n-1}] = \alpha_{i,n-1}e_{i+2}, & 1 \le i \le n-5 \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = \alpha_{n-2,n-1}e_3 & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \alpha_{n-1,n-1}e_4 & \\ [e_n, e_{n-1}] = \alpha_{n,n-1}e_4 & \\ [e_i, e_n] = \alpha_{i,n}e_{i+2}, & 1 \le i \le n-5 \\ [e_{n-2}, e_n] = \alpha_{n-2,n}e_3 & \\ [e_{n-1}, e_n] = \alpha_{n-1,n}e_4 & \\ [e_n, e_n] = \alpha_{n,n}e_4 & \end{cases}$$

Usando ahora la identidad de Leibniz tenemos que

(1) $\mathcal{L}(e_i, e_{n-2}, e_1)$, $1 \le i \le n-5 \Rightarrow \alpha_{i+1,n-2} = \alpha_{i,n-2} \Rightarrow \alpha_{i,n-2} = \alpha_{n-2}$, $1 \le i \le n-4$

(2) $\mathcal{L}(e_i, e_{n-1}, e_1)$, $1 \le i \le n-6 \Rightarrow \alpha_{i+1,n-1} = \alpha_{i,n-1} \Rightarrow \alpha_{i,n-1} = \alpha_{n-1}$, $1 \le i \le n-5$

(4) $\mathcal{L}(e_i, e_n, e_1)$, $1 \le i \le n-6 \Rightarrow \alpha_{i+1,n} = \alpha_{i,n} \Rightarrow \alpha_{i,n} = \alpha_n$, $1 \le i \le n-5$

Sean ahora $j, h \in \{n-2, n-1, n\}$, se considera la identidad de Leibniz dada por

$\mathcal{L}(e_j, e_h, e_1)) \Rightarrow \alpha_{j,h} = 0,\ j, h \in \{n-2, n-1, n\}$, es decir

$$\begin{aligned}
\alpha_{n-2,n-2} &= \alpha_{n-1,n-2} = \alpha_{n,n-2} = 0\\
\alpha_{n-2,n-1} &= \alpha_{n-1,n-1} = \alpha_{n,n-1} = 0\\
\alpha_{n-2,n} &= \alpha_{n-1,n} = \alpha_{n,n} = 0
\end{aligned}$$

(5) $\mathcal{L}(e_1, e_1, e_{n-2}) \Rightarrow \alpha_{n-1}\beta_{1,n-2} + \alpha_n\gamma_{1,n-2} = 0$

(6) $\mathcal{L}(e_1, e_{n-2}, e_{n-2}) \Rightarrow \alpha_{n-1}\beta_{n-2,n-2} + \alpha_n\gamma_{n-2,n-2} = 0$

Renombrando los parámetros, se obtiene la ley

$$\begin{cases}
[e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4\\
[e_1, e_{n-2}] = \alpha_1 e_2 + \beta_1 e_{n-1} + \gamma_1 e_n & \\
[e_i, e_{n-2}] = \alpha_1 e_{i+1}, & 2 \le i \le n-4\\
[e_{n-2}, e_{n-2}] = \beta_2 e_{n-1} + \gamma_2 e_n & \\
[e_i, e_{n-1}] = \alpha_2 e_{i+2}, & 1 \le i \le n-5\\
[e_i, e_n] = \alpha_3 e_{i+2}, & 1 \le i \le n-5
\end{cases}$$

verificándose que $\alpha_2\beta_1 + \alpha_3\gamma_1 = 0$ y $\alpha_2\beta_2 + \alpha_3\gamma_2 = 0$.

Es fácil comprobar que la dimensión de la derivada varía dependiendo de los parámetros β_1, β_2, γ_1 y γ_2 de la siguiente forma:

$$dim(\mathcal{L}^2) = n - 4 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

Esto permite distinguir tres casos no isomorfos entre sí:

• **Caso 1.-** $\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 \neq 0$. Esto implica que el sistema de restricciones anterior $(\beta_1\alpha_2 + \alpha_3\gamma_1 = 0,\ \beta_2\alpha_2 + \alpha_3\gamma_2 = 0)$ tiene solución única, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Además, el cambio de base dado por:

$$\begin{cases}
e'_i = e_i, & i \neq n-1, n\\
e'_{n-1} = \beta_1 e_{n-1} + \gamma_1 e_n & \\
e'_n = \beta_2 e_{n-1} + \gamma_2 e_n &
\end{cases}$$

permite hacer $\beta_1 = 1$, $\gamma_1 = 0$, $\beta_2 = 0$, $\gamma_2 = 1$. La ley del álgebra puede escribirse por medio de los siguientes productos

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = \alpha e_2 + e_{n-1} & \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_n & \end{cases}$$

Para estudiar la nulidad o no del único parámetro que queda, se hará uso de cambios de base genéricos tal y como se ha hecho en casos anteriores.

$$\begin{aligned}
e'_1 &= A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3 + \cdots + A_{n-3}e_{n-3} + A_{n-2}e_{n-2} + A_{n-1}e_{n-1} + A_ne_n \\
e'_2 &= [e'_1, e'_1] = (A_1 + A_{n-2}\alpha)(A_1e_2 + A_2e_3 + \cdots + A_{n-4}e_{n-3}) + A_1A_{n-2}e_{n-1} + A_{n-2}^2e_n \\
e'_3 &= [e'_2, e'_1] = (A_1 + A_{n-2}\alpha)^2(A_1e_3 + A_2e_4 + \cdots + A_{n-5}e_{n-3}) \\
e'_4 &= [e'_3, e'_1] = (A_1 + A_{n-2}\alpha)^3(A_1e_4 + A_2e_5 + \cdots + A_{n-6}e_{n-3}) \\
&\vdots \\
e'_{n-4} &= [e'_{n-5}, e'_1] = (A_1 + A_{n-2}\alpha)^{n-5}(A_1e_{n-4} + A_2e_{n-3}) \\
e'_{n-3} &= [e'_{n-4}, e'_1] = (A_1 + A_{n-2}\alpha)^{n-4}A_1e_{n-3} \\
e'_{n-2} &= B_1e_1 + B_2e_2 + B_3e_3 + \cdots + B_{n-3}e_{n-3} + B_{n-2}e_{n-2} + B_{n-1}e_{n-1} + B_ne_n
\end{aligned}$$

con $A_1(A_1 + A_{n-2}\alpha) \neq 0$. Los vectores e_{n-1} y e_n vienen generados.

Para no salirse de la familia se ha de verificar que:

$$[e'_{n-2}, e'_1] = 0 \Rightarrow B_i = 0, \qquad 1 \leq i \leq n-4$$

y, entonces $B_{n-2} \neq 0$.

Un simple cálculo prueba que

$$\alpha' = \frac{B_{n-2}\alpha}{A_1 + A_{n-2}\alpha}$$

lo que demuestra que la nulidad de α es invariante teniendo:

- Si $\alpha \neq 0$, un sencillo cambio de escala permite obtener el álgebra $\mu^1_{(I,1,2,2)}$ cuya ley se expresa:

$$\mu^1_{(I,1,2,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_2 + e_{n-1} & \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_n & \end{cases}$$

- Si $\alpha = 0$, obteniendo el álgebra $\mu^2_{(I,1,2,2)}$ cuya ley se expresa:

$$\mu^2_{(I,1,2,2)}: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_{n-1} & \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_n & \end{cases}$$

- **Caso 2.-** $\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 = 0$ con algún elemento distinto de cero. En este caso, $\beta_2 e_{n-1} + \gamma_2 e_n = k(\beta_1 e_{n-1} + \gamma_1 e_n)$.

Haciendo $e_n' = \beta_1 e_{n-1} + \gamma_1 e_n$ se tendría que $[e_i', e_n'] = 0, \quad 1 \leq i \leq n-5 \Rightarrow \alpha_3 = 0$.

Resulta la ley

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = \alpha_1 e_2 + e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha_1 e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = k e_n & \\ [e_i, e_{n-1}] = \alpha_2 e_{i+2}, & 1 \leq i \leq n-5 \end{cases}$$

Si $\alpha_2 = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_n^{3F} = \mathcal{L}_{n-1}^{2F} \oplus < e_{n-1} >$. Por tanto se tendrá que $\alpha_2 \neq 0$.

La nulidad de k es invariante pues

$$dim(\mathcal{I}) = \begin{cases} 2 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

Faltaría por estudiar el parámetro α_1. De manera análoga a casos anteriores, es necesario usar cambios de base genéricos y se llega a que:

$$\alpha_1' = \frac{B_{n-2}\alpha_1}{A_1 + A_{n-2}\alpha_1}$$

con $(A_1 + A_{n-2}\alpha_1)B_{n-2} \neq 0$ lo que prueba que la nulidad es invariante. Con todo esto los casos a distinguir son los siguientes:

$$\alpha_2 \neq 0 \begin{cases} k \neq 0 \begin{cases} \alpha_1 \neq 0 \\ \\ \alpha_1 = 0 \end{cases} \\ k = 0 \begin{cases} \alpha_1 \neq 0 \\ \\ \alpha_1 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Caso a}}$. $\alpha_1\alpha_2 k \neq 0$, un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{3,k}_{(I,1,2,2)}$ con $k \in \mathbf{C} - \{0\}$ cuya ley viene dada por:

$$\mu^{3,k}_{(I,1,2,2)}|_{k\neq 0}: \left\{ \begin{array}{ll} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_2 + e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = ke_n & k \in \mathbf{C} - \{0\} \\ [e_i, e_{n-1}] = e_{i+2}, & 1 \leq i \leq n-5 \end{array} \right.$$

$\boxed{\text{Caso b}}$. $\alpha_2 k \neq 0$, $\alpha_1 = 0$, un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{4}_{(I,1,2,2)}$ cuya ley viene dada por:

$$\mu^{4}_{(I,1,2,2)}: \left\{ \begin{array}{ll} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_i, e_{n-1}] = e_{i+2}, & 1 \leq i \leq n-5 \end{array} \right.$$

$\boxed{\text{Caso c}}$. $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$, $k = 0$, un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{3,0}_{(I,1,2,2)}$.

$\boxed{\text{Caso d}}$. $\alpha_2 \neq 0$, $k = \alpha_1 = 0$, un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{5}_{(I,1,2,2)}$ cuya ley viene dada por:

$$\mu^{5}_{(I,1,2,2)}: \left\{ \begin{array}{ll} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_i, e_{n-1}] = e_{i+2}, & 1 \leq i \leq n-5 \end{array} \right.$$

- **Caso 3.-** $\beta_1 = \gamma_1 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$. En este caso resulta la familia

$$\left\{ \begin{array}{ll} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha_1 e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-1}] = \alpha_2 e_{i+2}, & 1 \leq i \leq n-5 \\ [e_i, e_n] = \alpha_3 e_{i+2}, & 1 \leq i \leq n-5 \end{array} \right.$$

Se puede suponer $\alpha_i \neq 0$ para que resulten álgebras no escindidas. Si $\alpha_i \neq 0$, $\forall i$ con el cambio de base dado por

$$\left\{ \begin{array}{ll} e'_i = e_i, & i \neq n \\ e'_n = -\alpha_3 e_{n-1} + \alpha_2 e_n & \end{array} \right.$$

se llega a que $\alpha'_3 = 0$ y estaríamos en el caso anterior obteniéndose, por tanto, un álgebra escindida. □

2.1.5 Álgebras de Leibniz $\mu_{(I,1,2,3)}$

En esta sección se clasificarán las álgebras de Leibniz 3-filiformes graduadas naturalmente de dimensión n, $n \geq 8$, de Tipo I y tal que e_{n-2} está en el primer subespacio, e_{n-1} en el segundo y e_n en el tercer subespacio de la graduación natural, es decir,

$$< e_1, e_{n-2} > \oplus < e_2, e_{n-1} > \oplus < e_3, e_n > \cdots \oplus < e_{n-4} > \oplus < e_{n-3} >$$

Como las álgebras de Leibniz 3-filiformes graduadas naturalmente escindidas Tipo I están ya consideradas en la sección anterior nos limitaremos aquí al estudio de las no escindidas..

Teorema 2.1.6 *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz de tipo $\mu_{(I,1,2,3)}$. Entonces $\mathcal{L}$ es isomorfa a una cuya ley, respecto de una base adaptada $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, está determinada por:*

$\mu^{1,\lambda}_{(I,1,2,3)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_2 + e_{n-1} & \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \lambda e_{n-1} & \lambda \in \mathbf{C} \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \end{cases}$$

$\mu^{2}_{(I,1,2,3)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_{n-1} & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \end{cases}$$

$\mu^{3,\lambda}_{(I,1,2,3)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_{n-1} & \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \lambda e_{n-1} & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \end{cases}$$

$\mu^{4}_{(I,1,2,3)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_{n-1} & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \end{cases}$$

Demostración. Si $\mathcal{L}$ está en las condiciones del enunciado la ley de la familia viene dada por:

$$\begin{cases}
[e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\
[e_1, e_{n-2}] = \alpha_{1,n-2}e_2 + \beta_{1,n-2}e_{n-1} & \\
[e_2, e_{n-2}] = \alpha_{2,n-2}e_3 + \gamma_{2,n-2}e_n & \\
[e_i, e_{n-2}] = \alpha_{i,n-2}e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-4 \\
[e_{n-2}, e_{n-2}] = \alpha_{n-2,n-2}e_2 + \beta_{n-2,n-2}e_{n-1} & \\
[e_{n-1}, e_{n-2}] = \alpha_{n-1,n-2}e_3 + \gamma_{n-1,n-2}e_n & \\
[e_n, e_{n-2}] = \alpha_{n,n-2}e_4 & \\
[e_1, e_{n-1}] = \alpha_{1,n-1}e_3 + \gamma_{1,n-1}e_n & \\
[e_i, e_{n-1}] = \alpha_{i,n-1}e_{i+2}, & 2 \leq i \leq n-5 \\
[e_{n-2}, e_{n-1}] = \alpha_{n-2,n-1}e_3 + \gamma_{n-2,n-1}e_n & \\
[e_{n-1}, e_{n-1}] = \alpha_{n-1,n-1}e_4 & \\
[e_n, e_{n-1}] = \alpha_{n,n-1}e_5 & \\
[e_i, e_n] = \alpha_{i,n}e_{i+3}, & 1 \leq i \leq n-6 \\
[e_{n-2}, e_n] = \alpha_{n-2,n}e_4 & \\
[e_{n-1}, e_n] = \alpha_{n-1,n}e_5 & \\
[e_n, e_n] = \alpha_{n,n}e_6 &
\end{cases}$$

Usando ahora la identidad de Leibniz tenemos que

(1) $\quad \mathcal{L}(e_1, e_{n-2}, e_1) \Rightarrow \alpha_{2,n-2} = \alpha_{1,n-2} \ \wedge \ \gamma_{2,n-2} = 0$

(2) $\quad \mathcal{L}(e_i, e_{n-2}, e_1) \Rightarrow \alpha_{i+1,n-2} = \alpha_{i,n-2}, \quad 2 \leq i \leq n-5$

$$(1) + (2) \Rightarrow \alpha_{i,n-2} = \alpha_1, \quad 1 \leq i \leq n-4$$

(3) $\quad \mathcal{L}(e_1, e_{n-1}, e_1) \Rightarrow \alpha_{2,n-1} = \alpha_{1,n-1}$

(4) $\quad \mathcal{L}(e_i, e_{n-1}, e_1) \Rightarrow \alpha_{i+1,n-1} = \alpha_{i,n-1}, \quad 2 \leq i \leq n-5$

$$(3) + (4) \Rightarrow \alpha_{i,n-1} = \alpha_2, \quad 1 \leq i \leq n-5$$

(5) $\quad \mathcal{L}(e_i, e_n, e_1) \Rightarrow \alpha_{i,n} = \alpha_3, \quad 1 \leq i \leq n-6$

Sean ahora $j, h \in \{n-2, n-1, n\}$, se considera la identidad de Leibniz dada por $\mathcal{L}(e_j, e_h, e_1)) \Rightarrow \alpha_{j,h} = 0$, $j, h \in \{n-2, n-1, n\}$, es decir

$$\begin{aligned}
&\alpha_{n-2,n-2} = \alpha_{n-1,n-2} = \alpha_{n,n-2} = 0 \\
&\alpha_{n-2,n-1} = \alpha_{n-1,n-1} = \alpha_{n,n-1} = 0 \\
&\alpha_{n-2,n} = \alpha_{n-1,n} = \alpha_{n,n} = 0
\end{aligned}$$

Resulta la familia

$$\begin{cases}
[e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\
[e_1, e_{n-2}] = \alpha_1 e_2 + \beta_1 e_{n-1} & \\
[e_i, e_{n-2}] = \alpha_1 e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\
[e_{n-2}, e_{n-2}] = \beta_2 e_{n-1} & \\
[e_{n-1}, e_{n-2}] = \gamma_1 e_n & \\
[e_1, e_{n-1}] = \alpha_2 e_3 + \gamma_2 e_n & \\
[e_i, e_{n-1}] = \alpha_2 e_{i+2}, & 2 \leq i \leq n-5 \\
[e_{n-2}, e_{n-1}] = \gamma_3 e_n & \\
[e_i, e_n] = \alpha_3 e_{i+3}, & 1 \leq i \leq n-6
\end{cases}$$

con $\beta_i \neq 0$ y $\gamma_i \neq 0$ para algún valor de i.

Usando de nuevo la identidad de Leibniz, resulta que

(6) $\mathcal{L}(e_{n-2}, e_1, e_{n-2}) \Rightarrow \beta_1\gamma_3 = 0$

(7) $\mathcal{L}(e_{n-2}, e_{n-2}, e_{n-2}) \Rightarrow \beta_2\gamma_3 = 0$

(8) $\mathcal{L}(e_1, e_{n-2}, e_{n-2}) \Rightarrow \alpha_2\beta_2 = 0 \ \wedge \ \beta_2\gamma_2 = 0$

(9) $\mathcal{L}(e_1, e_{n-1}, e_{n-2}) \Rightarrow \alpha_3\gamma_1 = 0$

(10) $\mathcal{L}(e_1, e_{n-2}, e_{n-1}) \Rightarrow \alpha_3\gamma_3 = 0$

(11) $\mathcal{L}(e_1, e_1, e_{n-2}) \Rightarrow \alpha_2\beta_1 = 0 \ \wedge \ \beta_1\gamma_2 = 0$

(12) $\mathcal{L}(e_1, e_1, e_{n-1}) \Rightarrow \alpha_3\gamma_2 = 0$

Obsérvese que

$$\begin{cases}
\alpha_2\beta_1 = 0 \\
\alpha_2\beta_2 = 0
\end{cases}$$

y se tiene que $\beta_i \neq 0$ para algún $i \in \{1, 2\} \Rightarrow \alpha_2 = 0$.

Análogamente, $\alpha_3 = 0$ pues

$$\begin{cases} \alpha_3\beta_1 = 0 \\ \alpha_3\beta_2 = 0 \end{cases}$$

Lo mismo ocurre para $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$.

Resulta la familia de ley

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = \alpha e_2 + \beta_1 e_{n-1} & \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \beta_2 e_{n-1} & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \gamma e_n & \end{cases}$$

con $\gamma \neq 0$ y $\beta_i \neq 0$ para algún valor de $i \in \{1, 2\}$.

Realizando ahora un cambio de base genérico

$$\begin{aligned}
e'_1 &= A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3 + \cdots + A_{n-3}e_{n-3} + A_{n-2}e_{n-2} + A_{n-1}e_{n-1} + A_ne_n \\
e'_2 &= [e'_1, e'_1] = (A_1 + A_{n-2}\alpha)(A_1e_2 + A_2e_3 + \cdots + A_{n-4}e_{n-3}) + A_{n-2}(A_1\beta_1 + \\
&\quad + A_{n-2}\beta_2)e_{n-1} + A_{n-1}(A_{n-2}\gamma_1 + A_1\gamma_2)e_n \\
e'_3 &= [e'_2, e'_1] = (A_1 + A_{n-2}\alpha)^2(A_1e_3 + A_2e_4 + \cdots + A_{n-5}e_{n-3}) + A^2_{n-2}(A_1\beta_1 + \\
&\quad + A_{n-2}\beta_2)\gamma_1e_n \\
e'_4 &= [e'_3, e'_1] = (A_1 + A_{n-2}\alpha)^3(A_1e_4 + A_2e_5 + \cdots + A_{n-6}e_{n-3}) \\
&\ \vdots \\
e'_{n-4} &= [e'_{n-5}, e'_1] = (A_1 + A_{n-2}\alpha)^{n-5}(A_1e_{n-4} + A_2e_{n-3}) \\
e'_{n-3} &= [e'_{n-4}, e'_1] = (A_1 + A_{n-2}\alpha)^{n-4}A_1e_{n-3} \\
e'_{n-2} &= B_1e_1 + B_2e_2 + B_3e_3 + \cdots + B_{n-3}e_{n-3} + B_{n-2}e_{n-2} + B_{n-1}e_{n-1} + B_ne_n \\
e'_{n-1} &= C_1e_1 + C_2e_2 + C_3e_3 + \cdots + C_{n-3}e_{n-3} + C_{n-2}e_{n-2} + C_{n-1}e_{n-1} + C_ne_n \\
e'_n &= D_1e_1 + D_2e_2 + D_3e_3 + \cdots + D_{n-3}e_{n-3} + D_{n-2}e_{n-2} + D_{n-1}e_{n-1} + D_ne_n
\end{aligned}$$

con $A_1(A_1 + A_{n-2}\alpha) \neq 0$

Para no salirse de la familia hay que imponer que:

$$[e'_{n-2}, e'_1] = 0 \Rightarrow \begin{cases} B_i = 0, & 1 \leq i \leq n-4 \\ A_{n-2}B_{n-2}\beta_2 = 0 & \\ A_{n-2}B_{n-1} = 0 & \end{cases}$$

$$[e'_{n-1}, e'_1] = 0 \Rightarrow \begin{cases} C_i = 0, & 1 \le i \le n-4 \\ A_{n-2}C_{n-2}\beta_2 = 0 \\ A_{n-2}C_{n-1} = 0 \end{cases}$$

$$[e'_n, e'_1] = 0 \Rightarrow \begin{cases} D_i = 0, & 1 \le i \le n-4 \\ A_{n-2}D_{n-2}\beta_2 = 0 \\ A_{n-2}D_{n-1} = 0 \end{cases}$$

$$[e'_1, e'_n] = 0 \Rightarrow D_{n-2}\alpha = 0, \quad D_{n-2}\beta_1 = 0, \quad A_{n-1}D_{n-2} = 0$$

$$[e'_1, e'_{n-1}] = 0 \Rightarrow C_{n-2}\alpha = 0, \quad C_{n-2}\beta_1 = 0, \quad A_{n-1}C_{n-2} = 0$$

$$[e'_{n-4}, e'_{n-1}] = 0 \Rightarrow C_{n-2}\alpha = 0$$

$$[e'_{n-2}, e'_n] = 0 \Rightarrow B_{n-2}D_{n-2}\beta_2 = 0 \ \wedge \ B_{n-1}D_{n-2} = 0$$

$$[e'_{n-1}, e'_n] = 0 \Rightarrow C_{n-2}D_{n-2}\beta_2 = 0 \ \wedge \ C_{n-1}D_{n-2} = 0$$

$$[e'_n, e'_n] = 0 \Rightarrow D_{n-2}\beta_2 = 0 \ \wedge \ D_{n-1}D_{n-2} = 0$$

Como $D_{n-2}\beta_1 = D_{n-2}\beta_2 = 0 \Rightarrow D_{n-2} = 0$.

$$[e'_{n-2}, e'_{n-1}] = 0 \Rightarrow B_{n-2}C_{n-2}\beta_2 = 0 \ \wedge \ B_{n-1}C_{n-2} = 0$$

$$[e'_{n-1}, e'_{n-1}] = 0 \Rightarrow C_{n-2}\beta_2 = 0 \ \wedge \ C_{n-2}C_{n-1} = 0$$

$$[e'_n, e'_{n-1}] \Rightarrow C_{n-2}D_{n-1} = 0$$

$$[e'_n, e'_{n-2}] \Rightarrow B_{n-2}D_{n-1} = 0$$

Resumiendo, se tiene que

$$\begin{aligned} & C_{n-2}\alpha = C_{n-2}\beta_2 = 0 \\ & A_{n-2}B_{n-2}\beta_2 = A_{n-2}C_{n-2}\beta_2 = B_{n-2}C_{n-2}\beta_2 = 0 \\ & A_{n-2}B_{n-1} = A_{n-1}B_{n-2} = A_{n-2}C_{n-1} = 0 \\ & A_{n-2}D_{n-1} = B_{n-1}C_{n-2} = B_{n-2}D_{n-1} = 0 \\ & C_{n-2}C_{n-1} = C_{n-2}D_{n-1} = 0 \end{aligned}$$

Además, de la condición de que el determinante del cambio sea distinto de cero tenemos que

$$A_1(A_1 + A_{n-2}\alpha)\det\begin{pmatrix} B_{n-2} & C_{n-2} & 0 \\ B_{n-1} & C_{n-1} & D_{n-1} \\ B_n & C_n & D_n \end{pmatrix} \neq 0$$

Si $D_{n-1} \neq 0 \Rightarrow B_{n-2} = C_{n-2} = 0 \Rightarrow$ que el determinante del cambio sería 0. Por tanto $D_{n-1} = 0 \Rightarrow D_n \neq 0$. Por otro lado, $B_{n-1}C_{n-2} = 0 \Rightarrow B_{n-2}C_{n-1} \neq 0 \Rightarrow A_{n-2} = C_{n-2} = 0$. Además, $A_1 \neq 0$.

Los nuevos parámetros resultan:

$[e'_{n-4}, e'_{n-2}] = \alpha' e'_{n-3} \Rightarrow \alpha' = \frac{B_{n-2}}{A_1}\alpha$

$[e'_{n-1}, e'_{n-2}] = \gamma' e'_n \Rightarrow \gamma' = \frac{B_{n-2}C_{n-1}}{D_n}\gamma \neq 0$ y $D_{n-3} = 0$

$[e'_{n-2}, e'_{n-2}] = \beta'_2 e'_{n-1} \Rightarrow \beta'_2 = \frac{B^2_{n-2}}{C_{n-1}}\beta_2$ y $C_{n-3} = B_{n-1}C_{n-1}\gamma - \beta_{n-2}C_n\beta_2 = 0$

$[e'_1, e'_{n-2}] = \alpha' e_2 + \beta_1 e'_{n-1} \Rightarrow \beta'_1 = \frac{A_1 B_{n-2}}{C_{n-1}}\beta_1$ y $C_n\beta'_1 = 0$

En resumen, la ley del álgebra vendrá dada por

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = \alpha e_2 + \beta_1 e_{n-1} & \\ [e_i, e_{n-2}] = \alpha e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \beta_2 e_{n-1} & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = \gamma e_n & \end{cases}$$

con $\gamma \neq 0$, $\beta_i \neq 0$ para algún valor de $i \in \{1, 2\}$. Los parámetros resultan:

$$\alpha' = \frac{B_{n-2}}{A_1}\alpha$$

$$\beta'_1 = \frac{A_1 B_{n-2}}{C_{n-1}}\beta_1$$

$$\beta'_2 = \frac{B^2_{n-2}}{C_{n-1}}\beta_2$$

$$\gamma' = \frac{B_{n-2}C_{n-1}}{D_n}\gamma \neq 0$$

Se puede distinguir los siguientes casos no isomorfos entre sí:

$$\gamma \neq 0 \begin{cases} \alpha \neq 0 \begin{cases} \beta_1 \neq 0 \begin{cases} \beta_2 \neq 0 & \textbf{Caso 1} \\ \beta_2 = 0 & \textbf{Caso 2} \end{cases} \\ \beta_1 = 0 \Rightarrow \beta_2 \neq 0 \quad \textbf{Caso 3} \end{cases} \\ \alpha = 0 \begin{cases} \beta_1 \neq 0 \begin{cases} \beta_2 \neq 0 & \textbf{Caso 4} \\ \beta_2 = 0 & \textbf{Caso 5} \end{cases} \\ \beta_1 = 0 \Rightarrow \beta_2 \neq 0 \quad \textbf{Caso 6} \end{cases} \end{cases}$$

Caso 1 $\alpha\beta_1\beta_2\gamma \neq 0$. Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{1,\lambda}_{(I,1,2,3)}$ con $\lambda \in \mathbf{C} - \{0\}$ de ley

$$\mu^{1,\lambda}_{(I,1,2,3)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_2 + e_{n-1} & \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \lambda e_{n-1} & \lambda \in \mathbf{C} - \{0\} \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \end{cases}$$

Caso 2 $\alpha\beta_1\gamma \neq 0$, $\beta_2 = 0$. Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{1,0}_{(I,1,2,3)}$.

Caso 3 $\alpha\beta_2\gamma \neq 0$, $\beta_1 = 0$. Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{2}_{(I,1,2,3)}$ de ley

$$\mu^{2}_{(I,1,2,3)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_{n-1} & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \end{cases}$$

Caso 4 $\beta_1\beta_2\gamma \neq 0$, $\alpha = 0$. Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{3,\lambda}_{(I,1,2,3)}$ con $\lambda \in \mathbf{C} - \{0\}$ de ley

$$\mu^{3,\lambda}_{(I,1,2,3)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_{n-1} & \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \lambda e_{n-1} & \lambda \in \mathbf{C} - \{0\} \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \end{cases}$$

Caso 5 $\beta_1\gamma \neq 0$, $\alpha = \beta_2 = 0$. Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^{3,0}_{(I,1,2,3)}$.

Caso 6 $\beta_2\gamma \neq 0$, $\alpha = \beta_1 = 0$. Un sencillo cambio de escala permite obtener $\mu^4_{(I,1,2,3)}$ de ley

$$\mu^4_{(I,1,2,3)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_{n-1} \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n \end{cases}$$

$\square$

2.2 Álgebras de Leibniz 3-filiformes graduadas naturalmente de Tipo II

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz 3-filiforme graduada naturalmente, e_1 un vector característico y $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ una base adaptada de $\mathcal{L}$. Si $\mathcal{L}$ es de Tipo II se sigue que

$$R_{e_1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} J_1 & & & \\ \hline & J_{n-3} & & \\ \hline & & J_1 & \\ & & & J_1 \end{array} \right)$$

es decir,

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_j, e_1] = 0, & n-2 \leq j \leq n \end{cases}$$

Se considera la graduación natural $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_3 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_k$ donde $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}^i/\mathcal{L}^{i+1}$. Dicha graduación debe verificar que $\mathcal{L}^{n-3} \neq \{0\}$ y $\mathcal{L}^{n-2} = \{0\}$. Por tanto, se sigue que $k = n-3$. Es decir, se tiene que

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^2 \supset < e_3, e_4, \cdots, e_{n-2} > \\ &\mathcal{L}^3 \supset < e_4, \cdots, e_{n-2} > \\ &\qquad \vdots \\ &\mathcal{L}^i \supset < e_{i+1}, e_{i+2}, \cdots, e_{n-2} > \\ &\qquad \vdots \\ &\mathcal{L}^{n-3} \supset < e_{n-2} > \\ &\mathcal{L}^{n-2} = \{0\} \end{aligned}$$

y puesto que $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}^i/\mathcal{L}^{i+1}$, se tiene que $\mathcal{L}_i \supset < e_{i+1} >$, $2 \leq i \leq n-3$. Entonces, faltaría por conocer las posiciones en los subespacios de la graduación de los vectores e_{n-1} y e_n.

Se denotará por r_1 y r_2 las posiciones en los subespacios de la graduación natural de los vectores e_{n-1} y e_n, respectivamente. Esto es, $e_{n-1} \in \mathcal{L}_{r_1}$ y $e_n \in \mathcal{L}_{r_2}$. Obviamente, se puede considerar que $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq n$ (en otro caso se intercambian). Además, si $r_2 \in \{n-2, n-1, n\}$ se tiene que $c(\mathcal{L}) \neq (n-3,1,1,1)$ que no puede ser, luego se tiene que los valores admisibles para r_1 y r_2 son los comprendidos entre 1 y $n-3$, $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq n-3$. Se usará $\mu_{(II,r_1,r_2)}$ para indicar que es un álgebra de Leibniz 3-filiforme graduada naturalmente de Tipo II ocupando los vectores e_{n-1}, e_n las posiciones r_1, r_2 en la graduación natural.

2.2.1 Valores admisibles de r_1 y r_2

Se va a probar en esta sección que si el álgebra correspondiente es no escindida entonces los valores que pueden tomar r_1 y r_2 son $(r_1, r_2) \in \{(1,2),(2,2)\}$.

Lema 2.2.1 *Los valores admisibles de r_1 y r_2, son*

$$(r_1, r_2) = \{(1,1),(1,2),(2,2)\}$$

Demostración. Supóngase $\boxed{2 < r_1 < r_2}$. En este caso se tiene la familia

$$\left\{\begin{array}{ll}
[e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\
[e_1, e_i] = \alpha_{1,i} e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3, \quad i \neq r_1, r_2 \\
[e_1, e_{r_1}] = \alpha_{1,r_1} e_{r_1+1} + \beta_1 e_{n-1} & \\
[e_1, e_{r_2}] = \alpha_{1,r_2} e_{r_2+1} + \gamma_1 e_n & \\
[e_1, e_{n-1}] = \alpha_{1,n-1} e_{r_1+2} & \\
[e_1, e_n] = \alpha_{1,n} e_{r_2+2} & \\
[e_i, e_j] = \alpha_{i,j} e_{i+j-1}, \;\; i+j \neq r_1+2, r_2+2 & 2 \leq i,j \leq n-3, \;\; i+j \leq n-2, \\
[e_i, e_{r_1+2-i}] = \alpha_{i,r_1+2-i} e_{r_1+1} + \beta_i e_{n-1}, & 2 \leq i \leq r_1 \\
[e_i, e_{r_2+2-i}] = \alpha_{i,r_2+2-i} e_{r_2+1} + \gamma_i e_n, & 2 \leq i \leq r_2 \\
[e_{n-1}, e_i] = \alpha_{n-1,i} e_{r_1+i}, & 2 \leq i \leq n-r_1-2 \\
[e_n, e_i] = \alpha_{n,i} e_{r_2+i}, & 2 \leq i \leq n-r_2-2 \\
[e_i, e_{n-1}] = \alpha_{i,n-1} e_{r_1+i}, & 2 \leq i \leq n-r_1-2 \\
[e_i, e_n] = \alpha_{i,n} e_{r_2+i}, & 2 \leq i \leq n-r_2-2 \\
[e_{n-1}, e_{n-1}] = \alpha_{n-1,n-1} e_{2r_1+1} & \text{si } r_1 \leq \frac{n-1}{2} \\
[e_n, e_{n-1}] = \alpha_{n,n-1} e_{r_1+r_2+1} & \text{si } r_1 + r_2 \leq n-1 \\
[e_{n-1}, e_n] = \alpha_{n-1,n} e_{r_1+r_2+1} & \text{si } r_1 + r_2 \leq n-1 \\
[e_n, e_n] = \alpha_{n,n} e_{2r_2+1} & \text{si } r_2 \leq \frac{n-1}{2}
\end{array}\right.$$

con $\beta_i \neq 0$ para algún $i \in \{1, 2, \cdots, r_1\}$, $\gamma_i \neq 0$ para algún $i \in \{1, 2, \cdots, r_2\}$.

Usando la identidad de Leibniz se tiene que

(1) $\mathcal{L}(e_1, e_i, e_1)$, $2 \leq i \leq n-4 \Rightarrow \alpha_{1,i+1} = \alpha_{1,i} \Rightarrow \alpha_{1,i} = \alpha_1$, $2 \leq i \leq n-3$, $i \neq n-1, n$

(2) $\mathcal{L}(e_1, e_1, e_i)$, $2 \leq i \leq n-3 \Rightarrow \alpha_1(\alpha_1 + 1) = 0$

(3) $\mathcal{L}(e_1, e_{n-1}, e_1) \Rightarrow \alpha_{1,n-1} = 0$

(4) $\mathcal{L}(e_1, e_n, e_1) \Rightarrow \alpha_{1,n} = 0$

(5) $\mathcal{L}(e_1, e_{r_1-1}, e_1) \Rightarrow \alpha_{1,r_1} = \alpha_1 \ \wedge \ \beta_1 = 0$

(6) $\mathcal{L}(e_1, e_{r_2-1}, e_1) \Rightarrow \alpha_{1,r_2} = \alpha_1 \ \wedge \ \gamma_1 = 0$

Se va a dividir la demostración en dos casos según sea el valor de α_1.

- **Caso** $\alpha_1 = 0$. En este caso la familia tiene por ley

$$\left\{\begin{array}{ll}
[e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\
{[e_i, e_j]} = \alpha_{i,j} e_{i+j-1}, \ i+j \neq r_1+2, r_2+2 & 2 \leq i, j \leq n-3, \ i+j \leq n-2 \\
{[e_i, e_{r_1+2-i}]} = \alpha_{i,r_1+2-i} e_{r_1+1} + \beta_i e_{n-1}, & 2 \leq i \leq r_1 \\
{[e_i, e_{r_2+2-i}]} = \alpha_{i,r_2+2-i} e_{r_2+1} + \gamma_i e_n, & 2 \leq i \leq r_2 \\
{[e_{n-1}, e_i]} = \alpha_{n-1,i} e_{r_1+i}, & 2 \leq i \leq n-r_1-2 \\
{[e_n, e_i]} = \alpha_{n,i} e_{r_2+i}, & 2 \leq i \leq n-r_2-2 \\
{[e_i, e_{n-1}]} = \alpha_{i,n-1} e_{r_1+i}, & 2 \leq i \leq n-r_1-2 \\
{[e_i, e_n]} = \alpha_{i,n} e_{r_2+i}, & 2 \leq i \leq n-r_2-2 \\
{[e_{n-1}, e_{n-1}]} = \alpha_{n-1,n-1} e_{2r_1+1} & \text{si } r_1 \leq \frac{n-1}{2} \\
{[e_n, e_{n-1}]} = \alpha_{n,n-1} e_{r_1+r_2+1} & \text{si } r_1 + r_2 \leq n-1 \\
{[e_{n-1}, e_n]} = \alpha_{n-1,n} e_{r_1+r_2+1} & \text{si } r_1 + r_2 \leq n-1 \\
{[e_n, e_n]} = \alpha_{n,n} e_{2r_2+1} & \text{si } r_2 \leq \frac{n-1}{2}
\end{array}\right.$$

con $\beta_i \neq 0$ para algún $i \in \{2, \cdots, r_1\}$, $\gamma_i \neq 0$ para algún $i \in \{2, \cdots, r_2\}$.

Haciendo uso de la identidad de Leibniz se tiene que

(7) $\mathcal{L}(e_i, e_{r_1+1-i}, e_1)$, $2 \leq i \leq r_1 - 1 \Rightarrow \beta_i = -\beta_{i+1} \Rightarrow \beta_i = (-1)^i \beta_2$, $2 \leq i \leq r_1$

(8) $\mathcal{L}(e_i, e_1, e_{r_1+1-i}), \quad 2 \leq i \leq r_1 - 1 \Rightarrow \beta_{i+1} = 0 \Rightarrow \beta_2 = 0$

De aquí se sigue que $e_{n-1} \notin \mathcal{L}^2$ y por tanto se llega a una contradicción pues la única posibilidad es que $r_1 = 1$ en contra de lo supuesto al principio.

Análogamente, se tiene que

(9) $\mathcal{L}(e_i, e_{r_2+1-i}, e_1), \quad 2 \leq i \leq r_2 - 1 \Rightarrow \gamma_i = -\gamma_{i+1} \Rightarrow \gamma_i = (-1)^i \gamma_2, \quad 2 \leq i \leq r_2$

(10) $\mathcal{L}(e_i, e_1, e_{r_2+1-i}), \quad 2 \leq i \leq r_2 - 1 \Rightarrow \gamma_{i+1} = 0 \Rightarrow \gamma_2 = 0$

Y, de nuevo, de aquí se sigue que $e_n \notin \mathcal{L}^2$ y por tanto se llega a una contradicción pues la única posibilidad es que $r_2 = 1$ en contra de lo supuesto.

• **Caso** $\alpha_1 = -1$. En este caso se obtienen álgebras de Lie y la demostración es análoga al caso 2-filiforme.

Supóngase ahora $\boxed{2 < r_1 = r_2 = r}$.

La ley de la familia puede expresarse por

$$\left\{\begin{array}{ll}
[e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\
[e_1, e_i] = \alpha_{1,i} e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3, \quad i \neq r_1, r_2 \\
[e_1, e_r] = \alpha_{1,r} e_{r+1} + \beta_1 e_{n-1} + \gamma_1 e_n & \\
[e_1, e_{n-1}] = \alpha_{1,n-1} e_{r+2} & \\
[e_1, e_n] = \alpha_{1,n} e_{r+2} & \\
[e_i, e_j] = \alpha_{i,j} e_{i+j-1}, & 2 \leq i, j \leq n-3, \ i+j \leq n-2, \ i+j \neq r+2 \\
[e_i, e_{r+2-i}] = \alpha_{i,r+2-i} e_{r+1} + \beta_i e_{n-1} + \gamma_i e_n, & 2 \leq i \leq r \\
[e_{n-1}, e_i] = \alpha_{n-1,i} e_{r+i}, & 2 \leq i \leq n-r-2 \\
[e_n, e_i] = \alpha_{n,i} e_{r+i}, & 2 \leq i \leq n-r-2 \\
[e_i, e_{n-1}] = \alpha_{i,n-1} e_{r+i}, & 2 \leq i \leq n-r-2 \\
[e_i, e_n] = \alpha_{i,n} e_{r+i}, & 2 \leq i \leq n-r-2 \\
[e_{n-1}, e_{n-1}] = \alpha_{n-1,n-1} e_{2r+1} & \text{if } r \leq \frac{n-1}{2} \\
[e_n, e_{n-1}] = \alpha_{n,n-1} e_{2r+1} & \text{si } r \leq \frac{n-1}{2} \\
[e_{n-1}, e_n] = \alpha_{n-1,n} e_{2r+1} & \text{si } r \leq \frac{n-1}{2} \\
[e_n, e_n] = \alpha_{n,n} e_{2r+1} & \text{si } r_2 \leq \frac{n-1}{2}
\end{array}\right.$$

con $\beta_i \neq 0$, $\gamma_i \neq 0$ para algún $i \in \{1, 2, \cdots, r\}$.

Usando la identidad de Leibniz se tiene que

(1) $\mathcal{L}(e_1, e_i, e_1)$, $2 \leq i \leq n-4 \Rightarrow \alpha_{1,i+1} = \alpha_{1,i} \Rightarrow \alpha_{1,i} = \alpha_1$, $2 \leq i \leq n-3$

(2) $\mathcal{L}(e_1, e_1, e_i) \Rightarrow \alpha_1(\alpha_1 + 1) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \ \vee \ \alpha_1 = -1$

(3) $\mathcal{L}(e_1, e_{n-1}, e_1) \Rightarrow \alpha_{1,n-1} = 0$

(4) $\mathcal{L}(e_1, e_n, e_1) \Rightarrow \alpha_{1,n} = 0$

(5) $\mathcal{L}(e_1, e_{r-1}, e_1) \Rightarrow \alpha_{1,r_1} = \alpha_1 \ \wedge \ \beta_1 = 0 \ \wedge \ \gamma_1 = 0$

- **Caso** $\alpha_1 = 0$

Para $\alpha_1 = 0$ se tiene la familia

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_i, e_j] = \alpha_{i,j} e_{i+j-1}, & 2 \leq i,j \leq n-3, \ i+j \leq n-2, \ i+j \neq r+2 \\ [e_i, e_{r+2-i}] = \alpha_{i,r+2-i} e_{r_1+1} + \beta_i e_{n-1} + \gamma_i e_n, & 2 \leq i \leq r \\ [e_{n-1}, e_i] = \alpha_{n-1,i} e_{r+i}, & 2 \leq i \leq n-r-2 \\ [e_n, e_i] = \alpha_{n,i} e_{r+i}, & 2 \leq i \leq n-r-2 \\ [e_i, e_{n-1}] = \alpha_{i,n-1} e_{r+i}, & 2 \leq i \leq n-r-2 \\ [e_i, e_n] = \alpha_{i,n} e_{r+i}, & 2 \leq i \leq n-r-2 \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \alpha_{n-1,n-1} e_{2r+1} & \text{si } r \leq \frac{n-1}{2} \\ [e_n, e_{n-1}] = \alpha_{n,n-1} e_{2r+1} & \text{si } r \leq \frac{n-1}{2} \\ [e_{n-1}, e_n] = \alpha_{n-1,n} e_{2r+1} & \text{si } r \leq \frac{n-1}{2} \\ [e_n, e_n] = \alpha_{n,n} e_{2r+1} & \text{si } r_2 \leq \frac{n-1}{2} \end{cases}$$

con $\beta_i \neq 0$, $\gamma_i \neq 0$ para algún $i \in \{1, 2, \cdots, r\}$.

Volviendo a utilizar la identidad de Leibniz se tiene que

(6) $\mathcal{L}(e_i, e_{r+1-i}, e_1)$, $2 \leq i \leq r-1 \Rightarrow \beta_i = -\beta_{i+1} \ \wedge \ \gamma_i = -\gamma_{i+1}$
$\Rightarrow \beta_i = (-1)^i \beta_2 \wedge \gamma_i = (-1)^i \gamma_2$, $2 \leq i \leq r$

(7) $\mathcal{L}(e_i, e_1, e_{r+1-i})$, $2 \leq i \leq r-1 \Rightarrow \beta_{i+1} = 0 = \gamma_{i+1} \Rightarrow \beta_2 = 0 = \gamma_2$

De aquí se sigue que $e_{n-1}, e_n \notin \mathcal{L}^2$ y por tanto se llega a una contradicción pues la única posibilidad es que $r = 1$ en contra de lo supuesto al principio.

- **Caso** $\alpha_1 = -1$. En este caso al igual que ocurre en las 2-filiformes se obtienen álgebras de Lie. $\square$

2.2.2 Álgebras de Leibniz $\mu_{(II,1,1)}$

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz 3-filiforme graduada naturalmente de dimensión $n \geq 5$ de Tipo II y tal que los vectores e_{n-1} y e_n están en el primer subespacio de la graduación natural, esto es,

$$\begin{array}{ll} \mathcal{L}_1 =< e_1, e_{n-2}, e_{n-1}, e_n > & \\ \mathcal{L}_i =< e_i + 1 >, & 2 \leq i \leq n-3 \end{array}$$

1.– *Álgebras de Leibniz escindidas.*

Proposición 2.2.2 *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz 1-filiforme graduada naturalmente $(n-2)$-dimensional de Tipo II. Entonces $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \oplus \mathbf{C}^2$ es un álgebra de Leibniz 3-filiforme graduada naturalmente de n-dimensional Tipo II.*

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz 2-filiforme graduada naturalmente $(n-1)$-dimensional de Tipo II. Entonces $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \oplus \mathbf{C}$ es un álgebra de Leibniz 3-filiforme graduada naturalmente de n-dimensional Tipo II.

Puesto que son conocidas las 1-filiformes y las 2-filiformes (capítulo anterior) graduadas naturalmente y se puede deducir la clasificación completa de las 3-filiformes graduadas naturalmente escindidas de Tipo II.

A continuación se va a estudiar las álgebras de Tipo II con $(r_1, r_2) = (1, 1)$, obteniendo que son todas escindidas.

Proposición 2.2.3 *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz de tipo $\mu_{(II,1,1,1)}$. Entonces $\mathcal{L}$ es un álgebra escindida de alguno de los tipos anteriores.*

Demostración. Si $\mathcal{L}$ está en las condiciones del enunciado, la ley de la familia puede ser expresada en en una base adaptada $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ mediante

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_i] = \alpha_{1,i} e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_{n-1}] = \alpha_{1,n-1} e_3 & \\ [e_1, e_n] = \alpha_{1,n} e_3 & \\ [e_i, e_j] = \alpha_{i,j} e_{i+j-1}, & 2 \leq i, j \leq n-3,\ i+j \leq n-2 \\ [e_{n-1}, e_i] = \alpha_{n-1,i} e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_n, e_i] = \alpha_{n,i} e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_i, e_{n-1}] = \alpha_{i,n-1} e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_i, e_n] = \alpha_{i,n} e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \alpha_{n-1,n-1} e_3 & \\ [e_n, e_{n-1}] = \alpha_{n,n-1} e_3 & \\ [e_{n-1}, e_n] = \alpha_{n-1,n} e_3 & \\ [e_n, e_n] = \alpha_{n,n} e_3 & \end{cases}$$

Usando la identidad de Leibniz se tiene que

(1) $\mathcal{L}(e_1, e_i, e_1)$, $2 \leq i \leq n-4 \Rightarrow \alpha_{1,i+1} = \alpha_{1,i}$, $2 \leq i \leq n-4 \Rightarrow \alpha_{1,i} = \alpha_1$, $2 \leq i \leq n-3$

(2) $\mathcal{L}(e_1, e_1, e_i)$, $2 \leq i \leq n-4 \Rightarrow \alpha_1(\alpha_1 + 1) = 0$

(3) $\mathcal{L}(e_1, e_{n-1}, e_1) \Rightarrow \alpha_{1,n-1} = 0$

(4) $\mathcal{L}(e_1, e_n, e_1) \Rightarrow \alpha_{1,n} = 0$

• **Caso** $\alpha_1 = 0$. La ley viene dada por

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_i, e_j] = \alpha_{i,j} e_{i+j-1}, & 2 \leq i, j \leq n-3,\ i+j \leq n-2 \\ [e_{n-1}, e_i] = \alpha_{n-1,i} e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_n, e_i] = \alpha_{n,i} e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_i, e_{n-1}] = \alpha_{i,n-1} e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_i, e_n] = \alpha_{i,n} e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \alpha_{n-1,n-1} e_3 & \\ [e_n, e_{n-1}] = \alpha_{n,n-1} e_3 & \\ [e_{n-1}, e_n] = \alpha_{n-1,n} e_3 & \\ [e_n, e_n] = \alpha_{n,n} e_3 & \end{cases}$$

(5) $\mathcal{L}(e_i, e_1, e_j)$, $2 \leq i, j \leq n-4$, $i+j \leq n-2 \Rightarrow \alpha_{i,j} = \alpha_j$

(6) $\mathcal{L}(e_i, e_j, e_1)$, $2 \leq i, j \leq n-4$, $i+j \leq n-2 \Rightarrow \alpha_j = 0$

(7) $\mathcal{L}(e_i, e_1, e_{n-1})$, $2 \leq i \leq n-4 \Rightarrow \alpha_{i,n-1} = \alpha_{n-1}$

(8) $\mathcal{L}(e_i, e_1, e_n)$, $2 \leq i \leq n-4 \Rightarrow \alpha_{i,n} = \alpha_n$

(9) $\mathcal{L}(e_{n-1}, e_1, e_i)$, $2 \leq i \leq n-4 \Rightarrow \alpha_{n-1,i} = 0$

(10) $\mathcal{L}(e_n, e_1, e_i)$, $2 \leq i \leq n-4 \Rightarrow \alpha_{n,i} = 0$

(11) $\mathcal{L}(e_{n-1}, e_1, e_{n-1}) \Rightarrow \alpha_{n-1,n-1} = 0$

(12) $\mathcal{L}(e_n, e_1, e_n) \Rightarrow \alpha_{n,n} = 0$

(13) $\mathcal{L}(e_{n-1}, e_1, e_n) \Rightarrow \alpha_{n-1,n} = 0$

(14) $\mathcal{L}(e_n, e_1, e_{n-1}) \Rightarrow \alpha_{n,n-1} = 0$

resultando la familia

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_i, e_{n-1}] = \alpha_{n-1} e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_i, e_n] = \alpha_n e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \end{cases}$$

Nótese que si $\alpha_n = 0$ ó $\alpha_{n-1} = 0$ se obtienen álgebras escindidas. Por tanto, $\alpha_n \neq 0 \neq \alpha_{n-1}$ y si se hace el cambio de base

$$\begin{cases} e'_i = e_i, & i \neq n \\ e'_n = \alpha_{n-1} e_n - \alpha_n e_{n-1} \end{cases}$$

se obtiene, de nuevo, álgebras escindidas.

• **Caso** $\alpha_1 = -1$. En este caso se obtienen álgebras de Lie y la demostración es análoga al caso 2-filiforme. □

2.– *Álgebras de Leibniz no escindidas.*

No existen álgebras de Leibniz 3-filiformes graduadas naturalmente $\mu_{(II,1,1)}$ no escindidas.

2.2.3 Álgebras de Leibniz $\mu_{(II,1,2)}$

En esta sección se clasificarán las álgebras de Leibniz 3-filiformes graduadas naturalmente de dimensión n, $n \geq 8$, de Tipo II y tal que e_{n-1} está en el primer subespacio y e_n en el segundo subespacio de la graduación natural, es decir,

$$< e_1, e_2, e_{n-1} > \oplus < e_3, e_n > \oplus < e_4 > \oplus \cdots \oplus < e_{n-2} >$$

Como las álgebras de Leibniz 3-filiformes graduadas naturalmente escindidas Tipo II están ya consideradas en la sección anterior nos limitaremos aquí al estudio de las no escindidas.

Teorema 2.2.4 *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz de tipo $\mu_{(II,1,2)}$. Si $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz no de Lie y no escindida es isomorfa a*

$\mu^{1,\lambda}_{(II,1,2)}|_{\lambda\neq 0}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_2] = e_n \\ [e_2, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \lambda e_n \end{cases}$$

$\mu^{2}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_2, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

$\mu^{3}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

$\mu^{4}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1}, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

$\mu^{5}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_2] = e_n \\ [e_2, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

$\mu^{6}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_2, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

$\mu^{7}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-3 \\ [e_1, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

$\mu^{8}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-3 \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

$\mu^{9,\lambda}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-3 \\ [e_2, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_2] = e_n \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n \\ [e_2, e_{n-1}] = \lambda e_n & \lambda \in \mathbf{C} \end{cases}$$

$\mu^{10}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-3 \\ [e_2, e_2] = e_n \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n \\ [e_2, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

$\mu^{11}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-3 \\ [e_2, e_2] = e_n \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

$\mu^{12,\lambda}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-3 \\ [e_{n-1}, e_2] = e_n \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n \\ [e_2, e_{n-1}] = \lambda e_n & \lambda \in \mathbf{C} - \{0, -1\} \end{cases}$$

$\mu^{13}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-3 \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n \\ [e_2, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

$\mu^{14}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-3 \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

$\mu^{15,\lambda}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-3 \\ [e_{n-1}, e_2] = e_n \\ [e_2, e_{n-1}] = \lambda e_n & \lambda \in \mathbf{C} \end{cases}$$

$\mu^{16}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-3 \\ [e_2, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_2] = e_n \\ [e_2, e_{n-1}] = -e_n \end{cases}$$

$\mu^{17}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_2] = e_n & \\ [e_2, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

Demostración. Si $\mathcal{L}$ está en las condiciones del enunciado su ley puede ser expresada en una base adaptada, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, mediante

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_2] = \alpha_{1,2} e_3 + \beta_1 e_n & \\ [e_2, e_2] = \alpha_{2,2} e_3 + \beta_2 e_n & \\ [e_{n-1}, e_2] = \alpha_{n-1,2} e_3 + \beta_3 e_n & \\ [e_1, e_i] = \alpha_{1,i} e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_{n-1}] = \alpha_{1,n-1} e_3 + \beta_4 e_n & \\ [e_1, e_n] = \alpha_{1,n} e_4 & \\ [e_i, e_j] = \alpha_{i,j} e_{i+j-1}, & 2 \leq i,j \leq n-3,\ i+j \leq n-2,\ i+j \neq 3,4 \\ [e_{n-1}, e_i] = \alpha_{n-1,i} e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-3 \\ [e_n, e_i] = \alpha_{n,i} e_{i+2}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_2, e_{n-1}] = \alpha_{2,n-1} e_3 + \beta_5 e_n & \\ [e_i, e_{n-1}] = \alpha_{i,n-1} e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \alpha_{n-1,n-1} e_3 + \beta_6 e_n & \\ [e_n, e_{n-1}] = \alpha_{n,n-1} e_4 & \\ [e_i, e_n] = \alpha_{i,n} e_{i+2}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_n] = \alpha_{n-1,n} e_4 & \\ [e_n, e_n] = \alpha_{n,n} e_5 & \end{cases}$$

con $\beta_i \neq 0$ para algún valor de i.

Usando la identidad de Leibniz se tiene que

(1) $\mathcal{L}(e_1, e_i, e_1)$, $2 \leq i \leq n-4 \Rightarrow \alpha_{1,i+1} = \alpha_{1,i} \Rightarrow \alpha_{1,i} = \alpha_1$, $2 \leq i \leq n-3$

(2) $\mathcal{L}(e_1, e_1, e_i)$, $2 \leq i \leq n-4 \Rightarrow \alpha_1(\alpha_1 + 1) = 0$

(3) $\mathcal{L}(e_1, e_{n-1}, e_1) \Rightarrow \alpha_{1,n-1} = 0$

(4) $\mathcal{L}(e_1, e_n, e_1) \Rightarrow \alpha_{1,n} = 0$

$\boxed{\text{Caso 1.-} \quad \alpha_1 = 0}$ En este caso la ley de la familia viene dada por

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_2] = \beta_1 e_n & \\ [e_2, e_2] = \alpha_{2,2} e_3 + \beta_2 e_n & \\ [e_{n-1}, e_2] = \alpha_{n-1,2} e_3 + \beta_3 e_n & \\ [e_i, e_j] = \alpha_{i,j} e_{i+j-1}, & 2 \leq i, j \leq n-3, \ i+j \leq n-2, \ i+j \neq 3,4 \\ [e_{n-1}, e_i] = \alpha_{n-1,i} e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-3 \\ [e_n, e_i] = \alpha_{n,i} e_{i+2}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta_4 e_n & \\ [e_2, e_{n-1}] = \alpha_{2,n-1} e_3 + \beta_5 e_n & \\ [e_i, e_{n-1}] = \alpha_{i,n-1} e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \alpha_{n-1,n-1} e_3 + \beta_6 e_n & \\ [e_n, e_{n-1}] = \alpha_{n,n-1} e_4 & \\ [e_i, e_n] = \alpha_{i,n} e_{i+2}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_n] = \alpha_{n-1,n} e_4 & \\ [e_n, e_n] = \alpha_{n,n} e_5 & \end{cases}$$

con $\beta_i \neq 0$ para algún valor de i.

(5) $\mathcal{L}(e_i, e_1, e_n), \quad 2 \leq i \leq n-5 \Rightarrow \alpha_{i+1,n} = \alpha_{i,n} \Rightarrow \alpha_{i,n} = \alpha_n, \ 2 \leq i \leq n-4$

(6) $\mathcal{L}(e_{n-1}, e_1, e_i) \quad 2 \leq i \leq n-4 \Rightarrow \alpha_{n-1,i} = 0, \ 2 \leq i \leq n-4$

(7) $\mathcal{L}(e_{n-1}, e_{n-4}, e_1) \Rightarrow \alpha_{n-1,n-3} = 0$

$(6) + (7) \Rightarrow \alpha_{n-1,i} = 0, \ 2 \leq i \leq n-3$

(8) $\mathcal{L}(e_n, e_1, e_i), \quad 3 \leq i \leq n-3 \Rightarrow \alpha_{n,i} = 0$

(9) $\mathcal{L}(e_i, e_{n-1}, e_1), \quad 2 \leq i \leq n-4 \Rightarrow \alpha_{i+1,n-1} = \alpha_{i,n-1}$
$\Rightarrow \alpha_{i,n-1} = \alpha_{n-1}, \quad 2 \leq i \leq n-3$

(10) $\mathcal{L}(e_i, e_1, e_{n-1}), \quad 2 \leq i \leq n-4 \Rightarrow \beta_4 \alpha_n = 0$

(11) $\mathcal{L}(e_{n-1}, e_1, e_n) \Rightarrow \alpha_{n-1,n} = 0$

(12) $\mathcal{L}(e_n, e_1, e_n) \Rightarrow \alpha_{n,n} = 0$

(13) $\mathcal{L}(e_{n-1}, e_1, e_{n-1}) \Rightarrow \alpha_{n-1,n-1} = 0$

(14) $\mathcal{L}(e_n, e_1, e_{n-1}) \Rightarrow \alpha_{n,n-1} = 0$

(15) $\mathcal{L}(e_i, e_1, e_j), \quad 2 \leq i \leq n-4,, \quad 3 \leq j \leq n-3, \ i+j \neq 3,4$
$\Rightarrow \alpha_{i+1,j} = \alpha_{i,j} \Rightarrow \alpha_{i,j} = \alpha_j, \quad 3 \leq j \leq n-3$

(16) $\mathcal{L}(e_i, e_j, e_1), \quad 2 \leq i \leq n-3,, \quad 3 \leq j \leq n-3, \ i+j \neq 3,4$
$\Rightarrow \alpha_j = 0, \quad 3 \leq j \leq n-3$

(17) $\mathcal{L}(e_i, e_2, e_1), \quad 2 \leq i \leq n-4 \Rightarrow \alpha_{i+1,2} = \alpha_{i,2}$
$\Rightarrow \alpha_{i,2} = \alpha_2, \quad 2 \leq i \leq n-3$

(18) $\mathcal{L}(e_i, e_1, e_2), \quad 2 \leq i \leq n-4 \Rightarrow \beta_1\alpha_n = 0$

(19) $\mathcal{L}(e_i, e_2, e_2), \quad 2 \leq i \leq n-4 \Rightarrow \beta_2\alpha_n = 0$

(20) $\mathcal{L}(e_i, e_2, e_{n-1}), \quad 2 \leq i \leq n-4 \Rightarrow \beta_5\alpha_n = 0$

(21) $\mathcal{L}(e_2, e_{n-1}, e_2) \Rightarrow \beta_3\alpha_n = 0$

(22) $\mathcal{L}(e_2, e_{n-1}, e_{n-1}) \Rightarrow \beta_6\alpha_n = 0$

De este modo se tiene la ley siguiente:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_2] = \beta_1 e_n & \\ [e_2, e_2] = \alpha_2 e_3 + \beta_2 e_n & \\ [e_i, e_2] = \alpha_2 e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1}, e_2] = \beta_3 e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta_4 e_n & \\ [e_2, e_{n-1}] = \alpha_{n-1} e_3 + \beta_5 e_n & \\ [e_i, e_{n-1}] = \alpha_{n-1} e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \beta_6 e_n & \\ [e_i, e_n] = \alpha_n e_{i+2}, & 2 \leq i \leq n-4 \end{cases}$$

con $\beta_i \neq 0$ para algún valor de i.

Además, de $\beta_i\alpha_n = 0, \ 1 \leq i \leq 6$ se sigue que $\alpha_n = 0$ pues, caso contrario, todos los β_i serían nulos y se llegaría a contradicción.

A partir de aquí, es fácil hacer $\alpha_2 = \alpha_{n-1} = 0$ haciendo el cambio de base dado por:

$$\begin{cases} e'_2 = e_2 - \alpha_2 e_1 & \\ e'_{n-1} = e_{n-1} - \alpha_{n-1} e_1 & \\ e'_i = e_i & i \neq 2, n-1 \end{cases}$$

La ley queda como sigue:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_2] = \beta_1 e_n & \\ [e_2, e_2] = \beta_2 e_n & \\ [e_{n-1}, e_2] = \beta_3 e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta_4 e_n & \\ [e_2, e_{n-1}] = \beta_5 e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \beta_6 e_n & \end{cases}$$

con $\beta_i \neq 0$ para algún valor de i.

Haciendo uso de cambios de base genéricos tal y como se ha hecho en casos anteriores se tiene que

$$\begin{aligned} e'_1 &= A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 + \cdots + A_{n-3} e_{n-3} + A_{n-2} e_{n-2} + A_{n-1} e_{n-1} + A_n e_n \\ e'_2 &= B_1 e_1 + B_2 e_2 + B_3 e_3 + \cdots + B_{n-3} e_{n-3} + B_{n-2} e_{n-2} + B_{n-1} e_{n-1} + B_n e_n \\ e'_{n-1} &= C_1 e_1 + C_2 e_2 + C_3 e_3 + \cdots + C_{n-3} e_{n-3} + C_{n-2} e_{n-2} + C_{n-1} e_{n-1} + C_n e_n \\ e'_n &= D_1 e_1 + D_2 e_2 + D_3 e_3 + \cdots + D_{n-3} e_{n-3} + D_{n-2} e_{n-2} + D_{n-1} e_{n-1} + D_n e_n \end{aligned}$$

sujeto a las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{ll} C_i = 0 & 1 \leq i \leq n-3 \\ D_i = 0 & 1 \leq i \leq n-1 \\ A_i = 0 & 2 \leq i \leq n-3 \\ B_1 = 0 & \\ A_{n-1}(A_1\beta_4 + A_{n-1}\beta_6) = 0 & \\ A_1 B_2 C_{n-1} D_n \neq 0 & \end{array}$$

Los nuevos parámetros resultan:

$$\beta_1' = \frac{A_1(B_2\beta_1 + B_{n-1}\beta_4) + A_{n-1}(B_2\beta_3 + B_{n-1}\beta_6)}{D_n}$$
$$\beta_2' = \frac{B_2^2\beta_2 + B_2B_{n-1}(\beta_3 + \beta_5) + B_{n-1}^2\beta_6}{D_n}$$
$$\beta_3' = \frac{C_{n-1}(B_2\beta_3 + B_{n-1}\beta_6)}{D_n}$$
$$\beta_4' = \frac{C_{n-1}(A_1\beta_4 + A_{n-1}\beta_6)}{D_n}$$
$$\beta_5' = \frac{C_{n-1}(B_2\beta_5 + B_{n-1}\beta_6)}{D_n}$$
$$\beta_6' = \frac{C_{n-1}^2\beta_6}{D_n}$$

con $A_1B_2C_{n-1}D_n \neq 0$ y $A_{n-1}(A_1\beta_4 + A_{n-1}\beta_6) = 0$.

Es claro que la nulidad de β_6 es invariante.

- **Caso** $\beta_6 \neq 0$.

En este caso eligiendo

$$B_{n-1} = -\frac{B_2\beta_5}{\beta_6} \Rightarrow \beta_5' = 0$$
$$A_{n-1} = -\frac{A_1\beta_4}{\beta_6} \Rightarrow \beta_4' = 0$$

Sustituyendo en el resto de parámetros se tiene que:

$$\beta_1' = \frac{A_1B_2}{\beta_6 D_n}(\beta_1\beta_6 - \beta_3\beta_4)$$
$$\beta_2' = \frac{B_2}{\beta_6 D_n}(\beta_2\beta_6 - \beta_3\beta_5)$$
$$\beta_3' = \frac{B_2C_{n-1}}{D_n}(\beta_3 - \beta_5)$$
$$\beta_4' = 0$$
$$\beta_5' = 0$$
$$\beta_6' = \frac{C_{n-1}^2\beta_6}{D_n}$$

con $A_1B_2C_{n-1}D_n \neq 0$.

Las nulidades de las siguientes expresiones son invariantes:

$$\begin{aligned}
\beta_3' - \beta_5' &= \frac{B_2C_{n-1}}{D_n}(\beta_3 - \beta_5) \\
\beta_2'\beta_6' - \beta_3'\beta_5' &= \frac{B_2^2C_{n-1}^2}{D_n^2}(\beta_2\beta_6 - \beta_3\beta_5) \\
\beta_1'\beta_6' - \beta_3'\beta_4' &= \frac{B_2^2C_{n-1}^2}{D_n^2}(\beta_1\beta_6 - \beta_3\beta_4)
\end{aligned}$$

Con todo esto, los casos a distinguir son:

$\beta_6 \neq 0 \Rightarrow \beta_4 = \beta_5 = 0$

$$\left\{\begin{array}{l}
\beta_3 - \beta_5 \neq 0 \Rightarrow \beta_3' \neq 0 \left\{\begin{array}{l}
\beta_2\beta_6 - \beta_3\beta_5 \neq 0 \Rightarrow \beta_2' \neq 0 \left\{\begin{array}{ll}
\beta_1\beta_6 - \beta_3\beta_4 \neq 0 \Rightarrow \beta_1' \neq 0 & \textbf{Caso 1} \\
\beta_1\beta_6 - \beta_3\beta_4 = 0 \Rightarrow \beta_1' = 0 & \textbf{Caso 2}
\end{array}\right. \\
\beta_2\beta_6 - \beta_3\beta_5 = 0 \Rightarrow \beta_2' = 0 \left\{\begin{array}{ll}
\beta_1\beta_6 - \beta_3\beta_4 \neq 0 \Rightarrow \beta_1' \neq 0 & \textbf{Caso 3} \\
\beta_1\beta_6 - \beta_3\beta_4 = 0 \Rightarrow \beta_1' = 0 & \textbf{Caso 4}
\end{array}\right.
\end{array}\right. \\
\beta_3 - \beta_5 = 0 \Rightarrow \beta_3' = 0 \left\{\begin{array}{l}
\beta_2\beta_6 - \beta_3\beta_5 \neq 0 \Rightarrow \beta_2' \neq 0 \left\{\begin{array}{ll}
\beta_1\beta_6 - \beta_3\beta_4 \neq 0 \Rightarrow \beta_1' \neq 0 & \textbf{Caso 5} \\
\beta_1\beta_6 - \beta_3\beta_4 = 0 \Rightarrow \beta_1' = 0 & \textbf{Caso 6}
\end{array}\right. \\
\beta_2\beta_6 - \beta_3\beta_5 = 0 \Rightarrow \beta_2' \neq 0 \left\{\begin{array}{ll}
\beta_1\beta_6 - \beta_3\beta_4 \neq 0 \Rightarrow \beta_1' \neq 0 & \textbf{Caso 7} \\
\beta_1\beta_6 - \beta_3\beta_4 = 0 \Rightarrow \beta_1' = 0 & \textbf{Caso 8}
\end{array}\right.
\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

Caso 1 $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_6 \neq 0$, $\beta_4 = \beta_5 = 0$. Haciendo un cambio de escala se tiene $\mu^{1,\lambda}_{(II,1,2)}$ con $\lambda \in \mathbf{C} - \{0\}$ y cuya ley

$$\mu^{1,\lambda}_{(II,1,2)} : \left\{\begin{array}{ll}
[e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\
[e_1, e_2] = e_n & \\
[e_2, e_2] = e_n & \\
[e_{n-1}, e_2] = e_n & \\
[e_{n-1}, e_{n-1}] = \lambda e_n & \lambda \in \mathbf{C} - \{0\}
\end{array}\right.$$

Caso 2 $\beta_2\beta_3\beta_6 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_4 = \beta_5 = 0$. Haciendo un cambio de escala se tiene $\mu^2_{(II,1,2)}$ cuya ley

$$\mu^2_{(II,1,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_2, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

Caso 3 $\beta_1\beta_3\beta_6 \neq 0$, $\beta_2 = \beta_4 = \beta_5 = 0$. Haciendo un cambio de escala se tiene $\mu^3_{(II,1,2)}$ y cuya ley

$$\mu^3_{(II,1,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

Caso 4 $\beta_3\beta_6 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_4 = \beta_5 = 0$. Haciendo un cambio de escala se tiene $\mu^4_{(II,1,2)}$ cuya ley

$$\mu^4_{(II,1,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1}, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

Caso 5 $\beta_1\beta_2\beta_6 \neq 0$, $\beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$. Haciendo un cambio de escala se tiene $\mu^5_{(II,1,2)}$ cuya ley

$$\mu^5_{(II,1,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_2] = e_n \\ [e_2, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

Caso 6 $\beta_2\beta_6 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$. Haciendo un cambio de escala se tiene $\mu^6_{(II,1,2)}$ cuya ley

$$\mu^6_{(II,1,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_2, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

Caso 7 $\beta_1\beta_6 \neq 0$, $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$. Haciendo un cambio de escala se tiene

$\mu^7_{(II,1,2)}$ cuya ley

$$\mu^7_{(II,1,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

Caso 8 $\beta_6 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$. Haciendo un cambio de escala se tiene $\mu^8_{(II,1,2)}$ cuya ley

$$\mu^8_{(II,1,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

• **Caso** $\beta_6 = 0$. $A_{n-1}\beta_4 = 0$. Los parámetros resultan:

$$\begin{aligned} \beta_1' &= \frac{A_1(B_2\beta_1 + B_{n-1}\beta_4) + A_{n-1}B_2\beta_3}{D_n} \\ \beta_2' &= \frac{B_2^2\beta_2 + B_2B_{n-1}(\beta_3 + \beta_5)}{D_n} \\ \beta_3' &= \frac{B_2C_{n-1}\beta_3}{D_n} \\ \beta_4' &= \frac{A_1C_{n-1}\beta_4}{D_n} \\ \beta_5' &= \frac{B_2C_{n-1}\beta_5}{D_n} \end{aligned}$$

con $A_1B_2C_{n-1}D_n \neq 0$.

Es fácil ver que las nulidades de β_3, β_4, β_5, y $\beta_3' + \beta_5'$ son invariantes

$*$ Si $\beta_4 \neq 0 \Rightarrow A_{n-1} = 0$ y eligiendo adecuadamente B_{n-1} se consigue hacer $\beta_1' = 0$ y sustituyendo en β_2' queda

$$\beta_2' = \frac{B_2^2}{\beta_4 D_n}(\beta_2\beta_4 - \beta_1(\beta_3 + \beta_5))$$

Es fácil probar que la nulidad de $\beta_2\beta_4 - \beta_1(\beta_3 + \beta_5)$ es invariante pues

$$\beta_2'\beta_4' - \beta_1'(\beta_3' + \beta_5') = \frac{A_1B_2^2C_{n-1}}{D_n^2}(\beta_2\beta_4 - \beta_1(\beta_3 + \beta_5))$$

Los casos a distinguir serán:

$$
\begin{cases}
\beta_2\beta_4-\beta_1(\beta_3+\beta_5)\neq 0 \Rightarrow \beta_2'\neq 0 & \begin{cases}
\beta_3\neq 0 & \begin{cases}
\beta_3+\beta_5\neq 0 & \begin{cases} \beta_5\neq 0 & \textbf{Caso 9} \\ \beta_5=0 & \textbf{Caso 10} \end{cases} \\
\beta_3+\beta_5=0\Rightarrow \beta_5=-\beta_3 & \textbf{Caso 11}
\end{cases} \\
\beta_3=0 & \begin{cases} \beta_5\neq 0 & \textbf{Caso 12} \\ \beta_5=0 & \textbf{Caso 13} \end{cases}
\end{cases} \\
\beta_2\beta_4-\beta_1(\beta_3+\beta_5)=0 \Rightarrow \beta_2=0 & \begin{cases}
\beta_3\neq 0 & \begin{cases}
\beta_3+\beta_5\neq 0 & \begin{cases} \beta_5\neq 0 & \textbf{Caso 14} \\ \beta_5=0 & \textbf{Caso 15} \end{cases} \\
\beta_3+\beta_5=0\Rightarrow \beta_5=-\beta_3 & \textbf{Caso 16}
\end{cases} \\
\beta_3=0 & \begin{cases} \beta_5\neq 0 & \textbf{Caso 17} \\ \beta_5=0 & \textbf{Caso 18} \end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
$$

Caso 9 $\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5\neq 0$, $\beta_1=\beta_6=0$. Haciendo un cambio de escala se obtiene $\mu^{9,\lambda}_{(II,1,2)}$ con $\lambda\in\mathbf{C}-\{0,-1\}$ y cuya ley

$$
\mu^{9,\lambda}_{(II,1,2)}:\begin{cases}
[e_i,e_1]=e_{i+1}, & 2\leq i\leq n-3 \\
[e_2,e_2]=e_n & \\
[e_{n-1},e_2]=e_n & \\
[e_1,e_{n-1}]=e_n & \\
[e_2,e_{n-1}]=\lambda e_n & \lambda\in\mathbf{C}-\{0\}
\end{cases}
$$

Caso 10 $\beta_2\beta_3\beta_4\neq 0$, $\beta_1=\beta_5=\beta_6=0$. Haciendo un cambio de escala se obtiene $\mu^{9,0}_{(II,1,2)}$.

Caso 11 $\beta_2\beta_3\beta_4\neq 0$, $\beta_5=-\beta_3$, $\beta_1=\beta_6=0$. Haciendo un cambio de escala se obtiene $\mu^{9,-1}_{(II,1,2)}$.

Caso 12 $\beta_2\beta_4\beta_5\neq 0$, $\beta_1=\beta_3=\beta_6=0$. Haciendo un cambio de escala se obtiene $\mu^{10}_{(II,1,2)}$ cuya ley

$$
\mu^{10}_{(II,1,2)}:\begin{cases}
[e_i,e_1]=e_{i+1}, & 2\leq i\leq n-3 \\
[e_2,e_2]=e_n & \\
[e_1,e_{n-1}]=e_n & \\
[e_2,e_{n-1}]=e_n &
\end{cases}
$$

Caso 13 $\beta_2\beta_4 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_3 = \beta_5 = \beta_6 = 0$. Haciendo un cambio de escala se obtiene $\mu^{11}_{(II,1,2)}$ cuya ley

$$\mu^{11}_{(II,1,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_2, e_2] = e_n \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

Caso 14 $\beta_3\beta_4\beta_5 \neq 0$, $\beta_5 \neq -\beta_3$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_6 = 0$. Haciendo un cambio de escala se obtiene $\mu^{12,\lambda}_{(II,1,2)}$ con $\lambda \in \mathbf{C} - \{0, -1\}$ y cuya ley

$$\mu^{12,\lambda}_{(II,1,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1}, e_2] = e_n \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n \\ [e_2, e_{n-1}] = \lambda e_n & \lambda \in \mathbf{C} - \{0, -1\} \end{cases}$$

Caso 15 $\beta_3\beta_4 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_5 = \beta_6 = 0$. Haciendo un cambio de escala se obtiene $\mu^{12,0}_{(II,1,2)}$.

Caso 16 $\beta_3\beta_4 \neq 0$, $\beta_5 = -\beta_3$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_6 = 0$. Haciendo un cambio de escala se obtiene $\mu^{12,-1}_{(II,1,2)}$.

Caso 17 $\beta_4\beta_5 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_6 = 0$. Haciendo un cambio de escala se obtiene $\mu^{13}_{(II,1,2)}$ cuya ley

$$\mu^{13}_{(II,1,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n \\ [e_2, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

Caso 18 $\beta_4 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_5 = \beta_6 = 0$. Haciendo un cambio de escala se obtiene $\mu^{14}_{(II,1,2)}$ cuya ley

$$\mu^{14}_{(II,1,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

$*$ Si $\beta_4 = 0$. Téngase en cuenta que si $\beta_3 \neq 0$ eligiendo adecuadamente los coeficientes se puede hacer $\beta_1' = 0$ y si $\beta_3 + \beta_5 \neq 0$ se puede hacer $\beta_2' = 0$. Con esto, los casos a distinguir serán:

$$\beta_4 = 0 \begin{cases} \beta_3 \neq 0 \Rightarrow \beta_1 = 0 \begin{cases} \beta_3 + \beta_5 \neq 0 \Rightarrow \beta_2' = 0 \begin{cases} \beta_5 \neq 0 & \textbf{Caso 19} \\ \beta_5 = 0 & \textbf{Caso 20} \end{cases} \\ \beta_3 + \beta_5 = 0 \Rightarrow \beta_5 = -\beta_3 \begin{cases} \beta_2 \neq 0 & \textbf{Caso 21} \\ \beta_2 = 0 & \textbf{Caso 22} \end{cases} \end{cases} \\ \beta_3 = 0 \Rightarrow \beta_5 \neq 0 \Rightarrow \beta_2' = 0 \begin{cases} \beta_1 \neq 0 & \textbf{Caso 23} \\ \beta_1 = 0 & \textbf{Caso 24} \end{cases} \end{cases}$$

Caso 19 $\beta_3\beta_5 \neq 0$, $\beta_5 \neq -\beta_3$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_4 = \beta_6 = 0$. Haciendo un cambio de escala resulta $\mu^{15,\lambda}_{(II,1,2)}$ con $\lambda \in \mathbf{C} - \{0, -1\}$ cuya ley

$$\mu^{15,\lambda}_{(II,1,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1}, e_2] = e_n & \\ [e_2, e_{n-1}] = \lambda e_n & \lambda \in \mathbf{C} - \{0, -1\} \end{cases}$$

Caso 20 $\beta_3 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0$. Haciendo un cambio de escala resulta $\mu_{15,0}$.

Caso 21 $\beta_2\beta_3 \neq 0$, $\beta_5 = -\beta_3$, $\beta_1 = \beta_4 = \beta_6 = 0$. Haciendo un cambio de escala resulta $\mu^{16}_{(II,1,2)}$ cuya ley

$$\mu^{16}_{(II,1,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_2, e_2] = e_n & \\ [e_{n-1}, e_2] = e_n & \\ [e_2, e_{n-1}] = -e_n & \end{cases}$$

Caso 22 $\beta_3 \neq 0$, $\beta_5 = -\beta_3$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_4 = \beta_6 = 0$. Haciendo un cambio de escala resulta $\mu_{15,-1}$.

Caso 23 $\beta_1\beta_5 \neq 0$, $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_6 = 0$. Haciendo un cambio de escala resulta $\mu^{17}_{(II,1,2)}$cuya ley

$$\mu^{13}_{(II,1,2)}17 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_2] = e_n & \\ [e_2, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

$\boxed{\text{Caso 2.-} \quad \alpha_1 = -1}$. Es fácil probar que son álgebras de Lie. □

2.2.4 Álgebras de Leibniz $\mu_{(II,2,2)}$

En este apartado se van a clasificar todas las álgebras de Leibniz 3-filiformes graduadas naturalmente de Tipo II con $(r_1, r_2) = (2, 2)$ y dimensión n, $n \geq 8$.

Sea la graduación natural

$$< e_1, e_2 > \oplus < e_3, e_{n-1}, e_n > \oplus < e_4 > \oplus \cdots \oplus < e_{n-2} >$$

Teorema 2.2.5 *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz de Tipo $\mu_{(II,2,2)}$. Si $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz no de Lie y no escindida es isomorfa a*

$$\mu_{(II,2,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_2] = e_{n-1} & \\ [e_2, e_2] = e_n & \end{cases}$$

Demostración. Si $\mathcal{L}$ está en las condiciones del enunciado su ley puede ser expresada en una base adaptada $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, mediante

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_2] = \alpha_{1,2} e_3 + \beta_1 e_{n-1} + \gamma_1 e_n & \\ [e_2, e_2] = \alpha_{2,2} e_3 + \beta_2 e_{n-1} + \gamma_2 e_n & \\ [e_1, e_i] = \alpha_{1,i} e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-3 \\ [e_i, e_j] = \alpha_{i,j} e_{i+j-1}, & 2 \leq i,j \leq n-3, \ i+j \leq n-2, \ i+j \neq 4 \\ [e_{n-1}, e_i] = \alpha_{n-1,i} e_{i+2}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_n, e_i] = \alpha_{n,i} e_{i+2}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-1}] = \alpha_{1,n-1} e_4 & \\ [e_i, e_{n-1}] = \alpha_{i,n-1} e_{i+2}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \alpha_{n-1,n-1} e_5 & \\ [e_n, e_{n-1}] = \alpha_{n,n-1} e_5 & \\ [e_1, e_n] = \alpha_{1,n} e_4 & \\ [e_i, e_n] = \alpha_{i,n} e_{i+2}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_n] = \alpha_{n-1,n} e_5 & \\ [e_n, e_n] = \alpha_{n,n} e_5 & \end{cases}$$

con algún $\beta_i \neq 0,\ 1 \leq i \leq 2$ y algún $\gamma_i \neq 0,\ 1 \leq i \leq 2$.

Usando ahora la identidad de Leibniz tenemos que

(1) $\mathcal{L}(e_1, e_i, e_1),\quad 2 \leq i \leq n-4 \Rightarrow \alpha_{1,i+1} = \alpha_{1,i} \Rightarrow \alpha_{1,i} = \alpha_1,\quad 2 \leq i \leq n-3$

(2) $\mathcal{L}(e_1, e_1, e_i),\quad 2 \leq i \leq n-4 \Rightarrow \alpha_1(\alpha_1 + 1) = 0$

(3) $\mathcal{L}(e_1, e_{n-1}, e_1) \Rightarrow \alpha_{1,n-1} = 0$

(4) $\mathcal{L}(e_1, e_n, e_1) \Rightarrow \alpha_{1,n} = 0$

$\boxed{\text{Caso 1.-}\quad \alpha_1 = 0}$.

Continuando haciendo uso de la identidad de Leibniz se tiene que

(5) $\mathcal{L}(e_i, e_1, e_n),\quad 2 \leq i \leq n-5 \Rightarrow \alpha_{i+1,n} = \alpha_{i,n} \Rightarrow \alpha_{i,n} = \alpha_n,\ 2 \leq i \leq n-4$

(6) $\mathcal{L}(e_{n-1}, e_1, e_i),\quad 2 \leq i \leq n-5 \Rightarrow \alpha_{n-1,i} = 0,\ 2 \leq i \leq n-5$

(7) $\mathcal{L}(e_{n-1}, e_{n-5}, e_1) \Rightarrow \alpha_{n-1,n-4} = 0$

$(6) + (7) \Rightarrow \alpha_{n-1,i} = 0,\ 2 \leq i \leq n-4$

(8) $\mathcal{L}(e_n, e_1, e_i),\quad 2 \leq i \leq n-5 \Rightarrow \alpha_{n,i} = 0,\ 2 \leq i \leq n-5$

(9) $\mathcal{L}(e_n, e_{n-5}, e_1) \Rightarrow \alpha_{n,n-4} = 0$

$(8) + (9) \Rightarrow \alpha_{n,i} = 0,\ 2 \leq i \leq n-4$

(10) $\mathcal{L}(e_i, e_1, e_{n-1}),\quad 2 \leq i \leq n-5 \Rightarrow \alpha_{i+1,n-1} = \alpha_{i,n-1} \Rightarrow \alpha_{i,n-1} = \alpha_{n-1},\quad 2 \leq i \leq n-4$

(11) $\mathcal{L}(e_{n-1}, e_1, e_{n-1}) \Rightarrow \alpha_{n-1,n-1} = 0$

(12) $\mathcal{L}(e_{n-1}, e_1, e_n) \Rightarrow \alpha_{n-1,n} = 0$

(13) $\mathcal{L}(e_n, e_1, e_{n-1}) \Rightarrow \alpha_{n,n-1} = 0$

(14) $\mathcal{L}(e_n, e_1, e_n) \Rightarrow \alpha_{n,n} = 0$

(15) $\mathcal{L}(e_i, e_1, e_j), \quad 2 \leq i \leq n-4, \quad 3 \leq j \leq n-3, \quad i+j \neq n-4$
$\Rightarrow \alpha_{i,j} = \alpha_j, \ 3 \leq j \leq n-3$

(16) $\mathcal{L}(e_i, e_j, e_1), \quad 2 \leq i \leq n-4, \quad 3 \leq j \leq n-4, \quad i+j \neq n-4$
$\Rightarrow \alpha_j = 0, \ 3 \leq j \leq n-3$

(17) $\mathcal{L}(e_i, e_2, e_1), \quad 2 \leq i \leq n-4 \Rightarrow \alpha_{i+1,2} = \alpha_{i,2} \Rightarrow \alpha_{i,2} = \alpha_2, \ 3 \leq j \leq n-3$

(18) $\mathcal{L}(e_2, e_1, e_2) \Rightarrow \beta_1\alpha_{n-1} + \gamma_1\alpha_n = 0$

(19) $\mathcal{L}(e_3, e_2, e_2) \Rightarrow \beta_2\alpha_{n-1} + \gamma_2\alpha_n = 0$

De este modo se tiene la familia

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_2] = \beta_1 e_{n-1} + \gamma_1 e_n & \\ [e_2, e_2] = \alpha_2 e_3 + \beta_2 e_{n-1} + \gamma_2 e_n & \\ [e_i, e_2] = \alpha_2 e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_i, e_{n-1}] = \alpha_{n-1} e_{i+2}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_n] = \alpha_n e_{i+2}, & 2 \leq i \leq n-4 \end{cases}$$

con $\beta_i \neq 0$, $\gamma_i \neq 0$ para algún valor i y las relaciones $\beta_1\alpha_{n-1} + \gamma_1\alpha_n = 0$, $\beta_2\alpha_{n-1} + \gamma_2\alpha_n = 0$.

El cambio de base

$$\begin{cases} e'_i = e_i, & i \neq 2 \\ e'_2 = e_2 - \alpha_2 e_1 & \end{cases}$$

permite suponer $\alpha_2 = 0$.

Por otra parte siempre se puede hacer $\alpha_n = 0$ pues

- Si $\alpha_n = 0$ trivial
- Si $\alpha_n \neq 0$ y $\alpha_{n-1} = 0$ basta con intercambiar los papeles de e_{n-1} y e_n
- Si $\alpha_n \neq 0$ y $\alpha_{n-1} \neq 0$ con el cambio de base

$$\begin{cases} e'_i = e_i, & i \neq n \\ e'_n = -\alpha_n e_{n-1} + \alpha_{n-1} e_n & \end{cases}$$

se hace $\alpha_n = 0$

Además, $\beta_1\alpha_{n-1} = \beta_2\alpha_{n-1} = 0 \Rightarrow \alpha_{n-1} = 0$ pues $\beta_1 \neq 0$ ó $\beta_2 \neq 0$, resultando la familia

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_2] = \beta_1 e_{n-1} + \gamma_1 e_n \\ [e_2, e_2] = \beta_2 e_{n-1} + \gamma_2 e_n \end{cases}$$

con algún $\beta_i \neq 0,\ 1 \leq i \leq 2$ y algún $\gamma_i \neq 0,\ 1 \leq i \leq 2$.

Estudiando ahora la dimensión de la derivada se tiene que

$$dim(\mathcal{L}^2) = n - 4 + rg \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

y puesto que existe $\beta_i \neq 0$ el rango de esa matriz nunca puede ser 0. De esta forma se pueden distinguir los siguientes casos:

- Si $rg = 1 \Rightarrow \beta_1 e_{n-1} + \gamma_1 e_n = K(\beta_2 e_{n-1} + \gamma_2 e_n)$ y haciendo el cambio de base dado por

$$\begin{cases} e'_{n-1} = \beta_1 e_{n-1} + \gamma e_n \\ e'_i = e_i & i \neq n-1 \end{cases}$$

  se obtiene un álgebra escindida.

- Si $rg = 2 \Rightarrow \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 \neq 0$, el cambio de base dado por

$$\begin{cases} e'_i = e_i, & i \neq n-1, n \\ e'_{n-1} = \beta_1 e_{n-1} + \gamma_1 e_n \\ e'_n = \beta_2 e_{n-1} + \gamma_2 e_n \end{cases}$$

  permite obtener el álgebra $\mu_{(II,2,2)}$

$$\mu_{(II,2,2)} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_2] = e_{n-1} \\ [e_2, e_2] = e_n \end{cases}$$

$\boxed{\text{Caso 2.- } \quad \alpha_1 = -1}$. En este caso, al igual que ocurre en casos anteriores, son todas álgebras de Lie y la demostración es análoga. $\square$

Problemas abiertos

- 1) Clasificación de las álgebras de Leibniz p-filiformes con $p \geq 4$.
- 2) Clasificación de las álgebras de Leibniz 2-filiformes y 3-filiformes en dimensiones concretas.
- 3) Determinación de componentes irreducibles.
- 4) Estudio de las derivaciones de las álgebras 2-filiformes y 3-filiformes y determinación de propiedades geométricas.
- 5) Determinación de la longitud de las álgebras p-filiformes.

Apéndice A

Listado de leyes de álgebras de Leibniz.

Finalmente, y para concluir esta memoria, se presentan las listas de todas las álgebras o familias de álgebras que se han encontrado a lo largo del trabajo, para facilitar su localización. Además, se incluyen las 0-filiformes y las 1-filiformes, [2].

A.1 Álgebras de Leibniz nulfiliformes no escindidas

$$\mu_0{}^n : \{ \ [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

A.2 Álgebras de Leibniz 1-filiformes no escindidas

μ_1^n :

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2 \\ [e_i, e_n] = e_n & ,1 \leq i \leq n-2 \end{cases}$$

$\mu_2{}^n$:

$$\{ \ [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-1$$

A.3 Álgebras de Leibniz 2-filiformes no escindidas

A.3.1 Tipo I

${\mu_{(I,1,2)}}^1$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3 \\ [e_i, e_{n-1}] = e_n, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

${\mu_{(I,1,2)}}^2$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_{n-1}] = e_2 + e_n \\ [e_i, e_{n-1}] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \end{cases}$$

${\mu_{(I,1,2)}}^3$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

${\mu_{(I,1,2)}}^4$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

A.3.2 Tipo II

$\mu_{(II,1)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_n, e_{n-2}] = e_{n-1} \end{cases}$$

$\mu^1_{(II,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_1, e_2] = e_n \\ [e_2, e_2] = e_n \end{cases}$$

$\mu^2_{(II,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_2, e_2] = e_n \end{cases}$$

$\mu^3_{(II,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_1, e_2] = e_n \end{cases}$$

A.4 Álgebras de Leibniz 3-filiformes no escindidas

A.4.1 Tipo I

$\mu_{(I,1,1,2)}^{1,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}|_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\neq 0}$:

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4\\ [e_1,e_{n-2}]=e_2+e_n & \\ [e_i,e_{n-2}]=e_{i+1}, & 2\leq i\leq n-4\\ [e_{n-2},e_{n-2}]=\lambda_1 e_n & \\ [e_{n-1},e_{n-2}]=e_n & \\ [e_1,e_{n-1}]=\lambda_2 e_n & \\ [e_{n-1},e_{n-1}]=\lambda_3 e_n & \end{cases}$$

$\mu_{(I,1,1,2)}^{2,\lambda_1,\lambda_2}|_{\lambda_1\lambda_2\neq 0}$:

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4\\ [e_i,e_{n-2}]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4\\ [e_{n-2},e_{n-2}]=e_n & \\ [e_{n-1},e_{n-2}]=e_n & \\ [e_1,e_{n-1}]=\lambda_1 e_n & \\ [e_{n-1},e_{n-1}]=\lambda_2 e_n & \end{cases}$$

$\mu_{(I,1,1,2)}^{3,\lambda_1,\lambda_2}|_{\lambda_1\lambda_2\neq 0}$:

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4\\ [e_1,e_{n-2}]=e_2+e_n & \\ [e_i,e_{n-2}]=e_{i+1}, & 2\leq i\leq n-4\\ [e_{n-2},e_{n-2}]=\lambda_1 e_n & \\ [e_1,e_{n-1}]=\lambda_2 e_n & \\ [e_{n-1},e_{n-1}]=e_n & \end{cases}$$

$\mu_{(I,1,1,2)}^{4}$:

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4\\ [e_i,e_{n-2}]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4\\ [e_{n-2},e_{n-2}]=e_n & \\ [e_1,e_{n-1}]=e_n & \\ [e_{n-1},e_{n-1}]=e_n & \end{cases}$$

$\mu_{(I,1,1,2)}^{5}$:

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4\\ [e_i,e_{n-2}]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4\\ [e_{n-2},e_{n-2}]=e_n & \\ [e_{n-1},e_{n-1}]=e_n & \end{cases}$$

$\mu_{(I,1,1,2)}^{6}$:

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4\\ [e_i,e_{n-2}]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4\\ [e_{n-1},e_{n-2}]=e_n & \\ [e_{n-1},e_{n-1}]=e_n & \end{cases}$$

$\mu_{(I,1,1,2)}^{7}$:

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4\\ [e_i,e_{n-2}]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4\\ [e_{n-1},e_{n-2}]=e_n & \\ [e_1,e_{n-1}]=-e_n & \\ [e_{n-1},e_{n-1}]=e_n & \end{cases}$$

$\mu_{(I,1,1,2)}^{8}$:

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4\\ [e_1,e_{n-2}]=e_2-e_n & \\ [e_i,e_{n-2}]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4\\ [e_{n-1},e_{n-2}]=e_n & \\ [e_1,e_{n-1}]=-e_n & \\ [e_{n-1},e_{n-1}]=e_n & \end{cases}$$

$\mu^{9}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-4\\ [e_1,e_{n-2}]=e_2+e_n & \\ [e_i,e_{n-2}]=e_{i+1}, & 2\le i\le n-4\\ [e_1,e_{n-1}]=e_n & \\ [e_{n-1},e_{n-1}]=e_n & \end{cases}$$

$\mu^{10}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-4\\ [e_1,e_{n-2}]=e_2+e_n & \\ [e_i,e_{n-2}]=e_{i+1}, & 2\le i\le n-4\\ [e_{n-1},e_{n-1}]=e_n & \end{cases}$$

$\mu^{11}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-4\\ [e_i,e_{n-2}]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-4\\ [e_1,e_{n-1}]=e_n & \\ [e_{n-1},e_{n-1}]=e_n & \end{cases}$$

$\mu^{12}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-4\\ [e_i,e_{n-2}]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-4\\ [e_{n-1},e_{n-1}]=e_n & \end{cases}$$

$\mu^{13,\lambda_1,\lambda_2}_{(I,1,1,2)}|_{\lambda_1\neq 0,\lambda_2\neq 0,-1}$:

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-4\\ [e_1,e_{n-2}]=e_2+e_n & \\ [e_i,e_{n-2}]=e_{i+1}, & 2\le i\le n-4\\ [e_{n-1},e_{n-2}]=e_n & \\ [e_1,e_{n-1}]=\lambda_1 e_n & \\ [e_{n-2},e_{n-1}]=\lambda_2 e_n & \end{cases}$$

$\mu^{14,\lambda_1,\lambda_2}_{(I,1,1,2)}|_{\lambda_1\neq 0,\lambda_2\neq 0,-1}$:

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-4\\ [e_i,e_{n-2}]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-4\\ [e_{n-1},e_{n-2}]=e_n & \\ [e_1,e_{n-1}]=\lambda_1 e_n & \\ [e_{n-2},e_{n-1}]=\lambda_2 e_n & \end{cases}$$

$\mu^{15,\lambda_1}_{(I,1,1,2)}|_{\lambda_1\neq 0}$:

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-4\\ [e_i,e_{n-2}]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-4\\ [e_{n-2},e_{n-2}]=e_n & \\ [e_{n-1},e_{n-2}]=e_n & \\ [e_1,e_{n-1}]=\lambda_1 e_n & \\ [e_{n-2},e_{n-1}]=-e_n & \end{cases}$$

$\mu^{16,\lambda_1}_{(I,1,1,2)}|_{\lambda_1\neq 0}$:

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-4\\ [e_1,e_{n-2}]=e_2+e_n & \\ [e_i,e_{n-2}]=e_{i+1}, & 2\le i\le n-4\\ [e_{n-2},e_{n-2}]=\lambda_1 e_n & \\ [e_{n-1},e_{n-2}]=e_n & \\ [e_{n-2},e_{n-1}]=-e_n & \end{cases}$$

$\mu^{17}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -e_n & \end{cases}$$

$\mu^{18}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = -e_n & \end{cases}$$

$\mu^{19}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_2 + e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

$\mu^{20}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_2 + e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

$\mu^{21}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

$\mu^{22}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

$\mu^{23}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n & \end{cases}$$

$\mu^{24,\lambda}_{(I,1,1,2)} \{|_{\lambda\neq 0,-1}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-1}] = \lambda e_n & \end{cases}$$

$\mu^{25,\lambda}_{(I,1,1,2)}\{|_{\lambda\neq 0,-1}$:

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4 \\ [e_1,e_{n-2}]=e_n \\ [e_{n-1},e_{n-2}]=e_n \\ [e_{n-2},e_{n-1}]=\lambda e_n \end{cases}$$

$\mu^{26,\lambda}_{(I,1,1,2)}\{|_{\lambda\neq 0,-1}$:

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4 \\ [e_{n-1},e_{n-2}]=e_n \\ [e_{n-2},e_{n-1}]=\lambda e_n \end{cases}$$

$\mu^{27}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4 \\ [e_{n-2},e_{n-2}]=e_n \\ [e_{n-1},e_{n-2}]=e_n \\ [e_1,e_{n-1}]=e_n \\ [e_{n-2},e_{n-1}]=-e_n \end{cases}$$

$\mu^{28}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4 \\ [e_1,e_{n-2}]=e_n \\ [e_{n-2},e_{n-2}]=e_n \\ [e_{n-1},e_{n-2}]=e_n \\ [e_{n-2},e_{n-1}]=-e_n \end{cases}$$

$\mu^{29}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4 \\ [e_{n-2},e_{n-2}]=e_n \\ [e_{n-1},e_{n-2}]=e_n \\ [e_{n-2},e_{n-1}]=-e_n \end{cases}$$

$\mu^{30}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4 \\ [e_1,e_{n-2}]=e_n \\ [e_{n-1},e_{n-2}]=e_n \\ [e_{n-2},e_{n-1}]=-e_n \end{cases}$$

$\mu^{31}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4 \\ [e_{n-1},e_{n-2}]=e_n \\ [e_{n-2},e_{n-1}]=-e_n \end{cases}$$

$\mu^{33}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4 \\ [e_{n-1},e_{n-2}]=\beta_3 e_n \\ [e_1,e_{n-1}]=\beta_4 e_n \end{cases}$$

$\mu^{34}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4 \\ [e_{n-1},e_{n-2}]=e_n \end{cases}$$

$\mu^{35}_{(I,1,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-4 \\ [e_{n-2},e_{n-2}]=e_n \\ [e_1,e_{n-1}]=e_n \end{cases}$$

$\mu^1_{(I,1,2,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_2 + e_{n-1} & \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_n & \end{cases}$$

$\mu^2_{(I,1,2,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_{n-1} & \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_n & \end{cases}$$

$\mu^{3,k}_{(I,1,2,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_2 + e_n & \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = ke_n & k \in \mathbf{C} \\ [e_i, e_{n-1}] = e_{i+2}, & 1 \leq i \leq n-5 \end{cases}$$

$\mu^4_{(I,1,2,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_i, e_{n-1}] = e_{i+2}, & 1 \leq i \leq n-5 \end{cases}$$

$\mu^5_{(I,1,2,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_n & \\ [e_i, e_{n-1}] = e_{i+2}, & 1 \leq i \leq n-5 \end{cases}$$

$\mu^{1,\lambda}_{(I,1,2,3)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_2 + e_{n-1} & \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \lambda e_{n-1} & \lambda \in \mathbf{C} \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \end{cases}$$

$\mu^2_{(I,1,2,3)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_i, e_{n-2}] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_{n-1} & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \end{cases}$$

$\mu^{3,\lambda}_{(I,1,2,3)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_1, e_{n-2}] = e_{n-1} & \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = \lambda e_{n-1} & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \end{cases}$$

$\mu^4_{(I,1,2,3)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4 \\ [e_{n-2}, e_{n-2}] = e_{n-1} & \\ [e_{n-1}, e_{n-2}] = e_n & \end{cases}$$

A.4.2 Tipo II

$\mu^{1,\lambda}_{(II,1,2)}|_{\lambda\neq 0}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_2] = e_n \\ [e_2, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \lambda e_n \end{cases}$$

$\mu^{2}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_2, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

$\mu^{3}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

$\mu^{4}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1}, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

$\mu^{5}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_2] = e_n \\ [e_2, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

$\mu^{6}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_2, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

$\mu^{7}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

$\mu^{8}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

$\mu^{9,\lambda}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_2, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_2] = e_n \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n \\ [e_2, e_{n-1}] = \lambda e_n & \lambda \in \mathbf{C} \end{cases}$$

$\mu^{10}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_2, e_2] = e_n \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n \\ [e_2, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

$\mu^{11}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_2, e_2] = e_n \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

$\mu^{12,\lambda}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1}, e_2] = e_n \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n \\ [e_2, e_{n-1}] = \lambda e_n & \lambda \in \mathbf{C} - \{0, -1\} \end{cases}$$

$\mu^{13}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n \\ [e_2, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

$\mu^{14}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

$\mu^{15,\lambda}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1}, e_2] = e_n \\ [e_2, e_{n-1}] = \lambda e_n & \lambda \in \mathbf{C} \end{cases}$$

$\mu^{16}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_2, e_2] = e_n \\ [e_{n-1}, e_2] = e_n \\ [e_2, e_{n-1}] = -e_n \end{cases}$$

$\mu^{17}_{(II,1,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_2] = e_n \\ [e_2, e_{n-1}] = e_n \end{cases}$$

$\mu_{(II,2,2)}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_2] = e_{n-1} \\ [e_2, e_2] = e_n \end{cases}$$

Bibliografía

[1] J. M. Ancochea-Bermúdez, M. Goze, *Classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7*, Arch. Math., 52:2, 175-185, 1989.

[2] Sh.A. Ayupov, B.A. Omirov, *On a Description of Irreducible Component in the set of nilpotent Leibniz Algebras containing the Algebra of maximal nilindex, and classification of graded filiform Leibniz algebras*, Computer Algebra in Scientific Computing CASC, Springer, 21-34, 2000.

[3] Bloch, *On a generalization of Lie algebra notion*, Math.In USRR, Doklady 165(3), 471-473, 1965.

[4] L. Boza, F. J. Echarte, J. Núñez, *Classification of complex Filiform Lie Algebras of dimension 10*, Algebra, Groups and Geometries, 11:3, 253-276, 1994.

[5] J.M. Cabezas, L.M. Camacho, J.R. Gómez, R.M. Navarro, *A class of nilpotent Lie algebras*, Communications in Algebra, 28:9, 4489-4499, 2000.

[6] J.M. Cabezas, J.R. Gómez, *Las álgebras de Lie $(n-3)$-filiformes como extensiones por derivaciones*, Extracta Mathematicae, 13:3, 383-391, 1998.

[7] J.M. Cabezas, J.R. Gómez, *$(n-4)$-filiform Lie algebras*, Communications in Algebra, 27:10, 4803-4819, 1999.

[8] J.M. Cabezas, J.R. Gómez, A. Jiménez-Merchán, *Family of p-filiform Lie algebras,* Algebra and Operator Theory. Kluwer Academic Publishers, 93-102, 1998.

[9] J.M. Cabezas, J.R. Gómez, E. Pastor, *Structure theorem for naturally graded 3-filiform Lie algebras*, I Colloquium on Lie Theory and Applications, Vigo (Spain), 2000.

[10] J.M. Cabezas, J.R. Gómez, E. Pastor, *Naturally graded 3-filiform Lie algebras,* Submitted to Journal of Algebra, 2000.

[11] J.M. Cabezas, E. Pastor, *Naturally graded p-filiform Lie algebras in arbitrary finite dimension*, Enviado a Journal of Lie Theory.

[12] L.M. Camacho, *Álgebras de Lie p-filiformes* PhD thesis, Universidad de Sevilla, 2000.

[13] L.M. Camacho, J.R. Gómez, R.M. Navarro, *3-filiform Lie algebras of dimension 8*, Ann. Math. Blaise Pascal, 6:2, 1-13, 1999.

[14] L.M. Camacho, J.R. Gómez, R.M. Navarro, *Family of laws of $(n-6)$-filiform Lie algebras*, SAGA V Meeting León, 1999.

[15] F.J. Castro, J.R. Gómez, A. Jiménez-Merchán, J. Nuñez, *How to obtain families of laws Lie algebras*, Proc. EACA'95, Serv. Publ. U. Cantabria, 29-37, 1995.

[16] A. Cerezo, *Les algèbres de Lie nilpotentes réelles et complexes de dimension 6*, Preprint N^o. 27, Université de Nice, 1984.

[17] J. Dixmier, *Sur les representations unitaires des groupes de Lie nilpotents III.* Canad. J. Math., 10, 321-348, 1958.

[18] F. J. Echarte, J. R. Gómez, *Classification of complex filiform nilpotent Lie algebras of dimension 9*, Rend. Sem. Fac. Sc. Univ. Cagliari, 61:1, 21-29, 1991.

[19] J.R. Gómez, A. Jiménez-Merchán, *Naturally Graded Quasi-Filiform Lie Algebras*, Journal of Algebra, 256, 211-228, 2002.

[20] J. R. Gómez, A. Jiménez-Merchán, Y. Khakimdjanov, *Low-Dimensional Filiform Lie Algebras.* Journal of Pure and Applied Algebra 130, 133-158, 1998.

[21] Yu. Hakimjanov (Khakimdjanov), *Sur les variétés d'algèbre de Lie*, Communications in Algebra, 18:4, 1147-1187, 1990.

[22] You. B. Hakimjanov (Khakimdjanov), *Variété des lois d'algèbres de Lie nilpotentes*, Geometriae Dedicata, 40:3, 269-295, 1991.

[23] N. Jacobson, *Lie algebras*, Dover Publications, Inc. New York, 1979.

[24] V. Morozov, *Classification of nilpotent Lie algebras of sixth order.* Izv. Vysch. U. Zaved. Mat., 4:5, 161-171, 1958.

[25] O. A. Nielsen, *Unitary representations and coadjoint orbits of low-dimensional nilpotent Lie groups*, Queen's Papers in Pure and Appl. Math., 63, 1983.

[26] J.L. Loday, *Cyclic Homology*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[27] J.L. Loday, *Une version non commutative des algèbres de Leibniz*, L'Ens. Math. 39, 269-293, 1993.

[28] J.L. Loday, T. Pirashvili, *Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology*, Math. Ann. 296, 139-158, 1993.

[29] M. Romdhani, *Classification of real and complex nilpotent Lie algebras of dimension 7*, Linear and Multilinear Algebra, 24, 167-189, 1989.

[30] C. Seeley, *Seven-dimensional nilpotent Lie algebras over the complex numbers*, PhD. Thesis, Chicago, 1988.

[31] K. A. Umlauf, *Über die Zusammensetzung der endlichen continuierlichen Transformationsgruppen insbesondere der Gruppen vom Range null*, Thesis, Leipzig, 1891.

[32] M. Vergne, *Variété des algèbres de Lie nilpotentes*, Tesis, París, 1966.

[33] G. Vranceanu, *Classificarea grupurilor lui Lie de rang zero*, Acad. Rep. Pop. Rom., Stud. Cerc. Mat., 1, 40-86, 1950.

ALFONSO JOSÉ GONZÁLEZ REGAÑA

GRADUACIONES NATURALES DE

ÁLGEBRAS DE LEIBNIZ

SOBRESALIENTE

CUM LAUDE

3 SEPTIEMBRE 2004

Mª F Blanco

El Presidente.