Universidad de Sevilla

Facultad de Matemáticas

Trabajo Fin de Grado:

Teoría del Grado y aplicación a la resolución de Ecuaciones Diferenciales

Autor: Esperanza Mª Zambrano Monge

Tutor: Juan Casado Díaz

18 de junio de 2018

Resumen

El objetivo de la presente memoria es introducir los elementos básicos de la teoría del grado en espacios de dimensión finita (grado de Brouwer) e infinita (grado de Leray-Schauder). Nos centramos especialmente en mostrar su relación con la existencia de solución y la dependencia respecto de los datos para sistemas de ecuaciones no lineales. Muy especialmente consideramos las aplicaciones a la resolución de problemas diferenciales. En este sentido, usamos la teoría en dimensión finita para probar la existencia de soluciones periódicas y de puntos de equilibrio para sistemas ordinarios. La teoría infinito-dimensional es usada para obtener un resultado bastante general de existencia de solución local para un problema de Cauchy correspondiente a un Sistema Diferencial Ordinario y para probar la existencia de solución débil para el sistema de Navier-Stokes.

Abstract

The goal of the present work is to introduce the basic elements of the degree theory in spaces of finite (Brouwer theory) and infinite (Leray-Schauder theory) dimension. We are mainly interested in showing the relationship with the existence of solution and the dependence with respect to the data for systems of non-linear equations. Specially, we consider the application to the resolution of differential problems. Namely, the finite-dimensional theory is used to show the existence of periodic solutions and critical points for ordinary differential systems. The infinite-dimensional theory is used to get a very general result about the existence of local solution for a Cauchy problem relative to an ordinary differential system and to show the existence of weak solution for the Navier-Stokes system.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La teoría del grado fue establecida por Luitzen Egbertus Jan Brouwer en 1912 en el caso de funciones continuas f definidas en la clausura de un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$, con valores en $\mathbb{R}^n$. Se trata de una herramienta topológica relacionada con la existencia de solución y su dependencia respecto a los datos para sistemas de ecuaciones no lineales del tipo $f(x) = y$. En su origen la idea es generalizar al menos en cierto sentido el resultado clásico para una función analítica en un dominio del plano complejo que nos dice que si tenemos una curva continua cerrada Γ contenida en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ y una función analítica f en Ω entonces para todo $a \in \mathbb{C}\backslash\Gamma$ se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz = \sum_{k}\omega(\Gamma, z_k)\alpha_k \in \mathbb{Z},$$

donde los valores z_k son las raíces de la ecuación $f(z) = a$, $\omega(\Gamma, z_k)$ el número de giros que describe Γ en torno a a y α_k su multiplicidad. Varios resultados acerca de la dependencia continua de este valor con respecto a f, a y Γ son conocidos y han sido estudiados en la asignatura *Funciones de una Variable Compleja* de tercer curso del grado de Matemáticas. La teoría del grado va a proporcionar una herramienta similar pero en abiertos de $\mathbb{R}^n$ y para funciones que sólo necesitan ser continuas. Dados un conjunto abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, una función continua en $\overline{\Omega}$ y un valor $y \notin f(\partial\Omega)$, el grado $d(f, \Omega, y)$ es un valor entero asociado a la tripleta (f, Ω, y) relacionado con el número de soluciones de la ecuación $y = f(x)$ y que depende de forma continua con respecto a f e y, más concretamente es invariante por homotopías. El grado tiene una gran importancia en topología donde proporciona demostraciones relativamente simples de resultados de gran complejidad como el teorema de la curva cerrada de Jordan y sus extensiones al caso de hipersuperficies en $\mathbb{R}^n$. En el presente trabajo estamos más interesados en su relación con la existencia de solución para la ecuación $f(x) = y$. El resultado principal en este sentido se basa en que si esta ecuación no tiene solución entonces $d(f, \Omega, y) = 0$. Probar por tanto que el grado es no nulo implica la existencia de solución del sistema no lineal. La idea principal para ello consiste en deformar la ecuación $f(x) = y$ en otra ecuación más simple usando una homotopía, para la cual es fácil calcular el grado. Así por ejemplo es fácil probar con estas ideas el teorema del punto fijo de Brouwer que es una de las herramientas más importantes a la hora de probar la existencia de puntos fijos para una función en $\mathbb{R}^n$ con aplicaciones por ejemplo a la existencia de soluciones periódicas y de puntos de equilibrio para sistemas diferenciales ordinarios.

La teoría del grado de Brouwer fue extendida en los años 20 a espacios de dimensión infinita por los matemáticos Jean Leray Schauder y Juliusz Schauder usando un resultado de éste último que permite aproximar una función compacta por una función valuada en un espacio finito dimensional. Estas ideas permiten extender los resultados correspondientes a la teoría del grado de Brouwer al caso de perturbaciones compactas de la unidad.

La presente memoria está organizada de la siguiente forma:

- En el tercer capítulo introducimos la teoría del grado de Brouwer, mostrando como se construye y recordando algunos de los resultados fundamentales de esta teoría, especialmente el teorema del punto fijo de Brouwer. Como aplicación obtenemos un resultado de existencia periódica para soluciones de sistemas diferenciales no lineales del tipo $y' = f(t, y)$ con f periódica con respecto a la variable t. En el caso de sistemas autónomos mostramos como este resulado permite obtener la existencia de puntos de equilibrio bajo ciertas condiciones en la función f. Recordar que esto es equivalente a probar la existencia de solución para el sistema no lineal $f(y) = 0$. El resultado provee en particular una extensión del bien conocido teorema de Bolzano relativo a la existencia de ceros para una función real continua definida en un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$. Como consecuencia importante obtenemos también una condición suficiente para la sobreyectividad de una función continua de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$.

- En el cuarto capítulo mostramos como los resultados del capítulo anterior se pueden extender al caso de funciones definidas de un abierto de un espacio de Banach en sí mismo las cuales son de la forma $I - F$ con F una apliación compacta. Se trata de la teoría del grado de Leray-Schauder. Como aplicación importante obtenemos el teorema del punto fijo de Schauder y alguna generalización de este resultado que puede resultar más interesante desde el punto de vista de las aplicaciones. Ver el teorema 4.9.

- El capítulo 5 está dedicado a la aplicación de la teoría del grado de Leray-Schauder a la existencia de soluciones de problemas diferenciales. Concretamente llevamos a cabo dos aplicaciones. La primera se refiere a un teorema de existencia de solución local para un sistema diferencial ordinario $y' = f(t, y)$ con condiciones iniciales en el caso en que la función f es sólo medible con respecto a la variable t y verifica ciertas propiedades de continuidad respecto de y. Este resultado extiende el teorema de Picard que se estudió en la asignatura *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* del segundo curso del grado en Matemáticas y, más generalemente, extiende el Teorema de Peano que corresponde al caso en que f es continua respecto a (t, y). La segunda aplicación se refiere a la existencia de solución para el sistema de Navier-Stokes incomprensible estacionario, el cual recordamos consiste en un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que rigen el comportamiento de un fluido viscoso incomprensible en un abierto de $\mathbb{R}^n$ (usualmente $n = 2, 3$). Las ecuaciones correspondientes representan la conservación de la cantidad de movimiento y el volumen y proporcionan la velocidad y la presión del fluido. En ambas aplicaciones el problema es mostrar la existencia de punto fijo para un cierto operador definido en espacios de Banach.

Capítulo 2

Notaciones

- El símbolo de L.Kronecker se define como $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$
- $C(B)$ es el espacio de $f : B \to R^n$ continua, siendo $B \subset \mathbb{R}^n$.
- $|f|_0 = \max_B |f(x)|$ para $f \in C(B)$.
- $C^k(\Omega)$ conjunto de $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, el cual es continuamente diferenciable en Ω, donde $\overline{C}^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ y $\overline{C}^\infty(\Omega) = \bigcap\limits_{k \geq 1} \overline{C}^k(\Omega)$
- $S_f(\Omega) = \{x \in \Omega : J_f(x_0) = 0\}$
- μ_n denota la medida de Lebesgue n-dimensional.
- $\varrho(x, A) = \min\limits_{y \in A} \operatorname{dist}(x, y)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall A \subset \mathbb{R}^n$

Capítulo 3

Grado Topológico en Dimensión Finita

En este capítulo introducimos el grado en un espacio de dimensión finita. Exponemos sus propiedades y presentamos varios de los resultados fundamentales. El grado es una importante herramienta topólogica relacionada con la existencia y dependencia continua de las soluciones de un sistema no lineal de n ecuaciones con n incógnitas. Las ecuaciones están definidas a través de funciones continuas.

3.1. Unicidad del Grado

El objetivo principal de esta sección es probar el teorema que presentamos a continuación que muestra la existencia y unicidad del grado topológico en $\mathbb{R}^n$

Teorema 3.1. *Existe una única función*

$$d : \{(f, \Omega, y) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad abierto, acotado, f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n continua, y \in \mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)\} \to \mathbb{Z}$$

que satisface:

(d1) $d(id, \Omega, y) = 1$ *para* $y \in \Omega$

(d2) $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y)$ *si* Ω_1, Ω_2 *son subconjuntos abiertos disjuntos de* Ω *tales que* $y \notin f(\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2))$

(d3) *$d(h(t,.),\Omega,y(t))$ es independiente de $t \in J = [0,1]$ si $h : J \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ continua, $y : J \to \mathbb{R}^n$ continua e $y(t) \notin h(t,\partial\Omega)$, $\quad \forall t \in J$.*

A fin de demostrar el Teorema 3.1, la idea es definir primero éste para funciones f más regulares que sólo continuas y puntos y de $\mathbb{R}^n \backslash f(\overline{\Omega})$ con propiedades especiales. El resultado general se muestra posteriormente mostrando como las definiciones correspondientes a casos especiales se extienden por continuidad. El proceso correspondiente es llevado a cabo a través de una serie de resultados que presentamos a continuación.

3.1.1. De $C(\overline{\Omega})$ a $\overline{C}^{\infty}(\Omega)$

El primer paso de esta reducción es probar que d ya está determinada de manera única por sus valores en funciones de clase $\overline{C}^{\infty}$. Para ello, usamos

Proposición 3.1. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto y $f : A \to \mathbb{R}^n$ continua. Entonces f puede ser extendida continuamente a $\mathbb{R}^n$, es decir, $\exists\ \widetilde{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\widetilde{f}(x) = f(x)$ para $x \in A$.*

Proposición 3.2.

1. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto, $f \in C(A)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe una función $g \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tal que $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ en A.*

2. *Sean $f \in \overline{C}^1(\Omega), \varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tal que $\Omega_\delta := \{x \in \Omega : \varrho(x,\partial\Omega) \geq \delta \neq \emptyset\}$, entonces existe $g \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tal que $|f - g|_0 + \max\limits_{\Omega_\delta} |f'(x) - g'(x)| \leq \varepsilon$.*

Demostración: Sea $\widetilde{f}$ una extensión continua de f en $\mathbb{R}^n$ y sea

$$f_\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(\xi)\varphi_\alpha(\xi - x)d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha > 0,$$

donde $(\varphi_\alpha)_{\alpha>0}$ es la familia de "mollifiers" $\quad \varphi_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} c \cdot \exp\Big(- \frac{1}{1-|x|^2}\Big) & \text{si} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

con $c > 0$ tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(x)dx = 1$, y $\varphi_\alpha(x) = \alpha^{-n}\varphi_1(x/\alpha)$. Entonces, tenemos

$\varphi_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\alpha(x)dx = 1$ y $\overline{B}_\alpha(0)$ es el soporte de φ_α, i.e.

$$\operatorname{sop}(\varphi_\alpha) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_\alpha(x) \neq 0\}} = \overline{B}_\alpha(0), \quad \alpha > 0$$

Por lo tanto, $f_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\lim_{\alpha\to 0} f_\alpha(x) = f(x)$.

Finalmente, $g = f_\alpha$ con α suficientemente pequeña prueba el primer apartado. El segundo apartado sigue por la diferenciación de

$$f_\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi + x)\varphi_\alpha(\xi)d\xi$$

para $x \in \Omega_\delta$ y $\alpha < \delta$. □

Sean ahora $f \in C(\overline{\Omega})$ e $y \in f(\partial\Omega)$. Entonces $\alpha = \varrho(y, f(\partial\Omega)) > 0$ y por tanto existe $g \in \overline{C}^\infty(\Omega)$ tal que $|f - g|_0 < \alpha$. La función $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, definida por $h(t,x) = (1-t)f(x) + tg(x)$ es continua y verifica $|h(t,x)| \geq |f(x) - y| - |f - g|_0 > 0$, para todo $t \in [0,1]$, $x \in \partial\Omega$. Por lo tanto, si existe el grado, aplicando (d3) con $y(t) \equiv y$ se debe tener

$$d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, y)$$

Basta entonces definir el grado para funciones en $\overline{C}^\infty(\Omega)$

3.1.2. De valores singulares a valores regulares

Definición 3.1. Sea $f \in \overline{C}^1(\Omega)$, un punto $y \notin f(\partial\Omega)$ se dice regular si para todo $x \in \Omega$ tal que $f(x) = y$ se tiene $J_f(x) \neq 0$.

Sean $f \in \overline{C}^\infty(\Omega)$ e $y \notin f(\partial\Omega)$. Si y es un valor regular de f entonces $f(x) = y$ tiene a lo sumo un número finito de soluciones. Para ver esto, recordamos:

Proposición 3.3 (Teorema de la función inversa)**.** *Sea $f \in C^1(\Omega)$ y $J_f(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in \Omega$. Entonces existe un entorno abierto U de x_0 tal que $f_{|U}$ es un difeomorfismo en un entorno abierto de $f(x_0)$.*

Si y es regular entonces, por definición, $J_f(x) \neq 0$ para todo $x \in \Omega$ con $f(x) = y$. La Proposición 3.3 implica entonces que estas soluciones son aisladas, es decir, para $x_0 \in f^{-1}(y)$ existe $U(x_0)$ entorno abierto de x_0 tal que $f^{-1}(y) \cap$

$U(x_0) = \{x_0\}$. En consecuencia, $f^{-1}(y)$ es un conjunto finito. En caso contrario, habría un punto de acumulación $x_0 \in \overline{\Omega}$ de soluciones, por la compacidad de $\overline{\Omega}$. Ya que f es continua esto implicaría $f(x_0) = y$ y por lo tanto $x_0 \in \Omega$ ya que $y \notin f(\partial\Omega)$. Pero entonces x_0 es aislado, lo cual contradice la existencia de soluciones de $f(x) = y$ convergiendo a x_0.

Ahora, sea $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ cualquier punto. Entonces, para $\alpha = \varrho(y_0, f(\partial\Omega))$ se tiene $B_\alpha(y_0) \cup f(\partial\Omega) = \emptyset$. Por tanto, (d3) con $h(t,x) = f(x), y(t) = ty_0 + (1-t)y$ y $y \in B_\alpha(y_0)$ implicaría

$$d(f,\Omega,y) = d(f,\Omega,y_0) \quad \text{para cada} \quad y \in B_\alpha(y_0).$$

Ya que la siguiente proposición garantiza en particular que $B_\alpha(y_0)$ contiene valores regulares de f, será suficiente definir el grado para valores regulares.

Proposición 3.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f \in C^1(\Omega)$. Entonces $\mu_n(f(S_f)) = 0$.*

Observamos que la Proposición 3.4 es un caso especial del *Lema de Sard* : Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, $f \in C^1(\Omega)$ y $\Omega^* \subset \Omega$ medible, entonces $f(\Omega^*)$ es medible y $\mu_n(f(\Omega^*)) \leq \int_{\Omega^*} |J_f(x)|dx$.

3.1.3. De aplicaciones de clase C^∞ a aplicaciones lineales

En esta sección solo necesitamos considerar $f \in \overline{C}^\infty(\Omega)$ e $y \notin f(\partial\Omega \cup S_f)$.

Supongamos $f^{-1}(y) = \emptyset$.

A partir de (d2) con $\Omega_1 = \Omega$ y $\Omega_2 = \emptyset$ obtenemos $d(f,\emptyset,y) = 0$. Por lo tanto $d(f,\Omega,y) = d(f,\Omega_1,y)$ si Ω_1 es un subconjunto abierto de Ω tal que $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$. En particular, esto implica que si $f^{-1}(y) = \emptyset$, entonces $d(f,\Omega,y) = d(f,\emptyset,y) = 0$. En el caso de que $f^{-1}(y) = \{x^1,\ldots,x^n\}$, elegimos entornos disjuntos U_i de x^i y a partir de (d2) obtenemos

$$d(f,\Omega,y) = \sum_{i=1}^{n} d(f,U_i,y).$$

Ahora, calculamos $d(f,U_i,y)$:

Sea $A = f'(x^i)$, se tiene

$$f(x) = y + A(x-x^i) + o(|x-x^i|) \quad \text{cuando} \quad |x-x^i| \to 0$$

Supongamos $detA \neq 0$, sabemos entonces que A^{-1} existe y por lo tanto $|z| = |A^{-1}Az| \leq |A^{-1}||Az|$, es decir, $|Az| \geq c|z|$ en $\mathbb{R}^n$ para algún $c > 0$. A través de esta estimación, vemos que $y(t) = ty$ y $h(t,x) = tf(x) + (1-t)A(x - x^i)$ satisface:

$$|h(t,x) - y(t)| = |A(x - x^i) + t \cdot o(|x - x^i|)| \geq c|x - x^i| - o(|x - x^i|) > 0$$

para todo $t \in [0,1]$ siempre que $|x - x^i| \leq \delta$ con $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Por lo tanto $d(f, B_\delta(x^i), y) = d(A - Ax^i, B_\delta(x^i), 0)$ por (d3). Como $f(x) \neq y$ en $\overline{U}_i \backslash B_\delta(x^i)$, se tiene además $d(f, U_i, y) = d(f, B_\delta(x^i), y)$ por (d2), y por lo tanto

$$d(f, U_i, y) = d(A - Ax^i, B_\delta(x^i), 0).$$

Por otra parte, como x^i es la única solución de $Ax - Ax^i = 0$, (d2) implica

$$d(A - Ax^i, B_\delta(x^i), 0) = d(A - Ax^i, B_r(0), 0) \quad \text{para} \quad B_r(0) \supset B_\delta(x^i)$$

tomando además $h(t,x) = A(x - tx^i) \neq 0$ en $[0,1] \times \partial B_r(0)$ podemos aplicar (d3) para obtener finalmente

$$d(f, U_i, y) = d(f'(x^i), B_r(0), 0).$$

3.1.4. Algebra lineal puede ayudar

Vamos a probar ahora que $d(A, B_r(0), 0)$ está determinada de manera inequívoca si A es una aplicación lineal con $\det A \neq 0$. De hecho se tiene para todo abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con $0 \in \Omega$

$$d(A, \Omega, 0) = sgn(detA).$$

Sea A una matriz real $n \times n$ con $\det A \neq 0$, sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ los autovalores negativos de A y $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sus multiplicidades como ceros de $\det(A - \lambda \mathrm{id})$. Análogamente tomamos $\mu_1, \ldots, \mu_l$; los autovalores positivos y $\beta_1 \ldots \beta_l$; su multiplicidad. Sabemos que podemos descomponer $\mathbb{R}^n$ como $\mathbb{R}^n = N \oplus M$ siendo N, M subespacios de $\mathbb{R}^n$ tales que

1. N y M son invariantes bajo A.

2. $A_{|N}$ tiene solo los autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ y $A_{|M}$ los autovalores $\beta_1, \ldots, \beta_k$.

3. $\dim N = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k$

Se tiene $\det A = (-1)^{\alpha} \prod_{k=1}^{m} |\lambda_k|^{\alpha_k} \prod_{j=1}^{n} \mu_j^{\beta_j}$ con $\alpha = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k = \dim N$.
Por tanto

$$sgndet A = (-1)^{\alpha}.$$

Consideremos el caso $N \neq \{0\}$ ya que en el caso de que A sólo tenga autovalores positivos $\det(tA + (1-t)id) \neq 0$ en $[0,1]$ y por (d3) y (d1) se tiene $d(A, B_r(0), 0) = d(id, B_r(0), 0) = 1 = sgn\det A$.

Sea $\alpha = \dim N$. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene una única representación $x = P_1x + P_2x$ con $P_1x \in N$ y $P_2x \in M$. Definimos las proyecciones lineales $P_1 : \mathbb{R}^n \to N$ y $P_2 = id - P_1 : \mathbb{R}^n \to M$. Entonces $A = AP_1 + AP_2$ es descomposición directa de A ya que $A(N) \subset N$ y $A(M) \subset M$ por a). Ahora vamos a probar

$$h(t,x) = tAx + (1-t)(-P_1x + P_2x) \neq 0 \quad \text{en} \quad [0,1] \times \partial B_r(0) \tag{3.1}$$

En primer lugar, vemos que $h(0,x) = 0$ implica $P_1x = P_2x$ y por lo tanto $P_1x = P_2x \in N \cap M = \{0\}$ y $x = 0$. Por otra parte $H(t,x) = 0$ con $t \neq 0$ significa

$$AP_1x = \lambda P_1x \in N \quad \text{y} \quad AP_2x = -\lambda P_2x \in M \quad \text{con} \quad \lambda = t^{-1}(1-t) > 0$$

lo cual solo es posible para $P_1x = P_2x = 0$, por la observación sobre los autovalores de AP_1 y AP_2. Por lo tanto, (3.1) y (d3) implica

$$d(A, B_r(0), 0) = d(-P_1 + P_2, B_r(0), 0).$$

A partir de este resultado, nuestro problema ahora es probar

$$d(-P_1 + P_2, B_r(0), 0) = (-1)^{\alpha}. \tag{3.2}$$

Usando una homotopía es fácil comprobar que podemos siempre suponer

$$P_1x = (x_1, \cdots, x_{\alpha}, 0, \cdots, 0), \quad P_2x = (0, \cdots, 0, x_{\alpha+1}, \cdots, x_n),$$

de forma que

$$(-P_1 + P_2)x = (-x_1, \cdots, -x_\alpha, x_{\alpha+1}, \cdots, x_n).$$

Vamos a probar (3.2) por inducción en α. Si $\alpha = 0$ ya sabemos que el resultado es cierto. Supongamos entonces el resultado cierto para un cierto $\alpha \in \mathbb{N} \cap \{0\}$ y probemos que entonces también es cierto para $\{\alpha + 1\}$.

Definimos $H_[0, 1] \times B_1(0) \to \mathbb{R}^N$ por

$$H(x, t) = (-x_1, \cdots, -x_\alpha, \frac{x_{\alpha+1}^2 - 1}{2} + t, x_{\alpha+2}, \cdots, x_n).$$

Como $H(x, t) \neq 0$ para todo $(x, t) \in \partial B_2(0) \times [0, 1]$ tenemos entonces

$$d(H(1, \cdot), B_2(0), 0) = d(H(0, \cdot), B_2(0), 0),$$

pero la ecuación $H(1, x) = 0$ no tiene solución de forma que $d(H(1, \cdot), B_2(0), 0)$ y por tanto tenemos también

$$d(H(0, \cdot), B_2(0), 0) = 0.$$

Por otra parte, la ecuación

$$H(0, x) = 0, \quad x \in B_2(0)$$

tiene por soluciones

$$x = \pm e_{\alpha+1}$$

con $e_{\alpha+1}$ el vector cuya componente $\alpha + 1$ es uno y las demás nulas. Por lo ya probado, deducimos entonces que para todo $r > 0$, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= d(H(0, \cdot), B_1(0), 0) \\ &= d(D_x H(0, e_{\alpha+1}), B_r(0), 0) + d(D_x H(0, -e_{\alpha+1}), B_r(0), 0), \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde

$$D_x H(0, e_{\alpha+1})(x) = (-x_1, \cdots, -x_\alpha, x_{\alpha+1}, x_{\alpha+2}, \cdots, x_n),$$

$$D_xH(0, -e_{\alpha+1})(x) = (-x_1, \cdots, -x_\alpha, x_{\alpha+1}, x_{\alpha+2}, \cdots, x_n).$$

Como (3.3) prueba

$$d(D_xH(0, -e_{\alpha+1}), B_r(0), 0) = -d(D_xH(0, e_{\alpha+1}), B_r(0), 0),$$

y la hipótesis de inducción se deduce entonces que (3.2) es cierto para $\alpha + 1$. Los resultados expuestos anteriormente prueban

Teorema 3.2. *Sea*

$$M = \{(f, \Omega, y) \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N \, abierto \ y \ acotado, \quad f \in C(\overline{\Omega}), \quad y \in \mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)\}$$

Entonces existe a lo sumo una función $d : M \to \mathbb{Z}$ con las propiedades (d1)-(d3).

3.2. Construcción del Grado

Al estudiar la unicidad del grado hemos visto como debe definirse. Los resultados en esta sección muestran que la correspondiente definición es correcta.

3.2.1. Caso Regular

Definición 3.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, $f \in \overline{C}^1(\Omega)$ e $y \in \mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega \cup S_f)$. Entonces definimos

$$d(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} sgn J_f(x). \tag{3.4}$$

La primera dificultad será deshacernos de la suposicón $y \notin f(S_f)$. Ya sabemos que $f(S_f)$ tiene medida nula y por tanto las integrales en este conjunto se anulan. La idea va a ser remplazar la definición 3.2 por una integral. Se prueba

Proposición 3.5. *Sea $\Omega \in \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, $f \in \overline{C}^1(\Omega)$, $y \in \mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega \cup S_f)$ y sea $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ los mollifiers de la prueba de la proposición 3.2 . Entonces existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(y, f)$ tal que*

$$d(f, \Omega, y) = \int_\Omega \varphi_\varepsilon(f(x) - y) J_f(x) dx \quad para \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0. \tag{3.5}$$

3.2.2. De valores Regulares a valores Singulares

Consideramos $f \in \overline{C}^2(\Omega)$ e $y_0 \notin f(\partial\Omega)$. Sea $\alpha = \varrho(y_0, f(\partial\Omega))$ y supongamos $y^1, y^2 \in B_\alpha(y_0)$ dos valores regulares de f.
Sea $\delta = \alpha - \text{máx}\{|y^i - y^0| : i = 1, 2\}$. Por la Proposición 3.5 encontramos $\varepsilon < \delta$ tal que

$$d(f, \Omega, y^i) = \int_\Omega \varphi_\varepsilon(f(x) - y^i) J_f(x) dx \quad \text{para} \quad i = 1, 2.$$

Ahora, vamos a probar que $d(f, \Omega, y^1) = d(f, \Omega, y^2)$.
Una vez probado el resultado podemos definir $d(f, \Omega, y_0)$ como $d(f, \Omega, y^1)$ ya que sabemos que existe algún valor regular y^1 en $B_\alpha(y_0)$. Para probar que la diferencia de las integrales que definen $d(f, \Omega, y^1)$, $d(f, \Omega, y^2)$ es cero, primero usamos

$$\varphi_\varepsilon(z - y^2) - \varphi(z - y^1) = div\ w(z)$$

$$\text{para} \quad w(z) = (y^1 - y^2) \int_0^1 \varphi_\varepsilon(z - y^1 + t(y^1 - y^2)) dt.$$

Además sop $w \subset \overline{B}_r(y_0)$ para $r = \alpha - (\delta - \varepsilon) < \alpha$, ya que sop $\varphi_\varepsilon = \overline{B}_\varepsilon(0)$. Esto implica que $f(\partial\Omega) \cap$ sop $w = \emptyset$. Esta propiedad nos permite encontrar una aplicación $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$ tal que sop $v \subset \Omega$ y

$$[\varphi_\varepsilon(f(x) - y^2) - \varphi_\varepsilon(f(x) - y^1)] J_f(x) = \operatorname{div} v(x) \quad \text{en} \quad \Omega$$

de forma que por el teorema de la divergencia se tiene $d(f, \Omega, y_1) - d(f, \Omega, y_2) = \int_\Omega \text{div } v(x) dx = 0$

Para definir v usamos

Proposición 3.6. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in C^2(\Omega)$ y d_{ij} el cofactor de $\partial f_j(x)/\partial x_i$ en $J_f(x)$, entonces*

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial d_{ij}(x)}{\partial x_i} = 0 \quad \textit{para} \quad j = 1, \ldots, n.$$

Ahora, definimos $v_i(x) = \sum_{j=1}^n w_j(f(x)) d_{ij}(x)$ en $\overline{\Omega}$ y $v_i(x) = 0$ en $\mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$ para

$i = 1, \ldots, n$. Entonces sop $w \subset \overline{B}_r(y_0) \subset B_\alpha(y_0)$ implica sop $v \subset \Omega$ y se tiene

$$\partial_i v_i(x) = \sum_{j,k=1}^{n} d_{ij}(x)\partial_k w_j(f(x))\partial_i f_k(x) + \sum_{j=1}^{n} w_j(f(x))\partial_i d_{ij}(x).$$

Lo que usando $\sum_{i=1}^{n} d_{ij}(x)\partial_i f_k(x) = \delta_{jk} J_f(x)$ con δ_{jk} de Kronecker, junto con la Proposición 3.6 nos proporciona

$$\operatorname{div} v(x) = \sum_{k,j=1}^{n} \partial_k w_j(f(x))\delta_{jk} J_f(x) = \operatorname{div} w(f(x)) J_j(x)$$

En consecuencia hemos justificado la siguiente definición.

Definición 3.3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, $f \in \overline{C}^2(\Omega)$ y $y \in f(\partial\Omega)$. Entonces definimos $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega, y^1)$, donde y^1 es cualquier valor regular de f tal que $|y^1 - y| < \varrho(y, f(\partial\Omega))$.

3.2.3. De $\overline{C}^2(\Omega)$ a $C(\overline{\Omega})$

En esta seción mostramos que el grado de la Definición 3.3 coincide para toda función de clase $C^2(\overline{\Omega})$ suficientemente cerca a una aplicación continua dada. Usamos la proposición siguiente que damos sin demostrar.

Proposición 3.7. *Sea $f \in \overline{C}^2(\Omega)$, $y \notin f(\partial\Omega)$. Entonces, para $g \in \overline{C}^2(\Omega)$ existe $\delta = \delta(f, y, g) > 0$ tal que $d(f + tg, \Omega, y) = d(f, \Omega, y)$ para $|t| < \delta$.*

Sea entonces $f \in C(\overline{\Omega}), y \notin f(\partial\Omega)$ y $\alpha = \varrho(y, f(\partial\Omega))$. Consideremos dos funciones $g, \widetilde{g} \in \overline{C}^2$ tal que $|g - f|_0 < \alpha$ y $|\widetilde{g} - f|_0 < \alpha$, y tomamos $h(t, x) = g(x) + t(\widetilde{g}(x) - g(x))$, $\varphi(t) = d(h(t, \cdot), \Omega, y)$ para $t \in [0, 1]$. Ya que $h(t, \cdot) = h(t_0, \cdot) + (t - t_0)(\widetilde{g} - g)$, la Proposición 3.7 nos dice que es localmente constante. Como $\varphi([0, 1])$ es un intervalo cerrado se tiene entonces que $\varphi([0, 1])$ se reduce a un punto y por tanto $d(g, \Omega, y) = d(\widetilde{g}, \Omega, y)$.

Definición 3.4. Sea $f \in C(\overline{\Omega})$ e $y \in \mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$. Entonces definimos $d(f, \Omega, y) := d(g, \Omega, y)$ donde $g \in \overline{C}^2(\Omega)$ es cualquier aplicación tal que $|g - f|_0 < \varrho(y, f(\partial\Omega))$ y $d(g, \Omega, y)$ viene dado por la Definición 3.3.

3.3. Otras Propiedades de el Grado

3.3.1. Consecuencias de (d1), (d2), d(3)

Las propiedades básicas (d1)-(d3) implica algunas consecuencias importantes que vamos a enumerar como (d4)-(d7) en el siguiente teorema.

Teorema 3.3. *Sean* $M = \{(f, \Omega, y) : \Omega \subset \mathbb{R}^n$ *abierto y acotado,* $f \in C(\overline{\Omega})$, $y \notin f(\partial\Omega)\}$ *y* $d : M \to \mathbb{Z}$ *el grado topológico definido por la Definición 3.4. Entonces* d *tiene las propiedades siguientes.*

(d4) $d(f, \Omega, y) \neq 0$ *implica* $f^{-1}(y) \neq 0$

(d5) $d(\cdot, \Omega, y)$ *y* $d(f, \Omega, \cdot)$ *son constantes en* $\{g \in C(\overline{\Omega}) : |g - f|_0 < r\}$ *y* $B_r(y) \subset \mathbb{R}^n$*, respectivamente, donde* $r = \varrho(y, f(\partial\Omega))$*. Además,* $d(f, \Omega, \cdot)$ *es constante en cada componente conexa de* $\mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$*.*

(d6) $d(g, \Omega, y) = d(f, \Omega, y)$ *si* $g_{|\partial\Omega} = f_{|\partial\Omega}$

(d7) $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y)$ *para cada subconjunto abierto* Ω_1 *de* Ω *tal que* $y \notin f(\overline{\Omega} \backslash \Omega_1)$

Demostración: Al comienzo de la Subsección 3.1.3 vimos que (d2) implica (d7) y $d(f, \Omega, y) = 0$ si $f^{-1}(y) = \emptyset$ lo que también prueba (d4). Por otra parte, (d6) resulta de (d3) con $y(t) \equiv y$ y $h(t, \cdot) = tf + (1-t)g$. La primera de las dos partes de (d5) se deduce también usando (d3). Para la última parte , recordamos que las componentes conexas de $\mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$ son abiertas y que los conjuntos conexos y abiertos de $\mathbb{R}^n$ son conexos por arcos. Por lo tanto, si C es una componente de $\mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$ e y^1, y^2 son dos puntos de C, entonces existe una curva continua $y : [0, 1] \to C$ con $y(0) = y^1$ e $y(1) = y^2$. Por lo tanto, el resultado es nuevamente consecuencia de (d3). □

Vamos a estudiar ahora varios resultados relacionados con la existencia de solución de ecuaciones no lineales que se deducen de la teoría del grado.

3.3.2. Teorema de Brouwer y consecuencias

Una de las aplicaciones más importantes de la teoría del grado es que permite obtener una demostración simple del teorema del punto fijo de Brouwer, herramienta básica para demostrar la existencia de un punto fijo para una función no lineal en $\mathbb{R}^N$. Se recuerda,

Definición 3.5. Dado un conjunto X y una función $f : C \subset X \to X$, se dice que un punto $x_0 \in C$ es un punto fijo de f si $f(x_0) = x_0$.

En el caso en que C esté dotado de una topología podemos introducir la siguiente definición.

Definición 3.6. Sea C un espacio topológico. Se dice que C tiene la propiedad del punto fijo si toda función continua $f : C \to C$ tiene un punto fijo.

El interés de la definición anterior viene dado por la siguiente proposición, que muestra que la propiedad del punto fijo es una propiedad topológica.

Proposición 3.8. *Sea C un espacio topológico que posee la propiedad del punto fijo. Entonces todo espacio $\widehat{C}$ homeomorfo a C tiene esta propiedad.*

Demostración: Como $\widehat{C}$ es homeomorfo a C, existe una aplicación $\phi : C \to \widehat{C}$ continua, biyectiva y con inversa continua. Dada entonces $\widehat{f} : \widehat{C} \to \widehat{C}$ una aplicación continua, podemos definir $f = \phi^{-1} \circ f \circ \phi : C \to C$, la cual es una función continua de C en C. Como C tiene la propiedad del punto fijo, sabemos entonces que existe $x_0 \in C$ tal que $f(x_0) = 0$, i.e

$$\phi^{-1}\Big(\widehat{f}\big(\phi(x_0)\big)\Big) = x_0 \Longleftrightarrow \widehat{f}\big(\phi(x_0)\big) = \phi(x_0)$$

Esto muestra que $\widehat{x}_0 := \phi(x_0)$ es un punto de $\widehat{f}$, lo que por la arbitrariedad de $\widehat{f}$ muestra que $\widehat{C}$ tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

El teorema de Brouwer establece

Teorema 3.4. *La bola cerrada de centro cero y radio uno en $\mathbb{R}^n$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración: Sea B_1 la bola abierta de centro cero y radio uno, $\overline{B}_1$ su clausura y $f : \overline{B}_1 \to \overline{B}_1$ una aplicación continua. Tenemos que probar que f tiene un punto fijo. Si existe $x_0 \in \partial\overline{B}_1$ tal que $f(x_0) = x_0$, entonces x_0 es un punto fijo de f. En otro caso, observemos que para todo $\lambda \in [0, 1]$ y para todo $x \in \partial B_1$ se tiene

$$\lambda f(x) \neq x$$

ya que si existe $x \in \partial\overline{B}_1$ tal que $\lambda f(x) = x$, entonces $\lambda|f(x)| = |x| = 1$. En particular, $\lambda \neq 0$ y

$$|f(x)| = \frac{1}{\lambda} \in [1, \infty).$$

Como por hipótesis $|f(x)| \leq 1$, la única posibilidad es entonces $\lambda = 1$ lo que significa $f(x) = x$ con $|x| = 1$ que también es contradicción ya que estamos suponiendo que f no tiene puntos fijos en ∂B_1.

Consideremos entonces $H : [0,1] \times \overline{B}_1 \to \overline{B}_1$ definida por

$$H(\lambda, x) = x - \lambda f(x), \quad \forall x \in \overline{B}_1, \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

Como no existen $\lambda \in [0,1]$, $x \in \partial\overline{B}_1$ tales que $\lambda f(x) = x$ entonces $H(\lambda, x) \neq 0$ para todo $\lambda \in [0,1]$, $x \in \partial\overline{B}_1$, lo que implica

$$d(id - f, B_1, 0) = d(H(1, \cdot), B_1, 0) = d(H(0, \cdot), B_1, 0) = d(id, B_1, 0) = 1$$

y por tanto existe $x_0 \in B_1 \subset \overline{B}_1$ tal que

$$(id - f)(x_0) = 0 \Longleftrightarrow f(x_0) = x_0.$$

□

Teniendo en cuenta la Proposición 3.8, se puede ahora obtener la siguiente generalización del Teorema de Brouwer.

Teorema 3.5. *Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, cerrado no vacío, entonces toda función $f : C \to C$ continua tiene un punto fijo.*

Demostración: Si C se reduce a un punto el resultado es evidente. Podemos por tanto suponer que C contiene más de un punto. En este caso, sustituyendo $\mathbb{R}^n$ por el menor espacio vectorial que contiene C podemos suponer que C tiene interior no vacío. Sea entonces $\widehat{x}$ un punto del interior de C y definamos $\psi = \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ como el funcional de Minkowski

$$\psi(x) = \min \left\{ \lambda \geq 0 : \frac{x - x_0}{\lambda} \in C \right\}.$$

Es fácil ver que ψ es una función continua, convexa tal que

$$x \in C \Longleftrightarrow \psi(x) \leq 1, \quad x = x_0 \Longleftrightarrow \psi(x) = 0$$

Definiendo entonces $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por

$$\phi(x) = \begin{cases} \psi(x)\frac{x-x_0}{|x-x_0|} & \text{si} \quad x \neq x_0 \\ 0 & \text{si} \quad x = x_0 \end{cases}$$

se tiene que ϕ es un homeomorfismo de C en $\overline{B}_1$. Esto prueba que C es homeomorfo a la bola cerrada de centro cero y radio uno y por tanto la tesis del Teorema 3.5 sigue del Teorema 3.4 y la Proposición 3.8. □

Observación 3.1. A partir del Teorema 3.5 se puede pensar que el teorema de Brouwer está ligado a la convexidad del conjunto C pero esto no es así. Por ejemplo, es conocido que en dimensión 2, si tomamos C como el conjunto interior de una curva de Jordan arbitraria junto con la propia curva, entonces C es homeomorfo a la bola cerrada de centro cero y radio uno. Gracias al Teorema 3.4 y a la Proposición 3.8 se tiene entonces que C verifica la propiedad del punto fijo. Esto muestra que el hecho de que toda función continua que aplica C en sí mismo tenga un punto fijo está más ligado al hecho de que C no tiene "agujeros"(junto con la compacidad de C). Así, la siguiente Proposición muestra como la existencia de "agujeros" conlleva que C no verifique la propiedad del punto fijo.

Ejemplo 3.3.1. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ no vacío verificando las siguientes propiedades:

- Si $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in C$, entonces $(y_1, y_2, x_3, \ldots, x_n) \in C$ para todo (y_1, y_2) tal que $|(y_1, y_2)| = |(x_1, x_2)|$.
- $0 \notin C$, entonces C no verifica la propiedad del punto fijo.

Demostración: Basta tomar como f un giro de ángulo $\theta \in (0, 2\pi)$, i.e

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = (\cos\theta x_1 - \sin\theta x_2, \sin\theta x_1 + \cos\theta x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

□

Observación 3.2. Gracias a la Proposición 3.8 se tiene que un conjunto C en las condiciones del ejemplo 3.3.1 no pueda ser homeomorfo a una bola cerrada en $\mathbb{R}^k$ para ningún $k \in \mathbb{N}$. Como ejemplos de conjuntos compactos que verifican esta propiedad tenemos por ejemplo el caso de una bola cerrada a la que se le quita una bola abierta más pequeña, i.e

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq |x| \leq b\}$$

con $0 < a \leq b$.

En $\mathbb{R}^3$ podemos también citar por ejemplo el caso de un cilindro al que se le quita otro cilindro interior

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \quad a \leq |(x_1, x_2)| \leq b, \quad 0 \leq x_3 \leq l\}$$

con $0 < a \leq b$, $0 \leq l$, o también el caso de un toro

$$C = \{x \in \mathbb{R}^3 : dist(x; S) = R_2\} \quad \text{con} \quad S = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 : |(x_1, x_2)| = R_1\},$$

para $0 < R_2 < R_1$.

Veamos algunas aplicaciones interesantes del teorema de Brouwer realacionadas con la teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Ejemplo 3.3.2. Dado un conjunto abierto no vacío $D \subset \mathbb{R}^n$ y $f \in C^0(\mathbb{R} \times D)^n \cap Lip_{loc}(D)$, consideremos el sistema diferencial

$$u' = f(t, u). \tag{3.6}$$

Suponiendo que existe $\omega > 0$ tal que f es $\omega-$periódica con respecto a t, i.e,

$$f(t + \omega, x) = f(t, x), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in D,$$

una cuestión interesante es saber si el sistema (3.6) tiene soluciones periódicas. En este sentido, se tiene

Teorema 3.6. *En las condiciones anteriores, supongamos que existe un conjunto C homeomorfo a $\overline{B}_1 \subset \mathbb{R}^n$, el cual es positivamente invariante para el sistema* (3.6)*, entonces existe al menos un solución del sistema* (3.6) *que toma valores en C y que es $\omega-$periódica.*

Demostración: Para $x \in C$ consideramos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(0) = x \end{cases} \tag{3.7}$$

Teniendo en cuenta que C es compacto (ya que es homeomorfo a un compacto) y positivamente invariante, sabemos que la solución maximal $t \to \varphi(t, 0, x)$ de este problema está definida en un intervalo abierto que contiene a $[0, \infty)$ y cumple

$$\varphi(t, 0, x) \in C, \quad \forall t \geq 0.$$

Podemos entonces definir la aplicación "de Poincaré " $f : C \to C$ por

$$f(x) = \varphi(\omega, 0, x), \quad \forall x \in C.$$

Gracias al teorema de continuidad respecto de los datos iniciales, se tiene entonces que f es una función continua de C en C y por tanto, el teorema 3.4 y la Proposición 3.8 implican que existe un punto fijo para f, i.e., existe $x_0 \in C$ tal que $\varphi(\omega, 0, x_0) = x_0$. Es entonces inmediato comprobar que la función $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(t) = \varphi(t - k\omega, 0, x_0), \quad \forall t \in [k\omega, (k+1)\omega), \forall k \in \mathbb{Z},$$

es una solución periódica de (3.6). $\square$

Ejemplo 3.3.3. Como una consecuencia del ejemplo anterior, consideramos ahora el caso de un sistema autónomo, i.e.

$$u' = f(u) \tag{3.8}$$

siendo f una función localmente Lipschitziana definida en un conjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^n$. Suponiendo la existencia de un conjunto C homeomorfo a $\overline{B}_1 \subset \mathbb{R}^n$, positivamente invariante, el Teorema 3.6 aplicado a $\omega > 0$ arbitrario prueba que existen soluciones periódicas de periodo arbitrario. Esto nos hace pensar en la existencia de un punto de equilibrio para f (lo que proporcionará entonces una solución periódica de periodo cualquiera). Enunciamos el resultado correspondiente en el siguiente Teorema

Teorema 3.7. *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in Lip_{loc}(D;\mathbb{R}^N)$ y supongamos que existe un conjunto C homeomorfo a $\overline{B}_1 \subset \mathbb{R}^n$, el cual es positivamente invariante para el sistema* (3.8)*, entonces C tiene al menos un punto de equilibrio.*

Demostración: Gracias al Teorema 3.6 sabemos que para todo $\omega > 0$ existe $x_\omega \in C$ tal que la función $t \to \varphi(t, 0, x_\omega)$ solución maximal del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(0) = x_\omega \end{cases}$$

está definida en todo $\mathbb{R}$ y verifica

$$\varphi(t + \omega, 0, x_\omega) = \varphi(t, 0, x_\omega), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

Como $x_\omega \in C$ y C es compacto, existe una sucesión $\omega_n > 0$ convergiendo a cero tal que x_{ω_n} converge a un punto $x_0 \in C$. Vamos a ver que x_0 es un equilibrio de (3.8). Dado $t \in \mathbb{R}$, consideramos $k_n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$k_n\omega_n \leq t \leq (k_n + 1)\omega_n.$$

Se tiene entonces que $k_n\omega_n$ converge a t con lo que usando el teorema de continuidad respecto a datos iniciales y (3.9), se deduce

$$\begin{aligned} \varphi(0, 0, x_0) = x_0 &= \lim_{n\to\infty} x_{\omega_n} = \lim_{n\to\infty} \varphi(0, 0, x_{\omega_n}) \\ &= \lim_{n\to\infty)} \varphi(k_n\omega_n, 0, x_{\omega_n}) = \varphi(t, 0, x_0), \end{aligned}$$

lo que prueba que la función $t \to \varphi(t, 0, x_0)$ está definida en todo $\mathbb{R}$ y es constante con valor x_0, i.e. x_0 es un equilibrio de (3.8). $\square$

Observación 3.3. Recordemos el teorema de Poincaré-Bendixon que se vio en la asignatura de Ampliación de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y que establecía que si para $n = 2$ existe un conjunto compacto $C \subset D$ positivamente invariante para el sistema (3.8), el cual no contiene puntos de equilibrio, entonces existe una órbita periódica no trivial del sistema contenido en C. Teniendo en cuenta el Teorema 3.7 deducimos entonces que C no puede ser homeomorfo a la bola unidad cerrada en $\mathbb{R}^2$, i.e. C debe tener algún "agujero".

Observación 3.4. En los teoremas 3.6 y 3.7 hemos hablado por fijar ideas de conjuntos positivamente invariantes. Claramente los resultados son también ciertos para conjuntos negativamente invariantes.

Relacionado con la existencia de solución de una ecuación no lineal en $\mathbb{R}^n$ podemos ahora probar como consecuencia de la teoría del grado los siguientes resultados.

Teorema 3.8. *Sea Ω un conjunto abierto de clase C^1 tal que $\overline{\Omega}$ es homeomorfo a una bola en $\mathbb{R}^n$ y sea $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ continua tal que*

$$f(x) \cdot \nu(x) \geq 0, \quad \forall x \in \partial\Omega, \tag{3.10}$$

con ν la normal exterior unitaria a Ω. Entonces existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que $f(x_0) = 0$

Demostración: Por la proposición 3.1 podemos suponer que f está en realidad definida en todo $\mathbb{R}^n$. Supongamos primero que f es localmente Lipschitziana en $\mathbb{R}^n$ y que se verifica

$$f(x) \cdot \nu(x) > 0, \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

En este caso, es fácil probar que $\overline{\Omega}$ es positivamente invariante para la ecuación

$$u' = -f(u)$$

y por tanto el resultado es consecuencia del Teorema 3.6.

Consideremos ahora el caso general. Primero observemos que gracias a la proposición 3.1 existe una extensión de ν que seguimos denotando por ν a una función definida en todo $\mathbb{R}^n$. En este caso, tomando $f_n = f + \nu/n$, se tiene que f_n verifica

$$f_n(x) \cdot \nu(x) = f(x) \cdot \nu(x) + \frac{1}{n}|\nu(x)|^2 \geq \frac{1}{n}, \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Como $f_n \in C^0(\overline{\Omega})$, existen ahora $g_n \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}^n)$ tales que

$$\| g_n - f_n \|_0 < \frac{1}{2n}.$$

Se tiene entonces

$$g_n(x) \cdot \nu(x) = f_n(x) \cdot \nu(x) + (g_n(x) - f_n(x)) \cdot \nu(x) \geq \frac{1}{2n}, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Por tanto, por lo ya probado existe $x_n \in \overline{\Omega}$ tal que $g_n(x_n) = 0$. Como $\overline{\Omega}$ es compacto, extrayendo una subsucesión si es necesario, podemos suponer que x_n converge a un punto $x_0 \in \overline{\Omega}$, se tiene entonces

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \Big(f(x_0) - f(x_n) + g(x_n) - f(x_n) \Big) = 0.$$

□

Observación 3.5. Como caso particular del Teorema 3.8 se tiene el bien conocido Teorema de Bolzano. Observar que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y es tal que $f(a) \leq 0$, $f(b) \geq 0$ entonces $[a,b]$ es homeomorfo a $[-1,1]$ y teniendo en cuenta que $\nu(a) = -1$, $\nu(b) = 1$, se tiene que se cumple (3.10), por tanto el Teorema 3.8 da la existencia de un punto $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = 0$. En el caso en que $f(a) \geq 0$, $f(b) \leq 0$ basta con aplicar el resultado a $-f$.

Podemos también usar el Teorema 3.5 para obtener algún resultado de sobreyectividad para una función en $\mathbb{R}^n$ y por tanto de la existencia de solución de la ecuación $f(x) = y$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Se tiene por ejemplo

Teorema 3.9. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, tal que*

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{f(x) \cdot x}{|x|} = \infty, \tag{3.11}$$

entonces f es sobreyectiva.

Demostración: Sea $y \in \mathbb{R}^n$. Gracias a (3.11), existe $R > 0$ tal que

$$\frac{f(x) \cdot x}{|x|} \geq |y|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, |x| \geq R.$$

Sea entonces $g = f - y$ definida en $\overline{B}_R$ y observamos que para todo $x \in \partial B_R$, se tiene

$$g(x) \cdot \nu = g(x) \cdot \frac{x}{|x|} = \frac{f(x) \cdot x}{|x|} - \frac{y \cdot x}{|x|} \geq 0.$$

Aplicando el Teorema 3.8 se tiene la existencia de $x_0 \in \overline{B}_r$ tal que $g(x_0) = 0$ o equivalentemente $f(x_0) = x_0$. □

3.4. Teorema de Borsuk

Si queremos probar mediante la teoría del grado que $f(x) = y$ tiene una solución en Ω, tenemos que verificar que $d(f, \Omega, y) \neq 0$. El siguiente resultado de Borsuk ayuda mucho.

Recordamos que Ω es simétrico con respecto al origen si $\Omega = -\Omega$, y una aplicación f en Ω es impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \Omega$.

Teorema 3.10. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado, simétrico con $0 \in \Omega$. Sea $f \in C(\overline{\Omega})$ impar y $0 \notin f(\partial\Omega)$. Entonces $d(f, \Omega, 0)$ es impar.*

Corolario 3.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado, simétrico y $0 \in \Omega$. Sea $f \in C(\overline{\Omega})$ tal que $0 \notin f(\partial\Omega)$ y $f(-x) \neq \lambda f(x)$ en $\partial\Omega$ para todo $\lambda \geq 1$. Entonces $d(f, \Omega, 0)$ es impar.*

Como aplicación se tiene

Teorema 3.11. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continua y localmente inyectiva. Entonces f es una aplicación abierta.*

Demostración: Basta probar que para todo $x_0 \in \Omega$ existe $B_r(x_0)$ tal que $f(B_r(x_0))$ contiene una bola con centro $f(x_0)$. Pasando a $\Omega - x_0$ y $\widetilde{f}(x) = f(x + x_0) - f(x_0)$ para $x \in \Omega - x_0$, si es necesario, podemos suponer $x_0 = 0$ y $f(0) = 0$. Elegimos $r > 0$ tal que $f\,|_{\overline{B}_r(0)}$ es inyectiva y consideramos

$$h(t, x) = f\Big(\frac{1}{1+t}x\Big) - f\Big(-\frac{t}{1+t}x\Big) \quad \text{para} \quad t \in [0, 1], \quad x \in \overline{B}_r(0).$$

Tenemos que h es continua en (t, x), $h(0, \cdot) = f$ y $h(1, x) = f(\frac{1}{2}x) - f(-\frac{1}{2}x)$ es impar. Si $h(t, x) = 0$ para algún $(t, x) \in [0, 1] \times \partial B_r(0)$, entonces

$$x\frac{1}{1+t} = -x\frac{t}{1+t}$$

ya que f es inyectiva, i.e. $x = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto,

$$d(f, B_r(0), y) = d(h(1, \cdot), B_r(0), 0) \neq 0 \quad \text{para cada} \quad y \quad \text{en} \quad B_r(0). \tag{3.12}$$

Entonces se tiene $B_r(0) \subset f(B_r(0))$. □

Como consecuencia se tiene

Corolario 3.2. *Un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ no puede ser homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^K$ si $K \neq n$.*

3.5. La Fórmula Producto

En esta sección mostraremos una fórmula que relaciona el grado de una aplicación compuesta $f \circ g$ a partir de g y f. Por medio de esta fórmula es fácil probar por ejemplo el teorema de la curva de Jordan.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f \in C(\overline{\Omega})$. Por (d5) sabemos que $d(f, \Omega, y)$ es el mismo entero para cada y en una componente conexa K de $\mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$. Usaremos entonces la notación $d(f, \Omega, K)$. Ya que $f(\partial\Omega)$ es compacto, tenemos una componente ilimitada k_∞ de $\mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$ si $n > 1$ y dos si n=1. En estel caso k_∞ denotará la unión de estas dos.

Se tiene

Teorema 3.12. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\mathbb{R}^n)$ y K_i las componentes conexas acotadas de $\mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$. Supongamos que $y \notin (g \circ f)(\partial\Omega)$. Entonces*

$$d(g \circ f, \Omega, y) = \sum_i d(f, \Omega, K_i) d(g, K_i, y)$$

donde solo un número finito de términos son distintos de cero.

Recordamos el teorema de la Curva de Jordan, el cual dice que una curva simple y cerrada C en el plano lo divide en dos regiones G_1 y G_2 tales que $C = \partial G_1 = \partial G_2$ y $G_2 = \mathbb{R}^2 \backslash \overline{G}_1$. Ya que tal curva es homeomorfa a una circuferencia unidad $\partial B_1(0)$, y ya que $B_1(0)$ y $\mathbb{R}^2 \backslash B_1(0)$ son componentes de $\mathbb{R}^2 \backslash \partial B_1(0)$, el teorema de la curva también puede formularse de la siguiente manera: si $C \subset \mathbb{R}^2$ es homeomorfa a $\partial B_1(0)$, entonces $\mathbb{R}^2 \backslash C$ tiene precisamente dos componentes. Esta versión puede extenderse a $\mathbb{R}^n$, es decir, tenemos

Teorema 3.13. *Sean $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos compactos, los cuales son homeomorfos . Entonces $\mathbb{R}^n \backslash \Omega_1$ y $\mathbb{R}^n \backslash \Omega_2$ tiene el mismo número de componentes conexas.*

Capítulo 4

Grado Topológico en Dimensión Infinita

En este capítulo veremos el grado en un espacio de dimensión infinita. Introducimos sus propiedades y varios resultados fundamentales.

4.1. Aplicaciones compactas.

Vamos a extender la teoría del grado a funciones definidas en espacios normados. Estas funciones serán de la forma $I - F$ con F compacta.

Sean X e Y dos espacios de Banach, Ω un subconjunto de X y F una aplicación de Ω en Y.

Definición 4.1. F se dice compacta si F es continua y $F(A)$ es relativamente compacto para todo $A \subset \Omega$ acotado.

$\mathcal{H}(\Omega, Y)$ denotará la clase de las aplicaciones compactas de Ω en Y y escribiremos $\mathcal{H}(\Omega)$ en vez de $\mathcal{H}(\Omega, X)$.

Una propiedad importante de las aplicaciones compactas es como se comportan respecto a la composición. El resultado correspondiente viene recogido por la siguiente proposición.

Proposición 4.1. *Sean X, Y, Z tres espacios de Banach, $\Omega \subset X$, $\Theta \subset Y$, $F : \Omega \to \Theta$, $G : \overline{\Theta} \to Z$. Si F es compacta y G es continua entonces $G \circ F$ es* *compacta. Si F es continua y transforma acotados en acotados y G es compacta entonces $G \circ F$ es compacta.*

Definición 4.2. Si $F(\Omega)$ está contenido en un subespacio finito dimensional de Y, entonces diremos que F es finito dimensional.

$\mathcal{F}(\Omega, Y)$ denotará la clase de las aplicaciones compactas finitamente dimensionales y escribiremos $\mathcal{F}(\Omega)$ en vez de $\mathcal{F}(\Omega, X)$.

En el caso de aplicaciones lineales se tiene que si $F : X \to Y$ es lineal y compacta entonces es continua, y si es finito dimesional entonces es compacta.

4.1.1. Propiedades de aplicaciones compactas.

La siguiente proposición junto con el grado para espacios de dimensión finita será muy útil para obtener un grado para perturbaciones compactas de la identidad.

Proposición 4.2. *Sean X e Y dos espacios de Banach y $B \subset X$ cerrado y acotado. Entonces,*

1. *$\mathcal{F}(B, Y)$ es denso en $\mathcal{H}(B, Y)$ con respecto a la norma del supremo, es decir, para $F \in \mathcal{H}(B, Y)$ y $\varepsilon > 0$ existe $F_\varepsilon \in \mathcal{F}(B, Y)$ tal que $\sup\limits_B |Fx - F_\varepsilon x| \leq \varepsilon$.*

2. *Si $F \in \mathcal{H}(B)$ entonces $I - F$ es propia, es decir la imagen inversa de un compacto es compacta.*

Demostración:

1. Dado $F \in \mathcal{H}(B, Y)$ y $\varepsilon > 0$, consideramos $y_1, \cdots, y_p$ tales que $\overline{F(B)} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{p} B_\varepsilon(y_i)$. Sea $\varphi_i(y) = \max\{0, \varepsilon - |y - y_i|\}$, $\psi_i(y) = \frac{\varphi_i(y)}{\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y)}$ para $y \in \overline{F(B)}$. Definimos $F_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{p} \psi_i(Fx) y_i$ para $x \in B$. Entonces F_ε es continua, $F_\varepsilon(B) \subset \operatorname{span}\{y_1, \cdots, y_n\}$, F_ε relativamente compacta y $\sup_B |F_\varepsilon x - Fx| \leq \varepsilon$.

2. Sea $\{x_n\} \subset (I - F)^{-1}(K)$. Como $\{F(x_n)\} \subset F(B)$ que es relativamente compacto, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ tal que $F(x_{n_k})$ es convergente. Como $x_n - F(x_n) \in K$ y K es compacto, tambien podemos

suponer $x_{n_k} - F(x_{n_k})$ convergente, entonces $x_{n_k} = (x - F(x_{n_k})) + F(x_{n_k})$ es convergente. $\square$

Proposición 4.3. *Sean X e Y dos espacios de Banach, $\Omega \subset X$ abierto, $F \in \mathcal{H}(\Omega, Y)$ y F diferenciable en $x_0 \in \Omega$. Entonces $F'(x_0)$ es compacta.*

Proposición 4.4. *Sean X, Y espacios de Banach, $A \subset X$ acotado, cerrado y $F \in \mathcal{H}(A, Y)$. Entonces F tiene una extensión $\widetilde{F} \in \mathcal{H}(X, Y)$ tal que $\widetilde{F}(X) \subset$ conv $F(A)$.*

4.1.2. El grado Leray-Schauder.

Sea X un espacio de Banach, $\Omega \subset X$ abierto y acotado, $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $y \notin (I - F)(\partial\Omega)$. En estas tripletas $(I - F, \Omega, y)$ queremos definir una función D con valores $\mathbb{Z}$ que satisface las condiciones correspondientes a (d1)-(d3) del grado de Brouwer, esto es,

(D1) $D(I, \Omega, y) = 1$ para $y \in \Omega$;

(D2) $D(I-F, \Omega, y) = D(I-F, \Omega_1, y) + D(I-F, \Omega_2, y)$ si Ω_1 y Ω_2 son subcojuntos abiertos disjuntos de Ω tales que $y \notin (I - F)(\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2))$;

(D3) $D(I - H(t, \cdot), \Omega, y(t))$ es independiente de $t \in [0, 1]$ si $H : [0, 1] \times \overline{\Omega} \to X$ es compacto, $y : [0, 1] \to X$ es continuo e $y(t) \notin (I - H(t, \cdot))(\partial\Omega)$ en $[0, 1]$.

Vamos a reducir el problema al caso de aplicaciones finitamente dimensionales en lugar de las diferenciables como en el capítulo anterior. En primer lugar, como $G = I - F$ es propia e $y \notin G(\partial\Omega)$, tenemos $\varrho(y, G(\partial\Omega)) > 0$, y si elegimos $F_1 \in \mathcal{F}(\overline{\Omega})$ tal que $\sup\{|F_1 x - Fx| : x \in \overline{\Omega}\} < \varrho$, entonces $H(t, x) = Fx + t(F_1 x - Fx)$ satisface (D3) con $y(t) = y$, y por tanto

$$D(I - F, \Omega, y) = D(I - F_1, \Omega, y).$$

Luego, como $F_1(\overline{\Omega})$ esta contenido en un subespacio finitamente dimensional, elegimos un subespacio X_1 con dim $X_1 < \infty$ tal que $y \in X_1$ y $F_1(\overline{\Omega}) \subset X_1$.

Entonces $x - F_1 x = y$ para $x \in \Omega$ implica que x está en $\Omega \cap X_1$ y esto indica que $D(I - F, \Omega, y)$ ya está determinada por el grado de Brouwer de $(I - F) |_{\overline{\Omega \cap X_1}}$ con respecto a $\Omega \cap X_1$ e y. En particular, por (D2) se tiene que $\Omega \cap X_1 = \emptyset$

implica
$$D(I-F,\Omega,y)=D(I-F_1,\Omega,y)=0.$$

Ahora obeservamos que existe una proyección continua de X a X_1. Entonces $X=X_1\oplus X_2$, donde $X_2=P_2(X)$, $P_2=I-P_1$ y X_2 es cerrado ya que P_2 es continua. Sea $\Omega_1=\Omega\cap X_1\neq\emptyset$ y $\widetilde{F}:X_1\to X_1$ cualquier extensión continua de $F_1\mid_{\overline{\Omega}_1}$. Entonces por medio de (D3) aplicado a $H(t,x)=tF_1x+(1-t)\widetilde{F}_1P_1x$ e $y(t)=y$ se tiene
$$D(I-F_1,\Omega,y)=D(I-\widetilde{F}_1P_1,\Omega,y).$$

Pero todas las soluciones en Ω de $x-\widetilde{F}_1P_1x=y$ pertenecen a Ω_1 y por lo tanto (D2) nos indica que podemos reemplazar Ω por cualquier conjunto abierto y acotado, el cual contiene a Ω_1, por ejemplo $\Omega_1+B_1(0)$, donde $B_1(0)$ es la bola unidad de X_2. Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned}D(I-F,\Omega,y)&=D(I-F_1,\Omega,y)=D(I-\widetilde{F}_1P_1,\Omega_1+B_1(0),y)\\&=D(I-F_1P_1,\Omega_1+B_1(0),y).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Ahora, dado cualquier conjunto abierto acotado $\Omega_1\subset X_1$, $f\in\overline{\Omega}_1\to X_1$ continua e $y\in X_1\backslash f(\partial\Omega_1)$ definimos

$$\begin{aligned}d_0(f,\Omega_1,y)&=D(I-(I-f)P_1,\Omega_1+B_1(0),y)\\&=D(fP_1+P_2,\Omega_1+B_1(0),y).\end{aligned}$$

Entonces (D1)-(D3) implica que d_0 satisface (d1)-(d3), y por tanto d_0 es el grado de Brouwer para X_1. En particular, eligiendo $f=(I-F_1)\mid_{\overline{\Omega\cap X_1}}$ obtenemos

$$D(I-F_1,\Omega,y)=d_0((I-F_i)\mid_{\overline{\Omega}_i},\Omega_i,y).$$

Teorema 4.1. *Sea X un espacio real de Banach y*

$$M=\{(I-F,\Omega,y):\Omega\subset X\,\textit{abierto y acotado}, F\in\mathcal{H}(\overline{\Omega}),y\notin(I-F)(\partial\Omega)\}.$$

Entonces existe exactamente una función $D:M\to\mathbb{Z}$, el grado Leray-Schauder *satisfaciendo (D1)-(D3). El entero* $D(I-F,\Omega,y)$ *viene dado por*

$$d((I-F_1)\mid_{\Omega_1},\Omega_1,y),$$

donde F_1 *es una aplicación en* $\mathcal{F}(\overline{\Omega})$ *tal que*

$$\sup_{\overline{\Omega}}|F_1x-Fx|<\varrho(y,(I-F)(\partial\Omega)),$$

$\Omega_1=\Omega\cap X_1$ *y* X_1 *es cualquier subespacio de* X *tal que* $dim X_1<\infty$, $y\in X_1$, $F_1(\overline{\Omega})\subset X_1$ *y* d *es el grado de Brouwer de* X_1.

4.1.3. Propiedades del grado Leray-Schauder.

El siguiente teorema proporciona otras propiedades importantes del grado.

Teorema 4.2. *Además de (D1)-(D3), el grado Leray-Schauder tiene las siguientes propiedades*
(D4) $D(I-F,\Omega,y)\neq 0$ *implica* $(I-F)^{-1}(y)\neq\emptyset$;
(D5) $D(I-G,\Omega,y)=D(I-F,\Omega,y)$ *para* $G\in\mathcal{H}(\overline{\Omega})\cap B_r(F)$ *y* $D(I-F,\Omega,\cdot)$ *es constante en* $B_r(y)$*, donde* $r=\varrho(y,(I-F)(\partial\Omega))$*. Aún más,* $D(I-F,\Omega,\cdot)$ *es constante en cada componente conexa de* $X\backslash(I-F)(\partial\Omega)$;
(D6) $D(I-G,\Omega,y)=D(I-F,\Omega,y)$ *si* $G\mid_{\partial\Omega}=F\mid_{\partial\Omega}$;
(D7) $D(I-F,\Omega,y)=D(I-F,\Omega_1,y)$ *para cada subconjunto abierto* Ω_1 *de* Ω *tal que* $y\notin(I-F)(\overline{\Omega}\backslash\Omega_1)$.

Se tienen también las siguientes extensiones de los resultados que vimos para el grado de Brouwer.

Teorema 4.3. *(Borsuk) Sea* $\Omega\subset X$ *abierto, acotado y simétrico con respecto a* $0\in\Omega$, $F\in\mathcal{H}(\overline{\Omega})$, $G=I-F$, $0\notin G(\partial\Omega)$ *y* $G(-x)\neq\lambda Gx$ *en* $\partial\Omega$, $\forall\lambda\geq 1$. *Entonces* $D(I-F,\Omega,0)$ *es impar. En particular, esto es cierto si* $F\mid_{\partial\Omega}$ *es impar.*

Teorema 4.4. *Sea* $\Omega\subset X$ *abierto,* $F:\Omega\to X$ *continua y* $I-F$ *localmente inyectiva. Entonces* $I-F$ *es abierta.*

Teorema 4.5. *Sean* $\Omega\subset X$ *abierto y acotado,* $F_0\in\mathcal{H}(\overline{\Omega})$ *y* $F=I-F_0$, $G_0:X\to X$ *continua y* $G=I-G_0$, $y\notin G\circ F(\partial\Omega)$ *y* $(K_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *las componentes* *conexas de* $X \backslash F(\partial\Omega)$*. Entonces*

$$D(G \circ F, \Omega, y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} D(F, \Omega, K_\lambda) D(G, K_\lambda, y),$$

donde solo un número finito de términos son distintos de cero y $D(F, \Omega, K_\lambda)$ *se define como* $D(F, \Omega, z)$ *para cualquier* $z \in K_\lambda$.

Teorema 4.6. *Sean* A *y* B *subconjuntos cerrados y acotados del espacio de Banach* X *tales que existe un homeomorfismo* $G = I - F$ *de* A *a* B*, con* $F \in \mathcal{H}(A)$*. Entonces* $X \backslash A$ *y* $X \backslash B$ *tienen el mismo número de componentes.*

Teorema 4.7. *Sea* X_0 *un subespacio cerrado de* X*,* $\Omega \subset X$ *abierto y acotado,* $F : \overline{\Omega} \to X_0$ *compacta,* $G = I - F$*,* $y \in X_0$ *e* $y \notin G(\partial\Omega)$*. Entonces,*

$$D(G, \Omega, y) = D(G \mid_{\overline{\Omega \cap X_0}})$$

Demostración: Tenemos $\varrho = \varrho(y, G(\partial\Omega)) > 0$ y encontramos $F_1 \in \mathcal{F}(\overline{\Omega}, X_0)$ tal que $\sup_{\overline{\Omega}} |F_1 x - Fx| < \varrho$. Sea X_1 un subespacio de X tal que $\dim X_1 < \infty$, $F_1(\overline{\Omega}) \subset X_1$, $y \in X_1$, y sea $\Omega_0 = \Omega \cap X_0$ y $\Omega_1 = \Omega_0 \cap X_1$. Como $\partial\Omega_0 \subset \partial\Omega$, tenemos $\sup\{|F_1 x - Fx| : x \in \overline{\Omega}_0\} < \varrho(y, G(\partial\Omega_0))$. Luego, $X_0 \cap X_1$ es un candidato para X_1 en el Teorema 4.1 y por tanto,

$$D(G, \Omega, y) = d((I - F_1) \mid_{\overline{\Omega}_1}, \Omega_1, y) = D(G \mid_{\overline{\Omega}_0}, \Omega_0, y).$$

$\square$.

4.1.4. Teorema del Punto Fijo de Schauder.

El Teorema 3.5 fue extendido a aplicaciones compactas por Schauder. Se tiene

Teorema 4.8. *Sea* X *un espacio de Banach,* $C \subset X$ *un conjunto convexo, acotado, cerrado no vacío, entonces toda función* $F : C \to C$ *compacta tiene un punto fijo.*

La demostración de este teorema puede ser probado como la del Teorema 3.5.

Un resultado similar al teorema de Schauder que se prueba con las mismas ideas y que resulta interesante para las aplicaciones es el siguiente.

Teorema 4.9. *Sean X un espacio de Banach, $\Omega \subset X$ un conjunto abierto y acotado con $0 \in \Omega$ y $F : \overline{\Omega} \to X$ compacta. Supongamos que no existen $\lambda > 1$, $x \in \partial\Omega$ tales que $F(x) = \lambda x$, entonces F tiene un punto fijo.*

Demostración: Si existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $F(x_0) = x_0$ entonces no hay nada que probar. Supongamos por tanto que para todo $x_0 \in \partial\Omega$, se tiene $F(x_0) \neq x_0$. Definimos $H : [0,1] \times X \to X$ por

$$H(t,x) = tF(x), \quad \forall t \in [0,1], \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

entonces H es compacta y

$$x - H(t,x) \neq 0, \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

ya que otro caso tenemos que existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que

$$x_0 = tF(x_0) \Longleftrightarrow F(x_0) = \frac{1}{t}F(x_0),$$

lo cual contradice a la hipótesis del teorema junto con el hecho de que estamos suponiendo que F no tiene puntos fijos en $\partial\Omega$. Usando las propiedades del grado tenemos entonces

$$d(I - F, \Omega, 0) = d(I - H(1,\cdot), \Omega, 0) = d(I - H(0,\cdot), \Omega, 0) = d(I, \Omega, 0) = 1,$$

lo que implica que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $x_0 - F(x_0) = 0$, i.e. x_0 es un punto fijo de F. $\square$

Capítulo 5

Aplicaciones del grado en dimensión finita.

En este apartado vamos a dar dos ejemplos que muestran como la teoría del grado en dimensión infinita y sus consecuencias se aplican a la teoría de Ecuaciones Diferenciales tanto Ordinarias como Parciales.

5.1. Ejemplo 1.

Nuestro primer ejemplo se refiere a la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con hipótesis más generales que las que se establecieron en la asignatura de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Necesitaremos el teorema de Ascoli-Arzelà que caracteriza los conjuntos relativamente compactos en $C(K;\mathbb{R}^N)$, con K un espacio métrico compacto.

Definición 5.1. Sea K un espacio métrico compacto. Una familia $\{F_i\}_{i\in I}$ de K en $\mathbb{R}^N$ se dice equicontinua si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(F_i(x_1), F_i(x_2)) < \varepsilon, \quad \forall x_1, x_2 \in K \quad \text{con} \quad d(x_1, x_2) < \delta, \forall i \in I.$$

Observación 5.1. Recordamos que una función F continua de un espacio métrico K en otro espacio métrico Y es uniformemente continua, i.e. para todo

$\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(F(x_1), F(x_2)) < \varepsilon, \quad \forall x_1, x_2 \in K \quad \text{con} \quad d(x_1, x_2) < \delta.$$

El hecho de que una familia sea equicontinua es equivalente a decir que el valor δ se puede elegir el mismo para todo elemento de la familia.

El teorema de Ascoli-Arzelà establece

Teorema 5.1. *(Ascoli-Arzelà). Sea K un espacio métrico compacto. Una familia $\{F_i\} \subset C(K; \mathbb{R}^N)$ es relativamente compacta si y sólo si es acotada y equicontinua.*

Demostración: Supongamos que la familia es relativamente compacta. Vamos a probar que es acotada y equicontinua. La acotación es evidente ya que todo conjunto compacto es cerrado y acotado lo que unido a $\overline{\{F_i\}_{i\in I}}$ compacto implica $\{F_i\}_{i\in I} \subset \overline{\{F_i\}_{i\in I}}$ acotado.

Para probar que la familia es equicontinua, consideramos $\varepsilon > 0$ y usamos que como $\overline{\{F_i\}_{i\in I}}$ es compacto, entonces existen $i_1, \ldots, i_n \in I$ tales que

$$\{F_i\}_{i\in I} \subset \overline{\{F_i\}_{i\in I}} \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(F_{i_j}, \varepsilon/3). \tag{5.1}$$

Por otra parte como las funciones F_{i_j} son uniformemente continuas, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ existen $\delta_j > 0$ tales que

$$|F_{i_j}(x_1) - F(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x_1, x_2 \in K \quad \text{con} \quad d(x_1, x_2) < \delta_j.$$

Sea encontes $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ y tomemos $i \in I$, $x_1, x_2 \in K$ con $d(x_1, x_2) < \delta$. Gracias a (5.1) podemos tomar $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $F_i \in B(F_{i_j}, \varepsilon)$, i.e.

$$|F_i(x) - F_{i_j}(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in K.$$

Se tiene entonces

$$|F_i(x_1) - F_i(x_2)| \leq |F_i(x_1) - F_{i_j}(x_1)| + |F_{i_j}(x_1) - F_{i_j}(x_2)| + |F_{i_j}(x_2) - F_i(x_2)| < \varepsilon.$$

Esto prueba la equicontinuidad.

Para probar el recíproco consideremos ahora una familia acotada y equicontinua, queremos probar que es relativamente compacta lo cual es equivalente a probar que tiene una subsucesión convergente en $C^0(K;\mathbb{R}^N)$. Como K es compacto entonces es separable. Tomemos entonces $\{x_n\}$ un conjunto denso y numerable de K. Como F está acotada, entonces $F(x_1)$ es acotado y por tanto existe una subsucesión $\{k_1\}_{k\in\mathbb{N}} = \{1_1, 2_1, 3_1, \dots\}$ tal que $F_{k_1}(x_1)$ converge a un punto y_1. Usando ahora que $\{F_{k_1}(x_2)\}$ está acotada podemos extraer otra subsucesión $\{k_2\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{k_1\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $F_{k_2}(x)$ converge a un punto y_2. Siguiendo con este proceso tenemos la existencia de sucesiones $\{k_j\}_{k\in\mathbb{N}}$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y vectores $y_j \in \mathbb{R}^N$ tales que $\{k_{j+1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{k_j\}_{k\in\mathbb{N}}$, $F_{k_j}(x_j)$ converge a y_j para todo $j \in \mathbb{N}$. Consideramos entonces la sucesión F_{k_k} que por simplificar la notación notamos como F_k. Observando que $\{F_k(x_j)\}_{k\geq j} = \{F_{k_k}(x_j)\}_{k\geq j}(x_j)$ es una subsucesión de $F_{k_j}(x_j)$ tenemos que $F_k(x_j)$ converge a y_j para todo $j \in \mathbb{N}$. Vamos a ver que de hecho $F_k(x)$ es una sucesión convergente para todo $x \in K$. Basta probar que es una sucesión de Cauchy. Sea entonces $\varepsilon > 0$ y usando la equicontinuidad tomemos $\delta > 0$ tal que para todos $x, x' \in K$ con $d(x,x') < \delta$ y para todo $i \in I$ se tiene

$$|F_i(x) - F_i(x')| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.2}$$

Tomemos ahora $x \in K$ y tomemos x_j tal que $d(x,x_j) < \delta$ y usando que $F_k(x_j)$ es convergente y por tanto de Cauchy, tomemos $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k, l \geq m$ se tiene

$$|F_k(x_j) - F_l(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Para todos $k, l \geq m$ se tiene entonces

$$|F_k(x) - F_l(x)| \leq |F_k(x) - F_k(x_j)| + |F_k(x_j) - F_l(x_j)| + |F_l(x_j) - F_l(x)| < \varepsilon.$$

Esto prueba que $F_k(x)$ es de Cauchy y por tanto convergente. Definimos $F : K \to \mathbb{R}^N$ por

$$F(x) = \lim_{k\to\infty} F_k(x), \quad \forall x \in K.$$

Para terminar la demostración vamos a probar que F_k converge uniformemente a F (lo que en particular mostrará que F es continua en K). Sea $\varepsilon > 0$ y usando la equicontinuidad tomemos $\delta > 0$ tal que para todos $x, x' \in K$ con $d(x, x') < \delta$ y para todo $i \in I$ se tiene (5.2). En particular, tomando $i = k$ y haciendo k converger a infinito, se tiene también

$$|F(x) - F(x')| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tomando este $\delta > 0$ y usando que K es compacto, tomemos $z_1, \ldots, z_n$ tales que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(z_j, \delta).$$

Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ existe ahora $m_j \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq m_j$ entonces

$$|F_k(z_j) - F(z_j)| \leq \varepsilon.$$

Sea $m = \text{máx}\{m_j\}$ y consideremos $x \in K$, $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq m$. Tomando z_j tal que $d(x, z_j) < \delta$, se tiene entonces

$$|F_k(x) - F(x)| \leq |F_k(x) - F_k(z_j)| + |F_k(z_j) - F(z_j)| + |F(z_j) - F(x)| < \varepsilon,$$

lo que prueba que F_k converge uniformemente a F. $\square$

Vamos a estudiar la existencia de solución local de un sistema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{5.3}$$

donde dado un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ abierto , se supone que (t_0, y_0) es un punto de Ω y que $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ verifica:

Sea $(\overline{t}, \overline{y}) \in \Omega$ y consideramos $\rho, r > 0$ tales que $[\overline{t} - \rho, \overline{t} + \rho] \times \overline{B}(\overline{y}, r) \subset \Omega$, entonces se tiene

$$f(t, \cdot) \in C^0(\overline{B}(\overline{y}, r); \mathbb{R}^N), \quad \text{e.c.t} \quad t \in (\overline{t} - \rho, \overline{t} + \rho), \tag{5.4}$$

$$f(\cdot, y) \in L^1(\overline{t} - \rho, \overline{t} + \rho; \mathbb{R}^N), \quad \forall y \in \overline{B}(\overline{y}, r), \tag{5.5}$$

$$\sup_{y_1, y_2 \in \overline{B}(\overline{y}, r)} |f(\cdot, y_1) - f(\cdot, y_2)| \in L^1(\overline{t} - \rho, \overline{t} + \rho; \mathbb{R}^N), \tag{5.6}$$

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \\ \displaystyle\int_{\bar{t}-\rho}^{\bar{t}+\rho} \sup_{\substack{y_1, y_2 \in B(\overline{y}, r) \\ |y_1 - y_2| \leq \delta}} |f(t, y_1) - f(t, y_2)| dt < \varepsilon. \end{cases} \tag{5.7}$$

La definición de solución local de (5.3) es la siguiente

Definición 5.2. Se dice que una pareja (I, φ) es una solución local de (5.3) si I es un intervalo de $\mathbb{R}$ que contiene a $\overline{y}$ como punto interior, φ es una función continua de I en $\mathbb{R}^N$ y se verifica

$$(t, \varphi(t)) \in \Omega, \quad \forall t \in I. \tag{5.8}$$

$$\varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) ds, \quad \forall t \in I. \tag{5.9}$$

Observación 5.2. Teniendo en cuenta las propiedadades (5.4), (5.5), (5.6) y (5.7), se deduce que si $\varphi \in C^0(I; \mathbb{R}^N)$ verifica (5.8), entonces la función $s \in I \to f(s, \varphi(s))$ está en $L^1(I; \mathbb{R}^N)$ con lo cual la integral en (5.9) está bien definida. Además, sabemos de la asignatura de Análisis Funcional y EDP que la condición (5.9) es equivalente al hecho de que se verifica la ecuación $\varphi' = f(t, \varphi)$ en el sentido de las distribuciones en el intervalo $\text{int}(I)$.

Las condiciones (5.4), (5.5) y (5.7) se cumplen en particular si f es una función continua de Ω en $\mathbb{R}^N$. En ese caso, el teorema de existencia que presentamos a continuación es lo que se conoce como teorema de Peano. Suponiendo f continua, las soluciones locales de (5.3) son funciones de clase uno en su intervalo de definición. Nuestro resultado generaliza el teorema de Peano permitiendo considerar funciones $f = f(t, y)$ que no son continuas respecto a t.

A diferencia del Teorema de Picard que se establece en la asignatura de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, las hipótesis anteriores no implican la unicidad de solución de (5.3). Para ello es necesario introducir alguna hipótesis de Lipschitzianidad respecto de y. En este sentido podríamos haber sustituido (5.6), (5.7) por una hipótesis más restrictiva como es la existencia de una constante L que depende de $\bar{t}, \overline{y}, \rho$ y r tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall y_1, y_2 \in \overline{B}(\overline{y}, r), \quad \text{e.c.t} \quad t \in (\bar{t} - \rho, \bar{t} + \rho).$$

Como ejemplo que muestra que la unicidad no se tiene en general con las hipótesis (5.4),(5.5),(5.6) y (5.7) o incluso suponiendo f continua en Ω, podemos considerar el problema

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0.$$

Claramente, una solución viene dada por la función nula pero también cualquier función del tipo

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{en} \quad (\alpha, \beta) \\ \frac{2}{3}\sqrt{(t-\beta)^3} & \text{en} \quad [\beta, \infty) \\ -\frac{2}{3}\sqrt{(\alpha-t)^3} & \text{en} \quad (-\infty, \alpha] \end{cases}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq 0 \leq \beta$, es una solución del problema.

Aunque en la definición anterior y en el teorema que viene a continuación sólo nos referimos a soluciones locales, se puede también probar la existencia de soluciones maximales.

El resultado principal que obtenemos relativo a la existencia de solución para (5.3) es el siguiente

Teorema 5.2. *Dados* $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ *abierto,* $(t_0, x_0) \in \Omega$ *y* $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ *verificando* (5.4),(5.5),(5.6) *y* (5.7)*, existe al menos una solución local de problema* (5.3)*.*

Demostración: Consideremos $\rho, r > 0$ tales que $[\overline{t}-\rho, \overline{t}+\rho] \times \overline{B}(\overline{y}, r) \subset \Omega$. Vamos a buscar $\tau \leq \rho$ tal que definiendo

$$K = \{\varphi \in C^0([t_0 - \tau, t_0 + \tau]; \mathbb{R}^N), |\varphi - y_0|_0 \leq r\},$$

se tiene que la aplicación

$$F : \varphi \to y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds$$

tiene un punto fijo, lo que teniendo en cuenta la Definición 5.2 implicará que este punto fijo es una solución local de (5.3). Con este fin vamos a aplicar el teorema de Schauder. Teniendo en cuenta que K no es otra cosa que la bola cerrada de centro la función constante y_0 y radio r, tenemos que K es convexo y cerrado sea quien sea τ. Por tanto para aplicar el teorema de Schauder nos basta probar que F aplica K en K y es compacta.

Vamos a escoger τ de forma que F aplique K en K. Observamos que si $\varphi \in K$, entonces para todo $t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$, se tiene

$$\begin{aligned} |F(\varphi)(t) - y_0| &= \Big| \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) ds \Big| \\ &\leq \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} \Big(\big|f(s, y_0)\big| + \big|f(s, \varphi(s)) - f(s, y_0)\big| \Big) ds \qquad (5.10) \\ &\leq \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} \Big(\big|f(s, y_0)\big| + \sup_{|y-y_0|\leq r} \big|f(s, y) - f(s, y_0)\big| \Big) ds. \end{aligned}$$

Por otra parte, como la función

$$s \to \big|f(s, y_0)\big| + \sup_{|y-y_0|\leq r} \big|f(s, y) - f(s, y_0)\big| \qquad (5.11)$$

es integrable, se tiene

$$\lim_{\tau\to 0} \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} \Big(\big|f(s, y_0)\big| + \sup_{|y-y_0|\leq r} \big|f(s, y) - f(s, y_0)\big| \Big) ds = 0,$$

y por tanto podemos escoger τ suficientemente pequeño para que

$$\int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} \Big(\big|f(s, y_0)\big| + \sup_{|y-y_0|\leq r} \big|f(s, y) - f(s, y_0)\big| \Big) ds \leq r.$$

En este caso la desigualdad (5.10) prueba que $F(\varphi) \in K$ para toda $\varphi \in K$.

Vamos ahora a probar que F es compacta, i.e. que es continua y que la imagen de K por F es un conjunto relativamente compacto en $C^0(K; \mathbb{R}^N)$. Para la continuidad, tomemos una sucesión $\varphi_n \in K$ que converge a una función φ en $C^0([t_0 - \tau, t_0 + \tau]; \mathbb{R}^N)$. Tenemos que probar que $F(\varphi_n)$ converge a $F(\varphi)$ en $C^0([t_0 - \tau, t_0 + \tau]; \mathbb{R}^N)$. Tomemos $\varepsilon > 0$ y usando (5.7) consideremos $\delta > 0$ tal que

$$\int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} \sup_{\substack{y_1, y_2 \in B(y_0, r) \\ |y_1 - y_2| \leq \delta}} |f(t, y_1) - f(t, y_2)| dt < \varepsilon.$$

Como φ_n converge uniformemente a y_0 podemos ahora tomar $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leq \delta, \quad \forall t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau], \quad \forall n \geq m.$$

Para todo $t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ y para todo $n \geq m$, se tiene entonces

$$\begin{aligned}|F(\varphi_n)(t) - F(\varphi)(t)| &= \Big| \int_{t_0}^{t} \big(f(s,\varphi_n(s)) - f(s,\varphi(s))\big)ds\Big| \\ &\leq \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} \big|f(s,\varphi_n(s)) - f(s,\varphi(s))\big|ds \\ &\leq \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} \sup_{\substack{y_1,y_2\in B(y_0,r)\\ |y_1-y_2|\leq\delta}} |f(t,y_1) - f(t,y_2)|dt < \varepsilon.\end{aligned}$$

Esto prueba que $F(\varphi_n)$ converge a $F(\varphi)$ en $C^0([t_0 - \tau, t_0 + \tau]; \mathbb{R}^N)$ y por tanto la continuidad de F.

Veamos por último que $F(K)$ es relativamente compacto en $C^0([t_0 - \tau, t_0 + \tau]; \mathbb{R}^N)$. Por el teorema de Ascoli-Arzelà basta ver que $F(K)$ es acotado y equicontinuo. Como ya sabemos que $F(K) \subset K$ y K es acotado se tiene que $F(K)$ es acotado. Para la equicontinuidad, tomemos $\varepsilon > 0$ y usando que la función definida por (5.11) es integrable, consideremos $\delta > 0$ tal que para todos t_1, t_2 con $t_0 - \tau \leq t_1 \leq t_2 \leq t_0 + \tau$, $t_2 - t_1 < \delta$, se tenga

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big(|f(s,y_0)| + \sup_{|y-y_0|\leq r} |f(s,y) - f(s,y_0)|\Big)ds < \varepsilon.$$

Se tiene entonces, para toda función $\varphi \in K$ y para todos t_1, t_2 en las condiciones anteriores

$$\begin{aligned}|F(\varphi)(t_1) - F(\varphi)(t_2)| &= \Big| \int_{t_1}^{t_2} f(s,\varphi(s))ds\Big| \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \Big(|f(s,y_0)| + |f(s,\varphi(s)) - f(s,y_0)|\Big)ds < \varepsilon.\end{aligned}$$

lo que prueba la equicontinuidad de $F(K)$. □

5.2. Ejemplo 2

Como segundo ejemplo vamos a considerar el sistema de Navier-Stokes estacionario incompresible en un conjunto abierto, acotado, conexo y regular $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ con $N = 2$ ó 3, i.e. del sistema de EDP

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + \rho(u\cdot\nabla)u + \nabla p = f \quad \text{en} \quad \Omega \\ \text{div} u = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.12}$$

Este sistema modela el movimiento de un líquido que se encuentra confinado en Ω y que ha alcanzado una posición de equilibrio. Recordamos que $u = u(x)$ es una función con valores en $\mathbb{R}^N$ que nos proporciona la velocidad de la partícula que en el instante considerado se encuentra en la posición x. La función $p = p(x)$ es una función escalar que representa la presión del fluido en el punto x. La función $f = f(x)$ es una función con valores en $\mathbb{R}^N$ que representa la fuerza exterior que se está aplicando a la partícula que en el instante considerado ocupa la posición x. La constante $\rho > 0$ es la densidad del fluido y la constante $\nu > 0$ es la constante de viscosidad del fluido. El término $(u\cdot\nabla)u$ está definido como el vector

$$[(u\cdot\nabla)u]_i = u\cdot\nabla u_i, \quad 1 \le i \le N,$$

o equivalentemente por

$$(u\cdot\nabla)u = (Du)u,$$

donde Du representa la matriz jacobiana de u.

Decimos que el fluido ha alcanzado un equilibrio en el sentido de que las funciones u y p no dependen de la variable temporal. Observar que esto no significa que el fluido no se esté moviendo (lo que equivaldría a u nula) sino tan sólo que la velocidad que tiene la partícula que en un determinado instante se encuentra en la posición x no depende del instante, tan solo de x y análogamente para la presión.

En (5.12) tenemos un sistema $N+1$ ecuaciones y $N+1$ incógnitas $(u_1, \ldots, u_N)$ y p. De hecho, la primera ecuación en (5.12) corresponde a las N ecuaciones escalares

$$-\nu\Delta u_i + \rho\sum_{j=1}^{N}(u_j\partial_j u_i) + \partial_i p = f_i \quad \text{en} \quad \Omega, \quad 1 \le i \le N.$$

Vamos a buscar u en el espacio $H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$ y p en $L^2(\Omega)$ donde recordamos que $H^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$ representa el espacio de funciones $L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)$ tales que su derivada distribucional está en $L^2(\Omega;\mathbb{R}^{N\times N})$. Se trata de un espacio de Hilbert con la norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega;\mathbb{R}^N)} = \sqrt{\|u\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)} + \|Du\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)}}. \tag{5.13}$$

El espacio $H^1_0(\Omega;\mathbb{R}^N)$ se define como el cierre en $H^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$ del espacio de funciones de clase infinito con soporte compacto en Ω que notamos por $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ y una norma equivalente a la de $H^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$ en este espacio viene dada por

$$\|u\|_{H^1_0(\Omega;\mathbb{R}^N)} = \|Du\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)}. \tag{5.14}$$

El espacio dual de $H^1_0(\Omega;\mathbb{R}^N)$ se denota por $H^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^N)$.

Recordar que al considerar que la función u se encuentra en el espacio $H^1_0(\Omega;\mathbb{R}^N)$ ya estamos diciendo que la función se anula en la frontera de Ω (por ejemplo en el sentido de que su traza es nula). Otras propiedades del espacio $H^1_0(\mathbb{R}^N)$ que serán importantes para estudiar la existencia de solución de (5.12) se encuentran contenidas en el siguiente resultado que resulta de unir el teorema de inyección de Sobolev y el teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov.

Teorema 5.3. *Si $N=2$ el espacio $H^1_0(\Omega;\mathbb{R}^2)$ se inyecta de forma compacta en $L^p(\Omega;\mathbb{R}^2)$ para todo $p\in[1,\infty)$.*

Si $N=3$ el espacio $H^1_0(\Omega;\mathbb{R}^3)$ se inyecta de forma continua en $L^6(\Omega;\mathbb{R}^3)$. La inyección es compacta sobre $L^p(\Omega;\mathbb{R}^3)$ para todo $p\in[1,6)$.

El sistema (5.12) deberá verificarse en el sentido de las distribuciones, para ello más generalmente que tomar f como una función podremos tomar f simplemente como una distribución en el espacio $H^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Observamos que escribir la primera ecuación en el sentido de las distribuciones es equivalente a

$$\int_\Omega (\nu Du : D\varphi + \rho[(u\cdot\nabla)u]\cdot\varphi - p\operatorname{div}\varphi)dx = \langle f,\varphi\rangle \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{R}^N), \tag{5.15}$$

donde dadas las matrices $A,B\in\mathbb{R}^{N\times N}$ de coeficientes a_{ij} y b_{ij} definimos $A:B$ por $\sum_{1\le i,j\le N} a_{ij}b_{ij}$. Teniendo en cuenta que $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ es denso en $H^1_0(\Omega;\mathbb{R}^N)$ tenemos que la igualdad anterior implica que de hecho u,p deben verificar

$$\int_\Omega (\nu Du : Dv + \rho[(u\cdot\nabla)u]\cdot v - p\operatorname{div} v)dx = \langle f,v\rangle \quad \forall v\in H^1_0(\Omega;\mathbb{R}^N). \tag{5.16}$$

Para ello observar que

$$[(u \cdot \nabla)u] \cdot v = \sum_{i,j=1}^{N} u_j \partial_j u_i v_i$$

donde gracias al Teorema 5.3, en cada uno de los sumandos las funciones u_j, v_i pertenecen a $L^p(\Omega)$ con $p < \infty$ si $N = 2$, $L^6(\Omega)$ si $N = 2$. Usando también que $\partial_j u_i$ pertenece a $L^2(\Omega)$, podemos aplicar la desigualdad de Hölder para deducir:

Si $N = 2$, la igualdad

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{2} + \frac{1}{p} = \frac{4+p}{2p},$$

implica tomando p tan grande como queramos que $[(u \cdot \nabla)u] \cdot v$ pertenece a $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, 2)$.

Si $N = 3$, la igualdad

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

implica que $[(u \cdot \nabla)u] \cdot v$ pertenece a $L^{\frac{6}{5}}(\Omega)$.

En particular, tenemos en cualquier caso que $[(u\cdot\nabla)u]\cdot v$ pertenece a $L^1(\Omega)^N$ lo cual implica que la integral de la función $[(u \cdot \nabla)u] \cdot v$ que aparece en (5.16) está bien definida. De hecho el Teorema 5.3 y la desigualdad de Hölder prueban que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\Big\| \big[(u\cdot\nabla)u\big]\cdot v \Big\|_{L^1(\Omega)} \leq C\|u\|^2_{H^1_0(\Omega;\mathbb{R}^N)} \|v\|_{H^1_0(\Omega;\mathbb{R}^N)}, \quad \forall u, v \in H^1_0(\Omega; \mathbb{R}^N). \tag{5.17}$$

Como consecuencia, se deduce que fijado $u \in H^1_0(\Omega; \mathbb{R}^N)$, la aplicación

$$v \in H^1_0(\Omega; \mathbb{R}^N) \longmapsto \int_\Omega [(u \cdot \nabla)u] \cdot v \, dx \tag{5.18}$$

define un elemento de $H^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^N)$, resultado que hemos usado cuando hemos dicho que podíamos pasar de (5.15) a (5.16) por densidad. Resultados similares se usan para pasar al límite por densidad en los distintos términos que aparecen en (5.15) aunque son algo más fáciles al tratarse de términos que están definidos como productos de dos factores y no de tres.

Tomando en (5.16) la función v con divergencia nula, tenemos que si (u, p) es solución de (5.12) entonces se debe cumplir

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^N), \quad \operatorname{div} u = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \\ \displaystyle\int_\Omega \Big(\nu Du : Dv + \rho\big[(u\cdot\nabla)u\big]\cdot v\Big)dx = \langle f, v\rangle \\ \forall v \in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^N), \quad \operatorname{div} v = 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \end{array}\right. \tag{5.19}$$

lo que proporciona una ecuación variacional para la velocidad u en la cual no aparece la presión p. Vamos a comenzar por tanto probando la existencia de una solución para (5.19). Necesitaremos antes el siguiente resultado

Teorema 5.4. *Para cada $g \in H^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ existe una única solución del problema*

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^N), \quad \mathit{div}\, u = 0 \quad en \quad \Omega \\ \nu \int_\Omega Du : Dv dx = \langle g, v\rangle \\ \forall v \in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^N), \quad \mathit{div}\, v = 0 \quad en \quad \Omega, \end{array}\right. \tag{5.20}$$

Además la aplicación $g \in H^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^N) \longmapsto u \in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$ solución de (5.20) es lineal y continua.

Demostración: Definimos V por

$$V = \{v \in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^N) : \operatorname{div} v = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\}. \tag{5.21}$$

Teniendo en cuenta que la divergencia es un operador continuo en el espacio de distribuciones y por tanto en $H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$ se tiene que V (núcleo del operador divergencia) es un subespacio cerrado de $H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$ y por tanto un espacio de Hilbert si lo dotamos de la misma topología que $H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$, i.e. del producto escalar

$$(u,v)_V = \int_\Omega Du : Dv dx, \quad \forall u, v \in V. \tag{5.22}$$

Por otra parte, como g es un elemento de $H^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^N)$, entonces su restricción a V define un elemento de V'. En particular g/ν es un elemento de V'. Observando entonces que (5.20) se puede escribir como

$$\left\{\begin{array}{l} u \in V \\ (u,v)_V = \langle \frac{1}{\nu} g, v\rangle, \quad \forall v \in V \end{array}\right. \tag{5.23}$$

el teorema es una simple consecuencia del teorema de Riesz (también se puede usar Lax-Milgram) que prueba que dado $g/\nu \in V'$ existe un único elemento $u \in V$ verificando (5.23). Además la aplicación $g \in V' \longmapsto u \in V$ es lineal y continua. De hecho, se tiene

$$\|u\|_v = \frac{1}{\nu}\|g\|_{V'}. \tag{5.24}$$

□

Estamos en posición de probar

Teorema 5.5. *El problema* (5.19) *admite al menos una solución.*

Demostración: Para V dado por (5.21) definimos $F : V \to V$ por $F(u) = z$ con z solución del problema

$$\begin{cases} z \in V \\ \nu \displaystyle\int_\Omega Dz : Dvdx = \langle f, v\rangle - \rho \int_\Omega [(u \cdot \nabla)u] \cdot vdx, \quad \forall v \in V, \end{cases} \tag{5.25}$$

donde observamos que z existe y es única gracias al Teorema 5.4 aplicado a

$$g = f - \rho[u \cdot \nabla]u,$$

el cual es un elemento de $H^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Tenemos por tanto que F está bien definida. Además, teniendo en cuenta su definición tenemos que las posibles soluciones de (5.19) son puntos fijos para F. Nuestro problema consiste por tanto en probar la existencia de un punto fijo para F. Para este fin vamos a aplicar el Teorema 4.9 con Ω reemplazado por la bola de centro cero y radio R en V, i.e.

$$B = \{u \in V : \|v\| < R\}$$

con $R > 0$ a elegir.

Tenemos que probar que F es compacta en $\overline{B}$. Para ello observamos que si u, v tiene divergencia nula, entonces integrando por partes se tiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega [(u\cdot\nabla)\cdot u]\cdot v\,dx &= \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega u_j\partial_j u_i v_i dx\\ &= \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \big(\partial_j(u_iu_j)v_i - u_i\partial_j u_j v_i\big)dx\\ &= -\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega (u_iu_j)\partial_j v_i dx - \sum_{i=1}^N \int_\Omega u_iv_i\Big(\sum_{j=1}^N \partial_j v_j\Big)dx\\ &= -\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega (u_iu_j)\partial_j v_i dx = -\int_\Omega (u\otimes u) : Dvdx,\end{aligned}$$

donde $u\otimes u$ es la matriz producto tensorial de u por u definida por $(u\otimes u)_{ij} = u_iu_j$. Esto signifca que podemos escribir (5.25) como

$$\begin{cases} z\in V\\ \nu\displaystyle\int_\Omega Dz : Dvdx = \langle f, v\rangle - \rho\int_\Omega (u\otimes u) : Dvdx, \quad \forall v\in V,\end{cases} \tag{5.26}$$

con la ventaja de que ahora para probar la existencia de z solución de este problema basta con $u\in L^4(\Omega;\mathbb{R}^N)$ de forma que $u\otimes u$ pertenece a $L^2(\Omega;\mathbb{R}^{N\times N})$. Esto permite entonces extender F a un funcional que notamos por $\mathcal{F} : L^4(\Omega)^N \to v$ definido por $\mathcal{F}(u) = z$ con z la única solución de (5.26). Vamos a probar que $\mathcal{F}$ es continua sobre $L^4(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Gracias al Teorema 5.4 basta ver que si una sucesión u_n converge a u en $L^4(\Omega;\mathbb{R}^N)$ entonces los funcionales $g_n\in H^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ definidos por

$$\langle g_n, v\rangle = \int_\Omega (u_n\otimes u_n) : Dvdx, \quad \forall v\in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$$

(i.e. $g_n = -$ div $(u_n\otimes u_n)$) convergen en la topología de $H^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ hacia g definida por

$$\langle g, v\rangle = \int_\Omega (u\otimes u) : Dvdx, \quad \forall v\in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^N).$$

Para ello observamos que gracias a la desigualdad de Hölder, para toda $v\in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$ se tiene

$$
\begin{aligned}
|\langle g_n - g, v\rangle| &= \Big| \int_\Omega \Big((u_n \otimes u_n) - (u \otimes u) \Big) : Dv dx \Big| \\
&\leq \int_\Omega \big| (u_n - u) \otimes u_n \big| |Dv| dx + \int_\Omega |u \otimes (u_n - u)| |Dv| dx \\
&\leq \|u_n - u\|_{L^4(\Omega;\mathbb{R}^N)} \big(\|u\|_{L^4(\Omega;\mathbb{R}^N)} + \|u_n\|_{L^4(\Omega;\mathbb{R}^N)} \big) \|v\|_{H_0^1(\Omega)^N},
\end{aligned}
$$

lo que prueba

$$
\|g_n - g\|_{H^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^N)} \leq \|u_n - u\|_{L^4(\Omega;\mathbb{R}^N)} \big(\|u\|_{L^4(\Omega;\mathbb{R}^N)} + \|u_n\|_{L^4(\Omega;\mathbb{R}^N)} \big) \to 0
$$

si $n \to \infty$, gracias a la convergencia de u_n a u en $L^4(\Omega; \mathbb{R}^N)$ y por tanto

$$
g_n \to g \quad \text{en} \quad H^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^N).
$$

Esto prueba que $\mathcal{F}$ es continua. Teniendo en cuenta que $F = \mathcal{F} \circ i$ con i la inyección de V en $L^4(\Omega; \mathbb{R}^N)$ y que i es compacta gracias al Teorema 5.4 podemos entonces aplicar la Proposición 4.1 para deducir que F es compacta.

Para poder aplicar el Teorema 4.9 basta entonces con probar que podemos tomar $R > 0$ tal que no existe $\lambda > 1$ y $u \in V$ con $\|u\|_V = R$ verificando $F(u) = \lambda u$. Razonemos por contradicción suponiendo que existen λ y u en las condiciones anteriores y observemos que $F(u) = \lambda u$ es equivalente a

$$
\nu\lambda \int_\Omega Du : Dv dx = \langle f, v\rangle - \rho \int_\Omega [(u \cdot \nabla) u] \cdot v dx, \quad \forall v \in V.
$$

Tomando en particular $v = u$ e integrando por partes tenemos entonces

$$
\nu\lambda \int_\Omega |Du|^2 dx = \langle f, u\rangle - \rho \int_\Omega [(u \cdot \nabla) u] \cdot u dx, \tag{5.27}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega [(u \cdot \nabla) u] \cdot u dx &= \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega u_j \partial_j u_i u_i dx = \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega u_j \partial_j \frac{u_i^2}{2} dx \\
&= -\sum_{i=1}^N \int_\Omega \Big(\sum_{j=1}^N \partial_j u_j \Big) \frac{u_i^2}{2} dx = 0
\end{aligned}
$$

de forma que (5.27) se escribe como

$$\nu\lambda \int_{\Omega} |Du|^2 dx = \langle f, u\rangle.$$

Esto implica

$$\nu\lambda \|u\|_V^2 \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^N)} \|u\|_V$$

y por tanto, usando $\lambda > 1$

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\nu\lambda} \|f\|_{H^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{\nu} \|f\|_{H^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^N)}.$$

Tomando entonces R tal que

$$R > \frac{1}{\nu} \|f\|_{H^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^N)},$$

llegamos a contradicción con la suposición $\|u\|_V = R$, lo que concluye la demostración del resultado. □

Observación 5.3. La equivalencia que hemos probado entre (5.25), (5.26) proviene del hecho bien conocido de que el problema (5.12) es equivalente a

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + \rho \mathrm{div}(u \otimes u) + \nabla p = f \quad \text{en} \quad \Omega \\ \mathrm{div} u = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

donde recordamos que la divergencia de una función matricial es el vector resultante de calcular la divergencia de cada fila de la matriz.

Observación 5.4. Utilizando $v = u$ en (5.19) se deduce como al final de la demostración del Teorema que toda solución u de (5.19) verifica la igualdad de la energía

$$\nu \int_{\Omega} |Du|^2 dx = \langle f, u\rangle$$

lo cual implica a su vez que u verifica

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\nu} \|f\|_{H^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^N)}. \tag{5.28}$$

El resultado anterior prueba la existencia de una solución para el problema

(5.19). Sin embargo, recordemos que el problema que queremos resolver es encontrar $u \in V$, $p \in L^2(\Omega)$ tales que se cumple (5.16), (formulación variacional de (5.12)). Esto es consecuencia del teorema siguiente que damos sin demostración.

Teorema 5.6. *Existe una constante $C > 0$ tal que para todo $h \in H^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ que verifica*

$$\langle h, v \rangle = 0, \quad \forall v \in V,$$

se tiene que existe $p \in L^2(\Omega)$ tal que $\nabla p = g$, además tomando p con integral nula (p está definido salvo constante) se tiene

$$\|p\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^N)}.$$

Corolario 5.1. *El problema* (5.12) *tiene al menos una solución* $(u, p) \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^N) \times L^2(\Omega)$.

Demostración: Consideremos $u \in V$ una solución del problema (5.19) y definamos $h \in H^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ por

$$\langle h, v \rangle = -\int_\Omega (\nu Du : Dv + \rho[(u \cdot \nabla)u] \cdot v) dx + \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^N),$$

y observemos que como u es solución de (5.19) entonces $\langle h, v \rangle = 0$ para toda $v \in V$. Aplicando el Teorema (5.6) tenemos entonces que existe $p \in L^2(\Omega)$ (única salvo constante aditiva) tal que se verifica

$$-\int_\Omega p \mathrm{div} v dx = \langle \nabla p, v \rangle = \langle h, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^N).$$

lo cual implica que se cumple (5.15).

Observación 5.5. En el Teorema 5.4 probamos que existe una solución de (5.20). Unido al Teorema 5.6 se deduce la existencia de $u \in V$, $p \in L^2(\Omega)$ solución de

$$\int_\Omega (\nu Du : Dv - p \mathrm{div} v) dx = \langle g, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^N),$$

lo que en el sentido de las distribuciones prueba que u, p es solución de

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + \nabla p = g \quad \text{en} \quad \Omega \\ \text{div} u = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.29}$$

Esto es lo que se conoce como problema de Stokes y consiste en un modelo simplificado de (5.12) donde se ha eliminado el término no lineal $\rho(u \cdot \nabla)u$ (ahora estamos llamando a la fuerza g). Este modelo supone que el fluido es altamente viscoso, es decir la constante ν es muy grande de forma que en (5.12) el segundo término es despreciable respecto al primero. Se usa por ejemplo para modelar fluidos como aceite mientras que (5.12) se usa por ejemplo para el caso del agua. En el caso del problema (5.29) la función u es única mientras que p está definida salvo una constante aditiva. En el caso del problema (5.12) no se conoce un resultado de unicidad general (sí se sabe por ejemplo que hay unicidad si $\|f\|_{H^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^N)}$ es pequeña).

Bibliografía

[1] H.Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, New York, 2011 (primera publicación 1983).

[2] E.A. Coddington, N.Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations.* McGraw-Hill, New York, 1955.

[3] K.Deimling. *Nonlinear Functional Analysis.* Springer-Verlag, Berlín, 1985.

[4] J.L.Lions. *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires.* Dunod, París, 2002 (primera edición 1969).