TRABAJO FIN DE GRADO

FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA

TEORÍA DE REPRESENTACIONES DE GRUPOS FINITOS

Realizado por: Joaquín Eloy Vargas Magán

Dirigido por: Luis Narváez Macarro

Sevilla, 2018

Índice

Abstract

The main purpose of the Theory of Representations of finite groups is the description and classification the different representations of a finite group G. We begin with the analysis of irreducible representations, which allows us to obtain all the representations of G. To calculate them, use the Character Theory, which will help us to reduce the complexity of this problem. As part of this area, we present a series of orthogonality results and what we will call character table. Once all this is analyzed, we focus on the symmetric group more closely and its irreducible representations. We will define Young's diagrams, the main piece for the classification of the irreducible representations of S_n. Finally, we will see some results of the Theory of Representations with more detail, such as the Schur indicator, the Frobenius formula or the Burnside Theorem. This last theorem is a result related to Group Theory in which tools of the Theory of Representations are required for their proof.

Resumen

El principal objetivo de la Teoría de Representaciones de grupos finitos es la descripción y clasificación de las distintas representaciones de un grupo finito G. Comenzaremos con el análisis de las representaciones irreducibles, que nos permitirá obtener todas las representaciones del mismo. Para calcularlas, estudiaremos la Teoría de Caracteres, que nos servirá para reducir la complejidad de este problema. Dentro de este ámbito, daremos una serie de resultados de ortogonalidad y lo que llamaremos tabla de caracteres. Una vez analizado todo esto, nos centramos con más detalle en el grupo simétrico y sus representaciones irreducibles. Definiremos los diagramas de Young, pieza clave para la clasificación de las representaciones irreducibles de S_n. Para finalizar, abordaremos algunos resultados más profundos de la Teoría de Representaciones como pueden ser el indicador de Schur, la fórmula de Frobenius o bien el Teorema de Burnside. Este último teorema es un importante resultado relacionado con Teoría de Grupos en el que se requieren herramientas de la Teoría de Representaciones para su prueba.

Introducción

Hasta el siglo XIX no se tenía claro el concepto de grupo abstracto. Los comienzos llegaron de la mano de Gauss con varios grupos pero hasta el año 1896 no se introdujo la Teoría de Representaciones en el mundo de las matemáticas. El gran pionero de esto fue *Ferdinand Georg Frobenius*, quién se centró en el estudio de caracteres de grupos finitos (en particular, grupos no abelianos). Otros nombres a destacar por ejemplo son *Hermann Weyl, Michael Artin* e *Issai Schur*, quienes desarrollaron importantes resultados posteriormente.

Durante el siglo XX se siguió profundizando en esta rama algebraica que consiste en la descripción de un grupo (en general no necesariamente finito) como grupo concreto de transformaciones (o grupo de automorfismos) de un cierto objeto matemático, obteniendo de esta forma resultados muy significativos sobre cuerpos algebraicamente cerrados. Otro resultado a destacar es por ejemplo las relaciones de ortogonalidad en los caracteres de grupos finitos que analizaremos más adelante. Tiempo después, esta teoría se extendió a otros objetos como por ejemplo definir las representaciones de álgebras definidas sobre un cuerpo k.

Además, gracias a la Teoría de Representaciones se han obtenido otros resultados muy importantes, como por ejemplo el Teorema de Burnside, llevado a cabo por *William Burnside* a principios del siglo XX. Uno de los objetivos de nuestro trabajo ha sido estudiar dicho resultado, que se analizará posterioremente en el Capítulo 5.

Por otra parte, esta teoría se aplica en distintos ámbitos de las matemáticas. Por ejemplo, en la teoría de códigos de correción de errores y en combinatoria, la Teoría de Representaciones entra en juego. Esta teoría también sirve como aplicación en otras ciencias como por ejemplo la cristalografía.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo daremos una serie de herramientas necesarias para el objetivo de nuestro trabajo, describir las representaciones de un grupo finito G. Para ello definiremos las representaciones de álgebras y daremos unos resultados para cuyas pruebas remitiremos a [1].

1.1 Definición de álgebra

Definición 1.1. *Sea $(A, +)$ un espacio vectorial sobre un cuerpo k dotado de la operación:*

$$\begin{aligned} A \times A &\longrightarrow A \\ (x, y) &\longmapsto x \cdot y \end{aligned}$$

donde se cumplen las propiedades distributivas y asociativas sobre A:

$$\begin{aligned} (x + y) \cdot z &= x \cdot z + y \cdot z & \qquad (ax)y &= a(xy) \\ x \cdot (y + z) &= x \cdot y + x \cdot z & \qquad x(by) &= (xb)y \end{aligned}$$

$\forall\ a, b, x, y, z \in A$

*Entonces, dadas estas condiciones, se dice que A es una **k-álgebra**.*

Definición 1.2. *Una k-álgebra con **elemento unidad** es un álgebra A sobre k donde existe un único elemento $e \in A$ tal que $ea = ae = a$ $\forall a \in A$.*

Nosotros siempre consideraremos k-álgebras con elemento unidad.

Definición 1.3. *Sean A y B dos álgebras definidas sobre un cuerpo k. Entonces un **homomorfismo entre k-álgebras** es una aplicación k-lineal con respecto a la multiplicación $\varphi : A \longrightarrow B$ que conserva el elemento unidad, i.e., una aplicación que verifica:*

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \qquad\qquad \varphi(1_A) = 1_B$$

$\forall x, y \in A$.

Un caso particular de una k-álgebra es la que genera un grupo finito G sobre k, que se define de la siguiente forma:

$$k\,[G] = \oplus_{\sigma \in G} k \cdot \sigma = \left\{ \sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma \; ; \;\; a_\sigma \in k \right\} \tag{1.1}$$

asociándole la multiplicación siguiente:

$$\left(\sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma \right) \left(\sum_{\sigma' \in G} b_{\sigma'} \sigma' \right) = \sum_{\tau \in G} \left(\sum_{\sigma \cdot \sigma' = \tau} a_\sigma b_{\sigma'} \right) \tau = \sum_{\tau \in G} \left(\sum_{\sigma \in G} a_\sigma b_{\sigma^{-1} \cdot \tau} \right) \tau \tag{1.2}$$

De esta forma, podemos considerar la aplicación que define cualquier elemento $\sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma \in k\,[G]$:

$$\begin{aligned} f : G &\longrightarrow k \\ \sigma &\longmapsto a_\sigma \end{aligned}$$

Dado un elemento de $k\,[G]$, la aplicación f nos asocia el valor $a_\sigma \in k$ que corresponde a cada elemento $\sigma \in G$.

Por tanto, dadas dos aplicaciones f y g:

$$\begin{aligned} f : G &\longrightarrow k \\ \sigma &\longmapsto a_\sigma \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g : G &\longrightarrow k \\ \sigma' &\longmapsto b_{\sigma'} \end{aligned}$$

podemos definir de forma equivalente a (1.2), el producto entre dos elementos de $k\,[G]$ como sigue:

$$\left(\sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma \right) \left(\sum_{\sigma' \in G} b_{\sigma'} \sigma' \right) = \left(\sum_{\sigma \in G} f(\sigma) \sigma \right) \left(\sum_{\sigma' \in G} g(\sigma') \sigma' \right) =$$

$$= \sum_{\tau \in G} \left(\sum_{\sigma \cdot \sigma' = \tau} f(\sigma) g(\sigma') \tau \right) = \sum_{\tau \in G} \left(\sum_{\sigma \in G} f(\sigma) g(\sigma^{-1} \tau) \tau \right)$$

Esto nos permite definir la convolución de dos aplicaciones:

$$(f * g)(\tau) = \sum_{\sigma \in G} f(\sigma) g(\sigma^{-1} \tau) \qquad \forall \tau \in G \tag{1.3}$$

La importacia de álgebras en la Teoría de Representaciones de Grupos Finitos reside en el hecho de que las representaciones de un grupo finito G coinciden con los $k\,[G]$-módulos a la izquierda.

1.2 Representaciones de álgebras

Definición 1.4. *Una **representación** de un álgebra A (también llamado A-módulo a izquierda) es un espacio vectorial V equipado con un homomorfismo de k-álgebras $p : A \to \mathrm{End}_k(V)$.*

Además, dadas dos representaciones de A que llamaremos V_1 y V_2, tenemos que $V_1 \oplus V_2$ también es una representación de A, dada por:

$$a(v_1 \oplus v_2) = (av_1) \oplus (av_2) \tag{1.4}$$

$\forall v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ y $a \in A$.

De la misma manera se puede definir una **subrepresentación** de una representación V como un subespacio $U \subset V$ el cual es ρ-invariante por A.

Definición 1.5. *Una representación V de una k-álgebra A se dice **irreducible** si sus únicas subrepresentaciones son 0 y V.*

Definición 1.6. *Una representación V de una k-álgebra A se dice que es **completamente reducible** si es suma directa de representaciones irreducibles.*

Definición 1.7. *Sean V_1 y V_2 dos representaciones de un álgebra A. Entonces un **homomorfismo de representaciones de álgebras** $\phi : V_1 \to V_2$ es una aplicación k-lineal que verifica:*

$$\phi(av) = a\phi(v) \tag{1.5}$$

$\forall a \in A$, $v \in V_1$.

Además, el conjunto de homomorfismos entre dos representaciones V_1 y V_2 forman un k-espacio vectorial que llamaremos $\mathrm{Hom}_k(V_1, V_2)$. Después veremos que este espacio vectorial se puede considerar como una representación de un grupo finito G bajo una acción determinada.

De esta forma, se define un **isomorfismo de representaciones** como un homomorfismo de representaciones biyectivo.

Ejemplo: Sea V una representación irreducible de una k-álgebra A de dimensión n y consideramos el k-espacio vectorial $\mathrm{End}_k(V)$. Veamos que dicho espacio define una representación completamente reducible en A bajo la acción del mismo con la multiplicación a izquierda, es decir, dado $a \in A$, $h \in \mathrm{End}_k(V)$, tenemos que $ah \in \mathrm{End}_k(V)$. Por tanto:

$$(ah)(v) = ah(v)$$

$\forall v \in V$.

Por un lado, para simplificar notación, definimos $nV = \underbrace{V \oplus V \oplus V \oplus \cdots \oplus V}_{n}$.

Por otro lado, sea $(v_1, v_2, ..., v_n)$ una base de V. Dadas estas condiciones, definimos la aplicación:

$$\begin{aligned} E : \mathrm{End}_k(V) &\longrightarrow nV \\ h &\longmapsto (h(v_1), h(v_2), ..., h(v_n)) \end{aligned}$$

Veamos que E es un isomorfismo. Al ser $(v_1, v_2, ..., v_n)$ una base de V, tenemos que la aplicación E es un isomorfismo entre espacios vectoriales.

Por tanto, falta ver que E se trata de un homomorfismo de representaciones. Al generar la multiplicación a izquierda en A, tenemos que E es un homomorfismo de representaciones. Por tanto, E es un isomorfismo de representaciones.

Teorema 1.2.1 (Lema de Schur). *Sean V_1 y V_2 representaciones de un álgebra A sobre un cuerpo F (no necesariamente algebraicamente cerrado). Sea $\phi : V_1 \longrightarrow V_2$ un homomorfismo de representaciones distinto del homomorfismo nulo. Entonces:*

1. *Si V_1 es irreducible, ϕ es inyectiva.*
2. *Si V_2 es irreducible, ϕ es sobreyectiva.*

Además, si tanto V_1 como V_2 son irreducibles, ϕ es un isomorfismo.

Demostración:

1. Tenemos que V_1 es una representación irreducible, por tanto por definición tenemos que las únicas subrepresentaciones de V_1 son o bien el propio V_1, o bien 0. Más adelante en el Capítulo 2, probaremos que el núcleo K de un homomorfismo de representaciones es una subrepresentación de V_1. Como $\phi \neq 0$, tenemos entonces que $K = 0$ $\Rightarrow \phi$ inyectiva.
2. También veremos en el Capítulo 2 que la imagen de un homomorfismo de representaciones I es una subrepresentación de V_2. Al ser V_2 irreducible y $\phi \neq 0$, tenemos que I no puede ser 0. Por tanto $I = V_2$ $\Rightarrow \phi$ sobreyectivo.

Gracias a 1 y 2, obtenemos que si V_1 y V_2 son irreducibles, entonces ϕ es un isomorfismo. $\square$

Corolario 1.2.2 (Lema de Schur para cuerpos algebraicamente cerrados)**.** *Sea V una representación irreducible de dimensión finita de un álgebra A sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k, y sea $\phi : V \to V$ una aplicación. Entonces, $\phi = \lambda \operatorname{Id}$ para algún $\lambda \in k$.*

Demostración:
Sea λ una autovalor de ϕ, que sabemos que existe ya que k es un cuerpo algebraicamente cerrado. Consideramos la aplicación $\phi - \lambda \operatorname{Id}$ que tiene núcleo distinto de cero. Entonces, por el teorema anterior, tenemos que $\phi - \lambda \operatorname{Id} = 0$.$\square$

Sin embargo, este resultado no se puede aplicar en general para el cuerpo de los números reales, ya que $\mathbb{R}$ no es algebraicamente cerrado.

Como ya hemos comentado antes, dado una k-álgebra A y dadas dos representaciones V_1 y V_2, tenemos que $V_1 \oplus V_2$ es una representación de A. Veamos que ocurre para productos tensoriales de k-álgebras:

Teorema 1.2.3. *Sean A y B álgebras:*

1. *Sea V una representación irreducible de dimensión finita de A y W una representación irreducible de dimensión finita de B. Entonces $V \otimes W$ es una representación irreducible de $A \otimes_k B$.*

2. *Cualquier representación irreducible de dimensión finita M de $A \otimes_k B$ tiene la forma (1) para un único V y W.*

Veamos otros resultados importantes de las representaciones de álgebras:

Definición 1.8. *El **radical** de un álgebra de dimensión finita A es el conjunto de todos los elementos de A los cuales actúan como 0 en todas las representaciones irreducibles de A. Se denota por* $\operatorname{Rad}(A)$.

Definición 1.9. *Un álgebra de dimensión finita A se dice que es **semisimple** si* $\operatorname{Rad}(A) = 0$

Teorema 1.2.4. *Una k-álgebra A de dimensión finita tiene un número finito de representaciones irreducibles V_i salvo isomorfismo. Estas representaciones son de dimensión finita y verifica:*

$$A/\operatorname{Rad}(A) \cong \oplus_i \operatorname{End}(V_i) \tag{1.6}$$

Proposición 1.2.5. *Para cualquier álgebra de dimensión finita A, los siguientes resultados son equivalentes:*

1. *A es semisimple.*
2. *$\sum_i (\dim V_i) = \dim A$, siendo V_i las representaciones irreducibles de A.*
3. *$A \cong \oplus_i \operatorname{Mat}_{d_i}(k)$ para algún d_i.*
4. *Cualquier representación de dimensión finita A es completamente reducible.*
5. *A es representación completamente reducible de A.*

Las pruebas de estos resultados pueden encontrarse en [1].

1.3 Caracteres de representaciones de álgebras

Sea A una k-álgebra y (V, ρ) una representación de A. Entonces el **carácter** de V es la función lineal:

$$\begin{aligned} \chi_V : A &\longrightarrow k \\ a &\longmapsto \operatorname{Tr}|_V(\rho(a)) \end{aligned}$$

Definimos el subespacio vectorial:

$$[A, A] = \langle\ [x, y]\ \mid x, y \in A\ \rangle\ \subset\ A$$

siendo $[x, y] = xy - yx\ \ \forall x, y \in A$. De esta forma, podemos ver los caracteres de una representación como una aplicación $\chi_V : A/\,[A, A] \to k$.

Teorema 1.3.1.

1. *Los caracteres de distintas representaciones irreducibles de dimensión finita de A son linealmente independientes.*
2. *Si A es un álgebra semisimple de dimensión finita, entonces estos caracteres forman una base de $(A/\,[A, A])^*$.*

La prueba de este resultado se puede ver en [1].

Capítulo 2

Representaciones de grupos finitos

El objetivo de este capítulo es definir el concepto de representación de un grupo finito G, así como algunos resultados importantes que nos permitirán describir todas las representaciones de dicho grupo.

2.1 Representaciones lineales de grupos

Consideramos un cuerpo k y un espacio vectorial V definido sobre dicho cuerpo.

Definición 2.1. *Sea G un grupo (no necesiaremente finito). Entonces, dadas estas condiciones, se define una* ***representación lineal*** *de G sobre k como un par (V, ρ) donde:*

- *V es un espacio vectorial sobre k.*
- *ρ homomorfismo de grupos:*
$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$
siendo $\mathrm{GL}(V)$ el grupo de automorfismos de V.

Si además tenemos que la dimensión de V es $d \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, entonces mediante la elección de una base de V, tenemos un isomorfismo de grupos $\mathrm{GL}(V) \simeq \mathrm{GL}(d,k)$ (conjunto de matrices invertibles de orden d con coeficientes en el cuerpo k).

Por tanto, de la misma forma podemos definir una **representación matricial** de un grupo G sobre k como un homomorfismo de grupos:

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(d,k).$$

Observación: Toda representación matricial de G de orden d determina una representación lineal en el espacio vectorial $V = k^d$.

Por cuestiones de notación, dada una representación (V, ρ) de G, notaremos:

$$gv := \rho(g)(v), \quad \forall g \in G, \forall v \in V \tag{2.1}$$

de manera que se verifica que $1v = v, g(hv) = (gh)v$, $g, h \in G, v \in V$.

Veamos algunos ejemplos de representaciones de grupos:

1. **Representación unidad**
   Para cualquier grupo G, la representación unidad viene dada por:

   $$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow \mathrm{GL}(V) \\ g &\longmapsto \mathrm{Id}_V \end{aligned}$$

   Un caso particular de la representación unidad es la **representación trivial** (o nula), que es el caso en el que $V = \{0\}$:

   $$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\{0\})$$

2. **Representación signo**:

   $$\begin{aligned} \rho : S_n &\longrightarrow \mathrm{GL}(1, k) \simeq k^* \\ g &\longmapsto \mathrm{signo}(g) \end{aligned}$$

   Recordemos que el signo(g) es (-1) elevado al número de transposiciones.

3. **Representación estándar**
   Sea $G = S_n$ el grupo simétrico. Consideramos la aplicación $\rho : S_n \longrightarrow \mathrm{GL}(n,k)$ de forma que a cada permutación σ se le asocia la matriz identidad con las filas permutadas según σ^{-1}. Es decir:

   $$\begin{aligned} \rho : S_3 &\longrightarrow \mathrm{GL}(n, k) \\ \sigma &\longmapsto (\delta_{(\sigma^{-1}(i),j)}) = (\delta_{(i,\sigma(j))}) \end{aligned}$$

   Por ejemplo, sea σ=(123) $\in S_3$. Entonces, $\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Veamos que se trata de un homomorfismo de grupos. Sean $\sigma, \tau \in S_n$ cualesquiera. Quiero ver que $\rho(\sigma\tau) = \rho(\sigma)\rho(\tau)$.

Por definición, tenemos que $\rho(\sigma\tau) = (\delta_{(i,\sigma\tau(j))})$. Por otra parte, estudiemos con más detalle $\rho(\sigma)\rho(\tau)$. Por un lado, sabemos que $\rho(\sigma) = (\delta_{(i,\sigma(j))})$ y $\rho(\tau) = (\delta_{(i,\tau(j))})$. Por tanto, tenemos:

$$\rho(\sigma)\rho(\tau) = \left(\sum_{k=1}^{n}(\delta_{(i,\sigma(k))})(\delta_{(k,\sigma(j))})\right) = \left(\sum_{k=1}^{n}(\delta_{(\sigma^{-1}(i),k)})(\delta_{(k,\sigma(j))})\right) =$$

$$= (\delta_{(\sigma^{-1}(i),\tau(j))}) = (\delta_{(i,\sigma\tau(j))}) \Rightarrow \rho(\sigma\tau) = \rho(\sigma)\rho(\tau).$$

Luego, ρ es un homomorfismo de grupos. [1]

Según la observación anterior, este ejemplo nos proporciona una representación en k^3.

2.2 G-homomorfismos de representaciones

En esta sección introduciremos el concepto de homomorfismo de representaciones de un grupo G, concepto que ya se introdujo en el Capítulo 1 pero con álgebras. En un principio, lo definiremos con una visión más general, sin considerar que G sea finito.

Dadas estas condiciones, sean (V, ρ) y (W, λ) dos representaciones de un grupo G sobre el cuerpo k.

Definición 2.2. *Un **G-homomorfismo** u homomorfismo de representaciones es un homomorfismo lineal $T : V \longrightarrow W$ compatible con ρ y λ, i.e $T(gv) = gT(v) \quad \forall g \in G$ y $\forall v \in V$.*

Nótese que un homomorfismo de representaciones es un homomorfismo entre espacios vectoriales mientras que el homomorfismo de una representación lineal de un grupo G es un homomorfismo de grupos.

Ejemplos :

1. La aplicación identidad es un G-homomorfismo.

[1] La necesidad de utilizar σ^{-1} en lugar de σ se debe al hecho de que ρ sea un homomorfismo.

2. La composición de G-homomorfismos es un G-homomorfismo.

3. El inverso de un G-homomorfismo biyectivo es también un G-homomorfismo. De esta forma, diremos que es un G-isomorfismo y que las representaciones correspondientes son G-isomorfas.

Además, como ya vimos en el Capítulo 1 para álgebras, podemos considerar el conjunto de G-homomorfismos entre dos representaciones (V, ρ) y (W, λ) con G grupo finito. Dicho conjunto tiene estructura de k-espacio vectorial y lo denotaremos $\mathrm{Hom}_G(V, W) \subset \mathrm{Hom}_k(V, W)$.

La principal diferencia entre $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ y $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ reside en el hecho de que $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ lo podemos considerar como una representación de G, asociándole la acción:

$$(g\phi)(v) := g\phi(g^{-1}v) \tag{2.2}$$

$\forall g \in G$, $\phi \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$ y $v \in V$. De esta forma, $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ es una representación de G bajo dicha acción.

Nos centramos en el concepto de subrepresentación de un grupo finito G.

Definición 2.3. *Dado un endomorfismo $f : V \to V$ de un k-espacio vectorial V, un subespacio W de V se dice que es* ***invariante*** *para f si $f(W) \subseteq W$.*

Definición 2.4. (W, λ) *es* ***subrepresentación*** *de V si:*

- *$W \subset V$ subespacio vectorial.*
- *W es un subespacio invariante para $\rho(g)$ $\forall g \in G$ (i.e., $gw \in W$ $\forall g \in G, \forall w \in W$).*

De esta forma, si W es un subespacio invariante de (V, ρ), tenemos que la aplicación:

$$g \in G \mapsto \rho(g)|_W \in \mathrm{GL}(W)$$

es una representación de G.

Ejemplos:

1. Es trivial ver que tanto el espacio vectorial V como el subespacio vectorial nulo $W = \{0\}$, son subespacios invariantes para ρ sobre V y por tanto, inducen subrepresentaciones de V.

2. Sean el grupo $G = \mathbb{Z}$ y $V = \mathbb{C}^2$ considerando la representación matricial (V, ρ):

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \\ n &\longmapsto A^n \end{aligned}$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos que $W = \langle (0,1) \rangle \subset V$ es una subrepresentación. Es trivial ver que es un subespacio vectorial de V. Además:

$$(0\;1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0\;1)$$

Por tanto, W es una subrepresentación es V.

3. Consideramos el G-homomorfismo $T : V \longrightarrow W$. Entonces ker T e Im T son subrepresentaciones de V y W respectivamente.

   En primer lugar, probemos que $\ker T$ es subrepresentación de V. Para ello, probamos que es un subespacio invariante.

   - ker $T \subset V$ subespacio vectorial.
   - Sean $h \in \ker T, g \in G$. Tenemos que ver si $gh \in \ker T$. Como $h \in \ker T \Rightarrow T(h) = 0$. Por tanto, $T(gh) = gT(h) = 0 \Rightarrow gh \in \ker T$.

     Luego, ker T es subrepresentación de V.

   Veamos ahora que Im T es subrepresentación de W.

   - Im $T \subset W$ subespacio vectorial.
   - Sean $i \in$ Im $T, g \in G$. Veamos que $gi \in$ Im T. Como $i \in$ Im $T \Rightarrow \exists\, v \in V \;/\; T(v) = i$. Por tanto, $gi = gT(v) = T(gv) \in W \Rightarrow gi \in$ Im T.

2.3 Relación entre representaciones y k-álgebras

Consideramos la k-álgebra sobre un grupo finito G:

$$k\,[G] = \oplus_{\sigma \in G}\, k \cdot \sigma = \left\{ \sum_{\sigma \in G} a_\sigma \cdot \sigma \;;\;\; a_\sigma \in k \right\}$$

En particular, las representaciones de G son concretamente $k\,[G]$-módulos a la izquierda. De esta forma, toda representación de G tiene estructura de $k\,[G]$-módulos a la izquierda con la multiplicación externa definida de la siguiente forma:

$$\left(\sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma\right) \cdot v := \sum a_\sigma (\sigma v)$$

De la misma manera, una subrepresentación tiene estructura de sub-k-$[G]$-módulo, un G-homomorfismo se puede considerar como un homomorfismo de k-$[G]$-módulos.

A partir de ahora, introducimos el concepto de *representación irreducible* desde el punto de vista de representaciones de grupos finitos.

Definición 2.5. *Dado un grupo G y un cuerpo k, una representación V sobre G en k se dice* ***irreducible*** *si las únicas subrepresentaciones de V son la representación trivial y ella misma.*

Por ejemplo, la representación trivial es claramente una representación irreducible. En general, toda representación de dimensión 1 es irreducible. Se puede probar que toda representación irreducible de dimensión finita de un grupo abeliano sobre un cuerpo algebraicamente cerrado es de dimensión 1. Este resultado lo probaremos para $k = \mathbb{C}$ más adelante en el Capítulo 3.

Definición 2.6. *Dado un grupo G y un cuerpo k, una representación V de G sobre k se dice* ***completamente reducible*** *si es suma directa de representaciones irreducibles.*

Como vemos, estas definiciones son similares a las de las representaciones de álgebras. En lo que sigue, veremos una serie de resultados que nos ayudarán en la búsqueda de representaciones irreducibles de cualquier grupo finito, en particular para el grupo simétrico $S_n (n \geq 3)$.

Teorema 2.3.1 (Teorema de Maschke). *Sea G un grupo finito y sea k un cuerpo cuya característica no divide al $|G|$. Entonces:*

1. *El álgebra $k\,[G]$ es semisimple.*
2. *Existe un isomorfismo de álgebras:*

$$\begin{aligned} \psi : k\,[G] &\to \oplus_i \operatorname{End} V_i \\ g \ &\mapsto \oplus_i \ g|_{V_i} \end{aligned}$$

donde V_i son las representaciones irreducibles de G. En particular, esto es un isomorfismo de representaciones de G (donde G actúa en ambos lados con la multiplicación a izquierdas). Por consiguiente, $k\,[G]$ se descompone en representaciones irreducibles como $\oplus_i \dim(V_i)V_i$. Además se verifica la siguiente fórmula:

$$\dim_k(k\,[G]) = |G| = \sum_i \dim(V_i)^2 \tag{2.3}$$

Demostración:
$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Se tiene por la Proposición 1.2.5.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ Por definición de álgebra semisimple, para probar que $k\,[G]$ es semisimple tenemos que ver que cualquier representación de G que llamaremos V se puede expresar como descomposición en suma directa de subrepresentaciones del propio V (i.e. $V = W \oplus W'$ desde el punto de vista de representaciones).

Por tanto, consideramos una subrepresentación (W, λ) de (V, ρ) (subespacio invariante para ρ) y sea W' un complemento directo de W tal que $V = W \oplus W'$ visto como espacios vectoriales. Veremos que subespacios representan.

Consideramos la aplicación $P : V \longrightarrow V$ la proyección de V hacia W (i.e. $P^2 = P$, por ser el proyector de V a W).

De esta forma, $P(v) = v$ si $v \in W \Rightarrow P|_W = \mathrm{Id}$

$$P(v) = 0 \text{ si } v \in W' \Rightarrow W' = \ker P$$

Consideramos ahora la aplicación:

$$\begin{aligned} \overline{P} : V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gP(g^{-1}v) \end{aligned}$$

En primer lugar, veamos que $\overline{P}$ es un homomorfismo de representaciones. Sean $h \in G$ y $v \in V$. Por tanto, tenemos:

$$\overline{P}(hv) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gP(g^{-1}hv)$$

Consideramos el cambio de variable $\ell^{-1} = g^{-1}v$, obteniendo:

$$\overline{P}(hv) = \frac{1}{|G|}\sum_{\ell\in G} h\ell P(\ell^{-1}v) = h\frac{1}{|G|}\sum_{\ell\in G}\ell P(\ell^{-1}v) = h\overline{P}(v)$$

Luego, $\overline{P}$ es un homomorfismo de representaciones.

Vamos a probar que $\overline{P}$ también define una proyección de V hacia W. Por un lado, dado $v \in W$, tenemos:[2]

$$\overline{P}(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gP(g^{-1}v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gg^{-1}v = \frac{1}{|G|}|G|v = v$$

Luego, $\overline{P}|_W = \mathrm{Id} \Rightarrow W \subseteq \operatorname{Im}\overline{P}$. Veamos la otra contención. Sea $v \in V$. Utilizando que P es un proyector de V hacia W y que W es una subrepresentación de V, obtenemos:

$$\overline{P}(v) = \sum_{g\in G} gP(g^{-1}v) \in W$$

Por tanto, tenemos que $\operatorname{Im}\overline{P} \subseteq W$.

Luego, $\operatorname{Im}\overline{P} = W$. Esto hace que $\overline{P}^2 = \overline{P}$ y prueba que $\overline{P}$ es una proyección de V hacia W. Debido a esto, obtenemos la siguiente descomposición de V:

$$V = \operatorname{Im}\overline{P} \oplus \ker\overline{P} = W \oplus W''$$

Obtenemos que $\operatorname{Im} W = \overline{P}$ y $W'' = \ker\overline{P}$. Por tanto, hemos definido V como suma directa de W y $\ker\overline{P}$ (como espacios vectoriales). Pero como hemos visto antes, el núcleo de un homomorfismo de representaciones es una subrepresentación de V, luego $\ker\overline{P}$ es una subrepresentación de V.

Por lo tanto, $V = W \oplus W''$ como representaciones $\Rightarrow$ Cualquier representación de $k[G]$ es completamente reducible $\Rightarrow$ $k[G]$ es un álgebra semisimple. $\square$

Corolario 2.3.2. *Consideramos un grupo finito G de forma que la característica de k no divide a $|G|$. Entonces, G tiene un número finito de representaciones irreducibles.*

[2] Recordemos que $W \subset V$ es un subespacio invariante, luego $g^{-1}v \in W$ $\forall g \in G$

Demostración:
Por el Teorema de Maschke, se tiene que $|G| = \sum_i \dim(V_i)^2$. Como G es un grupo finito, entonces $|G|$ es un número finito $\Longrightarrow G$ tiene un número finito de representaciones irreducibles salvo isomorfismo. $\square$

Veamos que el recíproco del Teorema de Maschke también se verifica:

Proposición 2.3.3. *Si $k[G]$ es semisimple, entonces la característica de k no divide a $|G|$.*

Demostración:
Consideramos los espacios vectoriales:

- $\mathrm{Hom}_G(k, k[G]) = \{f : k \to k[G] \mid f \text{ es homomorfismo}\}$
- $\mathrm{Hom}_G(k[G], k) = \{g : k[G] \to k \mid g \text{ es homomorfismo}\}$

Como $k[G]$ es semisimple, por el Teorema de Maschke:

$$k[G] = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{End}\, V_i = k \oplus \bigoplus_{i=2}^{r} \mathrm{End}\, V_i = k \oplus \bigoplus_{i=2}^{r} d_i V_i$$

siendo k la representación unidad y $d_i = \dim V_i \ \forall i$. Por tanto:

1. $\mathrm{Hom}_G(k, k[G]) = \mathrm{Hom}_G\left(k, k \oplus \bigoplus_{i=2}^{r} d_i V_i\right) = \mathrm{Hom}_G(k,k) \oplus \left(\bigoplus_{i=2}^{r} d_i \,\mathrm{Hom}_G(k, V_i)\right)$

   Veamos que $\mathrm{Hom}_G(k, V_i) = 0 \ \forall i = 2, ..., r$. Por el Lema de Schur, al ser k y V_i representaciones irreducibles para todo $i = 2, ..., r$, tenemos que $\forall f \in \mathrm{Hom}_G(k, V_i)$, f es un isomorfismo.

   Por tanto, $V_i \cong k$ y esto hace que $f = 0 \ \forall f \in \mathrm{Hom}_G(k, V_i)$. Luego $\mathrm{Hom}_G(k, V_i) = 0 \ \forall i = 2, ..., r \Rightarrow \mathrm{Hom}_G(k, k[G]) \cong \mathrm{Hom}_G(k, k)$.

   Como $\dim(\mathrm{Hom}_G(k,k)) = 1$, basta considerar un homomorfismo para obtener una base de $\mathrm{Hom}_G(k, k[G]) \Rightarrow \mathrm{Hom}_G(k, k[G]) = k\Lambda$.

   Consideramos la aplicación:

$$\begin{aligned} \Lambda : k &\longrightarrow k[G] \\ 1 &\longmapsto \sum_{g \in G} g \end{aligned}$$

Veamos que Λ es un homomorfismo de representaciones. En primer lugar, es trivial ver que $\Lambda \neq 0$.

Por otro lado, hay que probar que $\Lambda(h1) = h\Lambda(1)$ $\forall h \in G$. Tenemos:

$$\Lambda(h1) = \sum_{g\in G} hg = \sum_{g\in G} g$$

$$h\Lambda(1) = h\sum_{g\in G} g = \sum_{g\in G} hg = \sum_{g\in G} g$$

Luego Λ es un homomorfismo de representaciones con $\Lambda \neq 0$.

2. $\operatorname{Hom}_G(k\left[G\right], k) = \operatorname{Hom}_G(k \oplus \bigoplus_{i=2}^{r} d_i V_i, k) = \operatorname{Hom}_G(k, k) \oplus \bigoplus_{i=2}^{r} d_i \operatorname{Hom}_G(V_i, k)$

   De nuevo, aplicando el Lema de Schur, al obtener $\varepsilon \in \operatorname{Hom}_G(k\left[G\right], k)$, tendremos una base de dicha representación. Por tanto:

$$\operatorname{Hom}_G(k\left[G\right], k) = k\varepsilon$$

   con $\varepsilon \neq 0$.

   Consideramos la aplicación:

$$\begin{aligned} \varepsilon : k\left[G\right] &\longrightarrow k \\ \sum_{g\in G} \lambda_g g &\longmapsto \sum \lambda_g \end{aligned}$$

   Por tanto, $\varepsilon(g) = 1_k$ $\forall g \in G$. Veamos que $\varepsilon \in \operatorname{Hom}_G(k\left[G\right], k)$. Tenemos que $\varepsilon \neq 0$. Hay que probar que $\varepsilon(\lambda\sigma) = \lambda\varepsilon(\sigma)$ $\forall \sigma \in k\left[G\right]$ y $\forall \lambda \in k$.

   Como $\sigma \in k\left[G\right] \Rightarrow \exists \lambda_g \in k$ tal que $\sigma = \sum_{g\in G} \lambda_g g$. Veamos que se cumple la propiedad:

$$\begin{cases} \varepsilon(\lambda\sigma) = \varepsilon(\lambda \sum_{g\in G} \lambda_g g) = \varepsilon(\sum_{g\in G} \lambda\lambda_g g) = \sum \lambda\lambda_g \\ \\ \lambda\varepsilon(\sigma) = \lambda\varepsilon(\sum_{g\in G} \lambda_g g) = \lambda \sum \lambda_g = \sum \lambda\lambda_g \end{cases}$$

   Por tanto, ε homomorfismo de representaciones de forma que $\varepsilon \neq 0$.

Entonces, dadas estas condiciones:

$$\varepsilon \circ \Lambda(1_k) = \varepsilon\left(\sum_{g\in G} g\right) = \underbrace{1_k + 1_k + ... + 1_k}_{|G|} = |G| \cdot 1_k$$

Se tiene por tanto que la característica de k divide a $|G| \iff |G| \cdot 1_k = 0$.

Por un lado tenemos que k es sumando directo de $k\left[G\right]$, por tanto podemos considerar la aplicación inclusión $i : k \hookrightarrow k\left[G\right]$ el cual posee una inversa a derecha $\pi : k\left[G\right] \longrightarrow k$ ($\pi \neq 0$) siendo π un homomorfismo de representaciones de forma que $\pi \circ i = \mathrm{Id}_k$.

Como $\dim(\mathrm{Hom}_G(k, k\left[G\right)) = 1$, $\Rightarrow i = a\Lambda$ con $a \in k \setminus \{0\}$. Aplicando el mismo razonamiento, como $\dim(\mathrm{Hom}_G(k\left[G\right], k)) = 1$, entonces tenemos que $\pi = b\varepsilon$ con $b \in k \setminus \{0\}$. Dadas estas condiciones, obtenemos:

$$\mathrm{Id}_k = \pi \circ i = (a\pi) \circ (a^{-1}i) = (a\pi) \circ \Lambda$$

Por tanto, Λ es invertible a izquierda. Por otro lado, tenemos que $(\varepsilon \circ \Lambda)(1_k) = (b^{-1}\pi) \circ (a^{-1}i)(1_k) = a^{-1}b^{-1}\,\mathrm{Id}_k$.

Que entra en contradicción con el hecho de que la característica de k divida a $|G|$, ya que tanto a y b son no nulos. Por tanto, se tiene que la característica de k no divide a $|G|$. $\square$

Veamos que ocurre en el caso en el que consideremos un cuerpo k cuya característica divida al $|G|$.

Teorema 2.3.4. *Sea p un número primo, y consideramos un cuerpo K con característica p y sea G un grupo de orden potencia de p. Entonces, todo $K\left[G\right]$-módulo no nulo contiene a un submódulo no nulo trivial (es decir, tal que G deja invariantes a todos sus elementos). Por consiguiente, todo $K\left[G\right]$-módulo irreducible es isomorfo a K con la estructura de $K\left[G\right]$-módulo trivial.*

Demostración:

Antes de comenzar la prueba, definimos el concepto de órbita de un elemento $x \in X$. Consideramos una acción de G sobre un conjunto X. Entonces se define la siguiente relación de equivalencia:

$$x \sim y \text{ si y sólo si existe un } \sigma \text{ tal que } \sigma x = y$$

Entonces llamaremos a la órbita de $x \in X$ como a la clase de equivalencia dada por esta relación.

Consideramos un $K[G]$-módulo no nulo V y sea por ejemplo $k = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p \subseteq K$.

Podemos considerar V como k-espacio vectorial (tal vez de dimensión infinita). Sea $v_0 \in V$ no nulo y definimos el k-espacio vectorial V_0 (de dimensión finita) generado por $\{\sigma v_0 \mid \sigma \in G\}$.

Como V_0 se descompone en suma directa de copias de k, tenemos que su cardinal es potencia de p. Por otra parte, tenemos que si $v \in V_0$ se tiene que $\exists \sigma' \in G$ tal que $v = \sigma' v_0$. Por tanto se verifica que $\sigma v \in V_0$, para algún $\sigma \in G$. Esto determina una acción de G sobre V_0, respecto a la cual, la órbita de 0 se reduce a $\{0\}$. No será la única órbita con un solo elemento, ya que como las orbitas de un elemento v dividen al cardinal de V_0, al ser p primo, dichas órbitas o bien tienen cardinal uno o potencia de p. Luego deberían de existir $p-1$ elementos $v_i \in V_0$ tales que $\sigma v_i = v_i$ $\forall i = 1...p-1$, es decir, $p-1$ elementos $v_i \in V_0$ tales que sus órbitas se reduzcan a $\{v_i\}$.

Por lo tanto, el K-espacio vectorial W generado por v es un $K[G]$-submódulo trivial de V . Si V es irreducible, entonces ha de ser $V = W$.□

Ejemplo: Sea $G = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$ y k un cuerpo de característica p. Entonces, aplicando el teorema anterior y la similitud entre $k[G]$-módulos a izquierda y representaciones sobre G, obtenemos que cualquier representación irreducible de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$ es la representación trivial.

2.4 Ejemplos de representaciones

Representación dual

Sean V y W representaciones de G. Veamos que el espacio dual de una representación de G es también una representación.

Consideramos el espacio de las aplicaciones lineales $\mathrm{Hom}_k(V,W)$. Recordemos que dicho espacio viene dado por una representación de G bajo la acción (2.2).

Definición 2.7. *Dadas estas condiciones, si $W = k$ es la representación unidad, entonces la **representación dual** de V viene dada por $V^* = \mathrm{Hom}_k(V,k)$, verificando:*

$$(g\vartheta)(v) := \vartheta(g^{-1}v), \quad \vartheta \in V^*, v \in V, g \in G. \tag{2.4}$$

Producto tensorial de representaciones

Definición 2.8. *Sean V y W dos representaciones de G sobre k. Entonces el producto tensorial $V \bigotimes_k W$ es una representación de G de la siguiente forma:*

$$g(v \otimes w) = (gv) \otimes (gw) \quad \forall g \in G, \forall v \in V y \, \forall w \in W \tag{2.5}$$

Veamos una serie de resultados relacionados con el producto tensorial de representaciones irreducibles.

Teorema 2.4.1. *Sean G, H grupos finitos, $\{V_i\}_{i \in I}$ las representaciones irreducibles de G sobre el cuerpo k (con cualquier característica) y $\{W_j\}_{j \in J}$ las representaciones irreducibles de H sobre k. Entonces las representaciones irreducibles de $G \times H$ sobre k son $\{V_i \otimes W_j\}_{i \in I, j \in J}$*

Demostración:
La prueba es un caso particular del Teorema 1.2.3 □

Representaciones unitarias

Definición 2.9. *Una* ***representación unitaria*** *de dimensión finita de un grupo G es una representación de G en un espacio vectorial de dimensión finita V sobre $\mathbb{C}$ equipado con una forma Hermitiana[3] definida positiva G-invarinte $\langle \ , \ \rangle$, i.e., $\rho_V(g)$ son operadores unitarios: $\langle \rho_V(g)v, \rho_V(g)w \rangle = \langle gv, gw \rangle = \langle v, w \rangle$.*

Teorema 2.4.2. *Si G es finito, entonces cualquier representación de dimensión finita de G sobre $\mathbb{C}$ tiene una estructura unitaria. Además, si la representación es irreducible, dicha estructura es única salvo multiplicación por un escalar positivo.*

Demostración:
Sea V una representación de G sobre $\mathbb{C}$ (no necesariamente irreducible) y consideramos cualquier forma bilineal Hermitiana definida positiva B en V y definimos otra forma $\overline{B}$:

$$\overline{B}(v, w) = \sum_{g \in G} B(gv, gw)$$

[3]Tenemos que las formas Hermitianas son lineales en el primer argumento y sesquilineales en el segundo

Por las propiedades que verifica B, al ser una forma bilineal Hermitiana definida positiva y por la propia construcción de $\overline{B}$, se tiene que $\overline{B}$ también lo es.

Por otro lado, es fácil ver que $\overline{B}$ es un operador G-invariante. Sea $\overline{g} \in G$. Tenemos:

$$\overline{B}(\overline{g}v, \overline{g}w) = \sum_{g \in G} B(\rho_V(g)\overline{g}v, \rho_V(g)\overline{g}w) = \sum_{g \in G} B(\rho_V(g)\rho_V(\overline{g})v, \rho_V(g)\rho_V(\overline{g})w) =$$

$$= \sum_{g \in G} B(\rho_V(g\overline{g})v, \rho_V(g\overline{g})w) = \sum_{g\overline{g}=h \in G} B(\rho_V(h)v, \rho_V(h)w) = \overline{B}(v, w)$$

Por tanto, hemos encontrado una forma Hermitiana definida postiva G-invariante de V sobre $\mathbb{C}$. Por tanto, V posee una estructura unitaria.

Además, si V es una representación irreducible y B_1, B_2 son dos formas Hermitianas definida positiva en V, entonces $B_1(v, w) = B_2(Av, w)$ para algún homomorfismo de representaciones $A : V \to V$ (ya que cualquier forma bilineal Hermitiana definidas positivas es no degenerada). Como se trata de un homomorfismo de representaciones irreducibles, por el corolario del Lema de Schur, $A = \lambda \mathrm{Id}$, y claramente $\lambda > 0$. Por tanto, B_1 y B_2 constituyen la misma forma Hermitiana bilineal definida positiva salvo escalar.

Luego, si V, es una representación irreducible, entonces dicha estructura es única (salvo escalar estrictamente positivo). □

<u>**Observación**</u>: El teorema anterior implica que si V es una representación de un grupo finito G, entonces la ***representación conjugada compleja*** $\overline{V}$ (i.e., el mismo espacio V con las mismas propiedades para la suma como espacio vectorial pero con acción conjugada para escalares) es isomorfo a la representación dual V^*

Teorema 2.4.3. *Una representación compleja de dimensión finita V de cualquier grupo G es completamente reducible.*

Demostración:
Sea W una subrepresentación de V. Sea $W^\perp$ el complemento ortogonal de W en V bajo el producto interno Hermitiano. Entonces $W^\perp$ es una subrepresentación de W, y $V = W \oplus W^\perp$.
Esto implica que V es completamente reducible. □

Representaciones virtuales

Definición 2.10. *Una* ***representación virtual*** *de un grupo finito G es una combinación lineal formal de representaciones irreducibles de G, $V = \sum n_i V_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$ (i.e., n_i pueden ser negativos).*

Representaciones inducidas

Consideramos una representación V de un grupo G y un subgrupo $H \subset G$.

Definición 2.11. *La* ***restricción*** *de V a H, $\mathrm{Res}_H^G V$ es la representación dada por el espacio vectorial V, y la acción $\rho_{\mathrm{Res}_H^G V} = \rho_{V|H}$.*

Ahora vamos a construir una representación de G a partir de una representación de $H \subset G$.

Definición 2.12. *Si G es un grupo, $H \subset G$, y V es una representación de H, entonces la* ***representación inducida*** *$\mathrm{Ind}_H^G V$ es una representación de G con:*

$$\mathrm{Ind}_H^G V = \{f : G \to V \mid f(hx) = \rho_V(h)f(x) = hf(x) \ \ \forall x \in G, h \in H\}$$

y la acción $(gf)(x) = f(xg) \quad \forall f \in \mathrm{Ind}_H^G V$ y $\forall x, g \in G$.

Por definición, tenemos que $\mathrm{Ind}_H^G V$ es un espacio vectorial al ser una representación de G. Por tanto, dicho espacio debe de verificar una serie de propiedades con respecto a la suma y el producto.

Nota :Veamos que $\mathrm{Ind}_H^G V$ está bien definido como un representación.

Tenemos:

$$g(f)(hx) = f(hxg) = \rho_V(h)f(xg) = \rho_V(h)g(f)(x)$$

y

$$g(g'(f))(x) = g'(f)(xg) = f(xgg') = (gg')(f)(x)$$

$\forall g, g', x \in G$ *y* $h \in H$

Proposición 2.4.4. $\mathrm{Ind}_H^G V$ *es isomorfo a la representación* $\mathrm{Hom}_H(k[G], V)$.

Demostración:
Consideramos la aplicación:

$$\begin{aligned} E : \mathrm{Ind}_H^G V &\longrightarrow \mathrm{Hom}_H(k[G], V) \\ f \quad &\longmapsto s \end{aligned}$$

siendo s la aplicación:

$$\begin{aligned} s : k[G] &\longrightarrow V \\ \sigma = \sum_{g\in G} \lambda_g g &\longmapsto \sum_{g\in G} \lambda_g f(g) \end{aligned}$$

con $\lambda_g \in k$.

Veamos que E se trata de un isomorfismo de representaciones.

En primer lugar, consideramos $f \in \mathrm{Ind}_H^G V$. Queremos ver que la imagen de f mediante la aplicación E está en $\mathrm{Hom}_H(k[G], V)$.

Sea $\sigma = \sum_{g\in G} \lambda_g g \in k[G]$. Tenemos:

$$E(f)(\sigma) = s(\sigma) = \sum_{g\in G} \lambda_g f(g) \in V$$

Por tanto, tenemos que ver si $s \in \mathrm{Hom}_H(k[G], V)$. Sean $\sigma \in k[G]$ y $\tau \in k[H]$. Quiero ver si $s(\tau\sigma) = \tau s(\sigma)$.

$$s(\tau\sigma) = s(\sum_{h\in H} \lambda_h h \sum_{g\in G} \lambda_g g) = s(\sum \lambda_h \lambda_g hg) = \sum \lambda_h \lambda_g f(hg) =$$

$$= \sum \lambda_h \lambda_g h f(g) = \sum \lambda_h h \sum_{g\in G} \lambda_g f(g) = \tau s(\sigma)$$

Por tanto, $s \in \mathrm{Hom}_H(k[G], V)$. Por tanto, hemos visto que para todo $f \in \mathrm{Ind}_H^G V$, $E(f) \in \mathrm{Hom}_H(k[G], V)$. Luego, E está bien definida.

Veamos que E es un homomorfismo. Dado $h \in G$, basta probar que $E(hf) = hE(f)$ $\forall f \in \mathrm{Ind}_H^G V$. Sea $\sigma \in k[G]$. Por un lado, tenemos:

$$E(hf)(\sigma) = E(hf)\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right) = \sum_{g\in G} \lambda_g hf(g) = \sum_{g\in G} \lambda_g f(hg)$$

Por otro lado:

$$hE(f)(\sigma) = hE(f)\left(\sum_{g\in G}\lambda_g g\right) = h\sum_{g\in G}\lambda_g f(g) = \sum_{g\in G}\lambda_g hf(g) = \sum_{g\in G}\lambda_g f(hg)$$

Por tanto, como $E(hf)(\sigma) = hE(f)(\sigma)\ \forall\sigma \in k\,[G]$, entonces $E(hf) = hE(f) \Rightarrow E$ es un homomorfismo en G.

Por último, falta probar que E es una aplicación biyectiva. Para ello consideramos la aplicación:

$$\begin{aligned} E' : \mathrm{Hom}_H(k\,[G]\,, V) &\longrightarrow \mathrm{Ind}_H^G V \\ i &\longmapsto t \end{aligned}$$

siendo t la aplicación:

$$\begin{aligned} t : G &\longrightarrow V \\ g &\longmapsto i(g) \end{aligned}$$

Tengo que ver que E' es la aplicación inversa de E. Con ello tendré probado la biyectividad.

En primer lugar, veamos que $E \circ E' = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_H(k[G],V)}$. Sean $i \in \mathrm{Hom}_H(k\,[G]\,, V)$ y $g \in G$.

Entonces:

$$E \circ E'(i)(g) = E(E'(i)(g)) = E(t(g)) = E(i(g)) = s(g) = i(g)$$

Por tanto, $E \circ E'(i)(g) = i(g)\ \forall i \in \mathrm{Hom}_H(k\,[G]\,, V)$ y $\forall g \in G \Rightarrow E \circ E' = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_H(k[G],V)}$

Finalmente, vamos a probar que $E' \circ E = \mathrm{Id}_{\mathrm{Ind}_H^G V}$. Sean $f \in \mathrm{Ind}_H^G V$ y $\sigma \in k\,[G]$.

Entonces tenemos:

$$E' \circ E(f)(\sigma) = E'(E(f)(\sigma)) = E'(s(\sigma)) = E'\left(s\left(\sum_{g\in G}\lambda_g g\right)\right) =$$

$$= E'\left(\sum_{g\in G}\lambda_g f(g)\right) = E'\left((f)\left(\sum_{g\in G}\lambda_g g\right)\right) = f\left(\sum_{g\in G}\lambda_g g\right) = f(\sigma)$$

Por tanto, $E' \circ E(f)(\sigma) = f(\sigma)$ $\forall f \in \mathrm{Ind}_H^G V$ y $\forall \sigma \in k[G] \Rightarrow E' \circ E = \mathrm{Id}_{\mathrm{Ind}_H^G V}$

Luego, obtenemos que la aplicación E es un isomorfismo de representaciones.$\square$

<u>**Observación**</u>: Tenemos que si elegimos un representante x_σ de cada clase a derecha H de G, entonces cualquier $f \in \mathrm{Ind}_H^G V$ está únicamente determinado por $\{f(x_\sigma)\}$.
Por esta razón, tenemos:

$$\dim(\mathrm{Ind}_H^G V) = \dim V \cdot \frac{|G|}{|H|}.$$

2.5 Algunos tipos de representaciones

Definición 2.13. *Sea G un grupo finito y V una representación irreducible de G sobre $\mathbb{C}$.*
Entonces V es de tipo:

- ***Complejo*** *si $V \ncong V^*$ (como representaciones)*
- ***Real*** *si V tiene una forma no degenearada simétrica invariante bajo G (i.e. $\exists\, h : V \times V \to \mathbb{C}$ tal que : si $h(v,w) = 0\, \forall w \in V \Rightarrow v = 0$ y $h(v,w) = h(w,v)\, \forall v, w \in V$) .*
- ***Quaterniónico*** *si V tiene una forma no degenerada antisimétrica invariante bajo G (i.e. $\exists\, h : V \times V \to \mathbb{C}$ tal que : si $h(v,w) = 0\, \forall w \in V \Rightarrow v = 0$ y $h(v,w) = -h(w,v)\, \forall v, w \in V$)*

Más adelante, analizaremos los tipos de representaciones irreducibles de algunos grupos finitos.

2.6 Ejemplo de S_3

1. Sea $G = S_3$ grupo simétrico. Veamos todas las representaciones irreducibles de S_3.
   - En primer lugar, es trivial ver que la *representación unidad*:
     $$\begin{aligned} \rho : S_3 &\longrightarrow \mathbb{C}^* = \mathrm{GL}(\mathbb{C}^*) \\ g &\longmapsto 1 \end{aligned}$$
     es una representación irreducible de dimensión 1.
   - Por otra parte, tenemos la *representación signo*:

$$\begin{aligned} \rho : S_3 &\longrightarrow \{1,-1\} \subset \mathbb{C}^* = \mathrm{GL}(\mathbb{C}^*) \\ g &\longmapsto \rho(g) = \mathrm{signo}(g) \end{aligned}$$

- Finalmente, veamos que el espacio vectorial:

$$V = \left\{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}^3 \mid v_1 + v_2 + v_3 = 0\right\}$$

y el homomorfismo $\rho : S_3 \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ dado por:

$$\rho(g)(v_1, v_2, v_3) = (v_{g^{-1}(1)}, v_{g^{-1}(2)}, v_{g^{-1}(3)})$$

forma una representación irreducible de S_3.
Lo demostramos restringuiendo ρ a dos subgrupos de S_3. Sean $\tau = (123)$, y $H = \langle\tau\rangle \subset S_3$. Llamaremos $T = \rho(\tau)$.
Por tanto, tenemos:

$$\begin{aligned} T : \quad V \quad &\longrightarrow \quad V \\ (v_1, v_2, v_3) &\longmapsto T(v_1, v_2, v_3) = \\ &\quad = \rho(\tau)(v_1, v_2, v_3) = (v_3, v_1, v_2) \end{aligned}$$

Como $\mathrm{ord}(\tau) = 3 \Longrightarrow T^3 = \rho^3(\tau) = \mathrm{Id}_V \Longrightarrow T$ diagonalizable y el conjunto de autovalores de T son las raíces terceras de la unidad: $\left\{w, w^2, w^3 = 1\right\}$, con $w^i = e^{2\pi i/3} \quad \forall i = 1, 2$.

Entonces consideramos la suma directa $V = V_1 \oplus V_w \oplus V_{w^2}$. Veamos que $V_{w^i} = \ker(w^i\mathrm{Id} - T)$.

Sea $v \in V_{w^i} \iff T(v) = w^i v \iff w^i v - T(v) = 0 \iff w^i v - \rho(\tau)v = 0 \iff (w^i\mathrm{Id} - \rho(\tau))v = 0 \iff v \in \mathrm{Ker}(w^i\mathrm{Id} - T)$.
Luego, $V_{w^i} = \ker(w^i\mathrm{Id} - T)$.

Se comprueba fácilmente, si $T(v) = v$, entonces $v = 0$.

Sea $(v_1, v_2, v_3) \in V \mid T(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2, v_3)$.

Por tanto tenemos: $(v_1.v_2, v_3) = T(v_1, v_2, v_3) = \rho(\tau)(v_1, v_2, v_3) = (v_3, v_1, v_2)$. Luego, $v_1 = v_3, v_2 = v_1$ y $v_3 = v_2$.
Como $(v_1, v_2, v_3) \in V \Longrightarrow v_1 + v_2 + v_3 = 0 \Longrightarrow (v_1, v_2, v_3) = (0, 0, 0)$.

Sin embargo, $v_{w^2} := (1, w, w^2)$ es un autovector para el autovalor w^2:
$T(v_{w^2}) = T(1, w, w^2) = \rho(\tau)(1, w, w^2) = (w^2, 1, w)$
$w^2(1, w, w^2) = (w^2, 1, w)$

Además, $\langle v_{w^2}\rangle \subset V$ es estable para T.

Sea ahora $\sigma = (12)$. Sabemos que $\tau\sigma = \sigma\tau^2$, luego debe verificarse que:

$$T(\sigma v) = \tau(\sigma v) = (\tau\sigma)v = (\sigma\tau^2)v) = \sigma(\tau^2 v) =$$
$$= \sigma T^2(v) = \sigma((w^2)^2 v) = \sigma(wv) = w(\sigma v) \quad \forall v \in V_{w^2}$$

Por tanto, σv es autovector del autovalor $w \Rightarrow \sigma v \in V_w \;\; \forall v \in V_{w^2}$.

De manera análoga, se prueba que $\sigma V_w \subset V_{w^2}$, y por tanto $\sigma V_{w^2} = V_w$ y $V_w, V_{w^2} \neq 0$.

Como hemos visto antes, $V_1 = 0$, luego $V = V_w \oplus V_{w^2}$. Como V es de dimensión 2, cada uno de los sumandos es de dimensión 1. Ahora bien, esta suma directa no es una suma directa de subrepresentaciones, puesto que $\sigma V_{w^2} \subset V_w$. Como V_w y V_{w^2} son los únicos subespacios propios estables por la acción de σ (o de T), deducimos que V no tiene subrepresentaciones triviales y por tanto V es irreducible. Además, como V es de dimensión 2, no es isomorfa ni a la *representación unidad* ni a la *representación signo*.

Hemos encontrado tres representaciones irreducibles en S_3. Además, por (2.3), tenemos:

$$|S_3| = \sum_{i\in I} \dim(V_i)^2$$

donde V_i son las representaciones irreducibles de S_3

Como $6 = |S_3| = 2^2 + 1^2 + 1^2 = \sum_{i\in I} \dim(V_i)^2 \Longrightarrow$ No existen más representaciones irreducibles en S_3.
Por tanto, se obtienen tres representaciones irreducibles, $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2$ y $\mathbb{C}^2$. Dichas representaciones se tienen que son de tipo real.

Capítulo 3

Teoría de caracteres

En este capítulo nos centramos con más profundidad en el estudio de todas las representaciones irreducibles de cualquier grupo finito G.

3.1 Caracteres

Definición 3.1. *Sea V una representación de dimensión finita de un grupo finito G. Entonces se define el* ***carácter*** *de V como la aplicación:*

$$\begin{aligned} \chi_V : G &\longrightarrow k \\ g &\longmapsto \mathrm{Tr}_V(\rho(g)) \end{aligned}$$

Además, la imagen del carácter de una representación V constituye una serie de **funciones de clases**, de forma que dos elementos de G pertenecen a la misma clase si se encuentran en la misma clase de conjugación. Por lo tanto, $\chi_V(g)$ sólo depende de la clase de conjugación de g; i.e., $\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g)$.

De esta forma, denotaremos $F(G,k)$ como el espacio de funciones de G a k y $F_c(G,k) \subset F(G,k)$ el subespacio de funciones de clases.

Teorema 3.1.1. *Si la característica de k no divide a $|G|$, entonces los caracteres de las representaciones irreducibles de G forman una base en el subespacio $F_c(G,k)$.*

Demostración:
Como la característica de k no divide a $|G|$, por el Teorema de Maschke, se tiene que $k[G]$ es semisimple, luego por el Teorema 1.3.1, los caracteres son linealmente independientes y son bases de $(A/[A,A])^*$, donde $A = k[G]$. Basta señalar que, como espacio vectorial sobre k,

$$(A/[A,A])^* \cong \{\varphi \in \mathrm{Hom}_k(k[G],k) \mid gh - hg \in \ker\varphi \ \ \forall g,h \in G\}$$

$$\cong \{f \in F(G,k) \mid f(gh) = f(hg) \ \forall g,h \in G\}$$

que es precisamente $F_c(G,k)$. $\square$

Corolario 3.1.2. *Si la característica de k no divide a $|G|$, el número de clases de isomorfismo de representaciones irreducibles de G es igual al número de clases de conjugación de G (si $|G| \neq 0$).*

Luego, el problema de encontrar el número de representaciones irreducibles de un grupo finito G se reduce a calcular el número de clases de conjugaciones de dicho grupo.

Corolario 3.1.3. *Cualquier representación de G está determinada por su carácter si k tiene característica 0 (es decir, $\chi_V = \chi_W$ implica $V \cong W$)*

Teorema 3.1.4. *Sea $k = \mathbb{C}$. Entonces G es un grupo finito abeliano sí y sólo sí todas las representaciones irreducibles de G son de dimensión 1.*

Demostración:
G abeliano $\Leftrightarrow$ dado $g \in G$ cualquiera: $g = gx^{-1}x = x^{-1}gx \ \forall x \in G \Leftrightarrow [g] = g \ \forall g \in G \Leftrightarrow$ el número de clases de conjugaciones de G es igual a $|G|$ $\Leftrightarrow |G| = \sum_{i=1}^{|G|} \dim(V_i)^2 \Leftrightarrow \dim(V_i) = 1 \ \forall i = 1, ..., |G|$. $\square$

Ejemplos:

1. Consideramos los grupos abelianos de la forma: $G = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}n_1 \times \cdots \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}n_k$. Buscamos las representaciones irreducibles de G sobre $\mathbb{C}$. En primer lugar, sea $G^\vee$ la colección de todas las representaciones irreducibles de G.

   Por el Teorema 3.1.4, tenemos que cada elemento de G forma una clase de conjugación, luego $|G^\vee| = |G|$ y esto implica que dichas representaciones sean de dimensión 1 (ya que $\mathbb{C}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado). Por consiguiente, $G^\vee$ es un grupo abeliano: si $\rho_1, \rho_2 : G \to \mathbb{C}^*$ son representaciones irreducibles, entonces están las representaciones $\rho_1(g)\rho_2(g)$ y $\rho_1(g)^{-1}$. El grupo $G^\vee$ es llamado **grupo dual** o **grupo carácter** de G.

   Para $n \geq 1$, definimos $\rho : \mathbb{Z}/\mathbb{Z}n \to \mathbb{C}^*$ tal que $\rho(m) = e^{2\pi i m/n}$. Entonces $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n^\vee = \{\rho^k : k = 0, ..., n-1\}$, así tenemos que $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n^\vee \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}n$. En general,

   $$(G_1 \times G_2 \times \cdots G_n)^\vee = G_1^\vee \times G_2^\vee \times \cdots \times G_n^\vee,$$

luego, $G^\vee \cong G$ para cualquier grupo abeliano G. Sin embargo, este isomorfismo es no canónico. La descomposición particular de G como $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n_1 \times \cdots \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}n_k$ no es única.

2. Consideramos el grupo simétrico S_3. En el capítulo anterior calculamos todas sus representaciones irreducibles. Ahora las calcularemos aplicando teoría de caracteres.
En primer lugar calculamos las clases de conjugación de S_3:

$$S_3 = \{\mathrm{Id}, (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

La clase de conjugación de un elemento $g \in S_3$ viene dada por el conjunto $[g] = \left\{xgx^{-1}, x \in S_3\right\}$. Desarrollando los cálculos llegamos a que $[(12)] = [(13)] = [(23)]$ y $[(123)] = [(132)] \Rightarrow S_3$ tiene tres clases de conjugación $\Rightarrow S_3$ tiene tres representaciones irreducibles. Por el Teorema de Maschke, $6 = |S_3| = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$, donde $d_i = \dim(v_i)\ \ \forall i = 1, 2, 3$. Por tanto, tenemos dos representaciones irreducibles de dimensión 1 y una de dimensión 2. Las representaciones unidimensaionales vienen dadas por la *representación unidad* $\mathbb{C}_1$ y la *representación signo* $\mathbb{C}_2$, mientras que la representación de dimensión 2 es la representación calculada en el capítulo anterior $\mathbb{C}^2$.

3.2 Caracteres de algunas representaciones

En el capítulo anterior, destacamos algunas representaciones importantes. En esta sección definiremos los caracteres de dichas representaciones.

3.2.1 Carácter de la representación dual y del producto tensorial de representaciones

- **Carácter de la representación dual**: Consideramos una representación V de G. Recordemos que V^* también es una representación de G. Entonces, el carácter de la representación dual viene dada por la aplicación $\chi_{V^*} : G \to k$ tal que $\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1})$. Veámoslo con más detalle:

  Tenemos que $\chi_V(g) = \sum \lambda_i$, donde λ_i son los autovalores de g en V. Además, estos autovalores deben ser las raíces de la unidad ya que $\rho(g)^{|G|} = \rho(g^{|G|}) = \rho(e) = \mathrm{Id}$. Por tanto, para representaciones complejas:

$$\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1}) = \sum \lambda_i^{-1} = \sum \overline{\lambda_i} = \overline{\sum \lambda_i} = \overline{\chi_V(g)} \qquad (3.1)$$

En particular, $V \cong V^*$ como representaciones si y sólo si $\chi_V(g) \in \mathbb{R}\ \forall g \in G$

- **Caracteres de suma directa y producto tensorial de representaciones** : Sean V y W dos representaciones de G. Tenemos que los autovalores de g en $V \oplus W$ vienen dados por $\{\lambda_i + \mu_j\} \Rightarrow \chi_{V\oplus W}(g) = \sum(\lambda_i + \mu_j) = \sum \lambda_i + \sum \mu_j = \chi_V(g) + \chi_W(g)\ \ \forall g \in G$. Por tanto:

$$\chi_{V\oplus W}(g) = \chi_V(g) + \chi_W(g)\ \ \forall g \in G. \tag{3.2}$$

Por su parte, los autovalores de g en $V \otimes W$ son $\{\lambda_i \cdot \mu_j\} \Rightarrow \chi_{V\otimes W}(g) = \sum(\lambda_i \cdot \mu_j) = \chi_V(g) \cdot \chi_W(g)$. Luego:

$$\chi_{V\otimes W}(g) = \chi_V(g) \cdot \chi_W(g)\ \ \forall g \in G \tag{3.3}$$

3.2.2 Carácter de las representaciones virtuales e inducidas

- **Carácter de las representaciones virtuales** : Sea V una representación virtual de $G \Rightarrow V = \sum n_i V_i,\ n_i \in \mathbb{Z}$. Entonces, el cáracter de V se define como $\chi_V(g) = \sum n_i \chi_{V_i}(g)\ \ \forall g \in G$

- **Carácter de las representaciones inducidas**: Sea V una representación de H, siendo $H \subset G$. Consideramos la representación inducida $\mathrm{Ind}_H^G V$. Veamos su carácter:

Teorema 3.2.1. *Para cada clase a derechas $H\backslash G = \{Hg \mid g \in G\}$ (de forma que $g \sim g' \Leftrightarrow g'g^{-1} \in H$) elegimos un representante x_σ.*
Entonces se tiene:

$$\chi(g) = \sum_{\sigma \in H\backslash G\, :\, x_\sigma g x_\sigma^{-1} \in\, H} \chi_V(x_\sigma g x_\sigma^{-1}) \tag{3.4}$$

Esta fórmula se denomina fórmula de Frobenius.

Demostración:
Para una clase a derecha σ, definimos:

$$V_\sigma = \left\{f \in \mathrm{Ind}_H^G V\ \mid\ f(g) = 0\ \ \forall g \notin \sigma\right\} \cong$$

$$\cong \{f : \sigma \longrightarrow V \mid f(hg) = hf(g)\ \forall h \in H, \forall g \in \sigma\}$$

Es decir, podemos interpretar este espacio como el conjunto de aplicaciones de $\mathrm{Ind}_H^G V$ restringuidas a cualquier $\sigma \in H\backslash G$. Entonces tenemos:

$$\mathrm{Ind}_H^G V = \bigoplus_{\sigma} V_\sigma$$

y

$$\chi(g) = \sum_{\sigma} \chi_\sigma(g)$$

donde $\chi_\sigma(g)$ es la traza de la diagonal de $\rho(g)$ correspondiente a V_σ.

Veamos el valor de $\chi_\sigma(g)$ $\forall \sigma \in H\backslash G$. Para ello, enumeramos el conjunto de clases a derechas de $H\backslash G$:

$$H\backslash G = \{\sigma_1, ..., \sigma_r\}$$

Una vez etiquetado cada una de las clases, podemos definir una base a V_{σ_i} : $\{f_{ij} \mid j = 1, ..., s_i\}$ $\forall i = 1, ..., r$. Esto nos define una base en $\mathrm{Ind}_H^G V$, que viene definida por la unión de todas estas bases.

Dadas estas condiciones, existe una matriz que define a $\rho(g)$ mediante esta base, que llamaremos $\mathcal{M}(\rho(g), \mathfrak{B}) = A = (a_{ij,k\ell})$. Dado $g \in G$, consideramos los siguientes casos:

1. Consideramos una clase $\sigma_i \in H\backslash G$ tal que $\sigma_i g \neq \sigma_i$. Veamos que $\chi_{\sigma_i}(g) = 0$.

   Tenemos que $\chi_{\sigma_i}(g) = \mathrm{Tr}(A) = \sum_{ij} a_{ij,ij}$. Por otra parte, dado un j fijo, utilizando que $\sigma_i g \neq \sigma_i$ y que $f \in \mathrm{Ind}_H^G V$, tenemos:

   $$\sum_{k\ell} a_{ij,k\ell} f_{k\ell}(x) = \rho(g)(f_{ij})(x) = f_{ij}(xg) = 0 \tag{3.5}$$

   $\forall x \in \sigma_i$ [1].

   Por otro lado, como $x \in \sigma_i$, tenemos que $f_{k\ell}(x) = 0$ $\forall k \neq i$. Por tanto, $\sum_{k\ell} a_{ij,k\ell} f_{k\ell}(x) = \sum_{i\ell} a_{ij,i\ell} f_{i\ell}(x)$. Atendiendo a (3.5), tenemos que $\sum_{i\ell} a_{ij,i\ell} f_{i\ell}(x) = 0$. Al ser $\{f_{i\ell}\}$ una base de V_{σ_i}, en particular tenemos que es un conjunto linealmente independiente. Por tanto, esto implica que $a_{ij,i\ell} = 0$ $\forall \ell = 1, .., s_i$. Luego, obtenemos que $\chi_{\sigma_i}(g) = 0$.

[1] En particular vale para cualquier $x \in \sigma_i$, ya que al ser las clases de conjugaciones disjuntas, tenemos que $\sigma_i g \cap \sigma = \emptyset$.

2. Ahora asumimos que $\sigma_i = \sigma_i g$. Entonces $x_{\sigma_i} g = h x_{\sigma_i}$ donde $h = x_{\sigma_i} g x_{\sigma_i}^{-1} \in H$. Consideramos la aplicación $\alpha : V_{\sigma_i} \to V$ definida por $\alpha(f) = f(x_{\sigma_i})$. Ya que $f \in V_{\sigma_i}$ está únicamente determinado por $f(x_{\sigma_i}), \alpha$ es un isomorfismo. Tenemos:

$$\alpha(gf) = g(f)(x_{\sigma_i}) = f(x_{\sigma_i} g) = f(h x_{\sigma_i}) = \rho_V(h) f(x_{\sigma_i}) = h\alpha(f)$$

y $gf = \alpha^{-1} h \alpha(f)$. Esto significa que $\chi_{\sigma_i}(g) = \chi_V(h)$. Por lo tanto, obtenemos (3.4)

$\square$

Observación: Si la característica de k no divide a $|H|$, entonces (3.4) puede escribirse como:

$$\chi(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G \,:\, xgx^{-1} \in H} \chi_V(xgx^{-1}) \tag{3.6}$$

Teorema 3.2.2. *Sean $H \subset G$ grupos y sean V una representación de G y W una representación de H. Entonces, el espacio $\mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{Ind}_H^G W)$ es isomorfo a $\mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_H^G V, W)$ como espacios vectoriales.*

Demostración:
Sean $E = \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{Ind}_H^G W)$ y $E' = \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_H^G V, W)$. Definimos las aplicaciones:

$$\begin{aligned} F : E &\longrightarrow E' \\ \alpha &\longmapsto F(\alpha) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} F' : E' &\longrightarrow E \\ \beta &\longmapsto F'(\beta) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} F(\alpha) : V &\longrightarrow W \\ v &\longmapsto \alpha(v)(e) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} F'(\beta) : V &\longrightarrow \mathrm{Ind}_H^G W \\ v &\longmapsto F'(\beta)(v) \end{aligned}$$

siendo e el elemento neutro de G, $x \in G$ y $F'(\beta)(v)$ la aplicación:

$$\begin{aligned} F'(\beta)(v) : G &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto \beta(xv) \end{aligned}$$

El objetivo es ver que tanto F como F' inducen isomorfismos entre estos dos espacios vectoriales. En primer lugar, veamos que están bien definidas.

- Por un lado, tenemos que $F(\alpha)(v) = \alpha(v)(e) \in W \ \forall v \in V$.

  Veamos ahora que esta aplicación es un homomorfismo en H, es decir, que $F(\alpha)(hv) = hF(\alpha)(v) \ \forall h \in G$ y $\forall v \in V$. Utilizando que α es un homomorfismo en G, obtenemos:

$$F(\alpha)(hv) = \alpha(hv)(e) = h\alpha(v)(e) = hF(\alpha)(v)$$

Por tanto, $\forall \alpha \in E$, $F(\alpha) \in E'$. Por otro lado, es trivial ver que la aplicación F es una aplicación k-lineal: Dados $\alpha, \alpha' \in E$ y $\lambda \in k$, tenemos:

$$F(\alpha+\alpha')(v) = (\alpha+\alpha')(v)(e) = \alpha(v)(e)+\alpha'(v)(e) = F(\alpha)(v)+F(\alpha')(v)$$

$$F(\lambda\alpha)(v) = (\lambda\alpha)(v)(e) = \lambda\alpha(v)(e) = \lambda F(\alpha)(v)$$

$\forall v \in V$.

Por tanto, tenemos la linealidad de F.

- Por otro lado, tenemos que $F'(\beta)(v)(x) = \beta(xv)$ $\forall v \in V$ y $\forall x \in G$.

  Veamos que $F'(\beta)(v) \in \mathrm{Ind}_H^G W$ $\forall \beta \in E'$. Hay que probar que $F'(\beta)(v)(hx) = hF'(\beta)(v)(x)$ $\forall x \in G$ y $\forall h \in H$. Dado $\beta \in E'$ tenemos:

$$F'(\beta)(v)(hx) = \beta(hxv) = h\beta(xv) = hF'(\beta)(v)(x)$$

  Por tanto, $F'(\beta)(v) \in \mathrm{Ind}_H^G W$ $\forall \beta \in E'$. Veamos que $\forall \beta \in E'$, $F'(\beta) \in E$, es decir veamos que $F'(\beta)$ es un G-homomorfismo. Consideramos $\beta \in E'$, $v \in V$ y $g \in G$:

$$F'(\beta)(gv)(x) = \beta(xgv) = F'(\beta)(v)(xg) = gF'(\beta)(v)(x)$$

  Luego $F'(\beta)$ es un G-homomorfismo.

  Al igual que antes, se fácil probar la linealidad de $F'(\beta)$. Dados $\beta, \beta' \in E'$ y $\lambda \in k$, tenemos:

$$F'(\beta+\beta')(v)(x) = (\beta+\beta')(xv) = \beta(xv)+\beta'(xv) = F'(\beta)(v)(x)+F'(\beta')(v)(x)$$

$$F'(\lambda\beta)(v)(x) = (\lambda\beta)(xv) = \lambda\beta(xv) = \lambda F'(\beta)(v)(x)$$

  $\forall v \in V$ y $\forall x \in G$. Por tanto, tenemos la linealidad de F'.

- Para finalizar, veamos que una es la inversa de la otra.
  Por un lado, veamos que $F \circ F' = \mathrm{Id}_{E'}$. Sea $\beta \in E'$. Entonces:

  $$F(F'(\beta))(v) = F'(\beta)(v)(e) = \beta(v)$$

  Por último, vamos a probar que $F' \circ F = \mathrm{Id}_E$. Sea $\alpha \in E'$. Por tanto:

  $$F'(F(\alpha))(v)(x) = F(\alpha)(xv) = (\alpha xv)(e) = x\alpha(v)(e) = (\alpha(v))(x)$$

  $\Longrightarrow F^{-1} = F'$ y $(F')^{-1} = F$

Por lo tanto, la aplicación F nos induce un isomorfismo entre E y E'. □

3.3 Ortogonalidad de caracteres

Definimos un producto interno definida positiva en $F_c(G, \mathbb{C})$:

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g)\overline{f_2(g)}. \qquad \forall f_1, f_2 \in F_c(G, \mathbb{C}) \tag{3.7}$$

El siguiente teorema nos dirá que los caracteres de las representaciones irreducibles de G forman una base ortonormal de $F_c(G, \mathbb{C})$ bajo este producto interno.

Teorema 3.3.1. *Para cualesquiera representaciones V y W, tenemos:*

$$(\chi_V, \chi_W) = \dim \mathrm{Hom}_G(V, W) \tag{3.8}$$

y

$$(\chi_V, \chi_W) = \begin{cases} 1 & si \quad V \cong W \\ \\ 0 & si \quad V \ncong W \end{cases} \tag{3.9}$$

si V y W son irreducibles.

Demostración:
Por definición del producto interno definido positivo:

$$(\chi_V, \chi_W) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g)\overline{\chi_W(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g)\chi_{W^*}(g) =$$
$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{V \otimes W^*}(g) = \mathrm{Tr}\,|_{V \otimes W^*}(P),$$

donde $P = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \in Z(\mathbb{C}\,[G])$ (donde $Z(\mathbb{C}\,[G])$ es el centro de $\mathbb{C}\,[G]$).

Veamos que P es la proyección de cualquier representación X hacia $X^G = \{x \in X \mid gx = x \ \forall g \in G\}$. En primer lugar, supongamos que $x = P(w) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gw$. Entonces, para cualquier $h \in G$,

$$hx = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} hgw = \frac{1}{|G|}\sum_{\overline{g}=hg\in G} \overline{g}w$$

Por tanto, $x \in X^G$. Luego, la imagen de P está contenida en X^G. Para la otra contención, si $x \in X^G$, entonces $P(x) = \frac{1}{|G|}\sum x = x$, por tanto $X^G \subset \mathrm{Im}P$. De aquí se obtiene que $P^2 = P$. Por tanto, tenemos que P es un proyector de X hacia X^G. Entonces:

$$P|_Y = \begin{cases} \mathrm{Id} & \text{si} \quad Y = X^G \\ \\ 0 & \text{si} \quad Y \neq X^G \end{cases}$$

Finalmente, antes de terminar la prueba, es necesario tener en cuenta las siguientes igualdades:

- $\mathrm{Tr}\,|_X(P) = \dim X^G$
- $X^G = \mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}, X)$. Veamos que se verifica esta igualdad. Tenemos:

  $$\mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}, X) = \{f : \mathbb{C} \longrightarrow X \mid f \text{ lineal y } f(gc) = gf(c)\ \forall g \in G, \forall c \in \mathbb{C}\}$$

  Entonces, si consideramos la aplicación entre dichos espacios de forma que a cada $f \in \mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}, X)$ lo envía a $f(1) \in X^G$, dicha aplicación es un isomorfismo. Por tanto, se tiene la igualdad.

- $V \otimes_k W^* \cong \mathrm{Hom}_k(W, V)$, ya que al considerar la aplicación:

  $$\begin{aligned} f : V \times W^* &\longrightarrow \mathrm{Hom}_k(W, V) \\ (v, \theta) &\longmapsto f(v)(\theta) \end{aligned}$$

  con $f(v)(\theta)(w) = \theta(w)(v)$, se tiene que esta aplicación es un isomorfismo.

En consecuencia, obtenemos:

$$\mathrm{Tr}\,|_{V\otimes W^*}(P) = \dim(V \otimes W^*)^G = \dim(\mathrm{Hom}_k(W, V))^G = \dim \mathrm{Hom}_G(W, V)$$

□

Por el teorema anterior, podemos ver si una representación compleja de un grupo G es irreducible.

Corolario 3.3.2. *Dado un grupo finito G y una representación sobre dicho grupo que llamaremos V. Entonces, V es irreducible sí y sólo sí $(\chi_V, \chi_V) = 1$.*

Teorema 3.3.3. *Sean g, $h \in G$, y denotaremos Z_g el centralizador de g en G ($Z_g = \{x \in G \; ; \; xg = gx\}$). Entonces:*

$$\sum_V \chi_V(g)\overline{\chi_V(h)} = \begin{cases} |Z_g| & \text{si } g \text{ es conjugado de } h \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \tag{3.10}$$

donde se considera la suma de todas las representaciones irreducibles de G.

Demostración:
Por (3.1), tenemos que $\overline{\chi_V(h)} = \chi_{V^*}(h)$. Por tanto:

$$\sum_V \chi_V(g)\overline{\chi_V(h)} = \sum_V \chi_V(g)\chi_{V^*}(h) = \mathrm{Tr}\,|_{\oplus_V V\otimes V^*}(g \otimes (h^*)^{-1}) =$$

$$= \mathrm{Tr}\,|_{\oplus_V \mathrm{End} V}(x \mapsto gxh^{-1}) = \mathrm{Tr}\,|_{\mathbb{C}[G]}(x \mapsto gxh^{-1})$$

Si g y h no son conjugados entre ellos, esta traza claramente es cero, ya que la matriz del operador $x \mapsto gxh^{-1}$ en la base de elementos de un grupo tiene ceros en las diagonales. Por otro lado, si g y h están en la misma clase de conjugación, la traza es igual al número de elementos $x \; / \; x = gxh^{-1}$, i.e., el orden del centralizador de g en G. □

3.4 Tabla de caracteres

En esta sección, veremos que los caracteres de todas las representaciones irreducibles de un grupo finito G se pueden expresar como una *tabla de caracteres*.

Dicha tabla contiene las clases de conjugaciones de G en sus columnas, siendo la primera fila el cardinal de las distintas clases de conjugaciones, mientras que el resto de las filas constituyen el carácter de una representación irreducible V en las clases de conjugación.

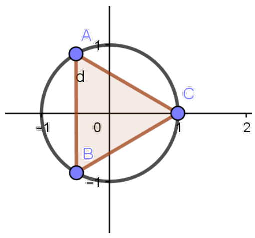
Por otra parte, la fila correspondiente a la representación unidad está constituida por unos y la columna correspondiente al elemento neutro la forman las dimensiones de las representaciones.

En particular, por los teoremas 3.3.1 y 3.3.3, las filas y las columnas de la tabla de caracteres son ortonormales con respecto al producto interno definido anteriormente. Como consecuencia de esto, para cualquier $g \in G$, se obtiene:

$$\sum_{V \in \mathrm{Irr} G} \dim V \chi_V(g) = 0 \tag{3.11}$$

Ejemplo: Consideramos $G = S_3$. Construimos la tabla de caracteres asociada a S_3. Como vimos en el capítulo anterior, las representaciones irreducibles de S_3 vienen dadas por:

- $\mathbb{C}_1$ (representación unidad) $\Rightarrow \rho(\sigma) = 1 \ \forall \sigma \in S_3$
- $\mathbb{C}_2$ (representación signo) $\Rightarrow \rho(\sigma) = \text{signo}(\sigma) \ \forall \sigma \in S_3$
- Por último, la representación bidimensional, $\mathbb{C}^2$. Esta representación puede verse como las simetrías de un triángulo equilátero con vértices 1, 2 y 3 y los puntos (cos 120°, sen 120°), (cos 240°, sen 240°), (1,0) respectivamente.



Por tanto:

$$\rho_{\mathbb{C}^2}(\mathrm{Id}) = 1 \qquad \rho_{\mathbb{C}^2}((12)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{\mathbb{C}^2}((123)) = \begin{pmatrix} \cos 120° & -\text{sen} 120° \\ \text{sen} 120° & \cos 120° \end{pmatrix}$$

Luego, la tabla de caracteres asociada a S_3 viene dada por:

S_3	Id	(12)	(123)
$\sharp$	1	3	2
$\mathbb{C}_1$	1	1	1
$\mathbb{C}_2$	1	-1	1
$\mathbb{C}^2$	2	0	-1

Como hemos comentado antes, la columna asociada al elemento neutro de S_3 nos indica las dimensiones de las representaciones irreducibles de dicho grupo.

3.5 Ejemplos

El objetivo de esta sección es calcular todas las representaciones irreducibles de un grupo finito G implantando los métodos desarrollados en este capítulo.

1. Consideramos el grupo de cuaterniones $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ de forma que:

   $$i = jk = -kj, \; j = ki = -ik, \; k = ij = -ji, \; -1 = i^2 = j^2 = k^2 \tag{3.12}$$

   Dadas estas condiciones, veamos todas sus representaciones irreducibles. En primer lugar calculamos las clases de conjugaciones mediante el programa SAGE.

   ```
   G= QuaternionGroup()
   CG = G.conjugacy_classes_representatives()
   l=len(CG)
   l
   ```

   De esta forma, obtenemos cinco clases de conjugación de Q_8. Por tanto, existen cinco representaciones irreducibles en Q_8. Denotando V_i ($i =$ 1,...,5) a las representaciones irreducibles de Q_8, por (2.3), tenemos:

   $$8 = |Q_8| = \sum_{i=1}^{5} \dim(V_i)^2$$

   Luego, Q_8 tiene cuatro representaciones irreducibles de dimensión 1 y otra de dimensión 2.

   En este ejemplo, veremos dos caminos diferentes para describir las representaciones irreducibles unidimensionales de Q_8.

   - En primer lugar, para describirlas con más detalle, calculamos $Z(Q_8)$. Por (3.12), tenemos que $Z(Q_8) = \{\pm 1\}$.

     Por tanto, tenemos que $Z(Q_8)$ es $\{\pm 1\}$. Por otro lado, $Q_8/Z(Q_8)$ es isomorfo al grupo de Klein, que a su vez es isomorfo a $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}2$. Las cuatro representaciones unidimensionales de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}2$ pueden ser los ”pull back.ª Q_8. Esto es, si $q : Q_8 \to$

$Q_8/Z(Q_8)$ es la aplicación cociente y ρ es cualquier representación de $Q_8/Z(Q_8)$, entonces $\rho \circ q$ da una representación de Q_8.

Calculamos las representaciones irreducibles de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}2$. Para ello, calculamos las representaciones de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2$. Al igual que en el ejemplo anterior, definimos la aplicación $\rho : \mathbb{Z}/\mathbb{Z}2 \to \mathbb{C}^*$ tal que $\rho(m) = e^{2\pi i m/n}$. De esta forma, obtenemos que $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2^\vee = \{\rho^k : k = 0, 1\}$
Por tanto, las representaciones de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}2$ vienen dadas por:

$$(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}2)^\vee = (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2)^\vee \times (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2)^\vee$$

Por tanto, si ρ es una representación irreducible de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}2$, entonces $\rho \circ q$ será una representación irreducible de Q_8, siendo q la aplicación cociente.

- Veamos otra forma para obtener estas representaciones:
  Una de estas representaciones ha de ser la representación unidad. Para definir las tres restantes observamos que Q_8 contiene tres subgrupos normales maximales, los subgrupos cíclicos generados por i, j y k. Para cada subgrupo normal definimos una representación, de forma que el homomorfismo que define dicha representación envía a los elementos del subgrupo el valor 1 y a los elementos que no lo estén el -1.

Por otro lado, la representación bidimensional es $V = \mathbb{C}^2$, dada por $\rho(-1) =$ -Id y

$$\begin{aligned} \rho(i) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \rho(j) &= \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix} \\ \rho(k) &= \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Como $8 = |Q_8| = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = \sum_{i \in I} \dim(V_i)^2 \implies$ No existen más representaciones irreducibles en Q_8.
Todas las representaciones unidimensionales son de tipo real, mientras que la representación bidimensional es de tipo quaterniónico.

Una vez descritas todas sus representaciones irreducibles, la tabla de caracteres asociada a Q_8 es:

Q_8	1	-1	i	j	k
$\sharp$	1	1	2	2	2
$\mathbb{C}_1$	1	1	1	1	1
$\mathbb{C}_2$	1	1	1	-1	-1
$\mathbb{C}_3$	1	1	-1	1	-1
$\mathbb{C}_4$	1	1	-1	-1	1
$\mathbb{C}^2$	2	-2	0	0	0

2. Sea $G = S_4$. Tenemos que $|S_4| = 4! = 24$. Recordemos que el número de representaciones irreducibles de G es igual al número de clases de conjugaciones del mismo. Calculamos por tanto, el número de clases de conjugaciones de S_4.
   Mediante SAGE, vemos que S_4 tiene cinco clases de conjugaciones: Id, (12), (123), (1234) y (12)(34). Por tanto, por (2.3), tenemos:

   $$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 = 24$$

   Teniendo en cuenta que tendremos la *representación unidad* y la *representación signo*, las tres representaciones restantes han de tener dimensiones 2, 3 y 3.

   La representación bidimensional se obtiene a partir de la representación bidimensional de S_3 mediante un homomorfismo sobreyectivo $S_4 \to S_3$, el cual permite obtener el carácter de la representación de S_4 a partir de la de S_3 calculada anteriormente.

   Por otra parte, veamos las representaciones de dimensión 3. Una de ellas se puede obtener mediante las rotaciones de un cubo. En particular, S_4 permuta las diagonales principales. Luego, (12) es la rotación en 180° de un eje que es perpendicular a dos bordes opuestos, (12)(34) es la rotación en 180° alrededor de un eje que es perpendicular a dos caras opuestas, (123) es la rotación alrededor de una diagonal principal en 120° y (1234) es la rotación en 90° alrededor de un eje que es perpendicular a dos caras opuestas; Esto permite calcular las trazas facilmente, usando que la traza de una rotación por el ángulo ϕ en $\mathbb{R}^3$ es $1 + 2\cos\phi$. La otra representación de dimensión 3 resulta multiplicando los caracteres obtenidos en la representación anterior por el carácter de la representación signo. Esto quiere decir que dicha representación la constituye el producto tensorial de estas representaciones.

   Por tanto, su tabla de caracteres viene dada por:

S_4	Id	(12)	(12)(34)	(123)	(1234)
$\sharp$	1	6	3	8	6
$\mathbb{C}_1$	1	1	1	1	1
$\mathbb{C}_2$	1	-1	1	1	-1
$\mathbb{C}^2$	2	0	2	-1	0
$\mathbb{C}_1^3$	3	-1	-1	0	1
$\mathbb{C}_2 \otimes \mathbb{C}_1^3$	3	1	-1	0	-1

Por el corolario 3.3.2, tenemos que V es una representación compleja irreducible $\Leftrightarrow$ $(\chi_V, \chi_V) = 1$ (bajo el producto interno definido por (3.7)). Veamos que se verifica para cada representación irreducible.

- $V = \mathbb{C}_1$

$$(\chi_{\mathbb{C}_1}, \chi_{\mathbb{C}_1}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\mathbb{C}_1}(g)\overline{\chi_{\mathbb{C}_1}(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{[g]}|\,[g]\,|\,\chi_{\mathbb{C}_1}(g)\overline{\chi_{\mathbb{C}_1}(g)} =$$

$$= \frac{1}{24}(1\cdot 1\cdot 1 + 6\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 1 + 8\cdot 1\cdot 1 + 6\cdot 1\cdot 1) = 1$$

- $V = \mathbb{C}_2$

$$(\chi_{\mathbb{C}_2}, \chi_{\mathbb{C}_2}) = \frac{1}{24}(1\cdot 1\cdot 1 + 6\cdot(-1)\cdot(-1) + 3\cdot 1\cdot 1 + 8\cdot 1\cdot 1 + $$
$$+6\cdot(-1)\cdot(-1)) = 1$$

- $V = \mathbb{C}^2$

$$(\chi_{\mathbb{C}^2}, \chi_{\mathbb{C}^2}) = \frac{1}{24}(1\cdot 2\cdot 2 + 6\cdot 0\cdot 0 + 3\cdot 2\cdot 2 + 8\cdot(-1)\cdot(-1) +$$
$$+6\cdot 0\cdot 0) = 1$$

- $V = \mathbb{C}_1^3$

$$(\chi_{\mathbb{C}_1^3}, \chi_{\mathbb{C}_1^3}) = \frac{1}{24}(1\cdot 3\cdot 3 + 6\cdot(-1)\cdot(-1) + 3\cdot(-1)\cdot(-1) + 8\cdot 0\cdot 0 +$$
$$+6\cdot 1\cdot 1) = 1$$

- $V = \mathbb{C}_2^3 = \mathbb{C}_2 \otimes \mathbb{C}_1^3$.

$$(\chi_{\mathbb{C}_2^3}, \chi_{\mathbb{C}_2^3}) = \frac{1}{24}(1\cdot 3\cdot 3 + 6\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot(-1)\cdot(-1) + 8\cdot 0\cdot 0 +$$
$$+6\cdot(-1)\cdot(-1)) = 1$$

Por tanto, todas estas representaciones son irreducibles. Además, dadas V, W representaciones cualesquiera de S_n de forma que $V \not\cong W$, se debe de verificar que $(\chi_V, \chi_W) = 0$, por el Teorema 3.3.1.

3. Consideramos ahora el grupo de permutaciones pares A_4. Tenemos que $|A_4| = \dfrac{4!}{2} = 12$. Para ver el número de representaciones irreducibles de A_4, calculamos las clases de conjugaciones del grupo alternado. Tenemos que A_4 tiene cuatro clases de conjugaciones. Tres de ellas provienen de las representaciones de:

$$A_4/\left\{\mathrm{Id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\right\} \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}3$$

Ya que existen, cuatro representaciones irreducibles, obtenemos una representación más de dimensión 3 (por (2.3)). Por tanto, aplicando dicha fórmula y (3.3.1), tenemos la tabla:

A_4	Id	(123)	(132)	(12)(34)
$\sharp$	1	4	4	3
$\mathbb{C}$	1	1	1	1
$\mathbb{C}_\epsilon$	1	ϵ	ϵ^2	1
$\mathbb{C}_{\epsilon^2}$	1	ϵ^2	ϵ	1
$\mathbb{C}^3$	3	0	0	-1

siendo $\epsilon = \exp\left(\dfrac{2\pi i}{3}\right)$

También podemos ver la representación irreducible de dimensión 3 como el grupo de rotaciones de un tetraedro regular. En este caso, (123) y (132) son las rotaciones en 120° y 240° respectivamente de una de su caras, mientras que (12)(34) son las rotaciones en 180° de los bordes opuestos de dos aristas del tetraedro.

Capítulo 4

Representaciones de S_n

En este capítulo daremos una descripción más completa de las representaciones del grupo simétrico S_n para cualquier n ($n \geq 1$).

Definición 4.1. *Una **partición** λ de n es una representación de n de la forma*

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_p \tag{4.1}$$

donde λ_i son enteros positivos y además $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ para todo i.

4.1 Diagrama de Young

Para cada partición λ consideraremos su **diagrama de Young** correspondiente, que los denotaremos Y_λ. Dicho diagrama se constituye por la unión de rectángulos en el plano de la forma $-i \leq y \leq -i+1$, $0 \leq x \leq \lambda_i$ para todo $i = 1, ..., p$. Dada esta construcción, obtenemos n cuadrados unidad. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo: Sea $G = S_3$ y la partición sobre $n = 3$ dada por $\lambda = (2, 1)$. Entonces, el diagrama de Young asociado a esta partición viene dado por:

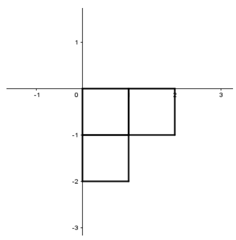


Figura 4.1: Diagrama de Young de una representación de S_3

Como vemos en la figura, al desarrollar Y_λ, obtenemos $n = 3$ cuadrados unidad.

Por otra parte, la **tabla de Young** de una partición λ (que lo denotaremos T_λ) consiste en rellenar los cuadrados resultantes de Y_λ con los números $1, ..., n$. Este proceso no permite repeticiones entre dichos números, de forma que vienen numeradas en orden creciente de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo [1]. Volviendo al ejemplo anterior, obtenemos:

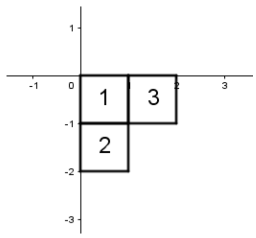


Figura 4.2: Tabla de Young de una representación de S_3

Podemos definir dos subgrupos de S_n correspondientes a T_λ:

- El subgrupo fila P_λ: Es el subgrupo formado por los elementos de S_n que dejan invariantes cada una de las filas de T_λ al permutar dichos elementos.
- El subgrupo columna Q_λ: Es el subgrupo formado por los elementos de S_n que dejan invariantes cada una de las columnas de T_λ al permutar dichos elementos.

En nuestro ejemplo:

$$P_\lambda = \{\sigma \in S_3 \mid \sigma(1), \sigma(3) \in \{1, 3\}\, ; \sigma(2) \in \{2\}\} = \{e, (13)\}$$

$$Q_\lambda = \{\sigma \in S_3 \mid \sigma(1), \sigma(2) \in \{1, 2\}\, ; \sigma(3) \in \{3\}\} = \{e, (12)\}$$

Además, para cualquier partición λ, siempre se verifica que $P_\lambda \cap Q_\lambda = \{e\}$.

Definición 4.2. *Dada una partición λ de n, se define los proyectores de Young como:*

$$a_\lambda = \frac{1}{|P_\lambda|} \sum_{g \in P_\lambda} g \quad \in \mathbb{C}[S_n] \tag{4.2}$$

$$b_\lambda = \frac{1}{|Q_\lambda|} \sum_{g \in Q_\lambda} \text{signo}(g) g \quad \in \mathbb{C}[S_n] \tag{4.3}$$

[1]En realidad, se puede establecer cualquier orden, siempre y cuando no se realicen repeticiones

Además, sea $c_\lambda = a_\lambda b_\lambda$. Como $P_\lambda \cap Q_\lambda = \{e\}$, este elemento es distinto de cero. A este elemento se le llama el simetrizador de Young.

Teorema 4.1.1 (Teorema de clasificación para representaciones de S_n). *El subespacio $V_\lambda := \mathbb{C}[S_n]\, c_\lambda$ de $\mathbb{C}[S_n]$ es una representación irreducible de S_n bajo la multiplicación a izquierda. Cada representación irreducible de S_n es isomorfo a V_λ para un único λ.*

Por tanto, tendremos tantas representaciones irreducibles de S_n como particiones sobre n. La prueba de este teorema lo analizaremos con más detalle en la próxima sección.

Los módulos V_λ son llamados los **módulos de Specht**. Antes de ver la prueba de este teorema, veamos un ejemplo y una serie de resultados:

Ejemplo:

1. Consideramos la partición $\lambda = (n) \Rightarrow P_n = S_n$ y $Q_n = e$. En este caso, dicha partición nos induce la *representación unidad*.
   Si consideramos la partición sobre n $\lambda = (1, ..., 1)$, entonces $P_\lambda = e$ y $Q_\lambda = S_n$. Por tanto, c_λ es el antisimetrizador y esto hace que V_λ sea la *representación signo*.

2. Hagamos una descripción más precisa de las representaciones irreducibles de S_n para $n \leq 4$.

   - $n = 2$.
     Sean $\lambda_1 = (2)$ y $\lambda_2 = (1, 1)$ las únicas particiones sobre $n = 2$, cuyas diagramas vienen dados de la forma:

Figura 4.3: Diagramas de Young para λ_1 y λ_2 respectivamente

     Por tanto, por el Teorema 4.1.1 y por lo comentado en el apartado anterior, dichas particiones nos definen la representación unidad y la representación signo.

   - $n = 3$.
     En el Capítulo 2, obtuvimos tres representaciones irreducibles

de S_3. Por tanto, deben existir tres particiones sobre 3, que son $\lambda_1 = (3)$, $\lambda_2 = (1, 1, 1)$ y $\lambda_3 = (2, 1)$. Luego, obtenemos los diagramas:

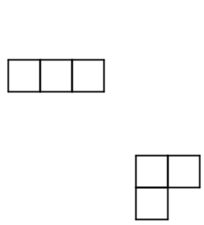


Figura 4.4: Diagramas de Young para λ_1 y λ_2 y λ_3 respectivamente

Como ya hemos comentado antes, las particiones $\lambda = (3)$ y $\lambda = (1, 1)$ nos describen la representación unidad y la representación signo respectivamente. Para $\lambda = (2, 1)$, obtenemos la representación restante, $V_{\lambda_3} = \mathbb{C}^2$.

- $n = 4$.
  En el Capítulo 3 encontramos cinco representaciones irreducibles de S_4 $\Rightarrow$ Tenemos las particiones $\lambda_1 = (4)$, $\lambda_2 = (1, 1, 1, 1)$, $\lambda_3 = (2, 2)$, $\lambda_4 = (3, 1)$ y $\lambda_5 = (2, 1, 1)$. Por tanto, sus respectivos diagramas vendrán dados por:

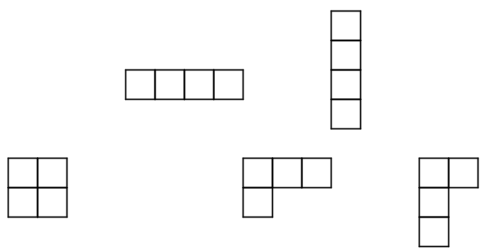


Figura 4.5: Diagramas de Young para λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 y λ_5 respectivamente

Para $\lambda_3 = (2, 2) \Rightarrow V_{\lambda_3} = \mathbb{C}$; para $\lambda_4 = (3, 1) \Rightarrow V_{\lambda_4} = \mathbb{C}_2^3$ y para $\lambda_5 = (2, 1, 1) \Rightarrow V_{\lambda_5} = \mathbb{C}_1^3$.

Corolario 4.1.2. *Todas las representaciones irreducibles de S_n se pueden definir con matrices con coeficientes racionales.*

Por tanto, dado (V_λ, ρ) una representación irreducible de S_n, se tiene que $\forall \sigma \in S_n$, $\rho(\sigma) \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{Q})$.

4.2 Prueba del teorema de clasificación para representaciones de S_n

Veamos la prueba del Teorema 4.4.1. Para ello, probaremos una serie de resultados que nos conducirá al resultado enunciado en dicho teorema.

Lema 4.2.1. *Sea $x \in \mathbb{C}[S_n]$. Entonces $a_\lambda x b_\lambda = \ell_\lambda(x) c_\lambda$, donde ℓ_λ es una función lineal.*

Demostración:
Sea $g \in S_n$ cualquiera. Dadas estas condiciones, consideramos dos casos:

- Sea $g \in P_\lambda Q_\lambda \Rightarrow \exists!\ p \in P_\lambda$ y $q \in Q_\lambda$ tales que $g = pq$. Entonces, veamos que $a_\lambda g b_\lambda = \text{signo}(q) c_\lambda$. Tenemos:

$$a_\lambda g b_\lambda = \left(\frac{1}{|P_\lambda|} \sum_{g' \in P_\lambda} g' \right) pq \left(\frac{1}{|Q_\lambda|} \sum_{g' \in Q_\lambda} \text{signo}(g') g' \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{|P_\lambda|} \sum_{g' \in P_\lambda} g' p \right) \left(\frac{1}{|Q_\lambda|} \sum_{g' \in Q_\lambda} \text{signo}(g') q g' \right) = (-1)^q c_\lambda$$

  Este último paso se da por el hecho de que tanto P_λ como Q_λ tienen estructura de subgrupo de S_n, luego la operación es interna.

- Consideramos ahora que $g \notin P_\lambda Q_\lambda$. Veamos que $a_\lambda g b \lambda = 0$. Para probar esto, tenemos que encontrar una transposición t tal que $t \in P_\lambda$ y $g^{-1} t g \in Q_\lambda$.

  En primer lugar, vamos a suponer que existe. Entonces, obtenemos:

$$a_\lambda g b_\lambda = a_\lambda t g b_\lambda = a_\lambda g (g^{-1} t g) b_\lambda = \text{signo}(g^{-1} t g) a_\lambda g b_\lambda = -a_\lambda g b_\lambda$$

  $\Rightarrow a_\lambda g b_\lambda = 0$.

  Vamos a ver que existe. Basta con encontrar $i, j = 1, ..., n$ que se encuentren en la misma fila de la tabla de Young $T = T_\lambda$ y en la misma columna de la tabla $T' = gT$ (siendo gT la tabla resultante al permutar los elementos de la tabla de Young T según la permutación g). En consecuencia, es suficiente probar que si dicho par no existe, entonces $g \in P_\lambda Q_\lambda$, i.e., existe $p \in P_\lambda$, $q' \in Q'_\lambda := gQ_\lambda g^{-1}$ tal que $pT = q'T'$ (esto es $g = pq^{-1}, q = g^{-1}q'g \in Q_\lambda$).

Dos elementos cualesquiera de la primera fila de T deben estar en diferentes columnas de T'. Luego, existe $q'_1 \in Q'_\lambda$ que hace que todos estos elementos pasen a la primera fila. Por tanto, existe $p_1 \in P_\lambda$ de forma que $p_1T = q_1T'$ tengan la misma primera fila. Ahora, aplicando el mismo procedimiento con la segunda columna, tenemos que existen $p2$, q'_2 tales que p_2p_1T y $q'_2q'_1T'$ tienen las dos primeras filas iguales. De esta forma, construimos los elementos p y q'.

Por tanto, hemos encontrado una expresión para $a_\lambda g b_\lambda$ en función de $c_\lambda \Rightarrow a_\lambda x b_\lambda = \ell_\lambda(x)c_\lambda$ $\forall x \in \mathbb{C}[S_n]$. $\square$

Introduzcamos el **orden lexicográfico** para particiones:

Definición 4.3. *Dadas dos particiones λ y μ se dice que $\lambda > \mu$ según el orden lexicográfico si y sólo si la primera coordenada no nula de $\lambda_i - \mu_i$ es positiva.*

Lema 4.2.2. *si $\lambda > \mu$, entonces $a_\lambda \mathbb{C}[S_n] b_\mu = 0$.*

Demostración:
La prueba de este teorema es similar al del Lema 4.2.1. Es suficiente probar que para cualquier $g \in S_n$, existe una transposición $t \in P_\lambda$ tal que $g^{-1}tg \in Q_\mu$.

Sean $T = T_\lambda$ y $T' = gT_\mu$. Veamos que existen dos elementos de la tabla T que estén en la misma fila y además, que estén en la misma columna de T'. Tenemos que $\lambda > \mu$ siguiendo el orden lexicográfico. Entonces, tenemos que considerar dos casos:

- Si $\lambda_1 > \mu_1 \Rightarrow \lambda_1 \geq 2$. Por tanto, puedo encontrar una transposición $t \in P_\lambda$.[2] Entonces en estas condiciones, consideraremos $g \in S_n$ de forma que haga que los números que conforman la transposición t se encuentren en la misma columna de T'.

- Si $\lambda_1 = \mu_1$, por el lema anterior, sabemos que existen $p_1 \in P_\lambda$ y $q'_1 \in gQ_\mu g^{-1}$ tales que p_1T y q'_1T' tienen la misma primera fila y repite el argumento para la segunda fila.

  Por la misma razón, si al hacer $i-1$ pasos de forma que $\lambda_j = \mu_j$ para todo $j = 1, ..., i-1$ y en el i-ésimo paso obtenemos que $\lambda_i > \mu_i$, esto

[2] Como mínimo, podemos tener que $\lambda_1 = 2$. En tal caso, podremos decir que t es la transposición formada por aquellos enteros que ocupan las casillas de la primera fila de T

significará que al menos existirán dos números enteros tales que estén en la i-ésima fila de la primera tabla y que estén en la misma columna de la segunda, completando la prueba.

□

Lema 4.2.3. *c_λ es proporcional a un idempotente. Específicamente, $c_\lambda^2 = \dfrac{n!}{\dim V_\lambda} c_\lambda$.*

Demostración:
El Lema 4.2.1 implica que c_λ^2 es proporcional a c_λ. También, es fácil ver que la traza de c_λ en una representación regular es igual a $n!$ (ya que el coeficiente del elemento identidad es 1). Esto implica el resultado. □

Lema 4.2.4. *Sea A un álgebra y sea e un elemento idempotente de A. Entonces para cualquier A-módulo a izquierda M, tenemos que $\mathrm{Hom}_A(Ae, M) \cong eM$ (más específicamente, $x \in eM$ corresponde a $f_x : Ae \to M$ dado por $f_x(a) = ax$, $a \in Ae$).*

Demostración:
Notamos que $1 - e$ es también un elemento idempotente en A. Por tanto, el resultado se tiene debido al hecho de que $\mathrm{Hom}_A(A, M) \cong M$ y la descomposición $A = Ae \oplus A(1 - e)$. □

Corolario 4.2.5. *El número de clases de conjugaciones en S_n es el número de particiones sobre n.*

Demostración:
Cada estructura de ciclos está determinada por sus longitudes $\ell_1, ..., \ell_s$ (teniendo en cuenta los posibles ciclos de longitud 1), siendo $\ell_1 + ... + \ell_s = n$. Por tanto, cada tipo de ciclos de S_n constituye una partición de n distinta. Para n pequeño, las particiones de n pueden hallarse de manera sencilla empezando por la que consta de un sumando (es decir, la partición n) y descendiendo hasta la partición $1 + ... + 1$ con n sumandos iguales a 1. □

Dadas estas condiciones, veamos la prueba del Teorema 4.1.1. Consideramos $\lambda \geq \mu$. Entonces, por los lemas 4.2.3 y 4.2.4, tenemos:

$$\mathrm{Hom}_{S_n}(V_\lambda, V_\mu) = \mathrm{Hom}_{S_n}(\mathbb{C}\left[S_n\right] c_\lambda, \mathbb{C}\left[S_n\right] c_\mu) =^3 c_\lambda \mathbb{C}\left[S_n\right] c_\mu$$

[3] Realmente utilizamos el Lema 4.2.3 para decir que c_λ es proporcional a un idempotente ya que por hipótesis necesitamos que lo sea

Por el Lema 4.2.2, tenemos que para $\lambda > \mu$, $c_\lambda \mathbb{C}\left[S_n\right] c_\mu = 0$. Para el caso $\lambda = \mu$, dicha expresión es unidimensional por los lemas 4.2.1 y 4.2.3.

Sin embargo, los V_λ son irreducibles y V_λ no es isomorfo a V_μ en el caso en el que $\lambda \neq \mu$. Ya que el número de particiones es igual al número de clases de conjugaciones en S_n, las representaciones V_λ definen todas las representaciones irreducibles de S_n. Por tanto, queda probado el teorema.

Capítulo 5

Resultados importantes de la Teoría de Representaciones

En este capítulo profundizaremos en resultados más complejos de la Teoría de Representaciones como es la divisibilidad de Frobenius. Incluso veremos el Teorema de Burnside, teorema relacionado con Teoría de Grupos en el que utilizaremos los resultados vistos en los capítulos anteriores para probarlo.

5.1 Indicador de Frobenius-Schur

Definición 5.1. *El **indicador de Frobenius-Schur** $FS(V)$ de una representación irreducible V es 0 si es de tipo complejo, 1 si es de tipo real y -1 si es de tipo quaterniónico.*

Teorema 5.1.1 (Frobenius-Schur). *El número de involuciones (elementos de orden ≤ 2) en G es igual a $\sum_V \dim(V)FS(V)$, i.e., la suma de las dimensiones de todas las representaciones irreducibles de G de tipo real menos la suma de las dimensiones de todas las representaciones irreducibles de G de tipo quaterniónico.*

Demostración:
Consideramos la aplicación $A : V \to V$, cuyo operador tiene autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

Sea $S^2(V) = V \otimes V/ \sim$, donde $\sim$ viene dada por la relación: $v, w \in V$ están relacionados sí y sólo sí $v \otimes w = w \otimes v$.
Por otra parte, sea $\Lambda^2(V) = V \otimes V/ \sim$, donde $\sim$ define la relación: $v, w \in V$ están relacionados sí y sólo sí $v \wedge w = -w \wedge v$, siendo $\wedge$ el producto exterior.

Por tanto, tenemos:

$$\operatorname{Tr}|_{S^2(V)}(A \otimes A) = \sum_{i \leq j} \lambda_i \lambda_j$$

$$\operatorname{Tr}|_{\Lambda^2(V)}(A \otimes A) = \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j$$

Luego, $\operatorname{Tr}|_{S^2(V)}(A \otimes A) - \operatorname{Tr}|_{\Lambda^2(V)}(A \otimes A) = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} \lambda_i^2 = \operatorname{Tr}(A^2)$.

Por tanto, dado $g \in G$, tenemos:

$$\chi_V(g^2) = \chi_{S^2(V)}(g) - \chi_{\Lambda^2(V)}(g) \tag{5.1}$$

Definimos $P = \dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$. Luego, si aplicamos (5.1) a P, obtenemos:

$$\frac{1}{|G|} \chi_V\Big(\sum_{g \in G} g^2\Big) = \chi_{S^2(V)}(P) - \chi_{\Lambda^2(V)}(P) = \dim(S^2(V))^G - \dim(\Lambda^2(V))^G =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si V es de tipo real} \\ 0 & \text{si V es de tipo complejo} \\ -1 & \text{si V es de tipo quaterniónico} \end{cases}$$

Por consiguiente, el número de involuciones en G es igual a:

$$\frac{1}{|G|} \sum_V \dim V \chi_V\Big(\sum_{g \in G} g^2\Big) = \sum_{\text{real.}V} \dim V - \sum_{\text{quat.}V} \dim V$$

□

Corolario 5.1.2. *Sea G un grupo finito de forma que todas sus representaciones están definidas sobre números reales (i.e., todas sus representaciones irreducibles son de tipo real). Entonces, el número de involuciones de G es igual a la suma de las dimensiones de las representaciones irreducibles del mismo.*

Demostración:

Como todas las representaciones irreducibles son de tipo real $\Rightarrow FS(V) = 1$ para toda representación irreducible. Por tanto, por el Teorema 5.1.1, se obtiene el resultado. □

Proposición 5.1.3. *La suma de las dimensiones de las representaciones irreducibles de S_n es igual a* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{2^k (n-2k)! k!}$.

Demostración:
En primer lugar, tenemos que probar que todas las representaciones de S_n son de tipo real.

Consideramos (V_λ, ρ) una representación irreducible de S_n bajo la partición λ [1]:

$$\rho : S_n \longrightarrow \mathrm{GL}(V_\lambda)$$

Para la prueba consideraremos que la dimensión de $V_\lambda = d$. Para ver que es una representación real tenemos que ver que $\exists\ b : V_\lambda \times V_\lambda \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que b sea una aplicación simétrica, no degenerada y G-invariante.

Consideramos una base de V_λ, $\mathfrak{B} = \{e_1, ..., e_d\}$. Por el Corolario 4.1.2, todas las representaciones irreducibles de S_n se pueden definir como matrices con coeficientes racionales, en particular, para coeficientes reales. Por tanto:

$$\mathcal{M}(\rho(\sigma), \mathfrak{B}) \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R}) \qquad \forall \sigma \in S_n$$

Como ya comentamos en el Capítulo 2, dada una base de V_λ se tiene un isomorfismo $V_\lambda \cong \mathbb{C}^d$ que llamaremos E. Esto implica que admite una representación matricial:

$$\begin{aligned} \rho' : S_n &\longrightarrow \mathrm{GL}(d, \mathbb{R}) \\ \sigma &\longmapsto \mathcal{M}(\rho(\sigma), \mathfrak{B})\rangle \end{aligned}$$

Dadas estas condiciones, definimos el siguiente operador:

$$\begin{aligned} \langle\ ,\ \rangle' : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \langle v, w\rangle \quad &\longmapsto \sum_{\sigma \in S_n} \langle \rho'(\sigma)(v), \rho'(\sigma)(w)\rangle \end{aligned}$$

siendo $\langle\ ,\ \rangle$ el producto escalar estándar en $\mathbb{R}^d$. Por tanto, por definición $\langle\ ,\ \rangle'$ es un producto escalar, es decir, es una forma bilineal simétrica.

En particular, $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^d \Rightarrow \langle x, y\rangle' = \underline{x}A\underline{y}^t$, siendo $A \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ una matriz simétrica y definida positiva ($\det(A)>0$). De esta forma, pasamos del espacio vectorial $(\mathbb{R}^d, \langle\ ,\ \rangle')$ al mismo espacio vectorial definido sobre el cuerpo de los números compejos de dimensión d, $((\mathbb{C}^d, \langle\ ,\ \rangle'))$.

Este operador sobre $\mathbb{C}$ es simétrico y no degenerado, ya que al ser su determinate distinto de cero, hereda la propiedad generada en $\mathbb{R}$. Además,

[1] Recordemos que estas particiones nos permiten clasificar cada una de las representaciones del grupo simétrico. Además se tiene que $V_\lambda = \mathbb{C}[S_n]\, c_\lambda$, por tanto tenemos que V_λ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$

por definición del producto escalar estándar, tenemos que $\langle\ ,\ \rangle'$ es invaiante para ρ'.

Por tanto, hemos encontrado una forma bilineal simétrica no degenerada y G-invariante sobre $\mathbb{C}^d$. Como $V_\lambda \cong \mathbb{C}^d$, basta considerar un tercer operador:

$$\begin{aligned}\langle\ ,\ \rangle'' : V_\lambda \times V_\lambda &\longrightarrow \mathbb{C}\\ (v,w) &\longmapsto \langle E(v), E(w)\rangle'\end{aligned}$$

que tiene por definición las mismas propiedades que $\langle\ ,\ \rangle'$. Por tanto, hemos encontrado una forma sobre V_λ que es bilineal, simétrica, no degenerada e invariante bajo la acción de $G \Rightarrow V_\lambda$ es una representación real.

Al ser todas las representaciones reales, tenemos que el indicador de Frobenius-Shur asociado a cada una de las representaciones irreducibles de S_n es igual a 1 ($FS(V) = 1$). Luego, por el Corolario 5.1.2, la suma de las dimensiones de todas las representaciones irreducibles de S_n es igual al número de involuciones de S_n. Calculamos el número de involuciones.

Los elementos de orden 2 de S_n vienen dados por productos de s ciclos disjuntos ($s \in \left\{1, ..., \lfloor\frac{n}{2}\rfloor\right\}$). Considerando también el elemento neutro e, tenemos que el número de elementos de orden menor o igual que dos es de la forma:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \frac{n!}{2^k(n-2k)!k!} \tag{5.2}$$

En consecuencia, la suma de las dimensiones de las representaciones irreducibles de S_n viene dada por (5.2). □

5.2 Divisibilidad de Frobenius

En esta sección estudiaremos un resultado muy importante como es el de la divisibilidad de Frobenius. Nos ayudará a considerar las posibles dimensiones de las distintas representaciones irreducibles de un grupo finito G. Antes, veremos unos resultados que se utilizarán para probar dicho resultado.

Definición 5.2. *$z \in \mathbb{C}$ es un **número algebraico** (respectivamente un **entero algebraico**) si z es raíz de un polinomio mónico con coeficientes racionales (enteros respectivamente).*

Una definición equivalente a la definición anterior es la siguiente: $z \in \mathbb{C}$ es un **número algebraico** (respectivamente **entero algebraico**), si z es un autovalor de una matriz con coeficientes racionales (enteros respectivamente).

Denotaremos $\mathbb{A}$ como el conjunto de enteros algebraicos.

Proposición 5.2.1. $\mathbb{A}$ *es un anillo.*

Demostración:
Sea α autovalor de $\mathcal{A} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ con autovecor v, y sea β autovalor de $\mathcal{B} \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{C})$ con autovector w. Entonces $\alpha \pm \beta$ es autovalor de $\mathcal{A} \otimes \mathrm{Id}_m \pm \mathrm{Id}_n \otimes \mathcal{B}$ y $\alpha\beta$ es autovalor de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, de forma que el correspondiente autovector en ambos casos sea $v \otimes w$. Esto prueba que $\mathbb{A}$ es un anillo. $\square$

Proposición 5.2.2. $\mathbb{A} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.

Demostración:
Sea $z \in \mathbb{A} \Rightarrow z$ es raíz del polinomio mónico:

$$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \qquad a_i \in \mathbb{Z} \ \forall i$$

Suponemos que z es de la forma: $z = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ donde $\gcd(p,q) = 1 \Rightarrow z \in \mathbb{A} \cap \mathbb{Q}$. Dadas estas condiciones, veamos que $z \in \mathbb{Z}$. Sustituyendo z en el polinomio, dicha expresión tendrá en el coeficiente líder como denominador q^n, mientras que los demás términos tendrán una potencia de q menor. Por tanto, si $q \neq \pm 1 \Rightarrow p(z) = \dfrac{p^n}{q^n} + a_1 \dfrac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + ... + a_{n-1}\dfrac{p}{q} + a_n \notin \mathbb{Z}$ y esto es una contradicción porque $z \in \mathbb{A} \Rightarrow q = 1$ o $q = -1 \Rightarrow z \in \mathbb{Z}$ $\square$

Teorema 5.2.3 (Divisibilidad de Frobenius). *Sea G un grupo finito y sea V una representación irreducible de G sobre $\mathbb{C}$. Entonces:*

$$\dim V \ \textit{divide a} \ |G|$$

Demostración:
Sean C_1, C_2,..., C_n las clases de conjugaciones de G. Sea g_{C_i} los representantes de cada una de las clases de conjugaciones. Definimos:

$$\lambda_i = \chi_V(g_{C_i}) \frac{|C_i|}{\dim V}$$

Proposición 5.2.4. *Los números λ_i son enteros algebraicos para todo i.*

Demostración:

Sea C una clase de conjugación de G, y sea $P = \sum_{h \in C} h$. Entonces P es un elemento central de $\mathbb{Z}[G]$, así que actúa en V como un escalar, el cual es un entero algebrico. (siendo $\mathbb{Z}[G]$ una $\mathbb{Z}$-módulo finitamente generado). Luego, tomando la traza de P en V y teniendo en cuenta que $|C|\chi_V(g) = \lambda \dim V$ con $g \in C$, obtenemos que $\lambda = \chi_V(g)\dfrac{|C|}{\dim V}$ es un entero algebraico. $\square$

Ahora consideramos

$$\sum_i \lambda_i \overline{\chi_V(g_{C_i})} \in \mathbb{A} \tag{5.3}$$

que es un entero algebraico ya que:

- λ_i es también un entero algebraico para todo i por la proposición anterior.
- $\chi_V(g_{C_i})$ es la suma de las raíces de la unidad (es la suma de los autovalores de $\rho(g_{C_i})$, y ya que $g_{C_i}^{|G|} = e$ en G, los autovalores de $\rho(g_{C_i})$ son las raíces de la unidad).
- $\mathbb{A}$ es un anillo.

Por otra parte, por definición de λ_i:

$$\sum_{C_i} \lambda_i \overline{\chi_V(g_{C_i})} = \sum_i \frac{|C_i|\chi_V(g_{C_i})\overline{\chi_V(g_{C_i})}}{\dim V} =$$

$$= \sum_{g \in G} \frac{\chi_V(g)\overline{\chi_V(g)}}{\dim V} = \frac{|G|(\chi_V, \chi_V)}{\dim V}$$

Como V es una representación irreducible, por el Corolario 3.3.2:

$$\sum_{C_i} \lambda_i \overline{\chi_V(g_{C_i})} = \frac{|G|}{\dim V}$$

Tenemos que la expresión (5.3) está en $\mathbb{A}$ y $\dfrac{|G|}{\dim V} \in \mathbb{Q}$. Como $\mathbb{A} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ $\Rightarrow \dfrac{|G|}{\dim V} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \dim V$ divide a $|G|$. $\square$

Gracias a este resultado podemos sacar por ejemplo que las posibles dimensiones de las representaciones irreducibles de S_n sólo pueden ser aquellos números que dividan a $n!$.

5.3 Teorema de Burnside

En esta sección veremos un resultado relacionado con Teoría de Grupos cuya prueba requerirá de herramientas de la Teoría de Representaciones.

Definición 5.3. *Un grupo G se llama **soluble** si existen una serie de subgrupos normales de la forma*

$$\{e\} = G_1 \triangleleft G_2 \triangleleft ... \triangleleft G_n = G$$

donde G_{i+1}/G_i es abeliano para todo $1 \leq i \leq n-1$.

Teorema 5.3.1 (**Teorema de Burnside**). *Cualquier grupo G de orden $p^a q^b$ es soluble, siendo p y q primos y $a,b \geq 0$.*

Antes de comenzar con la prueba del Teorema de Burnside, es necesario probar una serie de resultados que nos ayudarán para demostar dicho resultado.
—

Teorema 5.3.2. *Sea V una representación irreducible de un grupo finito G y sea C una clase de conugación de G con $\gcd(|C|, \dim(V)) = 1$. Entonces para cualquier $g \in C$, o bien $\chi_V(g) = 0$ o bien g actúa como un escalar en V.*

La prueba se basará en el siguiente lema

Lema 5.3.3. *Si ε_1, ε_2,,..., ε_n son raíces de la unidad de forma que $\frac{1}{n}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+...+\varepsilon_n)$ es un entero algebraico, entonces o bien $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = ... = \varepsilon_n$ o bien $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_n = 0$.*

Demostración:
Sea $a = \frac{1}{n}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_n)$. Supongamos el caso en el que no todos los ε_i son iguales.

Al no ser todos iguales, esto implica que $|a| = \frac{1}{n}|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_n| < 1$, ya que la igualdad se da en el caso en el que $|\varepsilon_i| = 1 \; \forall i = 1, ..., n$.

Además, tenemos que cualquier conjugado algebraico de una raíz de la unidad es también raíz de la unidad, luego $|a'| \leq 1$ para cualquier conjugado algebraico a' de a.

Por otra parte, como a es un entero algebraico, $\exists\, p \in \mathbb{P}^n(x)$ polinomio mínimo de a:

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

Por tanto, $p(a) = 0$. De esta forma, el producto de a y de todos los conjugados algebraicos del mismo es un número entero, que es a_0. Como $|a| < 1$ y $|a'| \leq 1$, entonces esto implica que este producto es cero y por tanto llegamos a que $a = 0 \Rightarrow \frac{1}{n}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+...+\varepsilon_n) = 0 \Rightarrow \varepsilon_1+\varepsilon_2+...+\varepsilon_n = 0$. $\square$

Veamos la prueba del Teorema 5.3.2:

Demostración:

Sea $\dim V = n$. Sean ε_1, ε_2, ..., ε_n los autovalores de $\rho_V(g)$. Estas son las raíces de la unidad, luego $\chi_V(g)$ es un entero algebraico. Por otro lado, tenemos por la Proposición 5.2.4 que $\frac{1}{n}|C|\chi_V(g)$ es también un entero algebraico.

Por hipótesis sabemos que n y $|C|$ son primos entre sí, luego por la identidad de Bézout, existen unos enteros a y b tales que:

$$a|C| + bn = 1$$

Esto implica que $\frac{\chi_V(g)}{n} = \frac{1}{n}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_n)$ es un entero algebraico.

Por tanto, aplicando el Lema 5.3.3 o bien $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = ... = \varepsilon_n$ o bien $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_n = 0$. En el primer caso, $\rho_V(G)$ es diagonalizable, debe ser un escalar. En el segundo caso, $\chi_V(g) = 0$. $\square$

Teorema 5.3.4. *Sea G un grupo finito, y sea C una clase de conjugación de G de orden p^k donde p es primo y k>0. Entonces G tiene un subgrupo normal no trivial propio (i.e. G no es simple).*

Demostración:

Elegimos un elemento $g \in C$ donde $g \neq e$, ya que C no es la clase trivial. Por (3.11) tenemos:

$$\sum_{V \in \mathrm{Irr}G} \dim V \chi_V(g) = 0 \tag{5.4}$$

Podemos dividir Irr G en tres partes:

1. La representación trivial.
2. El conjunto de representaciones irreducibles de G cuya dimensión es divisible por p, que denotaremos D.

3. El conjunto de representaciones irreducibles las cuales su dimensión no es divisible por p, que denotaremos N.

Dadas estas condiciones:

Lema 5.3.5. *Existe $V \in N$ tal que $\chi_V(g) \neq 0$.*

Demostración:
Consideramos $V \in D$. De esta forma, es fácil ver que $\frac{1}{p}\dim(V)\chi_V(g)$ es un entero algebraico. Esto implica que $a = \sum_{V\in D} \frac{1}{p}\dim(V)\chi_V(g)$ es un entero algebraico.

Ahora por (5.4) tenemos:

$$0 = \chi_{\mathbb{C}}(g) + \sum_{V\in D} \dim V\chi_V(g) + \sum_{V\in N} \dim V\chi_V(g) = 1 + pa + \sum_{V\in N} \dim V\chi_V(g).$$

De esta expresión obtenemos que el último sumando es distinto de cero, lo que prueba el resultado. □

Consideramos ahora $V \in N$ tal que $\chi_V(g) \neq 0$, que sabemos que existe por el lema anterior. Por el Teorema 5.3.2, al ser $\chi_V(g) \neq 0$, g actúa como un escalar (en general, cualquier $g \in C$). Por otra parte, sea H el subgrupo de G generado por los elementos ab^{-1}, a y $b \in C$. H es un subgrupo normal y actúa trivialmente en V, así que $H \neq G$. También $H \neq 1$, ya que $|C| > 1$.□

Vamos ahora con la prueba del Teorema de Burnside:

Demostración:
En primer lugar, asumimos que el Teorema de Burnside es falso, esto quiere decir que consideramos que no existe ningún grupo soluble G de orden p^aq^b. Entonces G es simple. Por el Teorema 5.3.4, no existe ninguna clase de conjugación C de G de orden p^k o q^k con $k > 0$.

Por tanto, si consideramos una clase de conjugación C, el orden de dicha clase o bien es 1 o bien es divisible por pq.

Finalmente, tenemos que:

$$\sum_{C\in\overline{G}} |C| = p^aq^b$$

siendo $\overline{G}$ el conjunto de representantes de cada clase de conjugación de G.

Por tanto, existe más de una clase de conjugación con más de un elemento $\Rightarrow G$ tiene un centro no trivial, por tanto, llegamos a una contradicción. Luego, se verifica el Teorema de Burnside.$\square$

Bibliografía

[1] F.Etingof, O.Golberg, S.Hensel, T.Liu, A.Schwendner, D.Vaintrob y E.Yudovina, *Introduction to Representation Theory*, Board ,The American Mathematical Society, 2011.

[2] W.Fulton y J.Harris, *Representation Theory*, Springer, New York, 1991.

[3] J.P.Serre, *Linear Representations of Finite Groups*, Springer, 1997.

[4] C.Ivorra, *Representaciones de Grupos Finitos*, https://www.uv.es/ivorra/Libros/Representaciones.pdf