

**UNIVERSIDAD DE SEVILLA**

Facultad de Matemáticas



Grado en Matemáticas

Departamento de Geometría y Topología

---

TRABAJO FIN DE GRADO

---

**INVARIANTES DE SUPERFICIES  
REGLADAS NO  
DESARROLLABLES**

---

Realizado por: Gema Terrón Mejías

Sevilla, Junio 2018



*A mi familia, por confiar en mí,  
apoyarme y animarme en este  
duro y bonito camino de  
las matemáticas.*



# Índice

<b>Abstract</b>	<b>3</b>
<b>Resumen</b>	<b>5</b>
<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>10</b>
1.1. Curva parametrizada regular . . . . .	10
1.2. Triedro de Frenet . . . . .	11
1.3. La definición de superficies . . . . .	14
1.4. Curvas y Vectores Tangentes a una superficie . . . . .	16
1.5. Geometría intrínseca y extrínseca . . . . .	17
1.6. Superficies regladas y algunos ejemplos . . . . .	19
<b>2. Superficies regladas desarrollables</b>	<b>26</b>
2.1. Caracterización de las superficies regladas desarrollables . . . . .	26
2.2. Clasificaciones de superficies regladas desarrollables . . . . .	32
<b>3. Superficies regladas no desarrollables</b>	<b>34</b>
3.1. Curvas esféricas en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	34
3.2. Funciones estructurales en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	36
3.3. Ángulo de inclinación en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	40
3.4. Propiedades y clasificación de superficies regladas no desarrol- lables . . . . .	41
<b>Anexo: Códigos de Maple</b>	<b>46</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>48</b>



# Abstract

In this work, we are going to carry out an analysis of the most studied families in surface geometry, ruled surfaces, that is to say, surfaces in which at all points at least one line contained in the surface passes. Within these surfaces we find developable and non-developable surfaces. We focus our study on non-developables, defining notions, formulas, as well as the so-called structural functions, which will allow us to classify them.





# Resumen

En este trabajo, vamos a realizar un análisis de las familias más estudiadas en geometría de superficies, las superficies regladas, es decir, superficies en las que por todo punto pasa al menos una recta contenida en la superficie. Dentro de estas superficies encontramos las superficies desarrollables y no desarrollables. Centramos nuestro estudio en las no desarrollables, definiendo nociones, fórmulas, así como las llamadas funciones estructurales, que nos permitirán dar una clasificación de las mismas.



# Introducción

El primer acercamiento que tenemos los estudiantes del Grado en Matemáticas de la Universidad de Sevilla al área de la Geometría Diferencial se produce mediante la asignatura Geometría Local de Curvas y Superficies, de tercer curso. En ella y como su nombre indica, se introducen los conceptos básicos (siempre desde el punto de vista local) relativos a la geometría de las curvas y superficies parametrizadas.

Una familia muy importante de superficies, por su número y por sus variadas aplicaciones, la constituyen las llamadas *superficies regladas*, definidas como aquellas que verifican que por cada punto suyo pasa una línea recta totalmente contenida en la superficie. A su estudio está dedicado este trabajo, ya que, por cuestiones de tiempo, en la citada asignatura sólo se introducen su definición y algunos ejemplos.

Empezamos en el Capítulo 1 presentando algunos conceptos y resultados clásicos (sin demostración) de la geometría local de curvas y superficies, que serán de utilidad en el resto del trabajo. Este capítulo se cierra introduciendo las superficies regladas. Para ello usaremos las habituales parametrizaciones de este tipo de superficies, que consisten en fijar una curva en el espacio que se denomina *directriz* y, en cada punto de ella, adjuntar la recta que pasa por él y contenida en la superficie, que se llama *generatriz*, mediante su vector de dirección. Tras esto, pasaremos a ver algunos de los ejemplos más notables, cuyas figuras hemos realizado en *Maple*.

Seguidamente realizaremos un estudio de las propiedades características básicas de las superficies regladas. Será necesario imponer ciertas condiciones para obtener los resultados habituales de esta teoría, concretamente, exigiremos que las generatrices no sean constantes en ningún abierto, lo que denominaremos una superficie no cilíndrica. De este modo, cuando los ceros de la derivada de la dirección de las generatrices sean aislados, bastará fragmentar la superficie y aplicar el estudio a cada fragmento. El caso en que los

ceros se acumulen no lo trataremos en este trabajo.

Las condiciones anteriores no son demasiado restrictivas, y veremos que, bajo ellas, se cumple una propiedad muy interesante y es que, a partir de cualquier directriz, se puede obtener otra directriz, que es única, en el sentido que si consideramos otra directriz de partida se obtiene la misma curva, verificando que es ortogonal a la variación de las generatrices. Esta directriz se llama *línea de estricción* y será de gran utilidad en el estudio de la superficie. A continuación, probaremos la existencia y unicidad de una herramienta, también fundamental para el estudio posterior y que es una función escalar conocida como *parámetro de distribución*.

Las superficies regladas se descomponen en dos subfamilias destacadas: *Superficies Regladas Desarrollables y no Desarrollables*. El nombre de desarrollable trata de reflejar la propiedad de que pueden ser “aplanadas” (“desarrolladas”) hasta conseguir planos sin modificar las distancias entre los puntos. En la primera sección del Capítulo 2 damos una cómoda caracterización de las superficies regladas desarrollables, en términos de la anulación del parámetro de distribución, incluyendo algunos ejemplos. Por último, vemos la clasificación de estas superficies.

Llegamos entonces al último capítulo de nuestro trabajo, dedicado a las superficies regladas no desarrollables, estudiadas recientemente en un artículo de Liu, Yu y Dal, publicado en 2014 [4]. Así, en la primera sección, introducimos el concepto de *curvatura esférica* de una curva esférica y algunos resultados que nos serán muy útiles para clasificar estas superficies. Pasamos entonces a dar una parametrización gracias a la línea de estricción y a una curva en la esfera unidad parametrizada naturalmente, que es como puede ser considerado el campo unitario de direcciones de los generadores. Esta curva esférica lleva asociada una referencia ortonormal del espacio en cada uno de sus puntos, llamada *base esférica de Frenet*. Haciendo uso de ella, aparecen las llamadas *funciones estructurales*, gracias a las cuales se puede demostrar el *Teorema Fundamental de las Superficies Regladas No Desarrollables*, que establece que dichas superficies están determinadas por la curvatura esférica de la citada curva esférica y las funciones estructurales.

Para finalizar, presentamos la noción de *función de inclinación*, definido por Liu y Yuan en [3] que permite obtener una clasificación de las superficies regladas no desarrollables, así como algunas de sus propiedades.

Se añade un anexo donde se recogen los códigos que se han usado para

generar las gráficas de los ejemplos, realizados con el programa *Maple*.

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo se tratarán definiciones básicas y los resultados más importantes que permitirán introducir el contexto en el que se sitúa el tema del trabajo: las superficies regladas.

Estos conceptos se estudiaron en la asignatura Geometría Local de Curvas y Superficies, impartida en el tercer curso del Grado en Matemáticas, lo que justifica que no se incluyan las demostraciones, que pueden consultarse en las referencias [1] y [2].

### 1.1. Curva parametrizada regular

**Definición 1.1.1.** Una *curva parametrizada* en  $\mathbb{R}^3$  es una aplicación

$$\begin{aligned} \alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)), \end{aligned}$$

definida en un abierto  $(a, b)$  de clase  $\mathcal{C}^\infty$ . Además se dice que  $\alpha$  es *regular* si  $\alpha'(t) \neq 0$  para cualquier  $t \in (a, b)$ .

Se recuerda que  $\alpha \in \mathcal{C}^\infty$  significa que  $\alpha$  admite derivadas de todos los órdenes, es decir, que las funciones  $x(t), y(t), z(t)$  (llamadas coordenadas) son derivables en el sentido habitual.

**Definición 1.1.2.** Una curva parametrizada regular  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  se dice *cerrada de clase  $k$*  si  $\alpha^r(a) = \alpha^r(b)$ , para todo  $r = 0, \dots, k$ . Si  $k = \infty$ , diremos que la curva es *cerrada*.

**Definición 1.1.3.** Sea  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada regular. Se define el *vector tangente* a  $\alpha$  en  $\alpha(t)$ , denotado por  $\mathbf{t}(t)$ , como:

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}}(x'(t), y'(t), z'(t)).$$

A la norma de  $\alpha'(t)$  se le llama *velocidad* de  $\alpha$  en  $\alpha(t)$ .

Una vez vista la definición de curva parametrizada regular, veamos cómo se pueden obtener reparametrizaciones de ésta y qué debemos exigir para que esas reparametrizaciones sean también regulares.

**Definición 1.1.4.** Sean  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada regular y  $g : (c, d) \rightarrow (a, b)$  una función real biyectiva. Se dice que  $g$  es un *cambio de parámetros* de  $\alpha$  si se trata de una función de clase  $C^\infty$  que verifica que  $g'(\sigma) \neq 0$ , para todo  $\sigma \in (c, d)$ . En estas condiciones, se define la curva reparametrizada como  $\beta = \alpha \circ g$ .

**Definición 1.1.5.** Sean  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada regular y  $t_0 \in (a, b)$ . La función *parámetro arco*  $s : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  se define como:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\xi)| d\xi.$$

Esta función, por definición, nos proporciona la longitud de la curva  $\alpha$  entre el punto  $\alpha(t_0)$  y  $\alpha(t)$ . Además se puede demostrar que tiene la propiedad de que no depende de la parametrización tomada. Por otro lado, esto nos da una reparametrización de la curva en términos de  $s$ . A este parámetro  $s$  le llamaremos parámetro natural y a la parametrización *parametrización natural*. Usaremos la abreviatura “p.n.” para referirnos al parámetro natural.

**Teorema 1.1.1 (Caracterización del p.n.).** Una curva parametrizada regular  $\alpha(t)$  está *parametrizada naturalmente* si y sólo si  $|\alpha'(t)| = 1$ , para todo  $t \in (a, b)$ .

**Notación.** En el caso de p.n. se tiene que  $\mathbf{t}(s) = \alpha'(t)$ .

**Definición 1.1.6.** Sea  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada regular. A la familia de todas las curvas reparametrizadas de  $\alpha$  se le llama *curva regular*.

## 1.2. Triedro de Frenet

En este apartado definiremos los elementos básicos de una base ortonormal de vectores en  $\mathbb{R}^3$  que forman un sistema de referencia móvil a lo largo de una curva parametrizada regular  $\alpha$ , sistema que recibirá el nombre de Triedro de Frenet.

**Definición 1.2.1.** Sea  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada naturalmente. Se denomina *curvatura* de  $\alpha$  en  $\alpha(s)$ , a la función escalar  $k = k(s)$ , dada por

$$k(s) = |\alpha''(s)| = |\mathbf{t}'(s)|$$

donde  $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$  es el vector tangente de  $\alpha$  en  $\alpha(s)$ .

**Proposición 1.2.1.** Se verifican los siguientes resultados:

1. La curvatura de una curva es nula si y sólo si es una recta.
2. La curvatura de una circunferencia es constante. Si además, la curva es plana y de curvatura constante, entonces es una circunferencia.

**Definición 1.2.2.** Sea  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada naturalmente. Se define el *vector normal principal* a  $\alpha$  en  $\alpha(s)$  como un vector unitario en la dirección de  $\alpha''(s)$ , es decir,

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{k(s)},$$

que está bien definido en los puntos donde  $k(s) \neq 0$ .

**Definición 1.2.3.** Sea  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada naturalmente. Se define el *vector binormal* a  $\alpha$  en  $\alpha(s)$ , denotado por  $\mathbf{b}(s)$ , como el vector

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) = \alpha'(s) \wedge \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|} = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{|\alpha''(s)|}$$

Dado que el producto vectorial de dos vectores nos proporciona otro vector perpendicular a los anteriores y que el módulo de estos vectores definidos previamente es 1, podemos concluir que  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  en cada punto de  $\alpha$ , que recibe el nombre de *Triedro de Frenet*.

Tomando dos a dos los vectores anteriores, a cada punto de  $\alpha$  le corresponden tres planos afines distintos, con sus espacios de direcciones asociados.

Si  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una curva parametrizada naturalmente se tiene que  $\mathbf{b}'(s)$  es paralelo a  $\mathbf{n}(s)$ . Este hecho motiva el concepto de torsión de una curva.

**Definición 1.2.4.** Se define la *torsión* de una curva  $\alpha$  en  $\alpha(s)$ , denotada por  $\tau(s)$ , como el valor  $\tau(s) = -\mathbf{b}'(s) \cdot \mathbf{n}(s)$ .



**Teorema 1.2.1.** Sea  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada naturalmente. Entonces, la expresión de la *torsión* viene dada por:

$$\tau(s) = \frac{(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{|\alpha''(s)|^2},$$

donde  $(\cdot, \cdot, \cdot)$  denota el producto mixto de vectores de  $\mathbb{R}^3$ .

**Teorema 1.2.2.** La torsión de una curva  $\alpha$  es nula si y sólo si  $\alpha$  es plana.

**Teorema 1.2.3.** [Teorema de Frenet-Serret] Si  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una curva parametrizada naturalmente con curvatura positiva y  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$  es su triedro de Frenet, entonces, para cada  $s \in (a, b)$ :

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = k(s)\mathbf{n}(s), \\ \mathbf{n}'(s) = -k(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s), \\ \mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s). \end{cases}$$

**Definición 1.2.5.** Los planos coordenados, es decir, los planos formados por cada pareja de vectores de la base de Frenet de una curva en cada punto se denominan respectivamente:

1. *Plano Osculador*  $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle$ :  $(X - \alpha(s))\mathbf{b}(s) = 0$ ,
2. *Plano Normal*  $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$ :  $(X - \alpha(s))\mathbf{t}(s) = 0$ ,
3. *Plano Rectificante*  $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$ :  $(X - \alpha(s))\mathbf{n}(s) = 0$ ,

donde  $\alpha(s)$  es un punto genérico de la curva y  $X = (x, y, z)$  es un punto genérico de  $\mathbb{R}^3$ .

Veamos ahora algunos resultados que nos serán de utilidad en los siguientes capítulos y cuyas demostraciones podemos encontrarlas en [5] y [6].

**Definición 1.2.6.** Una *curva rectificante* es una curva regular  $\alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que su vector posición  $\alpha(s) \in \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$  para todo  $s$ , así que toda curva rectificante es de la forma

$$\alpha(s) = \lambda(s)\mathbf{t}(s) + \mu(s)\mathbf{b}(s).$$

**Teorema 1.2.4.** Sea  $\alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular parametrizada naturalmente con curvatura  $k > 0$ . Entonces son equivalentes:

- (i) La curva  $\alpha$  es rectificante.
- (ii) La componente tangencial del vector posición de la curva viene dada por  $\alpha\mathbf{t} = s + b$  para alguna constante  $b$ .

- (iii) La función  $\rho = |\alpha|$  satisface  $\rho^2 = s^2 + c_1s + c_2$  para ciertas constantes  $c_1$  y  $c_2$ .
- (iv) La función  $\rho$  no es constante mientras que el vector  $\alpha_N(s) = \alpha(s) - (\alpha(s)\mathbf{t}(s))\mathbf{t}(s)$  tiene longitud constante para todo  $s$ , donde  $N$  es el campo vectorial normal a la superficie en la que está contenida la curva.
- (v) La componente binormal del vector posición de la curva,  $\alpha\mathbf{b}$  y la torsión  $\tau$  no es nula.

**Teorema 1.2.5.** Sea  $\alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular parametrizada naturalmente con curvatura  $k > 0$ . Entonces  $\alpha$  es congruente a una curva rectificante si y solo si  $\tau/k = as + b$  para algunas constantes  $a$  y  $b$ .

### 1.3. La definición de superficies

Existen dos posibles aproximaciones a la definición de superficie. Así las superficies pueden ser definidas:

1. Como aplicaciones de un abierto del plano  $\mathbb{R}^2$  en el espacio  $\mathbb{R}^3$ , cumpliendo determinadas condiciones.
2. Como subconjuntos del espacio  $\mathbb{R}^3$ , cumpliendo determinadas condiciones.

**Definición 1.3.1.** Una *superficie parametrizada (s.p)* en  $\mathbb{R}^3$  es una aplicación  $\chi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donde  $U$  es abierto, tal que:

1.  $\chi$  es de clase  $\mathcal{C}^\infty$ .
2. Si  $\chi = \chi(u, v)$ , entonces,

$$\frac{\partial \chi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \chi}{\partial v} \neq 0$$

en todos los puntos de  $U$  (*Condición de Regularidad*).

Si, además,  $\chi$  es inyectiva, se llamará una *superficie simple (s.s.)*.

**Nota 1.3.1.** 1. A partir de ahora, se denotarán:

$$\frac{\partial \chi}{\partial u} = \chi_1 \quad y \quad \frac{\partial \chi}{\partial v} = \chi_2.$$

2. Si  $\chi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una s.s., por la inyectividad, dado cualquier  $p \in \chi(U)$ , existe un único  $(u_0, v_0) \in U$  tal que  $\chi(u_0, v_0) = p$ . Convendremos en decir que  $p$  tiene las coordenadas  $(u_0, v_0)$  (que realmente son las de  $\chi^{-1}(p)$ ). Por ello, al vector  $\chi_1(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$  lo escribiremos como  $\chi_1(p)$  (y lo mismo para  $\chi_2$ ) y lo dibujaremos en el punto  $p$ .
3. La condición de regularidad significa que, al ser los vectores  $\chi_1$  y  $\chi_2$  linealmente independientes en todos los puntos, si  $\chi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , la matriz jacobiana de la aplicación  $\chi$ ,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

tiene rango máximo (igual a 2) y, en consecuencia, que la diferencial  $D\chi$  es inyectiva.

**Definición 1.3.2.** Si  $\chi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una superficie simple, se define el *vector normal* a  $\chi$  en  $p = \chi(u_0, v_0)$  como el vector:

$$\mathbf{N}(u_0, v_0) = \frac{\chi_1 \wedge \chi_2}{|\chi_1 \wedge \chi_2|}.$$

**Definición 1.3.3.** Si  $\chi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una superficie simple. Se define el *plano tangente* a  $\chi$  en  $p = \chi(u_0, v_0)$ , denotado por  $T_p(\chi)$ , como el plano que pasa por dicho punto y que tiene como vector característico al vector normal  $\mathbf{N}$ .

Con estos elementos, podemos determinar la ecuación del plano tangente a cualquier superficie simple  $\chi$  en cualquier punto  $\chi(u_0, v_0)$ :

$$(X - \chi(u_0, v_0))\mathbf{N}(u_0, v_0) = 0 \equiv (X - \chi(u_0, v_0)) \frac{\chi_1 \wedge \chi_2}{|\chi_1 \wedge \chi_2|} = 0.$$

O, lo que es lo mismo,  $((X - \chi(u_0, v_0)), \chi_1, \chi_2) = 0$ .

Vamos a definir ahora el concepto de cambio de parámetros en una superficie simple.

**Definición 1.3.4.** Un *cambio de parámetros regular* es una aplicación biyectiva  $f : V \rightarrow U$  de clase de  $\mathcal{C}^\infty$  que verifica que  $|J(f)| \neq 0$ , donde  $J(f)$  denota la matriz jacobiana de  $f$ , es decir:

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial u_1} & \frac{\partial u_0}{\partial v_1} \\ \frac{\partial v_0}{\partial u_1} & \frac{\partial v_0}{\partial v_1} \end{pmatrix}.$$

**Definición 1.3.5.** Si  $y = \chi \circ f$ , es decir,  $y(u_1, v_1) = \chi(f(u_1, v_1)) = \chi(u_0, v_0)$ , entonces se dice que  $y$  es una *reparametrización* de  $\chi$ .

Veamos ahora las superficies definidas como subconjuntos del espacio  $\mathbb{R}^3$ .

**Definición 1.3.6.** Sea  $M$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  dotado de la topología euclídea relativa. Se dice que  $M$  es una *superficie regular (s.r)* o *superficie inmersa de  $\mathbb{R}^3$*  si para cada  $p \in M$  existe  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  abierto y existe  $\chi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  diferenciable (clase  $C^\infty$ ) tales que:

- (i)  $\chi(U) \subseteq M$  y es entorno abierto de  $p$  en  $M$  (es decir, existe  $G \subseteq \mathbb{R}^3$  abierto euclídeo con  $p \in G$  y tal que  $\chi(U) = G \cap M$ ).
- (ii)  $\chi$  es homeomorfismo sobre su imagen, dotada ésta de la topología euclídea relativa de  $\mathbb{R}^3$ .
- (iii)  $\chi$  es una *s.p* (y, por la condición (ii), una *s.s*).

Cualquier aplicación verificando (i) – (iii) se llama *una parametrización (p.l)* o *parametrización regular* de  $M$  en  $p$ . Si  $0 \in U$  y  $\chi(0) = p$ , se dice que la *p.l* está *centrada* en  $p$ . La aplicación inversa  $\chi^{-1} : \chi(U) \rightarrow U$  se llama *carta local* en  $p$  (obsérvese que existe en virtud de la condición (ii)). El entorno  $\chi(U)$  de  $p$  en  $M$  se llama *entorno coordinado*, las coordenadas  $(u(p), v(p)) = \chi^{-1}(p)$  se llaman las *coordenadas locales* de  $p$  y para cada  $i = 1, 2$ , la curva  $t \mapsto \chi((u_0, v_0) + te_i, e_1 = (1, 0)$  y  $e_2 = (0, 1)$ , se llama la *i-ésima curva (o línea) coordinada* de  $\chi(u_0, v_0)$ .

## 1.4. Curvas y Vectores Tangentes a una superficie

En este apartado veremos que las propiedades de una curva se conservan al ser aplicadas bajo superficies simples.

**Definición 1.4.1.** Sea  $\chi : U$  (abierto)  $\subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ ,  $\chi = \chi(u, v)$  una superficie simple. Se denomina *curva diferenciable* en  $\chi$  a toda curva parametrizada regular, diferenciable, contenida enteramente en  $\chi$ , es decir, a toda aplicación

$$\alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3, \quad \alpha = \alpha(t) = \chi(u(t), v(t)), \quad \text{para todo } t \in (a, b).$$

**Proposición 1.4.1.** Toda curva diferenciable en  $\chi$  es la imagen por  $\chi$  de una curva diferenciable en el dominio de  $\chi$  y recíprocamente.

**Definición 1.4.2.** Las curvas (o líneas) paramétricas en  $\chi$  son las imágenes por  $\chi$  de las curvas paramétricas de  $U$ , es decir, si  $\chi = \chi(u, v)$ , son las curvas  $u = \text{cte.}$  y  $v = \text{cte.}$  En otras palabras:

$$\begin{aligned}\alpha(u) &= \chi(u, v_0) \text{ es la } u\text{-curva paramétrica } v = v_0, \\ \beta(v) &= \chi(u_0, v) \text{ es la } v\text{-curva paramétrica } u = u_0.\end{aligned}$$

**Definición 1.4.3.** Un vector tangente a  $\chi$  en  $p$  es un vector tangente a cualquier curva diferenciable  $\alpha$  en  $\chi$  que pase por  $p$ . Es decir,  $u$  es un vector tangente a  $\chi$  en  $p$  si existe  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\alpha = \alpha(t)$ , con  $\alpha((a, b)) \subseteq \chi(U)$  y  $\alpha(t_0) = p$ ,  $\alpha'(t_0) = u$ , para cierto  $t_0 \in (a, b)$ . Se denota por  $T_p(\chi)$  al conjunto:

$$T_p(\chi) = \{u \in \mathbb{R}^3; u \text{ es un vector tangente a } \chi \text{ en } P\}.$$

**Definición 1.4.4.**  $T_p(\chi)$  es un espacio vectorial de dimensión 2, es decir, geoméricamente,  $T_p(\chi)$  es un plano. Más concretamente,  $T_p(\chi)$  es el plano tangente a  $\chi$  en  $P$ . Además, una base de  $T_p(\chi)$  viene dada por los vectores  $\{\chi_1(p), \chi_2(p)\}$ .

**Proposición 1.4.2.** Un vector  $u$  pertenece a  $T_p(\chi)$  si y sólo si  $u = \lambda\chi_1(p) + \mu\chi_2(p)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

## 1.5. Geometría intrínseca y extrínseca

Es esta sección vamos a estudiar los conceptos intrínsecos a una superficie, es decir, aquellos que dependen sólo de los coeficientes  $g_{ij}$  de la Primera Forma Fundamental de la superficie. Así como los conceptos extrínsecos de una superficie, es decir, aquellos que no dependen solo de los coeficientes  $g_{ij}$  de la Primera Forma Fundamental de la superficie.

**Definición 1.5.1.** Sea  $\chi = \chi(u, v)$ ,  $\chi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie simple,  $P \in \chi(U)$  un punto de la misma,  $T_P(\chi)$  el plano tangente a  $\chi$  en  $P$ ,  $\{\chi_1(P), \chi_2(P)\}$ , la base de  $T_P(\chi)$ ,  $X$  e  $Y$  dos vectores tangentes a  $\chi$  en  $P$ , dados, respectivamente, por las expresiones  $X = \sum X^i \chi_i$  e  $Y = \sum Y^j \chi_j$ . Bajo estas condiciones, se define la *Primera Forma Fundamental* de la superficie en cada punto como aplicación

$$I : T_P(\chi) \times T_P(\chi) \mapsto \mathbb{R} \quad | \quad I(X, Y) = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} X^i Y^j,$$

donde los

$$g_{ij} = \chi_i(u, v) \cdot \chi_j(u, v)$$

son los denominados coeficientes de la Primera Forma Fundamental de la superficie.

**Definición 1.5.2.** Sea  $\chi = \chi(u, v)$ ,  $\chi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie simple,  $P \in \chi(U)$  un punto de la misma,  $T_P(\chi)$  el plano tangente a  $\chi$  en  $P$ ,  $\{\chi_1(P), \chi_2(P)\}$ , la base de  $T_P(\chi)$ ,  $X$  e  $Y$  dos vectores tangentes a  $\chi$  en  $P$ , dados, respectivamente, por las expresiones  $X = \sum X^i \chi_i$  e  $Y = \sum Y^j \chi_j$ . Bajo estas condiciones, se define la *Segunda Forma Fundamental* de la superficie en cada punto como aplicación

$$II : T_P(\chi) \times T_P(\chi) \mapsto \mathbb{R} \quad | \quad II(X, Y) = \sum_{i,j=1}^2 L_{ij} X^i Y^j,$$

donde los

$$L_{ij} = \chi_{ij} \cdot N = \chi_{ij} \frac{\chi_1 \wedge \chi_2}{|\chi_1 \wedge \chi_2|} = \frac{(\chi_1 \ \chi_2 \ \chi_{ij})}{|\chi_1 \wedge \chi_2|} = \frac{(\chi_1 \ \chi_2 \ \chi_{ij})}{\sqrt{g}}$$

son los denominados coeficientes de la Segunda Forma Fundamental de la superficie.

**Definición 1.5.3.** Sea  $\alpha(s)$  una curva parametrizada naturalmente sobre una superficie  $\chi$ , que pasa por un punto  $P$  de la misma y  $X, Y$  son dos vectores tangentes a  $\chi$  en  $P$ . Se tiene entonces que  $\alpha''(s) = k(s)\mathbf{n}(s) = K_g(s)S(s) + K_N(s)N(s)$ , donde  $S(s) = N(s) \wedge \mathbf{t}(s)$  es el *vector normal intrínseca* a  $\alpha$  en cada punto,  $K_g = (\mathbf{t}(s), \mathbf{t}'(s), N(s))$  es la *curvatura geodésica* de  $\alpha$  en cada punto y  $K_N(s)$  es la *curvatura normal*.

**Teorema 1.5.1.** La función

$$K_N : T_P(M) \mapsto \mathbb{R} \quad | \quad K_N(X) = \frac{\sum L_{ij} X^i X^j}{\sum g_{ij} X^i X^j}$$

posee extremos en  $T_P(M)$ .

**Definición 1.5.4.** Los valores  $K_1$  y  $K_2$  en los que la función  $K_N(X)$  alcanza un máximo y un mínimo en  $T_P(M) = \{X \in T_P(M) \mid X \text{ es unitario}\}$  se denominan *curvaturas principales* de  $M$  en  $P$ .

Sea  $M$  una superficie y sean  $K_1$  y  $K_2$  las curvaturas principales.

**Definición 1.5.5.** Se define la *curvatura de Gauss* o *Curvatura Total* de  $M$  y se representa por  $K$  como el producto de las curvaturas principales, es decir,  $K = K_1 K_2$ .

**Teorema 1.5.2.** Se verifica:

$$K = K_1 K_2 = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

## 1.6. Superficies regladas y algunos ejemplos

A lo largo de este apartado presentaremos algunas de las principales características y propiedades de las que gozan las superficies regladas y que resultan fundamentales para el estudio más profundo de las mismas.

**Definición 1.6.1.** Una *superficie reglada* es aquella que tiene la propiedad de que por cada uno de sus puntos pasa una línea recta que está contenida enteramente en dicha superficie. En consecuencia, la superficie está formada por un número infinito de rectas, que se denominan *generadores rectilíneos* o *generatrices* de la superficie.

Pasemos ahora a parametrizar dicha superficie reglada.

Sea  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular de clase  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 1$  con  $(a, b)$  lo suficientemente pequeño para que  $\alpha$  sea inyectiva y tal que esté sobre la superficie, siendo transversal a las generatrices. Denominamos a esta curva *directriz* de la superficie. En cada punto de ella tomamos un vector unitario, dirección del generador que pasa por ese punto. Este vector unitario depende del parámetro de la curva, digamos  $u$ , y por tanto, tenemos otra función  $\omega = \omega(u)$  que nos describe a dichos vectores unitarios y que podemos asumir que es de clase mayor o igual que 1. A dicho vector lo denominamos campo de direcciones.

Ahora podemos escribir la ecuación de la superficie de la forma

$$\chi(u, v) = \alpha(u) + v \omega(u), \quad (1.1)$$

donde si un punto es  $\chi(u_0, v_0)$ ,  $u_0$  indica la recta de la superficie en la que está el punto y  $v_0$  la posición del punto en dicha recta.

Observamos que la aplicación definida (1.1) no nos da siempre una superficie simple. En un caso así, será necesario restringir su dominio de definición hasta conseguirlo.

Veamos ahora algunos ejemplos de superficies regladas:

### Ejemplos.

#### 1. Superficies Cilíndricas.

Son aquellas superficies que están formadas por todas las rectas paralelas que se apoyan en una curva plana cualquiera (directriz) y que son

perpendiculares al plano de esa curva.

Los ejemplos más habituales son el cilindro circular, el elíptico, el parabólico, el hiperbólico, *etc.*

Si tomamos como curva la circunferencia centrada en el origen, de radio  $a$ , situada en el plano  $z = 0$  y como vector unitario diferenciable el vector unitario perpendicular a dicho plano, es decir, si tomamos

$$\begin{cases} \alpha = \alpha(u) = (a \cos u, a \sin u, 0) \\ \omega = \omega(u) = (0, 0, 1) \end{cases}$$

entonces obtenemos el cilindro circular:

$$\chi = \chi(u, v) = (a \cos u, a \sin u, v) \quad \text{con} \quad \chi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3.$$

## 2. Superficies Cónicas.

Son aquellas superficies que están formadas por todas las rectas que se apoyan en una curva cerrada plana cualquiera (directriz) y que pasan por un punto exterior a ella (que será el vértice de la superficie).

El caso más habitual es el del *cono circular*, en el que la directriz es una circunferencia centrada en  $(0,0,b)$ , de radio  $a$ , situada en el plano  $z = b$ . Es decir,

$$\alpha = \alpha(u) = (a \cos u, a \sin u, b),$$

con  $b \neq 0$  y como vector unitario diferenciable un vector unitario en la dirección de la recta que une un punto cualquiera de esa circunferencia con el origen (que será el vértice del cono), es decir,

$$\omega = \omega(u) = \frac{\alpha(u)}{|\alpha(u)|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(a \cos u, a \sin u, b).$$

Por tanto, la ecuación del cono es:

$$\chi(u, v) = \left( a \left( 1 + \frac{v}{a^2 + b^2} \right) \cos u, a \left( 1 + \frac{v}{a^2 + b^2} \right) \sin u, b \left( 1 + \frac{v}{a^2 + b^2} \right) \right).$$

Observemos que para que la ecuación del cono sea una superficie simple, es necesario que  $(u, v) \in \mathbb{R} \times (-\sqrt{a^2 + b^2}, +\infty)$  (ó bien que  $(u, v) \in \mathbb{R} \times (-\infty, -\sqrt{a^2 + b^2})$ ) ya que

$$\chi u \times \chi v = 0 \Leftrightarrow v = -\sqrt{a^2 + b^2}.$$

El vértice del cono se obtiene precisamente para  $v = -\sqrt{a^2 + b^2}$  y es, por tanto, un punto singular de la superficie.



### 3. Superficie Reglada Desarrollable Tangencial de una curva.

Es la superficie formada por todas las rectas tangentes a una curva regular no recta.

Sea  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , parametrizada naturalmente (aunque esto último no es imprescindible). Tomamos como  $\omega(u) = \mathbf{t}(u)$ . En consecuencia la ecuación de la superficie es:

$$\chi(u, v) = \alpha(u) + v\mathbf{t}(u).$$

Es claro que:

$$\left. \begin{array}{l} \chi_u = \mathbf{t}(u) + vk(u)\mathbf{n}(u) \\ \chi_v = \mathbf{t}(u) \end{array} \right\} \Rightarrow \chi_u \times \chi_v = -vk(u)\mathbf{b}(u) = 0 \Leftrightarrow v = 0,$$

es decir, en los puntos de  $\alpha$ , que son, por tanto, singulares. Tomaremos, pues,  $(u, v) \in (a, b) \times (0, +\infty)$  (ó bien,  $(u, v) \in (a, b) \times (-\infty, 0)$ ).

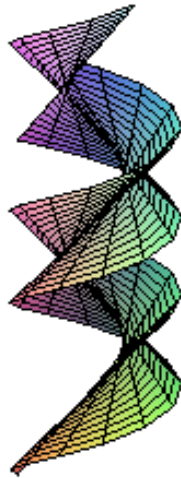


Figura 1.1: Superficie tangente a una hélice.

### 4. Superficie Reglada de las normales principales de una curva.

Es la superficie formada por todas las rectas normales a una curva regular no recta.

Una parametrización de esta superficie viene dada por

$$\chi = \chi(u, v) = \alpha(u) + v\mathbf{n}(u),$$

donde  $\alpha(u)$  es la curva y  $\omega(u) = \mathbf{n}(u)$ .

Entonces:

$$\left. \begin{aligned} \chi_u &= \mathbf{t}(u) + v(-k(u)\mathbf{t}(u) + \tau(u)\mathbf{b}(u)) \\ \chi_v &= \mathbf{n}(u) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \chi_u \times \chi_v = -v\tau(u)\mathbf{t}(u) + (1 - vk(u))\mathbf{b}(u) \neq 0.$$

Esta superficie puede tener un punto singular si  $\tau(u) = 0$ ,  $v = \frac{1}{k(u)}$ .

En el caso de que  $\alpha$  sea una circunferencia, el centro de  $\alpha$  es un punto singular de la superficie de las normales principales de  $\alpha$ , que coincide con el cono de vértice el centro de  $\alpha$  y directriz  $\alpha$ .

### 5. Superficie Reglada de las binormales de una curva.

Es la superficie formada por todas las rectas binormales a una curva regular no recta.

Si  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  es la curva, la superficie es:

$$\chi = \alpha(u) + v\mathbf{b}(u).$$

Se tiene que:

$$\left. \begin{aligned} \chi_u &= \mathbf{t}(u) - v\tau(u)\mathbf{n}(u) \\ \chi_v &= \mathbf{b}(u) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \chi_u \times \chi_v = -\mathbf{n}(u) - v\tau(u)\mathbf{t}(u) \neq 0.$$

Si  $\alpha$  es una circunferencia, la superficie reglada de sus binormales es el cilindro circular sobre  $\alpha$ .

### 6. Conoides Rectos.

Son las superficies formadas por las rectas que se mueven paralelamente a un plano y se apoyan en una recta perpendicular a dicho plano. Si suponemos que el plano es  $z = 0$  y la recta el eje  $OZ$ , una parametrización de estas superficies viene dada por:

$$\chi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, f(u)).$$

Entonces:

$$\left. \begin{aligned} \chi_u &= (-v \sin u, v \cos u, f'(u)) \\ \chi_v &= (\cos u, \sin u, 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \chi_u \times \chi_v = (-f'(u) \sin u, f'(u) \cos u, -v^2).$$

Como directriz se puede tomar cualquier curva  $v = cte$  y las generatrices serán rectas perpendiculares al eje  $OZ$  trazadas desde la curva.

### 7. Helicoide Recto.

Es un caso particular de conoide recto en el que  $f(u) = au + b$ , con  $a$  y  $b$  constantes. Su nombre se debe a que las directrices (curvas  $v = cte$ ) son hélices circulares del mismo paso. También se puede obtener como la superficie de las normales de la hélice circular.

### 8. El plano.

Es la superficie reglada obtenida a partir de cualquier curva  $\alpha = \alpha(u) = \mathbf{a} + u\mathbf{b}$  plana, siendo  $\omega(u) = \mathbf{c}$  cualquier vector contenido en el plano de  $\alpha$ , linealmente independiente con  $\mathbf{b}$ . El plano queda entonces descrito como:

$$\chi(u, v) = \mathbf{a} + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}.$$

### 9. Hiperboloide de revolución.

Es la superficie reglada engendrada por la circunferencia  $\alpha = \alpha(u) = (\cos u, \sin u, 0)$  y el vector  $\omega = \omega(u) = \alpha'(u) + e_3 = (-\sin u, \cos u, 0) + (0, 0, 1) = (-\sin u, \cos u, 1)$ .

Una parametrización de esta superficie viene entonces dada por

$$\chi = \chi(u, v) = (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, v).$$

Esta superficie responde a la ecuación general  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  y puede comprobarse que tomando  $\omega(u) = -\alpha'(u) + e_3$  también se obtiene la misma superficie, por lo que este hiperboloide, aparte de ser una superficie de revolución, es una superficie *doblemente reglada*.

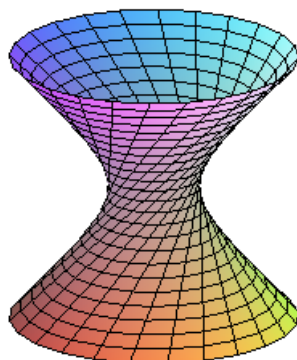


Figura 1.2: Hiperboloide de revolución.

### 10. Paraboloide Hiperbólico.

Tenemos la superficie dada por la ecuación general  $z = xy$ . Vamos a expresar la superficie en forma paramétrica:

$$\chi(u, v) = (u, v, uv).$$

Veamos que efectivamente, la superficie admite las dos parametrizaciones:

$$\chi = \chi(u, v) = \alpha(u) + v \omega(u) = (u, 0, 0) + v(0, 1, u)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(u, v) = \alpha(u) + v \omega(u) = (0, v, 0) + u(1, 0, v)$$

y como los dos vectores  $(0, 1, u)$  y  $(1, 0, v)$  son linealmente independientes, el paraboloide hiperbólico es una superficie doblemente reglada.

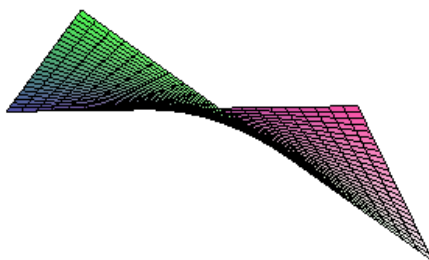


Figura 1.3: Paraboloide Hiperbólico.

**Definición 1.6.2.** Una superficie reglada  $\chi = \chi(u, v) = \alpha(u) + v\omega(u)$  se dice *no cilíndrica* si  $\omega'(u) \neq 0$ , para todo  $u$ .

**Definición 1.6.3.** Se denomina *línea de estricción* de una superficie reglada  $\chi = \chi(u, v) = \alpha(u) + v\omega(u)$  a toda curva  $\gamma = \gamma(u)$  sobre la superficie (es decir, contenida enteramente sobre la superficie) tal que  $\gamma'(u)$  sea ortogonal a  $\omega'(u)$  para todo  $u$ , o lo que es lo mismo,  $\gamma'(u)\omega'(u) = 0$ .

Nótese que para que exista la línea de estricción de una superficie reglada, esta superficie debe ser no cilíndrica, ya que el vector 0 se considera siempre ortogonal (y también paralelo) a cualquier otro vector.

Los puntos de  $\gamma$  se llaman *puntos centrales* de la superficie reglada o *puntos de estricción*.

**Nota 1.6.1.** Como  $\gamma$  es una curva que depende de  $u$  y las generatrices se obtienen para  $u = \text{cte}$ , esto quiere decir que hay un punto de estricción en cada generatriz.

**Teorema 1.6.1.** En las condiciones anteriores, la línea de estricción de una superficie reglada  $\chi = \chi(u, v) = \alpha(u) + v \omega(u)$  puede parametrizarse según:

$$\gamma(u) = \alpha(u) - \frac{\alpha'(u)\omega'(u)}{|\omega'(u)|^2} \omega(u).$$

Es necesario que  $\omega(u)$  sea unitario en esta parametrización.

**Teorema 1.6.2.** La línea de estricción de una superficie reglada es independiente de la directriz elegida en la parametrización de dicha superficie, es decir que, si se parametriza la superficie reglada por medio de otra directriz, la línea de estricción sigue siendo la misma.

**Corolario 1.6.1.** Una superficie reglada puede parametrizarse como  $\chi = \chi(u, v) = \gamma(u) + v \omega(u)$ , donde  $\gamma(u)$  es la línea de estricción de la superficie.

**Definición 1.6.4.** Sea  $\chi = \chi(u, v) = \alpha(u) + v \omega(u)$  una superficie reglada no cilíndrica, siendo  $\alpha : (a, b) \mapsto \mathbb{R}^3$  la directriz. Se denomina *parámetro de distribución* de dicha superficie a la función escalar:

$$\lambda : (a, b) \mapsto \mathbb{R} \mid \lambda = \lambda(u) = \frac{(\alpha'(u), \omega(u), \omega'(u))}{|\omega(u)|^2}.$$

Es necesario que  $\omega(u)$  sea unitario en esta parametrización.

## Capítulo 2

# Superficies regladas desarrollables

### 2.1. Caracterización de las superficies regladas desarrollables

Dentro de las superficies regladas encontramos un subconjunto destacado, el de las superficies desarrollables, cuyo nombre trata de reflejar la propiedad de que pueden ser “aplanadas” hasta conseguir planos sin modificar las distancias entre los puntos. Intuitivamente, se trataría de una superficie que puede transformarse en un plano, cortándola y doblándola, pero sin distorsionarla.

**Definición 2.1.1.** Una superficie reglada se dice *desarrollable* si el plano tangente es único (es decir, es constante) a lo largo de cada generatriz  $u = cte$ , es decir, si el vector normal  $N(u, v)$  a lo largo de cada generatriz  $u = cte$  no depende de  $v$ .

Es fácil probar que una superficie reglada es desarrollable si y sólo si tiene curvatura de Gauss idénticamente nula y, por tanto, es localmente isométrica a un plano.

**Teorema 2.1.1. [Teorema de Caracterización de las Superficies Regladas Desarrollables]** Una superficie reglada  $\chi = \chi(u, v) = \alpha(u) + v \omega(u)$  es desarrollable si y sólo si  $(\alpha'(u), \omega(u), \omega'(u)) = 0$ .

*Demostración.* Consideramos un punto del generador  $u = u_0$ . Se tiene que

$$\chi_{u_0} \times \chi_v = \alpha'(u_0) \times \omega(u_0) + v\omega'(u_0) \times \omega(u_0)$$

es paralelo al vector normal en dicho punto  $u=u_0$ . Para  $v_0=0$ , tenemos:

$$\chi_{u_0} \times \chi_{v_0} = \alpha'(u_0) \times \omega(u_0)$$

Por tanto, la superficie será desarrollable si y sólo si  $\chi_{u_0} \times \chi_{v_0}$  es paralelo a  $\chi_u \times \chi_v$  para todo  $u$ , esto es, si y sólo si, para todo  $u$ ,

$$(\chi_u \times \chi_v) \times (\chi_{u_0} \times \chi_{v_0}) = v(\omega'(u_0) \times \omega(u_0)) \times (\alpha'(u_0) \times \omega(u_0)) = 0,$$

es decir, si y sólo si:

$$\begin{aligned} & \omega'(u_0) \times \omega(u_0) \times (\alpha'(u_0) \times \omega(u_0)) \\ &= (\omega'(u_0), \omega(u_0), \omega(u_0))\alpha'(u_0) - (\omega'(u_0), \omega(u_0), \alpha'(u_0))\omega(u_0) = 0, \end{aligned}$$

por tanto,

$$(\alpha'(u_0), \omega(u_0), \omega'(u_0)) = 0$$

y esto en cada generador, es decir, para todo  $u_0$ .  $\square$

**Corolario 2.1.1.** Una superficie reglada  $\chi = \chi(u, v) = \alpha(u) + v\omega(u)$  es desarrollable si y sólo si su parámetro de distribución  $\lambda(u)$  es nulo, para todo  $u$ .

*Demostración.* Es inmediato por la definición del parámetro de distribución

$$\lambda(u) = \frac{(\alpha'(u), \omega(u), \omega'(u))}{|\omega(u)|^2} = 0,$$

por el Teorema 2.1.1.  $\square$

**Teorema 2.1.2.** Las superficies regladas de las normales principales y de las binormales de una curva regular  $\alpha(u)$  son desarrollables si y sólo si la curva  $\alpha$  es plana.

*Demostración.* Para el caso de *superficies regladas de las binormales* de  $\alpha$  dadas por  $\chi(u, v) = \alpha(u) + v\mathbf{b}_\alpha(u)$ , tenemos que ver cuando

$$(\mathbf{t}_\alpha(u), \mathbf{b}(u), -\tau(u)\mathbf{n}(u)) = 0.$$

Para ello, hacemos el producto mixto en la base  $\{\mathbf{t}(u), \mathbf{n}(u), \mathbf{b}(u)\}$ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\tau(u) & 0 \end{vmatrix} = \tau(u).$$

Por tanto, las *superficies regladas de las binormales* son desarrollables si y solo si  $(\mathbf{t}_\alpha(u), \mathbf{b}(u), -\tau(u)\mathbf{n}(u)) = 0$  y esto ocurre si y solo si  $\tau(u) = 0$ . Por tanto, por el Teorema 1.2.2  $\alpha(u)$ , es plana.

Para el caso de *superficies regladas de las normales principales* de  $\alpha$  dadas por:  $\chi(u, v) = \alpha(u) + v\mathbf{n}_\alpha(u)$ , habrá que ver cuando

$$(\mathbf{t}_\alpha(u), \mathbf{n}(u), -k(u)\mathbf{t}(u) + \tau(u)\mathbf{b}(u)) = 0.$$

Al igual que antes, hacemos el producto mixto en la base  $\{\mathbf{t}(u), \mathbf{n}(u), \mathbf{b}(u)\}$ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -k(u) & 0 & \tau(u) \end{vmatrix} = \tau(u).$$

Por tanto, las *superficies regladas de las normales principales* son desarrollables si y solo si  $(\mathbf{t}_\alpha(u), \mathbf{n}(u), -k(u)\mathbf{t}(u) + \tau(u)\mathbf{b}(u)) = 0$  y esto ocurre si y solo si  $\tau(u) = 0$ . Por tanto, por el Teorema 1.2.2,  $\alpha(u)$  es plana. □

Veamos algunos de los ejemplos más usuales de superficies regladas desarrollables.

### **Ejemplo 2.1.1. Cilindro circular.**

Tal y como hemos visto en la Sección 1.5 una parametrización del cilindro circular es:

$$\chi(u, v) = \alpha(u) + v\omega(u) = (a \cos u, a \sin u, 0) + v(0, 0, 1) = (a \cos u, a \sin u, v).$$

Para comprobar que se trata de una superficie reglada desarrollable, tenemos que ver que se cumple el Teorema 2.1.1, es decir, hay que probar que  $(\alpha'(u), \omega(u), \omega'(u)) = 0$ .

En este caso, tenemos:

$$\begin{cases} \alpha'(u) &= (-a \sin u, a \cos u, 0) \\ \omega(u) &= (0, 0, 1) \\ \omega'(u) &= (0, 0, 0). \end{cases}$$

Por tanto, es obvio que  $(\alpha'(u), \omega(u), \omega'(u)) = 0$  ya que  $\omega'(u) = (0, 0, 0)$ .



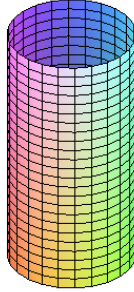


Figura 2.1: Cilindro circular.

**Ejemplo 2.1.2. Cono.**

La parametrización del cono es:

$$\begin{aligned} \chi(u, v) &= \alpha(u) + v\omega(u) = (a \cos u, a \operatorname{sen} u, b) + v \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (a \cos u, a \operatorname{sen} u, b) = \\ &= \left( a \left( 1 + \frac{v}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \cos u, a \left( 1 + \frac{v}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \operatorname{sen} u, b \left( 1 + \frac{v}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \right), \end{aligned}$$

tal y como hemos visto en la Sección 1.5.

Del mismo modo que hemos comprobado que el cilindro circular es una superficie reglada desarrollable, vamos a probar que el cono también lo es.

$$\begin{cases} \alpha'(u) &= (-a \operatorname{sen} u, a \cos u, 0) \\ \omega(u) &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (a \cos u, a \operatorname{sen} u, b) \\ \omega'(u) &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-a \operatorname{sen} u, a \cos u, 0). \end{cases}$$

Luego,

$$(\alpha'(u), \omega(u), \omega'(u)) = \begin{vmatrix} -a \operatorname{sen} u & a \cos u & 0 \\ \frac{a \cos u}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{a \operatorname{sen} u}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ -\frac{a \operatorname{sen} u}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{a \cos u}{\sqrt{a^2 + b^2}} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Por tanto, el cono es una superficie reglada desarrollable.

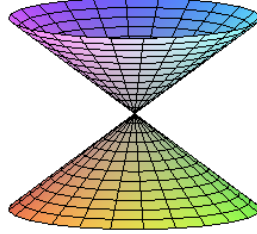


Figura 2.2: Cono circular.

**Ejemplo 2.1.3.** Vamos a construir la superficie formada por las normales de la hélice circular, cuya parametrización es:

$$\alpha(u) = (\cos u, \sen u, u).$$

Obtenemos entonces, la siguiente superficie reglada:

$$\begin{aligned} \chi(u, v) &= \alpha(u) + v\mathbf{n}_\alpha(u) = (\cos u, \sen u, u) + v(-\cos u, -\sen u, 0) \\ &= (\cos u(1 - v), \sen u(1 - v), u). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Vamos a comprobar, que efectivamente es una superficie reglada no desarrollable. En este caso, tenemos:

$$\begin{cases} \alpha'(u) &= (-\sen u, \cos u, 1) \\ \omega(u) &= (-\cos u, -\sen u, 0) \\ \omega'(u) &= (\sen u, -\cos u, 0). \end{cases}$$

Se tiene entonces,

$$(\alpha'(u), \omega(u), \omega'(u)) = \begin{vmatrix} -\sen u & \cos u & 1 \\ -\cos u & -\sen u & 0 \\ \sen u & -\cos u & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Como  $(\alpha'(u), \omega(u), \omega'(u)) \neq 0$ , la superficie es no desarrollable.

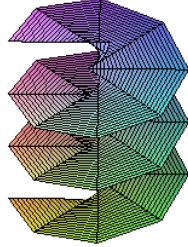


Figura 2.3: Superficie formada por las normales de la hélice circular.

#### Ejemplo 2.1.4. Banda de Moebius.

Una parametrización de la Banda de Moebius es:

$$\begin{aligned} \chi(u, v) &= (2 \cos u, 2 \operatorname{sen} u, 0) + v \left( -\operatorname{sen} \frac{u}{2} \cos u, -\operatorname{sen} \frac{u}{2} \operatorname{sen} u, \cos \frac{u}{2} \right) = \\ &= \left( \left( 2 - v \operatorname{sen} \left( \frac{u}{2} \right) \right) \cos u, \left( 2 - v \operatorname{sen} \left( \frac{u}{2} \right) \right) \operatorname{sen} u, v \cos \left( \frac{u}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Vamos a calcular  $(\alpha'(u) \ \omega(u) \ \omega'(u))$ :

$$\begin{cases} \alpha'(u) = (-2 \operatorname{sen} u, 2 \cos u, 0) \\ \omega(u) = \left( -\operatorname{sen} \frac{u}{2} \cos u, -\operatorname{sen} \frac{u}{2} \operatorname{sen} u, \cos \frac{u}{2} \right) \\ \omega'(u) = \left( -\frac{1}{2} \cos \frac{u}{2} \cos u + \operatorname{sen} \frac{u}{2} \operatorname{sen} u, -\frac{1}{2} \cos \frac{u}{2} \operatorname{sen} u + \operatorname{sen} \frac{u}{2} \cos u, -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{u}{2} \right). \end{cases}$$

Haciendo el producto mixto obtenemos:

$$(\alpha'(u), \omega(u), \omega'(u)) = -1 + 2 \cos \frac{u}{2} \operatorname{sen} \frac{u}{2} \operatorname{sen} 2u \neq 0.$$

Por tanto, la Banda de Moebius es una superficie reglada no desarrollable.

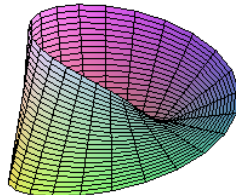


Figura 2.4: Banda de Moebius.

### Ejemplo 2.1.5. Conoide de Plücker.

Consideramos la superficie dada por la ecuación  $z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ . Una parametrización de dicha superficie es:

$$\chi(u, v) = (0, 0, 2 \cos u \sen u) + v(\cos u, \sen u, 0) = (v \cos u, v \sen u, 2 \cos u \sen u).$$

Veamos si se trata de una superficie reglada desarrollable o no. Para ello calculamos  $(\alpha'(u), \omega(u), \omega'(u))$ . En este caso, tenemos:

$$\begin{cases} \alpha'(u) &= (0, 0, -2 \sen^2 u + 2 \cos^2 u) \\ \omega(u) &= (\cos u, \sen u, 0) \\ \omega'(u) &= (-\sen u, \cos u, 0). \end{cases}$$

Obtenemos entonces:

$$(\alpha'(u), \omega(u), \omega'(u)) = 2(-\sen^2 u + \cos^2 u) = 2 \cos(2u).$$

Se tiene que  $\cos(2u) = 0$  si y sólo si  $u = \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$ . Esto quiere decir, que la superficie tiene curvas (por ejemplo,  $u = \frac{1}{4}$ ) en las cuáles el parámetro de distribución es nulo, pero también tiene regiones donde no es nulo. Por tanto, el Conoide de Plücker no es una superficie desarrollable, al menos localmente no lo es.

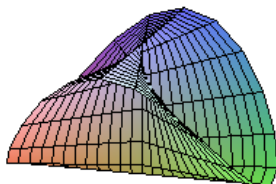


Figura 2.5: Conoide de Plücker.

## 2.2. Clasificaciones de superficies regladas desarrollables

**Teorema 2.2.1.** Se verifica que toda superficie reglada desarrollable tangencial es una superficie reglada desarrollable.

*Demostración.* Para probar que la superficie reglada desarrollable tangencial  $\chi(u, v) = \alpha(u) + v\mathbf{t}_\alpha(u)$  es desarrollable (podemos suponer  $u=\text{p.n}$  de  $\alpha$ ), habrá que probar que  $(\alpha'(u) \ \mathbf{t}_\alpha(u) \ \mathbf{t}'_\alpha(u)) = 0$ .

Para ello, como  $u=\text{p.n}$  de  $\alpha$ , se tiene que  $\alpha'(u) = \mathbf{t}_\alpha$ .

Por tanto,  $(\mathbf{t}_\alpha(u) \ \mathbf{t}_\alpha(u) \ \mathbf{t}'_\alpha(u)) = 0$  por tener vectores paralelos (en este caso iguales).  $\square$

**Teorema 2.2.2.** Localmente, toda superficie reglada desarrollable no plana (el plano es trivialmente una superficie reglada desarrollable, al ser constante  $N(u, v)$ ) es un cilindro, un cono, una desarrollable tangencial (en entornos que no contengan puntos de acumulación de ceros de  $\omega'$ ) o unión de algunos de los tipos anteriores.

*Demostración.* Consideramos  $\chi(u, v) = \gamma(u) + v\omega(u)$ , con  $\gamma = \gamma(u)$  la línea de estricción. Consideramos  $|\omega(u)| = 1$  y por tanto,  $\omega(u) \cdot \omega'(u) = 0$ .

Como la superficie es desarrollable  $(\gamma'(u), \omega(u), \omega'(u)) = 0$ . Distinguimos los siguientes casos:

1.  $\omega(u) \times \omega'(u) = 0$ , entonces se tiene que  $\omega$  es paralelo a  $\omega'(u)$  lo que implica que  $\omega'(u) = 0$ , es decir, que  $\omega(u)$  es constante. Como  $\omega$  es la dirección de las generatrices, esto se traduce en que la superficie sea un cilindro.

2.  $\omega(u) \times \omega'(u) \neq 0$ . Podemos distinguir dos casos, que los ceros de la expresión sean aislados o se acumulen. Como los ceros del producto son los ceros de  $\omega'(u)$  el caso de acumulación vamos a dejarlo aparte. Por otro lado vemos el caso donde los ceros sean aislados.

Se tiene que  $\omega'(u) \neq 0$ , por tanto, la superficie no es un cilindro y su parámetro de distribución es idénticamente nulo.

En consecuencia, la línea de estricción es el lugar de los puntos singulares de la superficie. Si  $\gamma' \neq 0$ , como  $\gamma'(u)\omega'(u) = 0$ , entonces  $\gamma'(u)$  es paralelo a  $\omega'(u)$ . Entonces la superficie es una reglada desarrollable tangencial. Si  $\gamma' = 0$ , la línea de estricción es un punto y la superficie es un cono de vértice ese punto (todas las generatrices pasan por el punto, ya que toda generatriz tiene un punto de estricción, luego estamos en un cono).

En otro caso, la superficie es una unión de conos y desarrollables tangenciales.

3. La superficie es una unión de cilindros, conos y desarrollables tangenciales.

$\square$

# Capítulo 3

## Superficies regladas no desarrollables

En este capítulo vamos a estudiar la superficies regladas no desarrollables, es decir, aquellas que no pueden extenderse sobre un plano.

### 3.1. Curvas esféricas en $\mathbb{R}^3$

En esta sección vamos a definir algunas nociones, fórmulas y conclusiones, que necesitaremos para clasificar las superficies regladas no desarrollables.

Consideramos  $\alpha(s)$  una curva esférica parametrizada naturalmente. Se tiene que:

$$|\alpha(s)|^2 = r^2, \quad r > 0.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $r = 1$ . Sean  $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$  e  $y(s) = \mathbf{t}(s) \times \alpha(s)$ . Entonces  $\mathbf{t}(s), \alpha(s)$  e  $y(s)$  forman una base ortonormal directa a lo largo de la curva  $\alpha(s)$  en  $\mathbb{R}^3$ . Llamaremos *base esférica de Frenet* en cada  $\alpha(s)$  a  $\{\mathbf{t}(s), \alpha(s), y(s)\}$ . Entonces existe una función  $k_e(s)$  tal que:

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = -\alpha(s) + k_e(s)y(s) \\ \alpha'(s) = \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{y}'(s) = -k_e(s)\mathbf{t}(s). \end{cases} \quad (3.1)$$

A dicha función  $k_e$  la llamaremos *curvatura esférica* de  $\alpha(s)$  en  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposición 3.1.1.** La curvatura esférica  $k_e(s)$ , la torsión  $\tau(s)$  y la curvatura

$k(s)$  de una curva esférica  $\alpha(s)$  satisfacen:

$$\begin{cases} k(s) = \sqrt{1 + k_e^2(s)} \\ \tau(s) = \frac{-k_e'(s)}{k_e^2(s) + 1}. \end{cases} \quad (3.2)$$

*Demostración.* Tal y como hemos visto en la Definición 1.2.1, la curvatura viene dada por

$$k(s) = |\mathbf{t}'(s)| = |-\alpha(s) + k_e(s)y(s)| = \sqrt{1 + k_e^2(s)}.$$

Por otro lado, utilizando el Teorema 1.2.1, calculamos la torsión

$$\tau(s) = \frac{(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{|\alpha''(s)|^2} = \frac{(\mathbf{t}(s), \mathbf{t}'(s), \mathbf{t}''(s))}{|\mathbf{t}'(s)|^2} = \frac{(\mathbf{t}(s), \mathbf{t}'(s), \mathbf{t}''(s))}{1 + k_e^2(s)}.$$

Tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t}(s) &= \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{t}'(s) &= -\alpha(s) + k_e(s)y(s) \\ \mathbf{t}''(s) &= (-1 - k_e^2)\mathbf{t}(s) + k_e'(s)y(s) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\mathbf{t}(s), \mathbf{t}'(s), \mathbf{t}''(s)) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k_e \\ -1 - k_e^2 & 0 & k_e' \end{vmatrix} = -k_e'.$$

Por tanto,  $\tau(s) = \frac{-k_e'(s)}{k_e^2(s) + 1}$ . □

**Proposición 3.1.2.** Si la curvatura esférica  $k_e(s)$  de una curva esférica es constante,  $\alpha(s)$  es una circunferencia.

*Demostración.* Como  $k_e(s) = cte$ , se tiene que  $k_e'(s) = 0$ . Luego, de (3.2), obtenemos que  $\tau(s) = 0$  y  $k(s) = cte$ , y aplicando el punto 2 de la Proposición 1.2.1 y el Teorema 1.2.2,  $\alpha(s)$  es una circunferencia. □

**Nota 3.1.1.** Si la curvatura esférica  $k_e(s)$  de una curva esférica es idénticamente cero, por (3.2) se tiene que  $k(s) = 1$  y  $\tau(s) = 0$ . Por tanto,  $\alpha(s)$  es una círculo máximo. En este caso el vector  $\mathbf{y}(s)$  definido anteriormente es constante, ya que  $\mathbf{y}'(s) = -k_e(s)\mathbf{t}(s) = 0$ .

**Proposición 3.1.3.** Sea  $\alpha(s)$  una curva esférica parametrizada naturalmente, curvatura esférica  $k_e(s) \neq 0$ . Entonces la curva  $\tilde{\alpha}(s) = \int \mathbf{y}(\sigma) d\sigma$  es una curva con torsión constante  $\tilde{\tau}(s) = -1$ , curvatura  $\tilde{k}(s) = |k_e(s)|$  y la base de Frenet  $\{\tilde{\mathbf{t}}(s), \tilde{\mathbf{n}}(s), \tilde{\mathbf{b}}(s)\}$  de  $\tilde{\alpha}(s)$  puede ser dada por  $\{\tilde{\mathbf{t}}(s), \tilde{\mathbf{n}}(s), \tilde{\mathbf{b}}(s)\} = \{\mathbf{y}(s), \varepsilon\mathbf{t}(s), \varepsilon\alpha(s)\}$ ,  $\varepsilon = -\text{sign}(k_e(s))$ .

*Demostración.* En primer lugar vamos a calcular la base de Frenet  $\{\tilde{\mathbf{t}}(s), \tilde{\mathbf{n}}(s), \tilde{\mathbf{b}}(s)\}$ . Para ello, tenemos que  $\tilde{\alpha}(s) = \int \mathbf{y}(s) ds$  y como consecuencia  $\alpha'(s) = \mathbf{y}(s)$ , donde  $s$  también es el parámetro natural de  $\tilde{\alpha}$ .

Por tanto,

$$\tilde{\mathbf{t}}(s) = \frac{\alpha'(s)}{|\alpha'(s)|} = \frac{\mathbf{y}(s)}{|\mathbf{y}(s)|} = \mathbf{y}(s).$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{b}}(s) &= \frac{\alpha'(s) \times \alpha''(s)}{|\alpha'(s) \times \alpha''(s)|} = \frac{\mathbf{y}(s) \times \mathbf{y}'(s)}{|\mathbf{y}(s) \times \mathbf{y}'(s)|} = \frac{\mathbf{y}(s) \times (-k_e(s)\mathbf{t}(s))}{|\mathbf{y}(s) \times (-k_e(s)\mathbf{t}(s))|} = \\ &= \frac{-k_e(s)\alpha(s)}{|k_e(s)|} = \varepsilon\alpha(s) \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{n}}(s) = \tilde{\mathbf{b}}(s) \times \tilde{\mathbf{t}}(s) = \varepsilon\alpha(s) \times \mathbf{y}(s) = \varepsilon\mathbf{t}(s)$$

Entonces, es fácil obtener que la curvatura  $\tilde{k}$  y la torisión  $\tilde{\tau}$  son:

$$\begin{cases} \tilde{k}(s) = |\mathbf{y}'| = |k_e| \\ \tilde{\tau}(s) = \frac{(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{(\alpha'(s) \times \alpha''(s))^2} = \frac{k_e^2}{-k_e^2} = -1. \end{cases} \quad (3.3)$$

□

## 3.2. Funciones estructurales en $\mathbb{R}^3$

Para cualquier superficie reglada no desarrollable, podemos dar la siguiente parametrización. Consideremos el campo unitario de direcciones de los generadores,  $\omega(u)$  como una curva situada en la esfera unidad y supongamos que  $u$  es el parámetro natural de dicha curva. Como sabemos que la línea de estricción puede ser también parametrizada mediante  $u$ , entonces, cualquier superficie reglada no desarrollable puede ser parametrizada como:

$$\chi(u, v) = \gamma(u) + v\omega(u).$$

Esta parametrización se llamará *parametrización estándar* de la superficie reglada no desarrollable.

Vamos a denotar  $\mathbf{x}(u) = \omega(u)$ ,  $\mathbf{x}'(u) = \mathbf{t}_\omega(u)$  e  $\mathbf{y}(u) = \mathbf{t}_\omega(u) \times \mathbf{x}(u)$ . De (3.1) se tiene que

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(u) = \mathbf{t}_\omega(u) \\ \mathbf{t}'_\omega(u) = -\mathbf{x}(u) + k_e(u)\mathbf{y}(u) \\ \mathbf{y}'(u) = -k_e(u)\mathbf{t}_\omega(u), \end{cases} \quad (3.4)$$



donde  $k_e$  es la curvatura esférica de  $\omega(u)$  y  $\{\omega'(u), \omega(u), \mathbf{y}(u) = \omega'(u) \times \omega(u)\}$  la base esférica de Frenet de la curva esférica (unitaria)  $\omega(u)$ . Como  $\gamma(u)$  es la línea de estricción de  $\chi(u, v)$ , de  $\gamma'(u) \cdot \omega'(u) = 0$ , podemos deducir que existen dos funciones  $\lambda(u)$  y  $\mu(u)$  tal que:

$$\gamma'(u) = \lambda(u)\omega(u) + \mu(u)\mathbf{y}(u). \quad (3.5)$$

Se tiene entonces que

$$\lambda(u) = \gamma'(u)\omega(u)$$

y que

$$\mu(u) = \gamma'(u)\mathbf{y}(u) = (\gamma'(u), \omega''(u), \omega(u)),$$

es decir,  $\mu(u)$  es el opuesto al numerador del parámetro de distribución. Por tanto, como la superficie es no desarrollable,  $\mu(u) \neq 0$ .

Por otro lado, de (3.4) obtenemos:

$$k_e(u) = \omega''(u)\mathbf{y}(u)$$

**Definición 3.2.1.** Las funciones  $\lambda(u)$  y  $\mu(u)$  son llamadas *las funciones estructurales* de la superficie reglada no desarrollable  $\chi(u, v)$  en  $\mathbb{R}^3$ .

El siguiente resultado es conocido como el *Teorema Fundamental de Superficies Regladas No Desarrollables en términos de las funciones estructurales*.

**Teorema 3.2.1.** Sea  $\chi(u, v)$  cualquier superficie reglada no desarrollable con la parametrización estándar en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces  $\chi(u, v)$  está determinada por las funciones estructurales  $\{k_e(u), \mu(u), \lambda(u)\}$ .

*Demostración.* Para la superficie reglada no desarrollable  $\chi(u, v)$  en  $\mathbb{R}^3$ , la parametrización estándar  $\chi(u, v) = \gamma(u) + v\omega(u)$ , la curva esférica  $\omega(u)$  está determinada por la curvatura esférica  $k_e(u)$  y la línea de estricción  $\gamma(u)$  está determinada por las funciones  $\mu(u)$  y  $\lambda(u)$  dadas en (3.5).  $\square$

Ahora, vamos a dar la caracterización geométrica de la función estructural  $\lambda(u)$  y  $k_e(u)$  para superficies regladas no desarrollables. En el artículo escrito por *Liu and Yuan* [3] los autores definieron el concepto de inclinación de una superficie reglada no desarrollable.

Vamos a calcular las trayectorias ortogonales en los generadores rectilíneos. Serán curvas de la forma  $\beta(u) = \chi(u, v(u)) = \gamma(u) + v(u)\omega(u)$  tales que  $\beta'(u)\omega(u) = 0$ . Pero

$$\beta'(u) = \chi_1 + v'(u)\chi_2 = (\gamma'(u) + v(u)\omega'(u))v'(u)\omega(u).$$

De  $\beta'(u)\omega(u) = 0$  se deduce que (como  $\omega'(u)\omega(u) = 0$  pues  $|\omega(u)| = 1$ )

$$v^*(u) = - \int_{u_0}^u (\gamma'(\sigma)\omega(\sigma)) d\sigma,$$

lo que implica que

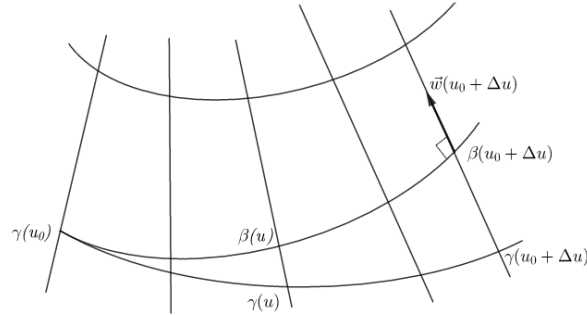
$$\beta(u) = \gamma(u) - \left[ \int_{u_0}^u (\gamma'(\sigma)\omega(\sigma)) d\sigma \right] \omega(u)$$

(para que pase por  $\gamma(u_0) = \chi(u_0, 0)$ , pues  $\beta(u_0) = \gamma(u_0)$ ).

Obsérvese que, entonces

$$\delta(u_0) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{[\beta(u_0 + \Delta u) - \gamma(u_0 + \Delta u)]\omega(u_0 + \Delta u)}{\Delta u} \quad (3.6)$$

(pues  $\beta(u_0 + \Delta u) - \gamma(u_0 + \Delta u) = -(\int_{u_0}^{u_0 + \Delta u} (\gamma'(\sigma)\omega(\sigma)) d\sigma)\omega(u_0 + \Delta u)$  y  $\omega(u_0 + \Delta u)$  es unitario).



Por tanto,

$$\int_{u_1}^{u_2} \delta(u) du = - \int_{u_1}^{u_2} \gamma'(u)\omega(u) du$$

es la distancia con signo de  $\beta(u_2) - \gamma(u_2)$  a  $\beta(u_1) - \gamma(u_1)$ .

**Teorema 3.2.2.** La función inclinación  $\delta(u)$  de una superficie reglada no desarrollable  $\chi(u, v) = \gamma(u) + v\omega(u)$  con  $|\omega(u)| = |\omega'(u)| = 1$  es nula si y sólo si la superficie  $\chi(u, v)$  es la superficie binormal de su línea de estricción.

*Demostración.* Suponemos que la superficie es la superficie binormal de su línea de estricción, es decir,  $\omega(u) = \mathbf{b}_\gamma(u)$ . Vamos a calcular la función inclinación.

$$\delta(u) = -\gamma'(u)\mathbf{b}_\gamma(u) = -\gamma'(u) \frac{\gamma'(u) \wedge \gamma''(u)}{|\gamma''(u)|} = 0.$$

Recíprocamente, si  $\delta(u) = -\gamma'(u)\omega(u) = 0$ , como  $\gamma(u)$  es la línea de estricción de  $\chi(u, v)$ , se tiene que  $\gamma'(u)\omega'(u) = 0$ . Entonces, debe ser que  $\gamma'(u)$  sea paralelo a  $\mathbf{y}(u) = \omega'(u) \times \omega(u)$ .

Para comprobar que la superficie es la binormal de su línea de estricción, tenemos que probar que  $\mathbf{b}(u)$  es paralelo a  $\omega(u)$ . Como

$$\mathbf{b}(u) = \frac{\gamma'(u) \wedge \gamma''(u)}{|\gamma''(u)|},$$

hay que probar que  $\gamma'(u) \times \gamma''(u)$  es paralelo a  $\omega(u)$ . Efectivamente, es así, ya que  $\gamma'(u) = \mu(u)\mathbf{y}(u)$  y  $\gamma''(u) = \lambda'(u)\mathbf{y}(u) + \mu(u)\mathbf{y}' = \mu'(u)\mathbf{y} + \mu(u)k_e(u)\omega'(u)$ .  $\square$

Podemos obtener los siguientes resultados acerca de las funciones estructurales y de la función de inclinación de las superficies regladas  $\chi(u, v)$ .

**Proposición 3.2.1.** Sea  $\chi(u, v)$  una superficie reglada no desarrollable con la parametrización estándar. Si el parámetro  $u$  es también el parámetro natural de la línea de estricción de  $\chi(u, v)$ , las funciones estructurales  $\mu(u)$  y  $\lambda(u)$  de  $\chi(u, v)$  satisfacen  $\lambda^2(u) + \mu^2(u) = 1$ .

*Demostración.* Como  $u$  es el parámetro natural, tenemos que  $\gamma'(u) \cdot \gamma'(u) = 1$ . De (3.5) se termina la demostración.  $\square$

**Teorema 3.2.3.** Sea  $\chi(u, v)$  cualquier superficie reglada no desarrollable con la parametrización estándar. Entonces se verifica que

$$\lambda(u) = -\delta(u) \tag{3.7}$$

y que

$$K(u, v) = \frac{-\mu^2(u)}{(\mu^2(u) + v^2)^2}, \tag{3.8}$$

donde  $K(u, v)$  es la curvatura de Gauss de  $\chi(u, v)$ .

*Demostración.* De (3.5) y (3.6) obtenemos (3.7). Calculamos ahora la curvatura de Gauss. Para ello necesitamos obtener los coeficientes de la Primera y Segunda forma fundamental. En este caso, tenemos:

$$\begin{cases} \chi_1 = \gamma'(u) + v\omega'(u) \\ \chi_2 = \omega(u) \end{cases} \quad \begin{cases} \chi_{11} = \gamma''(u) + v\omega''(u) \\ \chi_{22} = 0 \\ \chi_{12} = \omega'(u). \end{cases}$$

Luego, teniendo en cuenta las Definiciones 1.5.1 y 1.5.2 dadas en el Capítulo 1, se tiene

$$\begin{cases} g_{11} = |\gamma'(u)|^2 + v^2|\omega'(u)|^2 & L_{11} = \frac{\lambda(u)(\gamma''(u) + v\omega''(u))}{\sqrt{\mu^2(u) + v^2(u)}} \\ g_{22} = 1 & L_{22} = 0 \\ g_{12} = \gamma'(u)\omega(u) & L_{12} = \frac{\mu^2(u)}{\sqrt{\mu^2(u) + v^2(u)}}. \end{cases}$$

Por tanto, sustituyendo en  $K = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$  obtenemos (3.8). □

**Corolario 3.2.1.** En las generatrices de la superficie reglada  $\chi(u, v)$ , la curvatura de Gauss es mínima en el punto de estricción ( $v = 0$ ) y equivale a  $-(\mu^2(u))^{-1}$ . La línea de estricción de la superficie reglada es la curva con curvatura de Gauss mínima.

**Nota 3.2.1.** Como  $\mu(u) \neq 0$  para las superficies regladas no desarrollables, de (3.8), la curvatura de Gauss es no nula en estas superficies, como ya habíamos establecido.

### 3.3. Ángulo de inclinación en $\mathbb{R}^3$

En este apartado, vamos a generalizar el concepto de ángulo de inclinación de las superficies regladas cerradas (aquellas en la que la directriz es una curva cerrada) para superficies regladas no desarrollables en  $\mathbb{R}^3$ .

**Definición 3.3.1.** Dado un campo uniparamétrico de vectores unitarios  $\omega(u)$  con  $|\omega'(u)| = 1$ , la función

$$\theta(u) = -\langle (\omega'(u) \times \omega'(u))', \omega'(u) \rangle \quad (3.9)$$

se llama *función ángulo o función autorotación* del campo de vectores  $\omega(u)$ .

**Definición 3.3.2.** Sea  $\chi(u, v) = \gamma(u) + v\omega(u)$  cualquier superficie reglada no desarrollable con la parametrización estándar en  $\mathbb{R}^3$ . La función ángulo del campo de vectores  $\omega(u)$  es llamada función ángulo de inclinación de la superficie reglada no desarrollable  $\chi(u, v)$ .

De (3.4) y (3.9) tenemos que

$$\begin{aligned} \theta(u) &= -(\omega'(u) \times \omega(u))\omega'(u) = -(\omega''(u) \times \omega(u))\omega'(u) \\ &= -(\omega(u), \omega'(u), \omega''(u)) = -(\omega(u), \omega'(u), -\omega(u) + k_e(u)\mathbf{y}(u)) \\ &= -k_e(u)(\omega(u), \omega'(u), \mathbf{y}(u)) = k_e(u). \end{aligned}$$

Por tanto, el ángulo de inclinación del campo uniparamétrico de vectores unitarios  $\omega(u)$  es la curvatura esférica de dicho campo.

**Nota 3.3.1.** Si  $\chi(u, v) = \gamma(u) + v\omega(u)$  es una superficie reglada cerrada, entonces

$$\oint \theta(u) du = \oint k_e(u) du$$

es el ángulo de inclinación.

**Proposición 3.3.1.** Cuando el ángulo de inclinación  $\theta(u)$  es idénticamente nulo,  $\omega(u)$ , como una curva esférica, es el ecuador de la esfera unidad. Cuando el ángulo de inclinación  $\theta(u)$  es constante,  $\omega(u)$  es una circunferencia de la esfera unidad con radio  $(1 + \theta^2)^{-1/2}$ .

*Demostración.* De (3.2) podemos conseguir la conclusión de esta proposición. Si  $\theta(u) = 0$ , se tiene que  $k_e = 0$  y por tanto, la curvatura en este caso es 1. Luego,  $\omega(u)$  es una curva esférica de radio 1, es decir, el ecuador de la esfera unidad. Por otro lado, si  $\theta(u) = cte$ , tenemos que  $k = \sqrt{1 + \theta(u)^2}$ . En este caso,  $\omega(u)$  tiene radio  $(1 + \theta^2)^{-1/2}$ . Entonces todas las generatrices mantienen un ángulo constante en una dirección fija.  $\square$

### 3.4. Propiedades y clasificación de superficies regladas no desarrollables

Del Teorema 3.2.1 sabemos que las superficies regladas no desarrollables pueden ser determinadas por las funciones estructurales usando la parametrización estándar de las superficies regladas no desarrollables y las transformaciones ortonormales en  $\mathbb{R}^3$ . Por tanto, podemos dar un tipo de clasificación usando las funciones estructurales de las superficies regladas no desarrollables.

**Definición 3.4.1.** Sea  $\chi(u, v)$  cualquier superficie reglada no desarrollable con la parametrización estándar en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces  $\chi(u, v)$  es llamada *superficie reglada inclinada* si su función de inclinación  $\lambda(u) \neq 0$ . En otro caso,  $\chi(u, v)$  se llama *superficie reglada no inclinada*. Entonces se verifican:

**Teorema 3.4.1.** Sea  $\{\mu(u), \lambda(u), k_e(u)\}$  las funciones estructurales de las superficies regladas no desarrollables con la parametrización estándar  $\chi(u, v) = \gamma(u) + v\omega(u)$  en  $\mathbb{R}^3$ .

1. Si  $\chi(u, v)$  es no inclinada, es la superficie binormal de su línea de estricción y puede ser reescrita como:

$$\chi(u, v) = \int_{u_0}^u \mu(t) \mathbf{y}(t) dt + v\omega(u)$$

Cuando la función estructural  $\mu(u) \equiv \gamma = cte$ , la superficie puede ser reescrita como:

$$\chi(u, v) = \gamma \int_{u_0}^u \mathbf{y}(t) dt + v\omega(u)$$

y es la superficie reglada de las binormales de una curva de torsión constante.

2. Las superficies regladas inclinadas pueden ser reescritas como:

$$\chi(u, v) = \int_{u_0}^u [\lambda(t)\omega(t) + \mu(t)\mathbf{y}(t)] dt + v\omega(u)$$

*Demostración.* Consideramos la superficie  $\chi(u, v) = \gamma(u) + v\omega(u)$ . Como hemos visto anteriormente  $\gamma'(u) = \lambda(u)\omega(u) + \mu(u)\mathbf{y}(u)$ . Por tanto si  $\chi(u, v)$  es no inclinada,  $\lambda(u) = 0$ , luego  $\gamma'(u) = \mu(u)\mathbf{y}(u)$ . Integrando para calcular  $\gamma(u)$ , obtenemos el punto 1 del teorema. Por otro lado, como  $\delta(u) = -\lambda(u)$ , aplicando el Teorema 3.2.2,  $\chi(u, v)$  es la superficie binormal de su línea de estricción.

En el caso 2,  $\lambda(u) \neq 0$  y de nuevo integrando obtenemos la parametrización de las superficies regladas inclinadas.  $\square$

**Definición 3.4.2.** Para la curva  $\gamma(\tilde{s})$  parametrizada naturalmente en  $\mathbb{R}^3$  con torsión  $\tilde{\tau}(\tilde{s}) \neq 0$  y el triedro de Frénet  $\{\tilde{\mathbf{t}}(\tilde{s}), \tilde{\mathbf{n}}(\tilde{s}), \tilde{\mathbf{b}}(\tilde{s})\}$ , definimos:

$$\eta(\tilde{s}) = \gamma(\tilde{s}) + \frac{1}{\tilde{\tau}(\tilde{s})} \tilde{\gamma}(\tilde{s}),$$

centro de torsión en el punto  $\tilde{s}$  de la curva  $\gamma(\tilde{s})$ . A  $T(\tilde{s}) = (\tilde{\tau}(\tilde{s}))^{-1}$  se le llama radio de torsión de la curva  $\gamma(\tilde{s})$  en el punto  $\tilde{s}$ .

El siguiente resultado nos da una caracterización de la función estructural  $\lambda(u)$  de la superficie reglada  $\chi(u, v) = \gamma(u) + v\omega(u)$ .

**Proposición 3.4.1.** La función estructural  $\mu(u)$  de la superficie reglada  $\chi(u, v) = \gamma(u) + v\omega(u)$  definida en el Teorema 3.2.1 es el opuesto del radio de torsión de la curva  $\gamma(u)$  cuando  $\chi(u, v)$  es no inclinada.

*Demostración.* Del Teorema 3.4.1, de la definición del radio de torsión de la curva y del valor de  $\tilde{\tau}(u)$ , se obtiene el resultado de la proposición. Por tanto, vamos a calcular  $\tilde{\tau}(u)$ .

Como  $\chi(u, v)$  es no inclinada, se tiene que  $\lambda(u) = 0$  y  $\gamma'(u) = \mu(u)\mathbf{y}(u)$ . Tenemos entonces que

$$\gamma''(u) = \mu'(u)\mathbf{y}(u) - \mu(u)k_e(u)\omega'(u)$$

y

$$\gamma'''(u) = (-2\mu'(u)k_e(u) - \mu(u)k_e'(u))\omega'(u) + \mu k_e \omega(u) + (\mu''(u) - \mu(u)k_e^2)\mathbf{y}(u).$$

Luego, la curvatura viene dada por:

$$\tilde{\tau}(u) = \frac{(\gamma'(u), \gamma''(u), \gamma'''(u))}{(\gamma'(u) \times \gamma''(u))^2} = \frac{-\mu^3(u)k_e(u)}{(\mu^2 k_e)^2} = -\frac{1}{\mu}$$

□

**Teorema 3.4.2.** Si la línea de estricción de una superficie reglada no desarrollable y no inclinada es una curva esférica, entonces

$$\mu(u) = k_e(u)(c_1 \sin u + c_2 \cos u),$$

con constantes  $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ .

*Demostración.* Si  $\gamma(u) = \int_{u_0}^u \lambda(t)\mathbf{y}(t)dt$  es una curva esférica, de  $\gamma^2(u) = cte$  tenemos que:

$$\mathbf{y} \int_{u_0}^u \mu(t)\mathbf{y}(t)dt = 0. \quad (3.10)$$

Entonces,

$$\mu - k_e \omega' \int_{u_0}^u \mu(t)\mathbf{y}(t)dt = 0. \quad (3.11)$$

Por tanto  $\mu \neq 0$  significa que  $k_e \neq 0$ . De 3.10 y 3.11 tenemos que:

$$\left(\frac{\mu}{k_e}\right)' = -\omega \int_{u_0}^u \mu(t)\mathbf{y}(t)dt.$$

Luego,

$$\left(\frac{\mu}{k_e}\right)'' = -\omega' \int_{u_0}^u \mu(t)\mathbf{y}(t)dt = -\left(\frac{\mu}{k_e}\right)$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos las conclusiones de este teorema. □

**Corolario 3.4.1.** La curvatura  $\tilde{k}$  y la torsión  $\tilde{\tau}$  de la curva esférica en el teorema anterior son:

$$\begin{cases} \tilde{k}(u) = \frac{1}{c_1 \sin u + c_2 \cos u} \\ \tilde{\tau} = \frac{-1}{k_e(u)(c_1 \sin u + c_2 \cos u)} \end{cases} \quad (3.12)$$

*Demostración.* Del Teorema 3.4.2 y

$$\begin{cases} \tilde{k}(u) = \frac{|\gamma'(s) \times \gamma''(s)|}{|\gamma'(s)|^3} \\ \tilde{\tau} = \frac{(\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s))}{(\gamma'(s) \times \gamma''(s))^2} \end{cases} \quad (3.13)$$

por un cálculo directo podemos conseguir la conclusión de este teorema.  $\square$

Para el caso de curvas rectificantes, las cuales hemos visto en el Capítulo 1 y podemos encontrar en [5] y [6], tenemos los siguientes resultados:

**Teorema 3.4.3.** Cualquier superficie reglada no inclinada  $\chi(u, v)$  con la función estructural  $\mu(u)k_e^2(u) = ak'_e(u)$  ( $a \neq 0$ ) es una superficie binormal de una curva rectificante. El recíproco también es cierto.

*Demostración.* Sea  $\tilde{k}$  y  $\tilde{\tau}$  la curvatura y torsión de una curva

$$\gamma(u) = \int_{u_0}^u (t)\mathbf{y}(t)dt$$

con el parámetro natural  $\tilde{s}$ . Ponemos:

$$\frac{d\tilde{s}}{du} = \mu(u), \quad \varepsilon = \pm 1 = \text{sign}(\lambda k_e).$$

Por un cálculo directo tenemos:

$$\tilde{k}(u) = \frac{\varepsilon k_e(u)}{\mu(u)} \quad y \quad \tilde{\tau}(u) = \frac{-1}{\mu(u)}.$$

Entonces, teniendo en cuenta el Teorema 1.2.5, visto en el Capítulo 1:

$$c_1 \tilde{s} + c_2 = \frac{\tilde{\tau}(u)}{\tilde{k}(u)} = \frac{-\varepsilon}{k_e(u)}$$



produce que:

$$\mu(u) = \frac{ak'_e(u)}{k_e^2(u)},$$

donde  $ac_1 = \varepsilon$ ,  $c_1 \neq 0$  y  $c_2$  son constantes.

Recíprocamente, partiendo de

$$\mu(u) = \frac{ak'_e(u)}{k_e^2(u)},$$

tenemos que probar que se trata de una curva rectificante. Por un lado tenemos que

$$\mu(u) = -a\left(\frac{1}{k_e(u)}\right)' \quad y \quad \frac{\tilde{\tau}(u)}{\tilde{k}(u)} = \frac{-\varepsilon}{k_e(u)}.$$

Luego

$$\left(\frac{\tilde{\tau}(u)}{\tilde{k}(u)}\right)' = -\varepsilon\left(\frac{1}{k_e(u)}\right)'.$$

Por otro lado, se tiene que

$$\frac{d\tilde{s}}{du} = \mu = -a\left(\frac{1}{k_e(u)}\right)' = \frac{-a}{-\varepsilon}\left(\frac{\tilde{\tau}(u)}{\tilde{k}(u)}\right)' = \frac{1}{c_1}\left(\frac{\tilde{\tau}(u)}{\tilde{k}(u)}\right)'.$$

Por tanto, de

$$c_1 \frac{d\tilde{s}}{du} = \left(\frac{\tilde{\tau}(u)}{\tilde{k}(u)}\right)',$$

obtenemos

$$c_1 \tilde{s} + c_2 = \left(\frac{\tilde{\tau}(u)}{\tilde{k}(u)}\right)$$

y la curva es rectificante. □

# Anexo: Códigos de Maple

Las siguientes líneas son necesarias para todas las figuras:

```
restart:
with(plots):
```

**Figura 1.2: Hiperboloide de revolución.**

```
x:=t->cos(t):
y:=t->sin(t):
z:=t->0:
al(t):=[cos(t),sin(t),0]:
om(t):=[-sin(t),cos(t),1]:
s(t,v):=evalm(al(t)+v*om(t)):
plot3d(s(t,v),t=0..2*Pi,v=-3..3,scaling=constrained);
```

**Figura 1.3: Paraboloides hiperbólico.**

```
plot3d([u,v,u*v], u=-10..10,v=0..2*Pi);
```

**Figura 2.1: Cilindro circular.**

```
x:=t->cos(t):
y:=t->sin(t):
z:=t->0:
al(t):=[2*cos(t),2*sin(t),0]:
om(t):=[0,0,1]:
s(t,v):=evalm(al(t)+v*om(t)):
plot3d(s(t,v),t=0..2*Pi,v=0..8,scaling=constrained);
```

**Figura 2.2: Cono circular.**

```
x:=t->cos(t):
y:=t->sin(t):
z:=t->0:
al(t):=[4*cos(t),4*sin(t),3]:
om(t):=[4/5*cos(t),4/5*sin(t),3/5]:
```

```
s(t,v):=evalm(al(t)+v*om(t)):
plot3d(s(t,v),t=0..2*Pi,v=-20..10,scaling=constrained);
```

**Figura 1.1: Superficie tangente a una hélice.**

```
x:=t->cos(t):
y:=t->sin(t):
z:=t->0:
al(t):=[cos(t),sin(t),t]:
om(t):=[-sin(t),cos(t),1]:
s(t,v):=evalm(al(t)+v*om(t)):
plot3d(s(t,v),t=-4*Pi/2..4*Pi/2,v=-3..3,scaling=constrained);
```

**Figura 2.3: Superficie formada por las normales de la hélice circular.**

```
x:=t->cos(t):
y:=t->sin(t):
z:=t->0:
al(t):=[cos(t),sin(t),t]:
om(t):=[-cos(t),-sin(t),0]:
s(t,v):=evalm(al(t)+v*om(t)):
plot3d(s(t,v),t=-6*Pi/2..6*Pi/2,v=0..10,scaling=constrained);
```

**Figura 2.4: Banda de Moebius**

```
plot3d([(2-v*sin(u/2))*cos(u),(2-v*sin(u/2))*sin(u),
v*cos(u/2)], u=0..2*Pi,v=-1..1);
```

**Figura 3.2: Conoide de Plücker.**

```
x:=t->cos(t):
y:=t->sin(t):
z:=t->0:
al(t):=[0,0,2*cos(t)*sin(t)]:
om(t):=[cos(t),sin(t),0]:
s(t,v):=evalm(al(t)+v*om(t)):
plot3d(s(t,v),t=0..2*Pi,v=-2..2,scaling=constrained);
```

# Bibliografía

- [1] M.P. DO CARMO., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. PrenticeHall, New Jersey, 1976.
- [2] WOLFGANG KÜHNEL, *Differential geometry : curves, surfaces, manifolds*. Kühnel, Wolfgang, 1950.
- [3] H. L. LIU AND Y. YUAN, *Pitch functions of ruled surfaces and B-scrolls in Minkowski 3-space*, J. Geom. Phys. 62 (2012), no. 1, 47–52.
- [4] H. L. LIU, Y. H. YU, AND J. S. DAL, *Invariants of non-developable ruled surfaces in Euclidean 3-space*, Beitr. Algebra. Geom. 55 (2014), no. 1, 189–199.
- [5] CHEN BY, *Rectifying curves and geodesics on a cone in the Euclidean 3-space*, Tamkang J. Math. 48 (2017), no. 2, 209-214.
- [6] KIM DS, CHUNG HS, CHO KH, *Space curves satisfying  $\tau/k = as + b$* , Honam Math.J. 15 (1993), 1-9.