



Universidad de Sevilla

Facultad de Matemáticas

Trabajo Fin de Grado:

**Aplicación de los sistemas
diferenciales al estudio de
un modelo epidemiológico
con reinfección**

Grado en Matemáticas

Autor: Mercedes Lindes Colón

Tutor: Tomás Caraballo Garrido

Índice general

1. Conceptos previos acerca de sistemas diferenciales ordinarios	9
1.1. Conceptos básicos de ecuaciones diferenciales ordinarias	9
1.2. Estabilidad de los puntos de equilibrio	11
1.3. Estabilidad de sistemas lineales	13
1.4. Estabilidad para sistemas no lineales	14
1.5. Método de estabilidad de Liapunov	15
1.6. Órbitas de sistemas autónomos	16
1.7. Sistemas dinámicos autónomos	18
1.7.1. Sistemas dinámicos	19
1.7.2. Atractor global	21
2. Modelo SIRI	23
2.1. Tamaño de población constante	23
2.1.1. Comportamiento asintótico de las soluciones	26
2.1.2. Estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio	30
2.2. Tasa de natalidad distinta de tasa de mortalidad. Muerte natural distinta de muerte por enfermedad	36
2.3. Tamaño de población no constante	39
3. Estudio conjunto de los modelos SIR y SIRI	45
3.1. Modelo SIR	45
3.1.1. Comportamiento asintótico de las soluciones	47
3.1.2. Estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio	48
3.2. Comparativa de los puntos de equilibrio	50

Abstract

Mathematical modeling, currently, is a very important element in health system, since it allows studying the incidence, spread and persistence of infectious diseases. This study is very useful to combat or control epidemiological diseases with reinfection. The objective of this paper is to study deterministic SIRI models, as well as to compare them with deterministic SIR models. The purpose of this comparison is to find relationships and differences between these models.

Both models do not study the behavior of a single individual, but are based on the classification of them in groups. The SIRI models divide the individuals into four classes: Susceptible, Infectious, Recovered and Reinfected. These models are very useful for the description of infectious diseases in which individuals have relatively short periods of infection and have a temporary immune response. The dynamics between these groups is reflected in a system of three differential equations.

In this paper we will study the case in which the SIRI model has a population size that remains constant (autonomous differential system), although we will mention other possible situations, among which the size of the population varies over time (non-autonomous differential system). We will also study the SIR model, which is used to analyze diseases without reinfection, in its simplest version, the case in which the population also remains constant (autonomous differential system). For both models we will study the local asymptotic behavior of the resulting system. For this analysis it will be necessary to make a study of the scientific literature about the autonomous dynamic systems, in order to apply them for the SIRI and SIR models.

Introducción

Las enfermedades epidemiológicas han sido y siguen siendo un gran problema para la salud pública en todo el mundo.

El modelado matemático de dichas enfermedades es un elemento muy importante para combatirlas. Gracias al modelado de las enfermedades podemos establecer una serie de propiedades esenciales de la transmisión de la enfermedad que nos facilita su propio análisis. Este análisis tiene como objetivo determinar la incidencia de la enfermedad, así como ayudar a tomar las medidas sanitarias oportunas para su control o eliminación. Al no ser posible experimentar con la realidad, estos modelos nos permiten predecir las consecuencias que puede tener introducir cambios específicos. También nos permiten entender la forma de expansión de la enfermedad a través de la población bajo diferentes condiciones o escenarios.

El primer artículo que se conoce de una aplicación matemática a una enfermedad infecciosa (viruela) es en 1760 por Daniel Bernouilli. En el mismo siglo, el trabajo de Bernouilli es continuado por Rond d'Alembert, que además fue la primera persona en describir la propagación de enfermedades infecciosas mediante un modelo.

En este trabajo trataremos el modelo epidemiológico con reinfección, $S \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow I$.

David Tudor publicó en 1990 uno de los primeros modelos capaz de explicar las enfermedades epidemiológicas con recaída, para una población constante y con tasa de incidencia bilineal. [5] desarrolla y analiza cualitativamente un modelo para la propagación de una infección de tipo herpético en poblaciones humanas o animales. Esta extensión, de la modelización de enfermedades humanas a la epidemiología veterinaria, nos proporciona gran información acerca de la Pseudorabia en el cerdo. [5] nos proporciona una completa información acerca de la existencia y estabilidad local de los equilibrios.

Posteriormente Moreira y Wang incluyeron en [7] las funciones de incidencia no lineal. Blower desarrolló un modelo para el herpes genital en [6], suponiendo la incidencia estándar para la transmisión de la enfermedad y la tasa de reclutamiento constante. Van den Driessche y Zou, [8], desarrollaron un modelo SIRC en una población constante con incidencia estándar y una distribución general de recaídas.

Este modelo también es apropiado para el estudio de la tuberculosis en humanos y bovinos, así como para la dinámica del consumo de tabaco y alcohol.

En este modelo se pueden clasificar los individuos de la población en cuatro clases: *Susceptible* (Susceptibles), si los individuos no están expuestos al patógeno infeccioso, *Infected* (Infecciosos), si están infectados por el patógeno, y *Recovered* (Recuperados) si tras sufrir la infección la han eliminado. Aunque

es posible tras recuperarse volver a sufrir una recaída, convirtiéndose así en individuo *Reinfected* (Reinfectados).

La dinámica de transmisión (o dinámica entre estos grupos) estará representada por un sistema de ecuaciones diferenciales, con 3 ecuaciones diferenciales. Los objetivos perseguidos en este trabajo, dentro del marco general de Ecuaciones Diferenciales, son:

1. Hacer una revisión de la literatura científica especializada en sistemas dinámicos autónomos.
2. Estudiar el comportamiento asintótico local del modelo autónomo SIRI.
3. Estudiar el comportamiento asintótico local del modelo autónomo SIR.
4. Estudiar las relaciones entre los comportamientos asintóticos de las soluciones de los modelos autónomos SIR y SIRI.

Este trabajo lo componen 3 capítulos.

En el Capítulo 1 se muestran conceptos y resultados ya conocidos de asignaturas como Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) y Ampliación de Ecuaciones Diferenciales (AED), que nos serán de gran utilidad para analizar el comportamiento asintótico de las soluciones en capítulos posteriores.

En el Capítulo 2 formularemos el modelo SIRI autónomo, y estudiaremos en detalle el comportamiento asintótico local de las soluciones del modelo haciendo uso de los resultados del Capítulo 1. En las Secciones 2 y 3, comentaremos variaciones en el modelo SIRI considerado en la Sección 1. También mostraremos resultados acerca del comportamiento asintótico global de las soluciones de dichos modelos.

En el Capítulo 3 nuestro objetivo es estudiar las relaciones y diferencias entre los modelos SIR y SIRI autónomos. Para ello se vuelve necesario formular el modelo SIR autónomo, y estudiar el comportamiento asintótico local de sus soluciones. Fijándonos en el comportamiento asintótico local de las soluciones de ambos modelos realizaremos la comparación, viendo la relación que guardan entre ambos.

Capítulo 1

Conceptos previos acerca de sistemas diferenciales ordinarios

El objetivo principal es estudiar el comportamiento asintótico local de las soluciones de un sistema diferencial que llevado a la práctica, nos permita modelar ciertos fenómenos epidemiológicos. Para ello se vuelve necesario realizar una revisión de la literatura científica centrada en sistemas de ecuaciones diferenciales. En este capítulo vamos a recordar algunos conceptos ya estudiados en las asignaturas **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias** y **Ampliación de Ecuaciones Diferenciales**. En ambas asignaturas se estudia el comportamiento asintótico local para las soluciones del Problema de Valores Iniciales o Problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ es un abierto conexo,

$$f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^N$$

es una función que satisface $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y, \Omega)$ y $(t_0, y_0) \in \Omega$. Siendo $Lip_{loc}(y, \Omega)$ el espacio de funciones definidas de Ω en \mathbb{R}^N que son localmente Lipschitzianas respecto de la variable y en Ω .

Enunciaremos algunos resultados como el Teorema de LaSalle, que nos serán de gran utilidad para el análisis del comportamiento de las soluciones.

1.1. Conceptos básicos de ecuaciones diferenciales ordinarias

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$, $N \geq 1$ entero, abierto conexo distinto de vacío. Sea también $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^N$ función continua en Ω , y $(t_0, y_0) \in \Omega$ un punto. Consideramos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo no degenerado tal que $t_0 \in \text{int}(I)$, y sea $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ función definida en I . φ será solución de (1.1) en I (o solución local de (1.1) en I) si $\varphi \in C^1(I; \mathbb{R}^N)$ y verifica:

1. $(t, \varphi(t)) \in \Omega$, para cualquier $t \in I$.
2. $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, para todo $t \in I$.
3. $\varphi(t_0) = y_0$.

A continuación, se muestra un resultado que permite estudiar la existencia y unicidad de solución local de (1.1).

Teorema 1.1 (Teorema de Picard). *En las condiciones anteriores, supongamos que*

$$f \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap \text{Lip}_{loc}(y; \Omega).$$

Entonces, para cada $(t_0, y_0) \in \Omega$, existe $\delta > 0$ tal que (1.1) tiene una única solución φ en el intervalo $I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Un resultado para estudiar la unicidad de solución global o maximal es el siguiente.

Teorema 1.2 (Teorema de unicidad global). *En las condiciones anteriores, supongamos que*

$$f \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap \text{Lip}_{loc}(y; \Omega),$$

y sea $(t_0, y_0) \in \Omega$. Sean (I_1, φ_1) e (I_2, φ_2) dos soluciones del problema (1.1). Entonces

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t), \quad \forall t \in I_1 \cap I_2.$$

Vamos a recordar ahora algunos conceptos necesarios para poder enunciar el resultado de existencia de solución maximal. Para cada $(t_0, y_0) \in \Omega$, denotaremos:

$$S(t_0, y_0) = \{(I, \varphi) : \varphi \text{ es solución del problema de Cauchy (1.1) en } I\}.$$

El Teorema de Picard en particular implica que $S(t_0, y_0) \neq \emptyset$.

Definición 1.1. *Consideramos $(t_0, y_0) \in \Omega$ e $(I, \varphi) \in S(t_0, y_0)$.*

- (a) *Diremos que la solución (I, φ) es prolongable por la derecha, si existe una solución $(J, \psi) \in S(t_0, y_0)$ tal que $I \subset J$ y $\text{sup}I \in (J)$.*
- (b) *Diremos que (I, φ) es prolongable por la izquierda, si existe una solución $(J, \psi) \in S(t_0, y_0)$ tal que $I \subset J$ e $\text{inf}I \in (J)$.*
- (c) *Diremos que (I, φ) es prolongable, si es prolongable por la derecha, por la izquierda, o por ambas a la vez.*
- (d) *Diremos que (I, φ) es una solución maximal, o global, si (I, φ) no es prolongable.*

El siguiente teorema sirve para estudiar la prolongabilidad de soluciones locales del problema (1.1), el cual sólo lo enunciaremos para el caso por la derecha aunque por la izquierda es análogo.

Teorema 1.3. *Supongamos que $f \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y; \Omega)$. Sea $(t_0, y_0) \in \Omega$ e $(I, \varphi) \in S(t_0, y_0)$ una solución local del problema (1.1). Entonces:*

1. *La solución (I, φ) es prolongable por la derecha.*
2. *La semitrayectoria derecha $\tau_\varphi^+ = \{(t, \varphi(t)) : t \in I, \text{ con } t \geq t_0\} \subset \Omega$ está acotada y $dist(\tau_\varphi^+, \partial\Omega) > 0$.*

Nos será de utilidad el siguiente resultado, que nos permite estudiar la existencia y unicidad de la solución maximal del problema (1.1).

Teorema 1.4 (Teorema de existencia y unicidad de solución maximal). *Sea Ω abierto conexo no vacío de \mathbb{R}^{N+1} y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ función tal que $f \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y; \Omega)$. Entonces, para cada $(t_0, y_0) \in \Omega$, existe una única solución maximal del problema (1.1). Además, el intervalo de definición de la solución maximal es abierto.*

1.2. Estabilidad de los puntos de equilibrio

Supondremos, en adelante, dados un abierto conexo no vacío $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ y una función f , satisfaciendo

$$\begin{cases} I \times B_\rho \subseteq \Omega, \\ f \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y; \Omega) \text{ y } f(t, 0) = 0, \quad \forall t \in I, \end{cases} \quad (1.2)$$

donde $I = (\tau, \infty)$ y $B_\rho = B(0; \rho) \subseteq \mathbb{R}^N$ con $\rho \in (0, \infty]$ y $\tau \in [-\infty, \infty)$. Consideramos el sistema diferencial ordinario

$$y' = f(t, y). \quad (1.3)$$

A partir de las hipótesis impuestas a Ω y a f , se tiene que la función nula φ_0 definida por

$$\varphi_0 : t \in I \longrightarrow \varphi_0(t) = 0 \in \mathbb{R}^N,$$

es solución del sistema diferencial (1.3) en I .

Si consideramos el correspondiente problema de Cauchy (1.1) para la función f y dato inicial $(t_0, 0) \in I \times B_\rho$, se tiene que $I(t_0, 0) \supseteq I$ y $\varphi(t; t_0, 0) = \varphi_0(t)$, $\forall t \in I$. En este caso se dice que φ_0 es un punto crítico, o punto de equilibrio, del sistema (1.3).

Comencemos recordando algunas definiciones de estabilidad para puntos de equilibrio.

Definición 1.2. *Se dice que la solución φ_0 de (1.3) es un equilibrio estable si para cualesquiera $t_0 \in I$ y $\epsilon \in (0; \rho)$, existe $\delta = \delta(t_0; \epsilon) \in (0; \rho)$ tal que, si $|y| \leq \delta$ se tiene:*

1. $I(t_0, y_0) \supset [t_0, \infty)$.
2. $|\varphi(t; t_0, y_0)| \leq \epsilon$, para cualquier $t \in [t_0, \infty)$.

Nota 1.2.1. *La Definición 1.2 puede ser reescrita. Se dice que la solución φ_0 de (1.3) es un equilibrio estable si para cualesquiera $t_0 \in I$ y $\epsilon \in (0, \rho)$, existe $\delta = \delta(t_0, \epsilon) \in (0, \rho)$ tal que, si $|y_0| \leq \delta$ entonces:*

$$|\varphi(t; t_0, y_0)| \leq \epsilon \quad \forall t \in I(t_0, y_0) \cap [t_0, \infty).$$

Definición 1.3. Se dice que la solución φ_0 de (1.3) es equilibrio inestable si no es estable.

Nota 1.2.2. La Definición 1.2. puede ser reescrita. Se dice que la solución φ_0 de (1.3) es un equilibrio inestable si existen $t_0 \in I$ y $\epsilon \in (0, \rho)$ tales que, para cualquier $\delta \in (0, \rho)$, existe y_0 , con $|y_0| \leq \delta$, verificando:

$$|\varphi(t; t_0, y_0)| > \epsilon \text{ para cierto } t \in I(t_0, y_0) \cap [t_0, \infty).$$

Definición 1.4. Se dice que la solución φ_0 de (1.3) es un equilibrio uniformemente estable si para cualquier $\epsilon \in (0, \rho)$, existe $\rho = \rho(\epsilon) \in (0, \rho)$ tal que, si $t_0 \in I$ e $|y_0| \leq \delta$, entonces:

1. $I(t_0, y_0) \supset [t_0, \infty)$.
2. $|\varphi(t; t_0, y_0)| \leq \epsilon$, para cualquier $t \in [t_0, \infty)$.

Definición 1.5. Se dice que la solución φ_0 de (1.3) es un equilibrio atractivo si para cualquier $t_0 \in I$, existe $\gamma = \gamma(t_0) \in (0, \rho)$ tal que, si $|y_0| \leq \gamma$, entonces:

1. $I(t_0, y_0) \supset [t_0, \infty)$.
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} |\varphi(t; t_0, y_0)| = 0$.

Definición 1.6. Se dice que la solución φ_0 de (1.3) es un equilibrio uniformemente atractivo si existe $\gamma \in (0, \rho)$ tal que si $|y_0| \leq \gamma$, entonces:

1. $I(t_0, y_0) \supset [t_0, \infty)$, para cualquier $t_0 \in I$.
2. Para cualquier $\epsilon > 0$, existe $T_\epsilon > 0$ verificando $|\varphi(t; t_0, y_0)| \leq \epsilon$, para $t_0 \in I$ y $t \geq t_0 + T_\epsilon$.

Definición 1.7. Sea φ_0 solución de (1.3).

1. Se dice que la solución φ_0 es un equilibrio asintóticamente estable si es un equilibrio estable y atractivo.
2. Se dice que la solución φ_0 es un equilibrio uniformemente asintóticamente estable si es equilibrio uniformemente estable y uniformemente atractivo.

Definición 1.8. Se dice que la solución φ_0 de (1.3) es un equilibrio exponencialmente asintóticamente estable si existen constantes $C > 0, \gamma \in (0, \rho)$ y $\alpha > 0$ tales que:

1. $I(t_0, y_0) \supset [t_0, \infty)$, para cualesquiera $t_0 \in I$, e $|y_0| \leq \gamma$.
2. $|\varphi(t; t_0, y_0)| \leq C|y_0|e^{-\alpha(t-t_0)}$, para cualesquiera $t_0 \in I, |y_0| \leq \gamma$, y $t \geq t_0$.

Observación 1.1. Las distintas definiciones de estabilidad y atractividad enunciadas han sido planteadas para la solución nula φ_0 , pero es posible reescribirlas para cualquier solución no nula φ_1 definida en un intervalo infinito.

Definición 1.9. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto conexo no vacío. El sistema diferencial ordinario (1.3) es un sistema autónomo si se tiene

$$f(t, y) = f(y), \forall t,$$

para una función $f : D \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ tal que $f \in C^0(D; \mathbb{R}^N) \cap Liploc(D)$. En este caso el sistema tiene la forma

$$y' = f(y), \quad (1.4)$$

y el dominio maximal de existencia y unicidad está dado por $\Omega = \mathbb{R} \times D$.

Observación 1.2. En el caso de sistema autónomo los conceptos de estabilidad y atractividad, y, estabilidad y atractividad uniformes son equivalentes.

Vamos ahora a enunciar algunos métodos para analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio.

1.3. Estabilidad de sistemas lineales

En esta sección vamos a considerar primero el siguiente s.d.o. lineal homogéneo

$$y' = A(t)y, \quad (1.5)$$

donde $A \in C^0(I, L(\mathbb{R}^N))$ y $L(\mathbb{R}^N)$ denota el conjunto de matrices cuadradas de orden n , e $I = (\tau, +\infty)$, con $\tau \in [-\infty, \infty)$.

Tomando $\rho = \infty$ y $\Omega = I \times \mathbb{R}^N$ se tiene que el sistema (1.5) satisface (1.2), luego tiene sentido estudiar la estabilidad de la solución nula de (1.5).

Nos vamos a centrar en el s.d.o. (1.5) en el que $A(t)$ es una matriz de coeficientes constantes, es decir, $A(t) \equiv A \in L(\mathbb{R}^N)$, para cualquier $t \in I$. Es claro que dicho sistema es autónomo.

Vamos a enunciar un resultado que nos permite analizar la estabilidad de sistemas lineales de coeficientes constantes.

Teorema 1.5. Consideremos el sistema lineal:

$$y' = Ay \quad (1.6)$$

donde $A \in L(\mathbb{R}^N)$ es conocida. Sea $\{\lambda_i : 1 \leq i \leq n\} \subset \mathbb{C}$ el conjunto de autovalores distintos de la matriz $A \in L(\mathbb{R}^N)$. Se verifica:

1. La solución φ_0 de (1.6) es uniformemente asintóticamente estable si y sólo si $Re(\lambda_i) < 0$ para todo $1 \leq i \leq n$.
2. La solución φ_0 de (1.6) es uniformemente estable si y sólo si $Re(\lambda_i) \leq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$ y las cajas de Jordan asociadas a λ_j donde $1 \leq j \leq n$ y $Re(\lambda_j) = 0$ tienen dimensión 1.
3. La solución φ_0 de (1.6) es inestable si y sólo si existe λ_j , con $1 \leq j \leq n$, tal que, o bien $Re(\lambda_j) > 0$, o bien $Re(\lambda_j) = 0$ y λ_j tiene asociada una caja de Jordan asociada de dimensión mayor o igual que dos.

Por último consideramos el siguiente s.d.o. lineal no homogéneo

$$y' = A(t)y + b(t), \quad (1.7)$$

donde $A \in C^0(I, L(\mathbb{R}^N))$ y $b \in C(I; \mathbb{R}^N)$, siendo $L(\mathbb{R}^N)$ denota el conjunto de matrices cuadradas de orden n , e $I = (\tau, +\infty)$, con $\tau \in [-\infty, \infty)$. En este caso hay que estudiar la estabilidad de cualquier solución $\varphi_1 \in C^1(I; \mathbb{R}^N)$ de (1.7) en I :

$$\varphi_1'(t) = A(t)\varphi_1(t) + b(t), \quad \forall t \in I.$$

Nota 1.3.1. *Estudiar la estabilidad de cualquier solución φ_1 de (1.7) se reduce a estudiar la estabilidad de la solución nula φ_0 del s.d.o. lineal homogéneo asociado. Para ello sólo hay que hacer el cambio $z = y - \varphi_1(t)$ y estudiar la estabilidad de la solución nula φ_0 del nuevo sistema.*

1.4. Estabilidad para sistemas no lineales

Vamos a analizar ahora la estabilidad de los s.d.o. no lineales.

En primer lugar, vamos a estudiar el caso de aquellos sistemas que se escriben como suma de una parte lineal más una perturbación no lineal. Son de la forma:

$$y' = A(t)y + g(t, y) \quad (1.8)$$

con $A \in C^0(\bar{I}, L(\mathbb{R}^N))$, $g \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y, \Omega)$ para un intervalo \bar{I} y un abierto conexo no vacío $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ tales que $I \times B(0; \rho) \subseteq \Omega \subseteq \bar{I} \times \mathbb{R}^N$, para $I = (\tau, \infty)$, con $\tau \in [-\infty, \infty)$ y $\rho \in (0, \infty]$.

Además supongamos que $g(t, 0) = 0$ para cualquier $t \in I$.

Nota 1.4.1. *Esta condición nos garantiza que $\varphi_0(t) = 0$ es solución del sistema (1.8) en I , luego se tiene que φ_0 será también solución en \bar{I} del sistema lineal homogéneo asociado (1.5).*

Teorema 1.6 (Teorema de estabilidad en primera aproximación). *Bajo las condiciones anteriores se verifica:*

1. Si

$$\lim_{|y| \rightarrow 0} \frac{|g(t, y)|}{|y|} = 0$$

uniformemente en I (es decir, para cualquier $\epsilon > 0$, existe $\mu \in (0, \rho)$ tal que si $|y| \leq \mu$ se tiene $|g(t, y)| \leq \epsilon|y|$, para todo $t \in I$). Así, si φ_0 es un equilibrio uniformemente asintóticamente estable del sistema lineal (1.5), entonces φ_0 es un equilibrio exponencialmente asintóticamente estable del sistema no lineal (1.8).

2. Supongamos que $|g(t, y)| \leq \alpha(t)|y|$, para cualesquiera $(t, y) \in I \times B(0, \rho)$, con $\alpha \in C^0(I)$ satisfaciendo

$$\int_{\tau}^{\infty} \alpha(t) dt < \infty.$$

Así, si φ_0 es un equilibrio uniformemente estable del sistema lineal (1.5), se tiene que φ_0 es un equilibrio uniformemente estable del sistema no lineal (1.8).

En segundo lugar vamos a estudiar la estabilidad de los sistemas diferenciales no lineales de la forma:

$$y' = F(y), \quad (1.9)$$

con F función no lineal de la variable y , $F \in C^1(D)$ y $D \subset \mathbb{R}^N$. Para estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio de sistemas diferenciales de esta forma se puede utilizar la linealización.

Definición 1.10. Sea $x_0 \in D$ un punto de equilibrio del sistema no lineal (1.9), diremos que

$$A = DF(x_0) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

es la matriz del sistema linealizado del sistema (1.9) en el punto x_0 .

Teorema 1.7. Sea $A \in L(\mathbb{R}^N)$ la matriz del sistema linealizado de un sistema no lineal (1.9) en un punto de equilibrio x_0 . Sea $\{\lambda_i : 1 \leq i \leq n\} \subset \mathbb{C}$ el conjunto de autovalores distintos de la matriz $A \in L(\mathbb{R}^N)$. Entonces:

1. Si existe λ_j , con $1 \leq j \leq n$, tal que $\operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$, el punto de equilibrio x_0 es inestable.
2. Si $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ para todo $1 \leq i \leq n$, el punto de equilibrio x_0 es asintóticamente estable.
3. En otros casos, la linealización no decide la estabilidad.

1.5. Método de estabilidad de Liapunov

En el estudio que realizaremos en esta sección nos restringiremos únicamente al caso de los sistemas diferenciales autónomos, aunque la mayoría de los resultados pueden generalizarse al caso no autónomo.

Consideramos el sistema diferencial ordinario autónomo

$$y' = F(y), \tag{1.10}$$

con $F : D \rightarrow \mathbb{R}^N$, $D \subseteq \mathbb{R}^N$ un abierto conexo no vacío y $F \in C^0(D, \mathbb{R}^N) \cap \operatorname{Lip}_{loc}(D)$. Suponemos que existe $\rho \in (0, \infty)$ tal que $B_\rho \subseteq D$ y $F(0) = 0$.

Definición 1.11. Sean $\rho \in (0, \infty)$ y $V \in C^0(\bar{B}_\rho)$ una función real.

1. Se dice que la función V es definida positiva en B_ρ si $V(0) = 0$ y $V(y) > 0$, para todo $y \in \bar{B}_\rho \setminus \{0\}$.
2. Se dice que la función V es semi-definida positiva en B_ρ si $V(0) = 0$ y $V(y) \geq 0$, para todo $y \in \bar{B}_\rho \setminus \{0\}$.
3. Se dice que la función V es definida negativa o semi-definida negativa si $-V$ es definida positiva o semi-definida positiva, respectivamente.

Vamos a introducir ahora el concepto de función de Liapunov para sistemas diferenciales ordinarios autónomos.

Definición 1.12. Sea $V : B_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $V \in C^1(B_\rho)$, donde $\rho > 0$.

1. Se denomina derivada de V respecto del sistema autónomo (1.10) a la función $\dot{V} : B_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\dot{V}(y) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_i}(y) F_i(y), \quad \text{para cada } y \in B_\rho.$$

2. Se dice que $V \in C^1(B_\rho) \cap C^0(\overline{B}_\rho)$ es una función de Liapunov de B_ρ para el sistema autónomo (1.10) si V es definida positiva en B_ρ y $\dot{V}(y) \leq 0$, para todo $y \in B_\rho$.

Teorema 1.8 (Condiciones suficientes de estabilidad de Liapunov). Sean $\rho > 0$, tal que $B_\rho \subset D$ y $V \in C^1(\overline{B}_\rho)$ una función de Liapunov en B_ρ para el sistema (1.10). Entonces:

1. La solución φ_0 de (1.10) en \mathbb{R} es uniformemente estable.
2. Si además \dot{V} es definida negativa en B_ρ , entonces la solución φ_0 de (1.10) en \mathbb{R} es uniformemente asintóticamente estable.
3. Si existen constantes $c_1, c_2, c_3 > 0$ tales que

$$c_1|y|^2 \leq V(y) \leq c_2|y|^2, \quad y \dot{V}(y) \leq -c_3|y|^2, \quad \forall y \in B_\rho, \quad (1.11)$$

entonces la solución φ_0 de (1.10) en \mathbb{R} es exponencialmente asintóticamente estable.

A continuación daremos una condición suficiente para establecer la inestabilidad de la solución nula del sistema diferencial ordinario autónomo.

Teorema 1.9 (Teorema de Tchetaev). Supongamos que existen $\rho > 0$ y $V \in C^1(\overline{B}_\rho)$ tales que $B_\rho \subset D$ y se cumple:

1. $V(0) = 0$.
2. \dot{V} es definida positiva en B_ρ .
3. Para cualquier $\sigma \in (0, \rho)$ existe $y_\sigma \in B_\sigma$ tal que $V(y_\sigma) > 0$.

Entonces, la solución nula φ_0 de (1.10) es inestable.

1.6. Órbitas de sistemas autónomos

Para esta sección consideraremos el sistema diferencial ordinario autónomo

$$y' = F(y) \quad (1.12)$$

con $F : D \rightarrow \mathbb{R}^N$, $D \subseteq \mathbb{R}^N$ un abierto conexo no vacío y $F \in C^0(D; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(D)$.

En esta sección realizaremos un estudio cualitativo de la solución maximal $\varphi(\cdot, t_0, y_0)$, con $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times D$.

Proposición 1.1. Consideramos el sistema autónomo (1.12) con $F \in Lip_{loc}(D)$. Para $t_0 \in \mathbb{R}$ e $y_0 \in D$, sea $\varphi(\cdot; t_0, y_0)$ la solución maximal del problema de Cauchy asociado a (1.12). Entonces:

1. $I(t_0, y_0) = t_0 + I(0, y_0) \equiv t_0 + I(y_0)$.
2. $\varphi(t; t_0, y_0) = \varphi(t - t_0; 0, y_0)$, para cualquier $t \in I(t_0, y_0)$.

Proposición 1.2. Consideremos el sistema autónomo (1.12) con $F \in Lip_{loc}(D)$. Sean $t \in \mathbb{R}$ e $y_0 \in D$. Entonces, si $t_1 \in I(t_0, y_0)$ e $y_1 = \varphi(t; t_1, y_1)$, se tiene $I(t_0, y_0) = I(t_1, y_1)$ y $\varphi(t; t_0, y_0) = \varphi(t; t_1, y_1)$, $\forall t \in I(t_0, y_0)$.

Corolario 1.1. En las condiciones de la Proposición 1.1, sea $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in D$, $t_1 \in I(y_0)$ e $y_1 = \varphi(t_1; 0, y_0)$. Entonces, $I(y_0) = t_1 + I(y_1)$ y $\varphi(t; 0, y_1) = \varphi(t + t_1; 0, y_0)$, $\forall t \in I(y_1)$.

Nota 1.6.1. Equivalentemente a lo anterior, $\varphi(t; 0, y_0) = \varphi(t - t_1; 0, y_1)$ para cualquier $t \in I(y_0)$.

Veamos ahora la definición de órbita del sistema (1.12) que pasa por un punto $y_0 \in D$.

Definición 1.13. Sea $y_0 \in D$ y denotemos $I(y_0) = I(0, y_0)$. Se llama órbita del sistema autónomo (1.12) asociada a y_0 al conjunto $\gamma(y_0)$ dado por

$$\gamma(y_0) = \{\varphi(t; 0, y_0) : t \in I(y_0)\} \subset D.$$

A continuación presentamos las definiciones de semiórbita positiva y negativa del sistema (1.12) que pasa por y_0 .

Definición 1.14. Sea $y_0 \in D$,

1. Definimos la semiórbita positiva del sistema (1.12) asociada a y_0 como el conjunto:

$$\gamma^+(y_0) = \{\varphi(t; 0, y_0) : t \in I(y_0), t \geq 0\}.$$

2. Definimos la semiórbita negativa del sistema (1.12) asociada a y_0 como el conjunto:

$$\gamma^-(y_0) = \{\varphi(t; 0, y_0) : t \in I(y_0), t \leq 0\}.$$

Ahora se muestra la definición de conjunto invariante para nuestro sistema.

Definición 1.15. Sea $\Gamma \subseteq D$.

1. Se dice que Γ es un conjunto invariante para el sistema autónomo (1.12) si para cualquier $y_0 \in \Gamma$ se satisface $\gamma(y_0) \subseteq \Gamma$.
2. Se dice que Γ es un conjunto positivamente invariante (resp., negativamente invariante) para el sistema autónomo (1.12) si se tiene $\gamma^+(y_0) \subseteq \Gamma$ (resp., $\gamma^-(y_0) \subseteq \Gamma$), para cualquier $y_0 \in \Gamma$.

Definición 1.16. 1. Se dice que $p \in \mathbb{R}^N$ es un punto límite positivo (resp., punto límite negativo) asociado al sistema (1.12) y al punto $y_0 \in D$ si existe una sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset I(t_0)$ tal que

(a) $\lim t_n = \sup I(y_0)$ y $t_n \rightarrow \infty$ (resp., $\lim t_n = \inf I(y_0)$ y $t_n \rightarrow -\infty$).

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n; 0; y_0) = p$.

2. Dado $y_0 \in D$, se denomina conjunto límite positivo asociado al sistema (1.12) y al punto y_0 al conjunto

$$\Lambda^+(y_0) = \{p \in \mathbb{R}^N : p \text{ es un punto límite positivo asociado a (1.12) y a } y_0\},$$

y conjunto límite negativo asociado al sistema (1.12) y al punto y_0 al conjunto

$$\Lambda^-(y_0) = \{p \in \mathbb{R}^N : p \text{ es un punto límite negativo asociado a (1.12) y a } y_0\}.$$

El resultado que damos a continuación nos asegura que, bajo unas condiciones específicas, existen conjuntos invariantes respecto del sistema autónomo que atraen las órbitas del sistema. Este resultado completa el Teorema de estabilidad de Liapunov dando una condición que asegura que la solución nula del sistema es uniformemente asintóticamente estable.

Teorema 1.10 (Teorema de LaSalle). *Consideremos el s.d.o. (1.12). Sea $K \subset D$ un conjunto compacto no vacío y sea $V \in C^1(D)$ tal que $\dot{V}(y) \leq 0$ para cualquier $y \in K$. Sea $y_0 \in K$ tal que $\gamma^+(y_0) \subseteq K$. Denotemos por*

$$E = \{y \in K : \dot{V}(y) = 0\},$$

y sea M el mayor subconjunto invariante para el sistema (1.12) de E . Entonces:

1. $I(y_0) \supset [0, \infty)$.
2. $\Lambda^+(y_0) \subseteq M$ (y por tanto, $M \neq \emptyset$).
3. $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi(t; 0, y_0), M) = 0$.

Por último en esta sección veremos el Teorema de Poincaré-Bendixson que nos ayudará a determinar el comportamiento asintótico de las órbitas de los sistemas autónomos planos. Este teorema sólo es válido para dimensión 2, como mucho.

Teorema 1.11 (Teorema de Poincaré-Bendixson). *Consideremos el sistema autónomo (1.12) con $F \in C^1(D)$ y $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto conexo no vacío. Sea $y_0 \in K \subset D$ con K un compacto tal que $\gamma^+(y_0) \subset K$ (resp., $\gamma^-(y_0) \subset K$). Supongamos que $\Lambda^+(y_0)$ (resp., $\Lambda^-(y_0)$) no contiene puntos críticos de (1.12). Entonces,*

1. $\Lambda^+(y_0)$ (resp., $\Lambda^-(y_0)$) es una órbita cíclica no degenerada.
2. O bien $\gamma(y_0)$ es una órbita cíclica (y en el caso $\gamma(y_0) = \Lambda^+(y_0)$) (resp., $\gamma(y_0) = \Lambda^-(y_0)$), o bien $\gamma^+(y_0)$ (resp., $\gamma^-(y_0)$) se acerca en espiral hacia $\Gamma^+(y_0)$ (resp., $\Gamma^-(y_0)$), en cuyo caso se dice que $\Gamma^+(y_0)$ (resp., $\Gamma^-(y_0)$) es un ciclo-límite.

1.7. Sistemas dinámicos autónomos

Consideramos el s.d.o. autónomo siguiente

$$y' = F(y), \tag{1.13}$$

donde $F : D \rightarrow \mathbb{R}^N \in \text{Lip}_{loc}(D)$ y $D \subseteq \mathbb{R}^N$ es un abierto conexo no vacío.

Nota 1.7.1. *En este caso los conceptos de estabilidad, estabilidad uniforme, atractividad, y atractividad uniforme son equivalentes.*

1.7.1. Sistemas dinámicos

En esta subsección mostramos un resumen de propiedades y resultados sobre sistemas dinámicos autónomos.

Definición 1.17. Sea X un espacio métrico. Un sistema dinámico continuo es una familia de aplicaciones $\{S(t) : t \in \mathbb{R}\}$ definidas como:

$$\begin{aligned} S(t) : X &\longrightarrow X \\ x &\longrightarrow S(t)x \end{aligned}$$

y que verifican:

1. $S(0)x = Id_X(x)$.
2. (Propiedad de grupo) $S(t_1 + t_2) = S(t_1) \circ S(t_2)$, para cada $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.
3. $S(t) : X \rightarrow X$ es una aplicación continua para todo $t \in \mathbb{R}$.
4. La aplicación $t \in \mathbb{R} \rightarrow S(t)x$ es una aplicación continua para cada $x \in X$.

Definición 1.18. Sea X un espacio métrico. Un sistema semi-dinámico continuo o semigrupo es una familia de aplicaciones $\{S(t) : t \geq 0\}$ definidas como

$$\begin{aligned} S(t) : X &\longrightarrow X \\ x &\longrightarrow S(t)x \end{aligned}$$

y que verifican:

1. $S(0)x = Id_X(x)$.
2. (Propiedad de semigrupo) $S(t_1 + t_2) = S(t_1) \circ S(t_2)$, para cada $t_1, t_2 \geq 0$.
3. $S(t) : X \rightarrow X$ es una aplicación continua para todo $t \geq 0$.
4. La aplicación $t \in [0, \infty) \rightarrow S(t)x$ es una aplicación continua para cada $x \in X$.

Suponemos dado un sistema semi-dinámico de la forma $\{S(t) : t \geq 0\}$.

Definición 1.19. Sean X un espacio métrico y $D \subset X$.

1. Se dice que D es positivamente invariante si $S(t)D \subseteq D$, para todo $t \geq 0$.
2. Se dice que D es negativamente invariante si $S(t)D \supseteq D$, para todo $t \geq 0$.
3. Se dice que D es invariante si $S(t)D = D$, para todo $t \geq 0$.

Puesto que en este trabajo nos centraremos en los sistemas semi-dinámicos continuos, a partir de ahora omitiremos la palabra continuos.

Ahora reescribiremos algunas definiciones de las secciones anteriores en términos del siguiente sistema semi-dinámico. Vamos a considerar, para el propósito de este trabajo, $X = \mathbb{R}^N$ (dimensión finita). De ahora en adelante, consideraremos también el sistema semi-dinámico $\{S(t) : t \geq 0\}$ definido como

$$S(t)y_0 = \varphi(t; 0, y_0)$$

donde $\varphi(t; 0, y_0)$ denota la solución maximal del sistema (1.13) tal que $\varphi(0; 0, y_0) = y_0$. Se puede ver que el sistema definido así (para aquellos valores de t del intervalo de definición de la solución maximal) es un sistema semi-dinámico.

Definición 1.20. *Dados un espacio métrico X y $u \in X$, llamamos semiórbita positiva que pasa por u (o empieza en u) al conjunto:*

$$\gamma^+(u) = \{S(t)u : t \geq 0\}.$$

Definición 1.21. *Dados un espacio métrico X y $u \in X$, llamamos semiórbita negativa que pasa por u (o termina en u) al conjunto:*

$$\gamma^-(u) = \{S(-t)u : t > 0\}.$$

Definición 1.22. *Dados un espacio métrico X y $u \in X$, se llama órbita que pasa por u al conjunto $\gamma(u)$ dado por:*

$$\gamma(u) = \gamma^+(u) \cup \gamma^-(u).$$

Definición 1.23. *Sea $y_0 \in X$. Se dice que y_0 es un punto crítico o punto estacionario para el sistema (1.13) si se verifica $S(t)y_0 = y_0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Nota 1.7.2. *Tenemos que $y_0 \in X$ es un punto crítico para el sistema (1.13) si y solo si*

$$\gamma(y_0) = \{y_0\}.$$

Definición 1.24. *Sean X un espacio métrico, $u_0 \in X$ y $D \subset X$.*

1. *Llamamos conjunto w -límite asociado a $u_0 \in X$ y denotado por $w(u_0)$ al conjunto:*

$$\Lambda(u_0) = \{u \in X : \exists \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}, t_n \rightarrow \infty, S(t_n)u_0 \rightarrow u\}.$$

2. *Llamamos conjunto w -límite asociado a $D \subset X$ y denotado por $w(D)$ al conjunto:*

$$\Lambda(D) = \{u \in X : \exists \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}, t_n \rightarrow \infty, \exists \{d_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D, S(t_n)d_n \rightarrow u\}.$$

Lema 1.1. *Sean X un espacio métrico, $u_0 \in X$, y $D \subset X$. Se verifica:*

1.

$$\Lambda(u_0) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} S(s)u_0} = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\gamma_T^+(u_0)}, \text{ donde } \gamma_T^+(u_0) = \{S(t)u_0 : t \geq T\}.$$

2.

$$\Lambda(D) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} S(s)D} = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\gamma_T^+(D)}, \text{ donde } \gamma_T^+(D) = \bigcup_{u \in D} \gamma_T^+(u).$$

Nota 1.7.3. *Los conceptos de límite positivo y w -límite coinciden si $\{S(t) : t \geq 0\}$ es un sistema semi-dinámico definido como sigue*

$$S(t)y_0 = \varphi(t; 0, y_0),$$

con $\varphi(t; 0, y_0)$ como solución maximal del sistema (1.13).

1.7.2. Atractor global

Definición 1.25. Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que A es absorbente respecto del sistema semi-dinámico $\{S(t) : t \geq 0\}$ si para todo $B \subset X$ acotado existe $T(B) \geq 0$ tal que:

$$S(t)B \subset A, \quad \forall t \geq T(B).$$

Definición 1.26. Sean A y B subconjuntos de X . Diremos que A atrae a B si

$$\text{dist}(S(t)B, A) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty,$$

es decir, si para cada $\epsilon > 0$ existe un tiempo $T = T(\epsilon)$ tal que para todo $t \geq T$ y para todo $u \in B$ se tiene

$$\text{dist}(S(t)u, A) < \epsilon.$$

Definición 1.27. Diremos que A es atractor puntual si atrae a cada punto de X .

Nota 1.7.4. La distancia a la que se refiere la definición anterior es en realidad la semi-distancia de Hausdorff,

$$\text{dist}(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} |a - b|.$$

Algunas propiedades de esta semi-distancia son:

- (a) $\text{dist}(\emptyset, Y) = 0$.
- (b) $\text{dist}(X, \emptyset)$ no está definida.
- (c) $\text{dist}(X, Y) = \text{dist}(Y, X)$.
- (d) Esta distancia no define una métrica debido a que $\text{dist}(X, Y) = 0$ sólo implica que $X \subset \bar{Y}$.
- (e) Si $Y_1 \subset Y_2 \implies \text{dist}(X, Y_1) \geq \text{dist}(X, Y_2)$.
- (f) Si $X_1 \subset X_2 \implies \text{dist}(Y, X_1) \leq \text{dist}(Y, X_2)$.

Definición 1.28. Sea (X, d) un espacio métrico y $\{S(t) : t \geq 0\}$ un sistema semi-dinámico. Se dice que $A \subset X$ es un atractor global para $\{S(t) : t \geq 0\}$ si verifica:

1. A es compacto.
2. A es invariante.
3. A atrae a todos los subconjuntos acotados de X .

Existencia de atractor global

Veremos ahora una condición suficiente de existencia de atractor global. Para ello vamos a hacer uso del siguiente lema.

Lema 1.2. *Sea $B \subset X$. Si para algún $T > 0$ el conjunto*

$$\overline{\gamma_T^+(B)} = \overline{\bigcup_{t \geq T} S(t)B}$$

es compacto, entonces $\Lambda(B)$ es no vacío, compacto e invariante.

Teorema 1.12 (Condición suficiente de existencia de atractor global). *Sea (X, d) un espacio métrico completo. Supongamos que $\{S(t) : t \geq 0\}$ es un sistema semi-dinámico en dicho espacio y que existe $B \subset X$ absorbente y compacto. Entonces existe un atractor global A definido por $A = \Lambda(B)$. Además, si X es conexo, entonces A es conexo.*

Lema 1.3. *Si existe un atractor global, este es único.*

Capítulo 2

Modelo SIRI

El modelo SIRI es un modelo capaz de describir la dinámica de poblaciones en la que se desarrolla una infección. Para ello sabemos que existen cuatro tipos de población: Susceptibles (Susceptible), son aquellos individuos que no entran en contacto con el patógeno; Infecciosos (Infectious), aquellos que están infectados por el agente patógeno; Recuperados (Recovered), si se han recuperado por completo de la infección; y por último Reinfectedos (Reinfected), los cuales tras estar recuperados de la infección vuelven a entrar en contacto con el agente patógeno y pasan a ser infectados por él de nuevo, por lo que pasan a formar parte, otra vez, del grupo de los infectados .

Denotaremos $S(t)$, $I(t)$ y $R(t)$ al número de individuos susceptibles, infecciosos y recuperados, respectivamente, a lo largo del tiempo t , para cada $t \geq 0$. Por la propia naturaleza de la población sólo tiene sentido considerar soluciones no negativas, $S(t) \geq 0$, $I(t) \geq 0$ y $R(t) \geq 0$, para cada $t \geq 0$. En este capítulo abarcaremos distintas situaciones. El caso en el que nos extenderemos se caracteriza por mantener el número de individuos constante. También veremos el caso en que la tasa de natalidad no coincide con la tasa de mortalidad así como la muerte natural no coincide con la muerte por enfermedad, y por último el caso en que la población no se mantiene constante.

2.1. Tamaño de población constante

Como el número de individuos permanece constante en cualquier instante de tiempo t , podemos asumir que $S(t) + I(t) + R(t) = 1$, $\forall t \geq 0$. Es obvio que la tasa de natalidad es la misma que la tasa de mortalidad, $\mu > 0$, ya que la población se mantiene constante. A la tasa de contacto entre susceptibles e infectados y al coeficiente de individuos que pasan de infectados a recuperados los llamaremos, respectivamente, $\beta > 0$ y $\gamma > 0$. También denotaremos por $\eta > 0$ al coeficiente de individuos reinfectedos (aquellos que tras recuperarse pierden la inmunidad frente al patógeno y vuelven a infectarse). Supondremos que la tasa de muerte por infección será la misma que la tasa de muerte natural.

Consideramos las siguientes hipótesis:

- Un individuo pasa a formar parte del grupo de los susceptibles, únicamente, por nacimiento.

- Para que un individuo abandone el grupo de los susceptibles ha de hacerlo por muerte natural o por convertirse en individuo infeccioso.
- Asumimos que cada individuo infectado tiene un número fijo β de contactos por día. Esos contactos pueden realizarse con individuos infectados o individuos susceptibles, lo cual sería suficiente para contagiarse de la enfermedad.
- Un individuo puede abandonar el grupo de los infectados o bien por muerte por infección, o bien por recuperación de la enfermedad.
- Asumimos que la proporción de individuos infectados que se recuperan en un día, γ , es fija.
- Hay dos formas de abandonar el grupo de los recuperados: por muerte natural, o por convertirse en individuo infeccioso de nuevo.
- Asumimos que la proporción de individuos recuperados que se reinfectan por día, η , es fija.

Representación esquemática de la dinámica de transmisión:

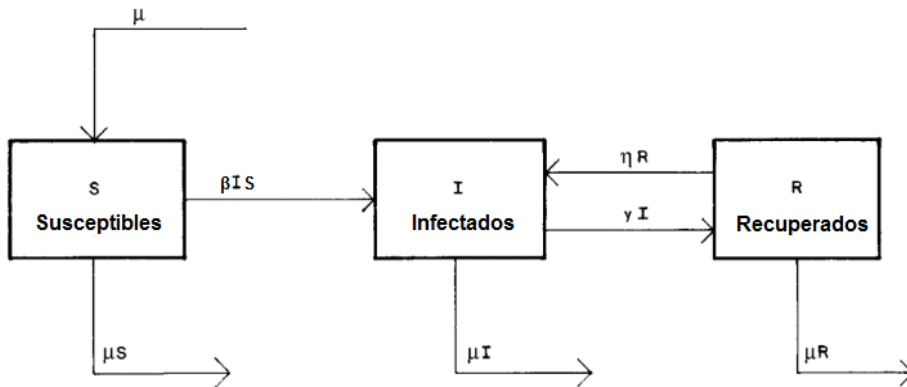


FIG 1: diagrama para el modelo S-I-R-I en el caso de población constante.

El sistema resultante viene definido por el siguiente sistema diferencial:

$$\begin{cases} S' &= \mu - \mu S - \beta SI \\ I' &= \beta SI - \mu I - \gamma I + \eta R \\ R' &= \gamma I - \mu R - \eta R \end{cases} \quad (2.1)$$

El siguiente teorema nos mostrará que el sistema anterior posee una única solución maximal.

Teorema 2.1. *Sea $(S_0, I_0, R_0) \in \mathbb{R}^3$. Entonces existe una única solución maximal de (2.1). Además si $(S_0, I_0, R_0) \in \mathbb{R}_+^3$, entonces $\varphi(t; t_0, S_0, I_0, R_0) \in \mathbb{R}_+^3$.*

Demostración. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f(S, I, R) = \begin{bmatrix} \mu - \mu S - \beta SI \\ \beta SI - \mu I - \gamma I + \eta R \\ \gamma I - \mu R - \eta R \end{bmatrix}.$$

Como se puede observar la función es continua en \mathbb{R}^3 por tratarse de polinomios. Veamos que también se trata de una función localmente Lipschitziana. Tomamos f_1, f_2, f_3 como las respectivas filas de la matriz f .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial S} &= -\mu - \beta I \\ \frac{\partial f_1}{\partial I} &= -\beta S \\ \frac{\partial f_1}{\partial R} &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} &= \beta I \\ \frac{\partial f_2}{\partial I} &= \beta S - \mu \\ \frac{\partial f_2}{\partial R} &= \eta \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} &= 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial I} &= \gamma \\ \frac{\partial f_3}{\partial R} &= -\mu - \eta \end{aligned}$$

Todas ellas son continuas en \mathbb{R}^3 , por lo que f es localmente Lipschitziana. Luego aplicando el teorema de existencia y unicidad de solución maximal (Teorema 1.4), tenemos que para cada $(S_0, I_0, R_0) \in \mathbb{R}^3$ existe una única solución maximal, $\varphi(\cdot; t_0, S_0, I_0, R_0)$, de (2.1). Tomamos ahora $(S_0, I_0, R_0) \in \mathbb{R}_+^3$. Vemos que existe solución positiva.

$$\begin{aligned} \left. \frac{dS}{dt} \right|_{S=0} &= \mu > 0 \\ \left. \frac{dI}{dt} \right|_{I=0} &= \gamma I_0 > 0 \\ \left. \frac{dR}{dt} \right|_{R=0} &= \eta R_0 > 0 \end{aligned}$$

Todas ellas son positivas, luego $\varphi(t; t_0, S_0, I_0, R_0) \in \mathbb{R}_+^3$. □

Nota 2.1.1. *A partir de ahora tomaremos $S_0 = S(0), I_0 = I(0), R_0 = R(0)$.*

Volviendo a nuestro sistema (2.1), como la población la hemos supuesto que permanece constante ($1 = S(t) + I(t) + R(t)$), dicho sistema diferencial se puede reducir al siguiente:

$$\begin{cases} S' &= \mu - \mu S - \beta SI \\ I' &= \beta SI - \mu I - \gamma I + \eta(1 - S - I) \end{cases} \quad (2.2)$$

de forma que estudiar el comportamiento asintótico del sistema (2.1) es equivalente a estudiarlo en el sistema (2.2).

2.1.1. Comportamiento asintótico de las soluciones

Primero vamos a ver que el conjunto

$$\Lambda = \{(S, I); S \geq 0, I \geq 0, S + I \leq 1\}$$

es positivamente invariante respecto (2.2).

La ecuación diferencial sobre el total de la población de (2.2) es:

$$\frac{d}{dt}(S + I) = \mu - \mu S - \mu I - \gamma I + \eta(1 - S - I). \quad (2.3)$$

Acotamos y sacamos factor común a (2.3) de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt}(S + I) = (\mu + \eta) - (\mu + \eta)S - (\mu + \eta + \gamma)I \leq (\mu + \eta) - (\mu + \eta)(S + I) = (\mu + \eta)(1 - (S + I))$$

$$\frac{d}{dt}(S + I) + (\mu + \eta)(S + I) \leq (\mu + \eta).$$

Multiplicamos por $e^{(\mu + \eta)t}$:

$$e^{(\mu + \eta)t} \left(\frac{d}{dt}(S + I) + (\mu + \eta)(S + I) \right) \leq (\mu + \eta)e^{(\mu + \eta)t}.$$

Integramos en $[0, t]$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[e^{(\mu + \eta)t}(S + I) \right] &\leq \int_0^t (\mu + \eta)e^{(\mu + \eta)t} \\ e^{(\mu + \eta)t}(S + I) - e^{(\mu + \eta)0}(S(0) - I(0)) &\leq e^{(\mu + \eta)t} - e^{(\mu + \eta)0} \end{aligned}$$

$$e^{(\mu + \eta)t}(S + I) \leq S(0) - I(0) + e^{(\mu + \eta)t} - 1.$$

Multiplicamos por $e^{-(\mu + \eta)t}$:

$$(S + I) \leq e^{-(\mu + \eta)t}(S(0) + I(0) - 1) + 1.$$

Luego obtenemos:

- Si $S(0) = 0$.

$$(S + I) \leq e^{-(\mu + \eta)t}(I(0) - 1) + 1$$

Por lo que la solución sigue una trayectoria creciente en $(0, I(0))$.

- Si $I(0) = 0$.

$$(S + I) \leq e^{-(\mu + \eta)t}(S(0) - 1) + 1$$

Por lo que la solución sigue una trayectoria creciente en $(S(0), 0)$.

- Si $I(0) > 1$ y $S(0) > 1$, es decir, caso en el que el punto de equilibrio se encuentre fuera del conjunto.

$$(S + I) \leq e^{-(\mu+\eta)t}(S(0) + I(0) - 1) + 1$$

Por lo que la solución sigue una trayectoria decreciente hacia el conjunto.

Por lo tanto, el conjunto Λ es positivamente invariante.

Veamos ahora que el conjunto es absorbente. Partiendo de

$$\frac{d}{dt}(S + I) + (\mu + \eta)(S + I) \leq (\mu + \eta)$$

hemos visto antes que llegabamos a

$$\frac{d}{dt} \left[e^{(\mu+\eta)t}(S + I) \right] \leq \int_0^t (\mu + \eta)e^{(\mu+\eta)t}.$$

Sea $v = S + I$

$$\frac{d}{dt} \left[e^{(\mu+\eta)t}v(t) \right] \leq \int_0^t (\mu + \eta)e^{(\mu+\eta)t}$$

$$e^{(\mu+\eta)t}v(t) - e^0v(0) \leq e^{(\mu+\eta)t}$$

$$v(t) \leq v(0)e^{-(\mu+\eta)t} + e^{+(\mu+\eta)t-(\mu+\eta)t}$$

$$v(t) \leq v(0)e^{-(\mu+\eta)t} + 1.$$

Dado $\epsilon > 0$ existe siempre t_ϵ tal que para todo $t \geq t_\epsilon$, se verifica que $v(0)e^{-(\mu+\eta)t} < \epsilon$. Fijamos $\epsilon = 1$. Cualquier subconjunto del primer cuadrante con $S + I \leq 2$ es absorbente.

Luego Λ es absorbente.

Teorema 2.2. *Sea (\mathbb{R}_+^3, d) un espacio métrico y sea (2.2) un sistema semi-dinámico en dicho espacio. El conjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}_+^3$ es absorbente y compacto, luego existe un atractor global, el cual coincide con $\Lambda(\Lambda)$.*

Veamos ahora la estructura del atractor.

De (2.3) obtenemos la ecuación

$$0 = (\mu + \eta) - (\mu + \eta)S - (\mu + \eta + \gamma)I.$$

- Si sustituimos $S = 0$ en nuestro sistema (2.2) nos quedaría $0 = \mu$, lo cual no es posible dado que $\mu > 0$ (hemos supuesto inicialmente que la tasa de natalidad es positiva).

- Si sustituimos $I = 0$ en nuestro sistema (2.2) nos quedaría:

1. $0 = \mu - \mu S \longrightarrow 0 = \mu(1 - S)$
2. $0 = \eta(1 - S)$.

De donde obtenemos que $S = 1$. Luego nos queda el punto de equilibrio $(S, I) = (1, 0)$.

- Veamos si dentro de Λ (el conjunto positivamente invariante) hay algún punto de equilibrio. Tomamos $\bar{S} + \bar{I} = c$, con $0 < c < 1$.

$$\frac{d}{dt}(\bar{S} + \bar{I}) = (\mu + \eta) - (\mu + \eta)\bar{S} - (\mu + \eta + \gamma)\bar{I} = (\mu + \eta) - (\mu + \eta)(\bar{S} + \bar{I}) - \gamma\bar{I}$$

Luego nos queda:

$$0 = (\mu + \eta) - (\mu + \eta)c - \gamma\bar{I}.$$

Por lo tanto

$$c = \frac{(\mu + \eta) - \gamma\bar{I}}{(\mu + \eta)} = 1 - \frac{\gamma\bar{I}}{\mu + \eta}.$$

Veamos que pasa cuando $c = 0$ y $c = 1$:

- Si $c = 1$

$$1 = 1 - \frac{\gamma\bar{I}}{\mu + \eta} \implies \gamma\bar{I} = 0.$$

De donde obtenemos

$$\begin{cases} \gamma = 0 & \text{No válida} \\ \bar{I} = 0 \rightarrow \bar{S} = 1 & \text{Punto de equilibrio obtenido anteriormente} \end{cases}$$

- Si $c = 0$

$$0 = 1 - \frac{\gamma\bar{I}}{\mu + \eta} \implies \bar{I} = \frac{\mu + \eta}{\gamma}$$

$$\bar{I} > 1 \longrightarrow \mu + \eta > \gamma$$

$$\bar{I} < 1 \longrightarrow \mu + \eta < \gamma$$

$$\bar{S} = c - \bar{I} \implies \bar{S} = 1 - \frac{\gamma\bar{I}}{\mu + \eta} - \bar{I} = 1 - \frac{(\gamma + \mu + \eta)\bar{I}}{\mu + \eta}.$$

Sustituyendo lo obtenido en (2.2)

$$-\bar{I}\beta\bar{S} + \mu - \mu\bar{S} = 0$$

$$-\bar{I}\beta\left(1 - \frac{(\gamma + \mu + \eta)\bar{I}}{\mu + \eta}\right) + \mu - \mu\left(1 - \frac{(\mu + \gamma + \eta)\bar{I}}{\mu + \eta}\right)$$

$$-\beta\bar{I} + \frac{(\gamma + \mu + \eta)\beta\bar{I}^2}{\mu + \eta} + \mu - \mu + \frac{\mu(\gamma + \mu + \eta)\bar{I}}{\mu + \eta} = 0$$

$$\bar{I}\left(-\beta + \frac{(\gamma + \mu + \eta)\beta\bar{I}}{\mu + \eta} + \frac{\mu(\gamma + \mu + \eta)}{\mu + \eta}\right) = 0.$$

Obteniéndose así dos posibilidades

$$\begin{aligned}
 1. \quad \bar{I} = 0 &\implies \bar{S} = 1 \\
 2. \quad -\beta + \frac{(\gamma + \mu + \eta)\beta\bar{I}}{\mu + \eta} + \frac{\mu(\gamma + \mu + \eta)}{\mu + \eta} = 0 &\implies \bar{I} = \frac{\mu + \eta}{\mu + \gamma + \eta} - \frac{\mu}{\beta} \implies \\
 &\implies \bar{S} = 1 - \frac{(\gamma + \mu + \eta)\bar{I}}{\mu + \eta} \implies \bar{S} = \frac{\mu(\mu + \gamma + \eta)}{\beta(\mu + \eta)}.
 \end{aligned}$$

Luego los puntos de equilibrio obtenidos son:

$$(S_1^*, I_1^*) = (1, 0) \quad y \quad (S_2^*, I_2^*) = \left(\frac{\mu}{(\mu + \eta)\sigma}, \frac{\mu + \eta}{\beta} \left(\sigma - \frac{\mu}{\mu + \eta} \right) \right).$$

Vamos a comprobar que estos son todos los puntos de equilibrio en el primer octante positivo, es decir, que no hay más puntos de equilibrio de todo el sistema. Consideramos:

$$\begin{cases} 0 &= \mu - \mu S - \beta SI \\ 0 &= \beta SI - (\mu + \gamma + \eta)I - \eta S + \eta. \end{cases}$$

Calcular los puntos de equilibrio del sistema (2.2) equivale a calcular las soluciones del sistema anterior.

Si sacamos factor común S , y despejamos de la primera ecuación nos queda $S(-\mu - \beta I) = -\mu$, es decir,

$$S = \frac{\mu}{\mu + \beta I}. \quad (2.4)$$

Sustituyendo lo anterior en la segunda ecuación del sistema obtenemos

$$0 = \beta I \frac{\mu}{\mu + \beta I} - (\mu + \gamma + \eta)I - \eta \frac{\mu}{\mu + \beta I} + \eta$$

$$0 = \beta I \mu - (\mu + \gamma + \eta)(\mu + \beta I)I - \eta \mu + \eta(\mu + \beta I)$$

$$0 = \beta I \mu - (\mu + \gamma + \eta)\mu I - (\mu + \gamma + \eta)\beta I^2 - \eta \mu + \eta \mu + \eta \beta I$$

$$0 = I[\beta \mu - (\mu + \gamma + \eta)\mu - (\mu + \gamma + \eta)\beta I + \eta \beta].$$

Por lo tanto

■ Si $I = 0$ entonces sustituyendo en (2.4) nos queda $S = 1$.

■ Si tenemos $I = \frac{\beta \mu + \eta \beta - (\mu + \gamma + \eta)\mu}{\beta(\mu + \gamma + \eta)}$ y hacemos el cambio $\sigma = \frac{\beta}{\mu + \gamma + \eta}$ nos quedaría $I = \frac{\mu + \eta}{\beta} \left(\sigma - \frac{\mu}{\mu + \eta} \right)$, y entonces sustituyendo en (2.4) nos queda $S = \frac{\mu}{(\mu + \eta)\sigma}$.

Los puntos de equilibrio son

$$(S_1^*, I_1^*) = (1, 0) \quad y \quad (S_2^*, I_2^*) = \left(\frac{\mu}{(\mu + \eta)\sigma}, \frac{\mu + \eta}{\beta} \left(\sigma - \frac{\mu}{\mu + \eta} \right) \right).$$

Queda comprobado que no hay más puntos de equilibrio que los obtenidos anteriormente.

A partir de los puntos de equilibrio del sistema (2.2) podemos determinar los correspondientes puntos del sistema (2.1), haciendo uso de $1 = S(t) + I(t) + R(t)$. Los puntos correspondientes son

$$(S_1^*, I_1^*, R_1^*) = (1, 0, 0)$$

$$(S_2^*, I_2^*, R_2^*) = \left(\frac{\mu}{(\mu + \eta)\sigma}, \frac{\mu + \eta}{\beta} \left(\sigma - \frac{\mu}{\mu + \eta} \right), 1 - \frac{\mu}{(\mu + \eta)\sigma} - \left(\frac{(\mu + \eta)\sigma - \mu}{\beta} \right) \right).$$

Si $\sigma \leq \frac{\mu}{\mu + \eta}$ entonces el único punto de equilibrio posible en el conjunto Λ es el $(1, 0)$, sin embargo si $\sigma > \frac{\mu}{\mu + \eta}$ encontraremos los dos puntos de equilibrio en el conjunto Λ .

2.1.2. Estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio

Para analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio utilizaremos los resultados de las Secciones 1.3. y 1.4., ya que el sistema autónomo considerado es no lineal. El sistema (2.2) puede reescribirse como

$$\begin{pmatrix} S' \\ I' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu - \beta SI \\ \beta SI - \gamma I + \eta(1 - S - I) \end{pmatrix}.$$

Sea

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ (t, S, I) &\rightarrow g(t, S, I), \end{aligned}$$

tal que

$$g(t, S, I) = (\mu - \beta SI, \beta SI - \gamma I + \eta(1 - S - I)),$$

que cumple $g(t, 0, 0) = (\mu, \eta)$. No podemos aplicar el Teorema de estabilidad en primera aproximación (Teorema 1.6) ya que no estamos en las condiciones iniciales. Estudiaremos la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema (2.2) basándonos en la linealización del mismo.

Vamos a calcular la matriz jacobiana del modelo autónomo, la cual viene dada por

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial I} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial I} \end{pmatrix}.$$

Tenemos $f_1(S, I) = -\mu S + \mu - \beta SI$ y $f_2(S, I) = \beta SI - \mu I - \gamma I + \eta(1 - S - I)$, luego la matriz jacobiana quedaría:

$$J = \begin{pmatrix} -\mu - \beta I & -\beta S \\ \beta I - \eta & \beta S - \mu - \gamma - \eta \end{pmatrix}.$$

Para determinar la estabilidad de cada uno de los puntos de equilibrio aplicaremos el Teorema 1.5.

Vamos a hacer uso de la ecuación característica, $r^2 - tr(J)r + det(J) = 0$.

Veamos primero la estabilidad del punto $(S_1^*, I_1^*) = (1, 0)$.

La matriz jacobiana correspondiente a este punto sería

$$J_{(S_1^*, I_1^*)} = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta \\ -\eta & \beta - \mu - \gamma - \eta \end{pmatrix}.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} tr(J_{(S_1^*, I_1^*)}) &= -\mu + \beta - \mu - \gamma - \eta = -2\mu + \beta - \gamma - \eta \\ det(J_{(S_1^*, I_1^*)}) &= -\mu\beta + \mu^2 + \mu\gamma + \mu\eta - \beta\eta. \end{aligned}$$

Luego, su ecuación característica es

$$r^2 - (-2\mu + \beta - \gamma - \eta)r + (-\mu\beta + \mu^2 + \mu\gamma + \mu\eta - \beta\eta) = 0.$$

Vamos a estudiar sus raíces:

$$r = \frac{(-2\mu + \beta - \gamma - \eta) \pm \sqrt{(+2\mu - \beta + \gamma + \eta)^2 - 4(-\mu\beta + \mu^2 + \mu\gamma + \mu\eta - \beta\eta)}}{2}$$

Vamos a realizar por separado las operaciones de dentro de la raíz

$$(1) (+2\mu - \beta + \gamma + \eta)^2 = 4\mu^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \eta^2 - 4\mu\beta + 4\mu\gamma + 4\mu\eta - 2\beta\gamma - 2\beta\eta + 2\gamma\eta$$

$$(2) 4(-\mu\beta + \mu^2 + \mu\gamma + \mu\eta - \beta\eta) = -4\mu\beta + 4\mu^2 + 4\mu\gamma + 4\mu\eta - 4\beta\eta.$$

$$\begin{aligned} (1)-(2) &= 4\mu^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \eta^2 - 4\mu\beta + 4\mu\gamma + 4\mu\eta - 2\beta\gamma - 2\beta\eta + 2\gamma\eta + 4\mu\beta - 4\mu^2 - 4\mu\gamma - 4\mu\eta + 4\beta\eta = \\ &= \mu^2 + \gamma^2 + \eta^2 + 2\beta\eta + 2\gamma\eta - 2\beta\gamma = \\ &= (-\beta + \gamma + \eta)^2 + 4\beta\eta \end{aligned}$$

La ecuación de segundo grado a resolver quedaría

$$r = \frac{(-2\mu + \beta - \gamma - \eta) \pm \sqrt{(-\beta + \gamma + \eta)^2 + 4\beta\eta}}{2}.$$

Para saber como se comporta el punto de equilibrio sólo tendríamos que ver el signo de los autovalores, o lo que es lo mismo ver el signo de

$$(-2\mu + \beta - \gamma - \eta) \pm \sqrt{(-\beta + \gamma + \eta)^2 + 4\beta\eta}.$$

Tomando $\sigma = \frac{\beta}{\mu + \gamma + \eta}$, lo anterior nos quedaría

$$-\mu + \frac{\beta}{\sigma}(\sigma - 1) \pm \sqrt{(\mu + \frac{\beta}{\sigma}(\sigma - 1))^2 + 4\eta\beta}.$$

Tomamos ahora $a = \mu$, $b = \left(\frac{\beta}{\sigma}\right)(\sigma - 1)$, $c = 4\beta\eta$.

Tenemos que ver el signo de los autovalores de $-a + b \pm \sqrt{(a+b)^2 + c}$.

Sabemos que $a, c > 0$, ya que $\mu > 0$ y $\beta\eta > 0$ por ser $\beta > 0$ y $\eta > 0$.

Por lo tanto sólo tenemos dos casos a considerar, uno que $b > 0$ y el otro que $b \leq 0$.

1. $b > 0$ ($\sigma > 1$).

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = (b-a)^2 + 4ab \longrightarrow (a+b)^2 - 4ac = (b-a)^2$$

Es decir, $\sqrt{(a+b)^2 - 4ac} = |-a+b|$.

Además, $\sqrt{(a+b)^2 - 4ac} < \sqrt{(a+b)^2 + c}$.

Luego llegamos a que $0 < |-a+b| < \sqrt{(a+b)^2 + c}$.

Como tenemos dos autovalores reales y de distinto signo, llegamos a la conclusión de que el punto de equilibrio se trata de un punto de silla (inestable).

2. $b \leq 0$ ($\sigma \leq 1$).

Como partimos de $-a + b \pm \sqrt{(a+b)^2 + c}$, tenemos dos posibilidades:

(a) $-a + b - \sqrt{(a+b)^2 + c} < 0$ tenemos un autovalor real negativo.

(b) $-a + b + \sqrt{(a+b)^2 + c} > 0$ si y solo si $\sqrt{(a+b)^2 + c} > a - b > 0$ dado que es la suma de dos cantidades positivas ($-b > 0$).

Luego de $\sqrt{(a+b)^2 + c} > \sqrt{(a+b)^2 - 4ab} = a - b$ llegamos a que $c > -4ab$, es decir, $\frac{-c}{4a} < b \leq 0$.

Con la notación inicial sería $\frac{\beta}{\sigma}(\sigma - 1) > \frac{-\eta\beta}{\mu}$.

Como $b \leq 0 \iff \sigma \leq 1$.

Entonces $\frac{\beta}{\sigma}(\sigma - 1) > \frac{-\eta\beta}{\mu} \iff \frac{\sigma - 1}{\sigma} > \frac{-\eta}{\mu} \iff \sigma > \frac{\mu}{\mu + \eta}$.

En resumen, para el primer punto de equilibrio tenemos:

- Si $\sigma > 1$, tenemos que el punto de equilibrio es inestable. En el contexto del modelo SIRI, tenemos que si el número inicial de individuos susceptibles se acerque al total de la población y el número inicial de individuos infecciosos se acerque a cero, puede ocurrir, que tras un largo periodo de tiempo, la población no vuelva a tener un número de individuos susceptibles e infecciosos cercanos a los valores iniciales. Que el número de individuos infecciosos este próximo a cero no implica que la enfermedad se haya extinguido por completo en la población.
- Si $0 < \frac{\mu}{\mu + \eta} < \sigma \leq 1$, tenemos un autovalor real negativo y un autovalor real positivo, luego se tratará de un punto de silla (inestable). En el contexto del modelo SIRI, esto significa que en el caso de que el número

inicial de individuos susceptibles se acerque al número total poblacional y el número inicial de individuos infecciosos se acerque a cero, puede suceder, que tras un largo periodo de tiempo, la población no vuelva a tener un número de individuos susceptibles e infecciosos cercanos a los valores iniciales. Hay que tener en cuenta que, que el número de individuos infecciosos este próximo a cero no implica que la enfermedad se haya extinguido en la población.

- Si $0 < \sigma < \frac{\mu}{\mu + \eta} \leq 1$, tenemos dos autovalores reales negativos, luego se tratará de un punto de equilibrio asintóticamente estable. En el contexto del modelo SIRI, esto significa que en el caso de que el número inicial de individuos susceptibles se acerque al número total poblacional y el número inicial de individuos infecciosos se acerque a cero, entonces, tras un largo periodo de tiempo, el número de individuos susceptibles en la población tiende a estabilizarse en el tamaño de la población y el número de individuos infecciosos tiende a cero, es decir, la enfermedad se extinguirá por completo.
- Si $0 < \frac{\mu}{\mu + \eta} = \sigma \leq 1$, tenemos un autovalor igual a 0 y otro autovalor real negativo, luego se tratará de un punto de equilibrio estable. En el contexto del modelo SIRI, esto significa que en el caso de que el número inicial de individuos susceptibles se acerque al número total poblacional y el número inicial de individuos infecciosos se acerque a cero, entonces tanto el número de individuos susceptibles como el número de individuos infecciosos permanecerán lo suficientemente próximos a sus valores iniciales, respectivamente, para siempre.

Veamos ahora la estabilidad del punto $(S_2^*, I_2^*) = \left(\frac{\mu}{(\mu + \eta)\sigma}, \frac{\mu + \eta}{\beta} \left(\sigma - \frac{\mu}{\mu + \eta} \right) \right)$.

La matriz jacobiana correspondiente a este punto sería

$$J_{(S_2^*, I_2^*)} = \begin{pmatrix} -\mu - (\mu + \eta) \left(\sigma - \frac{\mu}{\mu + \eta} \right) & \frac{-\beta\mu}{(\mu + \eta)\sigma} \\ (\mu + \eta) \left(\sigma - \frac{\mu}{\mu + \eta} \right) - \eta & \frac{\beta\mu}{(\mu + \eta)\sigma} - (\mu + \gamma + \eta) \end{pmatrix}.$$

Simplificando la matriz anterior nos quedaría

$$J_{(S_2^*, I_2^*)} = \begin{pmatrix} -(\mu + \eta)\sigma & \frac{-\beta\mu}{(\mu + \eta)\sigma} \\ (\mu + \eta)\sigma - \mu - \eta & \frac{\beta\mu}{(\mu + \eta)\sigma} - (\mu + \gamma + \eta) \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante y la traza de la matriz anterior.

$$\text{tr}(J_{(S_2^*, I_2^*)}) = -(\mu + \eta)\sigma + \frac{\beta}{\sigma} \left(\frac{\mu}{\mu + \eta} - 1 \right)$$

$$\text{det}(J_{(S_2^*, I_2^*)}) = \frac{\beta}{\sigma} (\mu + \eta) \left(\sigma - \frac{\mu}{\mu + \eta} \right)$$

La ecuación característica correspondiente es

$$r^2 + \left[(\mu + \eta)\sigma - \frac{\beta}{\sigma} \left(\frac{\mu}{\mu + \eta} - 1 \right) \right] r + \frac{\beta}{\sigma} (\mu + \eta) \left(\sigma - \frac{\mu}{\mu + \eta} \right) = 0.$$

El discriminante,

$$\left[(\mu + \eta)\sigma - \frac{\beta}{\sigma} \left(\frac{\mu}{\mu + \eta} - 1 \right) \right]^2 - 4 \frac{\beta}{\sigma} (\mu + \eta) \left(\sigma - \frac{\mu}{\mu + \eta} \right),$$

al reagrupar los términos nos queda

$$\left[(\mu + \eta)\sigma + \frac{\beta}{\sigma} \left(\frac{\mu}{\mu + \eta} - 1 \right) \right]^2 + 4\mu\beta \left(\frac{1 - \sigma}{\sigma} \right).$$

Este discriminante será positivo cuando $\sigma \leq 1$. Luego cuando $\sigma \leq 1$ la matriz tendrá dos autovalores reales.

Para ver el signo de estos autovalores vamos a tomar

- $a = (\mu + \eta)\sigma$
- $b = \frac{\beta}{\sigma} \left(\frac{\mu}{\mu + \eta} - 1 \right)$
- $c = 4\mu\beta \left(\frac{1 - \sigma}{\sigma} \right)$.

Es claro que $a > 0, b > 0$ y $c \leq 0$. Los autovalores son de la forma $-a + b \pm \sqrt{(a+b)^2 + c}$.

1. $\sigma \leq 1$. En este caso siempre se tiene que $-a + b - \sqrt{(a+b)^2 + c} < 0$. Con respecto al otro autovalor $-a + b + \sqrt{(a+b)^2 + c} > 0$ si y solo si $\frac{-c}{4a} \leq b$, además $\frac{-c}{4a} \leq b$ si y solo si $\sigma \leq \frac{\mu}{\mu + \eta}$. Por lo tanto, si $\sigma \leq \frac{\mu}{\mu + \eta}$, el punto de equilibrio es un punto de silla, y si $\frac{\mu}{\mu + \eta} < \sigma \leq 1$, el punto de equilibrio es estable.

2. $\sigma > 1 (c < 0)$. Tenemos dos casos:

- $(a+b)^2 + c \geq 0$. Entonces $-a + b - \sqrt{(a+b)^2 + c} < 0$, y el otro autovalor $-a + b + \sqrt{(a+b)^2 + c} > 0$ si y solo si $\frac{-c}{4a} \leq b$, además $\frac{-c}{4a} \leq b$ si y solo si $\left(\frac{\beta}{\sigma} \right) \left(\frac{\mu}{\mu + \eta} - 1 \right) \geq \beta\mu \frac{(\sigma - 1)(\sigma)}{(\mu + \eta)\sigma}$. Pero esto no es posible para $\eta \neq 0$ ya que nos quedaría $\frac{\beta}{\sigma} \left(\frac{\mu}{\mu + \eta} - 1 \right) < 0$, y a

su vez esto no es posible dado que el lado derecho de la inecuación es positivo. Por lo tanto, el segundo autovalor es negativo, y entonces el punto de equilibrio es asintóticamente estable.

- $(a + b)^2 + c < 0$. Como las raíces son complejas conjugadas con parte real negativa, el punto de equilibrio es asintóticamente estable, en realidad, estable espiralmente.

En resumen, para el segundo punto de equilibrio nos queda que si:

- $\sigma \leq \frac{\mu}{\mu + \eta} \leq 1$, entonces se trata de un punto de silla. En el contexto del modelo SIRI, esto significa que en el caso de que el número inicial de individuos susceptibles e infecciosos se acerquen al punto de equilibrio, puede suceder, que tras un largo periodo de tiempo, la población no vuelva a tener un número de individuos susceptibles e infecciosos cercanos a los valores iniciales.
- $\frac{\mu}{\mu + \eta} < \sigma \leq 1$, entonces se trata de un punto de equilibrio estable. En el contexto del modelo SIRI, esto significa que en el caso de que el número inicial de individuos susceptibles e infecciosos se acerquen al punto de equilibrio, entonces tanto el número de individuos susceptibles como el número de individuos infecciosos permanecerán lo suficientemente próximos a sus valores iniciales, respectivamente, para siempre.
- $\sigma > 1$ y $(a + b)^2 + c \geq 0$, entonces se trata de un punto de equilibrio asintóticamente estable. En el contexto del modelo SIRI, esto significa que en el caso de que el número inicial de individuos susceptibles e infecciosos se acerquen al punto de equilibrio, entonces, tras un largo periodo de tiempo, el número de individuos susceptibles e infecciosos tienden a estabilizarse en el punto de equilibrio.
- $\sigma > 1$ y $(a + b)^2 + c < 0$, entonces se trata de un punto de equilibrio asintóticamente estable, en realidad, estable espiralmente. En el contexto del modelo SIRI, esto significa que en el caso de que el número inicial de individuos susceptibles e infecciosos se acerquen al punto de equilibrio, entonces, tras un largo periodo de tiempo, el número de individuos susceptibles e infecciosos tienden a estabilizarse en el punto de equilibrio.

2.2. Tasa de natalidad distinta de tasa de mortalidad. Muerte natural distinta de muerte por enfermedad

En este caso el número de individuos permanece también constante en cualquier instante de tiempo t , luego también podremos aceptar que $S(t) + I(t) + R(t) = 1, \forall t \geq 0$. Este caso tiene de particular con respecto al anterior que la tasa de natalidad, $\mu \geq 0$, y la tasa de mortalidad no es la misma. En este caso también tendremos que diferenciar entre muerte natural, α , y muerte por enfermedad, κ , ambas mayores o iguales que 0. Como anteriormente tendremos tasa de contacto entre susceptibles e infectados, $\beta \geq 0$, coeficiente de individuos que pasan de infectados a recuperados, $\gamma \geq 0$, y coeficiente de individuos re infectados, $\eta \geq 0$.

Las hipótesis en este caso serán las mismas que en el caso anterior, salvo por el hecho de que para que un individuo abandone el grupo de infectados ha de hacerlo por muerte natural, por muerte por enfermedad o por recuperación de la enfermedad.

Representación esquemática de la dinámica de transmisión:

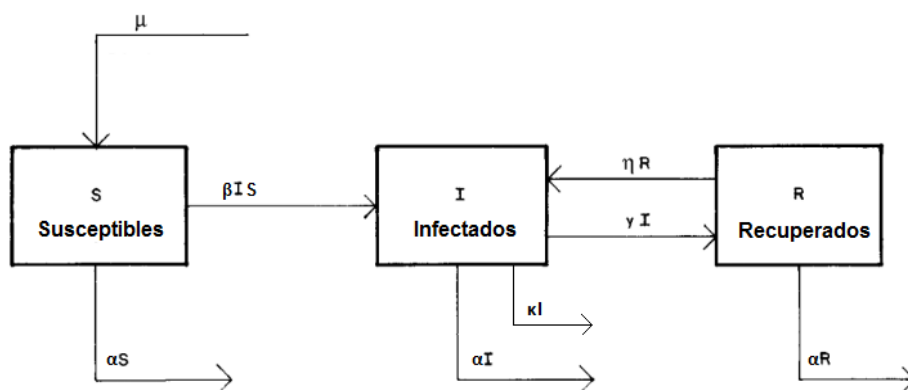


FIG 2: diagrama para el modelo $S \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow I$ en el caso en que las tasas de natalidad y mortalidad son distintas, y la muerte natural y por enfermedad también son distintas.

Del paso del diagrama anterior a sistema, llegamos al siguiente sistema diferencial:

$$\begin{cases} S' &= \mu - \alpha S - \beta SI \\ I' &= \beta SI - (\kappa + \gamma + \alpha)I + \eta R \\ R' &= \gamma I - (\alpha + \eta)R \end{cases} \quad (2.5)$$

La ecuación diferencial del total de la población de (2.5) es:

$$\frac{d}{dt}(S + I + R) = \mu - \alpha(S + I + R) - \kappa I. \quad (2.6)$$

Para nuestro caso el conjunto que tendríamos que ver que se trata de un conjunto absorbente y positivamente invariante, utilizando el mismo procedimiento

que para el caso anterior, es:

$$\Lambda = \{(S, I, R) \in \mathbb{R}_+^3 : S \geq 0, I \geq 0, R \geq 0, S + I + R \leq \frac{\mu}{\alpha}\}.$$

Encontraremos estos dos posibles puntos de equilibrio en el octante no negativo \mathbb{R}_+^3 , realizando cálculos como anteriormente:

$$E^0 = \left(\frac{\mu}{\alpha}, 0, 0\right), \quad E^* = \left(\frac{\mu}{\alpha R_0}, \frac{\alpha}{\beta}(R_0 - 1), \frac{\gamma\alpha}{\beta(\eta + \alpha)}(R_0 - 1)\right).$$

$$\text{Con } R_0 = \frac{(\alpha + \eta)\beta\mu}{\alpha(\gamma\alpha + (\alpha + \eta)(\kappa + \alpha))}.$$

Nota 2.2.1. A partir de ahora denotaremos por (S^0, I^0, R^0) a sus correspondientes coordenadas de E^0 y análogamente para (S^*, I^*, R^*) con sus correspondientes coordenadas de E^* .

A continuación, estudiaremos el comportamiento asintótico global de los puntos de equilibrio.

Para el primer punto, utilizando funciones de Liapunov lineales y cuadráticas, y el Teorema de LaSalle, tendremos que, si $R_0 \leq 1$, el punto es globalmente asintóticamente estable en Λ .

Teorema 2.3. Si $R_0 \leq 1$ entonces el punto de equilibrio E^0 de (2.5) es globalmente asintóticamente estable en Λ .

Demostración. Sea $V : \{(S, I, R) \in \mathbb{R}^3 : S > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$V(S, I, R) = \frac{(\alpha + \eta)}{2S^0}(S - S^0)^2 + (\alpha + \eta)I + \eta R. \quad (2.7)$$

Es claro que en el punto de equilibrio la función $V(S, I, R)$ alcanza su mínimo global en \mathbb{R}^3 . Por lo tanto, $V(S, I, R)$ es una función de Liapunov. La derivada de (2.7) respecto t a lo largo de las curvas de solución de (2.5) es

$$\begin{aligned} V'(S, I, R) &= \frac{(\alpha + \eta)}{S^0}(S - S^0)\frac{dS}{dt} + (\alpha + \eta)\frac{dI}{dt} + \eta\frac{dR}{dt} = \\ &= \frac{(\alpha + \eta)}{S^0}(S - S^0)(\alpha S^0 - \alpha S - \beta SI) \\ &\quad + (\alpha + \eta)\beta SI - (\gamma\alpha + (\kappa + \alpha)(\alpha + \eta))I. \end{aligned}$$

Usando la expresión

$$\beta SI \frac{(S - S^0)}{S^0} = \beta I \frac{(S - S^0)^2}{S^0} + \beta I(S - S^0),$$

obtenemos

$$V'(S, I, R) = -(\alpha + \eta)(\alpha + \beta I)\frac{(S - S^0)^2}{S^0} - (\gamma\alpha + (\alpha + \eta)(\kappa + \alpha))I(1 - R_0).$$

Por lo tanto, si $R_0 \leq 1$ tenemos que $V'(S, I, R) \leq 0$ para todo $S, I, R > 0$, y que $V'(S, I, R) = 0$ si $S = S^0$ e $I = 0$, o si $R_0 = 1$ y $S = S^0$. Es fácil comprobar que el punto de equilibrio E^0 es el mayor invariante establecido en $\{(S, I, R) \in \Lambda : V'(S, I, R) = 0\}$, y aplicando el Teorema de LaSalle (Teorema 1.10) se llega a que E^0 es globalmente asintóticamente estable. \square

Para el segundo punto, construyendo una función global de Liapunov a partir de una combinación adecuada entre funciones cuadráticas y de Volterra, tendremos que, si $R_0 > 1$, el punto es asintóticamente estable en el interior de Λ .

Teorema 2.4. *Si $R_0 > 1$, el punto de equilibrio E^* de (2.5) es globalmente asintóticamente estable en el interior de Λ .*

Demostración. Sea $L : \{(S, I, R) \in \Lambda : S, I, R > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$L(S, I, R) = \frac{(S - S^*)^2}{2S^*} + \left(I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*} \right) + \frac{\eta R^*}{\gamma I^*} \left(R - R^* - R^* \ln \frac{R}{R^*} \right).$$

Esta función es continua y definida positiva para todo $S, I, R > 0$. Se puede comprobar que la función $L(S, I, R) = 0$ en E^* , y por lo tanto el mínimo global de $L(S, I, R)$ se alcanza en E^* . Como E^* es un punto de equilibrio de (2.5) tenemos:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \beta S^* I^* + \alpha S^*, \\ (\kappa + \gamma + \alpha) &= \beta S^* + \eta \frac{R^*}{I^*}, \\ (\alpha + \eta) &= \gamma \frac{I^*}{R^*}. \end{aligned}$$

Haciendo la derivada de $L(S, I, R)$ a lo largo de las soluciones del sistema (2.5), obtenemos

$$\begin{aligned} L'(S, I, R) &= \frac{(S - S^*)}{S^*} (\Lambda - \beta SI - \alpha S) \\ &\quad + (I - I^*) \left(\beta S - (\kappa + \gamma + \alpha) + \eta \frac{R}{I} \right) \\ &\quad + \frac{\eta R^*}{\gamma I^*} \left(1 - \frac{R^*}{R} \right) (\gamma I - (\alpha + \eta) R). \end{aligned}$$

Utilizando (2.4) llegamos a

$$\begin{aligned} L'(S, I, R) &= -\frac{(S - S^*)}{S^*} (\alpha(S - S^*) + \beta(SI - S^*I^*)) \\ &\quad + (I - I^*) \left(\beta(S - S^*) + \eta \left(\frac{R}{I} - \frac{R^*}{I^*} \right) \right) \\ &\quad + \frac{\eta R^*}{\gamma I^*} \left(1 - \frac{R^*}{R} \right) \left(\gamma I - \gamma I^* \frac{R}{R^*} \right). \end{aligned}$$

Es claro que

$$SI - S^*I^* = S^*(I - I^*) + I(S - S^*).$$

Por lo que haciendo cálculos llegamos a que

$$L'(S, I, R) = -(\alpha + \beta I) \frac{(S - S^*)^2}{S^*} - \eta R^* \left[\sqrt{\frac{I^* R}{I R^*}} - \sqrt{\frac{I R^*}{I^* R}} \right]^2.$$

Luego, $L'(S, I, R) \leq 0$ para todo $S, I > 0$, y $L'(S, I, R) = 0$ cuando $S = S^*$ y $IR^* = I^*R$. Es fácil comprobar que E^* es el mayor invariante establecido en $\{(S, I, R) \in \wedge : L'(S, I, R) = 0\}$. Aplicando el Teorema de LaSalle (Teorema 1.10) llegamos a que E^* es globalmente asintóticamente estable en el interior de \wedge . \square

Nota 2.2.2. Como sabemos las funciones de Liapunov no son únicas. Se pueden probar los mismos resultados de estabilidad utilizando otras funciones de Liapunov para el sistema (2.5).

2.3. Tamaño de población no constante

En esta sección veremos una combinación de los casos de la Sección 2.1 y de la Sección 2.2. Se trata del caso en el que el número de individuos no permanece constante a lo largo del tiempo, luego tomaremos que $S(t) + I(t) + R(t) = N, \forall t \geq 0$. En este caso conservaremos que la tasa de natalidad, $\mu \geq 0$ y la tasa de mortalidad no es la misma, además de que también tendremos que diferenciar entre muerte natural, α , y muerte por enfermedad, κ , ambas mayores o iguales que 0. Como en ambos casos, tendremos tasa de contacto entre susceptibles e infectados, $\beta \geq 0$, coeficiente de individuos que pasan de infectados a recuperados, $\gamma \geq 0$, y coeficiente de individuos re infectados, $\eta \geq 0$.

Las hipótesis en este caso serán las mismas que el caso de la Sección 2.2.

Representación esquemática de la dinámica de transmisión:

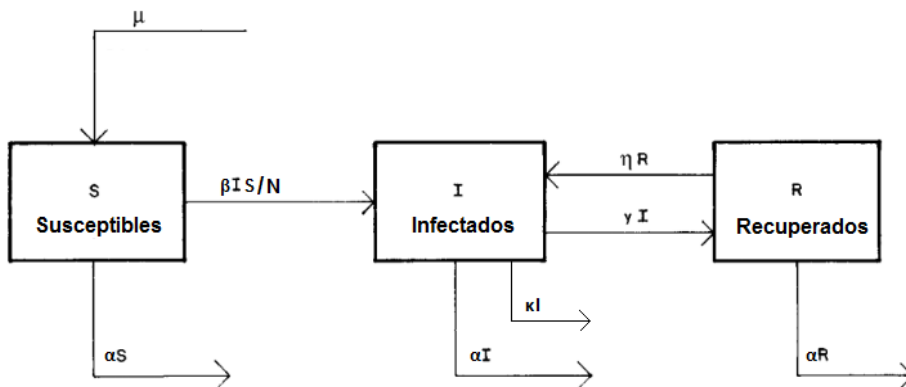


FIG 3: diagrama para el modelo S-I-R-I en el caso en que la población no se mantiene constante, las tasas de natalidad y mortalidad son distintas, y la muerte natural y por enfermedad también son distintas.

Pasando la información que nos aporta el diagrama a modo de sistema diferencial llegamos a:

$$\begin{cases} S' &= \mu - \alpha S - \frac{\beta SI}{N} \\ I' &= \frac{\beta SI}{N} - (\kappa + \gamma + \alpha)I + \eta R \\ R' &= \gamma I - (\alpha + \eta)R \end{cases} \quad (2.8)$$

La ecuación diferencial del total de la población de (2.8) es:

$$\frac{d}{dt}(S + I + R) = \mu - \alpha(S + I + R) - \kappa I. \quad (2.9)$$

El conjunto que tendríamos que ver que se trata de un conjunto absorbente y positivamente invariante, utilizando procedimientos análogos a los dos casos anteriores, es:

$$\Lambda = \{(S, I, R) \in \mathbb{R}_+^3 : S \geq 0, I \geq 0, R \geq 0, S + I + R \leq \frac{\mu}{\alpha}\}.$$

Encontraremos estos dos posibles puntos de equilibrio realizando cálculos similares a los realizados en las secciones anteriores: El primer punto sería $E^0 = (\frac{\mu}{\alpha}, 0, 0)$, y el segundo punto sería $E^* = (S^*, I^*, R^*)$ con

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{\mu(\kappa + \gamma + \alpha)R_0}{\alpha R_0(\kappa + \gamma + \alpha) + \beta(\kappa + \alpha)(R_0 - 1)} \\ I^* &= \frac{\mu(\kappa + \alpha)(R_0 - 1)R_0}{\alpha R_0(\kappa + \gamma + \alpha) + \beta(\kappa + \alpha)(R_0 - 1)} \\ R^* &= \frac{\mu\gamma(R_0 - 1)R_0}{\alpha R_0(\kappa + \gamma + \alpha) + \alpha(\kappa + \alpha)(R_0 - 1)}. \end{aligned}$$

$$\text{Con } R_0 = \frac{(\alpha + \eta)\beta}{\gamma\alpha + (\alpha + \eta)(\kappa + \alpha)}.$$

Nota 2.3.1. A partir de ahora de ahora denotaremos por (S^0, I^0, R^0) a sus correspondientes coordenadas de E^0 .

A continuación, estudiaremos el comportamiento asintótico global de los puntos de equilibrio.

Para el primer punto, utilizando funciones de Liapunov lineales, tendremos que, si $R_0 \leq 1$, el punto es globalmente asintóticamente estable en Λ .

Teorema 2.5. Si $R_0 \leq 1$ entonces el punto de equilibrio E^0 de (2.8) es globalmente asintóticamente estable en Λ .

Demostración. Sea $U : \{(S, I, R) \in \Lambda : S > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$U(S, I, R) = (\alpha + \eta)I + \eta R.$$

Luego, si $R_0 \leq 1$

$$U'(S, I, R) = -\frac{(\gamma\alpha + (\alpha + \eta)(\kappa + \alpha))I}{S + I + R}((1 - R_0)S + I + R) \leq 0.$$

Si $U'(S, I, R) = 0$ entonces $I = 0$, o $I = R = 0$ y $R_0 = 1$. Por lo tanto, $U(S, I, R)$ es una función de Liapunov en Λ . En consecuencia, $(I, R) \rightarrow (0, 0)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Usando $I = R = 0$ en la primera y la última ecuación de (2.8) llegamos a que $S \rightarrow \frac{\mu}{\alpha}$ y $R \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Por tanto, utilizando el Teorema de LaSalle (Teorema 1.10) se obtiene que es un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable en Λ . \square

Para el segundo punto, construyendo una función global de Liapunov a partir de una combinación adecuada entre funciones cuadráticas y de Volterra, tendremos que, si $R_0 > 1$, el punto es globalmente asintóticamente estable en el interior de Λ .

Teorema 2.6. *Supongamos que $2\eta + \alpha \geq \kappa$. Si $R_0 > 1$ entonces el punto de equilibrio E^* de (2.8) es globalmente asintóticamente estable en el interior de Λ .*

Demostración. Definimos $W : \{(S, I, R) \in \Lambda : S, I, R > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$\begin{aligned} W(S, I, R) = & \left[(S - S^*) + (I - I^*) + (R - R^*) - (S^* + I^* + R^*) \ln \frac{(S + I + R)}{(S^* + I^* + R^*)} \right] \\ & + \frac{(\kappa + 2\alpha)(S^* + I^* + R^*)}{\beta(I^* + R^*)} \left(I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*} \right) \\ & + \frac{\eta(\kappa + 2\alpha)R^*(S^* + I^* + R^*)}{\gamma\beta I^*(I^* + R^*)} \left(R - R^* - R^* \ln \frac{R}{R^*} \right) \\ & + \frac{(\kappa + 2\alpha)}{2\gamma} \left(1 + \frac{S^*}{I^* + R^*} \right) \frac{(R - R^*)^2}{S + I + R}. \end{aligned}$$

Cuando $W(S, I, R) \in C^1$ en el interior de Λ , E^* es el mínimo global de $W(S, I, R)$ en Λ , y $W(S^*, I^*, R^*) = 0$. Como E^* es un punto de equilibrio de (2.8) tenemos

$$\begin{aligned} \Lambda &= \alpha(S^* + I^* + R^*) + \kappa I^*, \\ (\kappa + \gamma + \alpha) &= \frac{\beta S^*}{S^* + I^* + R^*} + \eta \frac{R^*}{I^*}, \\ (\alpha + \eta) &= \gamma \frac{I^*}{R^*}, \\ 0 &= (\alpha + \eta)R^* - \gamma I^*. \end{aligned}$$

Derivando $W(S, I, R)$ respecto t a lo largo de las soluciones de (2.8) tenemos

$$\begin{aligned} W'(S, I, R) = & \frac{[(S - S^*) + (I - I^*) + (R - R^*)]}{S + I + R} (\mu - \alpha(S + I + R) - \kappa I) \\ & + \frac{(\kappa + 2\alpha)(S^* + I^* + R^*)}{\beta(I^* + R^*)} (I - I^*) \left(\frac{\beta S}{S + I + R} - (\kappa + \gamma + \alpha) + \eta \frac{R}{I} \right) \\ & + \frac{\eta(\kappa + 2\alpha)R^*(S^* + I^* + R^*)}{\gamma\beta I^*(I^* + R^*)} \left(1 - \frac{R^*}{R} \right) (\gamma I - (\alpha + \eta)R) \\ & + \frac{(\kappa + 2\alpha)}{\gamma} \left(1 + \frac{S^*}{I^* + R^*} \right) \frac{(R - R^*)}{S + I + R} (\gamma I - (\alpha + \eta)R) \\ & - \frac{(\kappa + 2\alpha)}{2\gamma} \left(1 + \frac{S^*}{I^* + R^*} \right) \frac{(R - R^*)^2}{(S + I + R)^2} \frac{d}{dt} (S + I + R). \end{aligned}$$

Usando (2.6), tenemos

$$\begin{aligned}
 W'(S, I, R) = & -\alpha \frac{[(S - S^*) + (R - R^*)]^2}{S + I + R} - (\alpha + \kappa) \frac{(I - I^*)^2}{S + I + R} \\
 & - (\kappa + 2\alpha) \frac{(S - S^*)(I - I^*)}{S + I + R} - (\kappa + 2\alpha) \frac{(I - I^*)(R - R^*)}{S + I + R} \\
 & + \frac{(\kappa + 2\alpha)(S^* + I^* + R^*)}{(I^* + R^*)} (I - I^*) \left(\frac{S}{S + I + R} - \frac{S^*}{S^* + I^* + R^*} \right) \\
 & + \frac{(\kappa + 2\alpha)(S^* + I^* + R^*)}{\beta(I^* + R^*)} (I - I^*) \left(\eta \frac{R}{I} - \eta \frac{R^*}{I^*} \right) \\
 & + \frac{\eta(\kappa + 2\alpha)R^*(S^* + I^* + R^*)}{\gamma\beta I^*(I^* + R^*)} \left(1 - \frac{R^*}{R} \right) \left(\gamma I - \gamma I^* \frac{R}{R^*} \right) \\
 & + \frac{(\kappa + 2\alpha)}{\gamma} \left(1 + \frac{S^*}{I^* + R^*} \right) \frac{(R - R^*)}{S + I + R} (\gamma(I - I^*) - (\alpha + \eta)(R - R^*)) \\
 & - \frac{(\kappa + 2\alpha)}{2\gamma} \left(1 + \frac{S^*}{I^* + R^*} \right) \frac{(R - R^*)^2}{(S + I + R)^2} \frac{d}{dt}(S + I + R).
 \end{aligned}$$

Es claro que

$$\frac{S}{S + I + R} - \frac{S^*}{S^* + I^* + R^*} = \frac{(I^* + R^*)(S - S^*) - S^*(I - I^*) - S^*(R - R^*)}{(S^* + I^* + R^*)(S + I + R)}.$$

Utilizando lo anterior, cancelando y reagrupando términos nos queda

$$\begin{aligned}
 W'(S, I, R) = & -\alpha \frac{[(S - S^*) + (R - R^*)]^2}{S + I + R} - \left(\kappa + \alpha + \frac{(\kappa + 2\alpha)S^*}{I^* + R^*} \right) \frac{(I - I^*)^2}{S + I + R} \\
 & - \frac{(\kappa + 2\alpha)(\alpha + \eta)}{\gamma} \left(1 + \frac{S^*}{I^* + R^*} \right) \frac{(R - R^*)^2}{S + I + R} \\
 & - \frac{(\kappa + 2\alpha)}{2\gamma} \left(1 + \frac{S^*}{I^* + R^*} \right) \frac{(R - R^*)^2}{(S + I + R)^2} \frac{d}{dt}(S + I + R) \\
 & + \frac{\eta(\kappa + 2\alpha)(S^* + I^* + R^*)R^*}{\beta(I^* + R^*)} \left[2 - \frac{I^*R}{IR^*} - \frac{IR^*}{I^*R} \right].
 \end{aligned}$$

Reescribiéndolo obtenemos

$$\begin{aligned}
 W'(S, I, R) = & -\alpha \frac{[(S - S^*) + (R - R^*)]^2}{S + I + R} - \left(\kappa + \alpha + \frac{(\kappa + 2\alpha)S^*}{I^* + R^*} \right) \frac{(I - I^*)^2}{S + I + R} \\
 & + \frac{\eta(\kappa + 2\alpha)(S^* + I^* + R^*)R^*}{\beta(I^* + R^*)} \left[2 - \frac{I^*R}{IR^*} - \frac{IR^*}{I^*R} \right] \\
 & - \frac{(\kappa + 2\alpha)}{2\gamma} \left(1 + \frac{S^*}{I^* + R^*} \right) \frac{(R - R^*)^2}{(S + I + R)^2} \\
 & \times \left(\frac{d}{dt}(S + I + R) + 2(\alpha + \eta)(S + I + R) \right).
 \end{aligned}$$

Sustituyendo (2.9) en lo anterior tenemos

$$\begin{aligned}
 W'(S, I, R) = & -\alpha \frac{[(S - S^*) + (R - R^*)]^2}{S + I + R} - \left(\kappa + \alpha + \frac{(\kappa + 2\alpha)S^*}{I^* + R^*} \right) \frac{(I - I^*)^2}{S + I + R} \\
 & - \frac{\eta(\kappa + 2\alpha)(S^* + I^* + R^*)R^*}{\beta(I^* + R^*)} \left[\sqrt{\frac{I^*R}{IR^*}} - \sqrt{\frac{IR^*}{I^*R}} \right]^2 \\
 & - \frac{(\kappa + 2\alpha)}{2\gamma} \left(1 + \frac{S^*}{I^* + R^*} \right) \frac{(R - R^*)^2}{(S + I + R)^2} \\
 & \times (\mu + (2\eta + \alpha)(S + R) + (2\eta + \alpha - \kappa)I).
 \end{aligned}$$

Luego $W'(S, I, R)$ es definida negativa si $2\eta + \alpha \geq \kappa$. $W'(S, I, R) = 0$ si y sólo si $S = S^*$, $I = I^*$ y $R = R^*$. Por lo tanto, el conjunto invariante compacto más grande en $\{(S, I, R) \in \Lambda : W'(S, I, R) = 0\}$ es el conjunto $\{E^*\}$. Utilizando el Teorema de LaSalle (Teorema 1.10), concluimos que E^* es globalmente asintóticamente estable en el interior de Λ . \square

Capítulo 3

Estudio conjunto de los modelos SIR y SIRI

En este capítulo vamos a realizar un estudio acerca de las relaciones y diferencias existentes entre los puntos de equilibrio de los modelos SIR y SIRI autónomos. Dentro del modelo SIRI, tomaremos para la comparativa el caso estudiado en el *Capítulo 2, Sección 1*. Para el estudio necesitaremos conocer los puntos de equilibrio del modelo SIR, así como el comportamiento asintótico de ellos.

Al igual que el modelo SIRI, el modelo SIR también describe la dinámica de poblaciones en la que se desarrolla una infección. Este último clasifica la población en Susceptibles (Susceptible), Infecciosos (Infectious) y Recuperados (Recovered). La principal diferencia que existe entre ambos modelos es que en el modelo SIR un individuo que se recupera tras contraer la enfermedad, se vuelve inmune, a diferencia de que en el modelo SIRI un individuo que se recupera puede volver a contraer la enfermedad.

3.1. Modelo SIR

En esta sección vamos a explicar en qué consiste el modelo SIR. Además haremos un estudio de sus puntos de equilibrio, así como la estabilidad de los mismos. Esto nos será de gran utilidad para comparar ambos modelos que es el objetivo de este capítulo.

En este modelo encontramos 3 tipos de individuos: Susceptibles (Susceptible), individuos que no están expuestos al agente infeccioso, Infecciosos (Infectious), individuos infectado, y Recuperados/Eliminados (Recovered/Removed), individuos que ya se han recuperado de la infección/individuos que han sido aislados del resto de la población para evitar nuevos contagios. Denotaremos por $S(t)$ a los individuos Susceptibles, $I(t)$ a los individuos Infecciosos, y $R(t)$ a los individuos Recuperados/Eliminados, en el tiempo t , para cada $t \geq 0$. No tiene sentido considerar tamaños de población negativos, luego, $S(t), I(t), R(t) \geq 0$ para cada $t \geq 0$. Para hacer la comparativa de ambos modelos nos centraremos en el caso en que la población se mantiene constante, es decir, $S(t) + I(t) + R(t) = 1$. En este modelo también se vuelve necesario hablar de tasa de natalidad y mortalidad (vamos a considerarlas iguales, ya que la población se mantiene constante),

$\mu > 0$, tasa de contacto entre susceptibles e infectados, $\beta > 0$, y coeficiente de individuos que pasan de ser infectados a recuperados, $\gamma > 0$.

Algunas hipótesis a tener en cuenta son:

- Un individuo pasa a formar parte del grupo de los susceptibles, únicamente, por nacimiento.
- Para que un individuo abandone el grupo de los susceptibles ha de hacerlo por muerte natural o por convertirse en individuo infeccioso.
- Asumimos que cada individuo infectado tiene un número fijo β de contactos por día. Esos contactos pueden realizarse con individuos infectados o individuos susceptibles, lo cual sería suficiente para contagiarse de la enfermedad.
- Un individuo puede abandonar el grupo de los infectados, o bien por muerte natural, o bien por recuperación de la enfermedad o aislamiento.
- Asumimos que la proporción de individuos infectados que se recuperan en un día, γ , es fija.
- Un individuo forma parte del grupo de los eliminados si ha sido aislado aislado para prevenir nuevos contagios, o si ha superado la enfermedad.
- Un individuo sólo abandona el grupo de los eliminados por muerte natural.

A continuación se muestra una representación esquemática de la dinámica de transmisión.

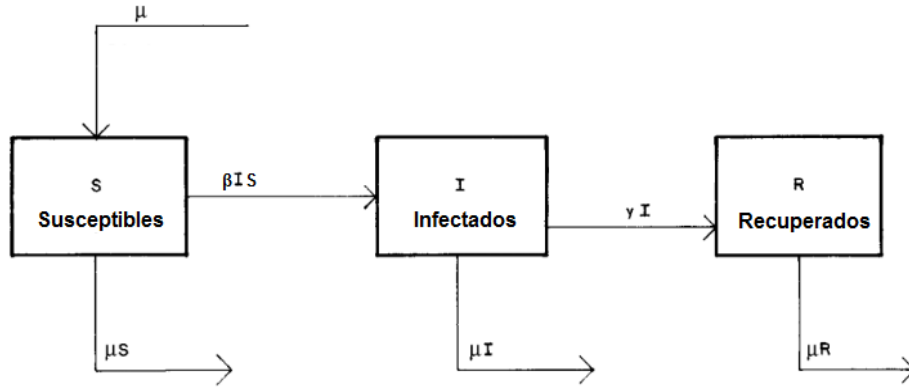


FIG 4: diagrama para el modelo $S \rightarrow I \rightarrow R$ en el caso de población constante.

El sistema diferencial que resulta es:

$$\begin{cases} S' &= \mu - \mu S - \beta SI \\ I' &= \beta SI - \mu I - \gamma I \\ R' &= \gamma I - \mu R \end{cases} \quad (3.1)$$

Análogamente a como hemos hecho en el Capítulo 2, Sección 1, se puede demostrar que el sistema anterior posee una única solución maximal.

Como hemos supuesto que la población permanece constante, el sistema (3.1) puede reducirse a:

$$\begin{cases} S' &= \mu - \mu S - \beta SI \\ I' &= \beta SI - \mu I - \gamma I + \eta R \end{cases} \quad (3.2)$$

Estudiar el comportamiento asintótico de (3.1) equivale a estudiarlo en (3.2).

3.1.1. Comportamiento asintótico de las soluciones

En primer lugar vamos a calcular los puntos de equilibrio del sistema (3.2), es decir, calcularemos las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \mu - \mu S - \beta SI &= 0 \\ \beta SI - \mu I - \gamma I &= 0 \\ \gamma I - \mu R &= 0 \end{cases}$$

Despejamos S de la primera ecuación del sistema, y obtenemos $S = \frac{\mu}{\mu + \beta I}$.

Sustituyendo S en la segunda ecuación del sistema nos queda:

$$\beta I \frac{\mu}{\mu + \beta I} - \mu I - \gamma I = 0$$

$$I(\beta\mu - \mu(\mu + \beta I) - \gamma(\mu + \beta I)) = 0.$$

Por lo que,

$$I = 0, \quad \text{o bien,} \quad I = \mu \left(\frac{-1}{\beta} + \frac{1}{\mu + \gamma} \right).$$

- Si $I = 0$ entonces $S = 1$, y obtenemos el punto de equilibrio $(S_1^*, I_1^*) = (1, 0)$.
- Si $I = \mu \left(\frac{-1}{\beta} + \frac{1}{\mu + \gamma} \right)$ entonces $S = \frac{\mu + \gamma}{\beta}$, y obtenemos el punto de equilibrio $(S_2^*, I_2^*) = \left(\frac{\mu + \gamma}{\beta}, \mu \left(\frac{-1}{\beta} + \frac{1}{\mu + \gamma} \right) \right)$.

Si $\beta \leq \mu + \gamma$ la solución es negativa, pero como hemos supuesto poblaciones no negativas, no tiene sentido considerarlas. Luego, en este caso sólo contaremos con un punto de equilibrio, $(1, 0)$. Si tenemos que $\beta > \mu + \gamma$ tendremos los dos puntos de equilibrio.

Ya habiendo calculado los puntos de equilibrio de (3.2) podemos calcular los de (3.1) haciendo uso de que $S(t) + I(t) + R(t) = 1$. Los puntos correspondientes son:

$$(1, 0, 0) \quad \text{y} \quad \left(\frac{\mu + \gamma}{\beta}, \mu \left(\frac{-1}{\beta} + \frac{1}{\mu + \gamma} \right) \right).$$

3.1.2. Estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio

Para analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio utilizaremos los resultados de las Secciones 1.3. y 1.4., ya que el sistema autónomo considerado es no lineal. El sistema (3.2) puede reescribirse como

$$\begin{pmatrix} S' \\ I' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -\mu - \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu - \beta SI \\ \beta SI \end{pmatrix}$$

Sea

$$g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$(t, S, I) \rightarrow g(t, S, I),$$

tal que

$$g(t, S, I) = (\mu - \beta SI, \beta SI),$$

que cumple $g(t, 0, 0) = (\mu, 0)$. No podemos aplicar el Teorema de estabilidad en primera aproximación (Teorema 1.6) ya que no estamos en las condiciones iniciales. Estudiaremos la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema (3.2) basándonos en la linealización del mismo.

La matriz jacobiana del sistema autónomo SIR queda

$$J = \begin{pmatrix} -\mu - \beta I & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \mu - \gamma \end{pmatrix}.$$

Como hemos dicho anteriormente tenemos dos casos a estudiar.

El primer caso que estudiaremos es $\beta \leq \mu + \gamma$.

En este caso el único punto de equilibrio al que le podemos ver su estabilidad es $(S_1^*, I_1^*) = (1, 0)$.

Matriz jacobiana correspondiente:

$$J_{(S_1^*, I_1^*)} = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta \\ 0 & \beta - \mu - \gamma \end{pmatrix}.$$

Vamos ahora a calcular los autovalores.

$$\begin{vmatrix} -\mu - \lambda & -\beta \\ 0 & \beta - \mu - \gamma - \lambda \end{vmatrix} = (-\mu - \lambda)(\beta - \mu - \gamma - \lambda)$$

$$(-\mu - \lambda)(\beta - \mu - \gamma - \lambda) = 0$$

Luego los autovalores son

$$\lambda_1 = -\mu$$

$$\lambda_2 = \beta - (\mu + \gamma).$$

Como $\mu > 0$, tendremos que $\lambda_1 < 0$, y como estamos en el caso $\beta \leq \mu + \gamma$ tendremos que $\lambda_2 < 0$. Por lo tanto el punto de equilibrio es uniformemente

asintóticamente estable. En el contexto del modelo SIR, esto significa que en el caso en que el número inicial de individuos susceptibles se acerque al número total poblacional y el número inicial de individuos infecciosos se acerque a cero, entonces el número de individuos susceptibles tiende a estabilizarse en el tamaño de la población, y el número de individuos infecciosos tiende a 0 tras un largo periodo de tiempo (la enfermedad se extinguirá).

Ahora estudiaremos el caso $\beta > \mu + \gamma$.
Tendremos que ver la estabilidad de

$$(S_1^*, I_1^*) = (1, 0), \quad \text{y}, \quad (S_2^*, I_2^*) = \left(\frac{\mu + \gamma}{\beta}, \mu \left(\frac{-1}{\beta} + \frac{1}{\mu + \gamma} \right) \right).$$

- Para $(S_1^*, I_1^*) = (1, 0)$.

Como los autovalores eran

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\mu \\ \lambda_2 &= \beta - (\mu + \gamma) \end{aligned}$$

el punto de equilibrio es un punto de silla, ya que $\lambda_1 > 0$, por ser $\mu < 0$, y $\lambda_2 < 0$, por estar en el caso $\beta > \mu + \gamma$. En el contexto del modelo SIR, esto significa, que si el número inicial de individuos susceptibles se acerca al total poblacional y el número inicial de individuos infecciosos se aproxima a cero, entonces puede ocurrir que dicha población no vuelva a tener valores, de individuos susceptibles e infectados, cercanos a los valores iniciales tras un largo periodo de tiempo. Que el número de individuos infecciosos este cerca de cero no implica que la enfermedad se extinga.

- Para $(S_2^*, I_2^*) = \left(\frac{\mu + \gamma}{\beta}, \mu \left(\frac{-1}{\beta} + \frac{1}{\mu + \gamma} \right) \right)$.

Su matriz jacobiana correspondiente es

$$J_{(S_2^*, I_2^*)} = \begin{pmatrix} \frac{-\beta\mu}{\mu + \gamma} & -(\mu + \gamma) \\ -\mu + \frac{\beta\mu}{\mu + \gamma} & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos sus autovalores.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{-\beta\mu}{\mu + \gamma} - \lambda & -(\mu + \gamma) \\ -\mu + \frac{\beta\mu}{\mu + \gamma} & -\lambda \end{vmatrix} &= \lambda^2 + \frac{\beta\mu}{\mu + \gamma} \lambda - \mu(\gamma + \mu) + \beta\mu \\ \lambda^2 + \frac{\beta\mu}{\mu + \gamma} \lambda - \mu(\gamma + \mu) + \beta\mu &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{-\frac{\beta\mu}{\mu+\gamma} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta\mu}{\mu+\gamma}\right)^2 - 4\mu(\beta-\gamma-\mu)}}{2}$$

Como $\beta \geq \gamma + \mu$, entonces $-4\mu(\beta - \gamma - \mu) < 0$.

$$\text{Luego } \sqrt{\left(\frac{\beta\mu}{\mu+\gamma}\right)^2 - 4\mu(\beta-\gamma-\mu)} < \frac{\beta\mu}{\mu+\gamma}.$$

Como tenemos dos autovalores con parte real negativa, se trata de un punto de equilibrio exponencialmente asintóticamente estable.

3.2. Comparativa de los puntos de equilibrio

Veamos primero un resumen acerca de la estabilidad por modelos.

Estabilidad modelo SIR

- Si $\beta \leq \mu + \gamma$ sólo encontramos un punto de equilibrio, en concreto el $(S_1^*, I_1^*) = (1, 0)$, el cual es uniformemente asintóticamente estable.
- Si $\beta > \mu + \gamma$ encontramos como puntos de equilibrio a

$$(S_1^*, I_1^*) = (1, 0) \quad \rightarrow \quad \text{Inestable}$$

$$(S_2^*, I_2^*) = \left(\frac{\mu+\gamma}{\beta}, \mu \left(\frac{-1}{\beta} + \frac{1}{\mu+\gamma} \right) \right) \quad \rightarrow \quad \text{Exponencialmente asintóticamente estable .}$$

Estabilidad modelo SIRI

- Si $\sigma \leq \frac{\mu}{\mu+\eta}$ sólo encontramos un punto de equilibrio, el $(S_1^*, I_1^*) = (1, 0)$, el cual es asintóticamente estable.
- Si $\sigma > \frac{\mu}{\mu+\eta}$ encontramos como dos puntos de equilibrio a

$$(S_1^*, I_1^*) = (1, 0) \quad \rightarrow \quad \text{Inestable}$$

$$(S_2^*, I_2^*) = \left(\frac{\mu}{(\mu+\eta)\sigma}, \frac{\mu+\eta}{\beta} \left(\sigma - \frac{\mu}{\mu+\eta} \right) \right) \quad \rightarrow \quad \text{Asintóticamente estable .}$$

Si utilizamos la misma notación en ambos modelos nos queda que para la estabilidad del modelo SIRI:

- Si $\beta \leq \frac{\mu(\mu+\gamma+\eta)}{\mu+\eta}$ sólo encontramos un punto de equilibrio, el $(S_1^*, I_1^*) = (1, 0)$, el cual es A.E.
- Si $\beta > \frac{\mu(\mu+\gamma+\eta)}{\mu+\eta}$ encontramos como dos puntos de equilibrio a

$$(S_1^*, I_1^*) = (1, 0) \quad \rightarrow \quad \text{Inestable}$$

$$(S_2^*, I_2^*) = \left(\frac{\mu(\mu+\gamma+\eta)}{(\mu+\eta)\beta}, \frac{\mu+\eta}{\mu+\gamma+\eta} - \frac{\mu}{\beta} \right) \quad \rightarrow \quad \text{Asintóticamente estable .}$$

Gráficamente, y de manera conjunta, las superficies $\beta = \frac{\mu(\mu + \gamma + \eta)}{\mu + \eta}$ y $\beta = \mu + \gamma$ que obtenemos son las siguientes.

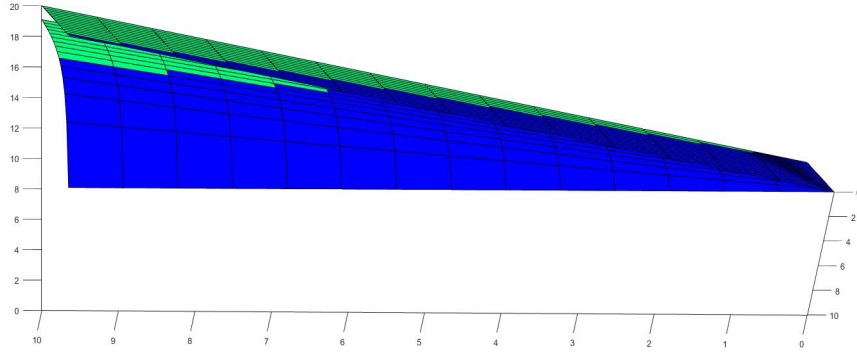


FIG. 5: superficies generadas tomando $\eta = 1$.

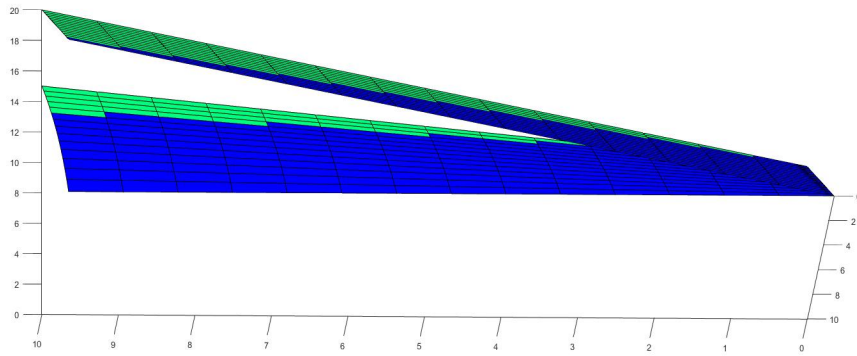


FIG. 6: Superficies generadas tomando $\eta = 10$.

Ambos modelos comparten uno de los puntos de equilibrio, $(S_1^*, I_1^*) = (1, 0)$. Para ver que ocurre en ese punto tenemos dos casos a estudiar con dos condiciones cada uno.

$$\beta \leq \frac{\mu(\mu + \gamma + \eta)}{\mu + \eta} \quad \text{y} \quad \beta \leq \mu + \gamma \quad (3.3)$$

$$\beta > \frac{\mu(\mu + \gamma + \eta)}{\mu + \eta} \quad \text{y} \quad \beta > \mu + \gamma \quad (3.4)$$

Para situarlos en la recta veamos que desigualdad es más pequeña y cual es más grande,

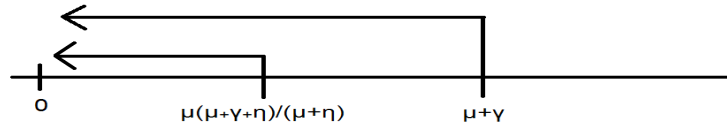
$$\begin{aligned} \frac{\mu(\mu + \gamma + \eta)}{\mu + \eta} &\leq \mu + \gamma \\ \mu(\mu + \gamma + \eta) &\leq (\mu + \gamma)(\mu + \eta) \\ \mu^2 + \mu\gamma + \mu\eta &\leq \mu^2 + \mu\eta + \mu\gamma + \eta\gamma \\ 0 &\leq \eta\gamma. \end{aligned}$$

Luego el lado izquierdo es menor que el lado derecho de la desigualdad, es decir,

$$\frac{\mu(\mu + \gamma + \eta)}{\mu + \eta} \leq \mu + \gamma.$$

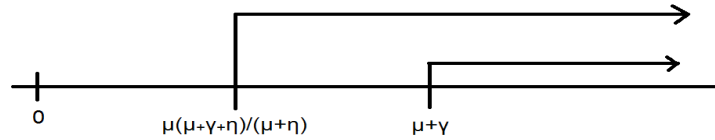
La igualdad se da cuando $\eta = 0$. Esto tiene sentido ya que, que $\eta = 0$ significa que el porcentaje de individuos que pasan de estar recuperados a reinfectarse es cero, luego el modelo SIRI es en realidad el modelo SIR. Por lo tanto el punto de equilibrio se comportaría como en el modelo SIR.

- Condición (3.3)



Tenemos que β toma un mayor rango de valores para el modelo SIR. Cuando $\eta = 0$ el rango de valores que toma β será el mismo. Si $\beta \leq \frac{\mu(\mu+\gamma+\eta)}{\mu+\eta}$ el punto de equilibrio será estable para los modelos SIR y SIRI, y si $\beta > \frac{\mu(\mu+\gamma+\eta)}{\mu+\eta}$ el punto de equilibrio será estable para el modelo SIR, pero inestable para el modelo SIRI.

▪ Condición (3.4)



Tenemos que β toma un mayor rango de valores para el modelo SIRI. Cuando $\eta = 0$ el rango de valores que toma β será el mismo. Si $\beta < \mu + \gamma$ el punto de equilibrio será estable para el modelo SIR, pero inestable para el modelo SIRI, y si $\beta > \mu + \gamma$ el punto de equilibrio será inestable para ambos modelos.

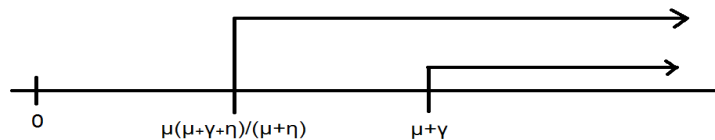
Veamos qué ocurre con los puntos de equilibrio $\left(\frac{\mu + \gamma}{\beta}, \mu\left(\frac{-1}{\beta} + \frac{1}{\mu + \gamma}\right)\right)$ y $\left(\frac{\mu(\mu + \gamma + \eta)}{(\mu + \eta)\beta}, \frac{\mu + \eta}{\mu + \gamma + \eta} - \frac{\mu}{\beta}\right)$.

Cuando $\eta \rightarrow 0$ ambos puntos de equilibrio son iguales. Es lógico porque no existe porcentaje de individuos que pasan de estar recuperados a reinfectarse, luego el modelo SIRI se convertiría en SIR. El punto de equilibrio en este caso, se comportaría como en el modelo SIR, es decir, E.A.E.

Para el caso en que $\eta \neq 0$ tendríamos una condición para cada punto de equilibrio.

- Para $\left(\frac{\mu + \gamma}{\beta}, \mu\left(\frac{-1}{\beta} + \frac{1}{\mu + \gamma}\right)\right)$ tenemos $\beta > \mu + \gamma$.
- Para $\left(\frac{\mu(\mu + \gamma + \eta)}{(\mu + \eta)\beta}, \frac{\mu + \eta}{\mu + \gamma + \eta} - \frac{\mu}{\beta}\right)$ tenemos $\beta > \frac{\mu(\mu + \gamma + \eta)}{\mu + \eta}$.

Ambas desigualdades situadas en la recta nos quedarían



Tenemos que β toma un mayor rango de valores para el modelo SIRI. Cuando $\eta = 0$ el rango de valores que toma β será el mismo. Si $\beta < \mu + \gamma$ el punto de equilibrio será estable para el modelo SIRI, pero inestable para el modelo SIR, y si $\beta > \mu + \gamma$ el punto de equilibrio será estable para ambos modelos.

Conclusión. En la actualidad ambos modelos son de gran utilidad, ya que nos permiten ver cómo actúan las enfermedades, así como la propagación y persistencia de ellas mismas. La principal diferencia entre ambos modelos es que el modelo SIR nos permite describir enfermedades infecciosas en las cuales tras un periodo relativamente corto de infección, existe una respuesta inmune, a diferencia del modelo SIRI en el que existe una respuesta inmune temporal. Es decir, cuando el coeficiente de individuos re infectados vale cero en el modelo SIRI, en realidad se trata del modelo SIR, puesto que los individuos no presentan una recaída en la enfermedad. En cuanto a las diferencias y similitudes con respecto al comportamiento asintótico de las soluciones de ambos modelos tenemos:

Para el punto de equilibrio $(1, 0)$ (es el mismo en ambos modelos).

- Si estamos en la Condición (3.3): si $\beta \leq \frac{\mu(\mu + \gamma + \eta)}{\mu + \eta}$ los puntos de equilibrio de ambos modelos se comportan de la misma forma, y si $\beta > \frac{\mu(\mu + \gamma + \eta)}{\mu + \eta}$ dichos puntos se comportan de formas distintas.
- Si estamos en la Condición (3.4): si $\beta < \mu + \gamma$ los puntos de equilibrio de se comportan de forma distinta en ambos modelos, pero si $\beta > \mu + \gamma$ se comportan de la misma forma.

Para los otros puntos de equilibrio se tendrá que si $\beta < \mu + \gamma$ los puntos de equilibrio de ambos modelos se comportan de forma distinta, pero si $\beta > \mu + \gamma$ entonces los puntos de equilibrio se comportan de la misma forma.

Bibliografía

- [1] S. SASTRY, *Nonlinear Systems: Analysis, Stability, and Control*, Springer (2013).
- [2] T. CARABALLO, X. HAN, *Applied Nonautonomous and Random Dynamical Systems*, Springer (2016).
- [3] C. MARTÍNEZ, M.A. SANZ, *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Reverté (1991).
- [4] R.K. MILLER, A.N. MICHEL, *Ordinary Differential Equations*, Academic Press (1982).
- [5] D. TUDOR, *A Deterministic Model for Herpes Infections in Human and Animal Populations*, SIAM Rev., 32 (1990), pp. 136-139.
- [6] S. BLOWER, *Modelling the genital herpes epidemic*, Herpes 11 (Suppl. 3) (2004) 138 A.
- [7] H. N. MOREIRA, Y. WANG, *Global stability in an $S \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow I$ model*, SIAM Rev., 39 (1997), pp. 496-502.
- [8] P. VAN DEN DRIESSCHE, X. ZOU, *Modelling relapse in infectious diseases*, Math. Biosci., 207 (2007), pp. 89-103.
- [9] P. VAN DEN DRIESSCHE, L. WANG, X. ZOU, *Modelling diseases with latency and relapse*, Math. Biosci. Eng., 4 (2007), pp. 205-219.
- [10] C. VARGAS-DE-LEÓN, *On the global stability of infectious diseases models with relapse*, Abstraction & Application, 9 (2013), pp.50-61.
- [11] O. DIEKMANN, J.A.P. HEESTERBEEK, *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases: Model Building, Analysis and Interpretation*, Wiley Series in Mathematical & Computational Biology (2000).
- [12] M.J. KEELING, P. ROHANI, *Modeling infectious diseases in human and animals*, Princeton University Press (2008).
- [13] D.J. DALEY, J. GANI, *Epidemic Modelling: An Introduction*, Cambridge University Press (1999).