FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO: GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Trabajo Fin de Grado:

Espacios Pretopológicos: Algunas Aplicaciones

Autora:
Gloria González Puntas

Tutores:
Rafael Ayala y José Antonio Vilches

2017 - 2018

Índice general

1. Preliminares **7**
1.1. Definiciones previas sobre grafos 7
1.1.1. Grafos dirigidos 7
1.1.2. Grado de un grafo 8
1.1.3. Algunos grafos de interés 9
1.1.4. Conexión en grafos 10
1.2. Definiciones previas sobre relaciones 13
1.3. Definiciones topológicas 14
1.3.1. Espacio topológico 14
1.3.2. El interior de un conjunto en un espacio topológico 15
1.3.3. La clausura de un conjunto 16
1.3.4. Dualidad interior-clausura y abierto-cerrado 17
1.3.5. Filtros y prefiltros en un espacio topológico 17
1.3.6. Axiomas de separación 17
1.3.7. Continuidad en espacios topológicos 18
1.3.8. Tipos de aplicaciones 18

2. ¿Qué es la pretopología? **19**
2.1. Espacios pretopológicos 19
2.1.1. Conjuntos a-cerrados 25
2.1.2. a-clausura 29
2.1.3. Conjuntos a-cerrados minimales y conjuntos a-cerrados elementales 32
2.2. Tipos de espacios pretopológicos 35
2.2.1. Espacios pretopológicos de tipo $\mathcal{V}$ 35
2.2.2. Espacios pretopológicos de tipo $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}$ 39
2.2.3. Espacios pretopológicos de tipo $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$ 42
2.3. Subconjuntos y subespacios pretopológicos 43
2.3.1. Pretopología inducida 44
2.4. Continuidad 48
2.5. Conexión 50

2.5.1. Tipos de conexiones 50

3. Relaciones y pseudoclausuras **55**
3.1. Pseudoclausura inducida por una relación 55
3.1.1. Conexión y distancia en $\mathcal{V}_S$-espacios en términos de R 61
3.2. Pseudoclausura inducida por un conjunto de relaciones 63
3.2.1. Pretopologías de predecesores 64
3.3. Algunos indicadores de estructura en Pretopología 66
3.3.1. Coeficiente de pseudoclausura y pseudointerior 66
3.3.2. Indicador de cercanía 68
3.3.3. Coeficiente de correlación y función assortativity 69

4. Aplicaciones **71**
4.1. Modelado de redes complejas mediante la pretopología 71
4.1.1. Concepto de red con pretopología 72
4.1.2. Algunos ejemplos 73
4.2. Pretopología en Economía 76
4.2.1. Modelo Input-Output 76
4.2.2. Otros ejemplos en economía 81

Abstract

The goal of this work is to study the theory of pretopological spaces and some applications. Starting with the key notion of preclosure operator, we will introduce the basic concepts and results, which generalize the ideas and properties of point set topology. The different kinds of pretopological spaces are introduced and studied as well. Taking into account its importance in applications, a detailed analysis of pretopological spaces induced by binary relations is carried out. Finally, two particular applications of pretopology are presented: Modelling of complex networks and analysis of economical models.

Introducción

La topología general no es el marco adecuado para estudiar los conjuntos discretos que aparecen habitualmente en las ciencias sociales para modelar ciertos fenómenos o procesos. La razón es sencilla: si se concibe la topología como un formalismo que pretende trasladar las propiedades de los intervalos abiertos de números reales a espacios abstractos para poder disponer en ellos de una noción de “proximidad”, lo que se hace es tomar como punto de partida la idea de conjunto “abierto”. Es decir, se utiliza un concepto íntimamente ligado a la naturaleza “continua”de los números reales, y ello es incompatible con la realidad de los modelos a los que se aplica, que con frecuencia son estructuras surgida de relaciones entre objetos, como por ejemplo los grafos o redes.

Por otra parte, en todos los problemas que sean susceptibles de ser representados por un grafo, o cuya solución requiera el análisis y clasificación de grandes conjuntos de datos, no tiene interés utilizar el concepto de “distancia”si se quiere disponer de una noción de “proximidad”o “vecindad”entre sus elementos. Así, por ejemplo, en el análisis de las redes complejas suelen aparecer con frecuencia ciertos términos topológicos relacionados con la descripción de su evolución o con cambios en las relaciones entre sus componentes como “semejanza”, “entorno”, “conexión”, “continuidad de un proceso”, etc. Sin embargo, no es habitual que en la literatura sobre ese tema se haga referencia a su relación con la topología general debido, quizás, a que en los problemas que se tratan y en sus aplicaciones no aparecen de forma natural objetos correspondientes a conjuntos “abiertos”. Los sistemas que se estudian no son de naturaleza “continua”, y en ellos carece de sentido utilizar las definiciones o construcciones derivadas de la idea de bola abierta de radio ε.

La solución a estas dificultades podría ser, como ya hizo Kuratowski ([13]), tomar la noción de “clausura”como punto de partida para definir espacio topológico. Esta idea está mucho más cercana a la idea cotidiana de posición “cercana”o “próxima”a una zona. Es mucho más intuitivo y geométrico imaginar el proceso de “cerrar”un conjunto incorporando a él lo que se observa como “muy cercano”que imaginar un conjunto “abierto”, que no incorpora la frontera que lo individualiza.

Ahora bien, entre los axiomas de la operación clausura Kuratowski está la propiedad de idempotencia, que afirma que realizar dos veces dicha operación sobre un conjunto produce el mismo efecto que realizarla una vez, y ello constituye un serio obstáculo para poder usar esta idea como medio más o menos natural de puntos próximos a un conjunto cuando se estudian fenómenos de difusión o propagación de contaminación o epidemias, por ejemplo, en los que, más que el final del proceso, interesa el análisis de su evolución temporal, cómo va afectando progresivamente a una zona o área. En este tipo de problemas, es natural que se vaya produciendo una ampliación de la misma, hasta llegar a estabilizarse. Por tanto, parece natural que se disponga de una idea de clausura de un conjunto que evolucione, que se desarrolle en varias etapas, y para tratar de aprovechar las técnicas y resultados topológicos, sería interesante debilitar los axiomas de la operación clausura prescindiendo de la condición de idempotencia.

Esta idea ya la considero Čech al definir en [8] el concepto de "espacio de clausura"y desarrollar toda la topología a partir de él. Aunque existen numerosos trabajos relacionados con aspectos teóricos de dichos espacios o variantes de los mismos, fue en los años 70 del pasado siglo cuando un grupo de matemáticos franceses (M.M.Brissaud [7], J.P.Auray [1], G.Duru [12], M.Lamure [16]) retomó la idea de Čech, y se basó en ella para el análisis de estructuras de la economía regional o nacional, y otras, surgidas de la evolución o dinámica de ciertos modelos, que con el tiempo se conocerían como redes complejas. Surgió así la teoría matemática conocida como Pretopología, por ser el resultado de debilitar los axiomas de Kuratowski que imponen condiciones que no son compatibles con la realidad de los problemas en los que queremos modelizar el concepto de proximidad, y muy ligada a la teoría de grafos, de la que, de hecho, es una extensión.

La pretopología puede ser considerada como una herramienta matemática eficaz en el análisis y la modelización de sistemas complejos o espacios discretos en los campos más variados de las ciencias. A esto contribuye su capacidad para aportar un concepto de proximidad a estos sistemas, no basada en una métrica, sino funcional, susceptible de incorporar los cambios de ciertos parámetros en el tiempo, así como de un tratamiento algorítmico. Esto es lo que permite el seguimiento paso a paso del proceso de estructuración del mismo, así como su estabilidad para un gran número de operaciones.

En el trabajo presentamos muy brevemente las nociones básicas de pretopología, así como los resultados elementales. No se ha pretendido una exposisicón exhaustiva del estado actual de la teoría ni de las múltiples aplicaciones en los campos científicos más variados. Podemos distinguir, en general, dos grandes partes. En la primera presentamos la teoría matemática con la que trabajamos, la pretopología, y en la segunda, algunas de sus múltiples aplicaciones.

En el Capítulo 1, se da un resumen de los conceptos básicos de teoría de grafos, topología general o relaciones, que se utilizan a lo largo del trabajo. Para más detalles sobre los resultados utilizados en teoría de grafos y topología ver [4] y [13], respectivamente.
En el Capítulo 2, se presentan las definiciones fundamentales de la teoría: operador pseudoclausura, pseudointerior, conjunto a-cerrado, a-abierto, a-clausura, etc. Todos ellos ilustrados con ejemplos. Trabajando sobre un conjunto, la pretopología nos permite determinar en qué medida dos de sus puntos, o más en general, dos de sus partes, son mutuamente accesibles. En ella juega un papel fundamental

el operador pseudoclausura a, mediante el cual podemos modelizar directamente el concepto de proximidad. Este será el que nos indique cuáles son las posiciones alcanzables o accesibles para cada parte de un conjunto dado. Cada vez que iteramos este operador, alcanzamos nuevos elementos que están más y más "distantes"de nuestro conjunto inicial. Llega un momento en el que el conjunto se estabiliza, consiguiendo así lo que se conoce como la a-clausura, $\mathcal{F}$. De esta forma se tiene que las posiciones alcanzables para el conjunto son aquellas que están en $\mathcal{F}$. Como ejemplo podemos poner el caso de los grafos, tratados a menudo en pretopología. Se verá que, para grafos no dirigidos, la reiteración de este operador le asociará a un conjunto de vértices la componente conexa que los contiene.
Al operador pseudoclausura se le atribuyen inicialmente dos propiedades, a las que iremos añadiendo otras adicionales para introducir los distintos tipos de espacios pretopológicos. Teniendo en cuenta que estos se obtienen por una debilitación de las hipótesis necesarias en los espacios topológicos, veremos en qué caso y mediante qué propiedad un espacio pretopológico pasa a ser un espacio topológico.

También se presentan, muy brevemente, los conceptos de función continua y pretopología inducida, y se estudia la idea de conexión, que a diferencia de la topología, no está apoyada en el concepto de abierto sino en la idea del operador a-clausura. En realidad, los distintos tipos de conexión presentados están inspirados en estas definiciones para la teoría de grafos (dirigidos). Esto es consistente con el propósito de la teoría, porque en espacios pretopológicos la idea de conexión se basa en que ninguna de las partes del conjunto quede aislada de las demás, sino que mediante un proceso de expansión se pueda pasar de unas a otras. Aunque sería factible un tratamiento teórico de la compacidad en estos espacios, no se ha tratado porque la mayoría de las aplicaciones se desarrollan sobre conjuntos finitos.

Posteriormente, en el Capítulo 3, definiremos el operador a_R, pseudoclausura inducida por una relación R. Existen distintas formas de definir el operador pseudoclausura según sea nuestra finalidad, en función de la información que queramos modelizar. La más usual es mediante relaciones binarias en E. Se presentarán así los espacios pretopológicos donde la pseudoclausura es la inducida por una relación o por un conjunto de relaciones. Estos espacios nos sirven para modelizar gran cantidad de fenómenos de la vida real, un ejemplo podría ser el caso de las redes complejas.

Además de sus aplicaciones en redes, la pretopología se usa para la modelización en campos más variados. Entre sus aplicaciones están la modelización de fenómenos complejos (difusión de la contaminación atmosférica, fenómenos de congestión o dinámica de propagación, entre otros), clasificación de datos (clustering), análisis de imágenes, reconocimiento de formas, análisis de las relaciones intersec-

toriales en economía, formación de coalición en teoría de juegos.
En el Capítulo 4, se recogen dos de ellas. En la primera,veremos cómo modelizar mediante la pretopologís algunos ejemplos sencillos de redes complejas, y la segunda hablaremos sobre cómo aplicar la pretopología en el análisis económico intersectorial.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Definiciones previas sobre grafos

La teoría de grafos, aunque no es eficiente, es la herramienta que se suele usar en los diversos estudios que se han centrado en el modelado de redes complejas. La pretopología está ligada a ella, por lo que para el desarrollo de nuestro trabajo necesitaremos conocer algunos conceptos de grafos.

1.1.1. Grafos dirigidos

Un grafo dirigido o digrafo es un tipo de grafo en el cual las aristas tienen una ordenación fijada, a diferencia del grafo no dirigido, en el que las aristas son relaciones simétricas y no apuntan en ningún sentido.

Definición 1.1. Se denomina *grafo dirigido* o *digrafo* a todo par $G = (X, U)$ donde $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es un conjunto numerable no vacío de elementos llamados vértices o nodos (este último concepto es más usado en el contexto de las redes) y con $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ un conjunto, que puede ser vacío, del producto cartesiano $X \times X$ cuyos elementos son llamados arcos o aristas. Un arco $u = (x_i, x_j)$ es aquel que va desde el nodo x_i al nodo x_j, es decir, x_i es el origen y x_j el destino.

Al estudiar algunas propiedades, puede ocurrir que la orientación de los arcos no juegue ningún papel. Simplemente observamos la existencia de arcos entre dos vértices sin especificar ninguna orientación.

Definición 1.2. Un *grafo no dirigido* se define por el par $G = (X, E)$ con X un conjunto numerable no vacío de vértices o nodos, y E un conjunto, que puede ser vacío, de pares de vértices no ordenados $[x_i, x_j]$. Estas parejas son llamadas aristas.

Nota 1.1. En el caso no orientado, en lugar de denotar $G = (X, U)$ y $u = (x_i, x_j)$, se denota con $G = (X, E)$ y $e = [x_i, x_j]$.

Figura 1.1: Grafo dirigido y grafo no dirigido

En lo siguiente, si no se especifica lo contrario, con el término de grafo nos referiremos a grafo dirigido.

Definición 1.3. Un *arco* $u = (x_i, x_i)$, que va de un nodo en sí mismo, se llama lazo o bucle.
Un *multigrafo* $G = (X, E)$ es un grafo para el que pueden existir varias aristas entre dos nodos.
Un *multigrafo dirigido* $G = (X, U)$ es un grafo donde pueden existir más de un arco entre dos nodos.

Observación 1.1. En el caso de los multigrafos dirigidos puede haber más de un arco que una dos vértices en la misma dirección, distinguiéndose entre sí por su tipo (un tipo de arco representa relaciones de amistad mientras que el otro tipo representa mensajes enviados recientemente entre los nodos), o por un atributo (su importancia o peso).

Definición 1.4. Un grafo es *simple* si no es un multigrafo y no contiene bucles.

1.1.2. Grado de un grafo

Para definir este concepto distinguimos entre grafo dirigido y no dirigido.

Definición 1.5. Dos vértices son *adyacentes* si están unidos por una arista.
Dos *aristas* son *adyacentes* si tienen al menos un extremo en común.

Definición 1.6. En un grafo dirigido, se suele distinguir entre el grado de entrada de un vértice x, denotado $g^-(x)$, que es el número de aristas que tienen al vértice x como vértice final, y grado de salida $g^+(x)$, número de aristas que tienen al vértice x como vértice inicial. Se define el *grado* de x como:

$$g(x) = g^-(x) + g^+(x)$$

En el caso de grafos no dirigidos, no se distingue entre el grado de entrada y de salida de un vértice, y se define entonces el *grado de un vértice* como el número de aristas incidentes a él:

$$g(x) = g^-(x) = g^+(x)$$

Nota 1.2. Otra forma de definir el grado de un vértice es a través de su vecindad. La vecindad o conjuntos de vecinos de un vértice x, denotado con $N(x)$, es el conjunto de vértices adyacentes a x. Es decir, en un grafo no dirigido $G = (X, E)$,

$$N(x) = \{y \in X | \{x, y\} \in E\}$$

de modo que el grado del vértice x es el número de vecinos que tiene, $g(x) = |N(x)|$. Denotamos por $|N(x)|$ el cardinal del conjunto $N(x)$. Indistintamente se podrá usar también $Card(N(x))$.

1.1.3. Algunos grafos de interés

Haremos uso de algunos tipos de grafos que presentamos a continuación.

Definición 1.7. Sea $G = (X, U)$ un grafo, su *grafo complementario* es $G^c = (X, U^c)$ con el mismo conjunto de vértices y tal que dos vértices de G^c son adyacentes si y sólo si no son adyacentes en G.

Definición 1.8. Sea $G = (X, U)$ un grafo, se denomina *subgrafo de* G a cualquier otro grafo $G_s = (X_s, U_s)$ tal que $X_s \subseteq X$ y $U_s \subseteq U$.
Un subgrafo de un grafo se dice *maximal* si posee todos los vértices del grafo.
Sea S un subconjunto de vértices de un grafo G, se denomina *subgrafo generado por* S *de* G al subgrafo de G que tiene a S como conjunto de vértices y por aristas todas aquellas de G cuyos extremos están en S.

Definición 1.9. Un grafo se dice *reflexivo* si para todo $x_i \in X$, se cumple que $(x_i, x_i) \in U$.
Un grafo se dice *irreflexivo* si cumple que para todo $x_i \in X, (x_i, x_i) \notin U$.
Un grafo se dice *simétrico* si para todo $x_i, x_j \in X$, con $(x_i, x_j) \in U$ se tiene que $(x_j, x_i) \in U$.
Un grafo se dice *asimétrico* si para todo $x_i, x_j \in X$, con $(x_i, x_j) \in U$ se tiene que $(x_j, x_i) \notin U$. (Si G es asimétrico entonces G es irreflexivo).
Un grafo se dice *transitivo* si para todo $x_i, x_j \in X$, con $(x_i, x_j) \in U$ y $(x_j, x_k) \in U$ se cumple que $(x_i, x_k) \in U$.

Definición 1.10. Un *grafo completo* es un grafo simple donde cada par de vértices está conectado por una arista. Se representa por K_n al grafo completo de n vértices.

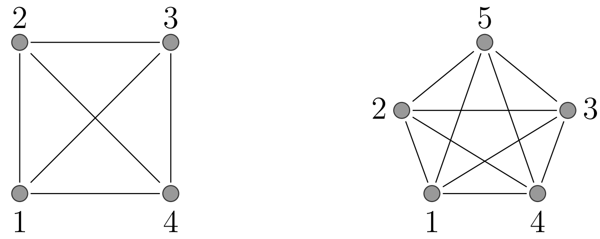


Figura 1.2: Grafos K_4 y K_5

1.1.4. Conexión en grafos

Si el grafo es dirigido, podemos distinguir diferentes tipos de conexiones. Las vemos a continuación.

Definición 1.11. Se llama *camino* a una secuencia de vértices en un grafo tal que exista una arista entre cada vértice y el siguiente, y no se repitan aristas.
Se conoce por *camino dirigido* a una secuencia de vértices en un grafo dirigido tal que exista un arco entre cada vértice y el siguiente.

Definición 1.12. En un grafo no dirigido G, dos vértices i y j están *conectados* si G contiene un camino de i a j. De lo contrario, se llaman desconectados. Se dice que un grafo es *conexo* si cada par de vértices en el grafo está conectado (no hay vértices inalcanzables). Un grafo en el que existe al menos un par de vértices no conectados es *disconexo*.

Nota 1.3. La relación “estar conectado ”es de equivalencia en el conjunto de vértices de un grafo, y cada clase de equivalencia se denomina componente conexa. Una componente conexa de G es un subgrafo conexo maximal de G.

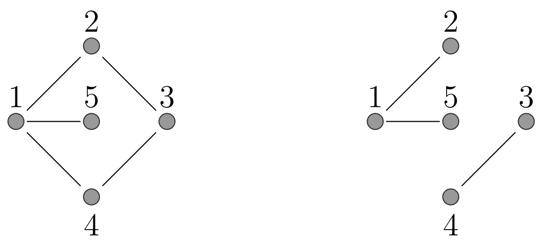


Figura 1.3: Grafo conexo y grafo no conexo

Veamos ahora qué ocurre en grafos dirigidos.

Definición 1.13. Un grafo dirigido se denomina *débilmente conexo* si el grafo no dirigido subyacente es conexo, es decir, si se reemplazan sus aristas dirigidas por aristas no dirigidas se obtiene un grafo conexo.
Un grafo dirigido es *conexo* (o unilateralmente conexo) si contiene un camino dirigido de i a j o de j a i para cada par de vérices i,j.
Un grafo dirigido es *fuertemente conexo* si contiene un camino dirigido de i a j y otro de j a i para cada par de vértices i,j.
Las *componentes débilmente conexas, conexas o fuertemente conexas* son, respectivamente, los subgrafos débilmente conexos, conexos o fuertemente conexos maximales.

Ejemplo 1.1. A continuación se muestra un grafo dirigido señalanado con diferentes colores sus componentes fuertemente conexas:

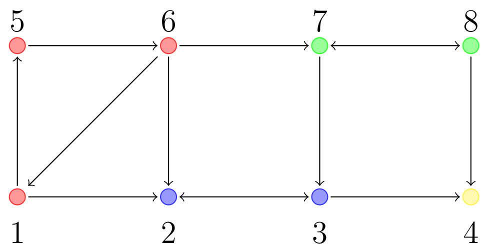


Figura 1.4: Componente fuertemente conexas

Este grafo es débilmente conexo, por tanto solo hay una componente débilmente conexa, que es el total. Mostramos ahora otro grafo dirigido señalando, con diferentes colores, sus componentes débilmente conexas.

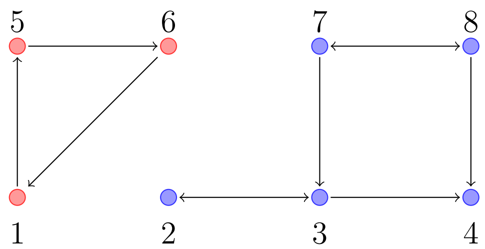


Figura 1.5: Componentes débilmente conexas

Estas mismas componentes débilmente conexas coinciden con las componentes conexas (o unilateralmente conexas). Distinguimos, por último, las componentes conexas en el grafo siguiente.

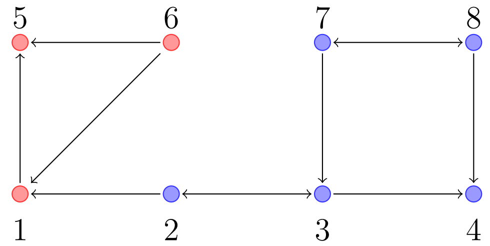


Figura 1.6: Componentes conexas

Definición 1.14. Un *conjunto de corte* de un grafo conexo G es un conjunto de vértices que desconectan a G.
Se dice que un grafo es *super conexo* si cada conjunto de corte mínimo aísla un vértice.
Un grafo se dice *hiper conexo* si la eliminación de cada conjunto de corte mínimo crea exactamente dos componentes, siendo una de ellas un vértice aislado.

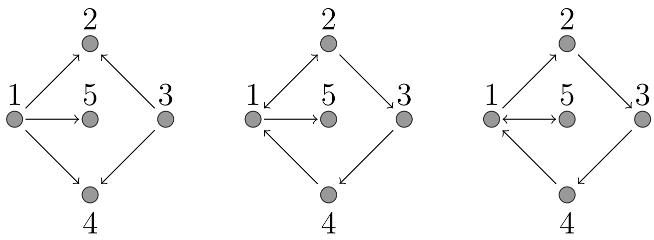


Figura 1.7: Grafos débilmente conexo, conexo y fuertemente conexo

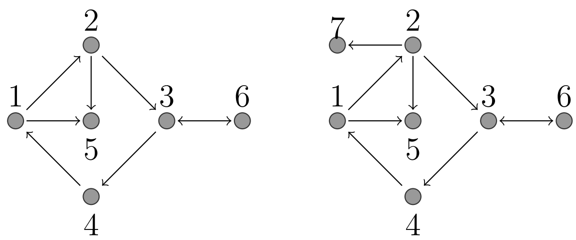


Figura 1.8: Grafos super conexo (hiper conexo) y super conexo(no hiper conexo)

1.2. Definiciones previas sobre relaciones

También serán necesarios algunos conceptos sobre relaciones para su posterior uso en la definición de espacios pretopológicos inducidos por relaciones.

Definición 1.15. Una *relación* en un conjunto E es un subconjunto del producto $E \times E$.

Ejemplo 1.2. La relación $\Delta \subseteq E \times E$, llamada relación de igualdad en E, viene dada por los pares (x, y) de $E \times E$ tales que $x = y$.

$$\Delta = \{(x, y) \in E \times E | x = y\}$$

Observación 1.2. Si $R \subseteq E \times E$ es una relación en E, usaremos la notación xRy para referirnos a que el par $(x, y) \in R$.

Definición 1.16. Una relación R en un conjunto E es *reflexiva* si para cada $x \in E$, se tiene que xRx. Esto es equivalente a que R contenga a la relación Δ.
Una relación R es *simétrica* si cumple que si $(x, y) \in R$, entonces $(y, x) \in R$, es decir, xRy implica yRx.
Una relación R es *asimétrica* si cumple que si $(x, y) \in R$, entonces $(y, x) \notin R$, es decir, XRy implica $(y, x) \notin R$.
Una relación R es *transitiva* si cumple que si (x, y) e (y, z) son elementos de R, entonces (x, z) es un elemento de R, es decir, xRy e yRz implican xRz.

Ejemplo 1.3. (1) La relación R definida en el conjunto de los números naturales por la condición: xRy si y solo si x es múltiplo de y es una relación reflexiva y transitiva pero no simétrica.

(2) Consideremos la relación R padre-hijo; xRy si y solo si x es padre de y es una relación en el conjunto de los seres humanos que no es reflexiva, simétrica ni transitiva.

Definición 1.17. Sea R una relación en un conjunto E y $A \subseteq E$, se define la *imagen de A por R* como

$$\mathcal{R}(A) = \{y \in E \,|\, xRy \text{ para algún}\, x \in A\}.$$

Definición 1.18. Sea R una relación en un conjunto E y $A \subseteq E$, se define la *imagen inversa del conjunto A por R* como

$$\mathcal{R}^{-1}(A) = \{x \in E \,|\, xRy \text{ para algún}\, y \in A\}.$$

Nota 1.4. Para $z \in E$, $\mathcal{R}(\{z\})$ y $\mathcal{R}^{-1}(\{z\})$ lo denotaremos por $\mathcal{R}(z)$ y $\mathcal{R}^{-1}(z)$ respectivamente.

Ejemplo 1.4. (1) En el Ejemplo 3.2 (1), $\mathcal{R}(z) = \{y \in E \,|\, z \text{ es múltiplo de } y\}$ y $\mathcal{R}^{-1}(z) = \{x \in E \,|\, x \text{ es múltiplo de } z\}$.

(2) En el Ejemplo 3.2 (2), $\mathcal{R}(z) = \{y \in E \,|\, z \text{ es padre de } y\}$ y $\mathcal{R}^{-1}(z) = \{x \in E \,|\, x \text{ es padre de } z\}$.

Observación 1.3. De la definición se deduce que

$$\mathcal{R}^{-1}(A) = \{x \in E \,|\, \mathcal{R}(x) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Más aún, se tiene que

$$\mathcal{R}^{-1}(A) = \cup\{\mathcal{R}^{-1}(x) \,|\, x \in A\}.$$

1.3. Definiciones topológicas

Recordemos brevemente las nociones básicas de topología sobre un conjunto. Las pruebas de los resultados que se ofrecen en esta sección se podrán encontrar en [13].

1.3.1. Espacio topológico

Comenzaremos definiendo la noción de espacio topológico y mostrando un ejemplo.

Definición 1.19. Dado un conjunto X, se define el *conjunto de partes de* X como la familia de subconjuntos de X y se denota con $\mathcal{P}(X)$.
Una *topología sobre* X es una familia $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ cumpliendo:

- $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$.
- Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$, entonces $\bigcap_{i=1\ldots n} A_i \in \mathcal{T}$.
- Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ está formada por conjuntos en $\mathcal{T}$, entonces $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \in \mathcal{T}$.

Al par $(X, \mathcal{T})$ se le llama *espacio topológico*. A los conjuntos de $\mathcal{T}$ se les llaman *abiertos* de $(X, \mathcal{T})$.

Definición 1.20. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice *espacio de Alexandroff* si la intersección arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

1.3.2. El interior de un conjunto en un espacio topológico

Definición 1.21. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Si $A \subseteq X$ y $x \in X$, decimos que x es *interior a* A en $(X, \mathcal{T})$ si existe un G en $\mathcal{T}$ con $x \in G \subseteq A$.
Se llama interior del conjunto A en $(X, \mathcal{T})$ al conjunto

$$int(A) = \{x \in X \mid x \,\text{es interior a}\, A\}.$$

Nota 1.5. Obsérvese que, por definición, siempre se tiene $int(A) \subseteq A$.

A continuación damos una caracterización de los conjuntos abiertos en topología.

Proposición 1.1. Se tiene que $A \in \mathcal{T}$ si y solo si $A = int(A)$.

Algunas propiedades del interior son las siguientes:

Proposición 1.2. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces se cumplen:

(1) Si $A \subseteq B$, entonces $int(A) \subseteq int(B)$.

(2) $int(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = int A_1 \cap \ldots \cap int A_n$.

(3) $int(int A) = int A$. En particular, $int A$ siempre es abierto.

Definición 1.22. Dado $N \subseteq X$, decimos que N es *entorno o vecindad* de $x \in X$ en el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ si $x \in int(N)$, es decir, si existe $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A \subset N$. A la familia de entornos de x la denotamos por $\mathcal{N}(x)$.

Proposición 1.3. $A \in \mathcal{T}$ si y solo si es entorno de todos sus puntos.

Definición 1.23. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $x \in X$ y $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}(x)$. Decimos que $\mathcal{B}$ es una *base de entornos de* x si para cada $U \in \mathcal{N}$ existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subset U$.

La proposición siguiente enumera algunas propiedades de los entornos de un punto.

Proposición 1.4. (1) Si $U \in \mathcal{N}(x)$ y $U \subset V$, entonces $V \in \mathcal{N}(x)$.

(2) Si $U, V \in \mathcal{N}(x)$, entonces $U \cap V \in \mathcal{N}(x)$.

(3) Si $V \in \mathcal{N}(x)$, entonces $x \in V$.

(4) Si $V \in \mathcal{N}(x)$, entonces existe $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que $V \in \mathcal{N}(y)$ para todo $y \in U$.

1.3.3. La clausura de un conjunto

Definición 1.24. Dado$(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y un conjunto $A \subseteq X$, decimos que $x \in X$ es *punto de acumulación* de A si para todo abierto G en $(X, \mathcal{T})$ con $x \in G$, se cumple que $(G - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.
Dado $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subseteq X$, decimos que $x \in X$ es *punto adherente* a A si todo abierto G de $\mathcal{T}$ con $x \in G$ cumple $G \cap A \neq \emptyset$.

Nota 1.6. Si x es punto de acumulación de A, entonces x es punto de adherencia de A. Cualquier punto $x \in A$ siempre es punto adherente a A.

Definición 1.25. Se llama *clausura de A* al conjunto

$$\overline{A} = \{x \in X \mid x \,\text{es adherente a}\, A\}.$$

Siempre se cumple, por la nota anterior, que $A \subseteq \overline{A}$. Un conjunto A se llama *cerrado* en $(X, \mathcal{T})$ si $\overline{A} = A$.

A continuación se dan algunas propiedades de la clausura.

Proposición 1.5. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Se cumple:

(1) Si $A \subseteq X$ entonces $A \subseteq \overline{A}$.

(2) Si $A \subseteq B$ entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

(3) $\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cup \ldots \cup \overline{A_n}$.

(4) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. En particular, $\overline{A}$ siempre es cerrado.

La definición de cerrado y las propiedades de la clausura especificadas en la proposición anterior implican las siguientes proposición sobre los conjuntos cerrados de cualquier espacio topológico.

Proposición 1.6. (1) $\emptyset$ y X son cerrados.

(2) Si $A_1 \ldots A_n$ son cerrados, entonces $\bigcup_{i=1 \ldots n} A_i$ es cerrado.

(3) Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una familia de cerrados, entonces $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ es cerrado.

1.3.4. Dualidad interior-clausura y abierto-cerrado

Veremos que en cualquier espacio topológico el interior y la clausura se determinan recíprocamente. En concreto se tiene la siguiente proposición:

Proposición 1.7. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Dado $A \subseteq X$ se tiene:

(1) $\overline{A} = X - int(X - A)$.

(2) $int(A) = X - \overline{(X - A)}$.

Como consecuencia se tiene que A es abierto si y solo si su complementario $X - A$ es cerrado.

1.3.5. Filtros y prefiltros en un espacio topológico

Una noción esencial de la topología es la de filtro, que conduce a la de entorno. En pretopología, no solamente conservamos esta noción, sino que además necesitamos definir el concepto de prefiltro, para poder asociarle a cada punto una familia con propiedades semejantes a la de los entornos.

Definición 1.26. Sea E un conjunto, una familia $\mathcal{F}$ de partes de E, $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(E)$, es un *prefiltro en E* si verifica:

(1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

(2) Para todo $V \in \mathcal{F}$ y para todo $W \subset E$, si $V \subset W$, entonces $W \in \mathcal{F}$.

Para que $\mathcal{F}$ sea un *filtro en E* tiene que cumplirse, además, la siguiente condición:

(3) Si $V, W \in \mathcal{F}$, entonces $V \cap W \in \mathcal{F}$.

Ejemplo 1.5. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $x \in X$. Entonces,

$$\mathcal{N}(x) = \{V \subset X \,|\, V \text{ es entorno de } x\}$$

es un filtro sobre X, y se llama filtro de entornos de x.

1.3.6. Axiomas de separación

Los axiomas de separación establecen diferentes niveles para distinguir topológicamente puntos distintos. Se denotan con la letra T y un subíndice conveniente. Así aparece una jerarquía de espacios, entre los que destacamos los que se definen a continuación, pues son los que necesitaremos conocer para el desarrollo de algunos resultados en espacios pretopológicos.

Definición 1.27. Un espacio topológico X se llama T_0 *o de Kolmogórov* si para cualquier par de puntos $x, y \in X$ existe un abierto que contiene a uno de los puntos y pero no al otro.
Un espacio topológico X se dice T_1 si para cualquier par de puntos $x, y \in X$ hay un par de conjuntos abiertos A_1, A_2, tal que x está en A_1 pero no en A_2, e y está en A_2 pero no en A_1.

1.3.7. Continuidad en espacios topológicos

La noción de continuidad entre espacios topológicos pretende destacar a aquellas aplicaciones entre espacios topológicos que conserva la relación de proximidad.

Definición 1.28. Dados $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ dos espacios topológicos, y sea $f : X \longrightarrow Y$, se dice que f es continua en el punto a si para todo entorno de $f(a), \mathcal{U}(f(a)) \in \mathcal{T}'$, existe un entorno de a, $V(a) \in \mathcal{T}$, tal que $V(a) \subset f^{-1}(\mathcal{U}(f(a)))$.

Definición 1.29. Sean $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ dos espacios topológicos, y sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación entre ellos. Diremos que f es continua si lo es en todo punto $a \in X$.

Proposición 1.8. Sean $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ dos espacios topológicos, y sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación. Entonces son equivalentes:

- f es continua.
- Una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}')$ es continua si y solo si para todo cerrado C en $(Y, \mathcal{T}')$, $f^{-1}(C)$ es cerrado en $(X, \mathcal{T})$. Se tiene que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, para todo $A \subset X$.
- Para todo $A \in \mathcal{T}'$, $f^{-1} \in \mathcal{T}$.

1.3.8. Tipos de aplicaciones

Con idea de distinguir diferentes tipos de espacio pretopológicos, será necesario conocer los siguientes tipos de aplicaciones.

Definición 1.30. Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ se dice *isótona* si para todo $A, B \subseteq X$ con $A \subseteq B$ cumple que $f(A) \subseteq f(B)$.

Definición 1.31. Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ se dice *aditiva* si para todo $A, B \subseteq X$ verifica que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Definición 1.32. Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ se dice *completamente aditiva* si para todo $A \subseteq X$ verifica que $f(A) = \bigcup_{x \in A} f(x)$.

Capítulo 2

¿Qué es la pretopología?

La pretopología es una teoría matemática para el análisis y la modelización en campos muy variados: modelización para las ciencias humanas y sociales, modelización para las ciencias de la computación, aplicación en la teoría de juegos, extensión de la noción de grafo, modelado de redes complejas, o más generalmente, matematización de espacios discretos.

Los trabajos de investigación sobre la pretopología comenzaron alrededor de 1966 y contaron con importantes desarrollos teóricos durante los años 70-80. Sin embargo, fue en los años 90 cuando la infórmatica y los avances en el cálculo computacional permitieron el desarrollo de tecnologías basadas en la pretopología para la clasificación de datos o el análisis de imágenes.

2.1. Espacios pretopológicos

Los espacios pretopológicos son estructuras matemáticas que dan la posibilidad de establecer una jerarquización entre los diferentes elementos de un conjunto. A continuación damos la definición formal.

Definición 2.1. Un *espacio pretopológico* es un par (E, a), siendo E un conjunto no vacío y a una aplicación $a : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ llamada *pseudoclausura*, tal que:

(1) $a(\emptyset) = \emptyset$

(2) $A \subseteq a(A)$, para todo $A \subseteq E$

De esta definición se deduce que $a(E) = E$ para el conjunto total E, debido a que $E \subseteq a(E)$.

Ejemplo 2.1. Si $E = \mathbb{N}$, $A \subseteq E$ y $a(A)$ es el conjunto de los números naturales que son múltiplos de algún elemento de A, es inmediato comprobar que a es un operador pseudoclausura en E. Nótese que $a(\{1\}) = \mathbb{N} = E$.

La pseudoclausura esta asociada a un proceso de ampliación conjuntista, pues puede ser aplicada reiteradamente a un conjunto A y esta reiteración da lugar a una ampliación de A: $A \subseteq a(A) \subseteq a^2(A) \subseteq \ldots \subseteq a^n(A)$. Esto significa que podemos seguir el proceso paso a paso, cosa que no es posible con el operador clausura clásico de la topología pues este es idempotente, $a(A) = a^2(A)$.

Definición 2.2. Sea (E, a) un espacio pretopológico y $A \subseteq E$. Dado un entero positivo n, se define $a^n(A)$ como la *n-ésima pseudoclausura de* A, que se obtiene iterando n veces el operador a, es decir, a^n es la composición $a.a.a...a$, n-veces. Para completar definimos $a^0(A) = A$, es decir, $a^0 = I$ es el operador identidad de $\mathcal{P}(E)$.

Por tanto, cada vez que iteramos el operador pseudoclausura alcanzamos nuevos elementos que están más y más “distantes”de A.

Ejemplo 2.2. Sea E el conjunto de nodos de un grafo no dirigido dado y sea la aplicación a aquella que a cada nodo lo lleva en él y sus vecinos, es decir,

$$a(A) = \{A\} \cup \{N(A)\}.$$

Se comprueba fácilmente que esta aplicación cumple las condiciones de pseudoclausura, por lo que tenemos ya definido el espacio pretopológico (E, a).
Vamos a particularizarlo para el conjunto de nodos del grafo no dirigido siguiente, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

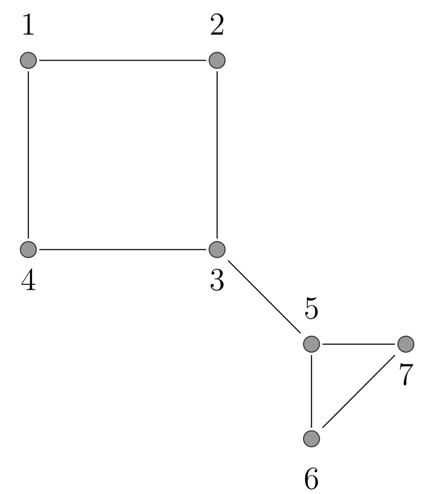


Figura 2.1: Nodos que forman el conjunto E de mi espacio pretopológico

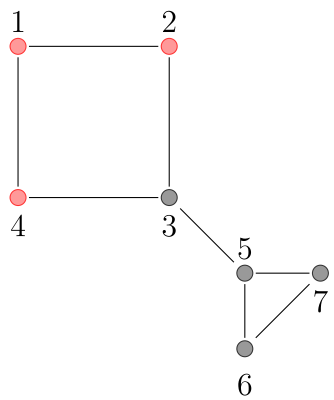
Veamos como funciona la aplicación $a : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$.

$\{x\}$	$a(\{x\})$
$\{1\}$	$\{1, 2, 4\}$
$\{2\}$	$\{1, 2, 3\}$
$\{3\}$	$\{2, 3, 4, 5\}$
$\{4\}$	$\{1, 3, 4\}$
$\{5\}$	$\{3, 5, 6, 7\}$
$\{6\}$	$\{5, 6, 7\}$
$\{7\}$	$\{5, 6, 7\}$

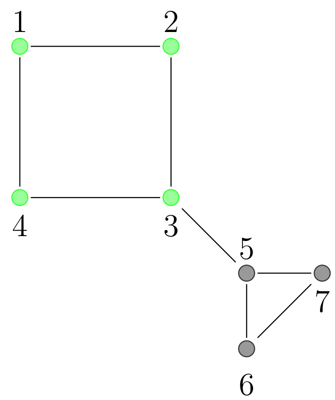
Tabla 2.1: Operador a para los conjuntos unitarios de E

Además, cuando tenemos un conjunto de nodos la definimos de la siguiente forma: $a(\{1, 2, 3\}) = a(1) \cup a(2) \cup a(3) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

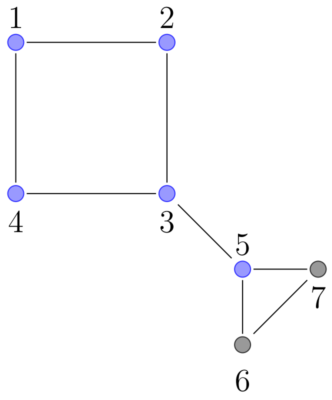
Vamos a aplicar ahora el operador a reiteradamente a un conjunto A para probar que aquí no se tiene la idempotencia, $a(a(A)) \neq a(A)$. De hecho veremos que $A \subseteq a(A) \subseteq a^2(A) \subseteq a^3(A) \subseteq a^4(A)$. Tomemos $A = \{1\} \subseteq E$.
$a^2(A) = a(a(A)) = a(\{1, 2, 4\}) = a(1) \cup a(2) \cup a(4) = \{1, 2, 3, 4, \} \neq a(A)$.
$a^3(A) = a(a(a(A))) = a(\{1, 2, 3, 4\}) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \neq a^2(A)$
$a^4(A) = a(a(a(a(A)))) = a(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \neq a^3(A)$
Ahora bien, si calculamos $a^5(A)$ obtenemos que $a^4(A) = a^5(A)$. La pseudoclausura se ha estabilizado, ya no se expande más.
Se verifica: $A \subset a(A) \subset a^2(A) \subset a^3(A) \subset a^4(A)$



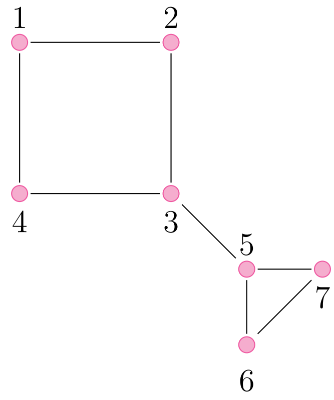
$a(A)$



$a(a(A))$



$a(a(a(A)))$



$a(a(a(a(A))))$

Conjuntamente, este proceso de expansión se puede mostrar como sigue, entendiendo que a medida que aumenta la onda expansiva, aumenta el radio de las circunferencias que rodean a los nodos:

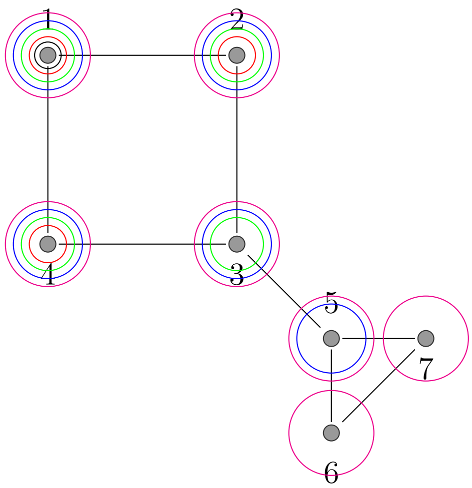


Figura 2.2: Proceso de expansión del operador a para $A = \{1\}$

Al igual que en topología, aquí también existe un análogo al concepto de interior, el pseudointerior.

Definición 2.3. Sea E un conjunto no vacío, se define el pseudointerior como la aplicación $i : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ verificando:

(1) $i(E) = E$

(2) $i(A) \subseteq A$, para todo $A \subset E$.

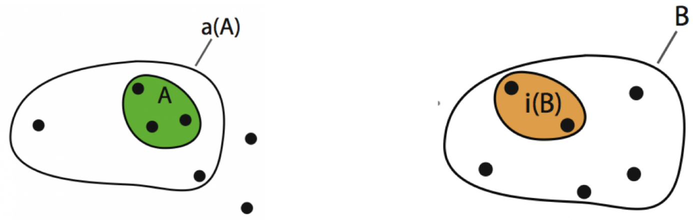


Figura 2.3: Operador pseudoclausura y operador pseudointerior

Nota 2.1. La notación usual para un espacio pretopológico sigue siendo (E, a) ya que a menudo consideramos i, a duales vía c: $i = c \circ a \circ c$, $a = c \circ i \circ c$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(E) \arrow[r, "a"] & \mathcal{P}(E) \arrow[d, "c"] \\
\mathcal{P}(E) \arrow[u, "c"] \arrow[r, "i"] & \mathcal{P}(E)
\end{tikzcd}$$

Usaremos la notación $c(A) = E - A = A^c$ para denotar el complementario de A. Así, además de las dos condiciones de la Definición 2.3, el pseudointerior cumplirá:

(3) $i(A) = c(a(c(A))) = E - a(E - A)$, para todo $A \subseteq E$.

En este caso, si tenemos la pseudoclausura tenemos el pseudointerior y viceversa, de ahí que se omita i.
Sin embargo, también es posible definir una aplicación pseudointerior independiente de la pseudoclausura (cumpliendo solo (1) y (2)), y en ese caso se denotará el espacio pretopológico con la terna (E, a, i). Al par (a, i) se le llama estructura pretopológica de E.

Ejemplo 2.3. Vamos a obtener el pseudointerior en el Ejemplo 2.2. Como no se especifica una aplicación i, a e i son duales vía el complementario, entonces tenemos: $a(A) = E - i(E - A)$, $i(A) = E - a(E - A)$
Tomemos la primera ecuación, y veamos las condiciones que sacamos para i con distintos conjuntos A.
$A = \{1\}$
$a(\{1\}) = \{1, 2, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - i(\{2, 3, 4, 5, 6, 7\})$
Por tanto, $i(\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}) = \{3, 5, 6, 7\}$
$A = \{1, 2, 4\}$
$a(\{1, 2, 4\}) = \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - i(\{3, 5, 6, 7\})$.
Por tanto $i(\{3, 5, 6, 7\}) = \{5, 6, 7\}$

Repitiendo esto mismo con otros conjuntos se obtiene:
$i(\{5,6,7\}) = \{6,7\}$
$i(\{6,7\}) = \emptyset$
$i(\{1,2,4,5,6,7\}) = \{1,6,7\}$
$i(\{1,3,4,5,6,7\}) = \{4,5,6,7\}$
$i(\{1,4,5,6,7\}) = \{6,7\}$

Se comprueba que con el pseudointerior lo que hacemos es aplicar la pseudoclausura a los vértices que no están y devolver el complementario, es decir, $i(A) = E - a(E - A)$.

A continuación damos un ejemplo en el que a e i son independientes.

Ejemplo 2.4. Sea el conjunto E y la aplicación a los definidos en el Ejemplo 2.2, y definimos ahora para cualquier $A \subseteq E$, $i(A) = \begin{cases} \{min(A)\} & si \quad A \neq E \\ E & si \quad A = E \end{cases}$

Se comprueba fácilmente que esta aplicación cumple las dos condiciones de pseudointerior pues por definición $i(E) = E$ y al aplicar i a cualquier otro subconjunto este se hace más pequeño, por lo que $i(A) \subset A$. Sin embargo, no se cumple la dualidad con a, pues si se cumpliera $i(\{3,6,7\}) = \emptyset$, y según lo hemos definido $i(\{3,6,7\}) = \{3\}$. A pesar de ello, (E, i, a) es un espacio pretopológico pues tanto a como i cumplen las condiciones necesarias.

Observación 2.1. Al igual que la reiteración del operador a daba lugar a una ampliación de A, también podemos reiterar el operador i, y esto da lugar a una disminución de A.

Veamos esto en los dos ejemplos anteriores:

Ejemplo 2.5. (1) Sea (E, a) el espacio pretopológico considerado en el Ejemplo 2.2 y tomemos el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$. Aplicamos i:
$i(A) = E - a(E - A) = \{1,2,4\}$
$i^2(A) = i\{1,2,4\} = \{1\}$
$i^3(A) = i^2\{1,2,4\} = i\{1\} = \emptyset$.

(2) Sea (E, i, a) el espacio pretopológico del Ejemplo 2.4 y consideramos $A = \{3,4,5,7\}$. Aplicando i obtenemos:
$i(A) = \{3\}$
$i^2(A) = i(\{3\}) = \{3\}$
Aquí no se ve tan bien este proceso de disminución de A porque por la definición de i conseguimos el conjunto más pequeño posible con una iteración.

Observación 2.2. Aunque hemos mostrado un ejemplo, es muy poco usual trabajar con espacios pretopológicos (E, i, a). En lo siguiente, si no se especifica lo contrario, consideraremos siempre espacios pretopológicos de la forma (E, a), es decir, con i-a duales vía el complementario.

2.1.1. Conjuntos a-cerrados

El proceso de ampliación generado por la iteración del operador pseudoclausura se detiene en un momento dado, y al igual, la evolución que produce la iteración del pseudointerior también cesa. A continuación definimos los conceptos de conjunto a-cerrado y a-abierto en un espacio pretopológico.

Definición 2.4. Sea (E, a) un espacio pretopológico y $A \in \mathcal{P}(E)$. El conjunto A se dirá *a-cerrado* si $A = a(A)$.

Nótese que los conjuntos $\emptyset$ y E son conjuntos a-cerrados.

Ejemplo 2.6. (i) Sea $E =$\{profesores y alumnos de una universidad\}, en el cual puede haber profesores que sean simultáneamente alumnos y profesores.
Sea, para cada conjunto $A \subseteq E$,

$$a(A) = \{A\} \cup \{x \in E \,|\, x \,\text{es alumno de algún profesor de}\, A\}.$$

Por la definición de a, es inmediato comprobar que es un operador pseudoclausura en E. Estudiemos los conjuntos a-cerrados:

- Si $x \in E$ es un alumno:
  - Si x no es a su vez profesor, entonces $a(x) = \{x\}$. Los conjuntos unitarios de alumnos no profesores son a-cerrados.
  - Si x es a su vez profesor, entonces $a(x) = \{x\} \cup$ \{alumnos de x\}. Aquí $a(a(x)) = a(x)$ si los alumnos de x no son a su vez profesores, o sí lo son pero sus alumnos ya están entre los alumnos de x.
- Si $x \in E$ es un profesor:
  - Si entre los alumnos de x no hay ninguno que sea a su vez profesor, entonces $a(x)=$ $\{x\} \cup$\{alumnos de x\} y se cumple que $a(x)$ es a-cerrado.
  - Si entre los alumnos de x hay alguno que sea a su vez profesor, entonces $a(x) = \{x\} \cup$\{alumnos de x\} y $a(a(x)) = a(x) \cup$\{alumnos de los alumnos de x\}. En este caso $a(a(x)) = a(x)$ si los alumnos de los alumnos de x son ya alumnos de x.

En resumen:

- x es a-cerrado si x es alumno no profesor.
- $a(x)$ es a-cerrado si los alumnos de x no son a su vez profesores o sí lo son pero sus alumnos son ya alumnos de x. Es decir, $a(x)$ es a-cerrado si y solo si contiene a todos los alumnos de todos los profesores de A.

Ejemplo 2.7. Sea $E = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leqslant x \leqslant 100\}$. Para cada conjunto $A \subseteq E$ definimos $a(A) = A \cup \{k(A)\}$, donde $k(A) = Card(A)$ es el cardinal de A si $A \neq \emptyset$ y $a(\emptyset) = \emptyset$.
Claramente a es un operador pseudoclausura en E. Es fácil comprobar que en general, un conjunto $A \neq \emptyset$ es a-cerrado si y solo si $k(A) \in A$.

El siguiente resultado de la teoría de conjuntos finitos parcialmente ordenados se utilizará en la demostración del Teorema 2.1.

Lema 2.1. Sea H un conjunto finito parcialmente ordenado. Entonces cada sucesión monótona $\{x_n\}$ en H es eventualmente constante, es decir, existe un entero positivo n_0 tal que para cada $n \geqslant n_0$, $x_n = x_{n_0}$.

Demostración. Supongamos que la sucesión $\{x_n\}$ es monótona creciente, $x_n \leq x_{n+1}$, y denotemos con $\leqq$ el orden parcial en $H = \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$. Sea N el conjunto de los números naturales y para cada i con $1 \leq i \leq s$, sea $N_i = \{n \in N : x_n = e_i\}$. Entonces tenemos $N = N_1 \cup N_2 \cup N \ldots \cup N_S$ y como N es un conjunto infinito, existe un i_0 tal que N_{i_0} es un conjunto infinito. Sea n_0 el primer elemento de N_{i_0} y probemos que si $n \in N$ y $n \geq n_0$, entonces $x_n = x_{n_0}$. En efecto dado $n \geq n_0$, puesto que N_{i_0} es infinito existe un elemento m en N_{i_0} tal que $m \geq n$. Tenemos así que $n_0 \leq n \leq m$ y por lo tanto $x_{n_0} \leq x_n \leq x_m$ porque la sucesión $\{x_n\}$ es monótona creciente. Finalmente como n_0 y m están en N_{i_0}, resulta que $x_m = x_{n_0}$ y en consecuencia $x_n = x_{n_0}$.

A continuación enunciamos un teorema que permite relacionar los conjuntos a-cerrados y la iteración del operador a en un espacio pretopológico (E, a) donde E es un conjunto finito.

Teorema 2.1. Sea (E, a) un espacio pretopológico con E un conjunto finito, entonces para cada subconjunto A de E existe un entero positivo k tal que $a^k(A)$ es un conjunto a-cerrado.

Demostración. Consideremos sobre $\mathcal{P}(E)$ la relación de orden parcial dada por la inlcusión. Para un conjunto A en $\mathcal{P}(E)$, sea $\{A_n, n \geq 1\}$ la sucesión dada por $A_n = a^n(A)$. Esta sucesión es monótona no decreciente ya que para cada $n \geq 1$, $a^n(A) \subseteq a(a^n(A))) = a^{n+1}(A)$. Luego, por el Lema 2.1, existe un entero $n_0 \geq 0$ tal que $a^{n_0}(A) = a^{n_0+1}(A)$, y así $a^{n_0}(A)$ es un conjunto a-cerrado.

Nota 2.2. Análogo al concepto de conjuntos a-cerrado, un conjunto $A \in \mathcal{P}(E)$ se dirá a-abierto si y solo si $A = i(A)$.

Nótese que los conjuntos $\emptyset$ y E son conjuntos a-abiertos. De hecho, al igua que en los espacios topológicos, siempre que tengamos un espacio pretopológico (E, a), los conjuntos a-abiertos son precisamente el complementario de los conjuntos a-cerrados:

Proposición 2.1. Sea (E, a) un espacio pretopológico, entonces A es a-abierto si y solo si $E - A$ es a-cerrado.

Demostración. Se demuestra fácilmente usando $i(A) = E - a(E - A)$.

$$\begin{aligned} A \text{ es } a\text{-abierto} &\Longleftrightarrow i(A) = A \\ &\Longleftrightarrow E - a(E - A) = A \\ &\Longleftrightarrow a(E - A) = E - A \\ &\Longleftrightarrow E - A \text{ es } a\text{-cerrado.} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.8. Sea E el conjunto de nodos del grafo siguiente:

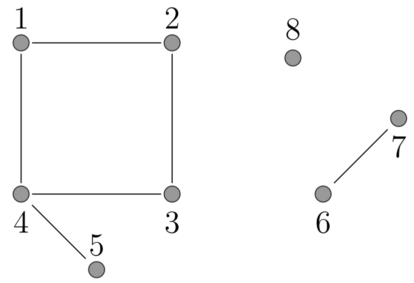


Figura 2.4: Nodos que forman el conjunto E de mi espacio pretopológico

Consideramos como aplicación pseudoclausura la definida en el Ejemplo 2.2, $a(A) = A \cup N(A)$, para $A \subseteq E$.
Veamos cuales son los conjuntos a-abiertos de este espacio. Recordemos que $i(A) = E - a(E - A)$, es decir, el pseudointerior de $A \subseteq E$ será el conjunto de nodos no accesibles del complementario. Entonces:

- Si $card(A) = 1$, $A = \{x\}$
  $$i(A) = \begin{cases} \emptyset & si \quad x \text{ está conectado a algún otro nodo} \\ \\ A & si \qquad x \text{ es un vértice aislado} \end{cases}$$

- Si $card(A) \geq 2$, $i(A) = A$ si y solo si ninguno de los nodos de A está conectado con nodos de $E - A$.

Se comprueba que los conjuntos a-abiertos de este espacio pretopológico son $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{6, 7\}$, $C = \{8\}$

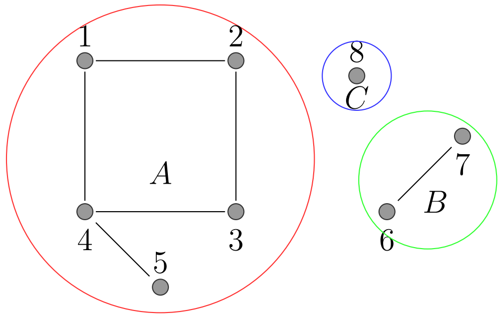


Figura 2.5: Conjuntos a-abiertos de mi espacio pretopológico

Y efectivamente, se verifica que $E - A$, $E - B$, $E - C$ son conjuntos a-cerrados de (E, a).

De manera más general, se concluye con el siguiente resultado:

Proposición 2.2. Sea (E, a) un espacio pretopológico donde E es el conjunto de nodos de un grafo G no dirigido y a la aplicación que a cada nodo le asigna él mismo y sus vecinos. Entonces, los conjuntos a-abiertos de (E, a) se corresponden con nodos de las uniones de componentes conexas del grafo G. Lo mismo ocurre con los conjuntos a-cerrados de (E, a).

Demostración. Sin pérdida de generalidad nos restringimos al caso de una componente conexa.
Supongamos que tenemos el conjunto A formado por todos los nodos de una componente conexa de G. Probemos que A es un conjunto a-abierto recordando que $i(A) = E - a(E - A)$. Al aplicarle la pseudoclausura a $E - A$ este conjunto se queda igual, pues ningúno de sus nodos está conectado con ninguno de A por ser este último una componente conexa de G. Concluimos así que $i(A) = A$, por tanto A es a-abierto.

Recíprocamente, supongamos ahora que A es a-abierto. Tenemos entonces que $i(A) = E - a(E - A) = A$, lo que implica que $a(E - A) = E - A$, es decir, $E - A$ es a-cerrado. Esto quiere decir que el conjunto de nodos de $E - A$ no tiene vecinos en A, por tanto A es una componente conexa.
Usando que A es a-abierto si y solo si $E - A$ es a-cerrado, obtenemos que los conjuntos a-cerrados de (E, a) se corresponden con nodos de las uniones de componentes conexas.

Nota 2.3. Si consideramos el espacio pretopológico (E, a) donde E es el conjunto de nodos de un grafo G dirigido, la proposición anterior no es cierta en general. A continuación damos un contraejemplo para mostrarlo.

Ejemplo 2.9. Consideremos (E, a) donde E viene dado por el conjunto de nodos del grafo dirigido siguiente y $a(A) = A \cup N(A)$, para cualquier $A \subseteq E$. Entendemos por $N(A)$ el conjunto formado por los $y \in E$ que cumplen que existe el arco (x, y) para algún $x \in A$.

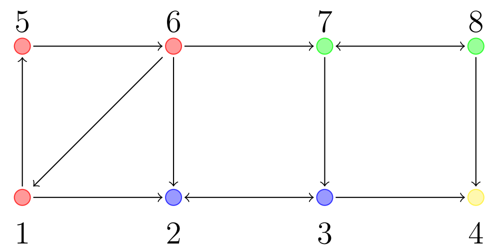


Figura 2.6: Nodos que forman el conjunto E de mi espacio pretopológico

Ya vimos en el Capítulo 1 que los distintos colores reflejan las diferentes componentes fuertemente conexas.
Se comprueba que, por ejemplo, para $A = \{1, 5\}$, $\mathcal{F}(A) \neq \{1, 5, 6\}$. De hecho, $\mathcal{F}(A) = E$, que no coincide con el conjunto de nodos de la componente fuertemente conexa de A.
Esto era de esperar pues que un nodo x no pertenezca a la componente fuertemente conexa de otro nodo y se debe a que no existe un camino de x a y y otro de y a x, pero sí puede existir solo uno de ellos, y este es el que me haría que $x \in a(\{y\})$, aun no perteneciendo a su componente. En este ejemplo, 2 no pertenece a la componente fuertemente conexa de A porque, por ejemplo, no existe un camino de 2 a 1. Sin embargo sí existe uno de 1 a 2, y este me basta para ampliar $a(A)$ fuera de la componente.

2.1.2. a-clausura

Análogamnete a lo que ocurre con espacios topológicos, vamos a definir el concepto de clausura para espacios pretopológicos.
Primero se establece una condición necesaria y suficiente sobre los conjuntos a-cerrados para garantizar la existencia de la a-clausura.

Teorema 2.2. En un espacio pretopológico (E, a) las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) La intersección de cualquier familia de conjuntos a-cerrados en E es un conjunto a-cerrado en E.

(2) Para cada conjunto $A \subseteq E$ existe un único conjunto a-cerrado, denotado por $\mathcal{F}(A)$, conteniendo a A y que está contenido en cada conjunto a-cerrado de A, es decir, el menor a-cerrado conteniendo a A existe y es único.

Demostración. Asumimos (1) y sea $A \subseteq E$ y δ_A la familia de todos los conjuntos a-cerrados en E que contienen a A. Como $A \subseteq E$ y E es un conjunto a-cerrado, δ_A es un conjunto no vacío. Entonces, si definimos $\mathcal{F}(A)$ como la intersección de todos los conjuntos de δ_A resulta por (1) que $\mathcal{F}(A)$ es un conjunto a-cerrado tal que $A \subseteq \mathcal{F}(A)$ y, por definición, $\mathcal{F}(A)$ está contenido en cada conjunto a-cerrado que contiene a A. Además esta construcción nos da la unicidad de $\mathcal{F}$(A).

Recíprocamente, supongamos que se verifica(2) y sea δ una familia de conjuntos a-cerrados en E. Denotamos por H al conjunto intersección de todos los conjuntos de δ y debemos probar que H es un conjunto a-cerrado. Para ello consideremos $\mathcal{F}(H)$, el menor a-cerrado conteniendo a H. Entonces, por definición $H \subseteq \mathcal{F}(H)$ y además, como cada X de δ es a-cerrado y contiene a H, resulta que $\mathcal{F}(H) \subseteq X$ para cada X de δ, y en consecuencia, $\mathcal{F}(H)$ está contenido en la intersección de los conjuntos de δ, que es H. Así, como tenemos $H \subseteq \mathcal{F}(H)$ y $\mathcal{F}(H) \subseteq H$, $H = \mathcal{F}(H)$ y por lo tanto, por definición de $\mathcal{F}(H)$ es un conjunto a-cerrado.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, damos ahora una definición de la a-clausura.

Definición 2.5. Sea (E, a) un espacio pretopológico, la *a-clausura o a-cierre* de $A \in P(E)$, si existe, es el menor subconjunto a-cerrado conteniendo a A. Se denota por $\mathcal{F}(A)$.

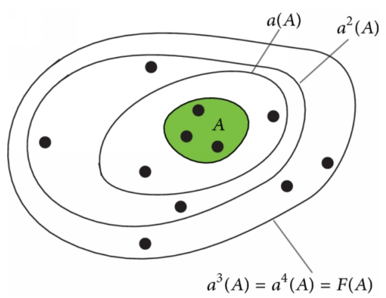


Figura 2.7: a-clausura de un conjunto A

Ejemplo 2.10. Consideramos de nuevo el Ejemplo 2.2 . Para cualquier subconjunto $A \subseteq E$, a se estabiliza cuando a^n alcanza todos los nodos de la componente conexa que lo contiene. Por ejemplo, tomando $A = \{1\}$, vamos a calcular la a-clausura de A. Se comprobó que la pseudoclausura se estabilizaba en $a^4(A)$, por tanto $a^4(A)$ es a-cerrado. Como este es, además, el menor a-cerrado que contiene a A, tenemos que $\mathcal{F}(A) = a^4(A)$.
Dado que nuestro grafo solo tiene una componente conexa, solo existe un a-cerrado en nuestro espacio pretopológico, que es el total:

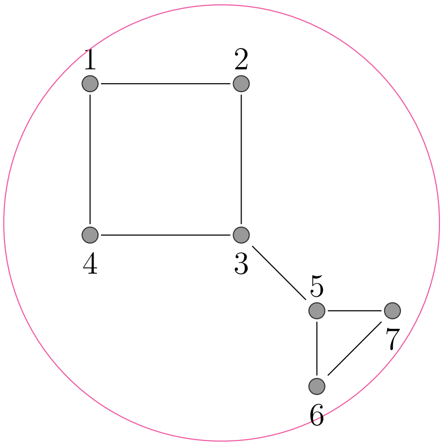


Figura 2.8: a-clausura para $A = \{1\}$

Ejemplo 2.11. Volvamos al Ejemplo 2.7 en el que $E = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq 100\}$ y $a(A) = A \cup \{k(A)\}$ si $A \subseteq E$ y $A \neq \emptyset$, donde $k(A)$ es el cardinal de A.
Si consideramos $A = \{3, 5\}$, $D = \{3, 4, 5\}$ y $G = \{2, 3, 5\}$, entonces, D y G son conjuntos a-cerrados tales que su intersección $D \cap G = A$ no es un conjunto a-cerrado. En ese caso, el Teorema 2.2 nos dice que la a-clausura no es la intersección de los conjuntos a-cerrados en A, y además no tenemos garantizada su existencia. Pero, ¿cuáles son los conjuntos a-cerrados conteniendo a A?. Cualquier conjunto de la forma $\{3, 5, x\}$ con $x \in E$ es a-cerrado pues $3 \in \{3, 5, x\}$ independientemente de quién sea x. Observemos que todos estos conjuntos a-cerrados no son comparables entre sí, es decir, los conjuntos a-cerrados no tienen por qué estar bien ordenados.

A diferencia de lo que ocurre en un espacio topológico, la a-clausura en espacios pretopológicos no es siempre la intersección de todos los conjuntos a-cerrados, pero incluso en tal caso, no tenemos seguridad de que exista.

Nota 2.4. Al igual que hemos definido $\mathcal{F}(A)$, para el pseudointerior existe el concepto de *a-apertura de A*, denotado por $\mathcal{O}(A)$, que se define como el mayor subconjunto a-abierto contenido en A. Tampoco tenemos garantizada la existencia de $\mathcal{O}(A)$ en un espacio pretopológico general. Existe una versión dual del Teorema 2.2 que nos asegura su existencia si y solo si la unión de cualquier familia de conjuntos a-abiertos en E es un conjunto a-abierto en E.

Ejemplo 2.12. (1) Tomamos el Ejemplo 2.7 de nuevo y vemos que, al igual que pasaba con los conjuntos a-cerrados, los conjuntos a-abiertos tampoco son comparables entre sí. Por ejemplo:
$A = E - \{2, 4, 100\}$ y $B = E - \{3, 4, 99\}$ son conjuntos a-abiertos, pues $i(A) = A$ e $i(B) = B$, contenidos en $E = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq x \leq 100\}$, pero no sabemos cuál es mayor. No podemos hablar, por tanto, de $\mathcal{O}(A)$.

(2) Calculemos ahora $\mathcal{O}(A)$ en el Ejemplo 2.2. Tomando el conjunto de nodos $A = \{1, 2, 4, 6, 7\}$ obtenemos $\mathcal{O}(A) = \emptyset$.
$i(A) = \{1\}$
$i^2(A) = \emptyset$
De hecho, en este ejemplo, para cualquiera que sea A, $\mathcal{O}(A) = \emptyset$.

(3) Obtengamos ahora $\mathcal{O}(A)$ en el espacio pretopológico (E, i, a) que se define en el Ejemplo 2.4. Nos damos cuenta que la aplicación i es idempotente, por tanto $\mathcal{O}(A) = i(A)$, y tenemos así que $\mathcal{O}(A) = \{min(A)\}$.

2.1.3. Conjuntos a-cerrados minimales y conjuntos a-cerrados elementales

En esta sección se definen dos tipos de conjuntos a-cerrados de gran interés.

Definición 2.6. Sea (E, a) un espacio pretopológico, un conjunto a-cerrado $A \subseteq E$ es *minimal* si el único subconjunto a-cerrado no vacío contenido en A es el propio A, es decir, si $B \subseteq A$ es un conjunto a-cerrado y $B \neq \emptyset$, entonces $B = A$.
Se denota por $\mathcal{F}_m(E, a)$ o $\mathcal{F}_m$ al conjunto de a-cerrados minimales de E.

Definición 2.7. Sea (E, a) un espacio pretopológico donde está definida la a-clausura de cada subconjunto de E. Un conjunto $A \subseteq E$ es un *conjunto a-cerrado elemental* si A es la a-clausura de un conjunto unitario z con $z \in E$. Se denota por $\mathcal{F}_z$. El conjunto de conjuntos a-cerrados elementales de E, denotado por $\mathcal{F}_{el}(E, a)$ o $\mathcal{F}_{el}$, es $\mathcal{F}_{el} = \{\mathcal{F}_z, z \in E\}$.

A continuación se obtienen los conjuntos a-cerrados minimales y elementales para distintos espacios pretopológicos.

Ejemplo 2.13. (1) Consideramos el espacio pretopológico definido en el Ejemplo 2.1, en el que $E = \mathbb{N}$ y para todo $A \subseteq E$, $a(A)$ me devuelve el conjunto de elementos de E que son múltiplos de algún elemento de A. Entonces a es un operador pseudoclausura en E que cumple que $a(A \cup B) = a(A) \cup a(B)$ y que $a^2 = a$. De aquí se deduce que para cada $A \subseteq E$, $a(A) = \mathcal{F}(A)$. Si $p, q \in E$, la inlcusión $a(\{p \cdot q\}) \subseteq a(\{p\})$ implica que no hay conjuntos a-cerrados minimales. Los a-cerrados elementales serían todos los $a(\{x\})$ con $x \in \mathbb{N}$.

(2) Sea E un conjunto de personas que pueden tener eventualmente un parentesco familiar, y sea, para todo $A \subseteq E$, $a(A) = \{A\} \cup \{$conjunto de personas de E que son ascendentes de alguna persona de $A\}$. En este caso, los conjuntos a-cerrados minimales serán los de la forma $a(\{z\})$ con $z \in E$ cabeza de familia, es decir, z no tiene ascendentes, y así $a(\{z\}) = \{z\} = \mathcal{F}(z)$.

Nota 2.5. Los a-cerrados minimales no son más que elementos de $\mathcal{F}_{el}$ mínimos en el sentido de la inclusión.

Ejemplo 2.14. Sea $E = \{x, y, z, t, u\}$ y el operador pseudoclausura definido según se indica en las siguientes tablas:

A	$a(A)$
$\emptyset$	$\emptyset$
$\{x\}$	$\{x\}$
$\{y\}$	$\{y, z\}$
$\{z\}$	$\{y, z\}$
$\{t\}$	$\{t\}$
$\{u\}$	E
$\{x, y\}$	$\{x, y, z, t\}$
$\{x, z\}$	$\{x, y, z, t\}$
$\{x, t\}$	$\{x, t\}$
$\{x, u\}$	E
$\{z, t\}$	$\{x, y, z, t\}$
$\{y, t\}$	$\{x, y, z, t\}$
$\{y, z\}$	$\{y, z\}$
$\{y, u\}$	E
$\{z, u\}$	E
$\{t, u\}$	E

A	$a(A)$
$\{x, y, z\}$	$\{x, y, z, t\}$
$\{y, z, t\}$	$\{x, y, z, t\}$
$\{x, z, t\}$	E
$\{x, y, t\}$	$\{x, y, z, t\}$
$\{x, y, u\}$	E
$\{x, z, u\}$	E
$\{x, t, u\}$	E
$\{y, z, u\}$	E
$\{y, t, u\}$	E
$\{z, t, u\}$	E
$\{x, y, z, t\}$	$\{x, y, z, t\}$
$\{x, y, z, u\}$	E
$\{x, y, t, u\}$	E
$\{x, z, t, u\}$	E
$\{y, z, t, u\}$	E
E	E

Tabla 2.2: Operador pseudoclausura para $A \subseteq E$

Se demuestra fácilmente que:

$$\mathcal{F}_{el} = \{\{x\}, \{y, z\}, \{x, t\}, E\}$$

$$\mathcal{F}_m = \{\{x\}, \{y, z\}\}$$

Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.3. Cada conjunto a-cerrado minimal es elemental

Demostración. Si $A \subseteq E$ es un conjunto a-cerrado minimal y $z \in A$, entonces $\{z\} \subseteq A$. Para las a-clausuras tenemos que $\mathcal{F}(z) \subseteq \mathcal{F}(A)$ y siendo A minimal, dado que $\mathcal{F}(z)$ es a-cerrado y no vacío, y que $z \in \mathcal{F}(z)$, se deduce que $\mathcal{F}(z) = A$.

La implicación contraria no es cierta en general. A continuación damos un contraejemplo.

Ejemplo 2.15. Sea (E, a) el espacio pretopológico definido en el Ejemplo 2.6, y consideremos $A = \{p\} \cup \{\text{alumnos de } p\}$ donde ninguno de los alumnos de p es a su vez profesor. Entonces, este conjunto no es un a-cerrado minimal pues, por ejemplo, $\{\text{alumnos de } p\}$ es a-cerrado y está contenido en A. Pero, $\mathcal{F}(p) = \{p\} \cup \{\text{alumnos de } p\} = A$, y de esto se sigue que A sí es a-cerrado elemental.

A continuación se da una proposición sobre los conjuntos a-cerrados elementales. La demostración se omite por ser inmediata.

Proposición 2.4. La familia $\mathcal{F}_{el}(E, a)$ es tal que si $\mathcal{F}_x \cap \mathcal{F}_y \neq \emptyset$, entonces para cualquier $z \in \mathcal{F}_x \cap \mathcal{F}_y$, tenemos que $\mathcal{F}_z \subset \mathcal{F}_x \cap \mathcal{F}_y$.

Observación 2.3. Por la proposición anterior se puede decir que para dos elementos distintos de E, $\mathcal{F}_x$ y $\mathcal{F}_y$ verifican uno de los siguientes casos:

- $\mathcal{F}_x \cap \mathcal{F}_y = \emptyset$.
- $\mathcal{F}_x \subset \mathcal{F}_y$ o $\mathcal{F}_y \subset \mathcal{F}_x$.
- $\mathcal{F}_x \cap \mathcal{F}_y \neq \emptyset$, y entonces existe un $z \in \mathcal{F}_x \cap \mathcal{F}_y$ tal que $\mathcal{F}_z \subset \mathcal{F}_x \cap \mathcal{F}_y$

El algoritmo que permite calcular la familia de a-cerrados elementales de un espacio pretopológico es el siguiente:

---

a-cerrados elementales
Variables:
E: espacio pretopológico
$\mathcal{F}_{el}$: familia de conjuntos
$\mathcal{F}$= conjunto
Considero $\mathcal{F}_{el} = \emptyset$
    Para todo $\{x\} \in E$ **hago**
        $F_x = a(\{x\})$
        Mientras $a(F_x) \neq F_x$ **hago**
            $F_x = a(F_x)$
        cuando lo tenga
        $\mathcal{F}_{el} = \mathcal{F}_{el} \cup \{F_x\}$
    Fin
    Devuelvo $\mathcal{F}_{el}$
Fin

Para determinar los conjuntos a-cerrados minimales bastaría con extraer de los elementos de $\mathcal{F}_{el}$ aquellos que son minimales en el sentido de la inclusión.

2.2. Tipos de espacios pretopológicos

Un espacio pretopológico general tiene poco interés pues es difícil de analizar, ya que por ejemplo, como hemos visto ya, la a-clausura no tiene porqué existir. Las investigaciones en pretopología nos permiten definir diferentes tipos de espacios pretopológicos, obtenidos agregando una propiedad suplementaria a las dos propiedades fundamentales de la función pseudoclausura.

2.2.1. Espacios pretopológicos de tipo $\mathcal{V}$

Entre todos los espacios pretopológicos existentes que veremos, los de tipo $\mathcal{V}$ poseen un gran interés ya que son los más generales depués de los espacios pretopológicos básicos.

Definición 2.8. Sea (E, a) un espacio pretopológico, diremos que es un *espacio pretopológico de tipo* $\mathcal{V}$ si para todo A, B, con $A, B \subseteq E$ y $A \subseteq B$ se cumple que $a(A) \subseteq a(B)$. Esto es equivalente a decir que a es isótona, es decir, a respeta la inclusión de conjuntos.

Nota 2.6. En un $\mathcal{V}$-espacio el pseudointerior cumple que para todo A, B, con $A \subseteq E, B \subseteq E$ y $A \subset B$, $i(A) \subseteq i(B)$.

Además, estos espacios poseen importantes propiedades.

Teorema 2.3. Sea (E, a) un espacio pretopológico de tipo $\mathcal{V}$, entonces la intersección de cualquier familia de conjuntos a-cerrados en E es un conjunto a-cerrado en E.

Demostración. Sea δ una familia de conjuntos a-cerrados en E y sea H la intersección de los conjuntos de δ, probemos que H es a-cerrado. Para cada X en δ, $H \subseteq X$ y por lo tanto $a(H) \subseteq a(X) = X$ ya que a es isótona y X es a-cerrado. Tenemos entonces que $a(H) \subseteq X$ para cada X de δ, y en consecuencia $a(H) \subseteq H$. Como la inclusión contraria siempre es cierta por la definición de pseudoclausura, se concluye que $a(H) = H$, es decir, H es un conjunto a-cerrado.

Ejemplo 2.16. (1) Retomemos el Ejemplo 2.7 en el cual $E = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq 100\}$ y, si $A \subseteq E$ con $A \neq \emptyset$, $a(A) = A \cup \{k(A)\}$, siendo $k(A)$ el cardinal de A. Es fácil ver que (E, a) no es un $\mathcal{V}$-espacio pues a no es isótona ya que, por ejemplo:
$\{3, 4\} \subseteq \{3, 4, 5\}$ pero $a(\{3, 4\}) = \{3, 4, 2\} \nsubseteq a\{3, 4, 5\} = \{3, 4, 5\}$.
En ese caso, no podemos asegurar que el teorema anterior se cumpla. De hecho, en el Ejemplo 2.8 se tiene el contraejemplo.

(2) Consideremos ahora un $\mathcal{V}$-espacio, y veamos que se cumple que la intersección de conjuntos a-cerrados en E es un conjunto a-cerrado en E.
Sea E el conjunto de nodos del grafo dirigido siguiente:

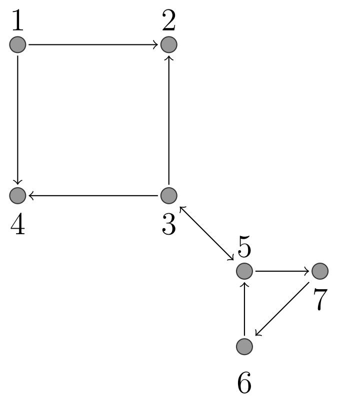


Figura 2.9: Nodos que formas el conjunto E de mi espacio pretopológico

Y sea la aplicación a aquella que a cada nodo lo lleva en él y sus vecinos, es decir, en él mismo y aquellos con los que está conectado, $a(A) = A \cup N(A)$.
$a(\{1\})$=$\{1,2,4\}$ y $a^2(\{1\}) = \{1, 2, 4\}$, por tanto $\{1,2,4\}$ es un a-cerrado.

$a(\{2\}) = \{2\}$ y $a(\{4\}) = \{4\}$, por tanto $\{2\}$ y $\{4\}$ son a-cerrados.
$a(\{3\})$=$\{2,3,4,5\}$, $a^2(\{3\})$=$\{2,3,4,5,7\}$, $a^3(\{3\})$=$\{2,3,4,5,6,7\}$ y $a^4(\{3\}) = a^3(\{3\})$, por tanto $\{2,3,4,5,6,7\}$ es a-cerrado.
$a^3(\{6\})$=$\{2,3,4,5,6,7\}$=$a^3(\{7\})$ es a-cerrado.
Se comprueba que $\{1,2,4\}\cap\{2,3,4,5,6,7\}$=$\{2,4\}$ es también a-cerrado.

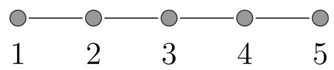
Observación 2.4. Si (E, a) es un $\mathcal{V}$-espacio, por el Teorema 2.2 tenemos garantizada la existencia de la a-clausura. Al igual, está garantizada la existencia de la a-apertura.

Teorema 2.4. Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio pretopológico y $A \subseteq E$. Si existe un entero $n \geq 0$ tal que $a^n(A)$ es un conjunto a-cerrado, entonces $a^n(A) = \mathcal{F}(A)$.

Demostración. En primer lugar, para cada entero $m \geq 0$, $A \subseteq a^m(A)$. En segundo lugar, si $B \subseteq E$ es un conjunto a-cerrado y $A \subseteq B$, entonces puesto que a es isótona, resulta también que a^n lo es, y en consecuencia $a^n(A) \subseteq a^n(B) = B$, donde $a^n(B) = B$ porque B es a-cerrado.

Observación 2.5. El resultado anterior junto con la conclusión del Teorema 2.1 sirve para calcular la a-clausura de cualquier subconjunto de un $\mathcal{V}$-espacio pretopológico finito. Más aún, si (E, a) es un $\mathcal{V}$-espacio con n elementos y $A \subseteq E$ es un subconjunto con p elementos, entonces $a^{n-p}(A)$ es un conjunto a-cerrado y coincide con la a-clausura de A. Este $n - p$ es una cota superior, es decir, se tiene asegurada la existencia de un $k \leq n - p$ tal que $a^k(A) = \mathcal{F}(A)$. Esto se debe a que $n - p$ es justamente el número de elementos de E que quedan fuera de A, y aunque pudiera llegar al total antes, en el peor de los casos necesitaría $n - p$ pasos.

Ejemplo 2.17. Consideremos el espacio pretopológico (E, a) donde $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ es el conjunto de nodos del grafo que se muestra y $a(A) = \{A\} \cup N(A)$.



Aquí estamos en un caso en el que $k = n - p$, el peor de los casos. El conjunto E tiene 5 elementos y tomemos, por ejemplo, $A = \{2, 3\}$, es decir, $n = 5$ y $p = 2$. Calculemos $\mathcal{F}(A)$:
$a(A) = \{1, 2, 3\}$
$a^2(A) = \{1, 2, 3, 4\}$
$a^3(a) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$a^4(A) = a^3(A)$
Por tanto, $a^3(A) = \mathcal{F}(A)$ y se cumple que $n - p = 3$, que han sido las iteraciones que he necesitado para conseguir el conjunto total.

El lema siguiente nos da las propiedades fundamentales de la a-clausura.

Lema 2.2. Sea (E, a) un espacio pretopológico de tipo $\mathcal{V}$, se cumple:

(a) Si $A \subseteq B$ entonces $\mathcal{F}(A) \subseteq \mathcal{F}(B)$

(b) $a(A) \subseteq \mathcal{F}(A)$.

(c) $A = a(A)$ si y solo si $A = \mathcal{F}(A)$.

Demostración. (a) Si $A \subseteq B$ entonces $A \subseteq \mathcal{F}(B)$, así que $\mathcal{F}(B)$ es un conjunto a-cerrado conteniendo a A, y por tanto, también contiene a $\mathcal{F}(A)$.

(b) Como $A \subseteq \mathcal{F}(A)$, usando que se cumple que a es isótona conseguimos que $a(A) \subseteq a(\mathcal{F}(A)) = \mathcal{F}(A)$, por ser $\mathcal{F}(A)$ a-cerrado.

(c) Supongamos $A = a(A)$. Entonces A es un conjunto a-cerrado conteniendo a A, y por tanto $\mathcal{F}(A) \subseteq A$. Como siempre tenemos que $A \subseteq \mathcal{F}(A)$, se sigue que $A = \mathcal{F}(A)$. Por el contrario, es suficiente ver (usando (b)) que $A \subseteq a(A) \subseteq \mathcal{F}(A)$, por tanto, si $A = \mathcal{F}(A)$ tendremos que $A = a(A)$.

A continuación, damos una caracterización de los conjuntos a-cerrados minimales en estos espacios.

Teorema 2.5. Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio. Entonces un conjunto $A \subseteq E$ es un a-cerrado minimal si y solo si para todo $x \in A$, $\mathcal{F}(x) = A$.

Demostración. Como tenemos un espacio de tipo $\mathcal{V}$, a es isótona y, como hemos visto, tenemos definida $\mathcal{F}(A)$ para todo $A \subseteq E$. Entonces, si A es un a-cerrado minimal y $x \in A$, tenemos $\{x\} \subseteq A$ y por lo tanto $\mathcal{F}(x) \subseteq \mathcal{F}(A) = A$. Además, como A es minimal y $\mathcal{F}(x) \neq \emptyset$, resulta que $\mathcal{F}(x) = A$.

Recíprocamente si para cada $x \in A$, $\mathcal{F}(x) = A$, entonces A es a-cerrado. Veamos que A es minimal:
Sea $B \neq \emptyset$ un conjunto a-cerrado y con $B \subseteq A$. Si tomamos un elemento $z_0 \in B$, entonces $\mathcal{F}(z_0) \subseteq B \subseteq A$, y siendo z_0 un elemento de A la hipótesis implica que $\mathcal{F}(z_0) = A$. Así concluimos que $A = B$.

Además, en estos espacio pretopológicos, al igual que en los espacios topológicos, se puede definir la noción de familia de a-entornos.

Definición 2.9. Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio pretopológico, $N \subset E$ es un *a-entorno* de $x \in E$ si $x \in i(N)$. La *familia de a-entornos de un punto* es el conjunto. $\mathcal{N}(x) = \{N \subset E / x \in i(N)\}$, para todo $x \in E$.

El siguiente lema establece una relación importante entre el concepto de a-entorno y el operador pseudoclausura.

Lema 2.3. En cualquier espacio pretopológico (E, a) de tipo $\mathcal{V}$ se tiene que $y \in a(x)$ si y solo si x está en cada uno de los a-entornos de y.

Demostración. Consideramos $y \in a(x)$ y N cualquier a-entorno de y. Entonces $y \in i(N) = (a(N^c))^c$, por tanto $y \notin a(N^c)$. Entonces, $a(x) \not\subseteq a(N^c)$, y por ser a isótona, $x \not\subseteq N^c$. Por tanto $x \notin N^c$, luego $x \in N$. Tenemos ya que x está en todo a-entorno de y.

Recíprocamente, supongamos $y \notin a(x)$. Entonces $y \in (a(x))^c = ((i(x^c))^c)^c = i(x^c)$, así que x^c es un a-entorno de y que no contiene a x. Por tanto, x no está en ningún a-entorno de y.

Ejemplo 2.18. Vamos a comprobar el lema anterior en el Ejemplo 2.2 para $y = 1$. Calculamos la familia de a-entornos de 1, $\mathcal{N}(1) = \{N \subset E | 1 \in i(N)\}$. Nos damos cuenta de que lo que necesito es que $1 \notin a(N^c)$, por tanto $\{1, 2, 4\}$ siempre estará contenido en los a-entornos de 1. Debería cumplirse entonces, por el lema, que $1 \in a(\{1\})$, $1 \in a(\{2\})$ y $1 \in a(\{4\})$, lo cual es cierto.

Sin embargo, en un espacio pretopológico (E, i, a), el Lema 2.3 no se verifica. A continuación se da un contraejemplo.

Ejemplo 2.19. Tomamos el espacio pretopológico dado en el Ejemplo 2.4. Calculemos la familia de a-entornos para $x = 3$.
$\mathcal{N}(3) = \{N \subset E | 3 \in i(N)\} = \{N \subset E | i(N) = \{3\}\}$, por la definición de la aplicación pseudointerior. Que $i(N) = \{3\}$, implica que $3 \in N$, $2 \notin N$ y $1 \notin N$. Sin embargo, se puede comprobar que $3 \in a(\{2\})$ y por tanto el lema no se cumple.

Usando el Lema 2.3 es posible definir las aplicaciones pseudoclausura y pseudointerior a partir de la familia de a-entornos.

Proposición 2.5. Sea $\mathcal{N}(x)$ la familia de a-entornos de un punto, se definen:

$$a(A) = \{x \in E \,|\, \forall N \in \mathcal{N}(x), N \cap A \neq \emptyset\}$$
$$i(A) = \{x \in E \,|\, \forall N \in \mathcal{N}(x), N \subseteq A\}$$

Debe entenderse que el concepto de a-entorno puede definirse en espacios pretopológicos generales, aunque con menos propiedades.

Proposición 2.6. En los espacios pretopológicos de tipo $\mathcal{V}$, el conjunto de a-entornos de todo punto es un prefiltro.

Demostración. Para demostrar que $\mathcal{N}(x)$ es un prefiltro tenemos que ver:

- $\emptyset \notin \mathcal{N}(x)$ ya que ningún x cumple $x \in i(\emptyset) = \emptyset$.
- Para todo $V \in \mathcal{N}(x)$ y para todo $W \subset E$, con $V \subset W$, veamos que $W \in \mathcal{N}(x)$. Como $V \in \mathcal{N}(x)$, tenemos que $x \in i(N)$. Además, como $V \subset W$ y estamos en un $\mathcal{V}$-espacio (i es isótona), llegamos a que $i(V) \subset i(W)$, y por tanto $x \in i(W)$.

2.2.2. Espacios pretopológicos de tipo $\mathcal{V}_\mathcal{D}$

Son también conocidos como espacios clausura, y se definen como sigue.

Definición 2.10. Sea (E, a) un espacio pretopológico, diremos que es un *espacio pretopológico de tipo* $\mathcal{V}_D$ si para todo A, B, con $A \subseteq E$, $B \subseteq E$ se tiene que $a(A \cup B) = a(A) \cup a(B)$. Esto es equivalente a decir que a es aditiva.

Nota 2.7. Análogamente, en un $\mathcal{V}_\mathcal{D}$-espacio el pseudointerior cumple que para todo A, B, con $A \subseteq E$, $B \subseteq E$, $i(A \cap B) = i(A) \cap i(B)$.

Algunas propiedades importantes son las siguientes:

Proposición 2.7. Sea (E, a) un espacio pretopológico de tipo $\mathcal{V}_D$, se cumple:

(a) Si $A \subseteq B$ entonces $a(A) \subseteq a(B)$. Igualmente, si $A \subseteq B$ entonces $i(A) \subseteq i(B)$. Es decir, los $\mathcal{V}_D$-espacios son $\mathcal{V}$-espacios.

(b) $a(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} a(A_i)$.

(c) Los conjuntos a-abiertos en un espacio de tipo V_D satisfacen:

   (1) Si A y B son a-abiertos entonces $A \cap B$ también lo es.

   (2) Si A_i es a-abierto para todo $i \in I$ entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ también lo es.

Demostración. (a) Como $A \subseteq A \cup B$, entonces $a(A) \subseteq a(A \cup B) = a(A) \cup a(B) = a(B)$ por ser un $\mathcal{V}_D$-espacio.

(b) Como $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_i$, entonces se tiene por ser a isótona.

(c) (1) Tenemos que $i(A) = A$ e $i(B) = B$, entonces $i(A \cap B) = i(A) \cap i(B) = A \bigcap B$, por la Nota 2.7.

   (2) Por ser $\mathcal{V}$-espacios y tener $A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ para todo $i \in I$, entonces se tiene $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq i(\bigcup_{i\in I} A_i)$.
   Para la otra inclusión se tiene: $i(\bigcup_{i\in I} A_i) = E - a(E - \bigcup_{i\in I} A_i) = E - a(\bigcap_{i\in I}(E - A_i)) \subseteq E - \bigcap_{i\in I} a(E - A_i)$ por (b). Como los A_i son a-abiertos por hipótesis, $E - A_i$ son a-cerrados, entonces $E - \bigcap_{i\in I} a(E - A_i) = E - \bigcap_{i\in I}(E - A_i) = E - (E - \bigcup A_i)$. Ya se tendría.

En estos espacios también se puede asegurar la existencia de la a-clausura, pues como hemos visto son espacios de tipo $\mathcal{V}$. Se tiene la siguiente propiedad.

Proposición 2.8. En cualquier espacio (E, a) de tipo V_D el operador clausura verifica $\mathcal{F}(A \cup B) = \mathcal{F}(A) \cup \mathcal{F}(B)$.

Demostración. En $\mathcal{V}$-espacios vimos que si $A \subseteq B$ entonces $\mathcal{F}(A) \subseteq \mathcal{F}(B)$, entonces $\mathcal{F}(A) \cup \mathcal{F}(B) \subseteq \mathcal{F}(A \cup B)$, por lo que solo necesitamos probar la inclusión contraria. Como $\mathcal{F}(A)$ es a-cerrado para todo $A \subset E$, $\mathcal{F}(A)$ y $\mathcal{F}(B)$ son a-cerrados, por lo que su unión es a-cerrado también. Por tanto $\mathcal{F}(A) \cup \mathcal{F}(B)$ es un conjunto a-cerrado conteniendo a $A \cup B$, y entonces contiene a $\mathcal{F}(A \cup B)$.

Además, estos espacios son una generalización de los espacios topológicos.

Proposición 2.9. Sea (E, a) un espacio pretopológio de tipo V_D, entonces (E, a) es un espacio topológico si y solo si la aplicación a es idempotente, es decir, $a(A) = \mathcal{F}(A)$ si y solo si $a(a(A)) = a(A)$.

Demostración. Supongamos primero que $a(A) = \mathcal{F}(A)$. Entonces, $a(a(A)) = a(\mathcal{F}(A)) = \mathcal{F}(A) = a(A)$ (usando que $\mathcal{F}(A)$ es a-cerrado).

Recíprocamente, supongamos ahora $a(a(A)) = a(A)$. Entonces $a(A)$ es un conjunto a-cerrado conteniendo a A, y conteniendo también a $\mathcal{F}(A)$ por la definición de a-clausura. Por tanto lo contrario. Como siempre se tiene $a(A) \subseteq \mathcal{F}(A)$, concluimos que $a(A) = \mathcal{F}(A)$.

Por tanto, en un espacio de tipo V_D arbitrario, el operador pseudoclausura a no coincide necesariamente con la clausura $\mathcal{F}$, pero en el caso en que $a(A) = \mathcal{F}(A)$ podemos usar el operador a para, mediante complementario de los conjuntos a-cerrados, definir una colección de a-abiertos $\mathcal{T}$ y expresar el espacio (E, a) con el par $(E, \mathcal{T})$.

Al igual, en estos espacios también se define el concepto de a-entorno, y se establece la siguiente equivalencia.

Proposición 2.10. Sea (E, a) un espacio de tipo V_D. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) Cada punto en E tiene un a-entorno minimal, es decir, para cada $x \in E$ existe un conjunto $N_x \subseteq E$ tal que:

- N_x es un a-entorno de x.
- Toda a-entorno V de x contiene a N_x como subconjunto, es decir, si tengo otro a-entorno V de x, $N_x \subseteq V$.

(2) Para cada $A \subseteq E, a(A) = \bigcup_{x \in A} a(x)$.

Demostración. Primero asumimos la condición (1) (esto significa que (E, a) es un espacio de Alexandroff). Por ser a isótona, para cada $x \in A$ tenemos $a(x) \subseteq a(A)$, y entonces $\bigcup_{x \in A} a(x) \subseteq a(A)$.

Para la inclusión contraria, suponiendo $y \in a(A)$ debemos llegar a que $y \in a(x)$ para algún $x \in A$. Consideremos que no, entonces para cada $x \in A$ tenemos que $y \notin a(x)$. Se sigue inmediatamente del Lema 2.3 y de la definición de N_y que $x \in N_y \iff y \in a(x)$, por tanto, $x \notin N_y$. Entonces $N_y \subseteq A^c$, y por ser i isótona tenemos que $i(N_y) \subseteq i(A^c) = a(A)^c$. Como N_y es un a-entorno de y, $y \in i(N_y)$, por tanto $y \notin a(A)$, lo que contradice la suposición inicial. Se tiene $y \in a(x)$ para algún $x \in A$, por lo que se cumple (2).

Recíprocamente, supongamos (2), y sea $x \in E$. Sea $N_x = \bigcap\{N | x \in i(N)\}$. Se quiere probar que $x \in i(N_x)$. Supongamos que no, entonces $x \in a(N_x^c) = \bigcup_{y \in N_x^c} a(y)$ (por (2)). Por tanto, existe un elemento y tal que $y \in N_x^c$ y $x \in a(y)$. De la definición de N_x, la condición anterior significa que

$$y \in \cup\{N^c | x \in i(N)\}.$$

Por tanto, existe un a-entorno N de x tal que $y \in N^c$. De $x \in a(y)$ e $y \in N^c$ concluimos que $x \in a(N^c)$, lo que contradice la hipótesis de que N era un a-entorno de x. De aquí se sigue que $x \in i(N_x)$, por lo que N_x es el a-entorno minimal de x. Hemos llegado a (1).

Un tipo especial de $\mathcal{V}_D$-espacios son los espacios cuasi-discretos.

Definición 2.11. Un espacio (E, a) de tipo V_D se dice *cuasi-discreto* si satisface una (y por tanto ambas) de las condiciones equivalentes de la Proposición 2.9. Son, por tanto, $\mathcal{V}_S$-espacios.

2.2.3. Espacios pretopológicos de tipo $\mathcal{V}_S$

Estos serán los más fáciles de manejar y por ello los más utilizados, junto con los de tipo $\mathcal{V}$.

Definición 2.12. Sea (E, a) un espacio pretopológico, diremos que es un *espacio pretopológico de tipo* $\mathcal{V}_S$ si para todo A, con $A \subseteq E$, tenemos que $a(A) = \bigcup_{x \in A} a(x)$. Esto es equivalente a decir que a es completamente aditiva.

En estos espacios existe una caracterización de los conjuntos a-cerrados.

Teorema 2.6. Sea (E, a) un $\mathcal{V}_S$-espacio. Entonces un conjunto $A \subseteq E$ es a-cerrado si y solo si para todo $x \in A$, $a(\{x\}) \subseteq A$.

Demostración. Si (E, a) es un espacio de tipo $\mathcal{V}_S$, entonces a es completamente aditiva, es decir, para $A \subseteq E$ se tiene $a(A) = \bigcup_{x \in A} a(\{x\})$. Por lo tanto A es a-cerrado si y solo si $\bigcup_{x \in A} a(\{x\}) = A$, es decir, si $a(\{x\}) \subseteq A$ para cada $x \in A$.

A continuación establecemos una relación entre los distintos tipos de espacios pretopológicos vistos.

Proposición 2.11. Si (E, a) es un espacio pretopológico de tipo $\mathcal{V}_S$ entonces (E, a) es un espacio pretopológico de tipo $\mathcal{V}_D$.

Demostración. Se ve fácilmente que a completamente aditiva implica a aditiva, por tanto si (E, a) un espacio pretopológico de tipo $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$, es de tipo $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}$.

Nota 2.8. Además, ya vimos en la sección anterior que si (E, a) es un espacio pretopológico de tipo $\mathcal{V}_D$ entonces (E, a) es un espacio pretopológico de tipo $\mathcal{V}$.

$$\mathcal{V}_S \Longrightarrow \mathcal{V}_D \Longrightarrow \mathcal{V}$$

Una vez hecha esta distinción entre espacios pretopológicos se observa que el Ejemplo 2.2 que pusimos como ejemplo de espacio pretopológico general no era más que una caso concreto de espacio de tipo $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$.
A continuación se muestra un espacio pretopológico que no es de este tipo, y que además nos sirve para ejemplificar que las implicaciones contrarias entre los diferentes tipos de espacios no se cumplen.

Ejemplo 2.20. Tomemos $E = \mathbb{R}^2$ y a la aplicación que a cada conjunto $A \subseteq E$ le asigna su envolvente convexa.
Si consideramos los cinco puntos del plano especificados, entonces: $a(\{1\}) = \{1\}$
$a(\{2\}) = \{2\}$
$a(\{1, 2\})$= segmento de vértices 1 y 2.
Aquí ya vemos que este no es un espacio pretopológico de tipo $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$ pues $a(\{1, 2\}) \neq a(\{1\}) \cup a(\{2\}) = \{1, 2\}$
Además, no es de tipo $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}$, pues tampoco cumple la unión conjunto a conjunto.
$a(\{1, 2, 5\})$= triángulo de vértices 1, 2 y 5.
$a(\{3, 4, 5\})$= triángulo de vértices 3, 4 y 5.
$a(\{1, 2, 5\} \cup \{3, 4, 5\}) = a(\{1, 2, 3, 4, 5\})$= cuadrado de vértices 1, 2, 3 y 4.
Y entonces, $a(\{1, 2, 5\} \cup \{3, 4, 5\}) \neq a(\{1, 2, 5\}) \cup a(\{3, 5, 4\})$=unión de ambos triángulos.

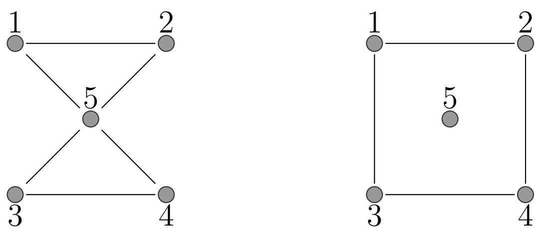


Figura 2.10: $a(A \cup B) \neq a(A) \cup a(B)$

Sí es un espacio pretopológico de tipo $\mathcal{V}$ pues cumple que $\forall A, B, A \subseteq E, B \subseteq E$ y $A \subset B$, $a(A) \subset a(B)$.

Sin embargo, encontramos una excepción.

Observación 2.6. Siempre se tiene que $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$-espacio implica $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}$-espacio, pero además la Proposición 2.7 nos da una condición para la implicación contraria. Si (E, a) es un espacio de Alexandroff se tiene que un espacio pretopológico es un $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}$-espacio si y solo si es un $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$-espacio.

2.3. Continuidad

Otro aspecto a tratar es cómo se define una función continua entre dos espacios pretopológicos. Haremos distincion entre este concepto y el de una función que preserva la pseudoclausura, y veremos cuándo ambos son equivalentes.

Definición 2.13. Sea $f : (E, a) \longrightarrow (F, a')$. Se dice que f *preserva la pseudoclausura* si para todo $A \subset E$ se cumple que $f(a(A)) \subseteq a'(f(A))$
Se dice que f es *continua* si para todo $B \subset F$ se cumple que $a(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(a'(B))$.

Ejemplo 2.21.

- Es obvio que la función identidad $i : (E, a) \longrightarrow (E, a)$ preserva la pseudoclausura y es continua pues $i(a(A)) = a(A) \subset a(A) = a(i(A))$

- Si consideramos $h = g(f)$, con $f : E \longrightarrow F$ y $g : E \longrightarrow F$ preservando la pseudoclausura y continuas, entonces h también lo es:

$$h(a(A)) = g(f(a(A))) \subseteq g(a'(f(A))) \subseteq a'(g(f(x))) = a'(h(x))$$

$$a(h^{-1}(B)) = a(f^{-1}(g^{-1}(B))) \subseteq f^{-1}(a'(g^{-1}(B))) \subseteq f^{-1}(g^{-1}(a'(B))) = h^{-1}(a'(B))$$

Teorema 2.7. Sean (E, a) y (F, a') dos conjuntos con pseudoclausuras arbitrarias y sea $f : E \longrightarrow F$. Entonces las siguientes condiciones para la continuidad son equivalentes:

(1) $a(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(a'(B))$ para todo $B \subset F$.

(2) $f^{-1}(i'(B)) \subseteq i(f^{-1}(B))$ para todo $B \subset F$.

(3) $B \in \mathcal{N}(f(x))$ implica que $f^{-1}(B) \in \mathcal{N}(x)$ para todo $B \subset F$ y para todo $x \in E$.

Demostración. En esta prueba usaremos repetidamente la igualdad $f^{-1}(U) = (f^{-1}(U^c))^c$ y la equivalencia entre $A \subseteq B$ y $B^c \subseteq A^c$. Demostremos primero que (1) implica (2) y viceversa.

$$\begin{aligned} f^{-1}(i'(B)) &= (f^{-1}(i'(B)^c))^c = (f^{-1}(a'(B^c)))^c \subseteq (a(f^{-1}(B^c)))^c \\ &= (a(f^{-1}(B)^c))^c = i(f^{-1}(B)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(f^{-1}(B)) &= ((a(f^{-1}(B)))^c)^c = (i(f^{-1}(B)^c))^c = (i(f^{-1}(B^c)))^c \\ &\subseteq (f^{-1}(i'(B^c)))^c = (f^{-1}(a'(B)^c))^c = f^{-1}(a'(B)). \end{aligned}$$

Por definición, tenemos:

$$\begin{aligned} i(f^{-1}(B)) &= \{x \in E \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{N}(x)\} \\ f^{-1}(i'(B)) &= \{x \in E \mid B \in \mathcal{N}(f(x))\} \end{aligned}$$

Por (2) f es continua si y solo si $x \in f^{-1}(i'(B))$ implica que $x \in i(f^{-1}(B))$ para todo $B \subset F$ y para todo $x \in E$. Usando las ecuaciones anteriores esto me lleva a la equivalencia con la condición (3).

Definición 2.14. Sean (E, a) y (F, a') dos conjuntos con pseudoclausuras arbitrarias. Entonces $f : E \longrightarrow F$ es continua en x si se cumple (3) del teorema anterior.

Una consecuencia inmediata del Teorema 2.7 es la relación siguiente, que ya nos es familiar, entre la continuidad local y global:

Corolario 2.1. Sean (E, a) y (F, a') dos conjuntos con pseudoclausuras arbitrarias. Entonces $f : E \longrightarrow F$ es continua si y solo si es continua en x para todo $x \in E$.

Teorema 2.8. Sean (E, a) y (F, a') dos espacios pretopológicos de tipo $\mathcal{V}$. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

(1) $f : E \longrightarrow F$ es continua

(2) $f : E \longrightarrow F$ preserva la pseudoclausura.

(3) $f(A) \subseteq B$ implica que $f(a(A)) \subseteq a'(B)$ para todo $A \subset E$ y para todo $B \subset F$.

En general, (3) implica que f es continua y preserva la pseudoclausura.

Demostración. Primero vamos a demostrar que (3) implica (1) y (2) suponiendo que a y a' son isótonas. Sea $A = f^{-1}(B)$ entonces $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, por lo que (3) implica que $f(a(f^{-1}(B))) \subseteq a'(B)$. Tenemos así que $a(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(f(a(f^{-1}(B)))) \subseteq f^{-1}(a'(B))$, es decir, f es continua.
Ahora vamos a suponer (3) y consideremos $B = f(A)$. Como $f(A) \subseteq f(A)$, concluimos que $f(a(A)) \subseteq a'(f(A))$, es decir, f preserva la pseudoclausura.
Supongamos ahora que f es continua y a isótona. Entonces,

$$f(A) \subseteq B \Longrightarrow A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(B)$$

$$\Longrightarrow a(A) \subseteq a(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(a'(B))$$

$$\Longrightarrow f(a(A)) \subseteq f(f^{-1}(a'(B))) \subseteq a'(B)$$

Si f reserva la pseudoclausura y a es isótona tenemos que $f(A) \subseteq B$ implica que $f(a(A)) \subseteq a'(f(A)) \subseteq a'(B)$, es decir, se satisface (3).

Por tanto, este teorema nos dice que si tenemos $\mathcal{V}$-espacios, $f : (E, a) \longrightarrow (F, a')$ es continua si $f(a(A)) \subseteq a'(f(A))$, para todo $A \subseteq E$.

2.4. Subconjuntos y subespacios pretopológicos

Sea (E, a) un espacio pretopológico y $A \subset E$ un subconjunto no vacío, se quiere dotar a A de una estructura de espacio pretopológico. Vamos a definir así el concepto de subespacio pretopológico inducido. La idea consiste en trasladar a A la noción de proximidad imponiendo la continuidad de la función Id de A a E.

2.4.1. Pretopología inducida

El concepto de subespacio inducido, como ya hemos dicho, está basado en la continuidad de la función Id de A a E. Se define un subespacio inducido de E como sigue:

Definición 2.15. Sea (E, a) un espacio pretopológico y $A \subset E$. Se define la *pseudoclausura inducida por a* en $B \subset A$ como $a_{|A}(B) = a(B) \cap A$. Es decir, al par $(A, a_{|A})$ se le llama *subespacio pretopológico inducido de* (E, a) si $a_{|A}$ es la estructura más fina que hace continua la función Id.

Ejemplo 2.22. Vamos a considerar $E = \mathbb{Z}^2$. Para cualquier $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ se define

$$\mathcal{B}(x, y) = \{(x-1, y), (x, y), (x+1, y), (x, y-1), (x, y+1)\}$$

Entonces, para todo $A \subset \mathbb{Z}^2$, $a(A) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \,|\mathcal{B}(x, y) \cap A \neq \emptyset\}$
Sea $F \subset \mathbb{Z}^2$, tendremos para todo $B \subset F$, $a_{|F}(B) = \{(x, y) \in F \,|\mathcal{B}(x, y) \cap B \neq \emptyset\}$
En el siguiente diagrama lo ilustramos.

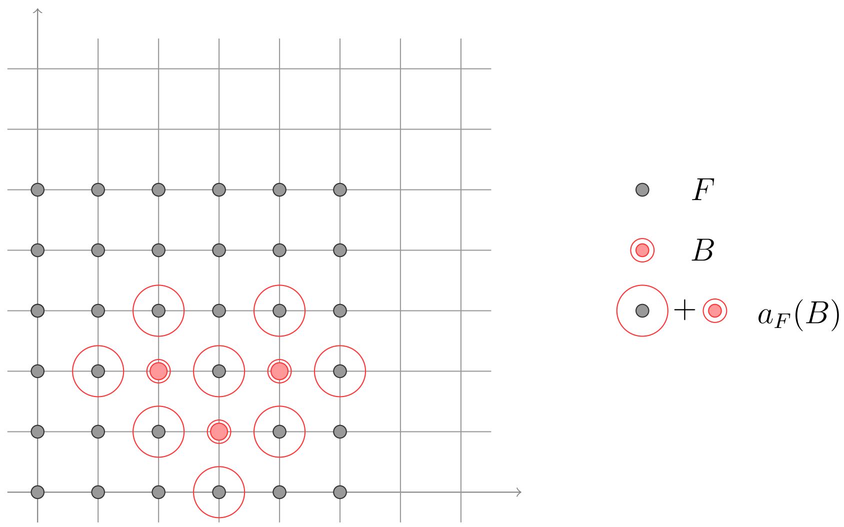


Figura 2.11: Espacio pretopológico inducido

Hemos definido así el subespacio pretopológico inducido $(F, a_{|F})$ del espacio pretopológico (E, a).

A continuación vemos algunas propiedades.

Proposición 2.12. Sea (E, a) un espacio pretopológico, $A \subset E$ y $a_{|A}$ la pseudo-clausura inducida por a en A. Entonces, para todo $B \subset A$ se tiene:

$$i_{|A}(B) = i(B \cup (E - A)) \cap A$$

Demostración. Obtenemos $i_{|A}(B) = (a_{|A}\,(B^c \cap A))^c \cap A$ por definición y usando la dualidad entre $a_{|A}$ e $i_{|A}$. Pero, $a_{|A}\,(B^c \cap A) = a(B^c \cap A) \cap A$, entonces $(a_{|A}(B^c \cap A))^c = (a(B^c \cap A))^c \cup A^c$.

$$(a(B^c \cap A))^c = i((B^c \cap A)^c) = i(B \cup A^c) = i(B \cup (E - A))$$

Así, $i_{|A}(B) = (i(B \cup (E - A)) \cup A^c) \cap A = i((B \cup (E - A)) \cap A)) \cap A$.

Proposición 2.13. Si (E, a) es un espacio pretopológico de tipo $\mathcal{V}$, entonces $(A, a_{|A})$ también lo es. Además, si $x \in A$, la familia de $a_{|A}$-entornos de x en A es $\mathcal{N}_{|A}(x) = \{V \cap A \,|\, V \in \mathcal{N}(x)\}$.

Demostración. Es trivial que $(A, a_{|A})$ es un espacio de tipo $\mathcal{V}$ por la definición de $a_{|A}$ y la isotonía de a.

Veamos ahora que $\mathcal{N}_{|A}(x) = \{V \cap A \,|V \in \mathcal{N}(x)\}$ para $x \in A$. Vamos a suponer que $W \in \mathcal{N}_{|A}(x)$, entonces $x \in i_{|A}(W)$ lo que implica que $x \in A$ y que $x \in i(W \cup (E - A))$. Si llamamos $W' = W \cup (E - A)$, obtenemos que $W' \in \mathcal{N}(x)$ y como $W = W' \cap A$, podemos decir que $W \in \{V \cap A \,|V \in \mathcal{N}(x)\}$.

Recíprocamente, vamos a demostrar que si $x \in A$ y $V \in \mathcal{N}(x)$, $V \cap A \in \mathcal{N}_{|A}(x)$, es decir, que $x \in i_{|A}(V \cap A)$.

$$\begin{aligned}
i_{|A}(V \cap A) &= i((V \cap A) \cup (E - A)) \cap A \\
&= i((V \cap A) \cup A^c) \cap A) \\
&= i((V \cup A^c) \cap (A \cup A^c)) \cap A \\
&= i((V \cup A^c) \cap E) \cap A \\
&= i(V \cup A^c) \cap A
\end{aligned}$$

Como $x \in i(V)$, $V \subset V \cup A^c$ y tengo un espacio pretopológico de tipo $\mathcal{V}$, se verifica también que $x \in i(V \cup A^c)$. Además, ya teníamos que $x \in A$, por tanto $x \in i_{|A}(V \cap A)$.

Nota 2.9. Al igual se tiene, por definición, que si (E, a) es un $\mathcal{V}_D$-espacio (resp. $\mathcal{V}_S$-espacio), $(A, a_{|A})$ también lo es.

Proposición 2.14. Sea (E, a) un espacio pretopológico de tipo $\mathcal{V}$, $A \subset E$ y $(A, a_{|A})$ la pretopología inducida en A. Entonces:

(1) Si K es un conjunto a-cerrado (respectivamente a-abierto) en E, entonces $K \cap A$ es un $a_{|A}$-cerrado (respectivamente $a_{|A}$-abierto) en A.

(2) Si (E, a) es un $\mathcal{V}_D$-espacio y $A \subset E$ un a-abierto en E, entonces:

- Cualquier $G \subset A$ que sea $a_{|A}$-abierto es a-abierto en E.
- Cualquier $K \subset A$ que sea $a_{|A}$-cerrado es tal que $K \cup (E - A)$ es a-cerrado en E.

(3) Si A es a-cerrado en E y K es $a_{|A}$-cerrado en A, entonces K es también a-cerrado en E.

Demostración. (1) Sea K un a-cerrado en E, es decir, $a(K) = K$. Se tiene:

$$a_{|A}(K \cap A) = a(K \cap A) \cap A \subset a(K) \cap a(A) \cap A = a(A) \cap K \cap A$$

por ser (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio. Entonces, $a_{|A}(K \cap A) \subset K \cap A$ lo que prueba que $K \cap A$ es $a_{|A}$-cerrado, pues la otra inclusión siempre se tiene, obteniendo así la igualdad $a_{|A}(K \cap A) = K \cap A$.

Si K es a-abierto en E, entonces $E - K$ es a-cerrado y $(E - K) \cap A$ es $a_{|A}$-cerrado. Se sigue entonces que $((E - K) \cap A)^c \cap A$ es $a_{|A}$-abierto, y se tiene

$$((E - K) \cap A)^c \cap A = (K \cup A^c) \cap A = K \cap A$$

por tanto, $K \cap A$ es un $a_{|A}$-abierto en A.

(2) Consideremos G un conjunto $a_{|A}$-abierto en A. Entonces $G = i_{|A}(G) = i(G \cup A^c) \cap A = i(G \cap A^c) \cap i(A)$, por ser A a-abierto. Además, como (E, a) es un espacio de tipo $\mathcal{V}_D$, $i_{|A}(G) = i((G \cup A^c) \cap A) = i(G \cap A) = i(G)$ pues $G \subset A$. Por otro lado, A es $a_{|A}$-abierto, por lo que $E - A$ es $a_{|A}$-cerrado y entonces $K \cup (E - A)$ es también a-cerrado pues (E, a) es de tipo $\mathcal{V}_D$.

(3) Sea K un conjunto $a_{|A}$-cerrado en A, tenemos $K = a_{|A}(K) = a(K) \cap A$. Como $K \subset A$, $a(K) \subset a(A)$ y al ser A un a-cerrado en E, podemos escribir $a(K) \subset A$. Entonces, $K = a(K) \cap A = a(K)$.

Proposición 2.15. Sea (E, a) espacio pretopológico y consideremos $A \subset E$ dotado con la pretopología inducida (de tipo $\mathcal{V}$). Si tenemos:

- $\mathcal{F} = \{H \subset E \,|\, a(H) = H\}$ la familia de a-cerrados en E.
- $\mathcal{F}_{|A} = \{H \subset A \,|\, H = A \cap K, K \in \mathcal{F}\}$ la familia de a-cerrados en E intersecados con A.
- $\mathcal{F}^0_{|A} = \{H \subset A \,|\, a_{|A}(H) = H\}$ la familia de $a_{|A}$-cerrados en A.
- $\mathcal{T}_{|A} = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{F}$ la familia de a-cerrados en E contenidos en A.

Entonces, se verifica $\mathcal{T}_{|A} \subset \mathcal{F}_{|A} \subset \mathcal{F}^0_{|A}$

Demostración. Sea $H \in \mathcal{T}_{|A}$, entonces $a(H) = H$ y $H = A \cap H$, por lo que $H \in \mathcal{F}_{|A}$.
Por la Proposición 2.14 (1), podemos decir que, si K es a-cerrado en E, contenido en A, K es $a_{|A}$-cerrado en A, por lo que $\mathcal{F}_{|A} \subset \mathcal{F}^0_{|A}$.

Generalmente estas tres familias de subconjuntos cerrados no son las mismas. Lo ilustramos con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.23. Sea $E = \{x, y, z, t\}$, $A = \{x, y\}$ y la pseudoclausura a en E la definida mediante la siguiente tabla.

A	$a(A)$
$\emptyset$	$\emptyset$
$\{x\}$	$\{x\}$
$\{y\}$	$\{y,z\}$
$\{z\}$	$\{y,z\}$
$\{t\}$	$\{t\}$

A	$a(A)$
$\{x,y\}$	$\{x,y,z\}$
$\{x,z\}$	$\{x,y,z\}$
$\{x,t\}$	E
$\{z,t\}$	E
$\{y,t\}$	E
$\{y,z\}$	$\{x,y,z\}$

A	$a(A)$
$\{x,y,z\}$	$\{x,y,z\}$
$\{y,z,t\}$	E
$\{x,z,t\}$	E
$\{x,y,t\}$	E
E	E

Tabla 2.3: Definición del operador pseudoclausura

Se verifica:
$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{x\}, \{t\}, \{x,y,z\}, E\}$
$\mathcal{F}_{|A} = \{\emptyset, \{x\}, A\}$
$\mathcal{F}^0_{|A} = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, A\}$
$\mathcal{T}_{|A} = \{\emptyset, \{x\}\}$
Tenemos, por tanto, $\mathcal{T}_{|A} \subset \mathcal{F}_{|A} \subset \mathcal{F}^0_{|A}$.
Además, este ejemplo también nos sirve para mostrar que, a diferencia de lo que ocurre en pretopología, en pretopología inducida la $a_{|A}$-clausura no se obtiene mediante la iteración del operador $a_{|A}$. De hecho, si miramos $\mathcal{F}(\{y\})$, nos damos cuenta que $\mathcal{F}(\{y\}) = \{x,y,z\}$, por lo que $\mathcal{F}(\{y\}) \cap A = \{x,y\}$, mientras que $\mathcal{F}_{|A}(\{y\}) = \{y\}$ pues $a_{|A}(\{y\}) = a(\{y\}) \cap A = \{y\}$. Por tanto, la intersección de la a-clausura con A no se obtiene a partir de la iteración de la pseudoclausura inducida. Esto era de esperar pues si reitero $a_{|A}$ hay elementos del conjunto total que no considero.

2.5. Conexión

La conectividad es un concepto interesante para modelar problemas en relación a la homogeneidad o la estructura de los elementos, un espacio conectado es aquel en el que es imposible aislar sus elementos. A diferencia de la topología, en pretopología existen diferentes tipos de conexión, que permiten establecer fuertes relaciones con la teoría de grafos.
A lo largo de la sección, consideraremos $\mathcal{V}$-espacios pretopológicos, para tener así garantizada la existencia de la a-clausura.

2.5.1. Tipos de conexiones

En pretopología distinguimos cinco tipos de conexiones. Antes de dar sus definiciones, hablaremos de la noción de camino en espacios pretopológicos.

Definición 2.16. Sea (E, a) un espacio pretopológico de tipo $\mathcal{V}$ y consideremos $A, B \subset E$. Se dice que existe un camino de A a B en (E, a) si se cumple que $B \subseteq \mathcal{F}(A)$.

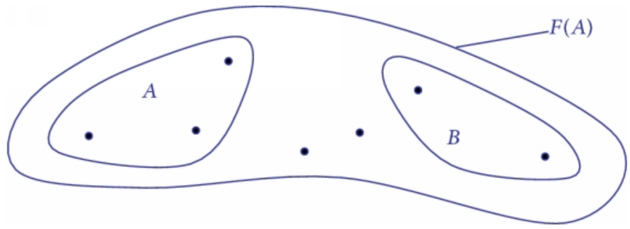


Figura 2.12: Camino de A a B

Definición 2.17. Sea (E, a) un espacio pretopológico de tipo $\mathcal{V}$, (E, a) es *fuertemente conexo* si y solo si para todo $A \subset E$ con $A \neq \emptyset$, $\mathcal{F}(A) = E$, es decir, el único conjunto distinto del vacío que es a-cerrado es el total.
Esta condición es equivalente a decir que (E, a) es fuertemente conexo si para todo $A, B \subseteq E$ existe un camino de A a B.

Definición 2.18. Sea (E, a) un espacio pretopológico de tipo $\mathcal{V}$, (E, a) es *unilateralmente conexo* si y solo si para todo $A \subseteq E$ con $A \neq \emptyset, \mathcal{F}(A) = E$ o para todo $B \subseteq E$ con $B \neq \emptyset$ y $B \subseteq E - \mathcal{F}(A)$ se cumple que $A \subseteq \mathcal{F}(B)$.
Esta condición es equivalente a pedir que para todo $A, B \subseteq E$ exista un camino de A a B o de B a A.

Nota 2.10. En este caso, los conjuntos a-cerrados están encajados, es decir, están ordenados por la relación de inclusión. Por la definición tengo que existe un camino de A a B, es decir, $B \subseteq \mathcal{F}(A)$, o existe un camino de B a A, $A \subseteq \mathcal{F}(B)$. Si considero A, B dos a-cerrados se tiene $B \subseteq \mathcal{F}(A) = A$ o $A \subseteq \mathcal{F}(B) = B$, por lo que A y B están encajados, $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.

Definición 2.19. Sea (E, a) un espacio pretopológico de tipo $\mathcal{V}$, (E, a) es *hiper conexo* si y solo si para todo $A \subseteq E$ con $A \neq \emptyset, \mathcal{F}(A) = E$ o $\exists B \subseteq E$ con $B \neq \emptyset$ y $B \subseteq E - \mathcal{F}(A)$ cumpliendo $A \subseteq \mathcal{F}(B)$.
Esto es equivalente a que para todo $A, B \subseteq E$ exista un camino de A a B o un camino de B a $E - \mathcal{F}(B)$, parte de E en la que se encuentra A.

Definición 2.20. Sea (E, a) un espacio pretopológico de tipo $\mathcal{V}$, (E, a) es *apo conexo* si y solo si para todo $A \subseteq E$ con $A \neq \emptyset, \mathcal{F}(A) = E$ o $\forall B \subset E$ con $B \neq \emptyset$ y $B \subset E - \mathcal{F}(A)$ se tiene que $\mathcal{F}(A) \cap \mathcal{F}(B) \neq \emptyset$.

Es decir, (E, a) es apo conexo si para todo $A, B \subseteq E$ existe un camino de A a B o existe $M \subseteq E$ de forma que encontramos un camino de M a A y un camino de M a B.

Definición 2.21. Sea (E, a) un espacio pretopológico de tipo $\mathcal{V}$, (E, a) es *conexo* si para todo $A, B \subseteq E$ con $A, B \neq \emptyset$, $\mathcal{F}(A) \neq \emptyset$ o $\mathcal{F}(E - \mathcal{F}(A)) \cap \mathcal{F}(A) \neq \emptyset$.
Esto es equivalente a pedir que para todo $A, B \subseteq E$, exista un camino de A a B o exista un $M \subseteq E$ de forma que encontremos un camino de M a B y de M a $E - \mathcal{F}(B)$, parte de E en la que se encuentra A.

Ejemplo 2.24.

- Analicemos la conexión en el Ejemplo 2.2. Es fácil ver que se cumple la condición $\forall A \subset E, A \neq \emptyset, \mathcal{F}(\mathcal{A}) = E$, pues la pseudoclausura no se estabiliza hasta que no se tienen todos los nodos. Por tanto, se tiene que nuestro espacio pretopológico presenta todos los tipos de conexiones definidos anteriormente.

- En el Ejemplo 2.8 ocurre al contrario, se comprueba que ese espacio pretopológico no presenta ningún tipo de conexión.

Observación 2.7. Si tenemos el espacio pretopológico (E, a) en el que E es el conjunto de nodos de un grafo G y a la aplicación $a(A) = \{A\} \cup N(A)$, siendo $N(A)$ los vecinos de A, entonces encontramos diferencias entre los distintos tipos de conexiones explicados cuando el grafo G es un grafo dirigido.

Ejemplo 2.25. Volvamos al Ejemplo 2.16(2). Con lo cálculos ya hechos en este ejemplo se ve fácilmente que las a-clausuras de los conjuntos unitarios son:
$\mathcal{F}(\{1\})$=\{1,2,4\}
$\mathcal{F}(\{2\})$=\{2\}
$\mathcal{F}(\{4\}$=\{4\}
$\mathcal{F}(\{3\}) = \mathcal{F}(\{5\}) = \mathcal{F}(\{6\}) = \mathcal{F}(\{7\})$=\{2,3,4,5,6,7\}
Además, $\mathcal{F}(\{x, y\}) = \mathcal{F}(\{x\}) \cup \mathcal{F}(\{y\})$, con $x, y \in E$.
Esto nos ayuda a analizar los distinto tipos de conexiones en el espacio pretopológico (E, a). Lo haremos usando las definiciones anteriores.

- Es conexo porque se cumple la condición $\mathcal{F}(E - \mathcal{F}(A)) \cap \mathcal{F}(A) \neq \emptyset$. Como $\mathcal{F}(\{3\}) = \mathcal{F}(\{5\}) = \mathcal{F}(\{6\}) = \mathcal{F}(\{7\}) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, para todo $A, B \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$ se cumplirá que existe un camino de A a B pues $B \subseteq \mathcal{F}(A)$, y lo mismo ocurrirá para los $A, B \in \{1, 2, 4\}$, y para aquellos que contengan a su vez elementos de $\{1, 2, 4\}$ y $\{3, 5, 6, 7\}$. Además, tomando A, B cualesquiera que no verifiquen lo anterior, seremos capaces de tomar $M \subseteq E$ con $B \subseteq \mathcal{F}(M)$ y $E - \mathcal{F}(B) \subseteq \mathcal{F}(M)$ simplemente haciendo que M contenga al menos un elemento de $\{1, 2, 4\}$ y otro de $\{3, 5, 6, 7\}$.

- No es fuertemente conexo pues, por ejemplo, $\mathcal{F}(\{1\})$=$\{$1,2,4$\}$$\neq E$. En este caso, para todo $B \nsubseteq \{1,2,4\}$, no existirá camino de B a $A = \{1\}$.

- No es unilateralmente conexo pues tomando $A = \{6\}$ y $B = \{1\}$, que verifican que $B \subset E - \mathcal{F}(A)$, no se cumple $\{6\} \subset \mathcal{F}(\{1\}) = \{1,2,4\}$, Otra forma de verlo sería comprobando que ni $\{6\} \subseteq \mathcal{F}(B)$ ni $\{1\} \subseteq \mathcal{F}(A)$.
  Se comprueba que los a-cerrados, que son $\{1,2,4\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{2,3,4,5,6,7\}$ (además del $\emptyset$ y E), no están encajados.

- Tampoco es hiper conexo porque no somos capaces de encontrar un B y un A que verifiquen la condición de unilateridad, por tanto no se cumplirá para todo $A, B \subseteq E$.

- Sí es apo conexo pues para todo $B \subset E$ verificando $B \subset E - \mathcal{F}(A)$ se tiene que $\mathcal{F}(A) \cap \mathcal{F}(B) \neq \emptyset$. Se ve fácilmente por tener $\mathcal{F}(\{3\}) = \mathcal{F}(\{5\}) = \mathcal{F}(\{6\}) = \mathcal{F}(\{7\}) = \{2,3,4,5,6,7\}$, $\mathcal{F}(\{1\}) = \{1,2,4\}$ y $\mathcal{F}(\{2\}) = \{2\}$ y $\mathcal{F}(\{4\}) = \{4\}$
  .

A continuación establecemos una serie de relaciones entre las distintas conexiones.

Proposición 2.16. Sea (E, a) un $\mathcal{V}$-espacio:

1. Si (E, a) es fuertemente conexo entonces es unilateralmente conexo.

2. Si (E, a) es unilateralmente conexo entonces es hiper conexo y apo conexo.

3. Si (E, a) es hiper conexo entonces es conexo.

4. Si (E, a) es apo conexo entonces es conexo.

En general, no existe relación entre la hiper conectividad y la apo conectividad.
Todo esto se resume en el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & & \boxed{\text{Hiper conexo}} \arrow[dr] & \\
\boxed{\text{Fuertemente conexo}} \arrow[r] & \boxed{\text{Unilateralmente conexo}} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \boxed{\text{Conexo}} \\
 & & \boxed{\text{Apo conexo}} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Demostración. (1) Trivial

(2) Trivial

(3) Supongamos que $\mathcal{F}(A) \neq E$ y existe un $B \subset E - \mathcal{F}(A)$ con $A \subset \mathcal{F}(B)$. Entonces, $A \subset \mathcal{F}(A) \subset \mathcal{F}(B) \subset \mathcal{F}(E - \mathcal{F}(A))$. Esto nos lleva al resultado.

(4) Supongamos que $\mathcal{F}(A) \neq E$ y que existe un B con $\mathcal{F}(A) \cap \mathcal{F}(B) \neq \emptyset$. Entonces $\mathcal{F}(E - \mathcal{F}(A))$, que contiene a $\mathcal{F}(B)$, no tiene intersección vacía con $\mathcal{F}(A)$.

Ejemplo 2.26. Consideremos el Ejemplo 2.1. Vamos a analizar la conexión de este espacio pretopológico. Ya vimos que cumplía que la pseudoclausura era idempotente, por tanto $a(A) = \mathcal{F}(A)$.

- No es unilateralmente conexo pues encontramos un $B = \{3\}$, verificando $\{3\} \subset E - a(\{2\})$ (tomando $A = \{2\}$), pero que no cumple que $\{2\} \subset a(\{3\})$.No encontramos un camino de A a B pues $\{3\} \nsubseteq \mathcal{F}(\{2\})$, ni un camino de B a A pues $\{2\} \nsubseteq \mathcal{F}(\{3\})$. De aquí se deduce que no es fuertemente conexo, por la Proposición 2.15, de hecho $a(\{2\}) \neq E$.

- Sí es hiper conexo, pues aunque no se verifique la condición de unilateralidad para todo $B \subset E$, si encontramos un B que la cumple, $B = \{1\}$. Tenemos entonces que es conexo por la Proposición 2.9.

- Sí es apo conexo. Si encomtramos un $M \subseteq E$ de forma que $B \subseteq \mathcal{F}(M)$ y $E - \mathcal{F}(B) \subseteq \mathcal{F}(M)$ para todo B ya lo tendríamos. Si elijo $M = \{1\}$ esto siempre se cumple pues $\mathcal{F}(1) = \mathbb{N} = E$.

Veamos, por último, como se define el concepto de conexión en subespaciosm-pretopológicos.

Definición 2.22. Sean (E, a) un espacio pretopológico de tipo $\mathcal{V}$ y $A \subset E$ con $A \neq \emptyset$. Entonces A es un *subespacio conexo* de (E, a) si $(A, a_{|A})$ es espacio pretopológico conexo.
$(A, a_{|A})$ será el *mayor subespacio conexo* de (E, a) si $(A, a_{|A})$ es un subespacio conexo de (E, a) y para todo B con $A \subset B \subset E$ y $A \neq B$, $(B, a_{|B})$ no es un subespacio conexo de (E, a).

Capítulo 3

Relaciones y pseudoclausuras

Hay diferentes formas de construir el operador pseudoclausura dependiendo de la finalidad para la que lo vaya a usar. La más usual en general por su gran número de aplicaciones es la que se define a partir de una o varias relaciones binarias en un conjunto. En esta sección se introducen los espacios pretopológicos de la forma (E, a_R), donde la pseudoclausura viene dada en términos de relaciones. En él se usarán algunos de los conceptos y resultados sobre relaciones que se dan en el Capítulo 1.

3.1. Pseudoclausura inducida por una relación

Hay distintas posibilidades a la hora de definir la pseudoclausura inducida por una relación R. Podemos hacerlo usando la pretopología de sucesores o la de predecesores, o incluso la pretopología sucesores-predecesores. A continuación damos la definición usando la pretopología de predecesores.

Definición 3.1. Sea R una relación en un conjunto E, se define la *pseudoclausura de predecesores inducida por la relación R en E o R-pseudoclausura* como la aplicación $a_R : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ dada por

$$a_R(A) = A \cup \mathcal{R}^{-1}(A), \text{ para cada } A \subseteq E.$$

Es claro que a_R es un operador de pseudoclausura en E, y tenemos así el espacio pretopológico de predecesores (E, a_R).

Nota 3.1. Usando la pretopología de sucesores tendríamos

$$a'_R(A) = A \cup \mathcal{R}(A)$$

Si la pseudoclausura es inducida por una relación R simétrica no habría diferencia entre considerar una u otra pretopología.

En el resto de la sección trabajaremos con la pretopología de predecesores, aunque los resultados se mantienen también para la pretopología de sucesores.

Observación 3.1. Si la relación R es reflexiva entonces $A \subseteq \mathcal{R}^{-1}(A)$ y recíprocamente. En este caso $a_R(A) = \mathcal{R}^{-1}(A)$.

Ejemplo 3.1. Sea E un conjunto en el cual hay un criterio de influencia entre sus elementos, entonces se puede definir una relación R de influencia en E, estableciendo que $(x, y) \in R$ si y solo si "x es influido por y "según el criterio previamente establecido.
Para $z \in E$, $a_R(\{z\})$ es el conjunto de elementos de E que son influidos por z, incluyendo a z. Se podría llamar a $a_R(\{z\})$ la *zona de influencia* de z, y establecer así mismo que un conjunto $A \subseteq E$ es *autoinfluenciable* si A contiene la zona de influencia de cada uno de sus elementos. Esto significa exactamente que A es un conjunto a_R-cerrado.
Este tipo de relaciones siempre es representable por multigrafos dirigidos.

Proposición 3.1. Dada R una relación en un conjunto E, el pseudointerior asociado a a_R es:

$$i_R(A) = \{x \in A \,|\, xRy \Longrightarrow y \in A\}$$

Por tanto, el R-pseudointerior lo forman aquellos elementos de A que no están relacionados con ningún elemento de $E - A$ mediante R.

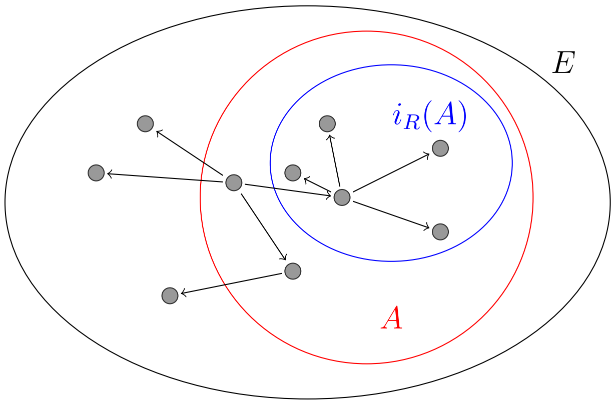


Figura 3.1: R-pseudointerior de A

Demostración. Se obtiene por la dualidad entre a_R e i_R vía el complementario:

$$i_R(A) = E - a_R(E - A) = (a_R(A^c))^c = (A^c \cup \{x \in E \,|\, \exists\, y \in A^c : xRy\})^c =$$
$$= A \cap (\{x \in E \,|\, \exists\, y \in A^c : xRy\})^c = A \cap \{x \in E \,|\, \forall\, y \in A^c : (x, y) \notin R\} =$$
$$= \{x \in A \,|\, \forall\, y \,(xRy \Longrightarrow y \in A)\}$$

Nota 3.2. El operador a_R es aditivo, es decir, $a_R(A \cup B) = a_R(A) \cup a_R(B)$ pues se cumple que $\mathcal{R}^{-1}(A \cup B) = \mathcal{R}^{-1}(A) \cup \mathcal{R}^{-1}(B)$ para $A, B \subseteq E$. Tenemos así que para cualquier relación R en un conjunto E, (E, a_R) es un espacio pretopológico de tipo $\mathcal{V}_D$. De hecho será de tipo $\mathcal{V}_S$, pues por la Observación 1.3, $\mathcal{R}^{-1}(A) = \cup\{\mathcal{R}^{-1}(x) : x \in A\}$, por lo que a_R es completamente aditiva.

Por tanto, los $\mathcal{V}_S$-espacios incluyen a aquellos en los que el operador pseudoclausura es inducido por una relación. Entonces, todos los resultados ciertos en los distintos tipos de espacios pretopológicos del capítulo anterior lo son también para un espacio pretopológico (E, a_R). Usaremos el Teoremas 2.5 para determinar los conjuntos a-cerrados minimales de un espacio (E, a_R) en el siguiente ejemplo. Cuando no haya lugar a confusión usaremos $\mathcal{F}_R = \mathcal{F}$.

Ejemplo 3.2. Los siguientes grafos representan la relación de influencia R de forma que xRy si hay una flecha desde y hacia x. Tenemos así tres espacios pretopológicos (E, a_R), siendo a_R la pseudoclausura inducida por la relación R especificada en cada caso.

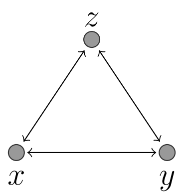


Figura 1

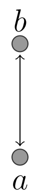


Figura 2

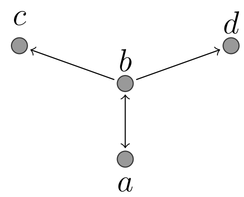


Figura 3

Los conjuntos $A = \{x, y, z\}$ de la Figura 1 y $B = \{a, b\}$ de la Figura 2 son conjuntos a_R-cerrados minimales pues $a_R(\{x\}) = \{x\} \cup \mathcal{R}^{-1}(x) = \{x, y, z\} = \mathcal{F}(\{x\}) = A$, y lo mismo cumplen y y z. Análogamente en la Figura 2, $a_R(\{a\}) = a_R(\{b\}) = \{a, b\} = B$.
Sin embargo, el conjunto $C = \{a, b, c, d\}$ de la Figura 3 es un conjunto a_R-cerrado que no es minimal pues, por ejemplo, $a_R(\{b\}) = \{b\} \cup \mathcal{R}^{-1}(\{b\}) = \{b, a\} = a_R^2(\{b\}) = \mathcal{F}(\{b\}) \neq C$.

A continuación, considerando E un conjunto finito, R una relación en E y $a_R = a$ la pseudoclausura inducida por R en E, vamos a dar una técnica para calcular los conjuntos a-cerrados minimales en (E, a). La ilustraremos con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3. Sea $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y R la relación que representamos a continuación en el producto $E \times E$, donde el eje horizontal $\overrightarrow{x}$ es el eje de las primeras coordenadas y el vertical $\overrightarrow{y}$ el de las segundas coordenadas.

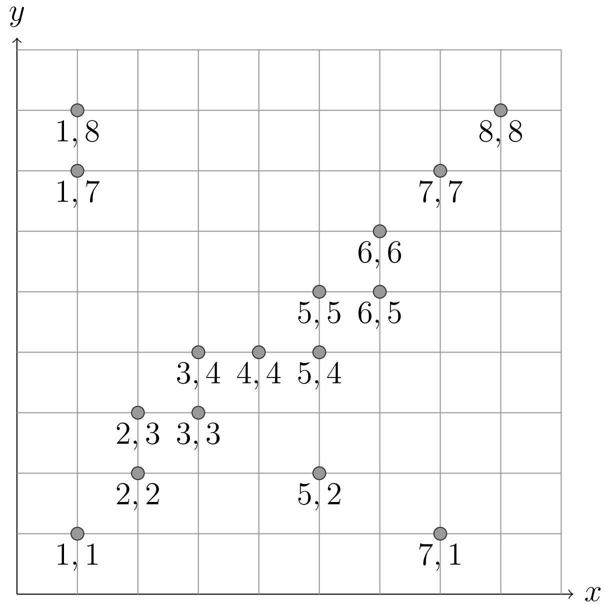


Figura 3.2: Pares (x, y) que pertenecen a la relación R

Para calcular $\mathcal{R}^{-1}(n)$ se localiza n en el eje vertical $\overrightarrow{y}$, se toma la semirrecta horizontal que pasa por n y se proyecta sobre el eje $\overrightarrow{x}$. El conjunto de puntos obtenidos de la proyección sobre $\overrightarrow{x}$ es $\mathcal{R}^{-1}(n)$. Como $a_R(\{n\}) = \{n\} \cup \mathcal{R}^{-1}(n)$, entonces hemos calculado $a_R(\{n\})$ para cada $n \in E$.

Para calcular $a_R^2(\{n\})$ basta iterar el proceso anterior. Así, por ejemplo, si $a_R(\{n\}) = \{x_1, x_2, x_3\}$, entonces sabemos que $a_R^2(\{n\}) = a_R(\{x_1\}) \cup a_R(\{x_2\}) \cup a_R(\{x_3\})$ y esta unión se obtiene a partir de los $a_R(\{x_i\})$ ya calculados. El siguiente diagrama ilustra la situación.

x	$a_R(\{x\})$	$a_R^2(\{x\})$	$a_R^3(\{x\})$	$a_R^4(\{x\})$
1	$\{1, 7\}$	$a_R^2 = a_R^1 = \mathcal{F}(1)$	$\mathcal{F}(1)$	
2	$\{2, 5\}$	$\{2, 5, 6\}$	$a_R^3 = a_R^2 = \mathcal{F}(2)$	
3	$\{2, 3\}$	$\{2, 3, 5\}$	$\{2, 3, 5, 6\}$	$a_R^4 = a_R^3 = \mathcal{F}(3)$
4	$\{3, 4, 5\}$	$\{2, 3, 4, 5, 6\}$	$a_R^3 = a_R^2 = \mathcal{F}(4)$	
5	$\{5, 6\}$	$a_R^2 = a_R^1 = \mathcal{F}(5)$	$a_R^3 = \mathcal{F}(5)$	
6	$\{6\}$	$a_R^2 = a_R^1 = \mathcal{F}(6)$	$a_R^3 = \mathcal{F}(6)$	
7	$\{1, 7\}$	$a_R^2 = a_R^1 = \mathcal{F}(7)$	$a_R^3 = \mathcal{F}(7)$	
8	$\{1, 8\}$	$\{1, 7, 8\}$	$a_R^3 = a_R^2 = \mathcal{F}(8)$	

Tabla 3.1: a_R-clausura de los conjuntos unitarios (cerrados elementales)

Una vez hechos estos cálculos, vamos ahora a determinar los conjuntos a_R-cerrados minimales a partir de los $\mathcal{F}(x)$.
Recordemos que, por el Teorema 2.5, tenemos que cada a-cerrado minimal cumple para cada $x \in A$, $\mathcal{F}(x) = A$. De la tabla anterior se deduce que:
$\mathcal{F}(1) = \{1, 7\} = \mathcal{F}(7)$ y $\mathcal{F}(6) = \{6\}$, por lo que $\mathcal{F}(1)$, $\mathcal{F}(6)$ y $\mathcal{F}(7)$ son a-cerrados minimales.
Además, $\mathcal{F}(2) \subsetneq \mathcal{F}(3) \subsetneq \mathcal{F}(4), \mathcal{F}(6) \subsetneq \mathcal{F}(5) \subsetneq \mathcal{F}(2), \mathcal{F}(7) \subsetneq \mathcal{F}(8)$, y teniendo en cuenta que, por definición, si $\mathcal{F}(x) \subsetneq \mathcal{F}(y)$, $\mathcal{F}(y)$ no es a-cerrado minimal, se tiene que los conjuntos a-cerrados no minimales son $\mathcal{F}(2), \mathcal{F}(3), \mathcal{F}(4), \mathcal{F}(5)$ y $\mathcal{F}(8)$.

Seguidamente se dan una serie de teoremas que establecen propiedades del espacio (E, a_R) según sea la relación R.

Teorema 3.1. Sea R una relación definida en un conjunto E y a_R el operador pseudoclausura inducido por R. Entonces, R es transitiva si y solo si a_R es idempotente. En este caso (E, a_R) es espacio topológico.

Demostración. Sea $A \subseteq E$. Por definición se tiene que:

$$a_R^2(A) = a_R(A) \cup \mathcal{R}^{-1}(a_R(A)) = A \cup \mathcal{R}^{-1}(A) \cup \mathcal{R}^{-1}(\mathcal{R}^{-1}(A))$$

Entonces, será suficiente probar que $\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{R}^{-1}(A)) \subseteq \mathcal{R}^{-1}(A)$ si R es una relación transitiva para tener $a_R^2 = a_R$. Sabemos que $x \in \mathcal{R}^{-1}(\mathcal{R}^{-1}(A))$ si y solo si $\exists\, y \in \mathcal{R}^{-1}(A)$ tal que xRy. Ahora bien, $y \in \mathcal{R}^{-1}(A)$ si y solo si $\exists z \in A$ tal que yRz, y si R es transitiva, resulta entonces que xRz. En consecuencia se tiene $x \in \mathcal{R}^{-1}(A)$.

Recíprocamente, supongamos que $a_R^2 = a_R$ y demostremos que R es transitiva. En efecto si xRy e yRz, entonces $x \in a_R(\{y\})$ e $y \in a_R(\{z\})$. Luego $a_R(\{y\}) \subseteq a_R^2(\{z\}) = a_R(\{z\})$, y por lo tanto $x \in a_R(\{z\})$, lo que significa que xRz.

Nota 3.3. Cualquier relación de equivalencia R induce en un conjunto E un espacio topológico (E, a_R).

Teorema 3.2. Sea (E, a) un espacio pretopológico de tipo $\mathcal{V}_D$. Entonces (E, a) será cuasi-discreto (o $\mathcal{V}_S$-espacio) si y solo si existe una relación $R \subseteq E \times E$ tal que $a = a_R$.

Demostración. Tenemos que demostrar que (E, a_R) es $\mathcal{V}_S$-espacio para cualquier relación R. Para $x \in E$ definimos:

$$N_x = \{x\} \cup \{y \in E \,|\, xRy\}$$

Es inmediato que $x \in N_x$ y que, para todo y, si xRy entonces $y \in N_x$. Por tanto N_x es un a_R-entorno de x. Consideremos ahora W cualquier a_R-entorno de x.

Esto significa que $x \in i_R(W)$, por lo tanto, x solo puede estar R-relacionado con elementos de W. Sea $y \in N_x$, si $y = x$ entonces $y \in W$, y si no, xRy, por lo que de nuevo $y \in W$. Se sigue que $N_x \subseteq W$, y entonces N_x es un a_R-entorno minimal de x. Como x era un elemento arbitrario de E, se llega a que (E, a_R) es $\mathcal{V}_S$-espacio.

Recíprocamente, asumimos que (E, a) es $\mathcal{V}_S$-espacio y definimos la relación R de forma que xRy si $x \in a(\{y\})$ (por el Lema 2.3, esto es equivalente a que $y \in N_x$). Entonces, considerando $W \subseteq E$:

$$
\begin{aligned}
y \in a_R(X) &\iff \exists x \in W \text{ tal que}\, y = x \text{ o } yRx \\
&\iff \exists x \in W \text{ tal que}\, y = x \text{ o } y \in a(\{x\}) \\
&\iff \exists x \in W \text{ tal que}\, y \in a(\{x\}) \\
&\iff y \in \bigcup_{x \in W} a(\{x\}) \\
&\iff y \in a(W)
\end{aligned}
$$

Conseguimos lo que se quería, $a = a_R$.

Teorema 3.3. Sea (E, a_R) un espacio pretopológico, entonces $a_R(\{x\})$ es el a_R-entorno minimal de x si y solo si R es una relación simétrica.

Demostración. Supongamos que R es simétrica. Entonces,

$$
N_x = \{x\} \cup \{y \in E \,|\, xRy\} = \{x\} \cup \{y \in E \,|\, yRx\} = a_R\{x\}
$$

Recíprocamente, supongamos $N_x = a_R(\{x\})$, y sea yRx. Entonces $y \in a_R\{x\}$, por lo que $y \in N_x$. Por tanto, $y = x$ o xRy. Dado yRx, tenemos xRy, es decir, R es simétrica.

Teorema 3.4. Si (E, a_R) es un espacio topológico se tiene que los conjuntos abiertos son precisamente las uniones de los a_R-entornos minimales, $\bigcup_{x \in A} N_x$ con $A \subseteq E$.

Demostración. Primero, sea O cualquier conjunto a_R-abierto de (E, a_R), entonces $O = i_R(O)$. Por tanto O es un a_R-entorno de cada uno de sus miembros, por lo que para cada $x \in O$, $N_x \subseteq O$. Pero como $x \in N_x$ para cada x, tenemos también $O \subseteq \bigcup_{x \in O} N_x$. Por tanto, estos conjuntos son iguales, así que O es la unión de los a_R-entornos minimales, como queríamos probar.

Recíprocamente, considerando cualquier subconjunto $A \subseteq E$, debemos llegar a que $\bigcup_{x \in A} N_x$ es a_R-abierto. Por la Proposición 2.7 (c,2) es suficiente mostrar que N_x es a_R-abierto. Sea $y \in N_x$, entonces $y = x$ o xRy. Suponiendo $z = y$ o yRz, por la transitividad (Teorema 3.1), $z = x$ o xRz, por lo que $z \in N_x$. Por lo tanto, y solo está R-relacionado con elementos de N_x, lo que significa que $y \in i_R(N_x)$. Tenemos así que $N_x \subseteq i_R(N_x)$, por lo que N_x es a_R-abierto.

Teorema 3.5. Si R es transitiva y asimétrica, entonces (E, a_R) es un espacio topológico T_0.

Demostración. Por el Teorema 3.1, (E, a_R) es topológico. Ahora, sean $x, y \in E$ con $x \neq y$. Como R es asimétrica, no podemos tener xRy e yRx a la vez. Supongamos $(x, y) \notin R$. Como además $x \neq y$, tenemos que $y \notin N_x$. Es decir, N_x es un a_R-abierto conteniendo a x pero no a y. Si tenemos $(y, x) \notin R$, entonces N_y es un a_R-abierto conteniendo a y pero no a x. Uno de los dos casos se debe cumplir, por tanto el espacio es T_0.

Teorema 3.6. Si R cumple que existe al menos un par $(x, y) \in R$ con $x \neq y$, entonces el espacio (E, a_R) no es T_1.

Demostración. Sea xRy con $x \neq y$, entonces $y \in N_x$. Pero N_x es un subconjunto de todos los conjuntos a_R-abiertos conteniendo a x. Por tanto, no existirá un a_R-abierto conteniendo a x pero no a y, y tenemos así que el espacio no puede ser T_1.

3.1.1. Conexión y distancia en $\mathcal{V}_S$-espacios en términos de relaciones

El Teorema 3.2, nos dice que en un espacio de tipo $\mathcal{V}_S$ (E, a) debe existir una relación R tal que $a = a_R$. Usando dicha relación, podemos dar una caracterización de la noción de conexión y distancia en estos espacios.
Podemos empezar con la definición de conexión en $\mathcal{V}_D$-espacios en general, que precisamente generaliza la definición estándar de conexión en espacios topológicos.

Definición 3.2. Un espacio de tipo V_D (E, a_R) es *conexo* si y solo si E no es la unión de dos subconjuntos a-abiertos no vacíos disjuntos.

Demostremos que en el entorno más restringido de espacios $\mathcal{V}_S$, la conexión puede ser caracterizada directamente en términos de la relación R.

Definición 3.3. Sea (E, a_R) un espacio de tipo $\mathcal{V}_S$, y sea $A \subseteq E$. Entonces se tiene que dos puntos $x, y \in A$ están conectados si existe una secuencia $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ (con $n \geq 0$) tal que $x_{i-1} R x_i$ o $x_i R x_{i-1}$ para $i = 1, \ldots, n$. Lo denotaremos con $x \stackrel{R}{\sim} y$. La secuencia $(x_i) = x_0, x_1, \ldots, x_n$ se denomina *camino* de x a y.

Es obvio que $\stackrel{R}{\sim}$ es una relación de equivalencia en E, las componentes conexas de (E, a_R) serán precisamente las clases de equivalencia por $\stackrel{R}{\sim}$.

Lema 3.1. Un espacio de tipo $\mathcal{V}_S$ (E, a_R) es *conexo* si y solo si para cada par $x, y \in E$, $x \stackrel{R}{\sim} y$.

Demostración. Supongamos primero que todos los pares están conectados y que $E = A \cup B$ con $A \cap B = \emptyset$. Sea $y \in A$ y $z \in B$. Por hipótesis, $y \overset{R}{\sim} z$, por lo que existe un camino (y_i) conectando $y = y_0$ con $z = y_n$. Como $y_0 \in A$ e $y_n \notin A$, debe haber un i_0 tal que $y_{i_0} \in A$ e $y_{i_0+1} \notin A$. Entonces $y_{i_0+1} \in A^c = B$. Por la definición de camino, o bien $y_{i_0} R\, y_{i_0+1}$ o bien $y_{i_0+1} R\, y_{i_0}$. En el primer caso, tenemos $y_{i_0} \notin i_R(A)$, por lo que $y \in A - i_R(A)$, y por ello A no es a_R-abierto. Igualmente, en el otro caso, B no es a-abierto. Por tanto, en cualquiera de los casos A y B no pueden ser ambos a-abiertos. Y con ello, E no es la unión de dos conjuntos a_R-abiertos disjuntos, es decir, E es conexo.

Recíprocamente, supongamos que existen puntos $y_0, z_0 \in E$ que no están conectados por ningún camino. Sea A el conjunto de puntos conectados a y_0, es decir,

$$A_{y_0} = \{x \in E | y_0 \overset{R}{\sim} x\}$$

veamos que A es a_R-abierto. Supongamos $u \in A$, y sea uRv. Como $y_0 \overset{R}{\sim} u$, se sigue que $y_0 \overset{R}{\sim} v$, ya que el camino de y_0 a u puede ser extendido a v porque uRv. Por tanto, $v \in A_{y_0}$. Se sigue que $u \in i_R(A_{y_0})$, porque cualquiera que esté relacionado con u está en A. Tenemos entonces que $A_{y_0} \subseteq i_R(A_{y_0})$, y como la inclusión contraria siempre es cierta, A_{y_0} es a_R-abierto. Además, $A^c_{y_0}$ es a_R-abierto también. Si no, habría puntos $w \in A^c_{y_0}$, $t \in A_{y_0}$, tales que tRw. En este caso, ya que $y_0 \overset{R}{\sim} t$, tendríamos $y_0 \overset{R}{\sim} w$, por lo que $w \in A_{y_0}$, y esto es una contradicción. Además, como z_0 e y_0 no están conectados y $z_0 \in A^c_{y_0}$, se sigue que E es la unión de conjuntos a_R-abiertos no vacíos disjuntos, y por lo tanto no conectados.

Vamos a definir ahora la distancia entre dos puntos en un $\mathcal{V}_S$-espacio como la longitud del camino más corto que los conecta, si es que ese camino existe.

Definición 3.4. (1) La *longitud de un camino* (x_i) con $1 \leq i \leq n$ que conecta $x = x_0$ con $y = x_n$ en (E, a_R) es el entero n.

(2) La *distancia entre x e y* en (E, a_R), denotada con $d_R(x, y)$, es el menor n tal que x e y están conectados por un camino de longitud n, si es que este camino existe.

Todo esto se usa en el estudio de dos tipos de $\mathcal{V}_S$-espacios, que tienen especial interés por algunas de sus aplicaciones. Estos son los espacios de adyacencia y los de incidencia. Un espacio (E, a_R) siendo R una relación irreflexiva y simétrica en E se conoce como un espacio de adyacencia, y si R es irreflexiva y transitiva en E será un espacio de incidencia. Aunque no los estudiamos, se puede encontrar información en [14, pág 120]. Por ejemplo, los espacios de adyacencia (4-adyacencia, 8-adyacencia) han sido investigados en el contexto de la Topología Digital [15].

3.2. Pseudoclausura inducida por un conjunto de relaciones

Sea E un conjunto y $(R_i)_{i=1\ldots p}$ un conjunto de relaciones reflexivas en E, entonces cada R_i induce un operador pseudoclausura en E. Se pueden definir diferentes estructuras pretopológicas a partir de una familia de relaciones, según tomemos la defineión de $a_R(A)$. Al igual que en la sección anterior, trataremos con la pretopología de predecesores.

Definición 3.5. Dado un conjunto E y un conjunto de relaciones $(R_i)_{i=1\ldots p}$, la pseudoclausura inducida por $(R_i)_{i=1\ldots p}$ se define como la intersección de las pseudoclausuras a_{R_i}. Es decir,

$$a_{R_S}(A) = \cap\{a_{R_i}(A)\} \text{ o, también, } a_{R_S}(A) = A \cup (\cap\{\mathcal{R}_i^{-1}(A)\}) \text{ con } i = 1\ldots p$$

Recordando, por la Observación 1.3, que $\mathcal{R}^{-1}(A) = \{x \in E : \mathcal{R}(x) \cap A \neq \emptyset\}$, esto es equivalente a definir

$$a_{R_S}(A) = A \cup \{x \in E \,|\, \forall i = 1\ldots p, \mathcal{R}_i(x) \cap A \neq \emptyset\}$$

.

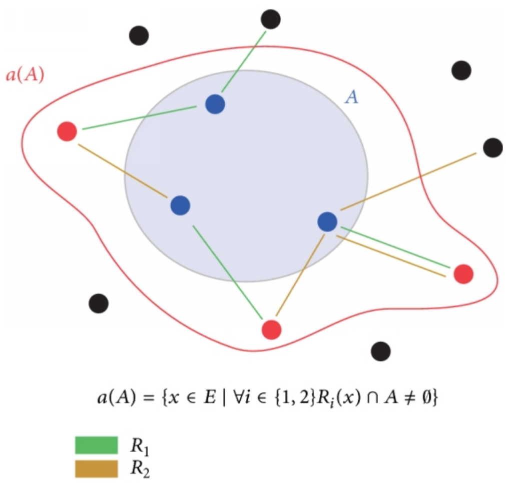


Figura 3.3: Representación de $a_{R_S}(A)$ considerando R_1 y R_2

Ejemplo 3.4. Sea $E = \{1, 2, 3\}$ y R_1 y R_2 dos relaciones en E definidas así:
$1R_11$, $1R_12$, $2R_12$, $3R_13$

$1R_21$, $2R_22$, $1R_23$, $3R_23$
Entonces, como R_1 y R_2 son reflexivas:
$a_{R_1}(\{1\}) = \mathcal{R}_1^{-1}(1) = \{1\}$, $a_{R_1}(\{2\}) = \mathcal{R}_1^{-1}(2) = \{1, 2\}$ y $a_{R_1}(\{3\}) = \mathcal{R}_1^{-1}(3) = \{3\}$
$a_{R_2}(\{1\}) = \mathcal{R}_2^{-1}(1) = \{1\}, a_{R_2}(\{2\}) = \mathcal{R}_2^{-1}(2) = \{2\}$ y $a_{R_2}(\{3\}) = \mathcal{R}_2^{-1}(3) = \{1, 3\}$
Además, si $A = \{2, 3\}$ tenemos:
$a_{R_1}(\{A\}) = \mathcal{R}_1^{-1}(A) = \mathcal{R}_1^{-1}(2) \cup \mathcal{R}_1^{-1}(3) = \{1, 2, 3\}$
$a_{R_2}(\{A\}) = \mathcal{R}_2^{-1}(A) = \mathcal{R}_2^{-1}(2) \cup \mathcal{R}_2^{-1}(3) = \{1, 2, 3\}$
De aquí se deduce que $a_{R_S}(\{A\}) = a_{R_1}(A) \cap a_{R_2}(A) = \{1, 2, 3\}$
Por otro lado, este ejemplo también nos sirve para mostrar que a_{R_S} no es aditiva en general. Tenemos $a_{R_S}(\{2\}) \cup a_{R_S}(\{3\}) = (a_{R_1}\{2\} \cap a_{R_2}(\{2\})) \cup (a_{R_1}(\{3\} \cap a_{R_2}(\{3\}))) = \{2\} \cup \{3\} = \{2, 3\}$, y por tanto, $a_{R_S}(\{2, 3\}) \neq a_{R_S}(\{2\}) \cup a_{R_S}(\{3\})$.

Nota 3.4. Se cumple que a_{R_S} es isótona porque cada a_{R_i} lo es, pero en general no es aditiva, aún cuando cada a_{R_i} lo es. Es decir, solo podemos asegurar que (E, a_{R_S}) es $\mathcal{V}$-espacio.

Sin embargo, dentro de la pretopología de predecesores podemos distinguir dos tipos diferentes de pretopologías, y una de ella si cumple que (E, a_{R_S}) es un $\mathcal{V}_D$-espacio. Lo vemos a continuación.

3.2.1. Pretopologías de predecesores

Dentro de la pretopología de predecesores podemos diferenciar entre las denominadas pretopología fuerte y débil.
En el primer caso, consideremos:

- $a_{R_S}(A) = \{x \in E | \forall i = 1 \ldots p, \mathcal{R}_i(x) \cap A \neq \emptyset\}$, para todo $A \subset E$.
- $i_{R_S}(A) = \{x \in E | \exists i = 1 \ldots p, \mathcal{R}_i(x) \subset A\}$, para todo $A \subset E$.

Se tiene el siguiente resultado, cuya demostración es directa por definición:

Proposición 3.2. a_{R_S} e i_{R_S} (duales) determinan en E una estructura pretopológica y (E, a_{R_S}) es un $\mathcal{V}$-espacio pretopológico.

Definición 3.6. La pretopología definida en E por a_{R_S} e i_{R_S} se llama *pretopología fuerte inducida por la familia* (R_i)

Consideremos ahora:

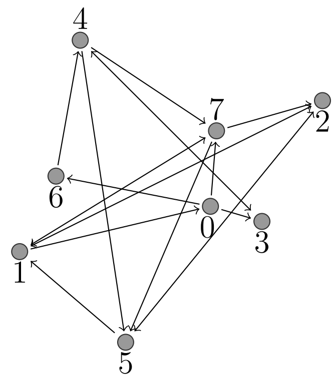
- $a_{R_W}(A) = \{x \in E | \exists i = 1 \ldots p, \mathcal{R}_i(x) \cap A \neq \emptyset\}$, para todo $A \subset E$.
- $i_{R_W}(A) = \{x \in E | \forall i = 1 \ldots p, \mathcal{R}_i(x) \subset A\}$, para todo $A \subset E$

Se tiene el siguiente resultado, cuya demostración es directa por definición:

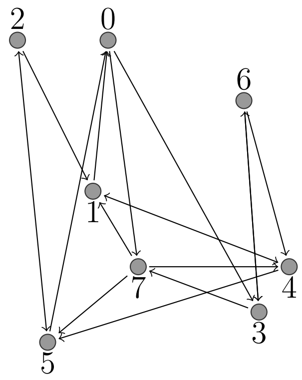
Proposición 3.3. a_{R_W} e i_{R_W} determinan en E una estructura pretopológica y (E, a_{R_W}) es un $\mathcal{V}_D$-espacio pretopológico.

Definición 3.7. La pretopología definida en E por a_{R_W} e i_{R_W} se llama *pretopología débil inducida por la familia* (R_i).

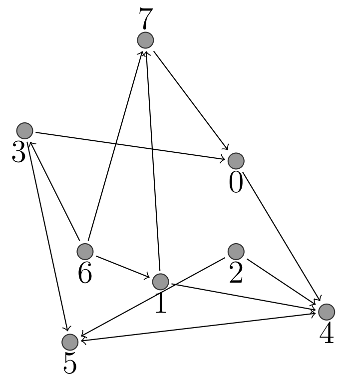
Ejemplo 3.5. Sea $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, vamos a considerar en E las relaciones R_1, R_2, R_3 que se muestran en las figuras siguientes (omitimos los lazos).



Relación 1



Relación 2



Relación 3

Sea $A = \{5\}$, entonces:
$a_{R_S}(A) = \{2, 4, 5\}$ pues son los $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ que cumplen que $\mathcal{R}_i(x) \cap \{5\} \neq \emptyset$ para $i = 1, 2$ y 3.
$a_{R_W}(A) = \{2, 3, 4, 5, 7\}$ pues son los $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ que cumplen la misma condición anterior al menos para un i, $i = 1, 2$ o 3.
$i_{R_S}(A) = i_{R_W}(A) = \emptyset$.
Sea ahora $A = \{0, 4, 6\}$, entonces:
$a_{R_S}(A) = \{0, 1, 3, 4, 6\}$
$a_{R_W}(A) = E$
$i_{R_S}(A) = \{0, 6\}$ pues $\mathcal{R}_3(0) = \{0, 4\} \subset \{0, 4, 6\}$ y $\mathcal{R}_1(6) = \{4, 6\} \subset \{0, 4, 6\}$.
$i_{R_W}(A) = \emptyset$.

Por último, vamos a hacer mención a la pretopología de sucesores y a la de predecesores-sucesores. Estas no se estudiarán , pero así mostramos otras posibles estructuras pretopológicas.

- Pretopología de sucesores:

$$a_{R_T}(A) = \{x \in E \,|\, \forall i = 1 \dots p, \mathcal{R}_i^{-1}(x) \cap A \neq \emptyset\}, \text{ para todo } A \subset E$$
$$i_{R_T}(A) = \{x \in E \,|\, \exists i = 1 \dots p, \mathcal{R}_i^{-1}(x) \subset A\}, \text{ para todo } A \subset E$$

- Pretopología de predecesores-sucesores:

$$a_{R_{ST}}(A) = \{x \in E \,|\, \forall i = 1 \dots p, (\mathcal{R}_i(x) \cup \mathcal{R}_i^{-1}(x)) \cap A \neq \emptyset\}, \text{ para todo } A \subset E$$
$$i_{R_{ST}}(A) = \{x \in E \,|\, \exists i = 1 \dots p, (\mathcal{R}_i(x) \cup \mathcal{R}_i^{-1}(x)) \subset A\}, \text{ para todo } A \subset E$$

3.3. Algunos indicadores de estructura en Pretopología

En esta sección vamos a considerar la pretopología fuerte o débil de predecesores inducida por una familia de relaciones binarias reflexivas en E.
Nuestro objetivo será ajustar diferentes indicadores de la teoría de grafos al marco de la pretopología, de forma que nos den información sobre la estructura del conjunto E. Esto será necesario para su uso en algunas aplicaciones, que se verán en el siguiente capítulo.

3.3.1. Coeficiente de pseudoclausura y pseudointerior

En un espacio pretopológico (E, a_R), estas dos razones juegan el mismo papel que los grados de entrada y salida en teoría de grafos. Miden la capacidad de un subconjunto $A \subseteq E$ para difundir o recibir influencia de su complementario. Los definimos a continuación.

Definición 3.8. Sea (E, a_R) un espacio pretopológico y $A \subseteq E$ con $A \neq \emptyset$, se tienen las siguientes definiciones.

- El coeficiente pseudoclausura de A:

$$R_a(A) = \frac{Card\,(a_R(A))}{Card\,(A)}$$

- El coeficiente pseudointerior de A:

$$R_i(A) = \frac{Card\,(i_R(A))}{Card\,(A)}$$

A continuación damos un ejemplo donde se obtienen estas razones considerando primero la pretopología fuerte de predecesores y seguidamente la pretopología débil.

Ejemplo 3.6. Con el fin de ahorrarnos algunos cálculos vamos a considerar el Ejemplo 3.5. En él, concretamente para $A = \{0, 4, 6\}$ teníamos:
$a_{R_S}(A) = \{0, 1, 3, 4, 6\}$, $i_{R_S}(A) = \{0, 6\}$
$a_{R_W}(A) = E$, $i_{R_W}(A) = \emptyset$
Entonces, por las definiciones anteriores:

$$R_{a_{R_S}} = \frac{Card\,(a_{R_S}(A))}{Card\,(A)} = \frac{5}{3},\ R_{i_{R_S}} = \frac{Card\,(i_{R_S}(A))}{Card\,(A)} = \frac{2}{3}$$

$$R_{a_{R_W}}(A) = \frac{Card\,(a_{R_W}(A))}{Card\,(A)} = \frac{8}{3},\ R_{i_{R_W}} = \frac{Card\,(i_{R_W}(A))}{Card(A)} = 0$$

.

Proposición 3.4. Sea (E, a_R) un espacio pretopológico y $A \subseteq E$, se cumple:

(1) $1 \leq R_a(A) \leq \frac{Card\,(E)}{Card\,(A)}$ para todo $A \neq \emptyset$.

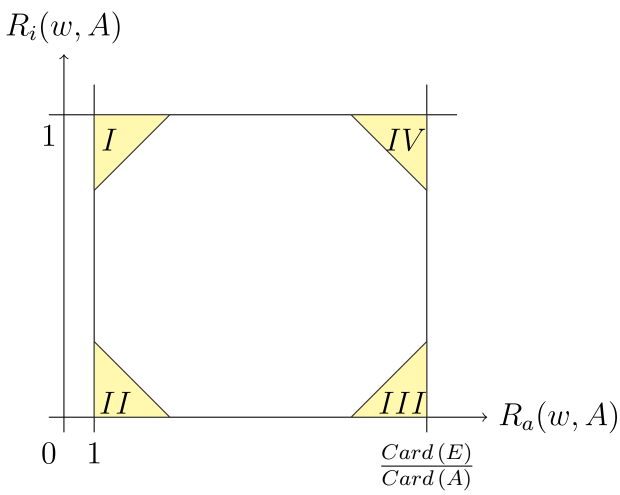
(2) A es a_R-cerrado si y solo si $R_a(A) = 1$.

(3) $0 \leq R_i(A) \leq 1$ para todo $A \neq \emptyset$.

(4) A es a_R-abierto si y solo si $R_i(A) = 1$.

Demostración. Usando las definiciones de a_R e i_R se obtienen directamente (1) y (3). La demostración de (2) y (4) se tienen por la definición de conjunto a_R-cerrado y a_R-abierto, respectivamente.

Nota 3.5. Como dijimos al principio de la sección, estos coeficientes miden la capacidad de un subconjunto para difundir o recibir influencia de su complementario. El siguiente diagrama ilustra cuatro casos muy particulares en relación a lo qué puede ocurrir para un subconjunto $A \subseteq E$ dado en el plano (R_a, R_i).



(I) $A = i(A) = a(A)$, recibe y transmite poca influencia.

(II) $i(A) \subseteq A = a(A)$, recibe poca influencia y transmite mucha.

(III) $i(A) \subseteq A \subseteq a(A)$, recibe y transmite mucha influencia.

(IV) $i(A) = A \subseteq a(A)$, recibe mucha influencia y transmite poca.

3.3.2. Indicador de cercanía

En teoría de grafos podemos calcular el coeficiente de cercanía para cualquier nodo x. Este coeficiente mide la intensidad de los enlaces entre los vecinos de x. Lo mismo ocurre en espacios pretopológicos.

Definición 3.9. Sea (E, a_R) un espacio pretopológico y $A \subseteq E$, se conoce como *frontera externa* al conjunto $a(A) - A$, que se denota con $o(A)$. Este es el conjunto de vecinos de los elementos de A, en el sentido de la teoría de grafos.

Observación 3.2. Si calculamos $R_i(o(A))$ y este toma un valor cercano a 1, esto significa que $o(A)$ no influye en su complementario. Por tanto, si los elementos de $o(A)$ sí influyen, será solo dentro de $o(A)$ y tenemos así un alto nivel de densidad de enlaces en $o(A)$. Sin embargo, no tenemos información sobre el nivel de difusión.

Definición 3.10. Sea (E, a_R) un espacio pretopológico y $A \subseteq E$. Definimos la *derivada* como:

$$d(A) = \{x \in E \,|\, \forall\, N \in \mathcal{N}(x), (N - \{x\}) \cap A \neq \emptyset\}$$

La *función coherencia* se define entonces como $c(A) = d(A) \cap A$:

$$c(A) = \{x \in A \,|\, \forall\, N \in \mathcal{N}(x), (N - \{x\}) \cap A \neq \emptyset\}$$

Este es el conjunto de elementos de A no aislados en A, es decir, si x pertenece a $c(A)$, algún vecino de x está en A.

Definición 3.11. Sea (E, a_R) un espacio pretopológico y $A \subseteq E$, se define el coeficiente $ds(.)$ como:

$$ds(A) = \|A - c(A)\|$$

Observación 3.3. Si $ds(c(o(A)))$ toma un valor cercano a 0, esto significa que hay pocos puntos aislados en $o(A)$.

Nota 3.6. Si simultáneamente $ds(c(o(A)))$ es cercano a 0 y $R_i(o(A))$ es cercano a 1, estamos ante un caso donde $o(A)$ tiene mucha capacidad de difusión pero solo internamente. Esto quiere decir que hay una alta densidad relacional entre los vecinos de A.
En consecuencia, el par $(ds(A), R_i(A))$ permite caracterizar la cercanía de los elementos de A.

3.3.3. Coeficiente de correlación y función assortativity

En relación a los grafos no dirigidos, está extendido el uso de otros dos coeficientes para analizarlos, el grado de correlación de un nodo y la función de asortividad. A continuación vamos a ver como se definen en espacios pretopológicos.

Definición 3.12. Para cualquier elemento x de un espacio pretopológico (E, a), el *coeficiente de correlación de x*, denotado por $dc(x)$, se define como:

$$dc(x) = \frac{1}{\|a(\{x\})\|} \sum_{y \in a(\{x\}), y \neq x} \|a(\{y\})\|$$

Este coeficiente es una generalización directa del mismo coeficiente definido en teoría de grafos.

Definición 3.13. La *función de asortividad* se generaliza como:

$$ca(k) = \frac{1}{N_k} \sum_{x \,|\, \|a(\{x\})\| = k} dc(x)$$

donde N_k es el número de elementos de E tales que $\|a(\{x\})\| = k$.

Ejemplo 3.7. Vamos a considerar la pretopología fuerte y débil inducidas por las tres relaciones binarias que se describen en la siguiente tabla.

nodo x	$R_1(x)$	$R_2(x)$	$R_3(x)$
0	0,3,6	0,3,6,7	0,4
1	0,1,7	0,1,4	1,4,7
2	1,2,5	1,2,5	2,4,5
3	3,4	1,3,6	0,3,5
4	3,4,5,7	3,4,5,7	1,4,5
5	0,1,2,5	0,2,5	4,5
6	4,6	3,4,6	1,3,6,7
7	2,5,7	2,4,5,7	0,4,7

Tabla 3.2: Datos de las relaciones definidas en E

El cálculo de $dc(x)$ para cada $x \in E$ se muestra a continuación.

nodo x	$dc(x)$-pretopología débil	$dc(x)$-pretopología fuerte
0	3	1
1	3,83	1
2	3,33	1
3	4	1
4	3,88	1
5	4	0,67
6	3	1
7	4,4	1

Tabla 3.3: Coeficientes dc

Podemos derivar la función de asortividad, quedando ilustrada en el siguiente diagrama.

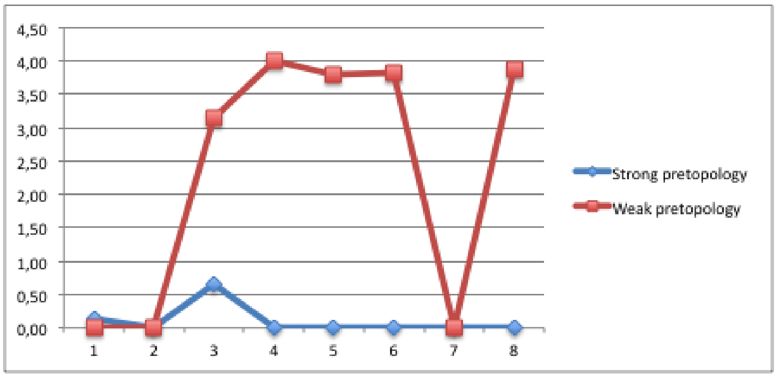


Figura 3.4: Funciones asortividad

Capítulo 4

Aplicaciones

Con la pretopología se pretende dar un enfoque distinto a la resolución de problemas de análisis estructural. Es un medio eficaz para dotar a los sistemas complejos de una noción de proximidad, y esto la hace que la pretopología sea una herramienta más adecuada frente a otras conocidas.

4.1. Modelado de redes complejas mediante la pretopología

Un sistema complejo es un conjunto de elementos que interaccionan entre sí, y cuyo comportamiento global no puede deducirse de la suma de los comportamientos de sus partes. Una red se llama compleja si posee dichas características, y ejemplos de las mismas se presentan en diversos campos: biología, sociología, psicología, informática, etc. Generalmente se las suele agrupar en cuatro categorías: sociales, de información, tecnológicas y biológicas.

Aunque las interacciones locales entre los elementos de una red suelen ser bien conocidas, es una tarea difícil llegar a captar las propiedades globales que las caracterizan, especialmente las relacionadas con la dinámica de las interacciones entre sus componentes, y que son esenciales para su modelización.
El medio habitual para estudiar su estructura consiste en representarla como un grafo y analizar ciertas propiedades del mismo, como por ejemplo, su coeficiente de agrupamiento, grado de correlación, asortatividad o ley de distribución de los grados de los vértices (homogénea o heterogénea), entre otras. Pero los diversos tipos de grafos propuestos para modelizar las redes complejas presentan limitaciones, entre las que destaca la imposibilidad de representar varias relaciones en un mismo grafos y de reflejar posibles relaciones entre conjuntos de vértices.
Esta rigidez es precisamente el motivo por el que la teoría de grafos no es capaz

de proporcionar un análisis de la dinámica de una red compleja, de los procesos y operaciones que en ella se dan, como la incorporación de nuevos elementos, la desaparición de otros, la división de un grupo... Estas limitaciones o inconvenientes se solventan usando la pretopología.

4.1.1. Concepto de red con pretopología

Una red es una estructura formada por nodos (conjunto de elementos), que generalmente son individuos u organizaciones, y que están unidos por uno o más tipos específicos de relaciones binarias.
En pretopología, podemos generalizar esta definición diciendo que una red es una familia de pretopologías en un conjunto E dado.

Definición 4.1. Sea E un conjunto, $I = 1 \dots n$ y $\{a_i, i \in I\}$ una familia de pretopologías en E. La familia de espacios pretopológicos $\{(E, a_i), i \in I\}$ es una *red* en E.

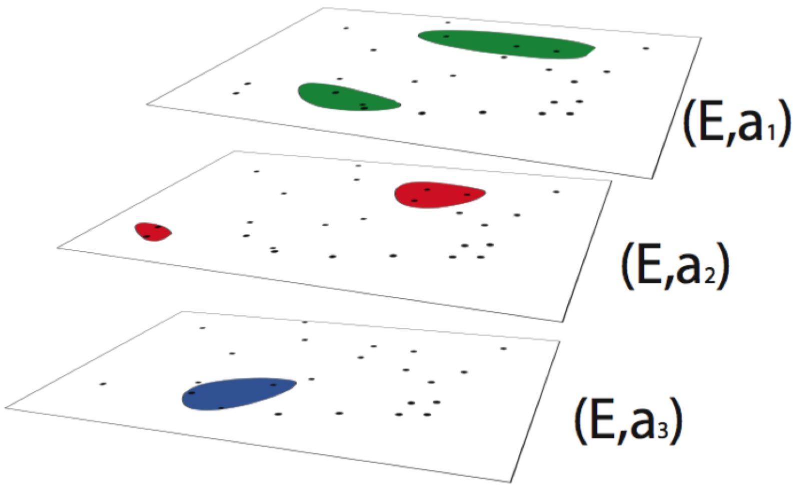


Figura 4.1: Concepto de red en pretopología

Entonces, podemos usar diferentes espacios pretopológicos en el mismo conjunto para modelar mejor un fenómeno.

4.1.2. Algunos ejemplos

A continuación se presentan ejemplos de modelado de redes sociales basados en pretopología. Dependiendo de la naturaleza de la red y la representación del problema, se construye el operador pseudoclausura de una forma concreta. A veces, incluso se puede necesitar combinar algunas definiciones posibles para el operador con el fin de obtener resultados específicos.

Modelado de redes con relaciones binarias

Este caso ya fue tratado en el Capítulo 3, y existen multitud de ejemplos posibles. Tomemos E el conjunto de habitantes de una zona, que se relacionarán entre sí por tres relaciones diferentes:

- xR_1y si y solo si x trabaja en la misma empresa que y.
- xR_2y si y solo si x es amigo cercano de y.
- xR_3y si y solo si x práctica el mismo deporte que y.

Entonces para modelizar esta situación bastaría hacer como en el Ejemplo 3.5, considerando mi conjunto E y especificando un tipo de pretopología.

Modelado de redes con relaciones ponderadas

1. Para modelizar ciertos problemas, las relaciones binarias no son suficientes. Necesitaremos entonces asociar un valor (entero, real, función, ...) a las aristas que relacionan los elementos de mi conjunto. En estos tipos de espacios, los elementos que forman E están ligados por una relación ponderada.
   Por ejemplo, podemos definir un valor entero v en las relaciones como:

   - $E \times E \longrightarrow \mathbb{N}$
   - $(x, y) \longrightarrow v(x, y)$

   Construimos el operador pseudoclausura de la siguiente forma:

   $$a_s(A) = \{A\} \cup \{y \in E - A \,|\, \sum_{x \in A} v(x, y) \geq s\}, \text{ para todo } A \subseteq E$$

   Entonces, $a_s(A)$ está formada por A y por aquellos y que cumplen que la suma de los valores de las aristas entre algún elemento de A e y es mayor que el umbral s.
   A continuación tenemos el caso de un espacio considerando $s = 4$.

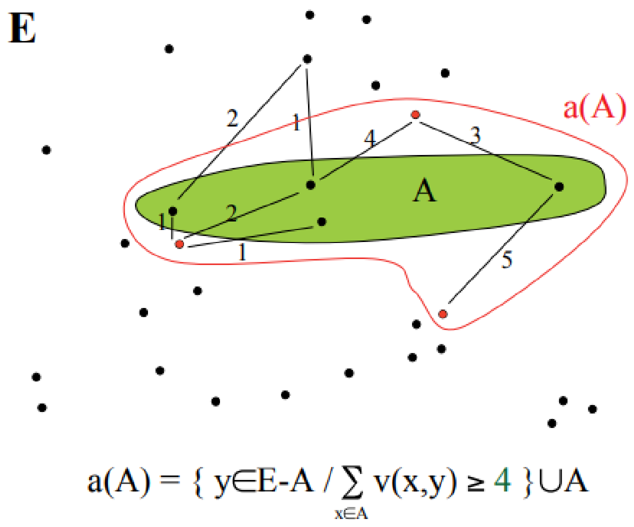


Figura 4.2: Representación de $a_4(A)$

Este tipo de modelizaciones se usa en redes sociales en las que el "peso"de las relaciones es importante y necesario. Esto muestra el interés de modelizar con pretopología. En efecto, este ejemplo muestra que el comportamiento del conjunto, A, es diferente al de la suma de sus elementos (no es $\mathcal{V}_S$-espacio, es solo de tipo $\mathcal{V}$).
En la figura se observa que, la persona que se encuentra abajo a la izquierda (señalada en rojo) forma parte de $a_s(A)$ porque conoce a dos personas “un poco”(valor=1), y conoce “mejor”a otra (valor=2), por lo que puede considerarse que es amigo del conjunto A. En general, como se ve en la figura, cualquier individuo de $E - A$ será amigo de A si la suma de los valores de los enlaces con individuos de A es al menos 4.

2. Vamos a mostrar ahora como modelizar una red con interacciones complejas, es decir, al contrario que ocurría en el ejemplo anterior en este caso las relaciones son no simétricas. Consideraremos un conjunto de datos que representan diferentes relaciones entre un conjunto de personas. Nosotros nos centramos en dos de ellas: estima y desestima. Además, el valor de cada enlace será 1, 2 o 3, siendo 3 el valor que escojo en primer lugar. Construimos nuestro modelo asumiendo que, una persona y es cercana a otra persona x si:

   - y estima a x, de acuerdo a un umbral elegido.
   - x no desestima a y, de acuerdo a un umbral elegido.

Esta definición de proximidad cobra sentido si consideramos coaliciones de grupos. Nuestro modelo se va a basar en la siguiente hipótesis:
Si una persona pregunta a otras personas quién quiere formar parte de su grupo, las personas que le tengan más estima se unirán a su grupo antes que los demás. Pero, esta persona no aceptará en su grupo personas a las que él no estime, incluso si estas personas lo estiman a él. Establecemos entonces dos relaciones ponderadas no simétricas en E, siendo este el conjunto de individuos.

- $E \times E \longrightarrow \mathbb{N}$
- $(x, y) \longrightarrow est(x, y)$
- $(x, y) \longrightarrow deses(x, y)$

siendo *est* la relación "estimar a"y *deses* la relación "desestimar a".

Construimos el operador pseudoclausura, para $A \subseteq E$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, de la siguiente forma:

$$a_{\alpha\beta}(A) = \{A\} \cup \{y \in E - A \,|\, \sum_{x \in A} est(y, x) \geq \alpha \wedge \sum_{x \in A} deses(x, y) < \beta\}$$

Con $\alpha = 3$ y $\beta = 1$, se tiene que la personas que pertenece a $a_{\alpha\beta}(A)$ son aquella que tienen estima por una o varias personas de A (de acuerdo al valor α), y que no son desestimadas por ninguna persona de A (de acuerdo con el valor β). Se muestra en la siguiente figura, en la que la relación *est* viene dada por la flecha continua, y la relación *deses* por la flecha discontinua.

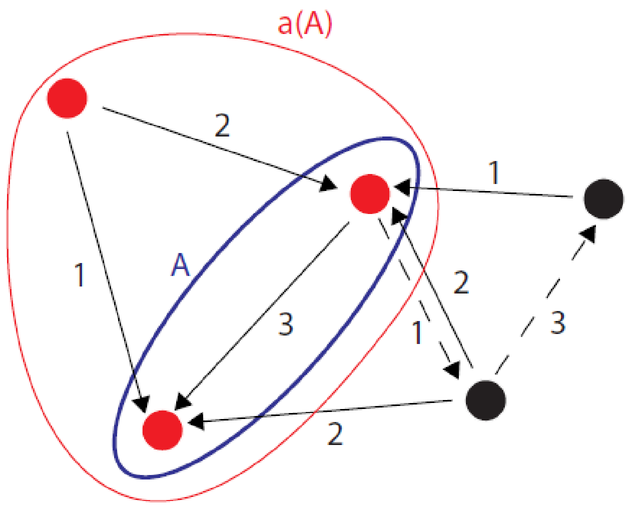


Figura 4.3: Representación de $a_{31}(A)$

Una pregunta típica en el tema de las redes sociales es qué persona tiene más habilidad para reunir un grupo de personas más grande a su alrededor, es decir, cuál es la persona más influyente. En este modelo, podemos responder a esta pregunta buscando el mayor conjunto de la familia de $a_{\alpha\beta}$-cerrados elementales, $\mathcal{F}_{el}$. Si le calculamos la $a_{\alpha\beta}$-clausura a cada elemento de E, nos damos cuenta que VICTOR_8 es la persona que puede reunir a un mayor número de personas en la red. Los resultados de nuestro modelo matemático han sido simulados usando la biblioteca PretopoLib, que implementa los conceptos pretopológicos (ver Capítulo 5, [17]).

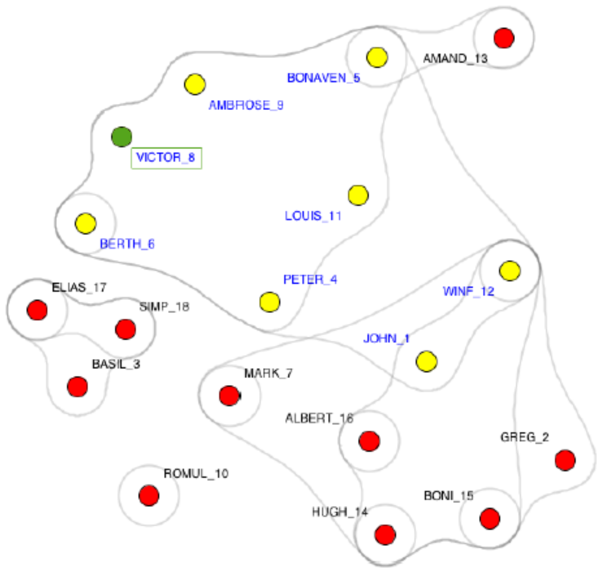


Figura 4.4: Simulación para encontrar la persona más influyente

4.2. Pretopología en Economía

La pretopología permite realizar un análisis estructural de una economía mediante la identificación de los sectores claves a partir de las relaciones de influencia intersectoriales. Esto puede ser de utilidad para decidir cuáles pueden ser las políticas de reactivación más adecuadas, mediante el estímulo de los núcleos de mayor influencia que generan un aumento de la capacidad productiva.

4.2.1. Modelo Input-Output

El Modelo Input-Output o también conocido como modelo de Leontief es un modelo económico desarrollado por Wassily Leontief. Su propósito fundamental

es analizar la interdependencia de industrias en una economía. El modelo estudia cómo las salidas de una industria (outputs) son las entradas de otra (inputs), mostrando una interrelación entre ellas. En la actualidad es uno de los modelos económicos más empleados.
Se elabora a partir de datos económicos observados en una región. La actividad económica en la región se divide en un número de sectores productivos, agrupando cada uno actividades que tienen diferentes ritmos de consumo y producción de bienes. Parte de la producción de un sector (Output) puede ir al consumo (Input) de otro sector dentro de la región bajo estudio. Esta información se recolecta en una tabla denominada Tabla Input-Output o Tabla IO. Las filas de la tabla representan la distribución (por sectores) de un producto, mientras que las columnas representan los consumos (por sectores) de las industrias para poder producir sus bienes. La importancia de estas tablas está en que sus coeficientes son estables con el paso del tiempo, por lo que se podrán utilizar para prever las consecuencias económicas futuras.

En el análisis de los modelos Input-Output se usan varias herramientas matemáticas como el cálculo matricial, la programación lineal o la teoría de grafos, pero también pueden ser estudiados desde un punto de vista pretopológico. Nuestro objetivo será explicar un método para analizar las estructuras industriales basado en la pretopología.

Relaciones de influencia en un modelo Input-Output

Para el estudio desde el punto de vista de la pretopología es necesario definir unas relaciones binarias en el conjunto de los distintos sectores de la actividad económica. Consideraremos las estructuras pretopológicas inducidas por las llamadas relaciones de influencia.

Sea $E = \{1, 2, ..., n\}$ el conjunto de sectores de actividad de una economía. Se demuestra que la relación entre una variación relativa de la demanda del sector j y la variación relativa de la producción del sector k, viene dada por una matriz $\Pi = (\pi_{kj})$, obtenida mediante el modelo Input-Output de Leontief, y que se puede considerar como el indicador de la influencia relativa global de j sobre k.

Definición 4.2. Sea $0 < s \leq 1$, diremos que j s-influye en k si $\pi_{kj} \geq s$, es decir, se define la relación binaria Ω_s sobre E dada por

$$k \, \Omega_s \, j \;\text{ si }\; \pi_{kj} \geq s$$

como *relación de influencia al nivel s.*
Para cada $k \in E$, el conjunto de sectores j que influyen sobre k es el conjunto

$$\Omega_s(k) = \{j \in E \,|\, \pi_{kj} \geq s\}$$

Nota 4.1. Ω_s es una relación binaria en E reflexiva pero, en general, no es transitiva. Esto me impide poder considerar la estructura topológica inducida por Ω_s en E. Sí podremos considerar en cambio una estructura pretopológica.

Interpretación económica

Consideremos la relación de influencia $R = \Omega_s$ y los sectores j y k.

Definición 4.3. La pseudoclausura del sector k viene dada por

$$a_R(\{k\}) = \{j \in E \,|\, \pi_{kj} \geq s\} = \{j \in E \,|\, k \in \Omega_s(j)\}$$

y representa el conjunto de todos los sectores j influidos por k.
Para un grupo de sectores $A \subset E$, tenemos

$$a_R(A) = \{j \in E \,|\, \text{existe}\, k \in A \cap \Omega_s(j)\}$$

Es decir, la pseudoclausura de A es el conjunto de sectores influidos por al menos un sector en A.

Nota 4.2. El operador pseudointerior viene dado por

$$i_R(A) = \{k \in A \,|\, k \in \Omega_s(k) \subset A\}$$

y representa el conjunto de los sectores k del grupo A que son influidos únicamente por elementos de A .

Además, podemos definir los conjuntos a_R-cerrados y a_R-abiertos. Por el razonamiento de la Nota 3.5 adaptadoo a nuestra relación, se tiene que:

- Si A es un conjunto de sectores a_R-cerrado para la pretopología de predecesores obtenida a partir de R, entonces $\mathcal{R}(x) \cap A = \emptyset$ si $x \in A$. Es decir, A no influye en $E - A$.
- Si A es a_R-abierto en esta pretopología, entonces $R(x) \subset A$ para todo $x \in A$. Por tanto, A es un conjunto de sectores que no reciben ninguna influencia de $E - A$.

Por tanto, esto significa lo siguiente:

Proposición 4.1. Sea (E, a_R) un espacio pretopológico, siendo $R = \Omega_s$, es decir, j influye en k si kRj. Al considerar los conjuntos a_R-abiertos y a_R-cerrados pueden darse los siguientes casos:

- Si A es a_R-abierto pero no a_R-cerrado, entonces $A = i_R(A) \subset a_R(A)$. Es decir, A no es influido por otros sectores pero sí influye en algunos sectores.

- Si A es a_R-cerrado pero no a_R-abierto, entonces $i_R(A) \subset A = a_R(A)$. Es decir, A no influye en ningún sector pero sí es influida por algunos sectores.
- Si A es a_R-abierto y a_R-cerrado, entonces se tiene que $i_R(A) = A = a_R(A)$, y por tanto A es un sector aislado.
- Si A no es a_R-abierto ni a_R-cerrado, entonces $i_R(A) \subset A \subset a_R(A)$, es decir, A es influido por algunos sectores e influye en otros sectores.

Este enfoque puede ser usado para caracterizar una estructura industrial, y analizar las variaciones económicas entre sectores. Otras posibles aplicaciones que pueden realizarse son, por ejemplo, la comparación de la producción de diferentes países mediante la comparación de las propiedades pretopológicas, el estudio comparativo de diferentes relaciones de influencia (por precios o cantidades, por suministro o demanda, ...), o la comparación de los efectos finales de diferentes políticas económicas.

Red de influencias de sectores económicos

Consideremos E, de nuevo, un conjunto finito de sectores económicos, con la relación R verificando que jRk si y solo si j influye en k. Se cumple que si $\mathcal{F}_j$ es un a_R-cerrado minimal, para cada $k \notin \mathcal{F}_j$ existe un camino de j a k, pero no al revés, es decir, existen sectores $j_1, j_2, \ldots, j_p$ tales que $jRj_1, j_1Rj_2, \ldots, j_pRk$. Por tanto se tiene que j es influido por j_1 , que a su vez es influido por j_2, etc. Esto significa que cualquier variación en la actividad de k induce una variación en la actividad de j a través de los sectores $j_p, j_{p-1}, \ldots, j_1$. Sin embargo, j no influye en k.
Nótese que si $h \in \mathcal{F}_j$, siendo un a_R-cerrado minimal, entonces $\mathcal{F}_j = \mathcal{F}_h$, por lo que j y h se influyen entre sí.
Los a_R-cerrados minimales corresponden a sectores o conjuntos de sectores que reciben influencia, pero no son influyentes. Así pues, considerando la familia

$$\mathfrak{F}_j = \{\mathcal{F}_k, k \in E \,|\, \mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}_k\}$$

el conjunto E se puede estructurar según los dos casos siguientes:

- Si $\mathfrak{F}_j = \emptyset$, entonces para cada $k \notin \mathcal{F}_j$ no existen caminos de k a j ni de j a k. Ello significa que $\mathcal{F}_j$ es un "bloque aislado".
- Si $\mathfrak{F}_j \neq \emptyset$, sea $\mathcal{F}_k$ uno de sus elementos minimales respecto a la relación de inclusión. Entonces todo sector en $\mathcal{F}_k - \mathcal{F}_j \neq \emptyset$ influye en j, ninguno es influido por j, y dos cualesquiera de ellos se influyen mutuamente.

Se repite el proceso, intentando localizar para $\mathfrak{F}_k$ conjuntos $\mathcal{F}_r$ con $\mathcal{F}_r - \mathcal{F}_k \neq \emptyset$, y así sucesivamente hasta encontrar $\mathfrak{F}_t = \emptyset$.

Ejemplo 4.1. Consideremos E un conjunto de 12 sectores cuyo operador de pseudoclausura, junto con sus a_R-cerrados minimales se indican en la siguiente tabla:

$(.)$	$a_R(.)$	${a_R}^2(.)$	${a_R}^3(.)$
1	$\{1, 11\}$	$\mathcal{F}(\{1\}) = \{1, 11\}$	
2	$\{2, 3\}$	$\mathcal{F}(\{2\}) = \{2, 3\}$	
3	$\{2, 3\}$	$\mathcal{F}(\{3\}) = \{2, 3\}$	
4	$\{1, 4, 7\}$	$\mathcal{F}(\{4\}) = \{1, 4, 7, 11, 2, 3\}$	
5	$\{4, 5, 6\}$	$\{1, 4, 5, 6, 7\}$	$\mathcal{F}(\{5\}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11\}$
6	$\{4, 5, 6, 7\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11\}$	$\mathcal{F}(\{6\}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11\}$
7	$\{2, 3, 4, 7, 11\}$	$\mathcal{F}(\{7\}) = \{1, 2, 3, 4, 7, 11\}$	
8	$\{8, 9, 12\}$	$\mathcal{F}(\{8\}) = \{8, 9, 12\}$	
9	$\{8, 9\}$	$\mathcal{F}(\{9\}) = \{8, 9, 12\}$	
10	$\{10, 11\}$	$\mathcal{F}(\{10\}) = \{1, 10, 11\}$	
11	$\{1, 11\}$	$\mathcal{F}(\{11\}) = \{1, 11\}$	
12	$\mathcal{F}(\{12\}) = \{8, 9, 12\}$		

Tabla 4.1: a_R-clausura de los conjuntos unitarios de E (conjuntos elementales y minimales)

Entonces, realizando el proceso anterior, se obtiene el siguiente diagrama:

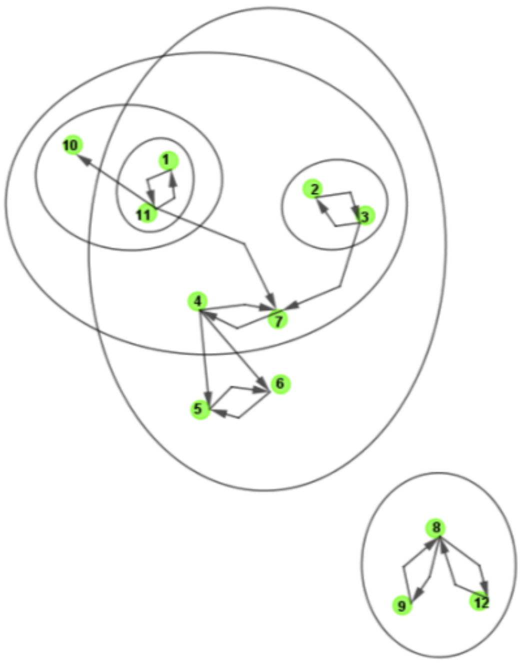


Figura 4.5: a_R-cerrados minimales y sus influencias

De él se deduce que $\{8, 9, 12\}$ es un bloque aislado, $\{1, 11\}$ y $\{2, 3\}$ no influyen en ninguno, pero son influidos por 4 y 7, que a su vez lo son por 5 y 6. Además, 10 influye en 11 y en 1.

4.2.2. Otros ejemplos en economía

A continuación se dan un par de ejemplos a pequeña escala, tomados de [9].

Matriz de compra-venta

Consideremos el conjunto E formado por comerciantes de alguna ciudad, que están relacionados por la relación de compra-venta estipulada de la siguiente forma: Sea Vyx el valor en miles de euros de las ventas del comerciante x al comerciante y, y sea Σ_x el valor de las ventas totales de x.
Definimos en E, que está formado por 10 comerciantes, la relación R:

$$xRy \text{ si y solo si } Vxy \text{ es mayor o igual al } 20\,\% \text{ de } \Sigma_y$$

es decir, el valor de las ventas de y a x representa más del 20 % del valor de las ventas totales de y.

La siguiente matriz es la matriz de compra-venta entre los comerciantes; el eje horizontal representa las compras o egresos, y el vertical representas las ventas o ingresos. La suma de las ventas coincide con la suma total de los gastos para cada comerciante.

x/y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$X
1		1	0	3	0	1	1	1	2	1	10
2	1		0	0	2	0	2	0	1	1	7
3	0	0		0	1	2	0	3	0	1	7
4	3	1	0		0	1	0	0	2	1	8
5	0	2	1	0		0	3	0	0	1	7
6	1	0	2	1	0		0	3	1	1	9
7	1	1	0	1	3	0		1	0	0	7
8	1	0	3	1	1	2	0		0	0	8
9	2	0	1	2	0	0	1	0		0	6
10	1	2	0	0	0	3	0	0	0		6
$\sum$Y	10	7	7	8	7	9	7	8	6	6	

Figura 4.6: Matriz de compra-venta

Ahora expresemos de manera sencilla la relación R para construir su gráfico a partir de la matriz compra-venta:

$$xRy\,\text{si y solo si } Vyx \geq 20\,\% \cdot \Sigma_y Vyx = \frac{\Sigma_y Vyx}{5}$$

es decir,

$$xRy \text{ si y solo si } 5\,Vyx \geq \Sigma_y Vyx$$

Recordemos que para xRy, Vyx corresponde a la fila y, columna x, que $\Sigma_x Vyx$ es la suma de los elementos en la columna x y que $\Sigma_y Vyx$ es la suma de los elementos de la fila y.

Veamos entonces que:

$$\begin{array}{cc}
V14 = 3,\ 5\cdot 3 > 8 = \Sigma_4 \longrightarrow 4R1 & V19 = 2,\ 5\cdot 2 > 6 = \Sigma_9 \longrightarrow 9R1 \\
V25 = 2,\ 5\cdot 2 > 7 = \Sigma_5 \longrightarrow 5R2 & V27 = 2,\ 5\cdot 2 > 7 = \Sigma_7 \longrightarrow 7R2 \\
V36 = 2,\ 5\cdot 2 > 9 = \Sigma_6 \longrightarrow 6R3 & V38 = 3,\ 5\cdot 3 > 8 = \Sigma_8 \longrightarrow 8R3 \\
V41 = 3,\ 5\cdot 3 > 10 = \Sigma_1 \longrightarrow 1R4 & V49 = 2,\ 5\cdot 2 > 6 = \Sigma_9 \longrightarrow 9R4 \\
V52 = 2,\ 5\cdot 2 > 7 = \Sigma_2 \longrightarrow 2R5 & V57 = 3,\ 5\cdot 3 > 7 = \Sigma_7 \longrightarrow 7R5 \\
V63 = 2,\ 5\cdot 2 > 7 = \Sigma_2 \longrightarrow 3R6 & V68 = 3,\ 5\cdot 3 > 8 = \Sigma_8 \longrightarrow 8R6 \\
V75 = 3,\ 5\cdot 3 > 7 = \Sigma_5 \longrightarrow 5R7 & \\
V83 = 3,\ 5\cdot 3 > 7 = \Sigma_3 \longrightarrow 3R8 & V86 = 2,\ 5\cdot 2 > 9 = \Sigma_6 \longrightarrow 6R8 \\
V91 = 2,\ 5\cdot 2 > 10 = \Sigma_1 \longrightarrow 1R9 & V94 = 2,\ 5\cdot 2 > 8 = \Sigma_4 \longrightarrow 4R9 \\
V102 = 2,\ 5\cdot 2 > 7 = \Sigma_2 \longrightarrow 2R10 & V106 = 3,\ 5\cdot 3 > 9 = \Sigma_6 \longrightarrow 6R10
\end{array}$$

Con esta información, obtenemos:

$$\begin{array}{cc}
\mathcal{R}^{-1}(\{1\}) = \{4,9\}, & \mathcal{R}^{-1}(\{2\}) = \{5,7\} \\
\mathcal{R}^{-1}(\{3\}) = \{6,8\}, & \mathcal{R}^{-1}(\{4\}) = \{1,9\} \\
\mathcal{R}^{-1}(\{5\}) = \{2,7\}, & \mathcal{R}^{-1}(\{6\}) = \{3,8\}, \\
\mathcal{R}^{-1}(\{7\}) = \{5\}, & \mathcal{R}^{-1}(\{8\}) = \{3,6\}, \\
\mathcal{R}^{-1}(\{9\}) = \{1,4\}, & \mathcal{R}^{-1}(\{10\}) = \{2,6\}
\end{array}$$

Y entonces el cuadro con las a_R-clausuras queda como se muestra a continuación.

x	$a_R(\{x\})$	${a_R}^2(\{x\})$	${a_R}^3(\{x\})$
1	$\{1,4,9\}$	$\mathcal{F}(\{1\}) = \{1,4,9\}$	
2	$\{2,5,7\}$	$\mathcal{F}(\{2\}) = \{2,5,7\}$	
3	$\{3,6,8\}$	$\mathcal{F}(\{3\}) = \{3,6,8\}$	
4	$\{1,4,9\}$	$\mathcal{F}(\{4\}) = \{1,4,9\}$	
5	$\{2,5,7\}$	$\mathcal{F}(\{5\}) = \{2,5,7\}$	
6	$\{3,6,8\}$	$\mathcal{F}(\{6\}) = \{3,6,8\}$	
7	$\{5,7\}$	$\{2,5,7\}$	$\mathcal{F}(\{7\}) = \{2,5,7\}$
8	$\{3,6,8\}$	$\mathcal{F}(\{8\}) = \{3,6,8\}$	
9	$\{1,4,9\}$	$\mathcal{F}(\{9\}) = \{1,4,9\}$	
10	$\{2,6,10\}$	$\{2,3,5,6,7,8,10\}$	$\mathcal{F}(\{10\}) = \{2,3,5,6,7,8,10\}$

Tabla 4.2: a_R-clausuras de los conjuntos unitarios de E

Los resultados anteriores nos dan la a_R-clausura de cada elemento x.
$\mathcal{F}(\{1\}) = \mathcal{F}(\{4\}) = \mathcal{F}(\{9\}) = \{1,4,9\}$; es un a_R-cerrado minimal
$\mathcal{F}(\{2\}) = \mathcal{F}(\{5\}) = \mathcal{F}(\{7\}) = \{2,5,7\}$, es un a_R-cerrado minimal
$\mathcal{F}(\{3\}) = \mathcal{F}(\{6\}) = \mathcal{F}(\{8\}) = \{3,6,8\}$, es un a_R-cerrado minimal
Quedaría $\mathcal{F}(\{10\})$ que no es a_R-cerrado minimal pues contiene a $\{2,5,7\}$ y $\{3,6,8\}$.

Matriz de contabilidad social

Nuestro objetivo ahora será caracterizar y ordenar las variables emdógenas de las Matrices de Contabilidad (MC). Mediante un espacio pretopológico (E, a_R) y los conceptos de pseudoclausura inducida por R, a_R-clausura y a_R-cerrados minimales, se articula un marco general que permite la caracterización de relaciones existentes en una MCS.

Al definir una relación de influencia es posible caracterizar los impactos que resultan de aplicar una polític pública en función de diferentes criterios que apuntan al logro de diferentes objetivos económicos preestablecidos. Por lo tanto, a partir de las estructuras pretopológicas definidas en las cuentas de las MC se construye una metodología que permite caracterizar, según una relación de influencia predefinida, la secuencia en que las actividades son estimuladas como resultado de una política pública.

Para mostrar todo esto, vamos a considerar la matriz de coeficientes técnicos de la matriz de contabilidad de Venezuela del 2005 agregada.

Transacciones	Código	Año 2005										
		c1	c2	c3	a1	a2	a3	reo	ee	ins	hog	bys
Productos	c1				0,020	0,080	0,003					0,043
	c2				0,003	0,004	0,015					
	c3				0,149	0,571	0,356					0,957
Actividades	a1	0,919	0,000	0,210								
	a2	0,001	0,002	0,267								
	a3	0,000	0,997	0,352								
Factores de producción	reo				0,097	0,118	0,450					
	ee				0,726	0,213	0,162					
Distribución del ingreso	ins								0,948	0,035	0,078	
	hog							1,000	0,052	0,089	0,038	
Consumo	bys										0,837	
Impuestos y Gobierno General	imp	0,003	0,001	0,050	0,004	0,013	0,014					
	gg								0,001	0,360	0,059	
Cuenta capital	cc									0,466	-0,013	
Cuenta financiera	cf											
Resto del mundo	cor	0,077		0,122				0,000		0,050	0,002	
	cap											
Total		1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Figura 4.7: Matriz de coeficientes

Dados $x, z \in E$ se quiere encontrar la relación R donde la condición es que z le compre a x en una proporción mayor o igual a 0'5. Tendremos xRy si y solo si $2 \cdot V_{zx} \geq 1$, con V_{zx} los coeficientes que aparecen en la posición (x, z). A partir de la matriz anterior se construye la matriz de relaciones siguiente, donde los 1 representan los pares $(x, z) \in R$. Además consideramos que la relación es reflexiva.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1										
2		1									
3			1		1						1
4	1			1							
5					1						
6		1				1					
7							1				
8				1				1			
9								1	1		
10							1			1	
11										1	1

Tabla 4.3: Representación de los elementos de R

Por tanto, el conjunto de relaciones viene dado por: $1R1, 4R1, 2R2, 6R2, 3R3, 4R4, 8R4, 3R5, 5R5, 6R6, 7R7, 10R7, 8R8, 9R8, 9R9, 10R10, 11R10, 3R11, 11R11$. Se obtiene el siguiente cuadro:

z	$a_R(\{z\})$	${a_R}^2(\{z\})$	${a_R}^3(\{z\})$	${a_R}^4(\{z\})$	$\mathcal{F}(\{z\})$
1	$\{1,4\}$	$\{1,4,8\}$	$\{1,4,8,9\}$	a_R^3	$\{1,4,8,9\}$
2	$\{2,6\}$	a_R	a_R	a_R	$\{2,6\}$
3	$\{3\}$	a_R	a_R	a_R	$\{3\}$
4	$\{4,8\}$	$\{4,8,9\}$	a_R^2	a_R^2	$\{4,8,9\}$
5	$\{3,5\}$	a_R	a_R	a_R	$\{3,5\}$
6	$\{6\}$	a_R	a_R	a_R	$\{6\}$
7	$\{7,10\}$	$\{7,10,11\}$	$\{7,10,11,3\}$	a_R^3	$\{7,10,11,3\}$
8	$\{8,9\}$	a_R	a_R	a_R	$\{8,9\}$
9	$\{9\}$	a_R	a_R	a_R	$\{9\}$
10	$\{10,11\}$	$\{10,11,3\}$	a_R^2	a_R^2	$\{10,11,3\}$
11	$\{3,11\}$	a_R	a_R	a_R	$\{3,11\}$

Tabla 4.4: a_R-clausura de los conjuntos unitarios de E (a-cerrados elementales)

Se tiene que $\mathcal{F}(\{3\})$, $\mathcal{F}(\{6\})$ y $\mathcal{F}(\{9\})$ son a_R-cerrados minimales.
Las relaciones de influencia finales vienen dadas por los siguientes diagramas:

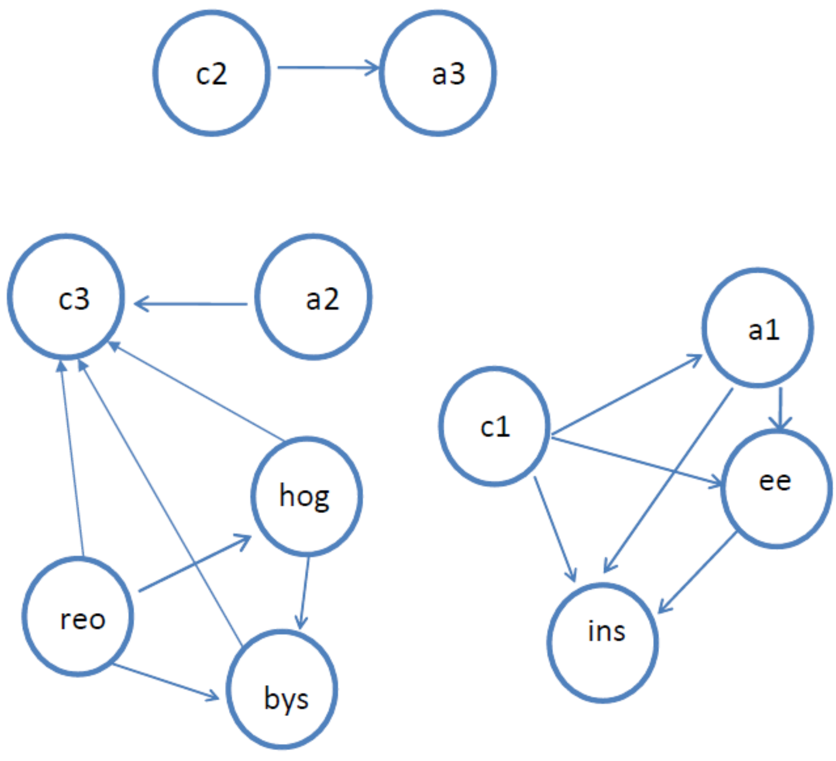


Figura 4.8: Representación de los diagramas de influencias

Partiendo de la realción establecida, el primer diagrama nos dice que la actividad $a3$ está influida por el bien $c2$, a través de los pagos que hace el bien $c2$ a la actividad $a3$.
De igual forma, el segundo diagrama muestra como el bien $c3$ está influido de forma directa por la actividad $a2$ a través de los pagos que hace esa actividad al bien $c3$. En el mismo diagrama se observa las transferencias directas que hacen las remuneraciones (reo) a los hogares (hog), que a su vez demandan bienes y servicios (bys), para estos demandar a su vez el bien $c3$.
En el tercer diagrama se observa como las instituciones (ins) son influidas por los pagos que hace el excedente de explotación (ee) a instituciones (ins). Pero (ee) está influido por la actividad $a1$ por los pagos que hace la actividad $a1$ al (ee). A su vez, la actividad $a1$ está influida por el bien $c1$, por el uso que hace la actividad $a1$ del producto $c1$. En el caso de $a1$ está influida solo por $c1$.

Estos diagramas nos pueden dar una idea clara sobre las relaciones que existen entre las cuentas, algo que no es evidente al observar la matriz de coeficientes que se obtiene en una primera instancia. Así, por ejemplo, si se quieren estimular las instituciones (ins), se puede conseguir estimulando la producción de $c1$ o $a1$.

Bibliografía

[1] Auray, J.P. (1982). *Contribution à l'etude des structures pauvres.* (Doctoral dissertation).

[2] Auray, J. P., Bonnevay, S., Bui, M., Duru, G., Lamure, M. (2009). *Prétopologie et applications: un état de l'art.* Stud. Inform. Univ., 7(1), 25-44.

[3] Auray, J. P., Duru, G., Mougeot, M. (1979). *A pre-topological analysis of the input-output model.* Economics Letters, 2(4), 343-347.

[4] Aldous, J.M, Wilson, R.J. (2003).*Graphs and applications: an introductory approach.* Springer Science and Business Media.

[5] Basileu, C., Kabachi, N., Lamure, M. *Pretopological structuring of a finite set endowed with a family of binary relationships.* Intelligences Journal, Number 2.

[6] Belmandt, Z. (2011).*Basics of pretopology.* Hermann.

[7] Brissaud, M.(1975). *Les espaces prétopologiques.* CR Acad. Sc. Paris Ser. A, 280, 705-708.

[8] Čech, E., Frolík, Z., Katětov, M. (1966). *Topological spaces.* Interscience Publishers; Revised edition.

[9] Contreras, J., Guarata, N., Reyes, A. (2011). *Caracterización de las variables de una matriz de contabilidad social mediante la teoría de la pretopología.* Economía, 36(32), 139-167.

[10] Dalud-Vincent, M. (1994). *Modèle prétopologique pour une méthodologie dánalyse de réseaux: concepts et algorithmes.* Doctoral dissertation, Lyon 1.

[11] Dalud-Vincent, M., Lamure, M. (2016). *Connectivities for a symmetric pretopology.* International Journal of Pure and Applied Mathematics, 111(1), 77-90.

[12] Duru, G. (1980). *Contribution à l'étude des structures des systèmes complexes dans les sciences humaines.* (Doctoral dissertation).

[13] Engelking, R. (1989). *General topology.* Sigma series in pure mathematics.

[14] Galton, A. (2003). *A generalized topological view of motion in discrete space.* Theoretical Computer Science, 305(1-3), 111-134.

[15] Kong, T. Y., Rosenfeld, A. (1989). *Digital topology: Introduction and survey.* Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 48(3), 357-393.

[16] Lamure, M. (1987). *Espaces abstraits et reconnaissance des formes: applications au traitment des images digitales.* Université Lyon, 1.

[17] Levorato, V. (2008). *Contributions à la modélisation des réseaux complexes: prétopologie et applications.* Doctoral dissertation, Université Paris VIII Vincennes-Saint Denis.

[18] Levorato, V. (2011, June). *Modeling groups in social networks.* In (ECMS) (pp. 129-134).

[19] Levorato, V., Bui, M. (2007, June). *Modeling the complex dynamics of distributed communities of the web with pretopology.* In (I2CS) (p. 2).

[20] Petermann, C., Levorato, V., Bui, M. (2012). *Structuration unilatéralement-connexe prétopologique: une extension de la librairie PretopoLIB.* Intelligences Journal, Full text issues, Number 2.

[21] Stadler, B. M., Stadler, P. F. (2002). *Basic properties of closure spaces.* J. Chem. Inf. Comput. Sci, 42, 577-585.