



FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y ANÁLISIS NUMÉRICO

Trabajo Fin de Grado

**Estudio de modelos de ecuaciones diferenciales en  
Neurociencia. El sistema de FitzHugh-Nagumo.**

Rut Carballés Balsa

---

Dirigido por:  
Soledad Fernández García  
Cristian Morales Rodrigo

2018



# Abstract

In this work, we will consider the study of the FitzHugh-Nagumo system, a simplification of the well-known Hodgkin-Huxley model of spike generation of neurons. We will study the FitzHugh-Nagumo system from the point of view of dynamical systems and bifurcation theory. In particular, we will focus, among others, in the Hopf bifurcation and the associated canard explosion.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>1. Conceptos Básicos</b>	<b>9</b>
1.1. Existencia y Unicidad . . . . .	9
1.2. Geometría de Flujos . . . . .	12
1.2.1. El Flujo de un Sistema Autónomo . . . . .	12
1.2.2. Puntos de Equilibrio y Estabilidad . . . . .	15
1.2.3. Órbitas . . . . .	16
1.2.4. Retrato de fases . . . . .	17
<b>2. Sistemas Lineales Planos</b>	<b>19</b>
2.1. Propiedades de solución de los sistemas lineales . . . . .	19
2.2. Reducción a forma canónica . . . . .	20
2.3. Clasificación de los puntos críticos . . . . .	22
2.4. Equivalencia de flujo . . . . .	27
2.4.1. Teorema de Grobman - Hartman . . . . .	29
<b>3. Órbitas periódicas y bifurcaciones</b>	<b>31</b>
3.1. Órbitas periódicas . . . . .	31
3.1.1. Teorema de Poincaré - Bendixson . . . . .	31
3.1.2. Estabilidad de las órbitas periódicas . . . . .	33
3.2. Bifurcaciones y órbitas periódicas . . . . .	36
3.2.1. Bifurcaciones elementales en dimensión uno . . . . .	36
3.2.2. Bifurcaciones elementales en dimensión dos . . . . .	44
3.2.3. Bifurcaciones locales de órbitas periódicas . . . . .	50
3.3. Bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf . . . . .	52
3.3.1. Transformación de un sistema autónomo a coordenadas polares . . . . .	52
3.3.2. Estabilidad . . . . .	54
3.3.3. Bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf . . . . .	56
<b>4. El Modelo de FitzHugh-Nagumo</b>	<b>63</b>
4.1. El Oscilador de Van der Pol . . . . .	64
4.1.1. La ecuación de Van der Pol . . . . .	64

4.1.2.	Existencia de órbitas periódicas y unicidad en el oscilador de Van der Pol . . . . .	67
4.2.	Bifurcación singular de Hopf y explosión canard . . . . .	72
4.2.1.	La variedad crítica y el flujo lento en la ecuación de Van der Pol . .	72
4.2.2.	Bifurcación de Hopf y explosión canard . . . . .	74
4.3.	Modelo de FitzHugh-Nagumo . . . . .	76
4.3.1.	Condiciones para la existencia de los puntos de equilibrio . . . . .	77
4.3.2.	Estabilidad . . . . .	79
4.3.3.	Bifurcación silla-nodo . . . . .	80
4.3.4.	Bifurcación de Andronov-Hopf . . . . .	83

# Introducción

Este trabajo viene motivado por el conocimiento de la actividad neuronal. Las neuronas están continuamente recibiendo y transmitiendo impulsos nerviosos eléctricos entre ellas. Estas señales a menudo permanecen pasivas en la neurona hasta que la estimulación total alcanza cierto umbral y la neurona reacciona a dicha estimulación. Este concepto es lo que se conoce como sinapsis.

En los años 50 se hicieron grandes progresos con el fin de comprender los sucesos involucrados en la actividad y comunicación entre neuronas. A nivel microscópico, el modelo más relevante es el conocido modelo de Hodgkin-Huxley (H-H) (Alan Lloyd Hodgkin y Andrew Fielding Huxley (1952), [5]), por el cual se les concedió a sus autores el premio nobel de medicina en 1963. Este modelo describe cómo se inician y transmiten los potenciales de acción en las neuronas. El sistema consiste en un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales que aproxima las características eléctricas de células excitables, como las neuronas.

El análisis matemático del sistema de HH es complejo, por lo que a lo largo de los años han surgido numerosas simplificaciones del modelo original, que capturan parte de la dinámica del sistema. Entre dichos modelos simplificados, cabe destacar el modelo de FitzHugh-Nagumo (FH-N), [7], desarrollado independientemente por R. FitzHugh (1961) y J. Nagumo (1962), el cual mantiene las características esenciales del sistema completo. Este modelo, que estudiaremos en el Capítulo 4 está basado en la ecuación de Van der Pol, y es un modelo que exhibe, para distintos valores del parámetro  $I$ , representando un estímulo externo, dos tipos de comportamiento que son importantes en sistemas neuronales, y en otros sistemas biológicos: la excitabilidad y los ciclos límite globalmente estables.

Para el análisis del modelo FH-N, es necesario recordar ciertos conceptos básicos de las ecuaciones diferenciales, así como, aprender herramientas de la teoría de bifurcaciones de los sistemas dinámicos. En particular, el trabajo se divide en cuatro capítulos. En el Capítulo 1, enunciaremos algunos conceptos básicos sobre la geometría de soluciones de las ecuaciones diferenciables ordinarias  $n$  dimensionales. Además, introduciremos los conceptos y las herramientas necesarias para el esbozo del retrato de fases de un sistema autónomo. El estudio que haremos en el Capítulo 2, es un estudio sobre la naturaleza de los equilibrios de sistemas lineales planos a partir de la matriz de coeficientes del sistema. Finalizaremos enunciando el Teorema de Grobman-Hartman sobre la equivalencia de flujos de sistemas en un entorno de puntos de equilibrio hiperbólicos. El Capítulo 3, está dedicado al estudio del análisis y la estabilidad de órbitas periódicas y de la teoría de bifur-

caciones, tanto en dimensión uno como en dimensión dos. Mostraremos las bifurcaciones más usuales en dimensión uno, las cuales, a continuación, extenderemos a dimensión dos. Para finalizar, estudiaremos el modelo de FH-N basado en la ecuación de Van der Pol, donde hablaremos de la existencia y estabilidad de órbitas periódicas y analizaremos la existencia de diferentes tipos de bifurcación en función de los diferentes parámetros que el sistema de FH-N presenta [2]. En particular, nos centraremos en la bifurcación silla-nodo, en la bifurcación de Hopf y en la explosión canard asociada a la misma.

# Capítulo 1

## Conceptos Básicos

En este capítulo expondremos algunos conceptos básicos sobre la geometría de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias  $n$  dimensionales. Para su realización, hemos consultado la referencia [4]. Después de una breve introducción de la notación que usaremos a lo largo de este trabajo, enunciaremos el teorema de existencia y unicidad de solución. Además, definiremos algunos conceptos como campo vectorial, punto de equilibrio, estabilidad, órbita y conjunto límite que nos facilitarán el análisis cualitativo.

### 1.1. Existencia y Unicidad

Sea  $I$  un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$  y sea

$$\begin{aligned} x : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto (x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

una función diferenciable real de una variable real  $t$ . Usaremos la notación  $x'$  para denotar la derivada  $dx/dt$ , siendo  $t$  el tiempo o la variable independiente. Además, sea

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \end{aligned}$$

$n$  funciones vectoriales dadas. Consideraremos las ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ x'_n = f_n(x_1, \dots, x_n), \end{cases} \quad (1.1)$$

donde  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , es una función que depende de  $t$ . El sistema (1.1) se denomina *sistema de ecuaciones diferenciales autónomas  $n$ -dimensional*.

Empecemos nuestro estudio del sistema (1.1) desarrollando una notación básica. Para ello, será conveniente usar negrita para denotar cantidades vectoriales. Por tanto, si denotamos por  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  y  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ , entonces el sistema (1.1) lo podemos escribir como

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (1.2)$$

Diremos que la función  $\mathbf{x}$  es solución del sistema (1.2) en el intervalo  $I$  si  $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ ,  $\forall t \in I$ .

A menudo estaremos interesados en una *solución particular* del sistema (1.2) que en el momento inicial  $t_0 \in I$  toma el valor  $\mathbf{x}_0$ . Así, estudiaremos  $\mathbf{x}$  satisfaciendo

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

El problema (1.3) se denomina *problema de valor inicial* y cualquiera de sus soluciones se llama *solución que pasa por  $\mathbf{x}_0$  en  $t_0$* .

Nuestro objetivo es entender, tanto como sea posible, el comportamiento cualitativo de las soluciones de las ecuaciones diferenciales sin el conocimiento de una fórmula explícita de las soluciones. Para ello, se necesitan ciertas condiciones de la función  $\mathbf{f}$  que nos garanticen la existencia y unicidad de las soluciones del problema de valor inicial.

Denotaremos por  $\mathbf{C}^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  al conjunto de funciones continuas de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  el conjunto de funciones diferenciables cuya primera derivada es continua. Análogamente, usaremos  $\mathbf{C}^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  para denotar las funciones con derivada de orden  $m$  continua. Si el dominio de las funciones es un subconjunto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , entonces usaremos la notación  $\mathbf{C}^0(U, \mathbb{R}^n)$ .

Para enfatizar la dependencia de una solución de  $\mathbf{x}(t)$  del problema (1.3) que pasa por  $\mathbf{x}_0$  en  $t_0 = 0$ , usaremos la notación  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  para dicha solución. En otras palabras,

$$\begin{cases} \varphi(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t), \\ \varphi(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

**Definición 1.1.1.** *La norma en  $\mathbb{R}^n$  es una función*

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\longmapsto \|\mathbf{x}\| \end{aligned}$$

que satisface las siguientes propiedades para cualquier vector  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}^1$  y  $\mathbf{x}^2$  en  $\mathbb{R}^n$ , y cualquier escalar  $a \in \mathbb{R}$ :

1.  $\|\mathbf{x}\| \geq 0$  y  $\|\mathbf{x}\| = 0$  si y sólo si  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ;

2.  $\|\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2\| \leq \|\mathbf{x}^1\| + \|\mathbf{x}^2\|$  (desigualdad triangular);

3.  $\|a\mathbf{x}\| = |a|\|\mathbf{x}\|$ .

Para la norma  $\|\cdot\|$  dada, definimos la distancia entre dos vectores  $\mathbf{x}^1$  y  $\mathbf{x}^2$  como  $\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\|$ . La norma Euclídea (longitud) de un vector  $\mathbf{x}$  la definimos como

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

A veces, podría ser más conveniente usar otras normas u otras distancias. Por ejemplo, la norma del máximo definida por

$$\|\mathbf{x}\|_{\text{máx}} = \text{máx}(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|).$$

La norma del máximo y la norma Euclídea son consideradas equivalentes porque para cualquier  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  tenemos

$$\|\mathbf{x}\|_{\text{máx}} \leq \|\mathbf{x}\| \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_{\text{máx}}.$$

Una implicación geométrica de sus equivalencias es que un “círculo” centrado en el origen en una de las normas puede estar inscrito entre dos “círculos” en la otra norma, y viceversa. Su representación gráfica se puede ver en la Figura 1.1:

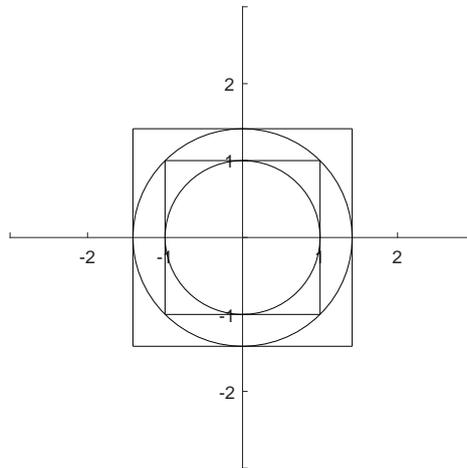


Figura 1.1: Equivalencia entre la norma Euclídea y la norma del máximo.

**Teorema 1.1.1. (Existencia y Unicidad de Solución)**

1. Si  $\mathbf{f} \in \mathbf{C}^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , entonces, para cualquier  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , existe un intervalo (posiblemente infinito)  $I_{x_0} \equiv (\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})$  conteniendo  $t_0 = 0$  y la solución  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  del problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

definida  $\forall t \in I_{x_0}$ , satisfaciendo la condición inicial  $\varphi(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ .

Además, si  $\alpha_{x_0}$  es finito, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \alpha_{x_0}^+} |\varphi(t, x_0)| = +\infty,$$

o, si  $\beta_{x_0}$  es finito, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \beta_{x_0}^-} |\varphi(t, x_0)| = +\infty.$$

2. Si, además,  $\mathbf{f} \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , entonces  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  es único en  $I_{x_0}$  y  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  es continua en  $(t, \mathbf{x}_0)$  junto con su primera derivada parcial, esto es,  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  es una función de  $\mathbf{C}^1$ .

Denominaremos *máximo intervalo de existencia* al mayor intervalo posible  $I_{x_0}$  en el apartado 1 del teorema anterior.

En aplicaciones, la función  $f$  puede no estar definida en todo  $\mathbb{R}^n$ . Una situación común es aquella en la que  $\mathbf{f} \in \mathbf{C}^n(U, \mathbb{R}^n)$ , donde  $U$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . En este caso, las conclusiones del teorema anterior son las mismas a excepción de los puntos límite de  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  cuando  $t \rightarrow \alpha_{x_0}^+$  (o  $t \rightarrow \beta_{x_0}^-$ ) que pertenecerían a  $U$ .

## 1.2. Geometría de Flujos

En esta sección, en primer lugar, reconsideraremos el sistema (1.2) y su flujo  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  desde el punto de vista geométrico. A continuación, introduciremos el concepto de punto de equilibrio y enunciaremos varios teoremas que determinan el flujo cerca del punto de equilibrio. Para finalizar, definiremos los conceptos de órbita, punto límite y explicaremos cómo esbozar un retrato de fases.

### 1.2.1. El Flujo de un Sistema Autónomo

El sistema  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  puede interpretarse como un campo vectorial, y sus soluciones son curvas llamadas *curvas integrales de  $\mathbf{f}$*  que son tangentes a este campo vectorial en cada punto de sus trayectorias.

Sea  $\mathbf{f}$  una función de  $\mathbf{C}^1$  dada, el Teorema 1.1.1 implica que todas las soluciones particulares de  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  pueden estar representadas por  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$ , visto como una función de  $n$  variables, donde  $t \in I_{x_0}$  y  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ . De este modo,  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  es lo que se conoce como *flujo* de  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ .

Si  $\mathbf{f}$  es una función de  $\mathbf{C}^1$ , entonces, para cada  $t$ , el flujo  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  da lugar a una aplicación de  $\mathbb{R}^n$  en sí mismo dada por  $\mathbf{x}_0 \mapsto \varphi(t, \mathbf{x}_0)$ .

A continuación, enunciaremos algunas propiedades importantes de las aplicaciones:

**Propiedades 1.2.1.** *Dada una aplicación en  $\mathbb{R}^n$ .*

1.  $\varphi(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ ,
2.  $\varphi(t + s, \mathbf{x}_0) = \varphi(t, \varphi(s, \mathbf{x}_0))$  para cada  $t$  y  $s$  cuando la aplicación está definida,
3.  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  es una aplicación  $\mathbf{C}^1$  para cada  $t$  cuya inversa es  $\mathbf{C}^1$  y viene dada por  $\varphi(-t, \mathbf{x}_0)$ .

Una aplicación de  $\mathbb{R}^n$  en sí misma satisfaciendo estas tres propiedades se denomina *sistema dinámico  $\mathbf{C}^1$  en  $\mathbb{R}^n$* .

En conclusión, el flujo de un sistema de ecuaciones diferenciales autónomas da lugar a un sistema dinámico en  $\mathbb{R}^n$ .

Ahora, reconsideremos el sistema  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  y su flujo  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  desde el punto de vista geométrico. En cada punto del plano- $(t, \mathbf{x})$  donde  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  está definida, la parte derecha del sistema (1.1) nos da el valor de la derivada  $d\mathbf{x}/dt$ , la cual puede considerarse como la pendiente de un segmento de recta pasando por el punto. La colección de todos los segmentos de recta se denomina *campo de direcciones* del sistema (1.1). El gráfico de una solución del sistema (1.3) que pasa por  $\mathbf{x}_0$  se denomina *trayectoria a través de  $\mathbf{x}_0$* . La trayectoria en espiral del oscilador armónico lineal

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -x_1, \end{cases} \quad (1.4)$$

se muestra en la Figura 1.1.

En otras palabras, el subconjunto del plano- $(t, \mathbf{x})$  definido por  $\{(t, \varphi(t, \mathbf{x}_0)) : t \in I_{x_0}\}$ . La trayectoria es tangente a los segmentos de recta del campo de direcciones en cada punto del plano por el que pasa. Dado que  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  no depende de  $t$ , en cualquier recta paralela del eje  $t$  todos los segmentos del campo de direcciones tienen la misma pendiente. Por tanto, podemos considerar la proyección sobre  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  del campo de direcciones y de las trayectorias del sistema (1.1). A cada punto  $\mathbf{x}$  donde  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  está definida, podemos asociar el vector desde  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . La colección de dichos vectores se denomina *campo vectorial  $\mathbf{f}$* .

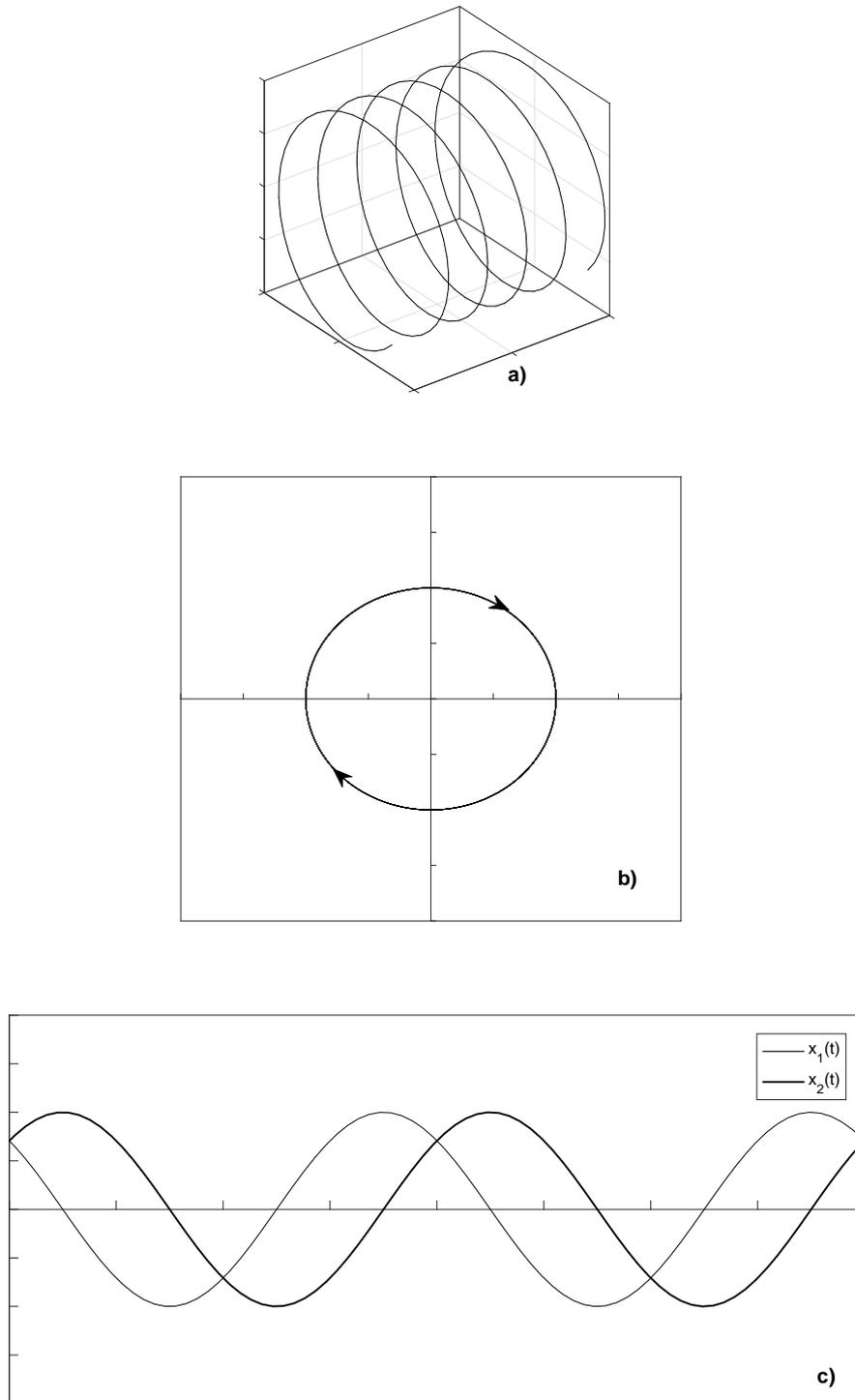


Figura 1.2: (a) trayectoria en el espacio tridimensional  $(t, x_1, x_2)$ ; (b) órbita circular resultante de proyectar la trayectoria de la hélice en el plano  $(x_1, x_2)$ ; (c) representación de  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  en función de  $t$ .

### 1.2.2. Puntos de Equilibrio y Estabilidad

**Definición 1.2.1.** Un punto  $\bar{\mathbf{x}}$  se denomina punto de equilibrio o punto crítico de  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  si  $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ .

**Definición 1.2.2.** Un punto de equilibrio  $\bar{\mathbf{x}}$  del sistema (1.1) se dice estable si dado  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que, para cualquier  $\mathbf{x}_0$  con  $\|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$ , la solución  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  del sistema (1.1) a través de  $\mathbf{x}_0$  en  $t = 0$  satisface la desigualdad  $\|\varphi(t, \mathbf{x}_0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \epsilon$ ,  $\forall t \geq 0$ . El punto de equilibrio  $\bar{\mathbf{x}}$  es inestable si no es estable.

**Definición 1.2.3.** Un punto de equilibrio  $\bar{\mathbf{x}}$  se dice que es asintóticamente estable si es estable y, además, si existe  $r > 0$  tal que  $\|\varphi(t, \mathbf{x}_0) - \bar{\mathbf{x}}\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  para todo  $\mathbf{x}_0$  satisfaciendo  $\|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < r$ .

En el siguiente teorema, estudiaremos la estabilidad de los puntos de equilibrios de los sistemas lineales, siendo  $\mathbf{A}$  la matriz de coeficientes del sistema.

**Teorema 1.2.1.** Si todos los autovalores de la matriz de coeficientes  $\mathbf{A}$  en el sistema lineal  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$  tienen parte real negativa, entonces el punto de equilibrio  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  es asintóticamente estable. Además, existen constantes positivas  $K$  y  $\alpha$  tales que

$$\|e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0\| \leq Ke^{-\alpha t}\|\mathbf{x}_0\|, \quad \forall t \geq 0, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Si uno de los autovalores de la matriz de coeficientes  $\mathbf{A}$  tiene parte real positiva, entonces el punto de equilibrio  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  es inestable.

El tipo de estabilidad de un punto de equilibrio es una propiedad local. Por consiguiente, es de esperar que bajo ciertas condiciones el tipo de estabilidad de  $\bar{\mathbf{x}}$  se pueda aproximar por el campo vectorial  $\mathbf{f}$  con sus derivadas, el cual es un campo vectorial lineal. Para ello, supongamos  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  una función de  $\mathbf{C}^1$  y sea

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

la matriz Jacobiana de  $\mathbf{f}$  en el punto  $\mathbf{x}$ .

**Definición 1.2.4.** Si  $\bar{\mathbf{x}}$  es un punto de equilibrio de  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , entonces la ecuación diferencial lineal

$$\mathbf{x}' = D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{x}$$

se denomina ecuación lineal variacional o la linealización del campo vectorial  $\mathbf{f}$  en el punto de equilibrio  $\bar{\mathbf{x}}$ .

**Teorema 1.2.2.** *Sea  $\mathbf{f}$  una función de  $\mathcal{C}^1$ . Si todos los autovalores de la matriz Jacobiana  $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$  tienen parte real negativa, entonces el punto de equilibrio  $\bar{\mathbf{x}}$  de la ecuación diferencial  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  es asintóticamente estable.*

**Teorema 1.2.3.** *Sea  $\mathbf{f}$  una función de  $\mathcal{C}^1$ . Si al menos uno de los autovalores de la matriz Jacobiana  $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$  tienen parte real positiva, entonces el punto de equilibrio  $\bar{\mathbf{x}}$  de la ecuación diferencial  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  es inestable.*

### 1.2.3. Órbitas

**Definición 1.2.5.** *Se definen la órbita positiva de un punto  $\mathbf{x}_0$  como*

$$\gamma^+(\mathbf{x}_0) = \bigcup_{t \in [0, \beta_{\mathbf{x}_0})} \varphi(t, \mathbf{x}_0),$$

*la órbita negativa de  $\mathbf{x}_0$  como*

$$\gamma^-(\mathbf{x}_0) = \bigcup_{t \in (\alpha_{\mathbf{x}_0}, 0]} \varphi(t, \mathbf{x}_0),$$

*y la órbita de  $\mathbf{x}_0$  como*

$$\gamma(\mathbf{x}_0) = \gamma^+(\mathbf{x}_0) \cup \gamma^-(\mathbf{x}_0) = \bigcup_{t \in (\alpha_{\mathbf{x}_0}, \beta_{\mathbf{x}_0})} \varphi(t, \mathbf{x}_0).$$

La velocidad de una órbita  $\gamma(\mathbf{x}_0)$  en el punto  $\mathbf{x}_0$  viene dada por el campo vectorial en ese punto.

Por tanto, en un sistema de ecuaciones diferenciales, la colección de todas las órbitas junto con las sus direcciones es lo que se denomina *retrato de fase* del sistema.

El concepto de conjunto de puntos límite de una órbita en un sistema de ecuaciones diferenciales viene dado por la siguiente definición.

**Definición 1.2.6.** *Dada una órbita  $\gamma$ , diremos que*

- *Un punto  $\mathbf{y}$  es un punto  $\omega$ -límite de la órbita  $\gamma(\mathbf{x}_0)$  si existe una sucesión de tiempos  $t_j \rightarrow \beta_{\mathbf{x}_0}$  tal que  $\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi(t_j, \mathbf{x}_0) = \mathbf{y}$ .*

*Esto es,  $\mathbf{y}$  es un punto  $\omega$ -límite de la órbita  $\gamma(\mathbf{x}_0)$  si, para cualquier  $\varepsilon > 0$  existen  $t(\varepsilon)$  cercanos a  $\beta_{\mathbf{x}_0}$  tales que  $\|\mathbf{y} - \varphi(t(\varepsilon), \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ . El conjunto de todos los puntos  $\omega$ -límite de la órbita  $\gamma(\mathbf{x}_0)$  se denomina conjunto  $\omega$ -límite de la órbita  $\gamma(\mathbf{x}_0)$  y se denota por  $\omega(\mathbf{x}_0)$ .*

*Una definición equivalente de  $\omega(\mathbf{x}_0)$  la cual geométricamente es más sencilla de entender es*

$$\omega(\mathbf{x}_0) = \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\gamma^+(\varphi(\tau, \mathbf{x}_0))}.$$

- Un punto  $\mathbf{y}$  es un punto  $\alpha$ -límite de la órbita  $\gamma(\mathbf{x}_0)$  si existe una sucesión de tiempos  $t_j \rightarrow \alpha_{\mathbf{x}_0}$  tal que  $\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi(t_j, \mathbf{x}_0) = \mathbf{y}$ .

El conjunto de todos los puntos  $\alpha$ -límite de la órbita  $\gamma(\mathbf{x}_0)$  se denomina conjunto  $\alpha$ -límite de la órbita  $\gamma(\mathbf{x}_0)$  y se denota por  $\alpha(\mathbf{x}_0)$ .

Una definición geométrica equivalente de  $\alpha(\mathbf{x}_0)$  es

$$\alpha(\mathbf{x}_0) = \bigcap_{\tau \leq 0} \overline{\gamma^-(\varphi(\tau, \mathbf{x}_0))}.$$

### 1.2.4. Retrato de fases

Sea  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  un sistema autónomo. En nuestro sistema,  $\mathbf{x}$  es un punto en el plano de fases y  $\mathbf{x}'$  representa la velocidad del vector en ese punto. Fluyendo a lo largo del campo vectorial, un punto de fase genera una solución  $\mathbf{x}(t)$ , que corresponde a la *trayectoria* a través del plano de fases. Además, todo el plano de fases está lleno de trayectorias, ya que cada punto puede desempeñar el papel de una condición inicial.

Para sistemas no lineales, normalmente no hay esperanza de encontrar las trayectorias analíticamente. Incluso cuando hay fórmulas explícitas disponibles, a menudo son demasiado complicadas para proporcionar mucha información. En cambio, trataremos de determinar el comportamiento cualitativo de las soluciones. Nuestro objetivo es encontrar el retrato de fases del sistema directamente a partir de las propiedades de  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ .

A veces, también nos interesarán los aspectos cuantitativos del retrato de fases. Para la simulación numérica de las soluciones, usaremos el método de Runge Kutta.

Cuando queremos obtener el retrato de fases de un sistema  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , en primer lugar obtenemos los puntos de equilibrio,  $\bar{\mathbf{x}}$ , resolviendo  $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$ . Una vez hecho esto, estudiamos la estabilidad de cada uno de los puntos de equilibrio obtenidos y trazamos el campo de direcciones usando pequeñas flechas para indicar la dirección local del flujo.

Una idea muy útil para dibujar y analizar los campos de direcciones, es representar lo que denominaremos *nulclinas* e *isoclinas*.

Definimos el concepto de *isoclina* como el conjunto de puntos en el campo de direcciones para el cual hay una constante  $c$  tal que  $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{c}$  en dichos puntos. Geométricamente, las flechas del campo de direcciones en los puntos de las isoclinas tienen todos la misma pendiente. Algebraicamente, las isoclinas son aquellas que verifican que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$  para  $\mathbf{c}$  constante.

Un caso particular de isoclina es lo que denominaremos *nulclina* que se define como el conjunto de puntos en el campo de direcciones que verifican que  $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{0}$ . Geométricamente, estos son los puntos donde los vectores son horizontales o verticales. Algebraicamente, las nulclinas son las funciones que obtenemos resolviendo  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ .



# Capítulo 2

## Sistemas Lineales Planos

En este capítulo, hablaremos de una clase especial de sistemas autónomos planos donde el campo vectorial viene dado por una aplicación lineal. Para su elaboración, hemos utilizado las referencias [4] y [8]. Usando ciertas propiedades de la solución de los sistemas lineales, podremos calcular el flujo de los sistemas explícitos y obtener su retrato de fases. Una vez obtenidas las soluciones explícitas, centraremos nuestra atención en la clasificación de los sistemas.

### 2.1. Propiedades de solución de los sistemas lineales

En esta sección estudiaremos los sistemas autónomos planos  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  en el caso en el que el campo de vectores  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  viene dado por una aplicación lineal. Consideraremos sistemas de la forma

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde cada  $a_{ij}$  es un número real. Si denotamos por

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

entonces el sistema (2.1) puede escribirse de manera equivalente con la notación vectorial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.2)$$

denominado *sistema lineal autónomo homogéneo* o simplemente *sistema lineal*.

**Lema 2.1.1.** *Las soluciones del sistema lineal  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$  están definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

**Definición 2.1.1.** *Dos soluciones  $\mathbf{x}^1(t)$  y  $\mathbf{x}^2(t)$  de la Eq.(2.2) se dicen que son linealmente independientes si, para cada  $t \in \mathbb{R}$ , la relación  $c_1\mathbf{x}^1(t) + c_2\mathbf{x}^2(t) = 0$  implica que  $c_1 = 0$  y  $c_2 = 0$ .*

La independencia lineal de  $\mathbf{x}^1(t)$  y  $\mathbf{x}^2(t)$  es equivalente a:

$$\det(\mathbf{x}^1(t)|\mathbf{x}^2(t)) \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

**Definición 2.1.2.** Si  $\mathbf{x}^1(t)$  y  $\mathbf{x}^2(t)$  son dos soluciones del sistema (2.2), entonces la matriz,  $2 \times 2$ ,  $X(t) = (\mathbf{x}^1(t)|\mathbf{x}^2(t))$  se denomina matriz de soluciones. Si además,  $X(t) \neq 0$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , entonces  $X(t)$  se denomina matriz fundamental de soluciones del sistema (2.2). Una matriz fundamental de soluciones satisfaciendo  $X(0) = I$ , donde  $I$  es la matriz identidad  $2 \times 2$ , se denomina matriz principal de soluciones.

**Lema 2.1.2.** Propiedades de las soluciones fundamentales:

1. Si  $X(t)$  es una matriz de soluciones del sistema (2.2) con  $\det(X(0)) \neq 0$ , entonces  $\det(X(t)) \neq 0 \forall t \in \mathbb{R}$ , esto es,  $X(t)$  es una solución fundamental del sistema (2.2).
2. Si  $X(t)$  es una matriz fundamental de soluciones, entonces la solución del sistema (2.2) satisfaciendo la condición inicial  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$  viene dada por

$$\varphi(t, \mathbf{x}^0) = X(t)[X(0)]^{-1}\mathbf{x}^0. \quad (2.3)$$

El flujo de la ecuación diferencial escalar lineal  $x' = ax$  viene dada por la función exponencial  $\varphi(t, x_0) = e^{at}x_0$ . Para obtener una fórmula análoga del flujo de sistemas lineales planos introducimos la notación

$$e^{\mathbf{A}t} \equiv X(t)[X(0)]^{-1}, \quad (2.4)$$

donde  $X(t)$  es la matriz fundamental de soluciones definida anteriormente.

Entonces la Eq.(2.3) para el flujo de la Eq.(2.2) se puede escribir como la matriz exponencial

$$\varphi(t, \mathbf{x}^0) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}^0, \quad (2.5)$$

donde  $e^{\mathbf{A}t}$  es la matriz de solución principal y  $e^{\mathbf{A}0} = I$ , siendo  $I$  la matriz identidad.

## 2.2. Reducción a forma canónica

Sea  $\mathbf{P}$  una matriz invertible  $2 \times 2$  y consideremos las nuevas variables dadas por  $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ , o equivalentemente,  $\mathbf{y} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$ . Entonces, en las nuevas coordenadas, el sistema lineal  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$  se convierte en

$$\mathbf{y}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{y}. \quad (2.6)$$

También es fácil determinar el flujo con las nuevas coordenadas usando la Eq. (2.5):

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathbf{y}(t) = \mathbf{P}e^{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}t}\mathbf{y}^0 = (\mathbf{P}e^{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}t}\mathbf{P}^{-1})\mathbf{x}^0,$$

y entonces

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}t}\mathbf{P}^{-1}.$$

Multiplicando por  $\mathbf{P}^{-1}$  por la izquierda y por  $\mathbf{P}$  por la derecha, obtenemos

$$e^{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}t} = \mathbf{P}^{-1}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{P}.$$

**Definición 2.2.1.** Un número (real o complejo)  $\lambda$  se denomina autovalor de la matriz  $\mathbf{A}$  si existe un vector no nulo (real o complejo)  $\mathbf{v}$  tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

El vector  $\mathbf{v}$  se denomina autovector de  $\mathbf{A}$  del autovalor  $\lambda$ .

Nótese que en la definición anterior, se requiere que el sistema lineal

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

sea homogéneo con solución no nula. Esto es equivalente, por el teorema de Rouché-Frobenius, a que

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \quad (2.7)$$

Por tanto, los autovalores de  $\mathbf{A}$  son las raíces de este polinomio cuadrático en  $\lambda$ . El polinomio cuadrático en la Eq.(2.7) se denomina *polinomio característico de  $\mathbf{A}$* .

**Nota 2.2.1.** Si calculamos el polinomio característico (2.7) obtendremos una expresión del tipo

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} \tau &= \text{traza}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22}, \\ \Delta &= \det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\lambda_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}; \quad \lambda_2 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2},$$

son soluciones de la Eq.(2.7). En otras palabras, los autovalores dependen de la traza y del determinante de la matriz  $\mathbf{A}$ .

Consideraremos la forma normal de Jordan como

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{J},$$

donde  $\mathbf{J}$  es una de las tres matrices de Jordan siguientes:

$$(i) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (ii) \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (iii) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

siendo  $\mathbf{P}$  la matriz definida anteriormente y  $\lambda$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\alpha$  y  $\beta \neq 0$  son números reales.

La primera forma corresponde al caso en que los autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son reales y distintos, la segunda corresponde al caso en que los autovalores son reales e iguales, y la tercera corresponde al caso de autovalores complejos  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ . En el caso de autovalores reales, hay que separar el caso en que al menos uno de los autovalores es cero. En este caso, el origen no es un punto de equilibrio aislado y el comportamiento cualitativo del sistema es distinto de los otros casos.

## 2.3. Clasificación de los puntos críticos

En el caso de los sistemas autónomos lineales, la naturaleza y estabilidad de los puntos críticos quedan caracterizados por los autovalores de la matriz de coeficientes del sistema. Consideremos el sistema autónomo lineal (2.1), para el que  $(0, 0)$  es su único punto crítico. Esto equivale a que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

del sistema tenga determinante no nulo, y por ello que los autovalores  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  sean diferentes de cero. En función del comportamiento de las trayectorias en relación con el punto crítico aislado  $(0, 0)$ , el punto crítico se denominará: *nodo*, *punto de silla*, *centro*, o *foco*.

### 1. El punto crítico es un nodo

Este caso se presenta cuando los autovalores  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , y además se tiene que  $\text{sgn } \lambda_1 = \text{sgn } \lambda_2$ .

Diremos que un nodo es *estable* si  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ . Las trayectorias en el plano de fase son parábolas que se hacen tangentes al autovector lento (correspondiente al mayor autovalor) cuando se acercan al origen, y paralelas al autovector rápido (correspondiente al menor autovalor) lejos del origen.

Si por el contrario tenemos que  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ , diremos que es un nodo *inestable*. Las trayectorias en el plano de fase son parábolas con formas similares a la del nodo estable pero con sentido invertido.

Se denominará **nodo impropio** cuando el autovalor  $\lambda$  es doble. Diremos que el nodo impropio es *estable* si  $\lambda < 0$ . En caso contrario diremos que es *inestable*.

En la Figura 2.1, representamos el plano de fases del sistema

$$\begin{cases} x_1' = -x_1, \\ x_2' = -4x_2, \end{cases}$$

cuyo único equilibrio, el origen, que corresponde a un nodo estable.

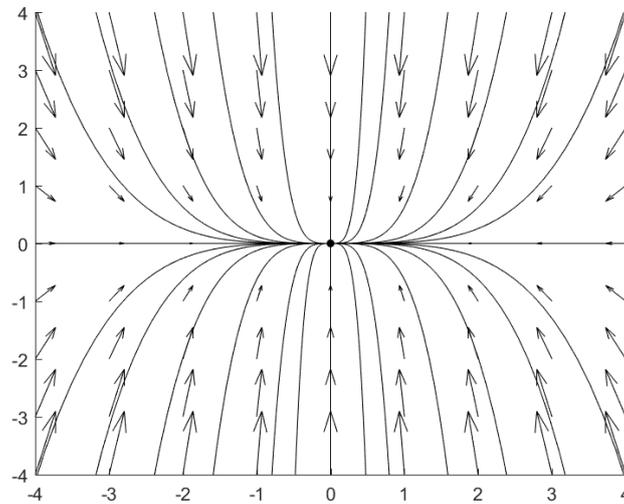


Figura 2.1: Nodo estable.

## 2. El punto crítico es un punto de silla

Este caso se presenta cuando los autovalores  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , y además se tiene que  $\text{sgn } \lambda_1 \neq \text{sgn } \lambda_2$ .

Cuando  $t \rightarrow +\infty$ , nos encontramos con dos trayectorias rectas que se acercan al origen y otras dos trayectorias rectas que se separan del origen; como se muestra en la Figura 2.2. Esto nos permite concluir, que todo punto de silla es inestable.

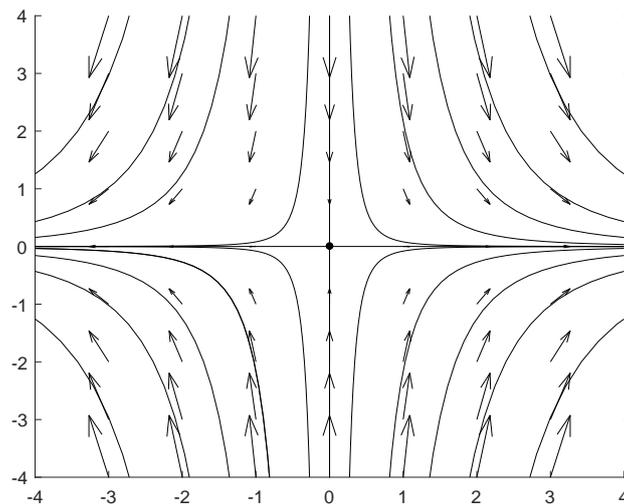


Figura 2.2: Punto de silla.

### 3. El punto crítico es un centro

Este caso se presenta cuando los autovalores son imaginarios puros. Las trayectorias son curvas cerradas que rodean al origen, que en general tienen forma de elipses, de modo que ninguna trayectoria tiende a él cuando  $t \rightarrow +\infty$  o  $t \rightarrow -\infty$ ; véase la Figura 2.3. Por ello, se dice el punto crítico es estable, pero no asintóticamente estable.

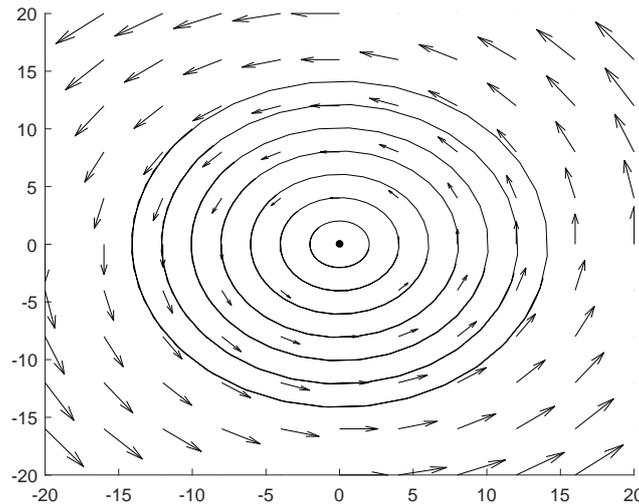


Figura 2.3: Centro.

### 4. El punto crítico es un foco

Este caso se presenta cuando los autovalores son complejos conjugados y tienen parte real no nula. Esto es,  $\lambda = a \pm bi$  con  $a, b \neq 0$ .

Si  $a < 0$  la exponencial decreciente obliga a las orbitas a cerrarse en espiral cuando  $t \rightarrow +\infty$  hacia el origen, que se llama *foco estable*.

Si  $a > 0$  las espirales corresponden a soluciones que se alejan del punto crítico que es un *foco inestable*.

En la siguiente figura, representamos el plano de fases del sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 3x_2, \\ x_2' = -5x_1 + 2x_2, \end{cases}$$

cuyos equilibrio es el origen y sus autovalores son  $\lambda_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{59}i}{2}$ , con  $a = 9 > 0$ . Por tanto, el plano de fases del sistema representa un foco inestable.

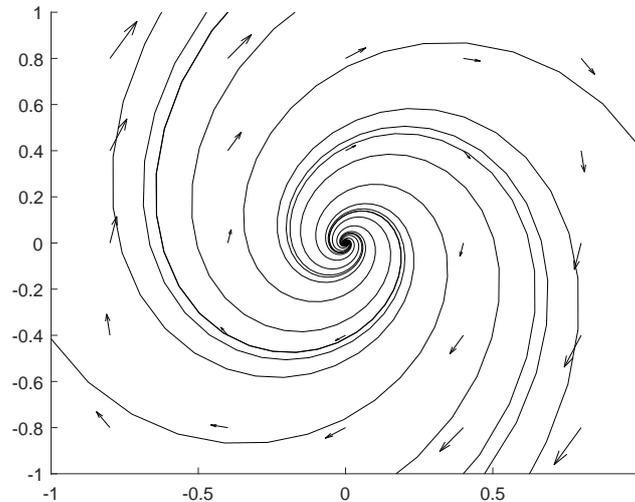


Figura 2.4: Foco.

**Nota 2.3.1.** Si un punto crítico  $P = (\bar{x}, \bar{y}) \neq (0, 0)$ , entonces hacemos la traslación siguiente:

$$\begin{aligned}\tilde{x}' &= x' - \bar{x}, \\ \tilde{y}' &= y' - \bar{y},\end{aligned}$$

obteniendo así un nuevo sistema equivalente cuyo punto crítico es el  $(0, 0)$ .

Hemos visto que la naturaleza y la estabilidad del punto crítico de un sistema autónomo lineal se puede describir atendiendo a sus autovalores. Pasaremos ahora a ver que, con la misma facilidad, estas características se pueden describir en términos de la traza  $\tau = \text{traza}(\mathbf{A})$  y del determinante  $\Delta = \det(\mathbf{A})$  de la matriz  $\mathbf{A}$  de coeficientes del sistema teniendo en cuenta que el polinomio característico de  $\mathbf{A}$  viene dado por

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0,$$

cuyas soluciones, como hemos visto en la nota (2.2.1), son

$$\lambda_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}; \quad \lambda_2 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2},$$

con  $\Delta \neq 0$ , ya que el cero no puede ser autovalor.

Ahora, atendiendo a los diferentes valores de  $\tau$  y  $\Delta$  tenemos:

1. Si  $\tau^2 - 4\Delta < 0$ , entonces los autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  son complejos conjugados. Además, como tienen parte real igual a  $\frac{\tau}{2}$ , resulta:
  - son imaginarios puros si y sólo si  $\tau = 0$  (centro y estable).

- tienen parte real negativa cuando  $\tau < 0$  (foco asintóticamente estable)
- tienen parte real positiva cuando  $\tau > 0$  (foco inestable).

Por ello, al considerar el plano  $(\tau, \Delta)$ , podremos asegurar que por encima de la parábola  $\tau^2 - 4\Delta = 0$  se tiene:

- En el eje  $O\Delta$  se presentan los centros y hay estabilidad.
  - A la izquierda del eje  $O\Delta$  se presentan los focos y hay estabilidad asintótica.
  - la derecha del eje  $O\Delta$  también se presentan focos, pero hay inestabilidad.
2. Si  $\Delta < 0$ , entonces se tiene  $\tau^2 - 4\Delta > \tau^2$ . Por ello los autovalores son reales y de distinto signo. Se presentan puntos de silla e inestabilidad. Por ello, al considerar el plano  $(\tau, \Delta)$ , por debajo del eje  $O\tau$  se presentan puntos de silla e inestabilidad.
3. Si  $\Delta > 0$  y  $\tau^2 - 4\Delta \geq 0$ , entonces los autovalores son reales y tienen el mismo signo que  $\tau$ . De ahí que:

a) Si  $\tau < 0$ , se tenga:

- Cuando  $\tau^2 - 4\Delta = 0$ , entonces los autovalores son iguales y negativos (nodo impropio, estabilidad asintótica).
- Cuando  $\tau^2 - 4\Delta > 0$ , entonces los autovalores son reales, distintos y negativos (nodo, estabilidad asintótica)

b) Si  $\tau > 0$ , se tenga:

- Cuando  $\tau^2 - 4\Delta = 0$ , entonces los autovalores son iguales y positivos (nodo impropio, inestable)
- Cuando  $\tau^2 - 4\Delta > 0$ , entonces los autovalores son reales, distintos y positivos (nodo, inestable)

Estos casos nos aseguran que en la parte izquierda de la parábola  $\tau^2 - 4\Delta = 0$  nos encontramos nodos y estabilidad asintótica. En la parte derecha de la dicha parábola también se presentan nodos, pero hay inestabilidad. Por otro lado, por debajo de la parábola  $\tau^2 - 4\Delta = 0$ , y por encima del eje  $O\tau$ , se tiene: se presentan nodos y estabilidad asintótica, en la región de la izquierda; se presentan nodos e inestabilidad en la región de la derecha.

Esta información se recoge en la Figura 2.5, tomando como eje de abscisas la traza,  $\tau$ , y como eje de ordenadas el determinante,  $\Delta$ , de la matriz  $\mathbf{A}$  del sistema (2.1).

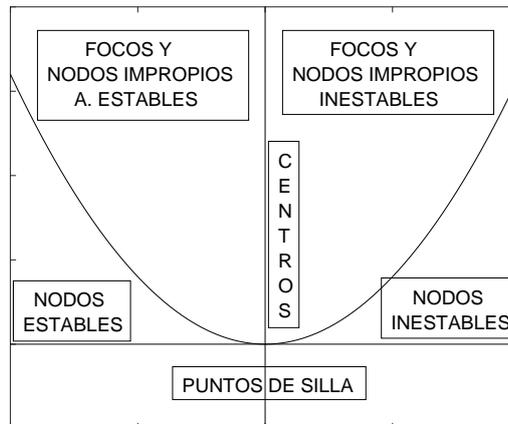


Figura 2.5: Estabilidad del origen para el sistema lineal.

## 2.4. Equivalencia de flujo cerca de los equilibrios hiperbólicos

**Definición 2.4.1.** *Un punto de equilibrio  $\bar{\mathbf{x}}$  de  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  se denomina equilibrio hiperbólico si todos los autovalores de la matriz Jacobiana  $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$  tiene parte real no nula.*

**Definición 2.4.2.** *Dos sistemas lineales planos  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{x}$  se dicen que son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo  $\mathbf{h} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  en el plano, esto es,  $\mathbf{h}$  es una función continua con inversa continua, que transforma las órbitas de  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$  en las de  $\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{x}$  y conserva el sentido de su dirección en el tiempo.*

Dado que tenemos una fórmula para los flujos de sistemas lineales planos, es conveniente escribir esta definición de forma cuantitativa de tal forma que una aplicación lleve un flujo en otro, esto es,

$$\mathbf{h}(e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}) = e^{\mathbf{B}t}\mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (2.8)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$  y  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ .

Un homeomorfismo  $\mathbf{h}$  satisfaciendo la ecuación (2.8) es un poco más restrictivo que la condición que se requiere en la Definición 2.4.2; mientras la aplicación lleva órbitas en órbitas, también conserva la parametrización respecto del tiempo de las órbitas. Sin embargo, en el caso en el que  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  sean hiperbólicos, es decir, sus autovalores tienen parte real no nula, el homeomorfismo  $\mathbf{h}$  en la definición anterior se puede escoger de manera que verifique la ecuación (2.8).

En la transformación de matrices en la forma normal de Jordan, hemos visto la equivalencia topológica en un conexto limitado, considerando sólo aplicaciones invertibles como nuestros homeomorfismos admisibles. De hecho, los sistemas  $\mathbf{y}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{y}$  y  $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}t}\mathbf{P}^{-1}$  implican que si existe una matriz invertible  $2 \times 2$   $\mathbf{P}$  tal que  $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}$ , entonces el flujo de  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{x}$  verifica que  $\mathbf{P}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{B}t}\mathbf{P}$ . En otras palabras, si las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son conjugadas, entonces el flujo de  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{x}$  es linealmente equivalente.

Después de la equivalencia lineal, es natural considerar la equivalencia diferencial de los sistemas lineales.

**Lema 2.4.1.** *Dos sistemas lineales hiperbólicos  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{x}$  son diferencialmente equivalentes si y sólo si son linealmente equivalentes.*

*Demostración.* Equivalencia lineal implica equivalencia diferencial. Por tanto, necesitamos probar la otra implicación.

Supongamos que  $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{0}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un difeomorfismo satisfaciendo la igualdad (2.8). Sea  $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{0}) = \mathbf{c}$ . Como  $\mathbf{0}$  es un punto de equilibrio de  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , entonces  $\mathbf{c}$  es un punto de equilibrio de  $\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{x}$ , esto es,  $\mathbf{B}\mathbf{c} = \mathbf{0}$ .

Consideremos el difeomorfismo de  $\mathbb{R}^2$  donde  $g(\mathbf{x}) \mapsto \mathbf{x} - \mathbf{c}$ . El difeomorfismo  $g$  lleva las órbitas de  $\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{x}$  en sí mismas, y el difeomorfismo  $h = g \circ \hat{\mathbf{h}}$  lleva las órbitas de  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$  en las órbitas de  $\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{x}$  mientras se aleja del origen, esto es,  $h$  satisface la igualdad (2.8) y  $h(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

Si hacemos la derivada de la ecuación (2.8) respecto de  $\mathbf{x}_0$  y tomamos  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ , obtenemos  $\mathbf{H}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{B}t}\mathbf{H}$ , donde  $\mathbf{H} = D_{\mathbf{x}}h(\mathbf{0})$ . Si derivamos respecto de  $t$  e imponemos  $t = 0$ , entonces  $\mathbf{H}\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{H}$ .  $\square$

A continuación, y dado el carácter restrictivo de la equivalencia lineal de sistemas, se presentan dos teoremas sobre la equivalencia topológica de sistemas y su clasificación cualitativa.

**Teorema 2.4.1.** *Supongamos que dos matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  tienen autovalores con parte real distinta de cero. Entonces los dos sistemas lineales  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{x}$  son topológicamente equivalentes si y sólo si las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  tienen el mismo número de autovalores con parte real negativa (y por consiguiente, también positiva).*

Así pues, en sistemas planos, hay tres clases de sistemas hiperbólicos lineales, que pueden representarse simplídicamente como:

- $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  : tiene dos autovalores negativos. Sumidero hiperbólico.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  : tiene dos autovalores positivos. Fuente hiperbólica.

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  : un autovalor positivo y otro negativo. Punto de silla hiperbólico.

**Teorema 2.4.2.** *Si la matriz de coeficientes  $\mathbf{A}$  tiene al menos un autovalor con parte real nula, entonces el sistema plano lineal  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$  es topológicamente equivalente a uno de los siguientes cinco sistemas lineales:*

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  : matriz cero. Cualquier órbita es un punto de equilibrio.
- $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  : un autovalor negativo y otro cero. Los conjuntos  $\omega$ -límite de todas las órbitas positivas son puntos de equilibrio.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  : un autovalor positivo y otro cero. Los conjuntos  $\alpha$ -límite de todas las órbitas negativas son puntos de equilibrio.
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  : dos autovalores nulos pero es de rango 1. Todas las órbitas, positivas y negativas, que no sean puntos de equilibrio no están limitadas.
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  : dos autovalores imaginarios puros. Cada órbita que no sea un equilibrio es periódica.

Dentro de la clasificación de sistemas hiperbólicos realizada en el *Teorema 2.4.1* se pueden definir varios tipos de equilibrios, estables e inestables, dependiendo de si los autovalores son complejos o reales.

### 2.4.1. Teorema de Grobman - Hartman

La llamada teoría local de las ecuaciones diferenciales está basada en la siguiente estrategia: considerar ciertas soluciones especiales de la ecuación, tales como puntos estacionarios o trayectorias periódicas, y buscar describir el comportamiento de las demás soluciones en un entorno de ellas. La idea es que tal información, obtenida para diferentes soluciones especiales, pueda servir como punto de partida para fijar una descripción global del comportamiento de la ecuación.

El principal resultado en este capítulo es el Teorema de Grobman-Hartman, que afirma que si  $\bar{\mathbf{x}}$  es un punto de equilibrio hiperbólico, entonces el flujo del sistema  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  restringido a un entorno de  $\bar{\mathbf{x}}$  es topológicamente equivalente al flujo del sistema  $\mathbf{x}' = D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{x}$  en un entorno del origen.

Antes de enunciar el Teorema de Grobman-Hartman, empecemos definiendo el concepto de equivalencia de campos vectoriales.

**Definición 2.4.3.** *Dos sistemas diferenciales planos  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{x}' = \mathbf{g}(\mathbf{x})$  definidos en dos subconjuntos  $U$  y  $V$  de  $\mathbb{R}^2$ , respectivamente, se dicen que son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo  $\mathbf{h} : U \rightarrow V$  las aplicaciones  $\mathbf{h}$  de las órbitas del campo vectorial  $\mathbf{f}$  en las órbitas de  $\mathbf{g}$  conservan el sentido de dirección en el tiempo.*

**Teorema 2.4.3. (Grobman - Hartman)**

*Si  $\bar{\mathbf{x}}$  es un punto de equilibrio hiperbólico de  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , existe un entorno de  $\bar{\mathbf{x}}$  en el cual  $\mathbf{f}$  es topológicamente equivalente al campo vectorial  $\mathbf{x}' = D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{x}$ .*

**Nota 2.4.1.** *Debido a la hiperbolicidad del punto de equilibrio  $\bar{\mathbf{x}}$ , el homeomorfismo  $\mathbf{h}$  anterior se puede escoger para conservar la parametrización de tiempo de las órbitas de los campos de vectores. Como aclaración del teorema Grobman - Hartman, sea  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  el flujo de  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , y  $\psi(t, \mathbf{x}_0)$  el flujo de  $\mathbf{x}' = D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{x}$ . Entonces el homeomorfismo  $\mathbf{h} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  puede ser de la forma*

$$\mathbf{h}(\varphi(t, \mathbf{x}_0)) = \psi(t, \mathbf{h}(\mathbf{x}_0))$$

*para todo  $t$  siempre y cuando  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  permanezca en  $U$ .*

# Capítulo 3

## Órbitas periódicas y bifurcaciones elementales

### 3.1. Órbitas periódicas

Tras los puntos de equilibrio, las soluciones más interesantes para estudiar en los sistemas planos son las órbitas periódicas, cuyo estudio consideraremos en este capítulo. Para su elaboración, se ha utilizado la referencia [4].

**Definición 3.1.1.** Una solución  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  de  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  se denomina solución periódica de período  $T$ , con  $T > 0$ , si  $\varphi(t+T, \mathbf{x}_0) = \varphi(t, \mathbf{x}_0)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . El período mínimo  $T$  es el período con la propiedad  $\varphi(t, \mathbf{x}_0) \neq \mathbf{x}_0$  con  $0 < t < T$ . La órbita  $\gamma(\mathbf{x}_0) = \{\varphi(t, \mathbf{x}_0), t \in \mathbb{R}\}$  de la solución periódica  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  con período  $T$  se denomina órbita periódica (además cerrada) de período  $T$ .

#### 3.1.1. Teorema de Poincaré - Bendixson

En este apartado se presentan resultados sobre el análisis de órbitas periódicas en sistemas planos cuando están lejos de su nacimiento.

**Teorema 3.1.1.** Supongamos que  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  es un sistema plano con un número finito de equilibrios. Si la órbita positiva  $\gamma^+(\mathbf{x}_0)$  de  $\mathbf{x}_0$  está acotada, entonces es cierta alguna de las siguientes afirmaciones:

- El conjunto  $\omega$ -límite,  $\omega(\mathbf{x}_0)$ , es un solo punto  $\bar{\mathbf{x}}$  el cual es un punto de equilibrio, y  $\varphi(t, \mathbf{x}_0) \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .
- $\omega(\mathbf{x}_0)$  es una órbita periódica  $\Gamma$  y  $\gamma^+(\mathbf{x}_0) = \omega(\mathbf{x}_0) = \Gamma$  o  $\gamma^+(\mathbf{x}_0)$  es una espiral creciente en el tiempo hacia  $\Gamma$  en un lado de  $\Gamma$ .
- $\omega(\mathbf{x}_0)$  son puntos de equilibrio y órbitas cuyos conjuntos  $\alpha$ - y  $\omega$ -límite son puntos de equilibrio.

Estas tres propiedades son válidas para el conjunto  $\alpha$ -límite si  $\gamma^-(\mathbf{x}_0)$  está acotada.

**Teorema 3.1.2. (Teorema de la Curva de Jordan)**

*Una curva cerrada en  $\mathbb{R}^2$  que no se corta a sí misma, separa a  $\mathbb{R}^2$  en dos partes conexas, una limitada, la cual se denomina interior de la curva y otra no limitada que se denomina exterior de la curva.*

**Definición 3.1.2.** *Una órbita periódica  $\Gamma$  se llama ciclo límite si hay dos puntos en  $\mathbb{R}^2$ , uno en el interior de  $\Gamma$  y otro en el exterior, tales que, los conjuntos  $\alpha$ - y  $\omega$ -límite de las órbitas que pasan por dichos puntos son la órbita periódica  $\Gamma$ .*

**Teorema 3.1.3. (Poincaré - Bendixson)** *Si  $\omega(\mathbf{x}_0)$  es un conjunto acotado que no contiene puntos de equilibrio, entonces  $\omega(\mathbf{x}_0)$  es una órbita periódica.*

Para poder utilizar el teorema de Poincaré - Bendixson a fin de demostrar la existencia de una órbita periódica no trivial, se construye un conjunto acotado  $D$  en  $\mathbb{R}^2$  que no contiene puntos de equilibrio, y tal que, cualquier solución que empiece en  $D$ , termine en  $D$  para todo  $t \geq 0$ , es decir:  $D$  es un conjunto invariante positivo abierto y limitado. Entonces, para cualquier  $\mathbf{x}_0 \in D$  se demuestra que  $\omega(\mathbf{x}_0)$  no contiene puntos de equilibrio en el conjunto  $D$ . Por lo tanto, como  $D$  no contiene puntos de equilibrio,  $\omega(\mathbf{x}_0)$  es una órbita periódica.

En general, puede haber muchas dificultades usando el teorema de Poincaré - Bendixson para encontrar órbitas periódicas de una ecuación diferencial específica. Primero, no suele ser trivial la construcción de la región  $D$  con las propiedades deseadas. Segundo, para determinar el número de órbitas periódicas en  $D$ , a menudo se tienen que encontrar propiedades especiales de las ecuaciones diferenciales.

Un caso particularmente importante es cuando queremos comprobar que existe a lo sumo una órbita periódica en  $D$ , entonces existirá exactamente una,  $\Gamma$ , y  $\omega(\mathbf{x}_0) = \Gamma$  para todo  $\mathbf{x}_0 \in D$ . Ya que  $\gamma^+(\mathbf{x}_0)$  gira en espiral con el aumento del tiempo hacia  $\Gamma$  en un lado de  $\Gamma$  y  $\Gamma$  pertenece al interior de  $D$ , resulta que los puntos  $\mathbf{x}_0$  en ambos lados de  $\Gamma$  sus órbitas positivas se acercan a  $\Gamma$ . Entonces,  $\Gamma$  es asintóticamente estable.

En ocasiones, resulta complicado buscar órbitas periódicas en algunas ecuaciones diferenciales. Es mejor evitar emprender tal tarea si las ecuaciones no tienen órbitas periódicas en el primer paso. A continuación, enunciaremos un resultado útil para saber descartar la existencia de órbitas periódicas en ciertos casos.

**Teorema 3.1.4. (Criterio de Bendixon)**

*Sea  $D$  un subconjunto abierto simplemente conexo de  $\mathbb{R}^2$  (una región sin agujeros, el interior de un disco, por ejemplo). Si  $\text{div}(\mathbf{f}) = \partial f_1/\partial x_1 + \partial f_2/\partial x_2$  es de signo constante y distinta de cero en  $D$ , entonces  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  no tiene órbitas periódicas ni homoclinas que estén contenidas por completo en la región  $D$ .*

*Demostración.* Supongamos que existe una órbita periódica  $\Gamma$  en  $D$  y probemos que llegamos a una contradicción. El interior  $S$  de  $\Gamma$  es simplemente conexo. Por lo tanto, por el teorema de Green tenemos que

$$\oint_{\Gamma} (f_1 dx_2 - f_2 dx_1) = \iint_S \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2.$$

En cualquier órbita, en particular, en  $\Gamma$ , tenemos que  $f_1 dx_2 - f_2 dx_1 = 0$ . Entonces, la integral de la izquierda es cero. Sin embargo, la integral de la derecha no puede ser cero, pues el integrando tiene signo constante y no cero en  $S$ .  $\square$

Una generalización del criterio de Bendixson es el siguiente teorema:

**Teorema 3.1.5. (Criterio de Dulac)** *Sea  $D \subset \mathbb{R}^2$  un subconjunto abierto simplemente conexo y  $B(x_1, x_2)$  una función de  $C^1$  de valores reales en  $D$ . Si la función  $\text{div}(B\mathbf{f}) = \partial(Bf_1)/\partial x_1 + \partial(Bf_2)/\partial x_2$  es de signo constante y no idéntica a cero en  $D$ , entonces  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  no tiene órbitas periódicas ni homoclinas que estén contenidas por completo en la región  $D$ .*

*La función  $B$  se llama función de Dulac.*

Para terminar esta sección, enunciaremos un teorema de la relación entre una órbita periódica y un punto de equilibrio desde un punto de vista geométrico.

**Teorema 3.1.6.** *Sea  $\Gamma$  una órbita periódica que encierra a un espacio abierto  $U$  en el que está definido el campo vectorial. Entonces  $U$  contiene un punto de equilibrio.*

### 3.1.2. Estabilidad de las órbitas periódicas

En este apartado se muestra cómo realizar el estudio del comportamiento de las órbitas cercanas a una órbita periódica, para determinar su estabilidad, usando la aplicación de Poincaré.

Sea  $\varphi(t, p)$  una solución periódica con periodo mínimo  $T$  de la ecuación diferencial  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  y denotemos la órbita periódica correspondiente por  $\Gamma$ . Entonces, escogemos un vector  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  tal que,  $\mathbf{v}$  y el vector tangente  $\mathbf{f}(\mathbf{p})$  de  $\Gamma$  en  $\mathbf{p}$  sean linealmente independientes.

Sea  $L_\varepsilon$  el segmento definido por:

$$L_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \mathbf{p} + a\mathbf{v}, 0 \leq |a| \leq \varepsilon\}$$

El segmento  $L_\varepsilon$  se denomina sección transversal de la órbita periódica  $\Gamma$  en el punto  $\mathbf{p}$ .

A continuación, se define una aplicación en un subconjunto de  $L_\varepsilon$  inducida por el flujo. Se elige un  $\varepsilon$  tan pequeño que  $L_\varepsilon$  interseca a la curva  $\Gamma$  en un solo punto  $\mathbf{p}$ , y que todas

la órbitas que crucen  $L_\varepsilon$  lo hacen en la misma dirección; ver la Figura 3.1.

Como  $\varphi(T, \mathbf{p}) = \mathbf{p}$  y sus soluciones dependen de forma continua del valor inicial, hay un  $\delta > 0$  tal que, si  $\mathbf{x}_0 \in L_\delta$ , entonces hay un primer instante  $T(\mathbf{x}_0) > 0$  en el que  $\varphi(T(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0) \in L_\varepsilon$ .

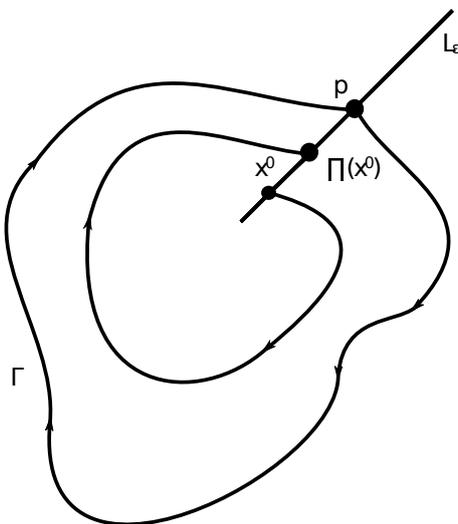


Figura 3.1: Sección transversal local  $L_\varepsilon$  a la órbita periódica  $\Gamma$  en el punto  $p$ , y el mapa de Poincaré.

**Definición 3.1.3.** La aplicación de Poincaré cerca de una órbita  $\Gamma$  se define como

$$\begin{aligned} \Pi : L_\delta &\longrightarrow L_\varepsilon \\ \mathbf{x}_0 &\longmapsto \varphi(T(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

Los puntos de la sección transversal  $L_\varepsilon$  tienen un orden natural: dos puntos  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{p} + a_0 \mathbf{v}$  y  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{p} + a_1 \mathbf{v}$  cumplen que  $\mathbf{x}_0 \geq \mathbf{x}_1$  si y solo si,  $a_0 \geq a_1$ . Por tanto, una aplicación de Poincaré  $\Pi$  se dice que es monótona si  $\mathbf{x}_0 \geq \mathbf{x}_1$  en  $L_\delta$ , implica que  $\Pi(\mathbf{x}_0) \geq \Pi(\mathbf{x}_1)$ .

**Teorema 3.1.7.** La aplicación de Poincaré tiene las siguientes propiedades:

1. La aplicación de Poincaré  $\Pi$  cerca de la órbita periódica  $\Gamma$  es una aplicación monótona de  $C^1$ .
2. La órbita  $\gamma(\mathbf{x}_0)$  de un punto  $\mathbf{x}_0 \in L_\delta$  es una órbita periódica, si y sólo si, es un punto fijo de la aplicación de Poincaré, es decir,  $\Pi(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ .
3. La órbita periódica  $\Gamma$ , con  $\mathbf{p} \in \Gamma$ , asintóticamente estable si  $\Pi'(\mathbf{p}) < 1$ , e inestable si  $\Pi'(\mathbf{p}) > 1$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\mathbf{x}_0$  y  $\mathbf{x}_1$  están en  $L_\delta$  con  $\mathbf{x}_0 \geq \mathbf{x}_1$ . Consideremos la curva simple cerrada  $C_{\mathbf{x}_1}$  que consiste en la parte de la órbita  $\gamma(\mathbf{x}_1)$  entre los puntos  $\mathbf{x}_1$  y  $\Pi(\mathbf{x}_1)$  ambos con el segmento de recta en  $L_\epsilon$  entre  $\mathbf{x}_1$  y  $\Pi(\mathbf{x}_1)$ ; ver la Figura 3.2. Entonces, por el teorema de la Curva de Jordan,  $C_{\mathbf{x}_1}$  tiene interior y exterior. Dado que las órbitas atraviesan  $L_\epsilon$  en la misma dirección, y las órbitas no pueden intersectarse unas con otras, tenemos que  $\Pi(\mathbf{x}_0) \geq \Pi(\mathbf{x}_1)$  lo que implica la monotonicidad de la aplicación de Poincaré.  $\square$

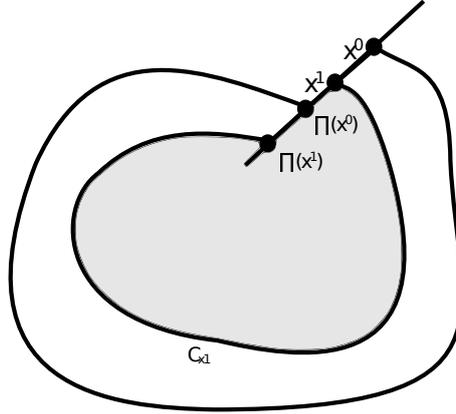


Figura 3.2: Monotonicidad de la aplicación de Poincaré.

**Definición 3.1.4.** La órbita periódica  $\Gamma$  a través del punto  $\mathbf{p}$  se dice que es hiperbólica si  $\mathbf{p}$  es un punto fijo hiperbólico de la aplicación de Poincaré  $\Pi$ , es decir, si  $\Pi(\mathbf{p}_0) = \mathbf{p}_0$  y  $\Pi'(\mathbf{p}_0) \neq 1$ .

Ahora presentamos una fórmula para el cálculo de la estabilidad de órbitas periódicas si se conoce explícitamente la solución periódica correspondiente.

**Teorema 3.1.8.** Sea  $\varphi(t, \mathbf{p})$  una solución  $T$ -periódica a través de  $\mathbf{p}$  en el sistema diferencial  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Entonces

$$\Pi'(\mathbf{p}) = \exp \left\{ \int_0^T \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) (\varphi(t, \mathbf{p})) dt \right\}. \quad (3.1)$$

*Demostración.* Consideremos la ecuación lineal variacional  $T$ -periódica de  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  sobre la solución  $\varphi(t, \mathbf{p})$   $T$ -periódica:

$$\mathbf{x}' = D\mathbf{f}(\varphi(t, \mathbf{p}))\mathbf{x}. \quad (3.2)$$

La fórmula de Liouville nos dice que la matriz fundamental de soluciones  $\mathbf{X}(t)$  con  $\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}$  en el sistema lineal  $T$ -periódico (3.2) satisface la relación

$$\det \mathbf{X}(T) = \exp \left\{ \int_0^T \text{tr} D\mathbf{f}(\varphi(t, \mathbf{p})) dt \right\}.$$

Demostraremos la fórmula probando que  $\Pi'(\mathbf{p}) = \det \mathbf{X}(T)$ .

Para ello, determinaremos la matriz representante de  $\mathbf{X}(T)$  en la base  $\{\mathbf{f}(\mathbf{p}), \mathbf{p}\}$  de  $\mathbb{R}^2$ . Por tanto, necesitamos calcular los vectores  $\mathbf{X}(T)\mathbf{f}(\mathbf{p})$  y  $\mathbf{X}(T)\mathbf{v}$ . Nótese que la función  $\varphi'(t, \mathbf{p})$  es una solución del sistema (3.2) y  $\varphi'(t, \mathbf{p}) = \varphi'(t + T, \mathbf{p})$ . Dado que  $\varphi'(0, \mathbf{p}) = \varphi'(T, \mathbf{p}) = \mathbf{f}(\mathbf{p})$  y  $\mathbf{X}(T)\mathbf{f}(\mathbf{p})$ , tenemos

$$\mathbf{X}(T)\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{f}(\mathbf{p}). \quad (3.3)$$

Calculemos  $\mathbf{X}(T)\mathbf{v}$ . Si diferenciamos la aplicación de Poincaré

$$\Pi(\mathbf{p} + a\mathbf{v}) = \varphi(T(\mathbf{p} + a\mathbf{v}), (\mathbf{p} + a\mathbf{v})), \quad |a| < \delta,$$

respecto de  $a$  y tomamos  $a = 0$ , obtenemos

$$\Pi'(\mathbf{p})\mathbf{v} = \frac{\partial T}{\partial a}(\mathbf{p})\mathbf{f}(\mathbf{p}) + \mathbf{X}(T)\mathbf{v}. \quad (3.4)$$

De las ecuaciones (3.3) y (3.4), obtenemos que la matriz de  $\mathbf{X}(T)$  en la base  $\{\mathbf{f}(\mathbf{p}), \mathbf{p}\}$  es

$$\mathbf{X}(T) = \begin{pmatrix} 1 & -\partial T(\mathbf{p})/\partial a \\ 0 & \Pi'(\mathbf{p}) \end{pmatrix}.$$

Por tanto,  $\Pi'(\mathbf{p}) = \det \mathbf{X}(T)$ . □

En ciertas ocasiones, es posible poner la fórmula (3.1) del Teorema 3.2.2 para un buen uso, incluso si la órbita periódica no se conoce explícitamente.

## 3.2. Bifurcaciones elementales de puntos de equilibrio y órbitas periódicas

### 3.2.1. Bifurcaciones elementales en dimensión uno

Ya hemos estudiado y clasificado el comportamiento cualitativo global de sistemas lineales y local en sistemas no lineales, cerca de los puntos de equilibrio. En general, en presencia de equilibrios hiperbólicos esta clasificación está completa. En caso contrario, es necesario hacer un análisis propio del sistema.

En esta sección, se presenta el concepto de bifurcación y se ilustra con algunos ejemplos de las bifurcaciones más usuales y básicas en dimensión uno, para pasar a dimensión dos en la siguiente sección.

El estudio de los cambios de la estructura cualitativa del flujo de una ecuación diferencial cuando el parámetro varía se denomina *teoría de bifurcaciones*. Dado un valor del parámetro, diremos que la ecuación diferencial tiene *estructura orbital estable* si la

estructura cualitativa del flujo no cambia para variaciones lo suficientemente pequeñas del parámetro. El valor del parámetro para el cual el flujo es orbitalmente estable se denomina *valor de bifurcación*, y se dice que la ecuación está en un *punto de bifurcación*.

Consideramos ahora sistemas que dependen de un parámetro  $c$ , de la forma

$$x' = F(c, x). \quad (3.5)$$

Podría ocurrir que al variar el parámetro  $c$  los puntos críticos del sistema (3.5) aparezcan o desaparezcan, se estabilicen o desestabilicen o cambien de tipo topológico y, en consecuencia, el comportamiento cualitativo del sistema (su diagrama de fase) cambie notablemente.

**Definición 3.2.1.** *Sea  $F$  una función que depende continuamente tanto de  $x$  como del parámetro  $c$ . Si un cambio suave en  $c$  produce un cambio cualitativo o topológico en el comportamiento del sistema plano  $x' = F(c, x)$ , se dice que ha ocurrido una bifurcación.*

Las bifurcaciones pueden clasificarse como locales o globales:

- Una *bifurcación local* ocurre cuando el cambio en el parámetro causa un cambio en la estabilidad o el número de puntos de equilibrio.
- Por el contrario, las *bifurcaciones globales* se refieren a cambios cualitativos en el comportamiento dentro de conjuntos invariantes más grandes como lo son ciclos límite o trayectorias que se extienden una distancia grande.

La aparición de algunas de estas bifurcaciones (en particular las relacionadas con ciclos límite) requieren que el sistema tenga, al menos, dos dimensiones.

Para una ecuación diferencial  $x' = f(x)$ , los puntos de equilibrio y el signo de la función  $f(x)$  entre los equilibrios determinan el número de órbitas y la dirección del flujo de las órbitas. Denominaremos por *estructura orbital de la ecuación diferencial* o *estructura cualitativa del flujo* al número de órbitas y la dirección del flujo de las órbitas.

Hay un método gráfico para representar las características dinámicas importantes en el sistema  $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(c, \mathbf{x})$  dependiendo del parámetro  $c$ . Este método consiste en dibujar curvas en el plano  $(c, x)$ , donde las curvas representan los puntos de equilibrio para cada valor del parámetro. Más específicamente, un punto  $(c_0, x_0)$  se encuentra en una de estas curvas, si y sólo si,  $F(c_0, x_0) = 0$ . Además, para representar el tipo de estabilidad, representamos el equilibrio estable con curvas sólidas y el equilibrio inestable con curvas de puntos. La figura resultante se denomina *diagrama de bifurcación*.

A continuación, consideraremos las bifurcaciones más usuales y básicas en dimensión uno en su forma normal.

■ **Bifurcación silla-nodo**

Consideremos la ecuación diferencial cuadrática

$$x' = c + x^2 \equiv F(c, x), \quad (3.6)$$

donde  $c$  es un parámetro real.

Para  $c = 0$ , el origen es un punto de equilibrio no hiperbólico.

El flujo de la ecuación (3.6) para todos los valores del parámetro  $c$  viene dado por la parábola  $F(0, x) = x^2$  fija y trasladando verticalmente el eje  $OX$  por  $-c$ . El resultado se representa en la Figura 3.3.

- Si  $c < 0$ , los puntos de equilibrio son  $-\sqrt{-c}$  y  $\sqrt{-c}$ , y las órbitas vienen dadas por los intervalos  $(-\infty, -\sqrt{-c})$ ,  $(-\sqrt{-c}, \sqrt{-c})$  y  $(\sqrt{-c}, +\infty)$ .
- Si  $c = 0$ , el punto de equilibrio es  $(0, 0)$  y las órbitas son  $(-\infty, 0)$  y  $(0, +\infty)$ .
- Si  $c > 0$ , no hay puntos de equilibrio y la única órbita es  $(-\infty, +\infty)$ .

Si el parámetro  $c$  varía, siempre que  $c < 0$ , el número y la dirección de las órbitas son las mismas; solo cambia la posición de los puntos de equilibrio  $\pm\sqrt{-c}$ . De manera similar, para  $c > 0$ , existe una única órbita cuya dirección va de izquierda a derecha. Sin embargo, si  $c = 0$ , independientemente de lo poco que varíe el parámetro  $c$ , el número de órbitas cambia: hay dos equilibrios para cualquier  $c < 0$  y ninguno para  $c > 0$ ; ver Figura 3.3.

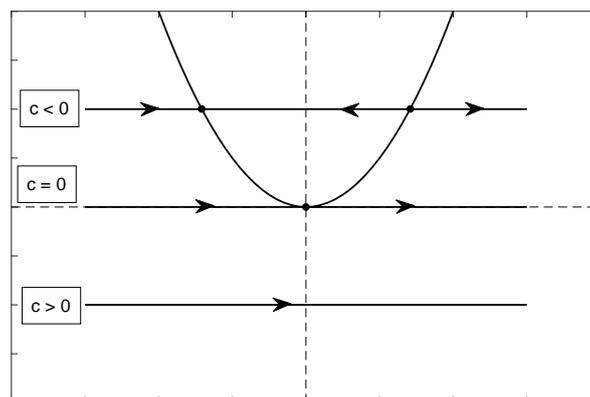


Figura 3.3: Plano de fases de  $x' = c + x$  para los valores de  $c$ .

El diagrama de bifurcación de la bifurcación silla-nodo es la parábola  $c = -x^2$ ; ver la Figura 3.4.

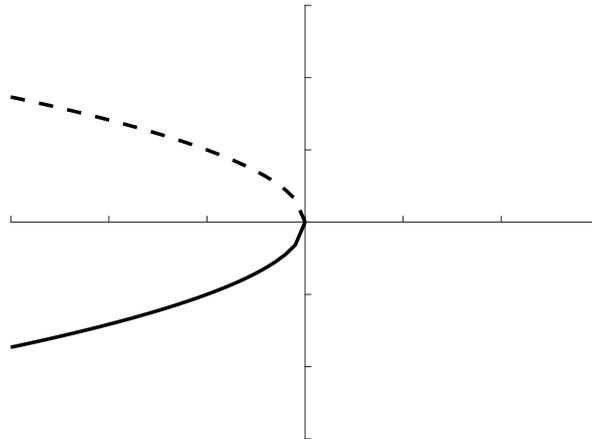


Figura 3.4: Diagrama de bifurcación de la bifurcación silla-nodo en el plano  $(\bar{x}, c)$ . El equilibrio estable se representa mediante la línea continua, mientras que, el equilibrio inestable se representa mediante líneas discontinuas.

▪ **Bifurcación transcítica**

A diferencia de la bifurcación silla-nodo, en una bifurcación transcítica existen dos puntos de equilibrio para todo valor del parámetro  $c \neq 0$ . Para  $c = 0$  intercambian su estabilidad entre ellos.

Consideremos la ecuación diferencial conteniendo al parámetro real  $c$ :

$$x' = cx + x^2. \quad (3.7)$$

Los puntos de equilibrio son los puntos  $0$  y  $-c$ .

- Si  $c < 0$ , entonces  $0$  es un punto asintóticamente estable y  $-c$  es inestable.
- Si  $c = 0$  los nodos colisionan en el origen, el cual es un punto de equilibrio no hiperbólico inestable.
- Si  $c > 0$  la estabilidad se intercambia: el origen inestable y  $-c$  es estable.

En el plano de fase, representado en la Figura 3.5, podemos observar que en función de los valores de  $c$  la parábola corta el eje en uno o dos puntos que se corresponden con los equilibrios. El diagrama de bifurcación se muestra en la Figura 3.6.

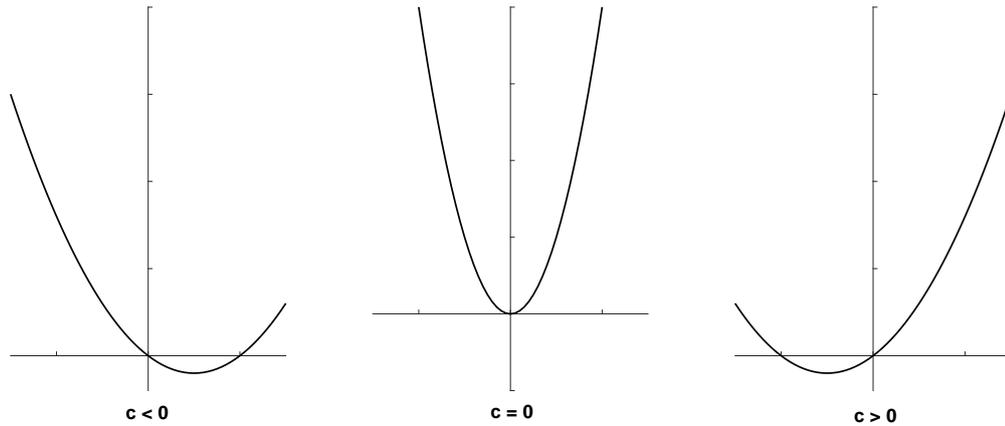


Figura 3.5: Plano de fases de  $x' = cx + x^2$  para los diferentes valores de  $c$ .

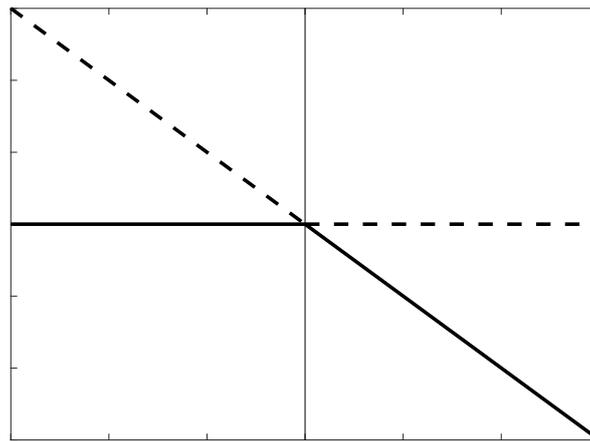


Figura 3.6: Diagrama de bifurcación de la bifurcación transcritical.

■ **Ciclo de histéresis: dos bifurcaciones silla-nodo.**

El ciclo de histéresis puede observarse a partir de un sistema dinámico que tenga como ecuación:

$$x' = c + x - x^3. \quad (3.8)$$

La variación del parámetro de bifurcación  $c$  se corresponde con un desplazamiento vertical del eje  $OX$  en la representación de  $F(c, x)$  en función de  $x$ . El plano de fases de la ecuación (3.8) se muestra en la Figura 3.7.

Para  $c = 0$  la Eq.(3.8) tiene estructura estable. El flujo del sistema presenta una estructura orbital estable que se corresponde con un equilibrio estable para pequeños

valores del parámetro, esto es, para  $-c_1 < c < c_1$ , donde  $c_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}}$  es el máximo local y  $-c_1$  es el mínimo local de  $F(0, x)$ . Para  $c = -c_1$  o  $c = c_1$ , la ecuación está en un punto de bifurcación. Para los valores del parámetro  $c < -c_1$  y  $c > c_1$ , el sistema tiene estructura orbital estable. El diagrama de bifurcación se muestra en la Figura 3.8.

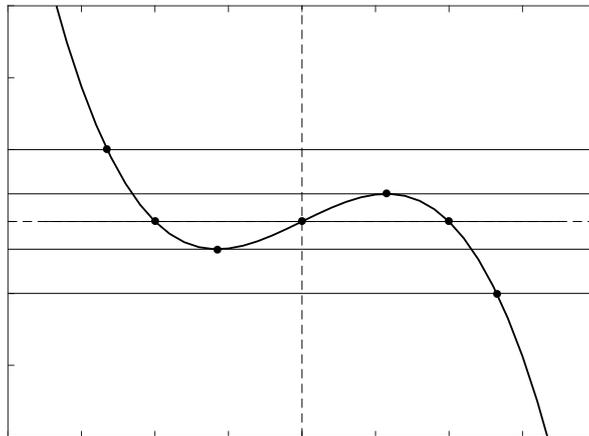


Figura 3.7: Plano de fases de  $x' = c + x - x^3$  para los diferentes valores de  $c$  en el plano  $(\bar{x}, c)$ .

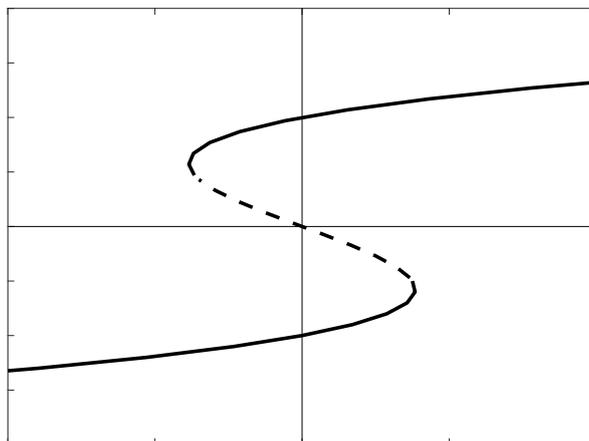


Figura 3.8: Diagrama de bifurcación del ciclo histéresis.

Si iniciamos el sistema con un valor negativo de  $c$  muy grande, después de un largo tiempo, independientemente de la condición inicial  $x_0$ , el sistema estará muy cerca de un estado de equilibrio estable a la izquierda de la cúbica.

Ahora, aumentemos continuamente el valor del parámetro  $c$ . Dado que el sistema estaba cerca del estado estable cuando comenzamos a variar  $c$ , se mantendrá cerca de este estado estable para pequeñas variaciones del sistema en  $c$ . De hecho, a medida que aumentamos el parámetro  $c$ , el sistema seguirá el equilibrio estable a la izquierda hasta  $c = c_1$ . En este punto, el sistema saltará a un estado de equilibrio estable diferente a la derecha de la función cúbica. A medida que continuemos incrementando el parámetro  $c$ , el sistema seguirá el equilibrio estable a la derecha.

Ahora, si comenzamos a disminuir el parámetro  $c$  de un valor positivo muy grande, el sistema seguirá los equilibrios en el lado derecho de la función cúbica hasta  $c = -c_1$ , en cuyo punto saltará al lado izquierdo. La observación importante sobre este experimento es que el sistema experimenta un salto en dos valores diferentes del parámetro; además, el valor del parámetro en el que se produce el salto está determinado por la dirección en la que varía el parámetro. Este fenómeno se conoce como ciclo de histéresis.

Este tipo de bifurcaciones también pueden interpretarse como dos bifurcaciones silla-nodo de equilibrios, una para  $c = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ , y la otra para  $c = \frac{-2}{3\sqrt{3}}$ .

#### ■ Bifurcación Pitchfork

En este punto es necesario definir el concepto de bifurcación supercrítica y subcrítica.

**Definición 3.2.2.** *Se dice que un sistema dinámico presenta una bifurcación Pitchfork supercrítica cuando, en el caso de que exista un equilibrio aislado, los equilibrios adicionales que aparecen en el punto de bifurcación existen para valores en los que el equilibrio original es inestable. Por el contrario, se dice que es una bifurcación Pitchfork subcrítica si dichos equilibrios aparecen para valores del parámetro de bifurcación en que el equilibrio original es estable.*

- *Bifurcación Pitchfork supercrítica:*  
Consideremos el sistema diferencial

$$x' = dx - x^3, \quad (3.9)$$

donde  $d$  es un parámetro real.

La variación del parámetro  $d$  afecta a la pendiente de la función cúbica centrada en el origen; ver la Figura 3.9.

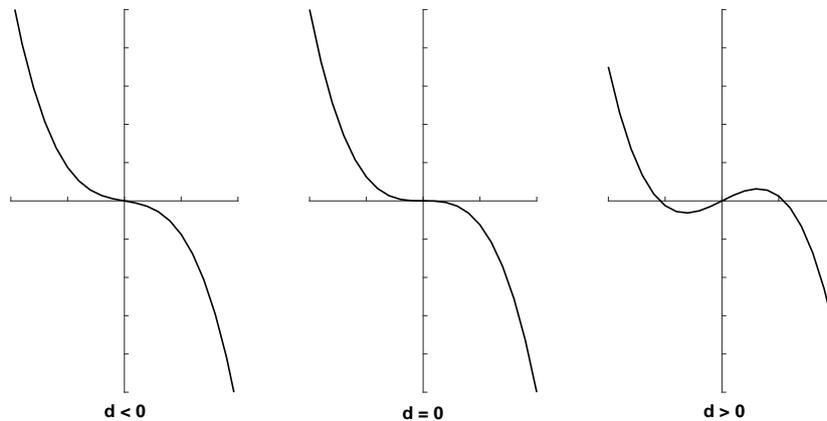


Figura 3.9: Plano de fases de  $x' = dx - x^3$  para los diferentes valores de  $d$ .

Del sistema (3.9) se obtiene fácilmente que el sistema presenta tres puntos de equilibrio,  $-\sqrt{d}$ ,  $0$  y  $\sqrt{d}$ , cuando el parámetro  $d > 0$ , mientras que su único punto de equilibrio es el origen cuando es negativo. En el punto  $d = 0$  los tres equilibrios se unen en uno, el origen, siendo éste un punto de bifurcación.

Para valores de  $d < 0$ , el sistema tiene un equilibrio asintóticamente estable en el origen. Al ir aumentando  $d$ , la pendiente de la función cúbica se va haciendo cada vez más pequeña en valor absoluto hasta que en  $d = 0$  se hace nula, transformándose el equilibrio en uno no hiperbólico. Para valores de  $d > 0$  el sistema tiene tres equilibrios, uno inestable, el origen, y los otros dos asintóticamente estables. El diagrama de bifurcación se presenta en la Figura 3.10. Dicho diagrama se corresponde con la bifurcación Pitchfork supercrítica.

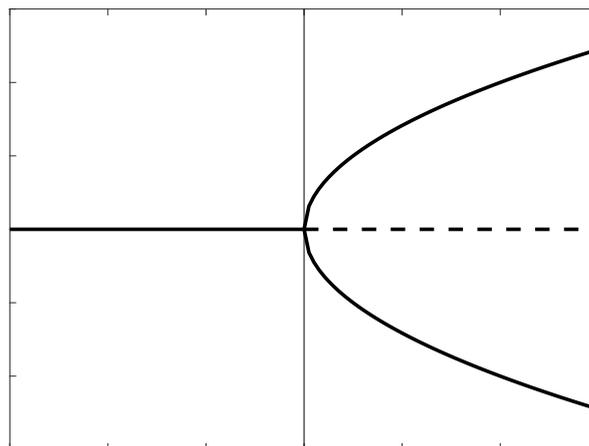


Figura 3.10: Bifurcación Pitchfork supercrítica.

- *Bifurcación Pitchfork subcrítica:*

Ahora consideremos el sistema diferencial

$$x' = dx + x^3, \quad (3.10)$$

con  $d$  un parámetro real.

El sistema (3.10) presenta tres puntos de equilibrio,  $-\sqrt{-d}$ ,  $0$  y  $\sqrt{-d}$  cuando el parámetro  $d < 0$ , mientras que su único punto de equilibrio es el origen cuando  $d > 0$ .

Si  $d > 0$ , el sistema tiene un equilibrio inestable en el origen. Mientras que para valores de  $d < 0$  el sistema tiene tres equilibrios, uno estable, el origen, y los otros dos inestables.

El diagrama de bifurcación de Pitchfork subcrítica se presenta en la Figura 3.11.

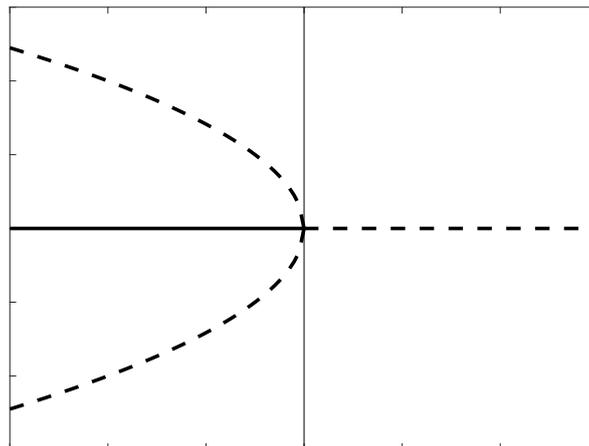


Figura 3.11: Bifurcación Pitchfork subcrítica.

### 3.2.2. Bifurcaciones elementales en dimensión dos

En esta sección, presentaremos tres ejemplos de bifurcaciones de ecuaciones diferenciales planas. Los dos primeros, no son más que una extensión de las ya comentadas en los sistemas de dimensión uno.

Antes de ver los diferentes tipos de bifurcaciones, vamos a introducir el concepto de *integral primera* que necesitaremos más adelante para el análisis de la bifurcación homoclina.

**Definición 3.2.3.** Una función real  $C^1$

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\mapsto H(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

no constante en ningún subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  se denomina integral primera de la ecuación diferencial plana  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  si la función  $H$  es constante a lo largo de cada solución, esto es, para cualquier solución  $\mathbf{x}(t)$  con condición inicial  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , se satisface  $H(\mathbf{x}(t)) = H(\mathbf{x}_0)$  para todo  $t$  para el cual la solución está definida.

Nótese que en la definición anterior, el dominio de  $H$  está en  $\mathbb{R}^2$  o en el dominio del campo vectorial. Por esta razón,  $H$  se dice que es la *integral primera global*.

Es sencillo comprobar si una función es primera integral de una ecuación diferencial usando solo el campo vectorial, sin ningún conocimiento sobre las soluciones:  $H$  es una primera integral si

$$H'(\mathbf{x}) \equiv \nabla H(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\partial H}{\partial x_1}(\mathbf{x})f_1(\mathbf{x}) + \frac{\partial H}{\partial x_2}(\mathbf{x})f_2(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.11)$$

La utilidad principal de la integral primera viene de la observación de que la órbita a través de cualquier  $\mathbf{x}_0$  de la ecuación diferencial se encuentra en el conjunto de nivel

$$H^{-1}(H(\mathbf{x}_0)) \equiv \{\mathbf{x} : H(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}_0)\}$$

de la función  $H$ . La función  $H$  que toma valor constante en  $\mathbb{R}^2$ , trivialmente satisface la ecuación (3.11) para cualquier ecuación diferencial. En este caso, el único conjunto de nivel es el plano. Además, si  $H$  no es constante en ningún subconjunto abierto del plano, entonces el conjunto de nivel de  $H$  es, en general, un conjunto unidimensional del plano y la órbita a través de  $\mathbf{x}_0$  es una pieza conectada del conjunto unidimensional.

Una vez definido el concepto de integral primera, pasamos a analizar algunos tipos de bifurcaciones bidimensionales:

- **Bifurcación silla-nodo**

Consideremos el siguiente sistema dependiendo del parámetro  $\lambda$ :

$$\begin{cases} x_1' = \lambda + x_1^2, \\ x_2' = -x_2. \end{cases} \quad (3.12)$$

Obsérvese que la segunda ecuación es lineal con  $x_2(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Así, las órbitas del sistema se aproximan al eje  $x_1$  donde la dinámica del sistema está gobernada por la primera ecuación.

Veamos que ocurre con el flujo del plano de fases de la ecuación (3.12) para los diferentes valores del parámetro  $\lambda$ .

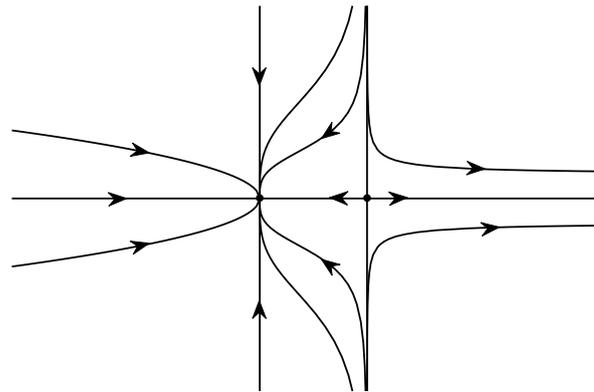
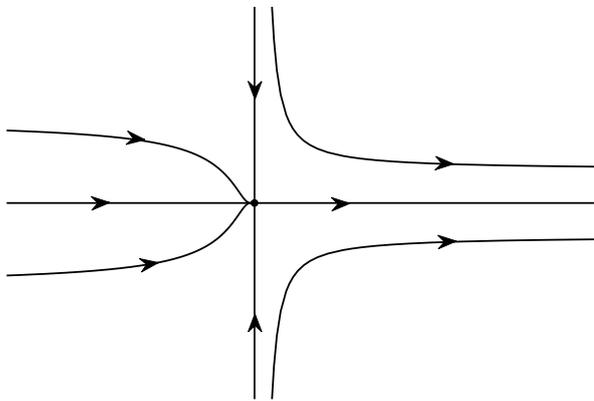
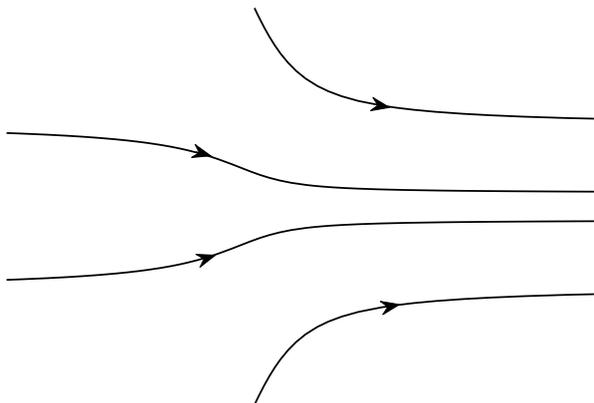
 $\lambda < 0$  $\lambda = 0$  $\lambda > 0$ 

Figura 3.12: Retrato de fase de la bifurcación silla-nodo.

Si  $\lambda < 0$ , el sistema tiene dos puntos de equilibrio, uno estable y el otro inestable. Uno de los puntos de equilibrio es un punto de silla, y por tanto inestable, pues existen dos órbitas cerca del origen tales que los conjuntos  $\omega$ -límite de dichas órbitas son el origen, y hay otras dos órbitas cuyo conjunto  $\alpha$ -límite también es el origen. El otro punto de equilibrio es un nodo, y por tanto estable, pues el conjunto  $\omega$ -límite de todas las órbitas empezando cerca del punto de equilibrio es el origen. Cuando  $\lambda = 0$ , ambos equilibrios se unen y desaparecen para  $\lambda > 0$ .

El diagrama de bifurcaciones correspondiente a la bifurcación silla-nodo es el mismo que en el caso monodimensional y se corresponde con la Figura 3.12.

### ■ Bifurcación Pitchfork

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x_1' = -\lambda x_1 - x_1^3, \\ x_2' = -x_2. \end{cases} \quad (3.13)$$

Como en el ejemplo anterior, la dinámica del sistema está gobernada por la primera ecuación. Veamos ahora cómo es el flujo del plano de fases de la ecuación (3.13) para los diferentes valores del parámetro  $\lambda$ ; ver Figura 3.13.

Si  $\lambda < 0$ , tenemos tres puntos de equilibrio: el origen, que es inestable, y además dos puntos estables. Por el contrario, si  $\lambda \geq 0$  el sistema presenta sólo un equilibrio estable en el origen.

### ■ Bifurcación Homoclina

Consideremos el sistema plano dependiendo del parámetro  $\lambda$

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_1 + \lambda x_2 - x_1^2. \end{cases} \quad (3.14)$$

Para  $\lambda = 0$ , el sistema es conservativo con la integral primera

$$H(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{3}x_1^3.$$

El plano de fases de la ecuación (3.14) en  $\lambda = 0$  se conoce como “el pez”; ver Figura 3.14. El punto de equilibrio en  $(1, 0)$  es un centro rodeado localmente por órbitas periódicas concéntricas. El otro punto de equilibrio se encuentra en el origen y es un punto de silla visto de manera local; cuando se mira de manera global, sin embargo, una de las órbitas que emanan del origen termina nuevamente en el origen después de rodear el otro punto de equilibrio. En efecto, el conjunto  $H(x_1, x_2) = 0$  es especial. Contiene el punto de equilibrio en el origen y la órbita cuyos conjuntos  $\alpha$ - y  $\omega$ -límites son de nuevo el origen.

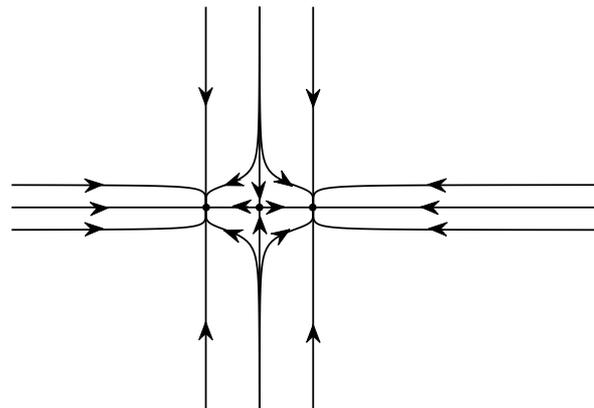
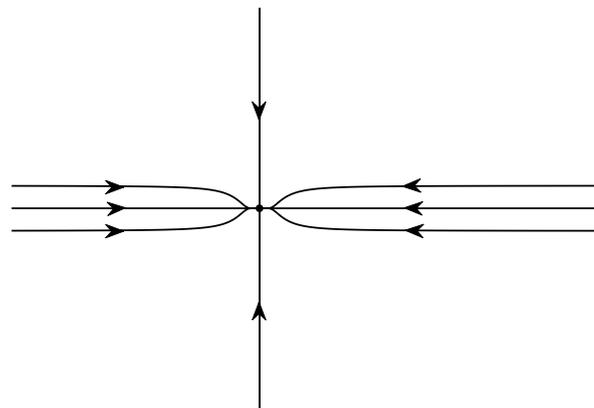
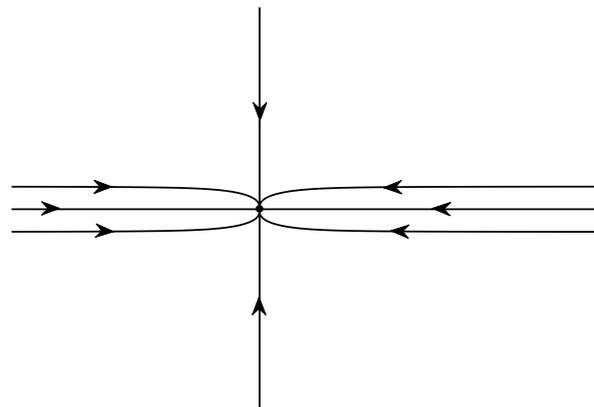
 $\lambda < 0$  $\lambda = 0$  $\lambda > 0$ 

Figura 3.13: Retrato de fase de la bifurcación Pitchfork.

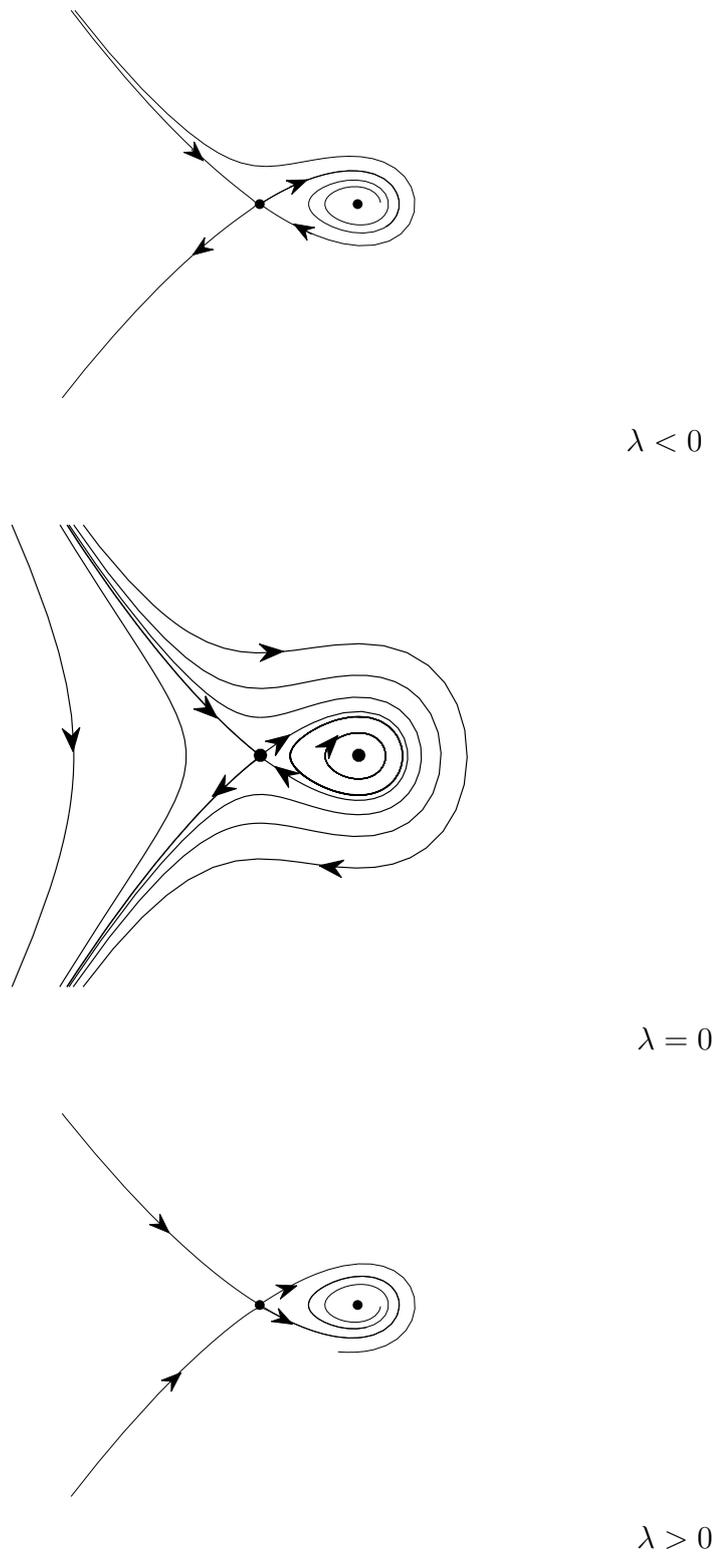


Figura 3.14: Retrato de fase de la bifurcación Homoclina.

**Definición 3.2.4.** *Las órbitas cuyos conjuntos  $\alpha$ - y  $\omega$ -límites son el mismo punto de equilibrio se denomina órbita homoclina.*

### 3.2.3. Bifurcaciones locales de órbitas periódicas

Sea  $\Gamma_0$  una órbita periódica de ecuación  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Consideremos la ecuación diferencial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\lambda, \mathbf{x}), \quad (3.15)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{F} : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, \mathbf{x}) &\mapsto F(\lambda, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

satisfaciendo  $\mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ .

En esta sección, investigaremos el comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial (3.15) en un entorno de la órbita periódica  $\Gamma_0$  para valores pequeños del parámetro  $\lambda$  cerca de  $\lambda = 0$ .

Teóricamente, es sencillo estudiar las bifurcaciones locales del sistema (3.15) cerca de la órbita periódica  $\Gamma_0$  mediante la aplicación de Poincaré. En efecto, sea la sección local transversal  $L_\varepsilon$  de la órbita periódica  $\Gamma_0$  definida en el capítulo anterior. Existen  $\lambda_0 > 0$  y  $\delta > 0$  tal que para  $0 \leq |\lambda| < \lambda_0$ , y  $\mathbf{x} \in L_\delta$ , existe un primer tiempo  $T(\lambda, \mathbf{x}_0) > 0$  tal que la solución  $\varphi(\lambda, t, \mathbf{x}_0)$  de la ecuación (3.15) satisface  $\varphi(\lambda, T(\lambda, \mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0) \in L_\varepsilon$ . Por lo tanto, definimos la aplicación de Poincaré dependiendo de los parámetros como  $\Pi(\lambda, \mathbf{x}_0) = \varphi(\lambda, T(\lambda, \mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0)$  que lleva  $L_\delta$  en  $L_\varepsilon$ . La aplicación de Poincaré  $\Pi(\lambda, \mathbf{x}_0)$  será monótona por la misma razón en la que lo era  $\Pi(\mathbf{0}, \mathbf{x}_0)$  en el Teorema 3.1.7. Por supuesto, las órbitas periódicas cerca de  $\Gamma_0$  corresponden con los puntos fijos de  $\Pi(\lambda, \mathbf{x}_0)$ .

A continuación, describiremos dos de las bifurcaciones más habituales relacionadas con órbitas periódicas.

#### ■ Bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas

Sea el sistema plano:

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 \sin \lambda - x_2 \cos \lambda + (1 - x_1^2 - x_2^2)^2 (x_1 \cos \lambda - x_2 \sin \lambda), \\ x_2' = -x_1 \cos \lambda - x_2 \sin \lambda + (1 - x_1^2 - x_2^2)^2 (x_1 \sin \lambda - x_2 \cos \lambda), \end{cases} \quad (3.16)$$

donde  $\lambda$  es un parámetro real pequeño.

Si transformamos el sistema (3.16) a coordenadas polares realizando el cambio de variables  $x_1 = r \cos \theta$  y  $x_2 = r \sin \theta$ , el sistema es de la forma

$$\begin{cases} r' = r[(1 - r^2)^2 \cos \lambda - \sin \lambda], \\ \theta' = (1 - r^2)^2 \sin \lambda - \cos \lambda. \end{cases} \quad (3.17)$$

Dado que la primera ecuación del sistema (3.17) es independiente de  $\theta$ , es fácil ver que, en la dirección radial el sistema anterior experimenta una bifurcación silla-nodo cuando el parámetro  $\lambda$  pasa por cero; ver Figura 3.15. En efecto:

- Si  $\lambda > 0$ , y es suficientemente pequeño, el sistema (3.17) tiene dos órbitas periódicas; una inestable

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 + \sqrt{\tan \lambda},$$

que es una circunferencia de radio mayor que uno y una estable

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 - \sqrt{\tan \lambda},$$

la cual es también una circunferencia pero con radio menor que uno.

- Si  $\lambda = 0$ , el sistema (3.17) tiene una órbita periódica simple no hiperbólica inestable en  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ .
- Si  $\lambda < 0$ , el sistema (3.17) no tiene órbitas estables pues  $r' > 0$  y todas las soluciones, excepto el origen, se van al infinito cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

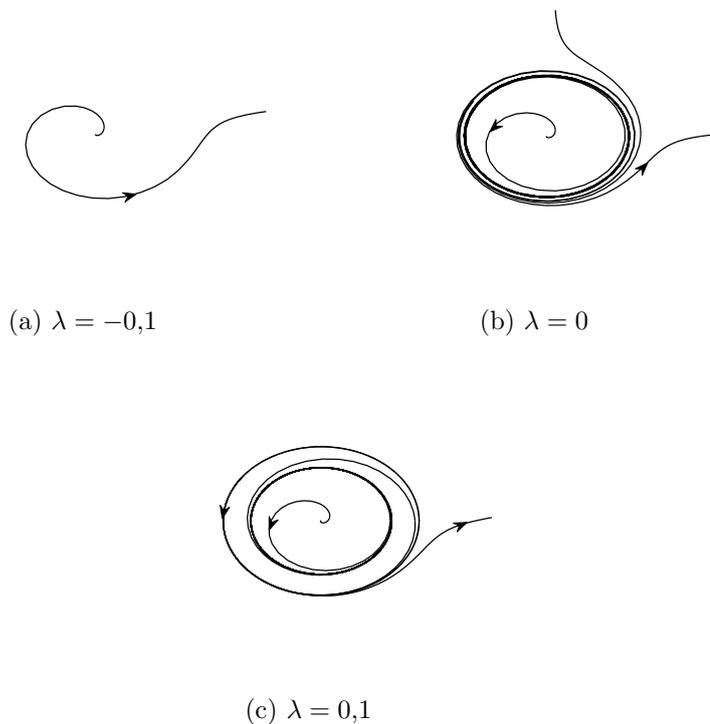


Figura 3.15: Retrato de fase de la bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas.

### 3.3. Bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf

#### 3.3.1. Transformación de un sistema autónomo a coordenadas polares

En los sistemas planos para los que la linealización cerca de un punto de equilibrio tiene autovalores puramente imaginarios, es posible reducir el problema al análisis de una ecuación diferencial escalar  $2\pi$ -periódica, en lugar de una autónoma.

En particular, sea  $\mathbf{f}$  una función  $\mathbf{C}^k$  dada,  $k \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

satisfaciendo

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}; \quad \|D\mathbf{f}(\mathbf{0})\| < 1, \quad (3.18)$$

donde la norma de la matriz Jacobiana  $\|D\mathbf{f}(\mathbf{0})\|$  es un número real no negativo tal que  $\|D\mathbf{f}(\mathbf{0})\mathbf{x}\| \leq \|D\mathbf{f}(\mathbf{0})\| \|\mathbf{x}\|$  para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ .

Consideremos el sistema plano de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + f_1(x_1, x_2), \\ x_2' = -x_1 + f_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad (3.19)$$

cuya notación vectorial es de la forma

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Nótese que la parte lineal del campo vectorial en el punto de equilibrio en el origen está en forma normal de Jordan con autovalores  $\pm i$ .

Puesto que la parte lineal tiene simetría rotacional, es razonable introducir las coordenadas polares

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = -r \sin \theta,$$

para estudiar el sistema (3.19) en un entorno del origen lo suficientemente pequeño.

Tenemos que

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad \theta = \arctan\left(-\frac{x_2}{x_1}\right),$$

por lo que

$$\begin{aligned} r' &= \frac{x_1 x_1' + x_2 x_2'}{r}, \\ \theta' &= \frac{-x_1 x_2' + x_2 x_1'}{r^2}. \end{aligned}$$

Si sustituimos primero por el sistema (3.19) y luego aplicamos el cambio a coordenadas polares, mediante operaciones sencillas, llegamos a que

$$\begin{aligned} r' &= f_1(r \cos \theta, -r \sin \theta) \cos \theta - f_2(r \cos \theta, -r \sin \theta) \sin \theta, \\ \theta' &= -\frac{1}{r}[f_1(r \cos \theta, -r \sin \theta) \sin \theta + f_2(r \cos \theta, -r \sin \theta) \cos \theta]. \end{aligned}$$

Por tanto, en coordenadas polares, la Eq. (3.19) viene dada por

$$\begin{cases} r' = \mathfrak{R}(r, \theta), \\ \theta' = 1 + \Theta(r, \theta), \end{cases} \quad (3.20)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(r, \theta) &= f_1(r \cos \theta, -r \sin \theta) \cos \theta - f_2(r \cos \theta, -r \sin \theta) \sin \theta, \\ \Theta(r, \theta) &= -\frac{1}{r}[f_1(r \cos \theta, -r \sin \theta) \sin \theta + f_2(r \cos \theta, -r \sin \theta) \cos \theta], \end{aligned}$$

donde  $r \neq 0$ , y en  $r = 0$  definimos

$$\Theta(0, \theta) = (\sin \theta, \cos \theta) D\mathbf{f}(\mathbf{0}) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}.$$

Dado que  $\mathbf{f}$  satisface las condiciones (3.18), la función  $\mathfrak{R}$  es  $C^k$  y  $\Theta$  es  $C^{k-1}$ , entonces se cumple que

$$\mathfrak{R}(0, 0) = 0, \quad |\Theta(0, \theta)| < 1.$$

Nótese que  $\mathfrak{R}(r, \theta)$  y  $\Theta(r, \theta)$  son funciones  $2\pi$ -periódicas en la variable  $\theta$ .

Ahora explicaremos como transformar las órbitas de la ecuación (3.19) en soluciones de ecuaciones diferenciales  $2\pi$ -periódicas cuando  $r$  es suficientemente pequeño.

Como  $|\Theta(0, \theta)| < 1$  para todo  $\theta$  y  $\Theta(r, \theta)$  es continua, podemos escoger  $\delta > 0$  tal que  $1 + \Theta(r, \theta) > 0$ ,  $\forall \theta$ , y  $|r| < \delta$ . Como consecuencia,  $\theta' > 0$  en un entorno del origen. Esto implica que las órbitas de la ecuación (3.20) giran de forma monótona en  $\theta$  alrededor del origen. Por lo tanto, podemos eliminar  $t$  en la ecuación (3.20) y obtener una ecuación para  $r$  como función de  $\theta$  a través de la ecuación diferencial

$$\frac{dr}{d\theta} = R(r, \theta), \quad (3.21)$$

donde

$$R(r, \theta) = \frac{\mathfrak{R}(r, \theta)}{1 + \Theta(r, \theta)},$$

la cual es una función de  $C^{k-1}$ ,  $2\pi$ -periódica, y satisface  $R(0, \theta) = 0$ .

Las soluciones de la ecuación (3.21) da las órbitas de la ecuación (3.19). También podemos recuperar las soluciones del sistema (3.19) como una función del tiempo para las soluciones de la ecuación (3.21) siguiendo los siguientes pasos:

- Fijamos  $r_0$  y encontramos la solución  $r(\theta, r_0)$  de la ecuación (3.21) satisfaciendo la condición inicial  $r(0, r_0) = r_0$ . La órbita del sistema (3.19) a través del punto  $\mathbf{x}_0 = (r_0, 0)$  viene dada por

$$\gamma(\mathbf{x}_0) = \{(x_1, x_2) : x_1 = r(\theta, r_0) \cos \theta, x_2 = -r(\theta, r_0) \sin \theta, 0 \leq \theta < \infty\}. \quad (3.22)$$

- Encontrar la solución  $\theta(t)$  del problema del valor inicial

$$\begin{cases} \theta' = 1 + \Theta(r(\theta, r_0), \theta), \\ \theta(0) = 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

- La solución  $\mathbf{x}(t)$  del sistema (3.19) a través del punto  $\mathbf{x}_0 = (r_0, 0)$  viene dada por

$$\begin{cases} x_1(t) = r(\theta(t), r_0) \cos \theta(t), \\ x_2(t) = -r(\theta(t), r_0) \sin \theta(t). \end{cases} \quad (3.24)$$

### 3.3.2. Estabilidad

En esta sección, nuestro objetivo es estudiar la estabilidad. Convertiremos la ecuación escalar  $dr/d\theta$  en la ecuación  $d\rho/d\theta$  para la cual el orden más pequeño de la expansión de Taylor del campo vectorial tiene un coeficiente constante no nulo. Para la ecuación (3.21), es posible mostrar que el orden más pequeño siempre debe ser impar. Con esto, el siguiente resultado es inmediato.

**Lema 3.3.1.** *Supongamos que  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$  es una función  $C^{2k+2}$  en el sistema (3.19) con la correspondiente transformación escalar*

$$\frac{d\rho}{d\theta} = a\rho^{2k+1} + o(|\rho^{2k+1}|), \quad \rho \rightarrow 0,$$

donde  $a \neq 0$  es un número real,  $k$  es un entero positivo. Entonces el punto de equilibrio en el origen del sistema (3.19) es asintóticamente estable si  $a < 0$ ; de lo contrario es inestable.

En ocasiones, puede ocurrir que los coeficientes de  $\rho$  en la ecuación  $d\rho/d\theta$  sean todas cero. En este caso, es difícil conocer la estabilidad del origen. Sin embargo, con una restricción de la función  $\mathbf{f}$ , tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 3.3.1. (Teorema central de Liapunov)**

*Supongamos que  $\mathbf{f}$  es analítica. Entonces, para el punto de equilibrio en el origen del sistema (3.19), se verifica una de las tres alternativas siguientes:*

1. El origen es inestable,
2. El origen es asintóticamente estable,

3. El origen es un centro, esto es, toda solución en un entorno del origen es periódica.

Esto concluye el análisis de la estabilidad de un punto de equilibrio cuando sus autovalores son puramente imaginarios. El método de coordenadas polares y reducción a la ecuación escalar  $dr/d\theta$  también proporciona una herramienta efectiva para el estudio de órbitas periódicas de la ecuación (3.19) alrededor del origen. Veamos un par de observaciones.

**Lema 3.3.2.** *Existe un entorno acotado  $U$  del origen en  $\mathbb{R}^2$  tal que cada órbita periódica  $\Gamma$  de la ecuación (3.19) contenida en  $U$  rodea al origen; además si  $\mathbf{x}_0 = (r_0, 0) \in \Gamma$  con  $r_0 > 0$ , entonces la solución  $r(\theta, r_0)$  de la ecuación (3.21) satisfaciendo  $r(0, r_0) = r_0$  es  $2\pi$ -periódica en  $\theta$ . A la inversa, si  $r(\theta, r_0)$  es una solución  $2\pi$ -periódica de la ecuación (3.21), entonces la órbita  $\Gamma(\mathbf{x}_0)$  con  $\mathbf{x}_0 = (r_0, 0)$  en el sistema plano (3.19) es una órbita periódica. El período mínimo  $T$  tal que  $\Gamma$  es el primer valor de  $t$  para el cual la solución  $\theta(t)$  del sistema (3.23) satisface*

$$\theta(T) = 2\pi. \quad (3.25)$$

El resultado siguiente, es un caso especial del Teorema de Poincaré-Bendixson.

**Teorema 3.3.2.** *Existe un entorno del origen  $U \subset \mathbb{R}^2$  tal que si  $\mathbf{x}_0 \in U$  y la solución  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  del sistema (3.19) permanece en  $U$  para  $t \geq 0$  (respectivamente,  $t \leq 0$ ), entonces el conjunto  $\omega$ -límite  $\omega(\mathbf{x}_0)$  (respectivamente,  $\alpha(\mathbf{x}_0)$ ) es una órbita periódica o el punto de equilibrio en el origen.*

Para estudiar la estabilidad de una órbita periódica  $\Gamma$  del sistema (3.19), consideramos  $\Gamma$  como una curva cerrada y omitimos su tiempo  $t$ . En este contexto, definimos la *distancia* de un punto  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$  a una órbita periódica  $\Gamma$  como

$$\text{dist}(\hat{\mathbf{x}}, \Gamma) \equiv \min\{\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|, \forall \mathbf{x} \in \Gamma\}.$$

**Definición 3.3.1.** *Una órbita periódica  $\Gamma$  del sistema (3.19) se dice que es orbitalmente estable si, para cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que  $\text{dist}(\mathbf{x}_0, \Gamma) < \delta$  implica que  $\text{dist}(\varphi(t, \mathbf{x}_0), \Gamma) < \varepsilon$  para todo  $t \geq 0$ . De lo contrario, diremos que la órbita periódica  $\Gamma$  es orbitalmente inestable.*

**Definición 3.3.2.** *Una órbita periódica  $\Gamma$  del sistema (3.19) se dice que es orbitalmente asintóticamente estable si es orbitalmente estable y, además, existe un  $b > 0$  tal que  $\text{dist}(\mathbf{x}_0, \Gamma) < b$  implica que  $\text{dist}(\varphi(t, \mathbf{x}_0), \Gamma) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ , esto es,  $\omega(\mathbf{x}_0) \subset \Gamma$ .*

**Definición 3.3.3.** *Una órbita periódica  $\Gamma$  del sistema (3.19) se dice que es orbitalmente asintóticamente estable con fase asintótica si es orbitalmente asintóticamente estable y, además, para cualquier  $\mathbf{x}_0$  con  $\text{dist}(\mathbf{x}_0, \Gamma) < b$  y  $\mathbf{y}_0 \in \Gamma$  existe un número real  $v$  tal que*

$$\|\varphi(t, \mathbf{x}_0) - \varphi(t + v, \mathbf{y}_0)\| \rightarrow 0, \quad \text{cuando } t \rightarrow +\infty.$$

Con estas definiciones, el teorema siguiente es inmediato:

**Teorema 3.3.3.** *Sea  $\Gamma$  una órbita periódica del sistema (3.19) y sea  $\psi(\theta)$  la solución  $2\pi$ -periódica correspondiente de la ecuación (3.21). Entonces*

- $\Gamma$  es orbitalmente estable (respectivamente, orbitalmente asintóticamente estable) si  $\psi(\theta)$  es estable (respectivamente, asintóticamente estable) como solución de la ecuación (3.21),
- $\Gamma$  es orbitalmente asintóticamente estable con fase asintótica si es orbitalmente asintóticamente estable y, para cualquier solución  $r(\theta, r_0)$  de la ecuación (3.21) con  $r_0$  cerca de  $\psi(0)$ , existe un número real  $v$  tal que la solución  $\theta(t)$  del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \theta' = 1 + \Theta(r(\theta, r_0), \theta), \\ \theta(0) = 0. \end{cases}$$

tiene la propiedad  $\theta(t) - t \rightarrow v$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

### 3.3.3. Bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf

En esta sección, estudiaremos bifurcaciones en un entorno de puntos de equilibrio no hiperbólicos cuyos autovalores son imaginarios puros no nulos. Del teorema de la función implícita se sigue que bajo perturbaciones pequeñas del campo vectorial, el punto de equilibrio no desaparece y no se crean nuevos puntos de equilibrio. Sin embargo, si el tipo de estabilidad del equilibrio cambia cuando está sometido a perturbaciones, entonces este cambio suele ser acompañado de la aparición o desaparición de pequeñas órbitas periódicas rodeando al punto de equilibrio.

A continuación, definiremos el concepto de bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf.

**Definición 3.3.4.** *Una bifurcación de un equilibrio de sistema  $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\lambda, \mathbf{x})$ , para el cual sus autovalores son puramente imaginarios, es decir,  $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$  con  $\beta > 0$ , se denomina bifurcación Poincaré-Andronov-Hopf, o bifurcación del nacimiento de un ciclo límite.*

Uno de los enfoques más importantes, junto con la teoría de Poincaré-Bendixson, es la bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf, que es la única bifurcación bidimensional, es decir, no se puede observar en sistemas de dimensión 1, lo que puede ocurrir en dos dimensiones genéricas sistemas autónomos que dependen de un parámetro (bifurcación de co-dimensión 1).

El siguiente teorema establece algunas condiciones de existencia de órbitas periódicas de la bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf. La estabilidad se estudiará posteriormente.

**Teorema 3.3.4. (Poincaré-Andronov-Hopf)** Sea  $\mathbf{x}' = A(\lambda)\mathbf{x} + \mathbf{F}(\lambda, \mathbf{x})$  de clase  $C^k$  con  $k \geq 3$  un campo vectorial plano dependiendo del parámetro  $\lambda$  tal que  $\mathbf{F}(\lambda, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  y  $D_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\lambda, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  para todo  $|\lambda|$  suficientemente pequeño. Supongamos que la parte lineal  $A(\lambda)$  tiene, en el origen, los autovalores  $\alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$  con  $\alpha(0) = 0$  y  $\beta(0) \neq 0$ . Además, supongamos que estos autovalores cruzan el eje imaginario con velocidad distinta de cero, es decir,

$$\frac{d\alpha}{d\lambda}(0) \neq 0. \quad (3.26)$$

Entonces, en cualquier entorno del origen  $U \subset \mathbb{R}^2$  y dado cualquier  $\lambda_0 > 0$ , existe  $\bar{\lambda}$  con  $|\bar{\lambda}| < \lambda_0$  tal que la ecuación diferencial  $\mathbf{x}' = A(\bar{\lambda})\mathbf{x} + \mathbf{F}(\bar{\lambda}, \mathbf{x})$  tiene una órbita periódica no trivial en  $U$ .

Para que los cálculos posteriores sean más sencillos, es conveniente transformar la parte lineal a una forma más simple. Usando un cambio lineal de variables, podemos transformar la matriz linealizada del campo vectorial en el origen en la matriz

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha(\lambda) & \beta(\lambda) \\ -\beta(\lambda) & \alpha(\lambda) \end{pmatrix}.$$

A partir de la suposición  $\beta(0) \neq 0$ , podemos cambiar la variable de tiempo de modo que  $\beta(\lambda) = 1$  para  $|\lambda|$  pequeño. Además, la suposición  $(d\alpha/d\lambda)(0) \neq 0$ , en conjunción con el Teorema de la función inversa, implica que hay una correspondencia uno a uno entre  $\alpha(\lambda)$  y  $\lambda$ . Esto nos permite usar  $\alpha(\lambda)$  como el parámetro en lugar de  $\lambda$ . Como resultado de todas estas transformaciones, podemos suponer que la parte lineal del campo vectorial en el punto de equilibrio es de la forma

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Sea  $\mathbf{F}$  es una función  $C^k$ ,  $k \geq 3$ , definida de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, \mathbf{x}) &\mapsto F(\lambda, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

satisfaciendo

$$\mathbf{F}(\lambda, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad D_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\lambda, \mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Así, consideramos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 + x_2 + F_1(\lambda, x_1, x_2), \\ x_2' = -x_1 + \lambda x_2 + F_2(\lambda, x_1, x_2). \end{cases} \quad (3.27)$$

Para el sistema (3.27), el Teorema de Poincaré-Andronov-Hopf se puede reformular de la siguiente manera, donde la variable  $a$  debemos verla como la amplitud aproximada de la solución correspondiente a la órbita periódica:

**Teorema 3.3.5.** Para el sistema (3.27), existen constantes  $a_0 > 0$ ,  $\lambda_0 > 0$ ,  $\delta_0 > 0$ , y funciones reales  $C^1$ ,  $\lambda^*(a)$  y  $T^*(a)$  de una variable real  $a$ , y una función vectorial  $T^*(a)$ -periódica  $\mathbf{x}^*(t, a)$  con las siguientes propiedades: para  $0 \leq a < a_0$ ,

- $\lambda^*(0) = 0$ ,  $T^*(0) = 2\pi$ ,  $\|\mathbf{x}^*(0, a)\| = a$ .
- La función  $\mathbf{x}^*(t, a)$  es una solución del sistema (3.27) con el valor del parámetro  $\lambda = \lambda^*(a)$  y sus componentes viene dadas por

$$\begin{aligned} x_1^*(t, a) &= a \cos t + o(|a|), \\ x_2^*(t, a) &= -a \sin t + o(|a|) \quad \text{cuando } a \rightarrow 0. \end{aligned}$$

- Para  $|\lambda| < \lambda_0$  y  $|T - 2\pi| < \delta_0$  toda solución  $T$ -periódica  $\mathbf{x}(t)$  del sistema (3.27) satisfaciendo  $\|\mathbf{x}(0)\| = a$  y  $\|\mathbf{x}(t)\| < a_0$  deben venir dadas por la función  $\mathbf{x}^*(t, a)$ , excepto por una posible traslación en fase.

*Demostración.* Usando la técnica de la sección anterior, realizamos un cambio a coordenadas polares,  $x_1 = r \cos \theta$ ,  $x_2 = -r \sin \theta$ , con el fin de reemplazar el tiempo por  $\theta$  para obtener la ecuación escalar

$$\frac{dr}{d\theta} = \lambda r + P(\lambda, r, \theta), \quad (3.28)$$

con

$$P(\lambda, 0, \theta) = 0, \quad D_r P(\lambda, 0, \theta) = 0. \quad (3.29)$$

Del Lema 3.3.2, necesitamos estudiar las soluciones  $2\pi$ -periódicas de la Eq. (3.28). Si  $r(\lambda, \theta, a)$  es una solución de la Eq.(3.28) con valor inicial  $r(\lambda, 0, a) = a$ , entonces  $r(\lambda, \theta + 2\pi, a) = r(\lambda, \theta, a)$  para todo  $\theta$  si y sólo si  $r(\lambda, 2\pi, a) = a$ . De la fórmula de variación de constantes, las soluciones de la Eq.(3.28) satisfaciendo  $r(\lambda, 0, a) = a$  vienen dadas por

$$r(\lambda, \theta, a) = a e^{\lambda \theta} + \int_0^\theta e^{\lambda(\theta-s)} P(\lambda, r(\lambda, s, a), s) ds,$$

y así  $r(\lambda, 2\pi, a) = a$  si y sólo si  $\lambda$  y  $a$  satisfacen

$$(1 - e^{-2\pi\lambda})a + \int_0^{2\pi} e^{-\lambda s} P(\lambda, r(\lambda, s, a), s) ds = 0. \quad (3.30)$$

Usando el Teorema de la Función Implícita, probaremos que los valores de  $\lambda$  y  $a$  satisfaciendo esta ecuación forman una curva en el plano  $(a, \lambda)$ . De la Eq.(3.29),  $a = 0$  satisface la Eq.(3.30) pues el integrando se anula. Esta solución trivial corresponde a una solución de equilibrio. Para encontrar las soluciones periódicas no triviales, consideremos la función  $h(a, \lambda)$  dada por

$$h(a, \lambda) \equiv 1 - e^{-2\pi\lambda} + \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} e^{-\lambda s} P(\lambda, r(\lambda, s, a), s) ds,$$

para  $a \neq 0$ , y definimos  $h(0, 0) = 0$ .

Ahora, se sigue de la Eq.(3.29) que  $h$  es una función  $C^1$  cerca de  $a = \lambda = 0$ , y

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda}(0, 0) = -2\pi \neq 0.$$

Por tanto, por el Teorema de la Función Implícita, existe una función  $\lambda^*(a)$  con  $\lambda^*(0) = 0$  tal que

$$h(a, \lambda^*(a)) = 0.$$

Ahora, con este  $\lambda^*(a)$ , la función  $r^*(\theta, a) \equiv r(\lambda^*(a), \theta, a)$  es una solución  $2\pi$ -periódica del sistema (3.27). Como consecuencia, la órbita que pasa por el punto  $\mathbf{x}_0(a) = (a, 0)$  viene dada por

$$\gamma(\mathbf{x}_0(a)) = \{(x_1, x_2) : x_1 = r^*(\theta, a)\cos\theta, x_2 = -r^*(\theta, a)\sen\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

y es una órbita periódica del sistema (3.27).

Para obtener la solución correspondiente del sistema (3.27), sea  $\theta^*(t, a)$  la solución de

$$\begin{cases} \theta' = 1 + \Theta(\lambda^*(a), r^*(\theta, a), \theta), \\ \theta^*(0, a) = 0. \end{cases}$$

Entonces el período mínimo de  $\gamma(\mathbf{x}_0(a))$  está determinado por el primer valor  $T^*(a)$  para el cual  $\theta^*(T^*(a), a) = 2\pi$ . En particular, tenemos  $\theta^*(0) = 2\pi$ . Si ahora definimos

$$\mathbf{x}^*(t, a) \equiv (r^*(\theta^*(t, a), a)\cos\theta^*(t, a), -r^*(\theta^*(t, a), a)\sen\theta^*(t, a)),$$

no es difícil ver que  $\mathbf{x}^*$  satisface las condiciones del teorema. □

El tipo de estabilidad de las órbitas periódicas en el Teorema 3.3.4 se puede deducir de la derivada de la función  $\lambda^*(a)$  cuando esta derivada no es cero. Más específicamente, tenemos el siguiente resultado que enunciaremos sin demostración.

**Teorema 3.3.6.** *Sea  $\lambda^*(a)$  ser la función dada en el Teorema 3.3.4 y sea  $\Gamma_a$  la órbita periódica correspondiente al sistema (3.27). Entonces, para  $a = \bar{a}$  lo suficientemente pequeño, la órbita periódica  $\Gamma_{\bar{a}}$  es orbitalmente asintóticamente estable si  $d\lambda^*(\bar{a})/da > 0$ , e inestable si  $d\lambda^*(\bar{a})/da < 0$ .*

**Definición 3.3.5.** *Si el ciclo límite que bifurca es estable, la bifurcación de Hopf se llama supercrítica. En otro caso, se dirá subcrítica.*

Para finalizar, vamos a analizar un ejemplo generalizado de la bifurcación de Hopf y haremos una representación gráfica para un caso particular que podemos ver en las Figuras 3.16 y 3.17. Consideremos el sistema de la forma

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + \mathcal{F}(\lambda, r^2)x_1, \\ x_2' = -x_1 + \mathcal{F}(\lambda, r^2)x_2, \end{cases} \quad (3.31)$$

donde  $\lambda$  es un parámetro,  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ , y  $\mathcal{F}$  satisface  $\mathcal{F}(0,0) = 0$  de manera que el origen es un punto de equilibrio aislado. Este sistema, mediante un cambio a coordenadas polares, es equivalente al siguiente sistema

$$\begin{cases} r' = \mathcal{F}(\lambda, r^2)r, \\ \theta' = 1. \end{cases} \quad (3.32)$$

Las propiedades de existencia y estabilidad de soluciones periódicas del sistema (3.31) son los mismos que los de los equilibrios de la ecuación diferencial  $r' = \mathcal{F}(\lambda, r^2)r$ . En efecto, si  $r = 0$  o  $\mathcal{F}(\lambda, a^2) = 0$ , entonces  $(a \cos t, -a \sin t)$  es una solución  $2\pi$ -periódica del sistema (3.31) con amplitud  $a$ .

El diagrama de bifurcaciones para las soluciones periódicas del sistema (3.31) es simplemente una representación de las soluciones de  $\mathcal{F}(\lambda, a^2) = 0$  en el plano  $(\lambda, a)$  junto con el eje  $O\lambda$ . Como es usual, las órbitas periódicas estables están indicadas mediante curvas sólidas y las inestables mediante curvas discontinuas.

Tomemos ahora varias formas específicas para  $\mathcal{F}$  y dibujemos los correspondientes diagramas de bifurcaciones.

- Para  $\mathcal{F}(\lambda, r) = \lambda$ : No existen órbitas periódicas no triviales excepto en  $\lambda = 0$ , en cuyo caso hay una órbita periódica para cada amplitud  $a$ . Todas las órbitas periódicas son orbitalmente estables.
- Para  $\mathcal{F}(\lambda, r) = \lambda - r^2$ : hay una única órbita periódica no trivial si  $\lambda > 0$  para cada valor de  $a$ ; esto es,  $a = \sqrt{\lambda}$ . La órbita periódica es orbitalmente asintóticamente estable. En este caso, tenemos una bifurcación de Hopf.
- Para  $\mathcal{F}(\lambda, r) = -(r^2 - c)^2 + c^2 + \lambda$  con  $c > 0$  una constante fija: hay dos órbitas periódicas no triviales, una orbitalmente inestable y la otra orbitalmente asintóticamente estable, para  $-c^2 < \lambda < 0$  con amplitudes  $[c \pm (\lambda + c^2)^{1/2}]^{1/2}$ . Las dos órbitas periódicas se acercan, colapsan y desaparecen a medida que  $\lambda$  disminuye hasta  $-c^2$ , es decir, en  $\lambda = -c^2$  hay una bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas. Solo hay una órbita periódica para  $\lambda > 0$  y es orbitalmente asintóticamente estable. La órbita periódica inestable nace en una bifurcación de Hopf *subcrítica*.

En cada uno de estos ejemplos, las hipótesis del Teorema de la bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf se satisfacen. La existencia de una órbita periódica con pequeña amplitud para  $\lambda$  pequeño como lo afirma el teorema es evidente; sin embargo, el tipo de estabilidad del la órbita periódica depende de los términos no lineales del campo vectorial. Además, como se ve en el primero y el último caso, también puede haber órbitas periódicas adicionales, posiblemente con amplitudes mayores, para un  $|\lambda|$  pequeño dado.

Finalmente, en las Figuras 3.16 y 3.17 podemos ver una representación gráfica del plano de fases y del diagrama de bifurcación, respectivamente, de la bifurcación de Hopf para el sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + x_1(\lambda - x_1^2 - x_2^2), \\ x_2' = -x_1 + x_2(\lambda - x_1^2 - x_2^2). \end{cases}$$

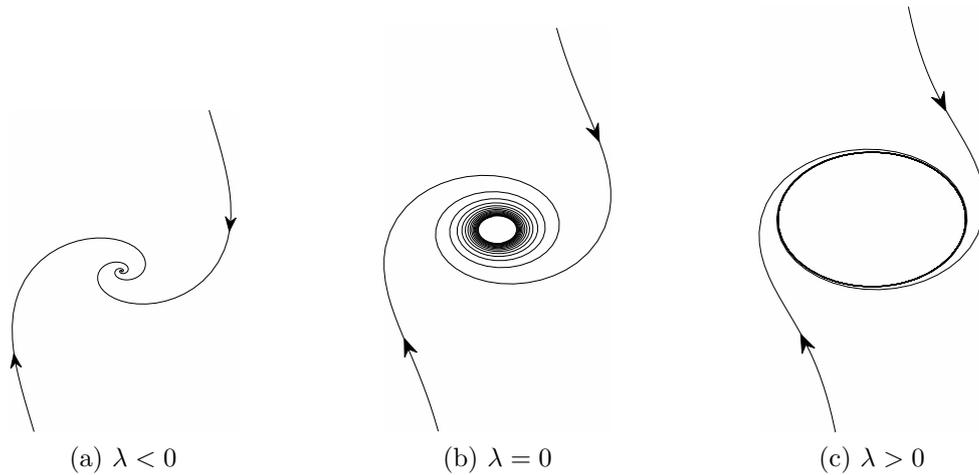


Figura 3.16: Plano de fases de la bifurcación Poincaré-Andronov-Hopf para el sistema  $x_1' = x_2 + x_1(\lambda - x_1^2 - x_2^2)$ ,  $x_2' = -x_1 + x_2(\lambda - x_1^2 - x_2^2)$ .

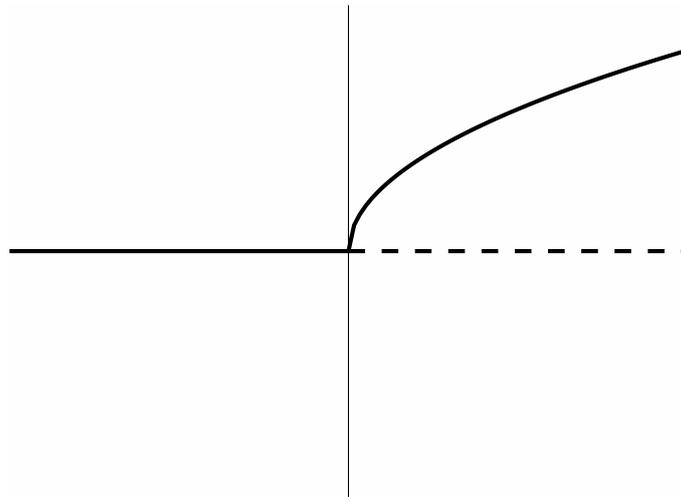


Figura 3.17: Diagrama de bifurcación de la bifurcación Poincaré-Andronov-Hopf para el sistema  $x_1' = x_2 + x_1(\lambda - x_1^2 - x_2^2)$ ,  $x_2' = -x_1 + x_2(\lambda - x_1^2 - x_2^2)$ .



# Capítulo 4

## El Modelo de FitzHugh-Nagumo

Las características más relevantes del potencial de acción de las células excitables y su dinámica, fueron modeladas por Hodgkin y Huxley con su sistema de cuatro ecuaciones diferenciales no lineales [5]. Todos los elementos ahí involucrados tienen un claro significado biofísico. Sin embargo, la complejidad matemática del mismo dificulta su análisis. El modelo de FitzHugh-Nagumo [7] es un sistema simplificado, de dos ecuaciones diferenciales, basado en la ecuación de Van der Pol, que captura la dinámica del fenómeno de excitabilidad. Debido a que una de las ecuaciones es no lineal, el análisis del sistema tampoco es trivial. Sin embargo, el hecho de que la otra ecuación sea lineal y que el sistema sea de dimensión dos, facilita su estudio. El modelo de FitzHugh-Nagumo nos proporciona una idea matemática del mecanismo de excitabilidad neuronal.

En este capítulo, analizaremos cualitativamente el modelo de FitzHugh-Nagumo desde el punto de vista de la estabilidad de sus soluciones de equilibrio y sus órbitas periódicas, con el fin de comprender fenómenos que se presentan debido a cambios en el número de equilibrios y en la estabilidad de los equilibrios, al variar los parámetros que aparecen en dichas ecuaciones. Para su elaboración, hemos consultado las referencias [1], [2], [4] y [6], así como los resultados recogidos en los capítulos anteriores de este trabajo.

El sistema de FitzHugh-Nagumo está definido por las ecuaciones

$$\begin{cases} x' = y - \frac{x^3}{3} + x + I, \\ y' = \varepsilon(\mu - x - \nu y), \end{cases} \quad (4.1)$$

donde  $x$  denota el potencial eléctrico de la neurona,  $y$  es la variable iónica de recuperación,  $\mu, I \in \mathbb{R}$ ,  $\nu > 0$  y  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Notemos que al ser  $\varepsilon \ll 1$ , las ecuaciones evolucionan a velocidades distintas. Así,  $x$  se corresponde con la variable rápida del sistema e  $y$  se corresponde con la variable lenta del sistema. Además,  $I$  representa un estímulo externo.

A continuación, dividiremos este capítulo en tres secciones, donde en cada una de ellas estudiaremos un caso representativo del modelo de FitzHugh-Nagumo. En los dos

primeros casos, por simplicidad, tomaremos  $I = 0$  y  $\nu = 0$ . Así, estudiaremos el sistema,

$$\begin{cases} x' = y - \frac{x^3}{3} + x, \\ y' = \varepsilon(\mu - x), \end{cases} \quad (4.2)$$

que se corresponde con el oscilador de Van der Pol.

## 4.1. El Oscilador de Van der Pol

En esta sección, analizaremos el primer caso representativo del modelo de FitzHugh-Nagumo para  $I = 0$ ,  $\nu = 0$  y  $|\mu| < 1$ . Por simplicidad, tomaremos  $\mu = 0$ , obteniendo así el siguiente caso particular del sistema (4.1),

$$\begin{cases} x' = y - \frac{x^3}{3} + x, \\ y' = -\varepsilon x, \end{cases} \quad (4.3)$$

En primer lugar, daremos una pequeña motivación sobre el oscilador de Van der Pol. Después, veremos que el sistema (4.3) es equivalente, mediante transformaciones de Liénard, a la ecuación  $x'' - \lambda(1 - x^2)x' + x = 0$ . Una vez probada la equivalencia, pasaremos a estudiar la existencia, unicidad y estabilidad de órbitas periódicas en el oscilador de Van der Pol.

### 4.1.1. La ecuación de Van der Pol

Como hemos visto en el capítulo anterior, Definición 3.1.2, un ciclo límite es una órbita periódica aislada. Aislado significa que las órbitas vecinas no son cerradas, sino que giran en espiral hacia dentro o fuera del ciclo límite. La estabilidad del ciclo límite viene determinada mediante la aplicación de Poincaré, como hemos visto en el Teorema 3.1.7. En particular, si todas las trayectorias vecinas se acercan al ciclo límite, decimos que el *ciclo límite es estable o atractor*. De lo contrario, el *ciclo límite es inestable* o, en casos excepcionales, *semi estable*, es decir, las trayectorias interiores (respectivamente exteriores) se aproximan sobre la órbita para  $t \rightarrow +\infty$  y las exteriores (respectivamente interiores) lo hacen para  $t \rightarrow -\infty$ ; ver Figura 4.1.

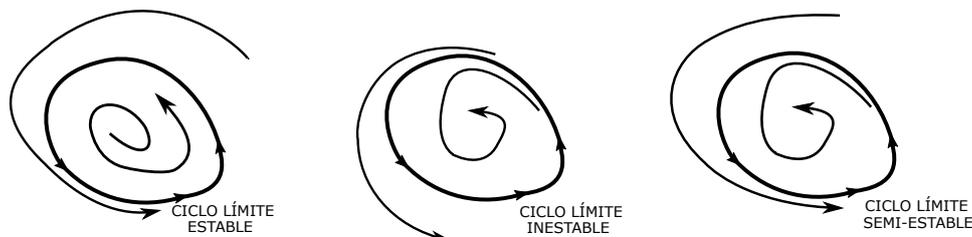


Figura 4.1: Estabilidad del ciclo límite.

Los ciclos límite modelan sistemas que exhiben oscilaciones auto-sostenidas. En otras palabras, estos sistemas oscilan incluso en la ausencia de un forzamiento periódico externo. De los innumerables ejemplos que podrían darse, mencionaremos solo algunos: el latido de un corazón; la activación periódica de un marcapasos; ritmos diarios en la temperatura del cuerpo humano o la secreción de una hormona; reacciones químicas que oscilan espontáneamente; y peligrosas vibraciones autoexcitadas en puentes y alas de aviones. En cada caso, hay una oscilación estándar de algún período, formas de onda y amplitud. Si el sistema está ligeramente perturbado, siempre regresa al ciclo estándar.

El oscilador de Van der Pol es un sistema dinámico que incluye retroalimentación positiva y un elemento resistivo no lineal. En su aplicación original, a principios del siglo pasado, el oscilador eléctrico con un elemento no lineal se utilizó como precursor de las primeras radios comerciales. Un circuito de este tipo favorece las oscilaciones pequeñas y amortigua las grandes. En esta sección se analiza el comportamiento del oscilador de Van der Pol, con el fin de encontrar sus condiciones de estabilidad y la posible presencia de ciclos límite en el sistema.

El oscilador de Van der Pol (4.3), con amortiguamiento no lineal, está gobernado por la siguiente ecuación diferencial de segundo orden homogénea:

$$x'' - \lambda(1 - x^2)x' + x = 0, \quad (4.4)$$

donde  $x$  es la variable dinámica y  $\lambda > 0$  un parámetro. A continuación, veremos que esta ecuación es equivalente, mediante transformaciones de Liénard, al sistema (4.3).

Notemos que cuando  $x$  es pequeña, el término cuadrático  $x^2$  es despreciable y la ecuación del sistema se convierte en una ecuación diferencial lineal con amortiguamiento negativo  $-\lambda$ , es decir:

$$x'' - \lambda x' + x = 0.$$

Por lo tanto, el punto fijo  $x = 0$  es inestable: un foco inestable cuando  $0 < \lambda < 2$  y un nodo inestable en caso contrario. Por lo tanto, cuando  $x$  es pequeña el sistema es inestable alrededor del punto fijo. Por otro lado, cuando  $x$  es grande, el término  $x^2$  se vuelve dominante y la amortiguación se vuelve positiva. Por consiguiente, se espera que la dinámica del sistema esté restringida en algún área alrededor del punto fijo. En realidad, el sistema de Van der Pol (4.4) satisface el teorema de Liénard asegurando que hay un ciclo de límite estable en el espacio de fases, como se probará en la siguiente sección.

En particular, mediante el teorema de Poincaré - Bendixon, podemos probar que existe un único ciclo límite estable para todo  $\lambda > 0$ . Dos posibles casos a analizar son los límites para  $\lambda \gg 1$  y  $\lambda \ll 1$ , que representan el *amortiguamiento grande* y *amortiguamiento pequeño*, respectivamente.

Cuando  $\lambda \ll 1$ , la ecuación es una perturbación del oscilador armónico lineal (1.4). En esta sección nos centraremos en analizar el caso en el cual el amortiguamiento es grande, es decir, cuando  $\lambda \gg 1$ , conocido también como *oscilador de relajación*.

Comenzaremos transformando el sistema de Van der Pol (4.4) en un sistema equivalente mediante una transformación de Liénard:

Nótese que

$$x'' - \lambda(1 - x^2)x' = \frac{d}{dt} \left( x' - \lambda \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \right).$$

y consideremos  $w = x' - \lambda \left( x - \frac{x^3}{3} \right)$ . Esto implica que  $w' = -x$  y por lo tanto tenemos el sistema:

$$\begin{cases} x' = w + \lambda \left( x - \frac{x^3}{3} \right), \\ w' = -x. \end{cases}$$

Tomemos ahora,  $y = w/\lambda$  con  $y \sim O(1)$  para  $\lambda \gg 1$ . Si sustituimos esto en la ecuación anterior, obtenemos

$$\begin{cases} x' = \lambda \left( y - \frac{x^3}{3} + x \right), \\ y' = -\frac{1}{\lambda}x, \end{cases}$$

para  $x' \sim O(\lambda)$  grande y para  $y' \sim O(1/\lambda)$  pequeño.

Si en el sistema anterior tomamos  $\delta = 1/\lambda$ , obtenemos

$$\begin{cases} \delta x' = y - \frac{x^3}{3} + x, \\ y' = -\delta x. \end{cases}$$

A continuación, hacemos el cambio en la variable temporal  $t = \tau/\delta$

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\delta^2} \left( y - \frac{x^3}{3} + x \right), \\ y' = -x, \end{cases}$$

donde ahora la prima denota la derivada con respecto a la nueva variable independiente.

Tomando  $\varepsilon = \delta^2$  el resultado es el siguiente sistema, que es equivalente al sistema de Van der Pol (4.4):

$$\begin{cases} \varepsilon x' = y - \frac{x^3}{3} + x, \\ y' = -x. \end{cases}$$

Finalmente si hacemos el cambio  $\tau = t/\varepsilon$ , obtendremos el sistema (4.3).

### 4.1.2. Existencia de órbitas periódicas y unicidad en el oscilador de Van der Pol

En el Capítulo 3, hemos hablado de la existencia y estabilidad de las órbitas periódicas. Utilizaremos el Teorema de Poincaré - Bendixson (Teorema 3.1.3) para demostrar la existencia de una órbita periódica no trivial en el *oscilador de Van der Pol*.

Notemos que, a partir de la ecuación (4.4) haciendo el cambio

$$x_1 = x, \quad x_2 = x',$$

obtenemos el sistema que se estudia en el siguiente teorema.

**Teorema 4.1.1.** *La ecuación de Van der Pol*

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -x_1 + \lambda(1 - x_1^2)x_2, \end{cases} \quad (4.5)$$

*tiene una órbita periódica no trivial para todos los valores del parámetro  $\lambda$ .*

*Demostración.* Consideraremos el caso  $\lambda > 0$ . Cuando  $\lambda = 0$ , la ecuación se convierte en el oscilador armónico lineal. El caso  $\lambda < 0$  puede reducirse al primer caso al invertir el tiempo.

Para probar la existencia de órbita periódica, usaremos el teorema de Poincaré - Bendixson. Para ello, construiremos una región positivamente invariante delimitada por una curva cerrada que rodea al origen. Dado que el origen es el único punto de equilibrio y sus autovalores tienen parte real positiva, ninguna órbita, salvo el origen, tienen al propio origen como su  $\omega$ -límite. Esto implica que debe haber una órbita periódica dentro de la región positivamente invariante.

Empezaremos la construcción de una curva cerrada simple  $K$  la cual formará la frontera de la región positivamente invariante. La idea de cómo construir la curva  $K$  es empezar en un punto  $A$  en el eje  $x_2$  negativo y usar las propiedades del campo vectorial para obtener una curva que se encuentre en el semiplano izquierdo la cual interseque el eje  $x_2$  positivo en un punto  $E$  y tal que el ángulo entre el vector tangente a la curva y el campo vectorial (4.5) esté en el intervalo  $(0, \pi)$ ; ver Figura 4.2. Dado que el sistema (4.5) es simétrico respecto del origen, podemos definir el simétrico de esta curva a través del origen y obtener los puntos  $A'$  y  $E'$ . Si  $A' > E'$ , entonces la curva  $AEA'E'$  será la curva  $K$ .

La construcción detallada de la curva  $K$  consiste en la unión de varios segmentos de curva. Primero, dibujamos una curva auxiliar  $Q$ ,

$$Q(x_1, x_2) \equiv -x_1 + \lambda(1 - x_1^2)x_2, \quad (4.6)$$

la cual tiene tres componentes y sus asíntotas vienen dadas por  $x_1 = \pm 1$  y  $x_2 = 0$ . La componente de esta curva con asíntotas  $x_1 = -1$  y  $x_2 = 0$  está cruzado de izquierda a

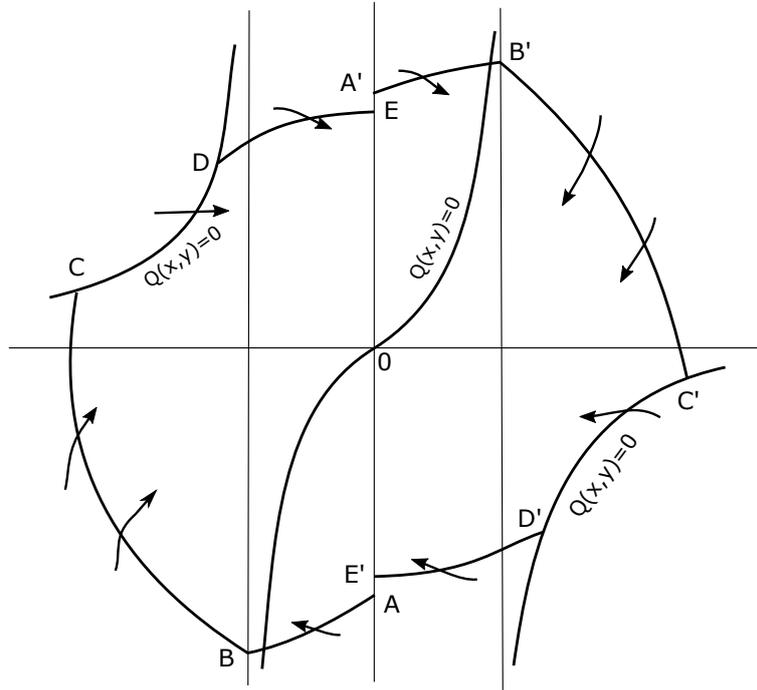


Figura 4.2: Construcción de una región positivamente invariante para el oscilador de Van der Pol.

derecha por el campo vectorial (4.5).

Para construir la primera pieza de nuestra curva  $K$ , tomamos un punto  $A = (0, x_2^0)$  en el eje negativo  $x_2$  suficientemente lejos del origen, y obtenemos la órbita del sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = \lambda(1 - x_1^2)x_2, \end{cases}$$

pasando a través del punto  $A$ . Integrando, obtenemos que esta órbita interseca la recta  $x_1 = -1$  en un punto  $B = (x_1(\bar{t}), x_2(\bar{t}))$ . Veamos quién es el punto  $B$ :

Si observamos el sistema anterior y lo comparamos con la ecuación de Van der Pol (4.5), vemos que  $x_1(0) = 0$ , y tomamos  $x_2(0) = x_2^0 \ll 0$ .

Tenemos que

$$x_1(t) - x_1(0) = \int_0^t x_2(s) ds \Leftrightarrow x_1(t) = x_1(0) + \int_0^t x_2(s) ds,$$

y además,

$$x_1(\bar{t}) = x_1(0) + \int_0^{\bar{t}} x_2(s) ds = -1.$$

Veamos ahora, quién es  $x_2(s)$ :

$$\begin{aligned} x_2(\bar{t}) &= x_2(0) + \int_0^{\bar{t}} \lambda(1 - x_1^2(s))x_2(s)ds = x_2^0 + \lambda \left[ \int_0^{\bar{t}} x_2(s)ds - \int_0^{\bar{t}} x_1^2(s)x_2(s)ds \right] = \\ &= x_2^0 - \lambda - \int_0^{\bar{t}} \left( \int_0^s x_2(\sigma)d\sigma \right)^2 x_2(s)ds = x_2^0 - \lambda - \int_0^{\bar{t}} \frac{1}{3} \left( \int_0^s x_2(\sigma)d\sigma \right)^3 ds = \\ &= x_2^0 - \lambda - \lambda \frac{1}{3}(-1) = x_2^0 - \frac{2}{3}\lambda. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $x_1(\bar{t}) = -1$  y  $x_2(\bar{t}) = x_2^0 - \frac{2}{3}\lambda$ , y la órbita interseca a la recta  $x_1 = -1$  en el punto  $B = (-1, -2\lambda/3 + x_2^0)$ .

Para saber el sentido y dirección de la órbita, basta obtener su recta tangente, la cual es la resultante de sumar las pendientes de las rectas tangentes del sistema de Van der Pol (4.5) y del sistema auxiliar anterior.

La pendiente de la recta tangente del sistema de Van der Pol viene dada por

$$\frac{x_2'}{x_1'} = \frac{-x_1 + \lambda(1 - x_1^2)x_2}{x_2} > 0,$$

pues  $\lambda > 0$ ,  $x_1(0) = 0$  y  $x_2(0) < 0$ . Del mismo modo, la pendiente del sistema auxiliar es de la forma

$$\frac{x_2'}{x_1'} = \frac{\lambda(1 - x_1^2)x_2}{x_2} > 0.$$

Entonces, a lo largo del arco  $AB$  tenemos

$$\frac{-x_1 + \lambda(1 - x_1^2)x_2}{x_2} - \frac{\lambda(1 - x_1^2)x_2}{x_2} = -\frac{x_1}{x_2} < 0;$$

y por tanto, las órbitas del sistema (4.5) cruzan  $AB$  de derecha a izquierda.

Ahora, seguimos la órbita de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -x_1, \end{cases} \quad (4.7)$$

que viene desde  $B$  hasta que la órbita, la cual es un arco circular centrada en el origen, corta la componente de la curva (4.5) en el cuadrante superior. Denotamos por  $C$  el punto de intersección; tal punto siempre existe si el punto  $A$  se toma lo suficientemente lejos del origen. A lo largo de la curva  $BC$  tenemos

$$\frac{-x_1 + \lambda(1 - x_1^2)x_2}{x_2} + \frac{x_1}{x_2} = \lambda(1 - x_1^2) < 0;$$

entonces, las órbitas del sistema (4.5) cruzan  $BC$  de izquierda a derecha.

Para el siguiente trozo de curva  $K$ , primero estudiaremos los puntos de tangencia de la órbita de ecuación diferencial

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = -x_1 + \lambda x_2, \end{cases} \quad (4.8)$$

con la componente de la curva (4.6) en el cuadrante superior izquierdo. Al diferenciar implícitamente la curva (4.6), no es difícil calcular que la primera coordenada  $x_1^1$  del punto  $D = (x_1^1, x_2^1)$  satisface la ecuación

$$1 + (1 - \lambda^2)x^2 + 2\lambda^2x^4 - \lambda^2x^6 = 0. \quad (4.9)$$

Cuando  $x = -1$ , el lado izquierdo de la ecuación (4.9) es positiva, y cuando  $|x|$  es suficientemente grande el lado izquierdo es negativo; por lo tanto, existe una solución  $x_1^1$  de la ecuación (4.9). Entre las soluciones de la ecuación (4.9) tomamos la más cercana de  $-1$ . Cuando el punto  $A$  está lo suficientemente lejos del origen, el punto  $D$  se encuentra a la derecha de  $C$ . Es claro que las órbitas del sistema (4.5) están atravesando la curva (4.6) entre  $C$  y  $D$  de izquierda a derecha.

Para continuar nuestra curva  $K$ , seguimos la órbita del sistema (4.8) empezando desde el punto  $D$  hasta que corta el eje  $x_2$  en un punto  $E$ . Ya que

$$\frac{-x_1 + \lambda(1 - x_1^2)x_2}{x_2} + \frac{-x_1 + \lambda x_2}{x_2} = -\lambda x_1^2 < 0,$$

las órbitas del sistema (4.5) atraviesan la curva  $DE$  de izquierda a derecha.

La primera mitad de nuestra curva construida es  $ABCDE$ . Para construir la otra mitad, observemos que el sistema (4.5) es simétrico respecto del origen. Sea  $A'B'C'D'E'$  la curva simétrica de  $ABCDE$  respecto del origen. Como  $D$ , por lo tanto  $E$ , es fijo, podemos asegurar que  $A'$  yace encima de  $E$  al tomar  $A$  lejos del origen. Además, observe que las órbitas del sistema (4.5) atraviesan la curva  $EA'$  de izquierda a derecha. Por simetría, es claro que la región encerrada por la curva cerrada  $K = ABCDEA'B'C'D'E'A$  es positivamente invariante por el flujo del oscilador de Van der Pol.  $\square$

**Teorema 4.1.2.** *Una órbita periódica no trivial del oscilador de Van der Pol (4.5) con  $\lambda > 0$  es hiperbólica y orbitalmente asintóticamente estable.*

*Demostración.* Sea  $\Gamma$  una órbita periódica no trivial con período  $T$  y sea  $\mathbf{x}(t)$  la solución correspondiente. Por el Teorema 3.2.1, apartado 3, y la fórmula (3.1), necesitamos probar que la derivada de la aplicación de Poincaré satisface

$$\Pi'(\mathbf{x}(0)) = \exp \left\{ \int_0^T \lambda(1 - [x_1(t)]^2) dt \right\} < 1.$$

Lo lograremos probando que el valor de la integral es negativo.

Consideremos la función

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2),$$

y calculemos  $V'$  a lo largo de las soluciones del sistema (4.3):

$$V'(x_1, x_2) = x_1x_1' + x_2x_2' = x_1x_2 + x_2[-x_1 + \lambda(1 - x_1^2)x_2] = \lambda(1 - x_1^2)x_2^2,$$

$$V'(x_1, x_2) = -2\lambda(1 - x_1^2)\left[\frac{1}{2}x_1^2 - V(x_1, x_2)\right]. \quad (4.10)$$

La función  $V$  sobre la órbita periódica  $\Gamma$  toma el mínimo valor en varios puntos, denotados,  $\mathbf{x}(\bar{t})$ . Así,  $V'(\mathbf{x}(\bar{t})) = 0$  y o bien  $x_2(\bar{t}) = x_1'(\bar{t}) = 0$  o bien  $x_1(\bar{t}) = \pm 1$ .

Probaremos ahora, que el primer caso es imposible. Si  $x_2(\bar{t}) = 0$ , entonces  $x_2'(\bar{t}) \neq 0$ , pues de lo contrario tendríamos  $x_1(\bar{t}) = 0$ ; la unicidad de solución implicaría que  $\mathbf{x}(t) = 0$  para todo  $t$ , lo cual es imposible. Por lo tanto, si  $x_1'(\bar{t}) = x_2(\bar{t}) = 0$ , entonces  $x_1''(\bar{t}) = x_2'(\bar{t}) \neq 0$  y por tanto  $x_1(t)$  tiene un máximo o un mínimo en  $t = \bar{t}$ . Como consecuencia, la función  $1 - [x_1(t)]^2$  tiene un signo fijo para  $t$  cerca de  $\bar{t}$ ; por lo tanto,  $V'(\mathbf{x}(t))$  tiene signo constante para  $t$  cerca de  $\bar{t}$ . Entonces,  $V(\mathbf{x}(t))$  es estrictamente monótona para  $t$  cerca de  $\bar{t}$ , lo que contradice el hecho de que tiene un mínimo en  $t = \bar{t}$ .

Por el argumento anterior, el hecho de que  $V'(\mathbf{x}(\bar{t})) = 0$  implica que  $x_2(\bar{t}) \neq 0$  y  $x_1(\bar{t}) = \pm 1$ . Por tanto,  $V(\mathbf{x}(t)) > 1/2$  para todo  $t$ .

Ahora, una reordenación simple de la ecuación (4.8) produce la fórmula

$$-\frac{V'(\mathbf{x}(t))}{V(\mathbf{x}(t)) - \frac{1}{2}} + 2\lambda(1 - [x_1(t)]^2) = -\frac{\lambda(1 - [x_1(t)]^2)^2}{V(\mathbf{x}(t)) - \frac{1}{2}}.$$

Integrando a ambos lados de la igualdad obtenemos

$$2 \int_0^T \lambda(1 - [x_1(t)]^2) dt = -\lambda \int_0^T \frac{(1 - [x_1(t)]^2)^2}{V(\mathbf{x}(t)) - \frac{1}{2}} dt < 0,$$

pues la integral del término de la izquierda desaparece, el parámetro  $\lambda$  y la integral de la derecha de la igualdad son ambos positivos.  $\square$

Este resultado, aparentemente local, tiene una consecuencia fácil pero muy importante para la dinámica global del oscilador de Van der Pol.

**Teorema 4.1.3. (Unicidad de ciclo límite en Van der Pol)** *Para  $\lambda > 0$ , el oscilador de Van der Pol (4.5) tiene un ciclo límite estable al que tiende cada solución que no es un equilibrio cuando el tiempo aumenta.*

*Demostración.* Hemos visto en el Teorema (4.1.2) que toda órbita periódica del oscilador de Van der Pol es orbitalmente asintóticamente estable.

Supongamos que existen dos órbitas periódicas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ . Por el teorema (3.1.6), toda órbita periódica debe contener un punto de equilibrio en su interior y el origen es el único punto de equilibrio del sistema diferencial (4.5), una de sus órbitas periódicas debe estar en el interior de la otra.

Ahora, sea  $\mathbf{x}_0$  un punto entre  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  tal que su conjunto  $\omega$ -límite  $\omega(\mathbf{x}_0) = \Gamma_1$ . El conjunto  $\alpha$ -límite  $\alpha(\mathbf{x}_0)$  de  $\mathbf{x}_0$  no puede ser  $\Gamma_2$ . Por tanto, debe haber una órbita periódica inestable entre  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , lo que contradice el hecho de que las órbitas periódicas son orbitalmente asintóticamente estables.  $\square$

## 4.2. Bifurcación singular de Hopf y explosión canard

El análisis realizado hasta ahora es válido para  $|\mu| < 1$  y lejos de  $\mu = \pm 1$ . En esta sección, analizaremos lo que ocurre cuando  $|\mu| \approx 1$ .

### 4.2.1. La variedad crítica y el flujo lento en la ecuación de Van der Pol

Como hemos visto en la sección anterior, la ecuación  $x'' - \lambda(1 - x^2)x' + x = 0$  mediante transformaciones de Liénard es equivalente al sistema

$$\begin{cases} \varepsilon x' = y - \frac{x^3}{3} + x, \\ y' = -x. \end{cases}$$

Con esta configuración, el sistema tiene un equilibrio inestable rodeado por un ciclo límite estable lo cual se corresponde con un estado de actitud oscilatoria (spikes en inglés) de la neurona. Para permitir que el equilibrio cambie de estabilidad, y poder reproducir también un estado de reposo, se añade el forzamiento constante  $\mu \in \mathbb{R}$  en la segunda ecuación, obteniendo así el siguiente sistema

$$\begin{cases} \varepsilon x' = y - \frac{x^3}{3} + x, \\ y' = \mu - x. \end{cases} \quad (4.11)$$

A partir de ahora, denotaremos cuando sea necesario  $f(x, y, \mu, 0) = y - \frac{x^3}{3} + x$ .

Para el estudio del sistema (4.11), utilizaremos herramientas de la teoría geométrica de perturbaciones singulares [3], siguiendo particularmente el trabajo [1]. Este sistema lento-rápido tiene una variable lenta y una variable rápida. Tomando  $\varepsilon = 0$  en el sistema (4.11), obtenemos el sistema reducido con una ecuación algebraica que define la variedad

crítica del sistema (4.11) como la cúbica

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x^3}{3} - x =: c(x) \right\}. \quad (4.12)$$

Esta curva  $S$  es normalmente hiperbólica lejos del mínimo y máximo local  $p_{\pm} = (\pm 1, \mp 2/3)$  de la función cúbica, donde  $S$  se dobla respecto de la variable rápida  $x$ . En  $p_{\pm}$  la hiperbolicidad normal (generalización del concepto de punto hiperbólico a variedades) falla, dado que  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, \mu, 0) = 1 - x^2$  es cero en  $p_{\pm}$ . Por lo tanto,  $p_{\pm}$  son los puntos de pliegue y descomponen de forma natural la variedad crítica en tres ramas

$$S = S^{a,-} \cup \{p_{-}\} \cup S^r \cup \{p_{+}\} \cup S^{a,+},$$

donde  $S^{a,-} := S \cap \{x < -1\}$ ,  $S^{a,+} := S \cap \{x > 1\}$ , y  $S^r := S \cap \{-1 < x < 1\}$ ; ver Figura 4.3.

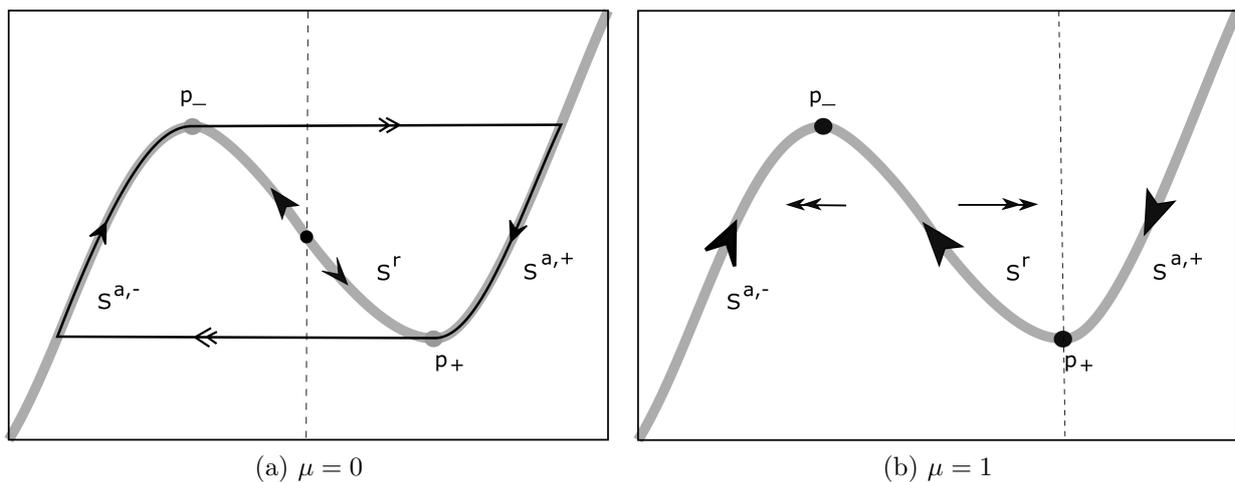


Figura 4.3: Retrato de fases de la ecuación de Van der Pol (4.11).

Del signo de  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, \mu, 0)$  podemos concluir que las ramas  $S^{a,-}$  y  $S^{a,+}$  son atractores y la rama  $S^r$  es repulsor. Nótese que  $S$  y su atracción/repulsión natural no depende de  $\mu$ , y es la misma en ambas imágenes Figura 4.3(a), cuando  $\mu = 0$ , y la Figura 4.3(b), donde  $\mu = 1$ . La dinámica de cualquier punto que no está en  $S$  está completamente determinada por la dirección de la variable rápida  $x$ , la cual se indica con doble flecha en la Figura 4.3.

Para obtener el flujo lento en  $S$  del sistema de Van der Pol (4.11) no es necesario resolver la ecuación cúbica  $y = c(x)$  para  $x$  en  $S^{a,-}$ ,  $S^r$  y  $S^{a,+}$ . Es más conveniente escribir el flujo lento en términos de la variable rápida  $x$ . Para ello, derivaremos  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, \mu, 0) = y - c(x) = 0$  respecto de  $t$  y obtenemos

$$y' = x'x^2 - x' = x'(x^2 - 1).$$

Combinando este resultado con la ecuación  $y' = \mu - x$  del sistema (4.11) obtenemos

$$(x^2 - 1)x' = \mu - x \quad \text{o} \quad x' = \frac{\mu - x}{x^2 - 1}.$$

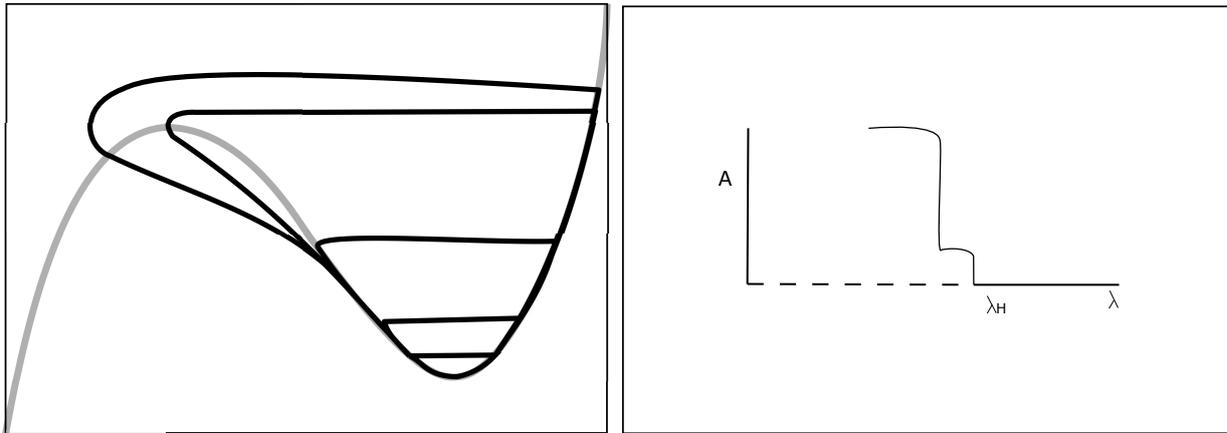
En el caso  $\mu = 0$ , representativo para  $|\mu| < 1$  siempre y cuando esté lejos de  $\mu = \pm 1$  estudiado antes, la nuclina  $y$ , definida por  $x = \mu$  se representa en la Figura 4.3(a) como una línea vertical discontinua, la nuclina  $x$  es  $S$  y el único punto de equilibrio es  $x = \mu$ . La curva cerrada es una órbita singular compuesta por dos trayectorias rápidas empezando en los dos puntos de pliegue  $p_{\pm}$  concadenados con los segmentos de  $S$ . Tales concatenaciones continuas de las trayectorias rápidas y el flujo lento se denominan *candidatas*. La órbita singular sigue el flujo por  $S$  hasta un punto de pliegue, entonces *salta*, esto es, hace una transición a un segmento de trayectoria rápida que fluye a otra rama de  $S$ . El mismo mecanismo devuelve la órbita singular a la rama inicial de  $S$ . Van der Pol introdujo el concepto *oscilador de relajación* para describir órbitas periódicas que alternan entre zonas de movimiento lento y rápido.

Veamos que ocurre en un entorno de  $\mu = \pm 1$ .

#### 4.2.2. Bifurcación de Hopf y explosión canard

La dinámica del sistema lento-rápido en la vecindad de los puntos en la variedad crítica donde la hiperbolicidad normal se pierde, puede ser sorprendentemente complicada y muy distinta de lo que conocemos de sistemas con una sola escala de tiempo. Esta sección aborda el fenómeno conocido como explosión canard, la cual ocurre en sistemas planos del tipo lento-rápido después de una bifurcación de Hopf singular. Analizaremos este fenómeno en función de una constante  $\mu \in \mathbb{R}$  para el sistema de Van der Pol (4.11).

El plano de fases para  $\mu = 1$  es degenerado. El análisis de la estabilidad prueba que para  $\mu > 0$  el único punto de equilibrio  $(x, y) = (\mu, \frac{1}{3}\mu^3 - \mu)$  es una fuente para  $|\mu| < 1$ , pero un sumidero para  $|\mu| > 1$ . La bifurcación de Hopf ocurre para  $\mu = \pm 1$ . Como hemos visto en el capítulo anterior, Definición 3.3.4, una bifurcación de Hopf de un sistema dinámico está caracterizada por dos autovalores imaginarios puros y un punto de equilibrio cruzando el eje imaginario con una velocidad distinta de cero. Como resultado, encontramos una familia de órbitas periódicas que emergen del punto de bifurcación. Distinguimos dos casos: *bifurcación de Hopf supercrítica* donde la órbita periódica que hace es estable, y *bifurcación de Hopf subcrítica* donde la órbita periódica que hace es inestable. Cerca de la bifurcación de Hopf, la amplitud de las órbitas periódicas es comparable a la raíz cuadrada de la distancia entre el parámetro y el punto de bifurcación. Para el sistema de Van der Pol (4.11) una bifurcación de Hopf supercrítica ocurre cuando  $\mu_H = \pm 1$ , y las órbitas periódicas existen en el intervalo  $|\mu| < 1$ .



(a) Ciclo límite cerca de la bifurcación de Hopf

(b) Diagrama de bifurcación supercrítica de Hopf

Figura 4.4: (a) Representación cualitativa de órbitas periódicas en la ecuación de Van der Pol (4.11) para  $\varepsilon = 0,05$  y (b).

El análisis de cómo la dinámica del sistema de Van der Pol cambia con  $\mu$  de equilibrio estable a oscilaciones de relajación cuando  $\varepsilon > 0$  es pequeño, fue un avance importante en la teoría de sistemas lento-rápido. Cerca de la bifurcación de Hopf en  $\mu_H = 1$  la órbita periódica es pequeña. Sin embargo, cuando  $\mu$  decrece, la órbita periódica crece rápidamente, siguiendo al repulsor lento  $S_\varepsilon^r$  por un largo tiempo hasta que alcanza la forma de una oscilación de relajación; compárelo con la Figura 4.4(a).

La bifurcación de Hopf en  $\mu_H = 1$  ocurre cuando el equilibrio se mueve sobre el punto de pliegue  $p_+$ . En este caso, se llama bifurcación de Hopf singular porque los autovalores en la bifurcación de Hopf tienen magnitud  $O(\varepsilon^{-1/2})$ , de modo que la órbita periódica nace en la bifurcación de Hopf con un período intermedio entre el  $O(\varepsilon^{-1})$  rápido y escalas de tiempo lentas  $O(1)$ . El tamaño de esta órbita periódica crece rápidamente del diámetro  $O(\varepsilon^{1/2})$  al diámetro  $O(1)$  en un intervalo de valores de parámetro  $\mu$  de longitud  $O(e^{-K/\varepsilon})$ , para algún  $K > 0$  fijo, que es  $O(\varepsilon)$  cerca de  $\mu_H$ . La Figura 4.4(b) se corresponde con bocetos de posibles diagramas de bifurcación en  $\mu$  para la bifurcación de Hopf singular en un caso supercrítico, que se encuentra en el sistema de Van der Pol, el eje vertical representa la amplitud máxima de las órbitas periódicas. El diagrama de bifurcación es un boceto que resalta las características descritas anteriormente. Hay un intervalo muy pequeño de  $\mu$  donde la amplitud de la oscilación crece en forma de raíz cuadrada, como es de esperar cerca de una bifurcación de Hopf. Sin embargo, la amplitud luego crece extremadamente rápido hasta que alcanza una meseta que corresponde a las oscilaciones de relajación.

El rápido crecimiento en la amplitud de la órbita periódica cerca de la bifurcación de Hopf se llama *explosión canard* o *explosión "pato"*. El nombre de pato deriva de órbitas periódicas durante la explosión canard cuya forma recuerda a un pato. De hecho, la órbita

periódica más grande en la Figura 4.4(a) es un ejemplo de esa órbita con “forma de pato”. Más generalmente, e independientemente de su forma real, en la actualidad el término se refiere a una trayectoria como una órbita canard si sigue a una variedad repulsiva lenta durante un tiempo de  $O(1)$  en la escala de tiempo lenta. Además, una órbita canard se llama *canard maximal* si une una variedad lenta atractiva con una repulsiva.

### 4.3. Modelo de FitzHugh-Nagumo

En esta sección, analizaremos el modelo de FitzHugh-Nagumo (4.1). Hasta ahora, hemos considerado  $I = 0$  y  $\nu = 0$ , por lo que no estamos modificando la variable  $I$ . Para conseguir obtener el mismo fenómeno que hemos estudiado en la sección anterior variando  $I$ , la corriente externa, necesitaremos una nulclina con una pendiente que no sea vertical.

Recordemos que el modelo de FitzHugh-Nagumo (4.1) viene dado por el sistema

$$\begin{cases} x' = y - \frac{x^3}{3} + x + I, \\ y' = \varepsilon(\mu - x - \nu y), \end{cases} \quad (4.13)$$

que imita la generación de potenciales de acción por modelos de tipo Hodgkin-Huxley que tienen nulclinas cúbicas, es decir, en forma de  $N$ . Recordemos que  $x$  denota el potencial eléctrico, e  $y$  denota la variable iónica de recuperación.

Comencemos estudiando los equilibrios del sistema.

Las nulclinas del modelo de FitzHugh-Nagumo (4.1) tienen la forma cúbica y lineal

$$\begin{cases} y = \frac{x^3}{3} - x - I & (\text{nulclina } x), \\ y = \frac{\mu - x}{\nu} & (\text{nulclina } y), \end{cases}$$

y pueden intersectarse en uno, dos o tres puntos, lo que resulta en uno, dos o tres equilibrios. La nulclina  $x$  y la nulclina  $y$  son las curvas  $y = \frac{x^3}{3} - x - I$  y  $y = \frac{\mu - x}{\nu}$ , respectivamente, en el plano  $(x, y)$ . Obsérvese que la nulclina  $x$ , asociada a la variable rápida, es una curva cúbica en el plano  $(x, y)$  y la nulclina  $y$ , asociada a la variable lenta, es una recta. La pendiente de la recta  $y = \frac{\mu - x}{\nu}$  se puede elegir de tal manera que las nulclinas se crucen en un único punto, que lo convierte en el único punto fijo del sistema. Si variamos el parámetro  $I$ , la nulclina  $x$  se desplaza hacia arriba o hacia abajo. Por lo tanto, la variación del parámetro  $I$  modifica la posición del punto fijo de modo que diferentes valores de  $I$  hacen que el punto fijo esté en la parte izquierda, media o derecha de la curva cúbica, entendiendo por parte izquierda, media o derecha los tramos de curva separados por el máximo y el mínimo de la cúbica.

### 4.3.1. Condiciones para la existencia de los puntos de equilibrio

En primer lugar, veamos cuáles son los puntos de equilibrio, los cuales los obtendremos de la intersección de las dos nulclinas.

Si intersecamos la nulclina  $x$  con la nulclina  $y$ , obtenemos como resultado la ecuación cúbica

$$\frac{x^3}{3} + \left(\frac{1}{\nu} - 1\right)x - \left(I + \frac{\mu}{\nu}\right) = 0. \quad (4.14)$$

Sabemos que cualquier ecuación cúbica  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  con coeficientes reales tiene al menos una solución  $x$  sobre los números reales; esta es una consecuencia del teorema del valor intermedio. Usando el discriminante

$$\Lambda = 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2,$$

se pueden distinguir varios casos posibles:

- Si  $\Lambda < 0$ , entonces la ecuación tiene una raíz real y dos raíces complejas conjugadas.
- Si  $\Lambda = 0$ , entonces la ecuación tiene raíces reales múltiples. Puede ser una raíz triple o una doble y otra simple.
- Si  $\Lambda > 0$ , entonces la ecuación tiene tres raíces reales distintas.

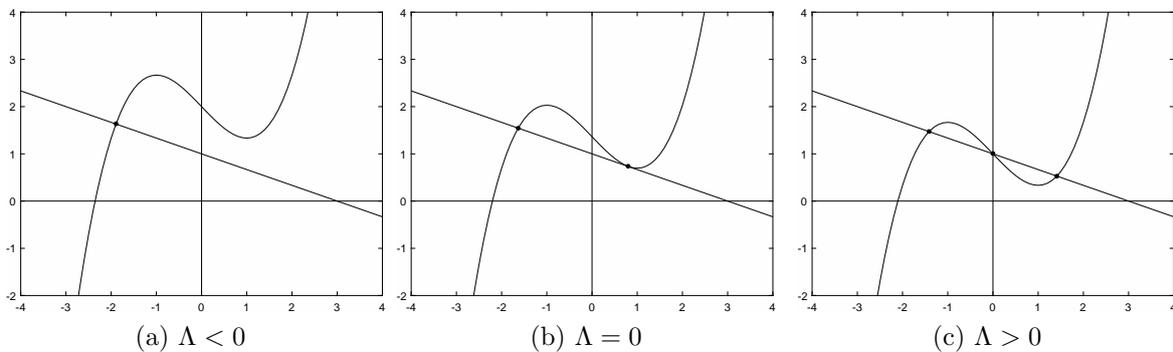


Figura 4.5: Posibles raíces del polinomio cúbico (4.14).

Este estudio es el que realizaremos a continuación para estudiar las raíces de la ecuación (4.14). Tomando

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = 0, \quad c = \frac{1}{\nu} - 1, \quad d = -\left(I + \frac{\mu}{\nu}\right),$$

obtenemos el siguiente discriminante de la ecuación (4.14)

$$\Lambda = -4\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\nu} - 1\right)^3 - 27\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(-I - \frac{\mu}{\nu}\right)^3 = \frac{4(\nu - 1)^3 - 9\nu(\mu + \nu I)^2}{3\nu^3}.$$

Así, obtenemos (ver Figura 4.5):

- Si  $\Lambda < 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{4(\nu - 1)^3 - 9\nu(\mu + \nu I)^2}{3\nu^3} < 0; \quad (\nu > 0) &\iff 4(\nu - 1)^3 - 9\nu(\mu + \nu I)^2 < 0 \\ &\iff 4(\nu - 1)^3 < 9\nu(\mu + \nu I)^2. \end{aligned}$$

Por tanto, si  $4(\nu - 1)^3 < 9\nu(\mu + \nu I)^2$  el polinomio cúbico (4.14) tiene una única raíz.

- Si  $\Lambda = 0$ , debe verificarse

$$\begin{aligned} \frac{4(\nu - 1)^3 - 9\nu(\mu + \nu I)^2}{3\nu^3} = 0; \quad (\nu > 0) &\iff \\ \iff (4\nu^3 - 12\nu^2 + 12\nu - 4) - 9\nu(\mu^2 + (2\nu I)\mu + \nu^2 I^2) = 0 \\ \iff \mu^2 + (2\nu I)\mu + \left( \nu^2 I^2 - \frac{4\nu^3 - 12\nu^2 + 12\nu - 4}{9\nu} \right) = 0. \end{aligned}$$

Resolviendo en la variable  $I$ , obtenemos la siguiente condición

$$I_{1,2} = \frac{\pm 2\sqrt{(\nu - 1)^3 \nu^3} - 3\nu^2 \mu}{3\nu^3} \quad \text{siempre que } \nu > 0,$$

la cual verifica la existencia de dos raíces en la ecuación (4.14).

- Si  $\Lambda > 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{4(\nu - 1)^3 - 9\nu(\mu + \nu I)^2}{3\nu^3} > 0; \quad (\nu > 0) &\iff 4(\nu - 1)^3 - 9\nu(\mu + \nu I)^2 > 0 \\ \iff 4(\nu - 1)^3 > 9\nu(\mu + \nu I)^2 &\iff \mu^2 + (2\nu I)\mu + \left( \nu^2 I^2 - \frac{4\nu^3 - 12\nu^2 + 12\nu - 4}{9\nu} \right) < 0 \\ \implies \text{Si } \nu > 1, &\quad \frac{-2\nu\sqrt{\frac{(\nu-1)^3}{\nu^3}} - 3\mu}{3\nu} < I < \frac{2\nu\sqrt{\frac{(\nu-1)^3}{\nu^3}} - 3\mu}{3\nu}. \end{aligned}$$

Por tanto, la condición  $\frac{-2\nu\sqrt{\frac{(\nu-1)^3}{\nu^3}} - 3\mu}{3\nu} < I < \frac{2\nu\sqrt{\frac{(\nu-1)^3}{\nu^3}} - 3\mu}{3\nu}$  con  $\nu > 1$  verifica la existencia de tres raíces en el polinomio cúbico (4.14).

A continuación, pasaremos a estudiar la estabilidad de los equilibrios del sistema.

### 4.3.2. Estabilidad

La matriz jacobiana del modelo de FitzHugh-Nagumo (4.13) es de la forma

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - x^2 & 1 \\ -\varepsilon & -\varepsilon\nu \end{pmatrix}.$$

A continuación, calculamos el polinomio característico de la matriz Jacobiana y sus autovalores.

$$\begin{aligned} |J(x, y) - \lambda I| &= (1 - x^2 - \lambda)(-\varepsilon\nu - \lambda) + \varepsilon = \\ &= -\varepsilon\nu - \lambda + \varepsilon\nu x^2 + \lambda x^2 + \varepsilon\nu\lambda + \lambda^2 + \varepsilon = \\ &= \lambda^2 + (x^2 + \varepsilon\nu - 1)\lambda + \varepsilon(1 + \nu x^2 - \nu). \end{aligned}$$

Si tomamos  $\lambda^2 + (x^2 + \varepsilon\nu - 1)\lambda + \varepsilon(1 + \nu x^2 - \nu) = 0$  obtenemos las siguientes raíces:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ \pm \sqrt{(\varepsilon\nu + x^2 - 1)^2 - 4\varepsilon(\nu x^2 - \nu + 1)} - \varepsilon\nu - x^2 + 1 \right],$$

que son los autovalores del sistema (4.13). Es fácil verificar que

$$\tau = \text{traza } J = 1 - x^2 - \varepsilon\nu \quad \Delta = \det J = \varepsilon(\nu x^2 - \nu + 1),$$

siendo  $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$  el polinomio característico y  $\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$  los autovalores del sistema. El equilibrio es estable cuando  $\text{traza } J < 0$  y  $\det J > 0$ , es decir, cuando

$$\begin{aligned} 1 - x^2 - \varepsilon\nu &< 0, \\ \varepsilon(\nu x^2 - \nu + 1) &> 0, \end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} \frac{1 - x^2}{\varepsilon} &< \nu, \\ \nu &> \frac{-1}{x^2 - 1}, \end{aligned}$$

e inestable si  $\Delta < 0$  o  $\Delta > 0$  y  $\tau > 0$ , como hemos visto en el Capítulo 2.

Dos de las bifurcaciones más interesantes que se observan en el modelo de FitzHugh-Nagumo son las bifurcaciones silla-nodo y la bifurcación de Hopf, esta última por su implicación en el fenómeno de excitabilidad. La bifurcación silla-nodo, estudiada en la Sección 2 del Capítulo 3, consiste en la emergencia de un equilibrio que se separa en dos, una silla y un nodo; la bifurcación de Hopf, estudiada en el Capítulo 3, Sección 3, consiste en el cambio de estabilidad de un equilibrio, de estable a inestable, y la emergencia o desaparición de un ciclo límite. A continuación, se estudian casos particulares de la bifurcación silla-nodo y de la bifurcación de Hopf en el sistema de FitzHugh-Nagumo.

### 4.3.3. Bifurcación silla-nodo

En esta sección, analizaremos la bifurcación silla-nodo fijando los parámetros  $\nu = 3$ ,  $\mu = 1$  y  $\varepsilon = 0,2$ . Entonces, teniendo en cuenta estos valores, el sistema (4.13) sería de la forma

$$\begin{cases} x' = y - \frac{x^3}{3} + x + I, \\ y' = 0,2(1 - x - 3y), \end{cases}$$

y su matriz Jacobiana es de la forma

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - x^2 & 1 \\ -0,2 & -0,6 \end{pmatrix},$$

con

$$\tau = \text{traza } J = 0,4 - x^2 \quad y \quad \Delta = \det J = 0,6x^2 - 0,4.$$

La bifurcación silla-nodo se dará cuando el polinomio resultante de intersecar la nulclina cúbica  $x$  y la nulclina  $y$  bajo estas condiciones, es decir, el polinomio

$$\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x - \left(I + \frac{1}{3}\right) = 0.$$

tenga dos raíces, una simple y otra de multiplicidad dos. Es la raíz de multiplicidad dos la que bifurca. Como bien hemos visto en la sección 4.3.1, el polinomio cúbico tendrá dos raíces cuando  $\Lambda = 0$ , es decir

$$\Lambda = 0 \implies I_{1,2} = \frac{\pm 2\sqrt{(\nu - 1)^3\nu^3 - 3\nu^2\mu}}{3\nu^3} \quad \text{siempre que } \nu > 0.$$

Sustituyendo en la expresión anterior  $\nu = 3$  y  $\mu = 1$ , obtenemos los valores de  $I$

$$I_1 = 0,029554, \quad I_2 = -0,696221.$$

Además, si resolvemos el polinomio cúbico en función de los valores de  $I$ , obtenemos que el equilibrio correspondiente se encuentra en

$$x = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}\sqrt{243I^2 + 162I - 5} + 27I + 9}}{3^{2/3}\sqrt[3]{2}} + \frac{2\sqrt[3]{2/3}}{\sqrt[3]{\sqrt{243I^2 + 162I - 5} + 27I + 9}}.$$

A continuación, vamos a ver que para  $I = 0,029554$  el equilibrio es un punto de silla y estudiaremos lo que ocurre en un entorno de este valor del parámetro. El caso  $I = -0,696221$  se analizaría de forma análoga.

- Si  $\Delta < 0$ , entonces se tiene  $\tau^2 - 4\Delta > \tau^2$ . Por ello, los autovalores son reales y de distinto signo, por lo que el equilibrio es un punto de silla.

$$\Delta < 0 \iff 0,6x^2 - 0,4 < 0 \implies -0,816497 < x < 0,816497.$$

Entonces, si  $-0,816497 < x < 0,816497$  el equilibrio es un punto de silla. Si sustituimos los valores de  $x$  en el polinomio cúbico, obtenemos que  $I(-0,816497) = 0,029554$  e  $I(0,816497) = -0,6962$ . En esta ocasión, nos centraremos en ver lo que ocurre en un entorno de  $x = -0,816497$ . De manera análoga, podríamos resolver el otro caso.

Por tanto, si tomamos  $I$  tal que el valor del equilibrio  $x > -0,816497$ , el equilibrio es un punto de silla. Veamos que tipo de estabilidad ocurre cuando  $x < -0,816497$ . Para ello calculamos la traza y el determinante para dicho valor, obteniendo

$$\begin{aligned}\tau(x) &= 0,4 - x^2 < 0, \\ \Delta(x) &= 0,6x^2 - 0,4 > 0, \\ \tau^2 - 4\Delta &> 0.\end{aligned}$$

Entonces, como  $\tau < 0$ ,  $\Delta > 0$  y  $\tau^2 - 4\Delta > 0$ , el equilibrio es un nodo estable.

Teniendo en cuenta estos resultados, si el parámetro  $I$  aumenta, la nulclina  $x$  se desplaza hacia arriba, pero la nulclina  $y$  no cambia. Como resultado, la distancia entre el nodo estable y el punto de silla disminuye hasta que se fusionen y desaparecen.

A continuación, en la Figura 4.6, haremos una representación gráfica de esta bifurcación silla-nodo. Para una mayor apreciación, tomaremos en primer lugar  $x = 0$  que, como hemos visto antes, si  $-0,816497 < x < 0,816497$  el equilibrio es un punto de silla. En dicho punto, la corriente externa toma el valor  $I = -0,33333333$ . Como podemos ver en la Figura 4.6(a), existe una distancia entre ambos equilibrios, donde el equilibrio izquierdo es un nodo estable y el otro equilibrio es un punto de silla.

Si aumentamos la corriente externa, tomando  $I = 0,029554$ , veremos en las Figuras 4.6(b) y (c) que los puntos de equilibrio se han acercado y están muy próximos uno del otro. Finalmente, los puntos se colapsan y desaparecen dejando el equilibrio estable situado a la derecha; ver Figura 4.13(d).

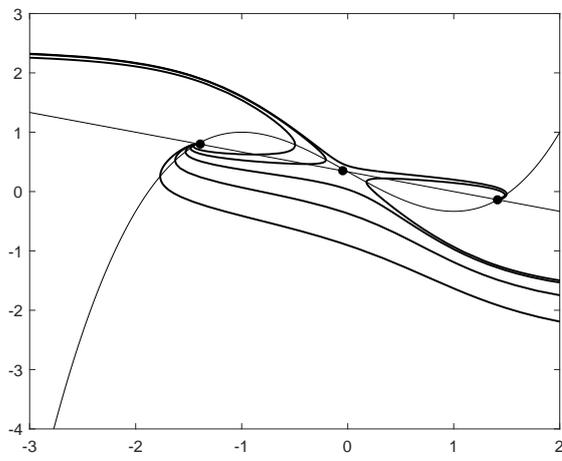
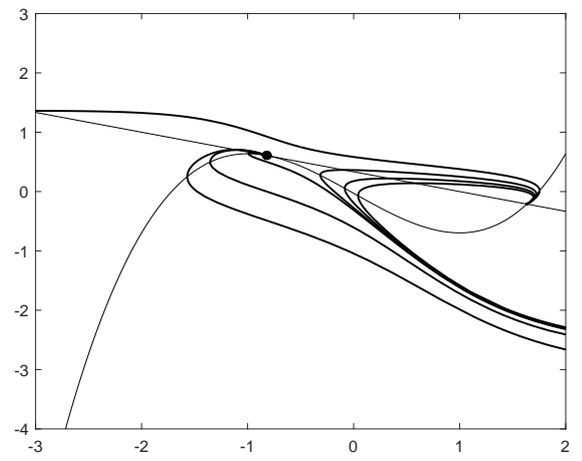
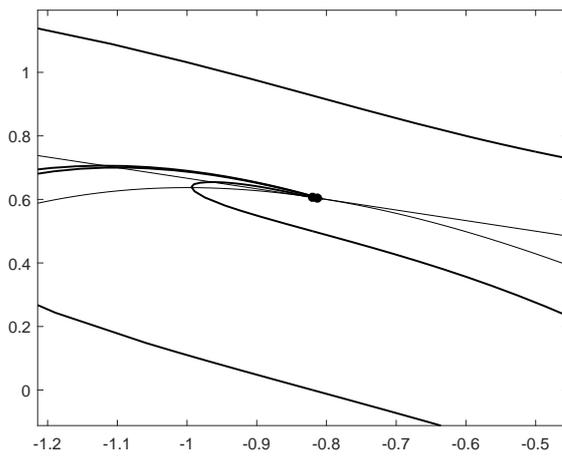
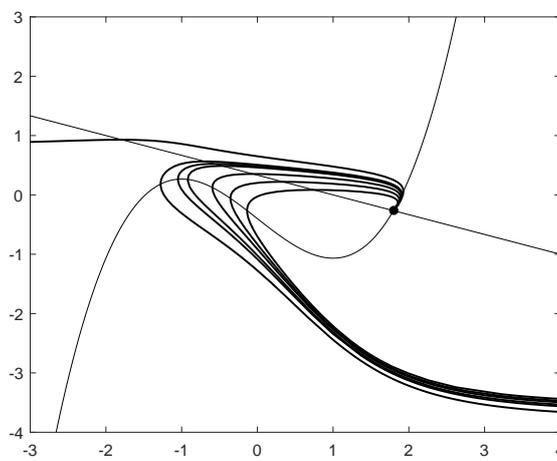
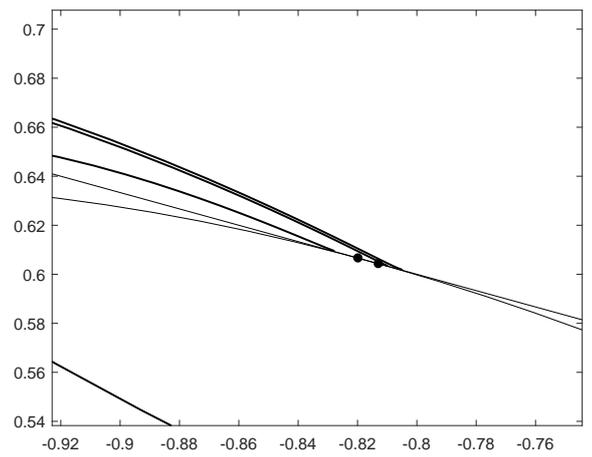
(a)  $I = -0,33333333$ (b)  $I = 0,029544$ (c)  $I = 0,029544$ (d)  $I = 0,029544$ 

Figura 4.6: Bifurcación de silla-nodo en el sistema de FitzHugh-Nagumo (4.13).

#### 4.3.4. Bifurcación de Andronov-Hopf

En esta sección, analizaremos la bifurcación Andronov-Hopf fijando los parámetros  $\nu = 0,5$ ,  $\mu = 1$  y  $\varepsilon = 0,08$ . Entonces, teniendo en cuenta estos valores, el sistema (4.13) sería de la forma

$$\begin{cases} x' = y - \frac{x^3}{3} + x + I, \\ y' = 0,08(1 - x - 0,5y), \end{cases}$$

y su matriz Jacobiana es de la forma

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - x^2 & 1 \\ -0,08 & -0,04 \end{pmatrix}.$$

Bajo estas condiciones, el polinomio cúbico (4.12) se reduce a

$$\frac{x^3}{3} + x - (I + 2) = 0.$$

El equilibrio será único, como hemos visto en la sección 4.3.1, cuando  $\Lambda < 0$ , es decir, cuando

$$\Lambda = -\frac{4}{3} - 3(I + 2)^2 < 0.$$

Esta condición se verifica en nuestro caso para cualquier valor de  $I$ . Si resolvemos el polinomio cúbico en función de los valores de  $I$ , obtenemos que el equilibrio se encuentra en

$$x = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{9I^2 + 36I + 40} + 3I + 6}}{\sqrt[3]{2}} - \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\sqrt{9I^2 + 36I + 40} + 3I + 6}}.$$

Sabemos que la bifurcación de Andronov-Hopf ocurre cuando los autovalores se vuelven puramente imaginarios, es decir, cuando  $\Delta > 0$  y  $\tau = 0$ , como hemos visto en el capítulo 2, esto es,

$$\Delta = 0,04 + 0,04x^2 > 0,$$

$$\tau = 0,96 - x^2 = 0,$$

lo que implica que

$$x = \pm 0,9779 \approx \pm 0,98.$$

Por tanto, para  $x = \pm 0,9779 \approx \pm 0,98$  el único equilibrio tiene autovalores asociados con parte real nula, lo que es equivalente a  $\tau = 0$ . A partir de ahora nos centraremos en el caso en el que  $x = 0,98$ , ya que el otro se resuelve de forma análoga. Si sustituímos  $x = 0,98$  en el polinomio cúbico resultante de intersecar las dos nulclinas, obtenemos que para  $I = -0,7$  tenemos una bifurcación Andronov-Hopf y sabemos que nace un ciclo límite.

Para estudiar en qué dirección aparece el ciclo límite y con qué estabilidad, necesitamos simular el modelo para distintos valores del parámetro  $I$  en un entorno de  $I = -0,7$ . Notemos que el mínimo y el máximo de la nulclina  $x$ , se obtienen en  $(1, -\frac{2}{3} - I)$  y  $(-1, \frac{2}{3} - I)$ , respectivamente.

- Si  $\tau^2 - 4\Delta < 0$  y  $\tau < 0$ , entonces el equilibrio es un foco estable. Esto equivale a que

$$\begin{aligned}(x^2 - 0,96)^2 - 0,16(x^2 - 1) < 0 &\implies -1,03 < x < 1,03, \\ 0,96 - x^2 < 0 &\implies x < -0,98, x > 0,98.\end{aligned}$$

Por tanto si  $-1,03 < x < -0,98$  y  $0,98 < x < 1,03$ , tenemos un foco estable. Si despejamos  $I$  en el polinomio cúbico, obtenemos  $I = \frac{x^3}{3} + x - 2$ . Sustituyendo los valores de  $x$  tenemos que  $I(-1,03) = -3,39$ ,  $I(-0,98) = -3,29$ ,  $I(0,98) = -0,7$  y, por último,  $I(1,03) = -0,605$ . Entonces, si  $-3,39 < I < -3,29$  y  $-0,7 < I < 0,605$ , el foco es estable.

- Si  $\tau^2 - 4\Delta < 0$  y  $\tau > 0$ , entonces el equilibrio es un foco inestable. Esto equivale a que

$$\begin{aligned}(x^2 - 0,96)^2 - 0,16(x^2 - 1) < 0 &\implies -1,03 < x < 1,03, \\ 0,96 - x^2 > 0 &\implies -0,98 < x < 0,98.\end{aligned}$$

Por tanto, si  $-0,98 < x < 0,98$ , tenemos un foco inestable y, de manera análoga, obtenemos que  $-3,29 < I < -0,7$ .

Entonces en un entorno de  $x = 0,98$ , donde  $I = -0,7$ , si tomamos un valor en  $x < 0,98$ , el equilibrio es un foco inestable. Por el contrario, si tomo  $x > 0,98$  el equilibrio es un foco estable. De esta forma, vemos que el equilibrio pasa de inestable a estable.

Para terminar nuestro estudio, vamos a representar algunos retratos de fase entorno al valor de la bifurcación  $I = -0,7$ . Veremos, que asociado a la bifurcación de Hopf se produce una explosión canard como la descrita en el oscilador de Van der Pol, que permite a la órbita periódica crecer rápidamente en un intervalo pequeño del parámetro  $I$ .

En particular, en la Figura 4.7(a), para  $I = -0,66$  el sistema tiene un equilibrio estable tipo foco. Esta situación se corresponde con el estado de reposos de la neurona. En el caso (b), para  $I = -0,8$  ya se ha producido la bifurcación y el sistema tiene un ciclo límite de relajación (que es estable) y se corresponde con el estado de actividad neuronal o generación de spikes. Finalmente, en el caso (c) representamos varios casos para  $I = -0,7$ , en un entorno del valor de bifurcación. Disminuyendo  $I$  vemos que el ciclo límite crece, desde la forma de canard “sin cabeza” hasta canard “con cabeza”. Como se observa, los ciclos siguen a la variedad repulsora de la cúbica. El valor de bifurcación es el escalón de activación de la neurona.

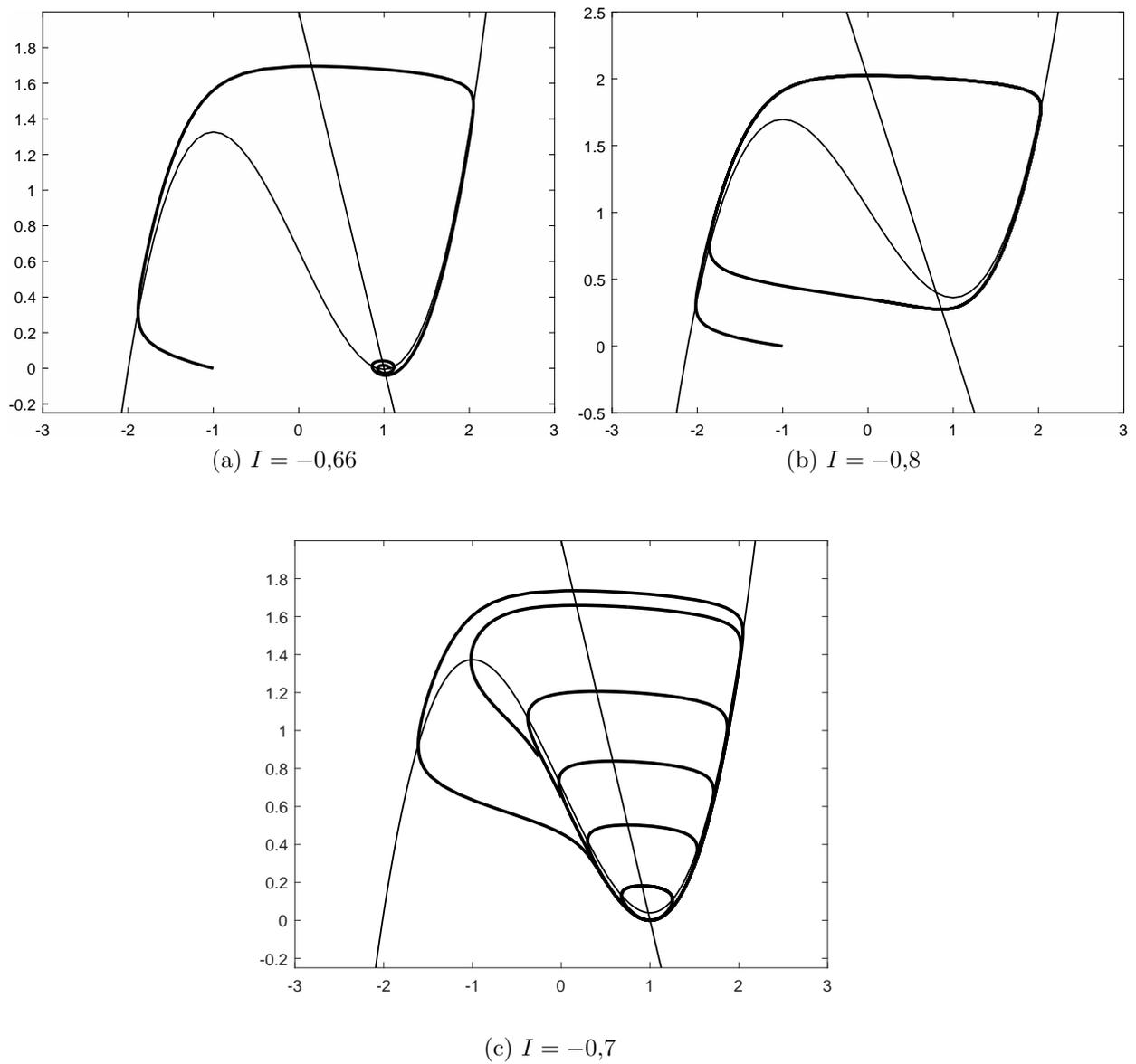


Figura 4.7: Bifurcación de Hopf en el sistema de FitzHugh-Nagumo (4.13).



# Bibliografía

- [1] Desroches, M., et al. *Mixed-mode oscillations with multiple time scales*. SIAM Review, 54, pp.211-288, 2012.
- [2] FitzHugh, Richard. *Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane*. Biophysical Journal, pp.445-466.
- [3] Fenichel, N.. *Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations*. Differential Equations, 31, pp.53-98, 1979.
- [4] Hale, Jack K., Hüseyin, Kocak. *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag, 1991.
- [5] Hodgkin AL, Huxley AF. *Currents carried by sodium and potassium ions through the membrane of the giant axon of Loligo*. The Journal of Physiology, April 1952.
- [6] Izhikevich, Eugene M.. *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. MIT Press, 2007.
- [7] Naguno, J., et al. *An active pulse transmission live simulating nerve axon*. Proceedings of the IRE, pp2061-2070, 1962.
- [8] Strogatz, Steven Henry. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Perseus Books, 1994.