UNIVERSIDAD DE SEVILLA

TRANSFORMADAS DE FOURIER Y COEFICIENTES DE FOURIER-LAGUERRE DE DISTRIBUCIONES TEMPERADAS DE SOPORTE POSITIVO

Memoria presentada por
D. Antonio J. Durán Guardeño
para optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas.

Antonio J. Durán Guardeño

V° B° Catedrático Director

Juan Arias de Reyna M.

D. Juan Arias de Reyna.
Catedratico de la
Universidad de Sevilla
Sevilla, Mayo 1988

AGRADECIMIENTOS

Quiero mostrar mi agradecimiento al maestro J. Arias por iniciarme en los secretos de este arte y apadrinarme en mi alternativa.
También al resto de la torería, en especial a los espadas F. Freniche y L. Bernal, sin olvidarme de mis compañeros novilleros.
A Lourdes su acertada labor en banderillas.
¡¡Va por ustedes!!

A mis padres

INDICE

INTRODUCCION

En la génesis de esta memoria, están los siguientes problemas planteados en un determinado espacio de distribuciones:

Sea u una distribución temperada de soporte positivo.

a) Consideremos el sistema ortonormal en $L^2[0,+\infty)$ formado a partir de los polinomios de Laguerre $(L_n(t)e^{-\frac{t}{2}})_n$. Puesto que las funciones $L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}$ son de decrecimiento rápido en R^+, podemos darle un sentido razonable y natural a $< u, L_n(t)e^{-\frac{t}{2}} >$ (1), obteniendo unos coeficientes a_n asociados a cada distribución temperada de soporte positivo.

a.1) ¿ Se podrán caracterizar los coeficientes $(a_n)_n$?

a.2) ¿ Será $u = \sum_n a_n L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}\chi_{[0,+\infty)}$ en el espacio de las distribuciones temperadas?

b) Dado $z \in \mathbf{C}$ si $\Im z < 0$, la función $f(t) = e^{-2\pi izt}$ es de decrecimiento rápido en R^+, en consecuencia se le puede dar un sentido similar a (1) a $< u(t), e^{-2\pi izt} >$ (2), definiendose una función $\tilde{u}(z)$ en $\Im z < 0$.

b.1) ¿ Que relación tendrá esta función con la transformada de Fourier de u?

b.2) ¿ Se podrán caracterizar las funciones $\tilde{u}(z)$ así obtenidas ? (por ejemplo en el sentido que aparece en [RUDIN] (1) para caracterizar las transformadas de Fourier de distribuciones de soporte compacto).

Un problema similar al a) se puede encontrar en [SCHWARTZ] . En el se considera el sistema ortonormal en $L^2(\mathbf{R})$, formado por los polinomios de Hermite $(H_n(t)e^{-\pi t^2})_n$. Puesto que $H_n(t)e^{-\pi t^2} \in S$, dada $u \in S'$ podemos considerar $a_n =< u, H_n(t)e^{-\pi t^2} >$. En este caso se obtiene de forma fácil (por las características de los polinomios de Hermite) que

$u = \sum_n a_n H_n(t) e^{-\pi t^2}$ en S' y que $u \in S'$ si y sólo si $(a_n)_n$ es una sucesión acotada por una potencia de n, i. e. $(a_n)_n \in s'$.

También se pueden encontrar en [ZEMANIAN], desarrollos en serie para diversos sistemas ortonormales de elementos de ciertos espacios. Sin embargo, por la forma en que este autor define los espacios y sus topologías, éstos son poco reconocibles. Aquí se encuentran desarrollos en serie para elementos de un cierto espacio en el sistema ortonormal de Laguerre. Aunque no se sabe si estos desarrollos son válidos para distribuciones temperadas con soporte positivo, pues no se prueba que el espacio donde se hacen estos desarrollos contengan a estas distribuciones. También se pueden encontrar los desarrollos de SCHWARTZ antes citados para los polinomios de Hermite. En este caso, el autor sí remite a una prueba de que los desarrollos son válidos para las distribuciones temperadas. Es decir el espacio que el autor maneja coincide con S'.

En cuanto al problema b), la función que se obtiene $\tilde{u}$ a partir de u resulta ser analítica en $\Im z < 0$. En cierta manera se intuye que la transformada de Fourier de u, $\hat{u}$ pudiera interpretarse como el " valor frontera " (en un cierto sentido) de la función $\tilde{u}$. Esta idea puede relacionar el problema con los resultados de [TILLMANN], donde interpreta las distribuciones temperadas como los " valores frontera " de un cierto conjunto de funciones analíticas. Más adelante, veremos que esta relación existe.

La primera parte del Capítulo 1, está destinada a definir de forma precisa el espacio de distribuciones donde trabajaremos. De esta forma se introduce el espacio de funciones S^+ (1.1) restricción a $[0, +\infty)$ de las funciones de decrecimiento rápido. Identificando su dual $(S^+)'$ con las distribuciones temperadas de soporte positivo y puesto que $L_n(t)e^{-\frac{t}{2}} \in S^+$, y si $\Im z < 0$, $f(t) = e^{-2\pi i z t} \in S^+$, obtenemos de forma precisa el sentido razonable y natural de (1) y (2). Además puesto que $L_n(t)e^{-\frac{t}{2}} \in (S^+)'$, el problema a.2) equivale a:

¿ Será $u = \sum_n a_n L_n(t) e^{-\frac{t}{2}}$ en $(S^+)'$?.

En la segunda parte del capítulo 1, se resuelva el problema b.1) (Teorema 1.16). En efecto, dada $u \in (S^+)'$, la función $\tilde{u}(z) =< u(t), e^{-2\pi i z t} >$ (que resulta ser analítica en $\Im z < 0$ (1.31)) se relaciona con la transformada de Fourier de u en la siguiente forma:

Para cada $y \in R$, $y < 0$, $\tilde{u}(x+iy) \in S'$ y $\hat{u}$ es el límite en S' de las distribuciones $\tilde{u}(x+iy)$ cuando y tiende a 0^-.

Como ya intuiamos al plantear el problema b), existe una relación entre este problema y los resultados de [TILLMANN]. Efectivamente, la forma en que nosotros interpretamos la transformada de Fourier de u como " valor frontera " de $\tilde{u}$, coincide como este autor interpreta una distribución temperada como " valor frontera " de una determinada función analítica.

En el capítulo 2, abordamos el problema a) en una forma más general:

Sea $\mathcal{L}_n^\alpha(t) = (\frac{n!}{\Gamma(\alpha+n+1)})^{\frac{1}{2}} t^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{t}{2}} L_n^\alpha(t)$ que forma un sistema ortonormal en $L^2[0,+\infty)$ y $t^{\frac{\alpha}{2}} S^+ = \{t^{\frac{\alpha}{2}}\phi : \phi \in S^+\}$. Puesto que $\mathcal{L}_n^\alpha(t) \in t^{\frac{\alpha}{2}} S^+$ dada $u \in (t^{\frac{\alpha}{2}} S^+)'$ estudiamos los coeficientes $a_n =< u, \mathcal{L}_n^\alpha(t) >$. Para $\alpha = 0$ obtenemos el problema a).

El resultado más importante es el siguiente (Teoremas 2.6 y 2.7):

Sea $\phi \in t^{\frac{\alpha}{2}} S^+$ y $a_n = \int_0^{+\infty} \phi(t) \mathcal{L}_n^\alpha(t)\, dt$. Entonces $(a_n)_n \in s$ y $\phi(t) = \sum_n a_n \mathcal{L}_n^\alpha(t)$ en $t^{\frac{\alpha}{2}} S^+$. Y recíprocamente, dado $(a_n)_n \in s$ existe $\phi \in t^{\frac{\alpha}{2}} S^+$ verificando $a_n = \int_0^{+\infty} \phi(t) \mathcal{L}_n^\alpha(t)\, dt$. Y en consecuencia $t^{\frac{\alpha}{2}} S^+ \cong s$.

Dualizando este resultado y particularizando para $\alpha = 0$ resolvemos de forma completa el problema a): La aplicación que a cada $u \in (S^+)'$ le asocia $(a_n)_n = (< u, L_n e^{-\frac{t}{2}} >)_n$ es un isomorfismo de $(S^+)'$ en s' y por tanto $u = \sum_n a_n L_n e^{-\frac{t}{2}}$ en $(S^+)'$.

Damos algunos ejemplos ejemplos de desarrollos (2.12), algunos conocidos y otros nuevos.

Se completa el capítulo aplicando los resultados anteriores para extender de forma muy simple algunos operadores integrales a los espacios $(S^+)'$ y $(t^{\frac{1}{4}}S^+)'$.

En el capítulo 3 caracterizamos los espacios de funciones analíticas que se obtienen al considerar $\tilde{u}(z)$ con $u \in (S^+)'$ (que denotaremos $A'(\Pi^-)$) y $\tilde{\phi}(z)$ con $\phi \in S^+$ (que denotaremos $A(\Pi^-)$), con lo cual resolvemos el problema b.2).

Si hacemos la transformación bilineal $W(z) = \frac{-\frac{1}{2}+2\pi i z}{\frac{1}{2}+2\pi i z}$ que transforma el semiplano Π^- en el disco unidad D, obtenemos dos nuevos espacios de funciones analíticas en el disco unidad a partir de $A(\Pi^-)$ y $A'(\Pi^-)$ que denotaremos respectivamente $A(D)$ y $A'(D)$. Teniendo en cuenta los resultados del capítulo 2, estos últimos espacios quedan caracterizados de forma inmediata (teorema 3.4 y 3.5). Utilizando estas caracterizaciones obtenemos como resultado principal del capítulo la caracterización de $A(\Pi^-)$ y $A'(\Pi^-)$ (Teoremas 3.6 y 3.7).

El problema b.2) queda resuelto del siguiente modo:

$$f \in A'(\Pi^-) \text{si y solo si existen } M > 0,\ \ n \in \mathbf{N} \text{ tales que}$$
$$|f(z)| \leq M(1+|z|^2)^n \frac{1}{|\Im z|^k}$$

Como consecuencia se obtiene uno de los teoremas de [TILLMANN]. Encontramos pues, otra relación más entre el problema b) y el trabajo de [TILLMANN], pues el espacio $A'(\Pi^-)$ coincide (salvo las diferencias producidas al considerarse en [TILLMANN] el espacio S' y nosotros $(S^+)'$) con el que maneja el autor para interpretar las distribuciones temperadas como " valor frontera " de un conjunto de funciones analíticas en $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$.

Debemos reseñar sin embargo, que tanto el planteamiento del problema, como su resolución en [TILLMANN] son totalmente diferentes a nuestro caso.

Aplicando algunos resultados obtenidos en este capítulo, damos condiciones necesarias y suficientes para la prolongación analítica de las funciones de $A'(\Pi^-)$.

Así mismo, y aplicando los desarrollos obtenidos en el capítulo 2, damos una prueba muy simple de que el producto de convolución de dos distribuciones de $(S^+)'$ es otra distribución de $(S^+)'$. (Compáresela con la prueba que da [VO-KHAC-KHOAN] [2] pág. 115).

La solución del problema b), sugiere este otro:

c) Consideramos el conjunto de funciones más amplio para las que tenga sentido definir unos coeficientes como en (1), esto es $f : [0, +\infty) \to \mathbf{C}$ verificando $f(t)L_n(t)e^{-\frac{t}{2}} \in L^1[0, +\infty)$. ¿ Podremos caracterizar los coeficientes para este grupo de funciones?

Resolvemos el problema en el capítulo 4.

En primer lugar definimos el espacio de funciones $X = \cap_n (1 + t^2)^{-n} e^{\frac{t}{2}} L^1[0, +\infty)$ (4.1). Claramente se observa que $f(t)L_n(t)e^{-\frac{t}{2}} \in L^1[0, +\infty)$ si y sólo si $f \in X$.

El resultado más importante del capítulo es el siguiente (teorema 4.9):

Dada una sucesión de números complejos cualquiera, $(a_n)_n$, existe $\phi \in S^+$ tal que $\int_0^{+\infty} \phi(t)L_n(t)\, dt = a_n$.

Este teorema, que se obtiene utilizando la caracterización de las funciones de $A(D)$, obtenida en el capítulo 3 y un resultado referente a funciones holomorfas en dominios regulares, resuelve el problema c), puesto que si $\phi \in S^+$ es claro que $\phi(t)e^{\frac{t}{2}} \in X$, en consecuencia se deduce que la aplicación de X en $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ que a cada función f asocia la sucesión $(\int_0^{+\infty} \phi(t)L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}\, dt)_n$ es sobreyectiva.

El problema c) lo podemos escribir como un problema de momentos de Stieljes:

Dada $(a_n)_n$ de números complejos ¿ existe una función $f : (0, +\infty) \to$

$\mathbf{C}$ tal que $\int_0^{+\infty} f(t)t^n\,dt = a_n$?

Este problema clásico está tratado en [SHOAT-TAMARKIN], nosotros aportamos la novedad de que la solución que encontramos es una función de S^+.

Se completa el capítulo, probando que el dual fuerte de X es isomorfo a $Y = \cup_n (1+t^2)^n e^{-\frac{t}{2}} L^\infty[0,+\infty)$ (teorema 4.21).

En el capítulo 3 y para resolver el problema b.2) se introducen los espacios de funciones analíticas en el disco unidad $A(D)$, $A'(D)$. Nos planteamos los siguientes problemas:

d.1) Al igual que ocurre en otros espacios de funciones analíticas en el disco (H^p con $p \geq 1$,y el espacio de Nevanlinna N) ¿ verifican los ceros de las funciones de $A(D)$ y $A'(D)$ que $\sum_n (1-|a_n|) < \infty$?.

d.2) Caso de verificarlo, se puede definir un producto de Blaschke para estos ceros, i.e. $B(z) = \prod_n \frac{-\bar{w}_n}{|w_n|} \frac{w-w_n}{1-\bar{w}_n w}$.

¿ Se verificará que si $f \in A(D)(A'(D))$ entonces $\frac{f}{B} \in A(D)(A'(D))$? (Como ocurre en $H^p, p \geq 1$, y el espacio de Nevanlinna N).

Tratamos estos problemas en el capítulo 5. (Nótese que los problemas se pueden trasladar al semiplano inferior y considerarlos para las funciones de $A(\Pi^-)$) y $A'(\Pi^-)$).

En la primera parte de este capítulo y previamente a tratar las cuestiones anteriores, estudiamos los ceros de las funciones enteras obtenidas a partir de las distribuciones de soporte compacto (no necesariamente con soporte positivo) de la forma $\tilde{u}(z) =< u(t), e^{-2\pi i z t} >$. En este sentido damos en el teorema 5.9 algunas condiciones necesarias que deben verificar los ceros de estas funciones.

También relacionamos el problema de la totalidad del sistema $(x^{iz_n})_n$ en ciertos espacios de funciones con la existencia de una distribución de soporte compacto u tal que $\tilde{u}(z_n) = 0$ (teorema 5.12).

Se dan asimismo, algunas condiciones suficientes sobre una sucesión de números complejos $(z_n)_n$ para que exista una distribución de soporte compacto u, tal que $\tilde{u}(z_n) = 0$ (teorema 5.15), y relacionamos una cierta densidad de los $(z_n)_n$ con el diámetro del soporte de la distribución u.

Se completa esta parte probando que tanto el problema d.1) como el d.2) se contestan afirmativamente para el espacio de funciones analíticas transformadas de Fourier de las distribuciones $\mathcal{E}'$ (teoremas 5.14 y 5.15).

En la segunda parte del capítulo 5, abordamos los problemas d.1) y d.2), obteniendo los siguientes resultados:

Las funciones de $A(D)$ efectivamente verifican d.1) (lema 5.20). Sin embargo las de $A'(D)$ no. En este caso, probamos una propiedad más débil para los ceros de las funciones de $A'(D)$ (teormea 5.26) y damos un contraejemplo de una función $f \in A'(D)$ que no verifica d.1) (ejemplo 5.27).

En cuanto al problema d.2) (que sólo tiene sentido plantearlo en $A(D)$) queda abierto, aunque se dan algunos resultados parciales (teoremas 5.24 y 5.25).

Por último, el problema (5.30) (que solucionamos parcialmente), surgió al probar el corolario 5.29. Aunque queda un poco alejado del contexto de la memoria, lo incluimos por su posible interés.

CAPITULO 0

PRELIMINARES

Los resultados básicos que aparecen en la memoria sobre la teoría de distribuciones se pueden encontrar en [SCHWARTZ], [VO-KHAC-KHOAN] ([1] y [2]), [FRIEDLANDER], [RUDIN] [1]. En particular, aparecerán los siguientes espacios de funciones test: $\mathcal{D}$ de funciones indefinidamente diferenciables y con soporte compacto. S de funciones indefinidamente diferenciables y de decrecimiento rápido, i.e. funciones $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$, tales que para todo $k, n \in \mathbf{N}$ verifican $\lim_{t\to\infty} |t^k f^{(n)}(t)| = 0$. Y los espacios de distribuciones $\mathcal{D}'$, S' (de distribuciones temperadas), $\mathcal{E}'$(de distribuciones de soporte compacto). Se usará que el producto de convolución de dos distribuciones temperadas de soporte positivo es otra distribución temperada de soporte positivo (véase la prueba que da [VO-KHAC-KHOAN] [2] pág.115).

Especial interés tendrá, la caracterización dada en [RUDIN] [1] 7.23 de las transformadas de Fourier de distribuciones de soporte compacto, y la que aparece en [RUDIN] [2] 19.3 para las transformadas de Fourier de funciones de $L^2(\mathbf{R})$ y soporte compacto. Estas son (el exponente 2π nos aparece por la diferente definición de la transformada de Fourier):

0.1 TEOREMA. *Sea* $u \in \mathcal{E}'$, *sop* $u \subset [-r, r]$. *Entonces la función* $\tilde{u}(z) = < u(t), e^{-2\pi izt} >$ *es entera, la restricción a* $\mathbf{R}$ *es la transformada* *de Fourier $\hat{u}$ y existen $\gamma > 0$ y $N \in \mathbf{N}$ verificando*

$$|\tilde{u}(z)| \leq \gamma(1+|z|)^N e^{2\pi r|\Im z|} \qquad (1)$$

Recíprocamente, si f es una función entera verificando (1), existe $u \in \mathcal{E}'$ con soporte en $[-r,r]$ verificando $f(z) = \tilde{u}(z)$.

0.2 TEOREMA. *Si $f \in L^2[-A,A]$ entonces la función $\tilde{f}(z) = \int_{-A}^{A} f(t)e^{-2\pi izt}\,dt$ es entera, su restricción a $\mathbf{R}$ es $\hat{f}$ y $|\tilde{f}(z)| \leq Ce^{2\pi A|z|}$ para cierta constante $C > 0$ (1). Recíprocamente, si g es entera verificando (1), existe $f \in L^2[-A,A]$ verificando $g(z) = \tilde{f}(z)$.*

A continuación, comentaremos algunas propiedades de los polinomios de Laguerre que nos serán de utilidad a lo largo de la memoria.

Los polinomios de Laguerre, serán denotados por $L_n^\alpha(t)$ y se definen del siguiente modo:

$$L_n^\alpha(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-t)^k}{k!} \quad \text{con} \quad \alpha > -1 \qquad (0.3)$$

Para $\alpha = 0$ los polinomios se designan por $L_n(t)$ y se tiene:

$$L_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} \binom{n}{k} t^k \qquad (0.4)$$

Los polinomios de Laguerre, admiten un peso que los convierte en un sistema ortonormal en $L^2[0,+\infty)$. Al sistema ortonormal lo denotamos por $\mathcal{L}_n^\alpha(t)$ y vale:

$$\mathcal{L}_n^\alpha(t) = (\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)})^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{\alpha}{2}} L_n^\alpha(t) \tag{0.5}$$

Los polinomios de Laguerre se pueden obtener a partir de la siguiente función generatriz:

$$L_n^\alpha(t) = \frac{t^{-\alpha} e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^{n+\alpha} e^{-t}) \tag{0.6}$$

Además se verifican las siguientes relaciones entre ellos :

$$\frac{d}{dt}(L_n^\alpha(t)) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(t) \tag{0.7}$$

$$L_n^\alpha(t) = L_n^{\alpha+1}(t) - L_{n-1}^{\alpha+1}(t) \tag{0.8}$$

$$t\frac{d^2}{dt^2}(L_n^\alpha(t)) + (\alpha + 1 - t)\frac{d}{dt}(L_n^\alpha(t)) + nL_n^\alpha(t) = 0 \tag{0.9}$$

$$\frac{d}{dt}(t\frac{d}{dt}(e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{\alpha}{2}} L_n^\alpha(t))) + (n + \frac{\alpha+1}{2} - \frac{t}{4} - \frac{\alpha^2}{4t})e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{\alpha}{2}} L_n^\alpha(t) = 0 \tag{0.10}$$

Si $\alpha \neq -1$ se verifica que:

$$(1-w)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{tw}{1-w}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} w^n L_n^\alpha(t) \tag{0.11}$$

donde la serie es absolutamente convergente para $|w| < 1$ y $t \in \mathbf{R}$.
Estos resultados, se pueden encontrar en [SANSONE] Capítulo IV, o también en [ERDELYI ...] [2] 10.12. En este último libro se da una fórmula para la transformada de Laplace de $t^\alpha L_n^\alpha(t)$ cuando $\alpha > -1$ y $\Re s > 0$:

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha L_n^\alpha(t) e^{-st}\, dt = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)(s-1)^n}{n! s^{\alpha+n+1}} \tag{0.12}$$

Nos será de utilidad en la memoria para $s = \frac{1}{2} + 2\pi i z$ con $\Im z < 0$ i.e.

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha L_n^\alpha(t) e^{-\frac{t}{2}} e^{-2\pi i z t}\, dt = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)(-\frac{1}{2}+2\pi i z)^n}{n!(\frac{1}{2}+2\pi i z)^{\alpha+n+1}} \tag{0.13}$$

Nótese que para $z \in \mathbf{R}$ la fórmula anterior nos da la transformada de Fourier de $t^\alpha L_n^\alpha(t) e^{-\frac{t}{2}}$, y teniendo en cuenta la definición de $\mathcal{L}_n^\alpha(t)$ obtenemos:

$$t^{\frac{\alpha}{2}}\widehat{\mathcal{L}_n^\alpha}(t)(x) = (\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!})^{\frac{1}{2}} \frac{(\frac{-1}{2}+2\pi i x)^n}{(\frac{1}{2}+2\pi i x)^{\alpha+n+1}} \tag{0.14}$$

En [WIDDER] pág. 168 se da la siguiente acotación para $L_n(t)$:

$$|L_n(t)| \le e^{\frac{t}{2}} \quad \text{para todo } n \in \mathbf{N} \quad t \ge 0 \tag{0.15}$$

Por s denotamos el espacio de sucesiones:

$$s = \{(a_n)_n : a_n \in \mathbf{C} \quad \text{y para todo } k \in \mathbf{N} \quad \sum_n n^k |a_n| < +\infty\}$$

dotado con la topología que generan las seminormas $\|(a_n)_n\|_k = \sum_n n^k |a_n|$. Es claro que

$$s = \{(a_n)_n : a_n \in \mathbf{C} \quad \text{y para todo } k \in \mathbf{N} \quad \lim_{n\to\infty} n^k a_n = 0\}.$$

El espacio s es un espacio de Fréchet y su dual es

$$s' = \{(a_n)_n : \text{ existe } \alpha > 0 \quad k \in \mathbf{N} \text{ verificando } |a_n| < \alpha(n+1)^k\}$$

De forma trivial se verifica que:

Si P es un polinomio y $(a_n)_n \in s$, entonces $(P(n)a_n)_n \in s$.

Los siguientes lemas serán usados en la memoria.

0.16 LEMA. *Sea f una función analítica en el disco unidad. Son equivalentes:*

a) Existen $(a_n)_n \in s'$ tal que $g(w) = (1-w)\sum_n a_n w^n$

b) Existen $C > 0$ y $k \in \mathbf{N}$ tal que $|g(w)| \leq \frac{C}{(1-|w|)^k}$ con $w \in D$.

DEMOSTRACION

a) $\Rightarrow$ b) Sea $g(w) = (1-w)\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$ y obviamente $(b_n)_n \in s'$ i. e. existe $\alpha > 0$ y $k \in \mathbf{N}$ tal que $|b_n| < \alpha(n+1)^{k-1}$, en consecuencia existe $M > 0$ tal que $|b_n| < M\binom{n+k-1}{k-1}$ y de aqui

$$|g(w)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |b_n w^n| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} |w^n| =$$

$$= M \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-k}{n} (-|w|)^n = \frac{M}{(1-|w|)^k}$$

b) $\Rightarrow$ a) Bastará probar que si $g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ entonces $(a_n)_n \in s'$. Pero $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\xi)}{\xi^{n+1}}\, d\xi$ donde Γ es la circunferencia de centro 0 y radio r. Entonces $|a_n| \leq \frac{M}{(1-r)^k r^n}$. Hallando el máximo de $(1-r)^k r^n$ en $[0,1]$ se obtiene $r = \frac{n}{n+k}$, en consecuencia

$$|a_n| \leq \frac{M}{(1-\frac{n}{n+k})^k(\frac{n}{n+k})^n} = M(1+\frac{k}{n})^n(1+\frac{n}{k})^k \leq$$

$$\leq Me^k(1+\frac{n}{k})^k$$

y en consecuencia $(a_n)_n \in s'$.

0.17 LEMA.

a) Sea $(a_n)_n \in s$ y $a \in \mathbf{C}$ con $|a| \geq 1$. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n a^{-n} = 0$, entonces la sucesión $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a^{n-k}$ está en s.

b) Sea $(a_n)_n \in s'$ y $a \in \mathbf{C}$ con $|a| \geq 1$. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n a^{-n} = 0$, entonces la sucesión $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a^{n-k}$ está en s'.

DEMOSTRACION

a) Puesto que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n a^{-n} = 0$ resulta

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a^{n-k} = a^n \sum_{k=0}^{n} a_k a^{-k} = -a^n \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k a^{-k} = -\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k a^{n-k}$$

Sea $r \in \mathbf{N}$, al ser $(a_n)_n \in s$ existe N tal que si $k \geq N$ entonces $|a_k| < \frac{\epsilon}{k^{r+2}}$. Tomando $n > N$ resulta

$$|b_n| = |-\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k a^{n-k}| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k||a|^{n-k} \leq \epsilon \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{r+2}}$$

y por lo tanto

$$n^r |b_n| < n^r \epsilon \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{r+2}} = \epsilon \sum_{k=n+1}^{\infty} (\frac{n}{k})^r \frac{1}{k^2} \leq \epsilon \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \text{cte}\, \epsilon$$

luego dado $r \in \mathbf{N}$ $\quad \lim_{n\to\infty} n^r |b_n| = 0$ i.e. $(b_n)_n \in s$.

b) Procediendo como en a) obtenemos $b_n = -\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k a^{n-k}$. Por ser $(a_k)_k \in s'$ existe $\alpha > 0$ y $r \in \mathbf{N}$ verificando $|a_k| < \alpha(k+1)^r$ de donde

$$|b_n| \leq \alpha \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1)^r |a|^{n-k} = \alpha(n+1)^r \sum_{k=n+1}^{\infty} (\frac{k+1}{n+1})^r |a|^{n-k} =$$

$$= \alpha(n+1)^r \sum_{k=0}^{\infty} (1 + \frac{k+1}{n+1})^r |a|^{-k-1} \leq \alpha(n+1)^r \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)^r |a|^{-k-1}$$

$$= \text{cte}(n+1)^r$$

y en consecuencia $(b_n)_n \in s'$.

0.18 LEMA. *Si* $(a_n)_n \in s'$ *y* $(b_n)_n \in s'$, *entonces* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}(b_k - b_{k-1}) \in s'$.

DEMOSTRACION

En efecto, de ser $(a_n)_n, (b_n)_n \in s'$ obtenemos $\alpha > 0$ y $m \in \mathbf{N}$ verificando $|a_n|, |b_n| < \alpha(n+1)^m$, en consecuencia

$$|c_n| = |\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}(b_k - b_{k-1})| \leq \sum_{k=0}^{n} \alpha^2(n-k+1)^m((k+1)^m + k^m) \leq$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n} 2\alpha^2(n+1)^{2m} \leq 2\alpha^2(n+1)^{2m+1}$$

y de aquí $(c_n)_n \in s'$.

En el capítulo III, se usa la siguiente fórmula de derivación de una función compuesta:
Sea $y = \phi(u)$ y $u = f(x)$, entonces

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{a=1}^{k} (-1)^a \binom{k}{a} u^{k-a} \frac{d^n}{dx^n} u^a \frac{d^k y}{du^k} \tag{0.19}$$

que se ha tomado de [SCHWATT] pág. 12 7.

Se considerará durante la memoria, la siguiente transformación bilineal que transforma el semiplano inferior $\Pi^- = \{z \in \mathbf{C} : \Im z \leq 0\}$ en el disco unidad $D = \{w \in \mathbf{C} : |w| \leq 1\}$ dada por:

$$W(z) = \frac{-\frac{1}{2} + 2\pi i z}{\frac{1}{2} + 2\pi i z} \tag{0.20}$$

Esta transformación lleva, $z = +\infty$, $z = 0$, $z = \frac{-i}{4\pi}$ en $w = 1$, $w = -1$ y $w = 0$. La transformación inversa es $Z(w) = \frac{1}{4\pi i}\frac{1+w}{1-w}$.

Dada una función analítica $f(z)$ en Π^-, mediante la transformación anterior, obtenemos una nueva función analítica $f(Z(w))$ en el disco unidad. Haremos la siguiente notación: $\check{f}(w) = f(Z(w))$.
Nos serán de utilidad los siguientes resultados.

$$W(z) = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2} + 2\pi i z} \tag{0.21}$$

$$W'(z) = \frac{2\pi i}{(\frac{1}{2} + 2\pi i z)^2} = 2\pi i(1 - W(z))^2 \tag{0.22}$$

$$\Im z = \frac{-1}{4\pi} \frac{1 - |w|^2}{|1 - w|^2} \tag{0.23}$$

Dada una sucesión $(w_n)_n$ de números complejos de módulo menor que 1, $w_n \neq 0$ si verifican $\sum_{n=0}^{\infty}(1 - |w_n|) < \infty$, se define el producto de Blaschke para $(w_n)_n$ del siguiente modo:

$$B(w) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{-\bar{w}_n}{|w_n|} \frac{w - w_n}{1 - \bar{w}_n w} \tag{0.24}$$

y se verifica $|B(w)| \leq 1$. Además existe el límite radial de $B(w)$ para casi todo $\theta \in [0, 2\pi]$ y $\lim_{r \to 1} |B(re^{i\theta})| = 1$.
Lo anterior se ha tomado de [GARNETT] II 2.
Considerando la transformación (0.20) obtenemos para una sucesión de puntos $(z_n)_n$ en el semiplano inferior $B(W(z))$, que es el producto de las funciones f_n que aplican z_n en 0 $\bar{z}_n$ en ∞ y $\frac{-i}{4\pi}$ en $|w_n| = |\frac{-\frac{1}{2}+2\pi i z_n}{\frac{1}{2}+2\pi i z_n}|$, así pues

$$B(W(z)) = \Pi_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{4} + 4\pi^2 \bar{z}_n^2}{|\frac{1}{4} + 4\pi^2 \bar{z}_n^2|} \frac{z - z_n}{z - \bar{z}_n} \tag{0.25}$$

y la condición $\sum_{n=0}^{\infty}(1-|w_n|)<\infty$ se transforma en $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-\Im z_n}{1+|z_n|^2}<\infty$ (cuando 0 no es punto de acumulación de $(z_n)_n$ queda $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-\Im z_n}{|z_n|^2}<\infty$).

Sea Ω un dominio regular en $\mathbf{C}$ i.e. Ω coincide con el interior de su clausura, y sea $G(\Omega)$ las funciones holomorfas en Ω tales que $f^{(n)}$ se extiende por continuidad a la clausura de Ω para $n=0,1,2,\cdots$. En el tema IV necesitamos el siguiente teorema para $\Omega=\{w\in\mathbf{C}:|w-\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}\}$:

0.26 **TEOREMA.** *Dada una sucesión $(a_n)_n$de números complejos, existe $g\in G(\Omega)$ verificando $g^{(n)}(0)=a_n$.*

Este teorema se deduce de la proposición 11 en [VALDIVIA].

Necesitaremos los siguientes resultados sobre funciones enteras.
Una función entera se dice de tipo exponencial, si verifica una acotación del tipo $|f(z)|\le Me^{\alpha|z|}$ para ciertas constantes $\alpha, M>0$.
Para una función entera de tipo exponencial f, se define la función indicador como:

$$h:[0,2\pi]\to\mathbf{R}$$
$$h(\theta)=\limsup_{r\to\infty} r^{-1}log|f(re^{i\theta})| \tag{0.27}$$

Usando el siguiente teorema:
La función $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ es entera de tipo exponencial si y sólo si $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!a_n}{z^{n+1}}$ es convergente para algún z finito.
se define el diagrama indicador D de una función entera de tipo exponencial f como la intersección de todos los conjuntos compactos y convexos fuera de los cuales $F(z)$ es prolongable analíticamente.

La función soporte de un conjunto compacto y convexo K se define como:

$$k : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$$
$$k(\theta) = \max_{x+iy \in K} \{x \cos(\theta) + y \operatorname{sen}(\theta)\} \tag{0.28}$$

esto es, $k(\theta)$ es la distancia del origen al punto más lejano de la proyección de K sobre el rayo $arg(z) = \theta$.
Se verifica el siguiente teorema:

0.29 **TEOREMA.** *Si f es una función entera de tipo exponencial, y $h(\theta)$ es su función indicador, entonces $h(-\theta)$ es la función soporte del diagrama indicador de f.*

Es claro por tanto que si $h(\theta) = 0$ cuando $0 \leq \theta \leq \pi$, el diagrama indicador es un segmento del eje imaginario negativo.
Se verifica también el siguiente teorema:

0.30 **TEOREMA.** *Si f es una función entera de orden 1, su tipo es el máximo de $h(\theta)$.*

Todos los anteriores resultados se han tomado de [BOAS] capí tulo 5.

Usaremos en el capítulo 5 los siguientes resultados tomados de [JUNEJA, KAPOOR] 1.3.
Sea f una función analítica en el disco unidad, y sea $T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} log^+ |f(re^{i\theta})| \, d\theta$. Decimos que f tiene orden de Nevanlinna finito si existe $A > 0$ verificando $T(r, f) < (1 - r)^{-A}$ para r suficientemente próximo a 1. Al ínfimo de los A verificando la condición anterior se le llama orden de Nevanlinna de f.
Se verifica el siguiente teorema:

0.31 TEOREMA. *Sea f analítica en D y teniendo orden de Nevanlinna finito $\sigma(f)$. Sean $(a_n)_n$ los ceros de f en D contados de acuerdo a su multiplicidad. Entonces para todo $\epsilon > 0$ se verifica $\sum_n (1-|a_n|)^{\sigma(f)+1+\epsilon} < \infty$.*

La función del ejemplo 5.27 y algunos resultados que en él se utilizan, han sido tomados de [APOSTOL].

Por último, se utiliza el siguiente teorema.

0.32 TEOREMA. *Sean $f, g \in L^p(\mathbf{R})$ con $1 \leq p \leq 2$. Entonces*

$$\int_{\infty}^{\infty} f(t)\hat{g}(-t)\,dt = \int_{\infty}^{\infty} \hat{f}(s)g(-s)\,ds$$

Este teorema se puede ver en [TITCHMARSH] teorema 35 pág. 54, teorema 49 pág. 70 y teorema 75 pág. 104, para $p = 1$, $p = 2$ y $1 < p < 2$ respectivamente.

CAPITULO 1

TRANSFORMADA DE FOURIER DE DISTRIBUCIONES DE SOPORTE POSITIVO

Comenzaremos este primer capítulo, introduciendo el espacio de funciones S^+, restricción a $\mathbf{R}^+$ de los funciones de decrecimiento rápido. Probaremos que es isomorfo a S/A con $A = \{\phi \in S : \text{sop}(\phi) \subset (-\infty, 0]\}$. Consecuentemente, podremos identificar su dual $(S^+)'$ con las distribuciones temperadas de soporte contenido en R^+.

1.1 DEFINICION. *Definimos el espacio S^+ como*

$$S^+ = \{f : [0, +\infty) \to \mathbf{C} \quad | \quad (\exists \varphi \in S)\,(\forall t \geq 0)\,(f(t) = \varphi(t))\}$$

y lo dotamos con la topología que generan las seminormas $\| \cdot \|_{k,n}$ $(k, n \in \mathbf{N})$ *definidas por*

$$\| f \|_{k,n} = \sup_{t \in (0,+\infty)} t^k |f^{(n)}(t)|$$

NOTA. Entre estas seminormas, están incluidas en particular $\|f\|_{0,n} = \sup_{t \in (0,+\infty)} |f^{(n)}(t)|$

1.2 LEMA. *Si $f : (0, +\infty) \to \mathbf{C}$ es de clase C^∞ y para cada $k, n \in \mathbf{N}$ es*

$$\| f \|_{k,n} < +\infty$$

entonces existe una única $\overline{f} \in S^+$ *que prolonga a* f. *Así pues, puede identificarse* S^+ *con el espacio de las* $f : (0, +\infty) \to \mathbf{C}$ *de clase* C^∞ *y tales que*

$$\| f \|_{k,n} < +\infty \qquad \text{para todo } k, n \in \mathbf{N}.$$

DEMOSTRACION

Para cada $n \in \mathbf{N}$ se tiene si $0 < t < y$

$$|f^{(n)}(y) - f^{(n)}(t)| = |(y-t)f^{(n+1)}(x)| \leq \| f \|_{0,n+1} |y - t|$$

así pues, existe $\lim_{t\to 0^+} f^{(n)}(t) \in \mathbf{C}$. Por un teorema de E. Borel [TREVES] pág. 390 existe $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ tal que $g^{(n)}(0) = \lim_{t\to 0^+} f^{(n)}(t)$. Pongamos entonces $\phi(t) = g(t)$ si $t \leq 0$ y $\phi(t) = f(t)$ si $t > 0$. Es claro que ϕ es de clase C^∞ (es fácil comprobar que en 0 también lo es, utilizando el teorema del valor medio) y que $\overline{f}$ definida por ser la restricción de ϕ a $t \geq 0$ prolonga a f.

1.3 TEOREMA. S^+ *es completo y en consecuencia Fréchet.*

DEMOSTRACION

Sea (f_n) de Cauchy en S^+ i.e. para todos los índices m, k $\left(t^m f_n^{(k)}(t)\right)_n$ es de Cauchy uniformemente en $(0, +\infty)$. Entonces $(t^m f_n^{(k)}(t))_n$ converge hacia una función de la forma $t^m f^{(k)}(t)$ para cierta $f : (0, +\infty) \to \mathbf{C}$. También se obtiene que dado $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon)$ tal que $n \geq N(\epsilon)$ implica $|t^m f_n^{(k)}(t) - t^m f^{(k)}(t)| < \epsilon$ por el lema anterior $f \in S^+$ y (f_n) converge a f en S^+.

1.4 COROLARIO. S^+ *es isomorfo a* S/A *donde*

$A = \{\phi \in S : sop(\phi) \subset (-\infty, 0]\}$.

DEMOSTRACION

Defino

$$p : S \to S^+ \text{ como}$$

$$p(\phi) = \phi_{|[0,+\infty)}$$

Obviamente p es continua y sobreyectiva luego también abierta. En consecuencia $\tilde{p} : S/A \to S^+$ es un isomorfismo.

NOTACION

Diremos que $\phi \in S^+ \cap S$ si la función

$$f(t) = \begin{cases} \phi(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

pertenece a S.

1.5 LEMA. $\phi \in S^+ \cap S$ *si y sólo si para todo* $k \in \mathbf{N}$ $\lim_{t \to 0^+} \phi^{(k)}(t) = 0$.

DEMOSTRACION

Trivial, pues al prolongar ϕ a la izquierda haciéndola 0 en $\mathbf{R}^-$, el límite por la izquierda de todas las derivadas será 0, en consecuencia $\lim_{t \to 0^+} \phi^{(k)}(t) = 0$.

Si se cumple la condición, un razonamiento parecido al del lema 1.2 completa la demostración.

1.6 TEOREMA. *El dual de* S^+, *se puede identificar con el espacio de las* *distribuciones temperadas de soporte contenido en* $[0,+\infty)$, *identificando* $u \in (S^+)'$ *con la distribución que aplica* $\phi \in S$ *en* $u(\phi_{|[0,+\infty)})$.

DEMOSTRACION

Hemos visto que

$$p : S \to S^+$$

$$p(\phi) = \phi_{|[0,+\infty)}$$

es un morfismo estricto, luego si $u \in (S^+)'$, $u \circ p$ es una distribución temperada que aplica ϕ en $u(\phi_{|[0,+\infty)})$.

Es claro que $\operatorname{sop}(u \circ p) \subset [0,+\infty)$. La aplicación $u \to u \circ p$ es inyectiva. Veamos que es sobre.

Sea $u \in S'$ tal que $\operatorname{sop}(u) \subset [0,+\infty)$ defino

$$u^* : S^+ \to C$$

$$< u^*, f > = < u, \phi > \text{ donde } \phi \in S \quad y \qquad f = \phi_{|[0,+\infty)}$$

Para probar que está bien definida, basta que probemos $< u, \phi > = 0$ cuando $\phi \in S$ es nula para $t \geq 0$.

Ahora sea $\phi \in S$ tal que $\phi(t) = 0$ cuando $t \geq 0$ y pongamos $\phi_n(t) = \phi(t + \frac{1}{n})$. Obviamente ϕ_n tiende a ϕ en S cuando n tiende a ∞. Por ser $\operatorname{sop}(u) \subset [0,+\infty)$, $< u, \phi_n > = 0$. Se concluye pues que $< u, \phi > = 0$.

1.7 **NOTA**

I) El teorema anterior sigue también de la teoría general de los espacios localmente convexos [HORVATH] pág. 263 teniendo en cuenta el corolario 1.4 y que en la dualidad (S, S') el ortogonal de A está formado por las distribuciones temperadas de soporte contenido en $[0,+\infty)$.

II) En el teorema anterior la definición de u^* equivale al " sentido razonable" que da [VO-KHAC-KOAN] [2] pág. 114 a $< u(t), e^{-2\pi izt} >$.

El conjunto de seminormas

$$p_n(\phi) = \sum_{\alpha,\beta\leq n} \sup_{t\geq 0} |t^\alpha \phi^{(\beta)}(t)|$$

es creciente y definen la topología de S^+, así pues:

1.8 LEMA. *Sea $u : S^+ \to \mathbf{C}$ lineal, entonces $u \in (S^+)'$ si y sólo si existen*

$C \geq 0, \quad n \in \mathbf{N}$ tal que

$$| < u, \phi > | \leq C \sum_{\alpha,\beta\leq n} \sup_{t\geq 0} |t^\alpha \phi^{(\beta)}(t)| \tag{1}$$

para toda $\phi \in S^+$.

Teniendo en cuenta que si $\Im z > 0$, $e^{-2\pi izt} \in S^+$, podemos asociar a cada $u \in (S^+)'$ una función $\tilde{u}(z) =< u(t), e^{-2\pi izt} >$. Esta función, resulta ser analítica en Π^-.

1.9 DEFINICION. *Dado $u \in (S^+)'$ definimos*

$$\Gamma_u = \{\alpha \in R \quad : e^{-\alpha t}u \in (S^+)'\}$$

1.10 TEOREMA. *Si* $u \in (S^+)'$ Γ_u *es una semirrecta (puede ser todo* $\mathbf{R}$*) que contiene a* $[0, +\infty)$.

DEMOSTRACION

[VO-KHAC-KHOAN] [2] pág. 113

1.11 DEFINICION. *Sea* $u \in (S^+)'$ *defino*

$$\tilde{u}(z) = < u(t), e^{-2\pi izt} > \qquad \text{cuando} \qquad -\Im z > \inf \Gamma_u$$

1.12 **NOTA**

a) En la definición anterior $\inf \Gamma_u$ puede ser $-\infty$.

b) Obsérvese que al ser $u \in (S^+)'$ $\tilde{u}(z)$ esta definida al menos en $\Im z < 0$.

1.13 TEOREMA. *Si* $u \in (S^+)'$ *entonces* $\tilde{u}(z)$ *es analítica en*

$\{z \in \mathbf{C} : -\Im z > \inf \Gamma_u\}$ y

$$\tilde{u}^{(k)}(z) = < u(t), (-2\pi it)^k e^{-2\pi izt} >$$

DEMOSTRACION

Por el comentario 1.7 II) y [VO-KHAC-KHOAN] [2] pág. 114.

1.14 TEOREMA. *Si* $u \in (S^+)'$ *entonces para todo* $\phi \in S$

$$< u(t), \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi itz}\phi(x)\,dx >= \int_{-\infty}^{+\infty} < u(t), e^{-2\pi itz} > \phi(x)\,dx$$

siendo $z = x + iy$ *con* $y < 0$.

NOTA

a) $< u(t), \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi itz}\phi(x)\,dx >$ tiene sentido pues

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi itz}\phi(x)\,dx = \hat{\phi}(t)e^{2\pi yt}$$

con $y < 0$ y al ser $\phi \in S$, $\hat{\phi}(t)$ está acotado.

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} < u(t), e^{-2\pi itz} > \phi(x)\,dx$ tiene sentido. En efecto al ser $u \in (S^+)'$, por el lema 1.8 existen $C \geq 0$ y $n \in \mathbf{N}$ tal que

$$| < u, \varphi > | \leq C \sum_{\alpha,\beta \leq n} \sup_{t\geq 0} |t^\alpha \varphi^{(\beta)}(t)|$$

para todo $\varphi \in S^+$

Si $\varphi_0(t) = e^{-2\pi itz}$ $\quad \sup_{t>0} |t^\alpha \varphi_0^{(\beta)}(t)| \leq M_y^\alpha |z|^\beta$ luego

$| < u, \varphi_0 > | \leq P(x)$ para cierto polinomio P. Como $\phi \in S$, $\quad P(x)|\phi(x)|$ es integrable.

DEMOSTRACION (Del teorema)

Sea $B_n = \{x \in \mathbf{R} : \quad |x| \leq n\}$. Defino $F : B_n \to S^+$ por la ecuación $F(x) = \phi(x)e^{-2\pi itz}$.

Como F es continua, B_n es compacto y S^+ es Fréchet , por [RUDIN] [1] pág. 74 existe

$$\xi_n \in S^+ \quad \text{tal que para todo } u \in (S^+)'$$

$$u(\xi_n) = \int_{B_n} < u_t, e^{-2\pi itz} > \phi(x)\,dx$$

tomando en particular $u = \delta_{t_0}$ con $t_0 > 0$ resulta

$$\xi_n(t_0) = \int_{B_n} e^{-2\pi i t_0 x}\phi(x)\,dx$$

Probaremos que $\lim_{n\to\infty}\xi_n(t) = \xi(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{-2\pi i t x}\phi(x)\,dx$ en S^+, esto es, dados $\alpha, \beta \in \mathbf{N}$ $t^\alpha \xi_n^{(\beta)}(t)$ converge a $t^\alpha \xi^{(\beta)}(t)$ uniformemente en $\mathbf{R}^+$. Pero es claro que podemos derivar bajo el signo integral, luego

$$t^\alpha \xi_n^{(\beta)}(t) = t^\alpha \int_{B_n} (-2\pi i x)^\beta e^{-2\pi i t x}\phi(x)\,dx$$

$$t^\alpha \xi^{(\beta)}(t) = t^\alpha \int_{\mathbf{R}} (-2\pi i x)^\beta e^{-2\pi i t x}\phi(x)\,dx$$

queda

$$|t^\alpha \xi_n^{(\beta)}(t) - t^\alpha \xi^{(\beta)}(t)| = |t^\alpha| \cdot |\int_{\mathbf{R}\setminus B_n} (-2\pi i x)^\beta e^{-2\pi i t x}\phi(x)\,dx| \leq \cdots$$

al ser $\phi \in S$ $\lim_{|x|\to\infty}(-2\pi i x + 2\pi y)^{\beta+2}\phi(x) = 0$ luego dado $\epsilon > 0$ existe un N_0 tal que si $|x| > N_0$ entonces

$$|(-2\pi i x)^\beta \phi(x)| < \frac{\epsilon}{4\pi^2(x^2+y^2)}$$

tomando $n > N_0$ queda

$$\cdots \leq |t^\alpha| \cdot |\int_{\mathbf{R}\setminus B_n} \frac{\epsilon}{4\pi^2(x^2+y^2)}\, e^{2\pi t y}\,dx \leq \cdots$$

al ser $y < 0$ y $t > 0$ $|t^\alpha e^{2\pi t y}| < k$ para cierto k

$$\cdots \leq k \int_{\mathbf{R}} \frac{\epsilon}{4\pi^2(x^2+y^2)}\,dx \leq \text{cte}\cdot\epsilon$$

en consecuencia $\lim_{n\to\infty}\xi_n = \xi$ en S^+, luego si $u \in S^+$

$$< u(t), \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i t x}\phi(x)\,dx > = < u, \xi > = \lim_{n\to\infty} < u, \xi_n > =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{B_n} < u(t), e^{-2\pi i t x} > \phi(x)\,dx =$$

$$= \int_{\mathbf{R}} < u(t), e^{-2\pi i t x} > \phi(x)\,dx$$

1.15 LEMA. *Para toda* $\phi \in S$, $\hat{\phi}(t)(e^{2\pi ty}-1)$ *converge en* S^+ a 0 *cuando* y *tiende* a 0^-.

DEMOSTRACION

Habrá que probar, que para todo $\alpha, \beta \in \mathbf{N}$, $t^\alpha(\hat{\phi}^{(\beta)}(t)(e^{2\pi ty}-1))$ converge a 0 uniformemente en $\mathbf{R}^+$ cuando y tiende a 0^-. Ahora

$$d^{(\beta)}(\hat{\phi}(t)(e^{2\pi ty}-1)) = \sum_{k=0}^{\beta} \binom{\beta}{k} \hat{\phi}^{(k)}(t)(e^{2\pi ty}-1)^{(\beta-k)}$$

Si $k < \beta$ como $\hat{\phi} \in S$, $t^\alpha \hat{\phi}^{(k)}(t)$ está acotado y todas las derivadas de $e^{2\pi ty}-1$ convergen a 0 uniformemente en $\mathbf{R}^+$. Para $k = \beta$, $t^\alpha(\hat{\phi}^{(\beta)}(t)(e^{2\pi ty}-1))$ converge uniformemente a 0 en $\mathbf{R}^+$ por ser $\lim_{t\to+\infty} t^\alpha \hat{\phi}^{(\beta)}(t) = 0$.

El siguiente teorema es el resultado más importante de este capítulo. En él se demuestra que la transformada de Fourier de una distribución $u \in (S^+)'$, se puede interpretar como el " valor frontera " de la función $\tilde{u}(z)$ en el siguiente sentido: $\hat{u}$ es el límite en S' de $\tilde{u}(x+iy)$ cuando y tiende a 0^-.

1.16 TEOREMA. *Sea* $u \in (S^+)'$, *definimos*

$$\hat{u}_y : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$$
$$\hat{u}_y(x) = < u(t), e^{-2\pi i t(x+yi)} >$$

para cada $y < 0$. *Entonces*, $\hat{u}_y(x) \in S'$ *para todo* $y < 0$ y $\lim_{y\to 0^-} \hat{u}_y = \hat{u}$ *en* S'.

DEMOSTRACION

Por la nota b del teorema 1.14 si $u \in (S^+)'$ entonces

$$| < u(t), e^{-2\pi it(x+yi)} > | \leq P_y(x)$$

para un cierto polinomio P_y, luego $\hat{u}_y(x) \in S'$.

Resta probar que si $\phi \in S$, entonces $\lim_{y\to 0^-} < \hat{u}_y, \phi > = < \hat{u}, \phi >$ para todo $\phi \in S$.

Ahora

$$< \hat{u}_y, \phi > = \int_{\mathbf{R}} \hat{u}_y(x)\phi(x)\, dx =$$
$$= \int_{\mathbf{R}} < u(t), e^{-2\pi it(x+yi)} > \phi(x)\, dx =$$

usando el teorema 1.14

$$= < u(t), \int_{\mathbf{R}} e^{-2\pi it(x+yi)}\phi(x)\, dx >$$

Como $< \hat{u}, \phi > = < u, \hat{\phi} > = < u(t), \int_{\mathbf{R}} e^{-2\pi itx}\phi(x)\, dx >$ queda

$$< \hat{u}_y, \phi > - < \hat{u}, \phi > =$$
$$= < u(t), \int_{\mathbf{R}} e^{-2\pi itx}\phi(x)(e^{2\pi ty} - 1)\, dx > =$$
$$= < u(t), \hat{\phi}(t)(e^{2\pi ty} - 1) >$$

Se concluye por el lema anterior.

1.17 COROLARIO. *Si $u, v \in (S^+)'$ de manera que $\tilde{u}(z) = \tilde{v}(z)$ en $\Im z < 0$, entonces $u = v$.*

1.18 **EJEMPLOS**

1) $\tilde{\delta} = 1$

En efecto $\tilde{\delta} = < \delta, e^{-2\pi izt} > = 1$

2) $\widetilde{D^k\delta}(z) = (2\pi iz)^k$

En efecto

$$\widetilde{D^k\delta}(z) = < D^k\delta, e^{-2\pi izt} > =$$
$$= (-1)^k < \delta, (-2\pi iz)^k e^{-2\pi izt} > = (2\pi iz)^k$$

3) $\widetilde{\chi_{[0,+\infty)}}(z) = \frac{1}{2\pi iz}$

En efecto

$$\widetilde{\chi_{[0,+\infty)}}(z) = < \chi_{[0,+\infty)}, e^{-2\pi izt} > = \int_0^\infty e^{-2\pi izt}\, dt = \frac{1}{2\pi iz}$$

4) $\widetilde{D^k u}(z) = (2\pi iz)^k \tilde{u}(z)$

Es claro pues

$$< D^k u, e^{-2\pi izt} > = (-1)^k < u(t), (-2\pi iz)^k e^{-2\pi izt} > = (2\pi iz)^k \tilde{u}(z)$$

5) Si $\phi \in S^+$ entonces

$$\widetilde{\phi^{(k)}}(z) = -\sum_{i=1}^{k} (-2\pi iz)^{k-i} \phi^{(i-1)}(0) + (2\pi iz)^k \tilde{\phi}(z)$$

si $\phi^{(k)}$ denota la derivada de ϕ como función.

En efecto, sea $\phi \in S^+$ considerado como elemento de S' y denotemos por

$D^k\phi$ la derivada en S'. Entonces

$$< D^k\phi, \varphi > = (-1)^k < \phi, \varphi^{(k)} >= (-1)^k \int_0^\infty \phi(t)\varphi^{(k)}(t)\, dt = \cdots$$

integrando por partes

$$\cdots = (-1)^k(\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\varphi^{(k-i)}(0)\phi^{(i-1)}(0)$$

$$+ (-1)^k \int_0^\infty \phi^{(k)}(t)\varphi(t)\, dt)$$

$$= (-1)^k < \sum_{i=1}^{k}(-1)^k\phi^{(i-1)}(0)D^{k-i}\delta + (-1)^k\phi^{(k)}, \varphi >$$

Luego $D^k\phi = (\sum_{i=1}^k \phi^{(i-1)}(0)D^{k-i}\delta + \phi^{(k)})$ por 1), 2) y 4)

$$\widetilde{\phi^{(k)}}(z) = (-1)\sum_{i=1}^{k}(2\pi iz)^{k-i}\phi^{(i-1)}(0) + (2\pi iz)^k\tilde{\phi}(z) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{k}(2\pi iz)^{k-i}\phi^{(i-1)}(0) + (2\pi iz)^k\tilde{\phi}(z)$$

6) $\widetilde{\log t}(z) = -\frac{\gamma+\log(2\pi iz)}{2\pi iz}$ con γ la constante de Euler.
Ver [ERDELYI...] [1], pág. 148 (1).

7) $\widetilde{t^\alpha}(z) = \frac{\Gamma\alpha+1}{(2\pi iz)^{1+\alpha}}$ Si $\Re\alpha > -1$.
Ver [ERDELYI...] [1], pág. 137 (1).

En lo que sigue, intentaremos generalizar los resultados anteriores definiendo para cada distribución temperada u, una función analítica en $\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$ cuyo valor frontera, en el mismo sentido antes comentado sea $\hat{u}$. En este caso no habrá unicidad en el sentido de 1.17, es decir, habrá una infinidad de funciones analíticas en $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, asociadas a $u \in S'$, cuyo valor frontera será $\hat{u}$.

1.19 **NOTA**

Análogamente se pueden definir los espacios S^-, $(S^-)'$
y si $u \in (S^-)'$ $\tilde{u}(z) = < u_t, e^{-2\pi i z t} >$ si $\Im z > 0$, definiéndose así una función analítica en el semiplano superior cuyo " valor frontera" sera $\hat{u}$.

1.20 LEMA. *Si $u \in S'$ existen $u^+ \in (S^+)'$ y $u^- \in (S^-)'$ tal que $u = u^+ + u^-$.*

DEMOSTRACION

Si $u \in S'$ existe f continua de crecimiento polinomial, tal que $u = D^k f$. Sea $f^+ = f\chi_{[0,+\infty)}$ y $f^- = f\chi_{[0,-\infty)}$, pongamos $u^+ = D^k f^+$, $u^- = D^k f^-$ y obviamente $u^+ \in (S^+)'$, $u^- \in (S^-)'$ y $u = u^+ + u^-$.

1.21 LEMA. *Si $u \in S'$ y $u = u_1^+ + u_1^-$, $u = u_2^+ + u_2^-$ entonces*

$$u_1^+ = u_2^+ + v \quad y \quad u_1^- = u_2^- - v \qquad \text{siendo} \qquad v = \sum_{finita} \alpha_n D^n \delta$$

DEMOSTRACION

Por las hipótesis, $(u_1^+ - u_2^+) + (u_1^- - u_2^-) = 0$. Sea ϕ verificando sop $(\phi) \subset (0, +\infty)$ entonces:

$$< u_1^+ - u_2^+, \phi > = < u_1^+ - u_2^+, \phi > + < u_1^- - u_2^-, \phi > = 0$$

En consecuencia sop$(< u_1^+ - u_2^+ >) \subset \{0\}$ por lo que

$$u_1^+ = u_2^+ + \sum_{finita} \alpha_n D^n \delta.$$

Ahora se aplica $u_1^- - u_2^- = -(u_1^+ - u_2^+)$ y se concluye el teorema.

1.22 DEFINICION. *Dada $u \in S'$ y una descomposición $u = u^+ + u^-$ con $u^+ \in (S^+)'$ y $u^- \in (S^-)'$ defino:*

$$Fu(z) = \begin{cases} \tilde{u}^+(z) =< u_t^+, e^{-2\pi izt} > & si\ \Im z < 0 \\ \tilde{u}^-(z) =< u_t^-, e^{-2\pi izt} > & si\ \Im z > 0 \end{cases}$$

1.23 DEFINICION. *Un pseudopolinomio es una función $f \in H(\mathbf{C} - \mathbf{R})$ definida por*

$$f(z) = \begin{cases} p(z) & si\ \Im z < 0 \\ -p(z) & si\ \Im z > 0 \end{cases}$$

para cierto polinomio $p(z)$.

1.24 TEOREMA. *Si $u \in S'$ entonces para cada descomposición $u = u^+ + u^-$ con $u^+ \in (S^+)'$ y $u^- \in (S^-)'$ la función Fu verifica*

$$\hat{u} = \lim_{y \to 0+} Fu(x - yi) + Fu(x + yi) \text{ en } S'$$

Además dos cualesquiera Fu se diferencian en un pseudopolinomio.

DEMOSTRACION

Sea $u \in S'$, $u = u^+ + u^-$ y $y > 0$

$$Fu(x - yi) + Fu(x + yi) = \tilde{u}^+(x - yi) + \tilde{u}^-(x + yi)$$

Por teorema 1.16 y nota 1.19 $\tilde{u}^+(x-yi)$ tiende a $\hat{u}^+$ y $\tilde{u}^-(x+yi)$ tiende a $\hat{u}^-$, con lo que $Fu(x-yi)+Fu(x+yi)$ tiende a $u^+ + u^- = \hat{u}$.

Dadas dos descomposiciones, $u = u_1^+ + u_1^-$, $u = u_2^+ + u_2^-$ por el lema 1.21

$$u_1^+ = u_2^+ + \sum_{finita} \alpha_n D^n \delta$$
$$u_1^- = u_2^- - \sum_{finita} \alpha_n D^n \delta$$

Por el ejemplo 1.18 2), si $\Im z > 0$

$$\begin{aligned} Fu_1(z) = \tilde{u}_1^+(z) = \tilde{u}_2^+(z) + \sum_{finita} \alpha_n (2\pi i z)^n = \\ = Fu_2(z) + P(z) \end{aligned}$$

y si $\Im z < 0$

$$\begin{aligned} Fu_1(z) = \tilde{u}_1^-(z) = \tilde{u}_2^-(z) - \sum_{finita} \alpha_n (2\pi i z)^n = \\ = Fu_2(z) - P(z) \end{aligned}$$

En el teorema anterior, dada $u \in S'$ hemos interpretado su transformada de Fourier $\hat{u}$, como valor frontera en un cierto sentido de una función analítica en $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$. Esta idea, aparece ya en [TILLMANN], aunque tanto el enfoque del problema, como la obtención de la función analítica a partir de la distribución son diferentes.

1.25 **NOTA**

a) Si $f \in \mathcal{D}$ se puede definir

$$\tilde{f}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi izt}\,dt$$

y por la demostración del teorema 1.9 $\tilde{f}(z)$ es entera.

b) Análogamente si $u \in \mathcal{E}'$ puedo definir la función entera

$$\tilde{u}(z) =< u, e^{-2\pi izt} > .$$

CAPITULO 2

COEFICIENTES DE FOURIER- LAGUERRE

EN $(t^{\frac{\alpha}{2}}S^+)'$

2.1 **DEFINICION.** *Definimos el espacio* $t^{\frac{\alpha}{2}}S^+ = \{t^{\frac{\alpha}{2}}\phi(t) \;:\; \phi \in S^+\}$. *Y lo dotamos de la topología inducida por* S^+. *Así mismo, los coeficientes de Fourier-Laguerre de un elemento* $u \in (t^{\frac{\alpha}{2}}S^+)'$, *se definen como* $a_n =< u, \mathcal{L}_n^\alpha(t) >$.

NOTA. Si $\alpha = 2k$ con $k \in \mathbf{N}$, entonces $(t^{\frac{\alpha}{2}}S^+)' \cong (S^+)'/B$ donde $B = \{\sum_{n=0}^{k-1}\alpha_n\delta^{(n)} :$ con $\alpha_n \in \mathbf{C}, n = 0, \cdots k\}$.
En efecto, si $\alpha = 2k$, sea $F : (S^+)' \to (t^{\frac{\alpha}{2}}S^+)'$ definida por $< F(u), t^k\phi(t) >=< u, t^k\phi(t) >$. Es claro que F es continua. Además es sobre, pues si $v \in (t^{\frac{\alpha}{2}}S^+)'$, sea $w \in (S^+)'$ definida por $< w, \phi(t) >=< v, t^k\phi(t) >$, y sea u verificando $u = \frac{w}{t^k}$, es claro que $F(u) = v$.
En consecuencia $(t^{\frac{\alpha}{2}}S^+)' \cong (S^+)'/Ker(F)$. Pero si $u \in Ker(F)$, resulta evidente que sop$u \subset \{0\}$ y de aquí, es fácil probar que $Ker(F) = \{\sum_{n=0}^{k-1}\alpha_n\delta^{(n)} :$ con $\alpha_n \in \mathbf{C}$, $n = 0, \cdots k\}$.

Pretendemos en este capítulo, caracterizar los espacios $t^{\frac{\alpha}{2}}S^+$ y $(t^{\frac{\alpha}{2}}S^+)'$ en relación con los coeficientes de Fourier-Laguerre.

Notaremos $\mathcal{L}_n^\alpha(t) = (\frac{n!}{\Gamma(\alpha+n+1)})^{\frac{1}{2}} t^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{t}{2}} L_n^\alpha(t)$ donde $L_n^\alpha(t)$ son los polinomios de Laguerre. Las propiedades básicas de estos polinomios, están resumidas en el tema 0. Es conocida la acotación $|L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}| \leq e^{\frac{t}{2}}$ [WIDDER] pág. 168 . Demostraremos previamente, otras acotaciones que nos serán de utilidad.

2.2 LEMA. *Si* $\alpha < 0$, $t > 0$ *y* $n \in \mathbf{N}$ *se verifica*

$$|L_n^\alpha(t)| \leq e^{\frac{t}{2}} \frac{2^\alpha}{2\pi} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(-\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{1-\alpha}{2})}$$

Más aún si $-2 \leq \alpha \leq -1$ $\quad |L_n^\alpha(t)| \leq 2e^{\frac{t}{2}}$.

DEMOSTRACION

Partimos de la relación

$$\frac{e^{-t\frac{z}{1-z}}}{(1-z)^{1+\alpha}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n L_n^\alpha(t)$$

válida para, $t \in \mathbf{R}$, $|z| < 1$ y $\alpha \neq -1$.

Por la fórmula de Cauchy, se tendrá

$$L_n^\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{e^{-t\frac{z}{1-z}}}{z^{n+1}(1-z)^{1+\alpha}}\, dz$$

donde C_r es una circunferencia de centro el origen, radio r, recorrida en el sentido positivo.

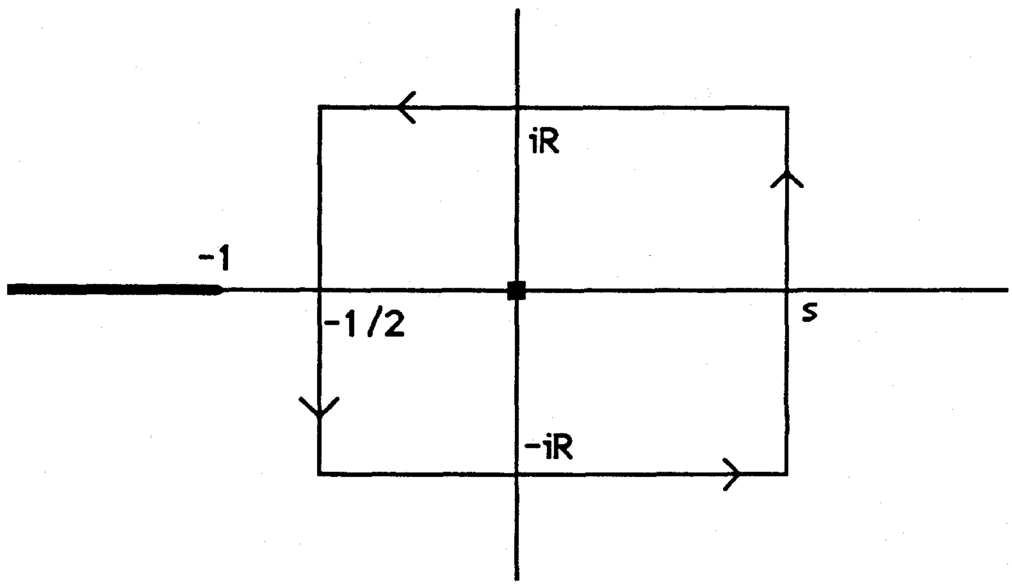
Cambiemos de variable en la integral poniendo $w = \frac{z}{1-z}$ se tiene entonces $z = \frac{w}{1+w}$ $\quad 1 - z = \frac{1}{1+w}$ $\quad dz = \frac{dw}{(1+w)^2}$ y queda

$$L_n^\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'_r} e^{-tw} \frac{(1+w)^{n+\alpha}}{w^{n+1}}\, dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C'_r} e^{-tw} (\frac{1+w}{w})^{n+1} (1+w)^{\alpha-1}\, dw$$

donde C'_r es la circunferencia transformada. Tomando r pequeño, se ve, que podemos tomar como C'_r cualquier circunferencia centrada en $w = 0$ y con radio $r \quad (0 < r < 1)$.

El integrando, puede definirse como función meromorfa en el plano, menos un corte que va desde ∞ hasta $w = -1$ por el eje negativo, con un solo polo en $w = 0$. Así, podemos sustituir C'_r por el borde de un rectángulo de vértices $s \pm iR$, $\quad -\frac{1}{2} \pm iR$ donde $s, R > 0$.



Fijando s, hagamos tender R a ∞. La integral en los segmentos $-\frac{1}{2} \pm iR$ hasta $s \pm iR$ tiende a cero al tender R a∞ pues

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{1}{2}+iR}^{s+iR} e^{-tw}\left(\frac{1+w}{w}\right)^{n+1}(1+w)^{\alpha-1}\,dw\right| \leq \frac{1}{2\pi}e^{\frac{t}{2}}MR^{\alpha-1}\left(\frac{1}{2}+s\right)$$

y como $\alpha < 0$ esto tiende a cero.

La integral $\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{-tw}(\frac{1+w}{w})^{n+1}(1+w)^{\alpha-1}\,dw$ es absolutamente convergente pues haciendo el cambio $s+ix=w$

$$|\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ts-ixt}(\frac{1+s+ix}{s+ix})^{n+1}(1+s+ix)^{\alpha-1}\,idx| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}e^{-ts}\int_{-\infty}^{+\infty} M_n[(1+s)^2+x^2]^{\frac{\alpha-1}{2}}\,dx$$

y al ser $\alpha<0$ la integral es convergente. Como la integral no depende de s, se deduce que vale cero, y queda

$$L_n^\alpha(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{t}{2}-ixt}(\frac{\frac{1}{2}+ix}{-\frac{1}{2}+ix})^{n+1}(\frac{1}{2}+ix)^{\alpha-1}\,dx$$

Así pues

$$|L_n^\alpha(t)| \leq \frac{1}{2\pi}e^{\frac{t}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{1}{4}+x^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}e^{\frac{t}{2}}2^{1-\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+4x^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{2^{1-\alpha}}{2\pi}e^{\frac{t}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+u^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}\frac{1}{2}\,du =$$

$$= \frac{2^{-\alpha}}{2\pi}e^{\frac{t}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+u^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}\,du$$

Usando las tablas [GRADSHTEYN, RYZHIK], pág. 295 (3.251-2) obtenemos

$$|L_n^\alpha(t)| \leq \frac{2^{-\alpha}}{2\pi}e^{\frac{t}{2}}B(\frac{1}{2},\frac{-\alpha}{2}) = \frac{2^{-\alpha}}{2\pi}e^{\frac{t}{2}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{1-\alpha}{2})}$$

Para $-2\leq\alpha\leq-1$ resulta $2^{-\alpha}\leq 4$ y $-\frac{3}{2}\leq\frac{\alpha-1}{2}\leq -1$ quedando

$$|L_n^\alpha(t)| \leq \frac{2}{\pi}e^{\frac{t}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+u^2)^{-1}\,du = 2e^{\frac{t}{2}}$$

2.3 COROLARIO. *Para $\alpha\geq-2$, $t>0$ y $n\in N$ se tiene*

$$|L_n^\alpha(t)| \leq 2\binom{n+[\alpha]+2}{n}e^{\frac{t}{2}}$$

DEMOSTRACION

Dado $\alpha \geq 0$ se verifica $0 \leq \alpha - [\alpha] < 1$ luego $-2 \leq \alpha - [\alpha] - 2 < -1$. Pongamos $\beta = \alpha - [\alpha] - 2$ y consideremos el siguiente cuadro de índices

$$\begin{array}{llll}
(\beta,0) & (\beta,1) & (\beta,2) & \cdots \\
(\beta+1,0) & (\beta+1,1) & (\beta+2,2) & \cdots \\
\cdots & \cdots & & \\
(\alpha,0) & (\alpha,1) & (\alpha,2) & \cdots \\
(\alpha+1,0) & (\alpha+1,1) & (\alpha+1,2) & \cdots
\end{array}$$

Si en la tabla, el corolario fuera cierto para (γ, n), $(\gamma+1, n-1)$ entonces también lo sería para $(\gamma+1, n)$ pues $L_n^{\gamma+1}(t) = L_n^{\gamma}(t) + L_{n-1}^{\gamma+1}(t)$. Luego

$$\begin{aligned}
|L_n^{\gamma+1}(t)| &\leq |L_n^{\gamma}(t)| + |L_{n-1}^{\gamma+1}(t)| \leq \\
&\leq 2\binom{n+[\gamma]+2}{n}e^{\frac{t}{2}} + 2\binom{n-1+[\gamma]+1+2}{n-1}e^{\frac{t}{2}} = \\
&= 2e^{\frac{t}{2}}(\binom{n+[\gamma]+2}{n} + \binom{n+[\gamma]+2}{n-1}) = \\
&= 2e^{\frac{t}{2}}\binom{n+[\gamma]+3}{n}
\end{aligned}$$

Para probar que es válido para (α, n) basta probar que lo es para (β, n) y $(\gamma, 0)$, pero por el lema como $-2 \leq \beta \leq -1$ queda $|L_n^{\beta}(t)| \leq 2e^{\frac{t}{2}} \leq 2\binom{n+[\beta]+2}{n}e^{\frac{t}{2}}$ pues este número combinatorio no se anula ya que $\beta \geq -2$. Y $|L_0^{\gamma}(t)| = 1 \leq 2\binom{0+[\gamma]+2}{0}e^{\frac{t}{2}}$.

Si $-1 \leq \alpha < 0$ se considera $-2 \leq \alpha - 1 < -1$ y se procede como antes.

Si $-2 \leq \alpha < -1$ y se sigue del lema anterior.

Los siguientes lemas técnicos, facilitarán la prueba de 2.6.

2.4 LEMA. *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in s$ *entonces para todo* $\alpha \geq -2, \beta \in \mathbf{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\beta} e^{-\frac{t}{2}} L_n^{\alpha}(t)$ *y sus derivadas convergen uniformemente en compactos de* $(0, +\infty)$. *Si* $\beta \in \mathbf{N}$ *la convergencia es en compactos de* $[0, +\infty)$.

DEMOSTRACION

Tomemos $\beta \in \mathbf{R}$ y $K \subset (0, +\infty)$ compacto. Probaremos que dado $r \in \mathbf{N}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t^{\beta} e^{\frac{-t}{2}} L_n^{\alpha}(t))^{(k)}$ converge uniformemente en K.

Ahora $|L_n^{\alpha}(t)| \leq 2\binom{n+[\alpha]+2}{n} e^{\frac{t}{2}}$ y $(L_n^{\alpha}(t))^{(j)} = (-1)^j L_{n-j}^{\alpha+j}(t)$ en consecuencia, es fácil comprobar que $|(t^{\beta} e^{\frac{-t}{2}} L_n^{\alpha}(t))^{(k)}| \leq P(n)$ para todo $t \in K$ donde P es un cierto polinomio. Como $(a_n) \in s$, $\sum_0^{\infty} |a_n P(n)| < \infty$ y basta aplicar el criterio de la mayorante de Weierstrass.

Si $\beta \in \mathbf{N}$ puedo tomar $K \subset [0, +\infty)$ pues t^{β} y todas sus derivadas están acotadas en el compacto K.

2.5 LEMA. *Sea* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n (1-w)^{\gamma}$ *donde* $w = \frac{-\frac{1}{2}+2\pi i x}{\frac{1}{2}+2\pi i x}$, $x \in R$, $\gamma > 0$ *y* $(a_n) \in s$. *Dado* $j \in \mathbf{N}$ *se verifica que para todo* $k \in \mathbf{N}$ *si* $k > j+1-\gamma$ *entonces* $(x^j f(x))^{(k)} \in L^1(\mathbf{R})$.

DEMOSTRACION

Puesto que $w = \frac{-\frac{1}{2}+2\pi i x}{\frac{1}{2}+2\pi i x}$, $x = \frac{1}{4\pi i} \cdot \frac{1+w}{1-w}$ y $w' = \frac{2\pi i}{(\frac{1}{2}+2\pi i x)^2} = 2\pi i(1-w)^2$ se sigue que $x^j f(x) = \frac{1}{(4\pi i)^j} \cdot \frac{(1+w)^j}{(1-w)^j} \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n (1-w)^{\gamma}$ desarrollando $(1+w)^j$ y reordenando $x^j f(x) = \frac{1}{(1-w)^{j-\gamma}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$ con $(b_n) \in s$. f es indefinidamente diferenciable respecto a x pues w lo es, $|w| = 1$ y $(b_n) \in s$, además podemos derivar término a término. Luego

$$\frac{d}{dx}(x^j f(x)) = \frac{(\gamma-j)w'}{(1-w)^{j-\gamma+1}}\sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n + \frac{1}{(1-w)^{j-\gamma}}\sum_{n=0}^{\infty} n b_n w^{n-1} w' =$$

$$= \frac{(\gamma-j)(1-w)^2}{(1-w)^{j-\gamma+1}}\sum_{n=0}^{\infty} 2\pi i b_n w^n +$$

$$+ \frac{(1-w)}{(1-w)^{j-\gamma}}\sum_{n=0}^{\infty} 2\pi i n b_n w^{n-1}(1-w) = \cdots$$

Reordenando y sumando queda

$$\cdots = (1-w)^{\gamma-j+1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$$

con $(c_n) \in s$.

En consecuencia queda $\frac{d^k}{dx^k}(x^j f(x)) = (1-w)^{\gamma-j+k}\sum_{n=0}^{\infty} d_n w^n$ con $(d_n) \in s$ pero $\sum_{n=0}^{\infty} d_n w^n$ es acotada para $x \in \mathbf{R}$ y $(1-w)^{\gamma-j+k} = (\frac{1}{2}+2\pi i x)^{j-\gamma-k} \in L'$ pues $k-j+\gamma > 1$.

Los siguientes teoremas, son los principales del capítulo. Con ellos, caracterizamos los coeficientes de Fourier-Laguerre en $t^{\frac{\alpha}{2}}$. Así mismo, demostramos la convergencia en dicho espacio de las series de Fourier para el sistema $(\mathcal{L}_n^\alpha(t))_n$ con $\alpha > -1$.

2.6 TEOREMA. *Si* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in s$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathcal{L}_n^\alpha(t)$ *converge en* $t^{\frac{\alpha}{2}} S^+$ *para todo* $\alpha > -1$.

DEMOSTRACION

Sea $\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\frac{\alpha}{2}} \mathcal{L}_n^\alpha(t)$ y $\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathcal{L}_n^\alpha(t)$ por el lema 2.4 tanto ψ como ϕ son de clase C^∞.

Paso 1. *$\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\frac{\alpha}{2}} \mathcal{L}_n^{\alpha}(t)$ converge en $(S^+)'$.*

En efecto sea

$$F : S^+ \rightarrow L^2$$
$$F(\phi) = t^{\frac{\alpha}{2}} \phi$$

obviamente es continua por ser $\alpha > -1$. En consecuencia su traspuesta también lo es, y de aquí la aplicación

$$H : L^2 \rightarrow (S^+)'$$
$$H(f) = t^{\frac{\alpha}{2}} f$$

que es la traspuesta de F salvo una conjugación, como es fácil de comprobar, es continua.

Como $(\mathcal{L}_n^{\alpha}(t))_n$ es un sistema ortonormal en L^2, $\phi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathcal{L}_n^{\alpha}(t)$ converge en L^2 y por tanto $H(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\frac{\alpha}{2}} \mathcal{L}_n^{\alpha}(t) = \psi$ converge en $(S^+)'$.

Paso 2. *Dado $j \in \mathbf{N}$ si $k > j - \alpha$, $t^k \psi^{(j)}$ está acotado en $[0, +\infty)$.*

Por el paso anterior, puedo aplicar transformada de Fourier término a término a

$\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\frac{\alpha}{2}} \mathcal{L}_n^{\alpha}(t)$ (Identifico $(S^+)' = \{u \in S' : \text{sop}\, u \subset [0, +\infty)\}$) quedando:

$$\hat{\psi}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \widehat{t^{\frac{\alpha}{2}} \mathcal{L}_n^{\alpha}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(-\frac{1}{2} + 2\pi i x)^n}{(\frac{1}{2} + 2\pi i x)^{\alpha+n+1}}$$

La fórmula de la transformada de Fourier de $t^{\frac{\alpha}{2}} \mathcal{L}_n^{\alpha}(t)$ se encuentra en (0.14) del capítulo 0.

Sea $b_n = a_n \left(\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}\right)^{\frac{1}{2}}$, $(b_n)_n \in s$ y $w = \frac{-\frac{1}{2}+2\pi i x}{\frac{1}{2}+2\pi i x}$ resultando

$\hat{\psi}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n (1-w)^{\alpha+1}$.

En principio la convergencia es en S', pero como la serie converge uniformemente a una función, esta será distribución temperada y coincide con la suma.

Por el lema 2.5 dado $j \in \mathbf{N}$ si $k > j - \alpha$, $(x^j\hat{\psi}(x))^{(k)} \in L^1(\mathbf{R})$ pero $(x^j\hat{\psi}(x))^{(k)} = (\frac{1}{2\pi i})^j \widehat{(-2\pi i t)^k \psi^{(j)}}(x)$ en consecuencia por [FRIEDLANDER] pág. 103 $(t)^k\psi^{(j)}(t)$ está acotado si $j \in \mathbf{N}$ y $k > j - \alpha$.

Paso 3. *Si* $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{-\frac{\alpha}{2}} \mathcal{L}_n^\alpha(t)$ *entonces* $f \in S^+$.

En efecto $f(t) = t^{-\alpha}\psi(t)$. Habrá que probar que existen constantes $M_{k,j}$, $k, j \in \mathbf{N}$ tales que $t^k|f^{(j)}(t)| < M_{k,j}$ en $[0, +\infty)$. Por el lema 2.4 y la definición de $\mathcal{L}_n^\alpha(t)$ resulta que $t^k f^{(j)}(t)$ está acotado en $[0, 1]$. Veamos en $[1, +\infty)$. Si $k > j - \alpha - 1$

$$\begin{aligned} t^k|f^{(j)}(t)| &= t^k|(t^{-\alpha}\psi(t))^{(j)}| = \\ &= t^k|\sum_{m=0}^{j}\binom{j}{m}(t^{-\alpha})^{(m)}\psi^{(j-m)}(t)| = \\ &= t^{k+1}|\sum_{m=0}^{j}\binom{j}{m}\frac{1}{t}(t^{-\alpha})^{(m)}\psi^{(j-m)}(t)| \leq \\ &\leq \sum_{m=0}^{j} M_m t^{k+1}|\psi^{(j-m)}(t)| \leq \text{cte} \end{aligned}$$

La última desigualdad por el Paso 2, pues si $k > j - \alpha - 1$ entonces $k + 1 > j - \alpha \geq (j - m) - \alpha$ cuando $m = 0, \cdots, j$.
Si $k \leq j - \alpha + 1$ tomando $\gamma \geq 0$ tal que $k + \gamma > j - \alpha - 1$ por lo anterior $|t^k f^{(j)}(t)| = |\frac{1}{t^\gamma} t^{k+\gamma} f^{(j)}(t)| \leq M$ en $[1, +\infty)$.

Paso 4. *La aplicación* $G : s \to t^{\frac{\alpha}{2}} S^+$ *definida como*

$$G((a_n)_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathcal{L}_n^\alpha(t)$$

es continua.

En primer lugar, la aplicación está bien definida por el Paso 3. Si aplicamos el teorema del grafo cerrado para espacios Fréchet, bastará probar que si

$(a_n^m)_n$ tiende a $(a_n)_n$ cuando m tiende a ∞ en s y $G((a_n^m)_n) = \varphi_m$ con $(\varphi_m) \to \varphi$ en $t^{\frac{\alpha}{2}}S^+$ entonces $\varphi = G((a_n)_n)$.
Ahora por ser $(\mathcal{L}_n^\alpha(t))_n$ ortonormal se tiene $a_n^m = \int_0^\infty \varphi_m \mathcal{L}_n^\alpha(t)\,dt$. Es claro que $a_n = \lim_{m\to\infty} a_n^m = \lim_{m\to\infty} \int_0^\infty \varphi_m(t)\mathcal{L}_n^\alpha(t)\,dt = \cdots$. Como $\varphi_m \to \varphi$ en $t^{\frac{\alpha}{2}}S^+$ se tiene que $|\varphi_m(t)| \leq t^{\frac{\alpha}{2}}M$, en consecuencia $|\varphi_m(t)\mathcal{L}_n^\alpha(t)| \leq Mt^{\frac{\alpha}{2}}\mathcal{L}_n^\alpha(t) \in L'$ pues $\alpha > -1$, aplico teorema de la convergencia dominada de Lebesgue y obtengo

$$\cdots = \int_0^\infty \lim_{m\to\infty} \varphi_m(t)\mathcal{L}_n^\alpha(t)\,dt = \int_0^\infty \varphi(t)\mathcal{L}_n^\alpha(t)\,dt.$$

Luego $G((a_n)_n) = \varphi$.
Para probar el teorema, basta observar que $(a_n)_n = \sum_{n=0}^\infty a_n e_n$ en s con $e_n = (\delta_{n,m})_m$ por el Paso 4, G es continua, luego

$$G((a_n)_n) = \sum_{n=0}^\infty a_n G(e_n) = \sum_{n=0}^\infty a_n \mathcal{L}_n^\alpha(t)$$

y la convergencia es en $t^{\frac{\alpha}{2}}S^+$.

2.7 **TEOREMA.** *Sea* $\phi \in t^{\frac{\alpha}{2}}S^+$ *y* $a_n = \int_0^\infty \phi(t)\mathcal{L}_n^\alpha(t)\,dt$. *Entonces* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in s$ *y* $\phi(t) = \sum_{n=0}^\infty a_n\mathcal{L}_n^\alpha(t)$ *en* $t^{\frac{\alpha}{2}}S^+$ *para todo* $\alpha > -1$.

DEMOSTRACION

Consideremos $\mathcal{U} = tD^2 + D - \frac{t}{4} - \frac{\alpha^2}{4t} + \frac{\alpha+1}{2}$. Es fácil comprobar que $\mathcal{U} : t^{\frac{\alpha}{2}}S^+ \to t^{\frac{\alpha}{2}}S^+$. Ahora bien, utilizando la propiedad (0.10) del tema 0 de los polinomios de Laguerre obtenemos $\mathcal{U}(\mathcal{L}_n^\alpha(t)) = -n\mathcal{L}_n^\alpha(t)$. En consecuencia

$$a_n(\mathcal{U}(\phi)) = \int_0^\infty \mathcal{U}(\phi)\mathcal{L}_n^\alpha(t)\,dt = -n\int_0^\infty \phi\mathcal{L}_n^\alpha(t)\,dt = -na_n(\phi)$$

y en general $a_n(\mathcal{U}^k(\phi)) = (-n)^k a_n(\phi)$. Puesto que $\mathcal{U}(\phi) \in t^{\frac{\alpha}{2}}S^+ \subset L^2$ y $(\mathcal{L}_n^\alpha(t))_n$ es ortonormal en L^2, se deduce $\sum_0^\infty n^{2k}|a_n|^2 < \infty$ para todo $k \in \mathbf{N}$ y de aquí $\sum_0^\infty n^k |a_n| < \infty$, con lo que $(a_n)_n \in s$. Para concluir aplicar el teorema anterior.

Dualizando los resultados anteriores, obtenemos la caracterización de los coeficientes de Fourier-Laguerre en $(t^{\frac{\alpha}{2}}S^+)'$, así como la convergencia en dicho espacio de las series de Fourier para el sistema $(\mathcal{L}_n^\alpha(t))n$ con $\alpha > -1$.

2.8 **COROLARIO.** *Sea* $\alpha > -1$. *Si* $u \in (t^{\frac{\alpha}{2}}S^+)'$ *entonces* $u = \sum_{n=0}^\infty a_n \mathcal{L}_n^\alpha(t)$ *en* $(t^{\frac{\alpha}{2}}S^+)'$ *con* $a_n =< u, \mathcal{L}_n^\alpha(t) >$ *y* $(a_n)_n \in s'$, *y recíprocamente si* $(a_n)_n \in s'$ *entonces existe* $u \in (t^{\frac{\alpha}{2}}S^+)'$ *con* $u = \sum_{n=0}^\infty a_n \mathcal{L}_n^\alpha(t)$ *en* $(t^{\frac{\alpha}{2}}S^+)'$.

2.9 **COROLARIO.** $t^{\frac{\alpha}{2}}S^+$ *es isomorfo a* s *y* $(t^{\frac{\alpha}{2}}S^+)'$ *es isomorfo a* s'.

DEMOSTRACION

Considero la función $G : s \to t^{\frac{\alpha}{2}}S^+$ definida en el teorema 2.7 . Basta ver que es biyectiva. Ahora bien es inyectiva por ser $(\mathcal{L}_n^\alpha(t))_n$ un sistema ortonormal y es sobreyectiva por el teorema 2.7.

Particularizando para el caso $\alpha = 0$ obtenemos:

2.10 **TEOREMA.** *Si* $\phi \in S^+$ *y* $a_n = \int_0^\infty \phi L_n(t) e^{-\frac{t}{2}}\, dt$ *entonces*

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}$ *y* $(a_n)_n \in s$. *Recíprocamente si* $(a_n)_n \in s$ *existe* $\phi \in S^+$ *tal que* $\phi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}$. *En consecuencia* S^+ *es isomorfo a* s.

2.11 TEOREMA. *Si* $u \in (S^+)'$ *y* $a_n = < u, L_n(t)e^{-\frac{t}{2}} >$ *entonces*

$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}$ y $(a_n)_n \in s'$. Recíprocamente si $(a_n)_n \in s'$ existe $u \in (S^+)'$ tal que $u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}$. En consecuencia $(S^+)'$ es isomorfo a s'.

2.12 EJEMPLOS

1) $\delta = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}$

En efecto pues $< \delta, L_n(t)e^{-\frac{t}{2}} >= 1$

2) $D^k\delta = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{m=0}^{k}(\frac{1}{2})^{k-m}\binom{k}{m}\binom{n}{m})L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}$

Veámoslo

$$
\begin{aligned}
< D^k\delta, L_n(t)e^{-\frac{t}{2}} > &= (-1)^k < \delta, (L_n(t)e^{-\frac{t}{2}})^{(k)} >= \\
&= (-1)^k < \delta, \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} (L_n(t))^{(m)}(e^{-\frac{t}{2}})^{(k-m)} >= \\
&= (-1)^k < \delta, \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} (\frac{-1}{2})^{k-m}(-1)^m L_{n-m}^m(t)e^{-\frac{t}{2}} > \\
&= \sum_{m=0}^{k} (\frac{1}{2})^{k-m} \binom{k}{m}\binom{n}{m}
\end{aligned}
$$

3) $\chi_{[0,+\infty)}(t) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}$

En efecto

$$a_n =< \chi_{[0,+\infty)}(t), L_n(t)e^{-\frac{t}{2}} >=$$
$$= \int_0^\infty L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}\, dt = (-1)^n 2$$

4) $\delta(t-a) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(a)e^{-\frac{a}{2}} L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}$ si $a \geq 0$.
Análogo a 1).

5) $e^{-at} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2a+1}(\frac{2a-1}{2a+1})^n L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}$ si $\Re(a) \geq 0$.
En efecto, partiendo de la fórmula (0.11) para $\alpha = 0$

$$\frac{1}{1-w} e^{\frac{w}{w-1}t} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n L_n(t)$$

válida para $t \in \mathbf{R}$ y $|w| \leq 1$, y haciendo $a = \frac{-w-1}{2(w-1)}$ (sería $w = \frac{2a-1}{1+2a}$), se obtiene para $a \in \mathbf{C}$ con $\Re a \geq 0$:

$$\frac{2a+1}{2} e^{-at+\frac{1}{2}t} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{2a-1}{2a+1})^n L_n(t)$$

i.e.

$$e^{-at} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2a+1}(\frac{2a-1}{2a+1})^n L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}$$

(También se puede deducir de la fórmula (0.12)).

6) $\frac{t^a}{\Gamma(1+a)} e^{-\frac{t}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{a}{n} L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}$ para $\Re a > -1$.
Ver [DITKINE-PROUDNIKOV] pág. 323. También [PROUDNIKOV-BRYCHOV] pág. 463 5).

7) $(\log t + \gamma)e^{-\frac{t}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}$ con γ la constante de Euler.
Ver [DITKINE-PROUDNIKOV] pág. 312. También [PROUDNIKOV-BRYCHOV] pág. 469 1).

8) $J_0(2\sqrt{at})e^{-\frac{t}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} e^{-a} L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}$ para $a, t > 0$.
Ver [DITKINE-PROUDNIKOV] pág. 326.

9) $t^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(\sqrt{at}) = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n e^{-\frac{a}{2}} a^{\frac{\alpha}{2}} L_n^\alpha(a) L_n^\alpha(t) e^{-\frac{t}{2}}$ para $\alpha > -1$ y $a > 0$. Ver [LEBEDEV] pág. 83.

10) $e^{\frac{t}{2}} \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}\, du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} L_n(t) e^{-\frac{t}{2}}$.
Ver [DITKINE-PROUDNIKOV] pág. 326

11) $K_0(\frac{t}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} L_n(t) e^{-\frac{t}{2}}$.
Ver [DITKINE-PROUDNIKOV] pág. 328.

12) $\frac{1}{2} J_0(\sqrt{at}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n(a) e^{-\frac{a}{2}} L_n(t) e^{-\frac{t}{2}}$ para $a, t > 0$.
Ver [LEBEDEV] pág. 83.

13) $\frac{1}{1-z} e^{-\frac{x+t}{2}\frac{1+z}{1-z}} I_0(\frac{2}{1-z}\sqrt{atz}) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) e^{-\frac{x}{2}} z^n L_n(t) e^{-\frac{t}{2}}$ para $|z| \leq 1$, $z \neq 1$ y $x, t > 0$.

Ver [LEBEDEV] pág. 78. Para $|z| = 1$ se obtiene al ser $(L_n(t)e^{-\frac{t}{2}} z^n)_n \in s'$ para $x > 0$ fijo.

14) $\frac{te^{\frac{t}{2}}}{e^{at}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{k+1}{a^{k+2}} \binom{n}{k} \zeta(k+2)) L_n(t) e^{-\frac{t}{2}}$ si $\Re a \geq \frac{1}{2}$ y ζ es la función zeta de Riemann.

En efecto,

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^\infty \frac{te^{\frac{t}{2}}}{e^{at}-1} L_n(t) e^{-\frac{t}{2}}\, dt = \int_0^\infty \frac{t}{e^{at}-1} L_n(t)\, dt = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} \int_0^\infty \frac{t^{k+1}}{e^{at}-1}\, dt = (1) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} \frac{1}{a^{k+2}} \Gamma(k+2) \zeta(k+2) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{k+1}{a^{k+2}} \binom{n}{k} \zeta(k+2)
\end{aligned}$$

Para (1) ver [GERRETSEN-SANSONE] pág. 363.

En el capítulo siguiente, se mostrará otro método para calcular los coeficientes de Fourier-Laguerre para una distribución de $(S^+)'$, con lo que se darán algunos ejemplos más de desarrollos.

El siguiente teorema caracteriza los coeficientes de Fourier-Laguerre de un cierto subconjunto de funciones de S^+.

2.13 **TEOREMA.** *Sea* $\phi \in S^+$ *y* $a_n = \int_0^\infty \phi(t)L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}\,dt$. *Entonces* $\phi \in S^+ \cap S$ *si y sólo si* $(a_n)_n \in s$ *y para todo* $k \in \mathbf{N}$ $\sum_{n=0}^\infty n^k a_n = 0$.

DEMOSTRACION

Se tiene $< D^k\delta, \phi >= (-1)^k\phi^{(k)}(0)$ como por 1.5 $\phi \in S^+ \cap S$ si y sólo si $\lim_{t\to 0^+} \phi^{(k)}(t) = 0$ para todo $k \in \mathbf{N}$ otenemos que $\phi \in S^+ \cap S$ si y sólo si $< D^k\delta, \phi >= 0$ para todo $k \in \mathbf{N}$. Pero por 2.10, 2.11, 2.12 2) si $\phi(t) = \sum_{n=0}^\infty a_n L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}$ entonces

$$< \delta, \phi >= \sum_{n=0}^\infty a_n$$

...

...

$$< D^k\delta, \phi >= \sum_{n=0}^\infty (\sum_{m=0}^k (\frac{1}{2})^{k-m}\binom{k}{m}\binom{n}{m})a_n =$$

$$= \sum_{m=0}^k \sum_{n=0}^\infty ((\frac{1}{2})^{k-m}\binom{k}{m}\binom{n}{m})a_n$$

Teniendo en cuenta que $\binom{n}{m}$ es un polinomio en n de grado m, es fácil concluir por inducción que $\sum_{n=0}^\infty n^k a_n = 0$.

Los desarrollos en serie de los elementos de $(S^+)'$, permiten generalizar a este espacio, de forma muy simple, algunos operadores integrales definidos para funciones. Veánse los siguientes ejemplos:

2.14 NOTA. Algunos autores ([ERDELYI..] [3] pág. 3) definen la transformada de Hankel de orden 0 de una función, como

$$\mathcal{H}_0(f)(x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty f(t)J_0(\sqrt{xt})\,dt \text{ para } x > 0 \qquad (1)$$

Formalmente, si f admite un desarrollo $f(t) = \sum_{n=0}^\infty a_n L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}$, como por 2.12 11) $\frac{1}{2}J_0(\sqrt{at}) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n L_n(a)e^{-\frac{a}{2}} L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}$, al ser $(L_n(t)e^{-\frac{t}{2}})_n$ un sistema ortonormal, resulta $\mathcal{H}_0(f)(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n a_n L_n(x)e^{-\frac{x}{2}}$. Esto justifica la siguiente definición.

2.15 DEFINICION. *Definimos la transformada de Hankel de orden 0 en $(S^+)'$ como:*

$$\mathcal{H}_0 : (S^+)' \to (S^+)'$$

$$\mathcal{H}_0(u) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n a_n L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}$$

si $u = \sum_{n=0}^\infty a_n L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}$ con $a_n = < u, L_n(t)e^{-\frac{t}{2}} >$.

Nótese que en particular para S^+ la transformada es de la forma (1). Teniendo en cuenta 2.10 y 2.11 , de forma trivial se tiene:

2.16 TEOREMA. *La transformada de Hankel es un isomorfismo de* $(S^+)'$ *en* $(S^+)'$, *de* S^+ *en* S^+ *y de* L^2 *en* L^2. *Además,* $\mathcal{H}_0^2 = id.$.

Análogamente, y teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{1-z}e^{-\frac{x+t}{2}\frac{1+z}{1-z}}I_0\left(\frac{2}{1-z}\sqrt{atz}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)e^{-\frac{x}{2}}z^n L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}$$

para $|z| \leq 1$, $z \neq 1$ y $x, t > 0$ se puede definir un operador $\mathcal{I}_z$ para $|z| = 1$, $z \neq 1$

$$\mathcal{I}_z : (S^+)' \to (S^+)'$$

$$\mathcal{I}_z(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}$$

si $a_n =< u, L_n(t)e^{-\frac{t}{2}} >$, que es un isomorfismo, pues la aplicación de s' en s' que envia $(a_n)_n$ en $(a_n z^n)_n$ lo es.

Obsérvese, que si z es una raiz n-sima de la unidad, el operador verifica $\mathcal{I}_z^n = id.$.

Así mismo si en 2.12 9) hacemos $\alpha = \frac{1}{2}$ resulta

$$t^{\frac{1}{4}}J_{\frac{1}{2}}(\sqrt{at}) = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n e^{-\frac{a}{2}}a^{\frac{1}{4}}L_n^{\alpha}(a)L_n^{\alpha}(t)e^{-\frac{t}{2}}$$

pero $J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\operatorname{sen} z$, luego es el desarrollo de $(\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{4}}\operatorname{sen}\sqrt{at}$ y queda

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\operatorname{sen}\sqrt{at}}{\sqrt{a}} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n L_n^{\frac{1}{2}}(a)e^{-\frac{a}{2}}L_n^{\frac{1}{2}}(t)e^{-\frac{t}{2}}$$

Así pues obtenemos que el operador integral

$$\varphi(t) \to (T\varphi)(a) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\operatorname{sen}\sqrt{at}}{\sqrt{a}}\varphi(t)\,dt$$

es un isomorfismo del espacio $t^{\frac{1}{4}}S^+$ que es su propio inverso. Además, puede extenderse a un isomorfismo de $(t^{\frac{1}{4}}S^+)'$.

CAPITULO 3

CARACTERIZACION DE LAS TRANSFORMADAS DE FOURIER DE DISTRIBUCIONES TEMPERADAS DE SOPORTE POSITIVO

El objeto de este capítulo, es obtener una caracterización del tipo [RUDIN] [1] 7.22, 7.23 (ver capítulo 0), de las funciones analíticas definidas en el capítulo 1 a partir de las distribuciones temperadas de soporte positivo. Consideraremos la transformación bilineal $W(z) = \frac{-\frac{1}{2}+2\pi iz}{\frac{1}{2}+2\pi iz}$, (ver capítulo 0) que envia $\Pi^- = \{z \in \mathbf{C} : \Im z \leq 0\}$ en $D = \{w \in \mathbf{C} : |w| \leq 1\}$. Dada una función $f(z)$ analítica en Π^-, denotamos a $g(w) = f(Z(w))$ con $w \in D$ por $\check{f}(w)$. Así, dada $u \in (S^+)'$, obtendremos dos funciones analíticas asociadas, la $\tilde{u} =< u(t), e^{-2\pi izt} >$, definida en el capítulo 1 y $\check{u}(w) =< u, e^{-2\pi iZ(w)t} >$. Se obtienen pues, los cuatro espacios siguientes que pretendemos caracterizar:

3.1 DEFINICION. *Definimos los siguientes espacios :*

$$A(\Pi^-) = \{f \in H(\Pi^-) | \quad (\exists \phi \in S^+) \quad (f(z) = \int_0^{+\infty} \phi(t) e^{-2\pi izt}\, dt)\}$$
$$A'(\Pi^-) = \{f \in H(\Pi^-) | \quad (\exists u \in (S^+)') \quad (f(z) = \tilde{u}(z) =< u, e^{-2\pi izt} >)\}$$
$$A(D) = \{g \in H(D) | \quad (\exists f \in A(\Pi^-)) \quad (g(w) = \check{f}(w))\}$$
$$A'(D) = \{g \in H(D) | \quad (\exists f \in A'(\Pi^-)) \quad (g(w) = \check{f}(w))\}$$

La introducción de los espacios $A(D)$ y $A'(D)$ queda justificada al ser su caracterización inmediata, proporcionarnos un método para el cálculo de los coeficientes de Fourier-Laguerre en $(S^+)'$ y servirnos de puente para caracterizar los espacios $A(\Pi^-)$ y $A'(\Pi^-)$.
El siguiente teorema es fundamental para la caracterización de $A(D)$, $A'(D)$, pues relaciona los coeficientes de Fourier-Laguerre de $u \in (S^+)'$ con la función $\breve{u}(w)$.

3.2 **TEOREMA.** *Si* $u \in (S^+)'$ *entonces*

$\breve{u}(w) = (1-w)\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ *con* $a_n =< u(t), L_n(t)e^{-\frac{t}{2}} >$

DEMOSTRACION

Por 2.11 $u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}$ con convergencia en $(S^+)'$ entonces

$$\tilde{u}(z) =< u(t), e^{-2\pi i z t} > =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n < L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}, e^{-2\pi i z t} >=$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{+\infty} L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}e^{-2\pi i z t}\,dt =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{-\frac{1}{2}+2\pi i z}{\frac{1}{2}+2\pi i z}\right)^n \frac{1}{\frac{1}{2}+2\pi i z}$$

Haciendo $w = \frac{-\frac{1}{2}+2\pi i z}{\frac{1}{2}+2\pi i z}$ queda $\breve{u}(w) = (1-w)\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ y como $(a_n)_n \in s'$ por 2.11 el segundo miembro de la igualdad define una función analítica en D.

El anterior teorema proporciona un método para calcular los coeficientes de Fourier-Laguerre de una distribución temperada de soporte positivo. En efecto, una vez calculado $\tilde{u}(z)$, obtenemos $\breve{u}(w)$ mediante la transformación W. Entonces los coeficientes de Fourier-Laguerre de u, serán los coeficientes del desarrollo en serie de potencias de $\frac{\breve{u}(w)}{(1-w)}$. Ilustramos este método con algunos ejemplos.

EJEMPLOS

1) Por 1.18 6) $\widetilde{\log t}(z) = -\frac{\gamma+log(2\pi i z)}{2\pi i z}$

Haciendo $z = \frac{1}{4\pi i}\frac{1+w}{1-w}$ resulta

$$(log t)\breve{}(w) = -\frac{\gamma + \log(\frac{1}{2}\frac{1+w}{1-w})}{\frac{1}{2}\frac{1+w}{1-w}} = (1-w)(\frac{-2\gamma + 2\log(2\frac{1-w}{1+w})}{1+w}) =$$

$$= (1-w)(\frac{2(\log 2 - \gamma) + 2\log(\frac{1-w}{1+w})}{1+w}) =$$

$$= (1-w)(2(\log 2 - \gamma) + 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^{2n+1}}{2n+1})\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n =$$

$$= (1-w)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[2(\log 2-\gamma) + 4\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\frac{1}{2k+1}]w^n$$

en consecuencia por 3.2

$$\log t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[2(\log 2-\gamma) + 4\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\frac{1}{2k+1}]L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}$$

2) Por 1.18 7) $\widetilde{t^{\alpha}}(z) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2\pi i z)^{\alpha+1}}$

Haciendo $z = \frac{1}{4\pi i}\frac{1+w}{1-w}$ resulta

$$(t^{\alpha})\breve{}(w) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\frac{1}{2}\frac{1+w}{1-w})^{\alpha+1}} = \Gamma(\alpha+1)2^{\alpha+1}(1-w)(1-w)^{\alpha}(1+w)^{-1-\alpha} =$$

$$= (1-w)\Gamma(\alpha+1)2^{\alpha+1}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}(-w)^n\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1-\alpha}{n}w^n =$$

$$= (1-w)\Gamma(\alpha+1)2^{\alpha+1}\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{n-k}\binom{\alpha+k}{k}]w^n$$

y de aquí

$$t^{\alpha} = \Gamma(\alpha+1)2^{\alpha+1}\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{n-k}\binom{\alpha+k}{k}]L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}$$

3.3 LEMA. *Sea* $g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ *con* $g \in H(D)$ *tal que para todo* $m \leq k$ $g^{(m)}(z)$ *está acotado,* $k \geq 2$. *Entonces para todo* $m \leq k-2$ $\sum_{n=0}^{\infty} n^m |a_n| < \infty$.

DEMOSTRACION

Trivial pues si $m \leq k-2$ se tiene

$$g^{(m+2)}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m-1)a_n w^{n-m-2}$$

como $g^{(m+2)}(w)$ está acotado, $|n(n-1)\cdots(n-m-1)a_n| \leq M$ de donde se deduce que $|n^m a_n| < \frac{\text{cte}}{n^2}$ y por tanto $\sum_{n=0}^{\infty} n^m |a_n| < \infty$.

Como consecuencia de la caracterización de los coeficientes de Fourier-Laguerre de $(S^+)'$ obtenida en le capítulo 2, caracterizamos de forma inmediata los espacios $A(D)$ y $A'(D)$.

3.4 TEOREMA. *Son equivalentes*

1) $g \in A(D)$.

2) *Existen* $(a_n)_n \in s$ *tal que* $g(w) = (1-w)\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$

3)*Para todo* $n \in \mathbb{N}$ $g^{(n)}(w)$ *está acotada en* D *y* $\lim_{w\to 1_{w\in D}} g(w) = 0$.

DEMOSTRACION

1) $\Leftrightarrow$ 2) Trivial por 2.10 y teorema 3.2

2) $\Rightarrow$ 3) Trivial pues al ser $(a_n)_n \in s$ $\sum_{n=0}^{\infty} n^k |a_n| < \infty$ para todo k y obviamente $\lim_{w\to 1_{w\in D}} g(w) = 0$.

3) $\Rightarrow$ 2) Por el lema 3.3 si $g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ y verifica 3) entonces $(a_n)_n \in s$. Como $\lim_{w\to 1_{w\in D}} g(w) = 0$ y $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$ por el teorema de Tauber $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$ por el lema 0.17 a) (para $a = 1$) del capítulo 0 obtenemos que la sucesión $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ está en s, así pues $g(w) = (1-w)\sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$ con $(b_n)_n \in s$.

3.5 TEOREMA. *Son equivalentes*

1) $g \in A'(D)$.

2) *Existen* $(a_n)_n \in s'$ *tal que* $g(w) = (1-w)\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$

3) *Existe* $f \in H^{\infty}(D)$ *tal que* $g(w) = f^{(k)}(w)$ *para cierto* $k \in \mathbb{N}$.

4) *Existe* $C > 0$ *y* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $|g(w)| \leq \frac{C}{(1-|w|)^k}$ con $w \in D$.

DEMOSTRACION

1) $\Leftrightarrow$ 2) Trivial por 2.11 y teorema 3.2.

2) $\Rightarrow$ 3) Sea $g(w) = (1-w)\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$ y obviamente $(b_n)_n \in s'$ i. e. existe $\alpha > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n| < \alpha(n+1)^k$.

Sea $f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(n+k+2)(n+k+1)\cdots(n+1)} w^{n+k+2}$ obviamente $f^{(k+2)}(w) = g(w)$ y $|\frac{b_n}{(n+k+2)(n+k+1)\cdots(n+1)}| \leq \frac{|b_n|}{(n+1)^{k+2}} \leq \frac{\alpha}{(n+1)^2}$ luego f está acotada.

3) $\Rightarrow$ 2) Trivial

2) $\Leftrightarrow$ 4) Lema 0.16 del capítulo 0.

Utilizando la caracterización de $A(D)$y $A'(D)$, obtenemos la de $A(\Pi^-)$ y $A'(\Pi^-)$.

3.6 TEOREMA. *Son equivalentes:*

1) $f \in A(\Pi^-)$

2) *Existen* $(P_n(z))_{n\in\mathbf{N}}$ *con* $P_n(z)$ *un polinomio de grado* n, $P_0(z) = 0$ *tal que* $g_n(z) = (2\pi i z)^n f(z) - P_n(z)$ *verifica :*

$$|g_n^{(k)}(z)| \leq \frac{M_{n,k}}{(1+|z|)^{k+1}} \tag{1}$$

DEMOSTRACION

1) $\Rightarrow$ 2) Puesto que $f \in A(\Pi^-)$ existe $\phi \in S^+$ tal que $f(z) = \int_0^{+\infty} \phi(x)e^{-2\pi i z x}\,dx$ de donde integrando por partes obtenemos:

$$(2\pi i z)^n f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \phi^{(k)}(0)(2\pi i z)^{n-k-1} + \int_0^{+\infty} \phi^{(n)}(x)e^{-2\pi i z x}\,dx$$

Sea $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \phi^{(k)}(0)(2\pi i z)^{n-k-1}$ y $g_n(z) = \int_0^{+\infty} \phi^{(n)}(x)e^{-2\pi i z x}\,dx$. Ahora $g_n^{(k)}(z) = \int_0^{+\infty}(-2\pi i x)^k \phi^{(n)}(x)e^{-2\pi i z x}\,dx$. Sea $\psi(x) = (-2\pi i x)^k \phi^{(n)}(x)$ por ser $\phi \in S^+$ es claro que $\psi \in S^+$ luego integrando por partes

$$(2\pi i z)^{k+1} g_n^{(k)}(z) = \sum_{j=0}^{k} \psi^{(j)}(0)(2\pi i z)^{k-j} + \int_0^{+\infty} \psi^{(k+1)}(x)e^{-2\pi i z x}\,dx$$

y teniendo en cuenta que $\psi^{(j)}(0) = 0$ para $j = 0, 1, \cdots, k-1$ se tiene:

$$(2\pi i z)^{k+1} g_n^{(k)}(z) = \psi^{(k)}(0) + \int_0^{+\infty} \psi^{(k+1)}(x)e^{-2\pi i z x}\,dx$$

de donde $|(2\pi i z)^{k+1} g_n^{(k)}(z)| \leq M_{n,k}$. Como obviamente $g_n^{(k)}(z)$ esta acotado resulta $|g_n^{(k)}(z)| \leq \frac{M_{n,k}}{(1+|z|)^{k+1}}$.

2) $\Rightarrow$ 1) Probaremos que $\check{f} \in A(D)$ i. e. por 3.4 habrá que probar que si $\check{f}(w) = (1-w)\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ entonces, $(a_n)_n \in s$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$. Se tiene:

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{2} + 2\pi i z)^n f(z) &= \sum_{k=0}^{n} b_k (2\pi i z)^k f(z) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} b_k P_k(z) + \sum_{k=0}^{n} b_k g_k(z) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} c_k (\frac{1}{2} + 2\pi i z)^k + h_n(z)
\end{aligned}$$

Por (1) es claro que $|h_n^{(k)}(z)| \leq \frac{H_{n,k}}{(1+|z|)^{k+1}}$ (2). Haciendo $w = \frac{-\frac{1}{2}+2\pi i z}{\frac{1}{2}+2\pi i z}$ obtengo $(1-w)^{-n}\check{f}(w) = \sum_{k=0}^{n} c_k (1-w)^{-k} + \check{h}_n(w)$ i. e. $\check{f}(w) = \sum_{k=0}^{n} c_k (1-w)^{n-k} + (1-w)^n \check{h}_n(w)$ y en consecuencia tomando m suficientemente grande a_m coincide con los coeficientes del desarrollo en serie de $(1-w)^{n-1}\check{h}_n(w)$. Probaremos que $(1-w)^{n-1}\check{h}_n(w)$ tiene sus n primeras derivadas acotadas. Pero

$$(1-w)^{n-1}\check{h}_n(w) = (\frac{h_n(z)}{(\frac{1}{2} + 2\pi i z)^{n-1}})\check{}(w) = \check{r}(w)$$

con $r(z) = \frac{h_n(z)}{(\frac{1}{2}+2\pi i z)^{n-1}}$. Ahora

$$\begin{aligned}
|\frac{d^k}{dz^k} r(z)| &= |\sum_{j=0}^{k} c_j \frac{h_n^{(j)}(z)}{(\frac{1}{2} + 2\pi i z)^{k+n-j-1}}| \leq (2) \\
&\leq \sum_{j=0}^{k} d_j \frac{H_{n,j}}{1+|z|^{j+1}} \frac{1}{|\frac{1}{2} + 2\pi i z|^{k+n-j-1}} \leq \\
&\leq \mathrm{cte}|1-\mathrm{w}|^{\mathbf{k+n}}
\end{aligned}$$

donde la constante depende de n y k, pero no de z o w.

Por otro lado

$$|\frac{d^\beta}{dw^\beta}z^\alpha| = |\frac{d^\beta}{dw^\beta}[(\frac{1}{4\pi i}\frac{1+w}{1-w})^\alpha]| \leq cte\frac{1}{|1-w|^{\alpha+\beta}}$$

Por la regla de la cadena, [SCHWATT] pág. 12 7, (ver 0.19 capítulo 0)

$$|\frac{d^\beta}{dw^\beta}\check{r}(w)| = |\sum_{k=1}^{\beta}\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{\alpha=1}^{k}(-1)^\alpha\binom{k}{\alpha}z^{k-\alpha}\frac{d^\beta}{dw^\beta}z^\alpha\frac{d^k}{dz^k}r(z)| \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\beta}\frac{1}{k!}\sum_{\alpha=1}^{k}C_{k,\alpha}\frac{1}{|1-w|^{k-\alpha}}\frac{1}{|1-w|^{\beta+\alpha}}|1-w|^{k+n} =$$
$$= cte|1-w|^{n-\beta}$$

en consecuencia si $\beta \leq n$ $\frac{d^\beta}{dw^\beta}\check{r}(w)$ está acotado. Por el lema 3.3 $\sum_{n\in\mathbf{N}} m^\beta|a_m| < +\infty$ si $\beta \leq n-2$ y variando $n \in \mathbf{N}$ resulta $(a_m) \in s$. Probemos que $\sum_{m=0}^{\infty} a_m = 0$. Para $n = 0$ (1) queda $|f(z)| \leq \frac{M_0}{1+|z|}$ luego $\lim_{w\to 1}\check{f}(w) = 0$ como $(a_m)_m \in s$ $\lim_{m\to\infty} ma_m = 0$ por el teorema de Tauber $\sum_{m=0}^{\infty} a_m = 0$.

3.7 TEOREMA. *Son equivalentes:*

1) $f \in A'(\Pi^-)$

2) *Existe* $n, k \in \mathbf{N}$ *y* $M > 0$ *tales que* $|f(z)| \leq M(1+|z|^2)^k\frac{1}{(|\Im z|)^n}$ *si* $\Im z < 0$.

DEMOSTRACION

1) $\Rightarrow$ 2) Si $f \in A'(\Pi^-)$ existe $u \in (S^+)'$ tal que $f(z) =< u(t), e^{-2\pi izt} >$. Ahora como $u \in (S^+)'$ existe $M > 0$ y $N \in \mathbf{N}$ tales que

$$| < u, \phi > | \leq M\sum_{m,n\leq N}\sup_{t>0}|t^m\phi^{(n)}(t)|$$

para todo $\phi \in S^{+}$. Tomando $\phi(t) = e^{-2\pi izt}$ queda

$$
\begin{aligned}
| < u(t), e^{-2\pi izt} > | \leq& \\
&\leq M \sum_{m,n\leq N} \sup_{t>0} |t^m(-2\pi iz)^n e^{-2\pi izt}| = \\
&= M \sum_{m,n\leq N} \sup_{t>0} |-2\pi iz|^n t^m e^{2\pi \Im zt} \leq \cdots
\end{aligned}
$$

como el supremo se alcanza para $t = -\frac{m}{2\pi\Im z}$ resulta

$$\cdots \leq M \sum_{m,n\leq N} |-2\pi iz|^n \left(-\frac{m}{2\pi\Im z}\right)^m e^{-m} \leq \mathrm{cte}(1+|z|^2)^k \frac{1}{(|\Im z|)^n}$$

2)$\Rightarrow$ 1) Probaremos que $\check{f}(w) \in A'(D)$. Para ello tenemos en cuenta que como $z = \frac{1}{4\pi i}\frac{1+w}{1-w}$ se tiene $|z| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-|w|}$ si $|w| < 1$ o lo que es lo mismo si $\Im z < 0$. También es $\Im z = -\frac{1-|w|^2}{4\pi|1-w|^2}$. En consecuencia

$$
\begin{aligned}
|\check{f}(w)| = |f(z)| \leq M(1+|z|^2)^k \frac{1}{(|\Im z|)^n} \leq& \\
&\leq M 4\pi\left(1 + \frac{1}{4\pi^2(1-|w|)^2}\right)^k \frac{|1-w|^2}{1-|w|^2} \leq \mathrm{cte}\left(\frac{1}{1-|w|}\right)^{2k+1}
\end{aligned}
$$

y ahora basta aplicar teorema 3.5 4.

La condición anterior aparece en [TILLMANN] para caracterizar las funciones analíticas en $H(\mathbf{C}^n\backslash\mathbf{R}^n)$ cuyo valor frontera (en el sentido comentado en el capítulo 1, que es el mismo del siguiente teorema) es una distribución temperada en $\mathbf{R}^n$. La forma en que [TILLMANN] obtiene a partir de la distribución temperada la función analítica como ya comentamos en el capítulo 1 es diferente a como la obtenemos nosotros. El resultado de [TILLMANN] para $n = 1$, se obtiene a partir de nuestros resultados en el siguiente teorema.

3.8 **TEOREMA.** *$u \in S'$ si y sólo si existe $f \in H(\mathbf{C}\setminus\mathbf{R})$ verificando $|f(z)| \leq M(1+|z|^2)^k \frac{1}{(|\Im z|)^n}$ para ciertos $M>0$, $n,k \in \mathbf{N}$ tal que $u = \lim_{y\to 0^+} f(x-yi)+f(x+yi)$ (1) en S'. Más aún, si para $u \in S'$ existen dos funciones f,g verificando (1) estas se diferencian en un pseudopolinomio.*

DEMOSTRACION

$\Rightarrow$) Si $u \in S'$ es claro que $\check{\hat{u}} \in S'$. Aplicando el lema 1.20 a $v = \check{\hat{u}}$, obtenemos v^+ y v^-, con $v^+, \check{v}^- \in (S^+)'$. Basta aplicar el teorema 3.7 a $\tilde{v}^+$ y $\tilde{\check{v}}^-$ y el teorema 1.24.

$\Leftarrow$) Por teorema 3.7, existe $u_1 \in (S^+)'$ y $u_2 \in (S^+)'$ tal que $\tilde{u}_1(z) = f(z)$ si $\Im z < 0$ $\tilde{u}_2(z) = f(z)$ si $\Im z > 0$. Sea $v = u_1 + u_2$ y $u = \tilde{v}$ por teorema 1.24 $u = \lim_{y\to 0^+} f(x-yi)+f(x+yi)$. Sea $u \in S'$ y f,g verificando (1). Sean u_1, u_2, v_1, v_2 tales que $u_1, v_1 \in (S^+)'$, $u_2, v_2 \in (S^-)'$ con $\tilde{u}_k(z) = f(z)$, $\tilde{v}_k(z) = f(z)$ si $(-1)^k \Im z > 0, k = 1,2$ y $u = u_1 + u_2$ $v = v_1 + v_2$. Por verificar f,g (1) es claro que $u = v$ y por el teorema 1.24 f,g se diferencian en un pseudopolinomio.

A continuación, utilizamos algunos resultados del capítulo 2 y el teorema 3.2 para obtener condiciones necesarias y suficientes para la prolongación analítica de $\tilde{u}(z)$ con $u \in (S^+)'$.

3.9 **TEOREMA.** *Sea $u \in (S^+)'$, $a_n = < u, L_n(t)e^{-\frac{t}{2}} >$ entonces:*

a) Existe f analítica en $\mathbf{C}\setminus\{\frac{i}{4\pi}\}$ (inclusive en ∞) tal que $f(z) = \tilde{u}(z)$ en $\Im z < 0$ si y sólo si existe $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ y $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n - \alpha|} = 0$.

b) Existe f analítica en $\mathbf{C} \setminus B(\frac{i}{4\pi}, \beta)$, (inclusive en ∞), siendo $0 < \beta < \frac{1}{4\pi}$, tal que $f(z) = \tilde{u}(z)$ en $\Im z < 0$ si y sólo si existe $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ y existe $a > 1, \gamma > 0$ tales que $|a_n - \alpha| < \gamma a^{-n}$.

c) Si existe f entera no constante tal que $f(z) = \tilde{u}(z)$ en $\Im z < 0$ entonces $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$.

DEMOSTRACION

a) Si existe f analítica en $\mathbf{C}\setminus\{\frac{i}{4\pi}\}$ (inclusive en ∞) tal que $f(z) = \tilde{u}(z)$ en $\Im z < 0$ entonces $\check{f}(w)$ es entera pues $\frac{i}{4\pi}$ va al infinito en la transformación. Como $\check{f}(w) = (1-w)\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ resulta $\check{f}(w) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})w^n$ y de aquí $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1}) < \infty$ como $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1}) = -a_0 + \lim_{n\to\infty} a_n$, es claro que existe $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$. Como $\check{f}$ es entera, se sigue que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ tine en $w = 1$ un polo de orden 1, de aquí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n - \frac{\gamma}{1-w}$ es entera donde γ es el residuo de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ en $w = 1$, por lo que

$$\gamma = \lim_{w\to 1}(1-w)\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = \lim_{w\to 1} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})w^n = \alpha$$

Queda pues para $|w| < 1$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n - \frac{\alpha}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - \alpha)w^n$ y como está función es entera $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n - \alpha|} = 0$.

Para probar el recíproco, basta demostrar que $\check{u}(w)$ es entera, pero por las hipótesis $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - \alpha)w^n$ es entera, luego $(1-w)\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - \alpha)w^n$ también, pero $(1-w)\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - \alpha)w^n = (1-w)\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n - \alpha$ y en consecuencia $\check{u}(w)$ es entera.

b) Análogo al anterior.

c) Por ser f entera no constante $z = \infty$ es una singularidad para $f(z)$ luego $w = 1$ es una singularidad para $\check{f}(w)$ y en consecuencia para $\check{u}(w)$, como $\check{u}(w) = (1-w)\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$, $w = 1$ es la única singularidad para $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ por lo que $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$.

En lo que sigue, utilizaremos resultados anteriores para dar una definición equivalente del producto de convolución en $(S^+)'$ de una forma muy simple.

3.10 **LEMA.** *Si* $u, v \in (S^+)'$ *entonces* $\widetilde{u * v}(z) = \tilde{u}(z)\tilde{v}(z)$.

DEMOSTRACION

Sabemos que $u * v \in (S^+)'$ ([VO-KHAC-KHOAN] pág. 115). Ahora

$$\begin{aligned}\widetilde{u * v}(z) &=< (u * v((t), e^{-2\pi izt} >= \qquad (1)\\ &=< u(x), < v(t), e^{-2\pi iz(t+x)} >>= \\ &=< u(x), e^{-2\pi izx}, < v(t), e^{-2\pi izt} >>= \\ &=< u(x), e^{-2\pi izx} >< v(t), e^{-2\pi izt} >= \\ &= \tilde{u}(z)\tilde{v}(z)\end{aligned}$$

El paso (1) está justificado pues $< v(t), e^{-2\pi iz(t+x)} >= e^{-2\pi izx} < v(t), e^{-2\pi izt} >$ está en S_x^+.

3.11 **DEFINICION.** *Sean* $u, v \in (S^+)'$, $u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(t) e^{-\frac{t}{2}}$ *y* $v = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(t) e^{-\frac{t}{2}}$, *definimos la distribución* $u \bar{*} v \in (S^+)'$ *como:*

$$u \bar{*} v = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}(b_k - b_{k-1})) L_n(t) e^{-\frac{t}{2}}$$

($b_{-1} = 0$*).*

NOTA

Por el lema 0.18 del tema 0 y el teorema 2.11 $u \bar{*} v \in (S^+)'$.

La elección de los coeficientes de $u \bar{*} v$ es la conveniente para que $(u \bar{*} v)\check{}(w) = \check{u}(w)\check{v}(w)$.

3.12 TEOREMA. *Si $u, v \in (S^+)'$ entonces $u \bar{*} v = u * v$.*

DEMOSTRACION

Por el corolario 1.17 bastará probar que $\widetilde{u \bar{*} v}(z) = \widetilde{u * v}(z)$. Ahora

$$
\begin{aligned}
(u \bar{*} v)\check{}(w) &= \\
&= (1-w)\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}(b_k - b_{k-1})\Big)w^n = \\
&= (1-w)\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n (1-w)\sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n = \\
&= \check{u}(w)\check{v}(w)
\end{aligned}
$$

Luego $\widetilde{u \bar{*} v}(z) = \tilde{u}(z)\tilde{v}(z)$ por el lema anterior $\widetilde{u * v}(z) = \tilde{u}(z)\tilde{v}(z)$ luego $u \bar{*} v = u * v$.

Finalizamos este capítulo generalizando el teorema 3.2 para distribuciones de soporte compacto, aunque no tengan soporte en $\mathbf{R}^+$.

3.13 TEOREMA. *Sea $u \in \mathcal{E}'$ y $a_n =< u, L_n(t)e^{-\frac{t}{2}} >$. Entonces:*

a) $\check{u}(w) = (1-w)\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$

b) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$.

DEMOSTRACION

a) Teniendo en cuenta la definición de $\check{u}(w)$ obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\check{u}(w) = \tilde{u}(Z(w)) = \tilde{u}\Big(\frac{1}{4\pi i}\frac{1+w}{1-w}\Big) &=< u(t), e^{-2\pi t(\frac{1}{4\pi i}\frac{1+w}{1-w})} >= \\
&=< u(t), e^{-\frac{1}{2}t\frac{1+w}{1-w}} >=< u(t), e^{-\frac{1}{2}t(1+\frac{2w}{1-w})} >= \\
&=< u(t)e^{-\frac{t}{2}}, e^{-t\frac{w}{1-w}} >= (1-w) < u(t)e^{-\frac{t}{2}}, \frac{1}{1-w}e^{-t\frac{w}{1-w}} >
\end{aligned}
$$

Pero si $|w| < 1$ por (0.11) del capítulo 0 $\frac{1}{1-w}e^{-t\frac{w}{1-w}} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n L_n(t)$ y la serie converge uniformemente en compactos (de R para w fijo) asi como todas sus derivadas, pues:

$$\frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{1}{1-w}e^{-t\frac{w}{1-w}}\right) = \frac{(-w)^k}{(1-w)^{k+1}}e^{-t\frac{w}{1-w}} = (-w)^k \sum_{n=0}^{\infty} w^n L_n^{(k)}(t)$$

y

$$\frac{d^k}{dt^k}\left(\sum_{n=0}^{\infty} w^n L_n(t)\right) = \sum_{n=k}^{\infty} w^n (-1)^k L_{n-k}^{(k)}(t) = (-w)^k \sum_{n=k}^{\infty} w^{n-k} L_{n-k}^{(k)}(t) =$$
$$= (-w)^k \sum_{n=0}^{\infty} w^n L_n^{(k)}(t)$$

está justificado derivar término a término pues $\sum_{n=0}^{\infty} w^n L_n^{(k)}(t)$ es convergente uniformemente en compactos. En consecuencia:

$$\breve{u}(w) = (1-w)\sum_{n=0}^{\infty} < ue^{-\frac{t}{2}}, L_n(t) > w^n = (1-w)\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n.$$

b) Se deduce por un razonamiento análogo al hecho en 3.9 c).

CAPITULO 4

COEFICIENTES DE FOURIER-LAGUERRE EN UN DETERMINADO ESPACIO DE FUNCIONES

Nos planteamos estudiar en este capítulo, los coeficientes de Fourier-Laguerre en el espacio de funciones más amplio donde sea posible definirlos. A este espacio lo denotaremos X. Dada una función $f[0,+\infty) :\longrightarrow \mathbf{C}$, para que tengan sentido los coeficientes de Fourier-Laguerre, es necesario y suficiente que para todo $n \in \mathbf{N}$, $f(t)L_n(t)e^{-\frac{t}{2}} \in L^1([0,+\infty))$, en consecuencia el espacio X se puede definir como:

4.1 DEFINICION.

a) *Definimos el espacio X como:*

$$X = \cap_{n=0}^{\infty}(1+t^2)^{-n}e^{\frac{t}{2}}L^1[0,+\infty)$$

y lo dotamos con la topología inducida por las normas
$\|f\|_n = \int_0^{+\infty} |f(t)|(1+t^2)^n e^{-\frac{t}{2}}\, dt \; n \in \mathbf{N}$.
b) *Definimos el espacio Y como $Y = \cup_{n=0}^{\infty} Y_n$ donde $Y_n = (1+t^2)^n e^{-\frac{t}{2}} L^\infty[0,+\infty)$ con la topología generada por la norma $\|f\| = \|(1+t^2)^{-n}e^{\frac{t}{2}}f(t)\|_\infty$. A Y lo dotamos de la topología final para $i_n : Y_n \to Y$.*

Introducimos en la definición anterior el espacio Y, pues pretendemos probar que es isomorfo al dual fuerte de X.

4.2 LEMA. *X es un espacio de Fréchet.*

DEMOSTRACION

Bastará probar que es completo. Para ello, sea (f_n) de Cauchy en X, i.e. dado $k \in \mathbf{N}$ $((1+t^2)^k e^{-\frac{t}{2}} f_n(t))_n$ es de Cauchy en $L^1[0,+\infty)$. Sea $g_k(t) = \lim_{n\to\infty}(1+t^2)^k e^{-\frac{t}{2}} f_n(t)$ probaremos que $(1+t^2)^{-k} g_k = g_0$. En efecto

$$\int |(1+t^2)^{-k} g_k(t) - g_0(t)|\, dt \leq$$

$$\leq \int |(1+t^2)^{-k} g_k(t) - e^{-\frac{t}{2}} f_n(t)|\, dt + \int |e^{-\frac{t}{2}} f_n(t) - g_0(t)|\, dt =$$

$$= \int (1+t^2)^{-k} |g_k(t) - (1+t^2)^k e^{-\frac{t}{2}} f_n(t)|\, dt + \int |e^{-\frac{t}{2}} f_n(t) - g_0(t)|\, dt$$

tomando n suficientemente grande conseguimos $\int |(1+t^2)^{-k} g_k(t) - g_0(t)|\, dt < \epsilon$ y en consecuencia $e^{\frac{t}{2}} g_0(t) \in X$ siendo además $e^{\frac{t}{2}} g_0(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ en X.

En el siguiente teorema damos un primer paso para probar que el dual fuerte de X es Y.

4.3 TEOREMA. *Los elementos de X' se pueden identificar con los elementos de Y.*

DEMOSTRACION

Defino $G : Y \rightarrow X'$ por medio de $< G(f), g >= \int f(x)g(x)\,dx$. Obviamente $G(f) \in X'$ y G es inyectiva. Veamos que es sobreyectiva. Sea $u \in X'$ i.e. $u : X \rightarrow \mathbf{C}$ continua, en consecuencia acotada en un entorno de 0 i. e. existen n, ϵ tales que u es acotada en $V(n,\epsilon) = \{x \in X : \|x\|_n < \epsilon\}$. Consideremos en X la topología inducida por la norma $\|\|_n$ entonces $u : X \rightarrow \mathbf{C}$ es continua pues está acotada en $V(n,\epsilon)$. Considerando a X como subespacio de $(1+t^2)^{-n}e^{\frac{t}{2}}L^1$ por el teorema de Hahn-Banach, existe $\bar{u} \in ((1+t^2)^{-n}e^{\frac{t}{2}}L^1)' = (1+t^2)^n e^{-\frac{t}{2}}L^\infty$ que prolonga a u, claramente $\bar{u} \in Y$ y obviamente $G(\bar{u}) = u$.

4.4 **NOTA.**

I) A X' lo dotamos de la topología fuerte $\beta(X', X)$. Entonces $G : Y \rightarrow X'$ definida en el teorema anterior es continua.

Demostración

Es suficiente probar que para todo $n \in \mathbf{N}$ $\quad G \circ i_n : Y_n \rightarrow X'$ es continua. Pero la aplicación

$$j_n : X \rightarrow (1+t^2)^{-n}e^{\frac{t}{2}}L^1[0,+\infty)$$
$$j_n(f) = f$$

es claramente continua. en consecuencia su traspuesta también lo es, pero:

$${}^t j_n : (1+t^2)^n e^{-\frac{t}{2}}L^\infty[0,+\infty) \rightarrow X' \quad < {}^t j_n(\phi), f >= \int \phi(x)f(x)\,dx =$$

$=< G(\phi), f >$ i.e. ${}^t j_n = G \circ i_n$.

II) La parte final del capítulo estará destinada a probar que G es un isomorfismo.

4.5 DEFINICION. *Denominamos tranformación de Laguerre (L) a:*

$$\mathcal{L} : X(oY) \to \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$$
$$\mathcal{L}(f) = (\int_0^{+\infty} f(t)L_n(t)e^{-\frac{t}{2}}\,dt)_{n\in\mathbf{N}}$$

Obviamente $\mathcal{L}(f)$ tiene sentido tanto si $f \in X$ como si $f \in Y$.

4.6 **NOTA**

I) $\mathcal{L} : X \to \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ no es inyectiva.
Basta tomar $f(t) = e^{-t^{\frac{1}{4}}}\mathrm{sen}(t^{\frac{1}{4}})$ y comprobar que $\mathcal{L}(f) = 0$. ([WIDDER] pág. 126)
II) $\mathcal{L} : Y \to \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ si es inyectiva, por ser $Y \subset L^2$ y $(L_n(t)e^{-\frac{t}{2}})_n$ ortonormal.

Probaremos que la transformación de Laguerre es sobreyectiva de X en $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. Antes, haremos algunas observaciones.

4.7 **NOTA**

I) Dado $f \in X$ es claro que para $\Im z \leq -\frac{1}{4\pi}$, $f(t)e^{-2\pi izt} \in L^1[0,+\infty)$ en consecuencia puedo definir $\tilde{f}(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-2\pi izt}\,dt$ si $\Im z \leq -\frac{1}{4\pi}$ y claramente por 1.13 es analítica en $\Im z < -\frac{1}{4\pi}$.
II) Al hacer la transformación $Z(w) = \frac{1}{4\pi i}\frac{1+w}{1-w}$ obtengo a partir de la $\tilde{f}(z)$ definida antes una función $\check{f}(w) = \tilde{f}(z(w))$ definida en $\{w \in \mathbf{C} : |w - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}\} \setminus \{1\}$ y analítica en su interior.

4.8 LEMA.

a) Sea $\phi \in S^+$ *y* $f(t) = \phi(t)e^{\frac{t}{2}}$ *(claramente* $f \in X$*). Entonces*
a.*1)* $\breve{f}(w)$ *y todas sus derivadas estan acotadas en* $\{w \in \mathbf{C} : |w - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}\}$
a.*2)*$\lim_{w\to 1} \breve{f}(w) = 0$.
b) Recíprocamente si $g(w)$ *analítica en* $\{w \in \mathbf{C} : |w - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}\}$*, tiene todas sus derivadas acotadas y* $\lim_{w\to 1} g(w) = 0$*, existe* $\phi \in S^+$ *tal que* $(\phi(t)e^{\frac{t}{2}})\breve{}(w) = g(w)$.

DEMOSTRACION

a) Efectivamente, sea $\phi \in S^+$ y $f(t) = \phi(t)e^{\frac{t}{2}}$. Sea

$$g(z) = \tilde{f}(z - \frac{i}{4\pi}) = \int_0^{+\infty} \phi(t)e^{\frac{t}{2}}e^{-2\pi i(z-\frac{i}{4\pi})t}\,dt = \tilde{\phi}(z)$$

en consecuencia $g \in A_z$ y por tanto $\breve{\phi} \in A_w$. Sea $h \in H(\{u \in \mathbf{C} : |u - \frac{1}{2}| \le \frac{1}{2}\})$ definida por $h(u) = \breve{\phi}(3 - \frac{4}{u+1})$ (está bien definida pues $w = 3 - \frac{4}{u+1}$ transforma $|u - \frac{1}{2}| \le \frac{1}{2}$ en $|w| \le 1$) es claro por 3.4 que h y todas sus derivadas están acotadas y $\lim_{u\to 1} h(u) = \lim_{w\to 1} \breve{g}(w) = 0$ pero

$$h(u) = \breve{g}(w(u)) = g(-\frac{1}{4\pi i}\frac{w+1}{w-1}) = g(-\frac{1}{4\pi i}\frac{4 - \frac{4}{u+1}}{2 - \frac{4}{u+1}}) =$$
$$= \tilde{f}(-\frac{1}{4\pi i}\frac{4u}{2u-2} - \frac{i}{4\pi}) = \tilde{f}(-\frac{1}{4\pi i}\frac{u+1}{u-1}) = \breve{f}(u)$$

b) Teniendo en cuenta que $u = \frac{4}{3-w} - 1$ transforma $|w| \le 1$ en $|u - \frac{1}{2}| \le \frac{1}{2}$ y $\frac{d^n u}{dw^n}$ está acotado en $|w| \le 1$ para todo $n \in \mathbf{N}$, se procede análogamente.

Del siguiente teorema se deduce inmediatamente, como corolario, que la transformada de Laguerre de X en $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ es sobre.
En la demostración del teorema usaremos de forma fundamental, el siguiente resultado:

Sea $\Omega = \{w \in \mathbf{C} : |w - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}\}$ y sea $\mathcal{G}(\Omega)$ el espacio de funciones analíticas en Ω tales que $f^{(n)}$ se extiende por continuidad a la clausura de Ω para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Entonces dada una sucesión cualquiera de números complejos $(a_n)_n$, existe $g \in \mathcal{G}(\Omega)$ verificando $\lim_{w \to 0} g^{(n)}(w) = a_n$.

Este teorema se deduce de la proposición 11 en [VALDIVIA].

4.9 **TEOREMA.** *Dada $(a_n)_n$ cualquiera, existe $\phi \in S^+$ tal que $\int_0^{+\infty} \phi(t) L_n(t)\, dt = a_n$.*

DEMOSTRACION

Sea la sucesión $b_n = n!a_n - (n-1)!a_{n-1}$ si $n \geq 1$ y $b_0 = a_0$. Considero el espacio $\mathcal{G}(\Omega)$, tomando $c_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ por el comentario anterior existe una función f en ese espacio tal que $\lim_{w \to 0} f^{(n)}(w) = c_n$ para todo $n \geq 0$. Sea $g(w) = (1-w)f(w)$. Es claro que $\lim_{w \to 1} g(w) = 0$ y $\lim_{w \to 0} g^{(n)}(w) = b_n$. Además, $g \in \mathcal{G}(\Omega)$ y en consecuencia $g^{(n)}$ está acotado en $\{w \in \mathbf{C} : |w - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}\}$. Por el lema anterior existe $\phi \in S^+$ tal que $g(w) = (\phi e^{\frac{t}{2}})\check{}(w)$. Probemos que $a_n = \int_0^{+\infty} \phi(t) L_n(t)\, dt$.

$$
\begin{aligned}
g(w) &= \int_0^{+\infty} \phi(t) e^{\frac{t}{2}} e^{-2\pi i t \frac{1}{4\pi i} \frac{1+w}{1-w}}\, dt = \\
&= \int_0^{+\infty} \phi(t) e^{-t \frac{w}{1-w}}\, dt = \\
&= (1-w) \int_0^{+\infty} \phi(t) \frac{1}{1-w} e^{-t \frac{w}{1-w}}\, dt = \\
&= (1-w) \int_0^{+\infty} \varphi(t, w)\, dt
\end{aligned}
$$

Por (0.11) (para $\alpha = 0$), $\varphi(t,w) = \phi(t)\sum_{k=0}^{\infty} L_k(t)w^k$, formalmente resulta

$$g^n(w) = -n\int_0^{+\infty} \phi(t) \sum_{k=n-1}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+2)L_k(t)w^{k-n+1}\,dt+$$
$$+(1-w)\int_0^{+\infty} \phi(t)\sum_{n=k}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)L_k(t)w^{k-n}\,dt$$

y

$$g^{(n)}(0) = -n\int_0^{+\infty} \phi(t)(n-1)!L_{n-1}(t)\,dt + \int_0^{+\infty} \phi(t)n!L_n(t)\,dt$$

y como $g^{(n)}(0) = b_n$ se deduce que $a_n = \int_0^{+\infty} \phi(t)L_n(t)\,dt$.

Para completar la prueba basta probar que $|\varphi(t,w)| \leq h(t)$ con $h \in L^1[0,+\infty)$. Pero

$$\varphi(t,w) = \phi(t)\frac{1}{1-w}e^{-t\frac{w}{1-w}} =$$
$$= \phi(t)\frac{1}{1-w}e^{-t\frac{(x+iy)(1-x+iy)}{(1-x)^2+y^2}}$$

con $w = x+iy$, resulta $|\varphi(t,w)| \leq |\phi(t)\frac{1}{1-w}|e^{-t\frac{x(1-x)-y^2}{(1-x)^2+y^2}}$.

Necesito pues que $x(1-x)-y^2 \geq 0$ i.e. $y^2 \leq x(1-x)$ y $|1-w| > \text{cte} > 0$, y basta tomar w verificando $|w-\frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$ y $\Re w < \frac{1}{2}$.

4.10 TEOREMA. $\mathcal{L} : X \to \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ *es sobre.*

En lo que sigue, se probará que el dual fuerte de X es isomorfo a Y. La prueba se basará en los resultados de [ROSIER].

4.11 DEFINICION. *Definimos*

$$s\{L^1[0,1]\} = \{(f_n)_n : f_n \in L^1[0,1] \quad y \quad \forall k \quad \sum_n n^k \|f_n\|_1 < \infty\}$$

dotado de la topología de las seminormas

$$\|(f_n)_n\|_k = \sum_n n^k \|f_n\|_1 \quad k \in \mathbf{N}$$

4.12 **NOTA**

Con la notación de [ROSIER], $s\{L^1[0,1]\}$ con la topología anterior sería $s\{L^1[0,1]\}_{\mathcal{M}}$ donde $\mathcal{M} = \{A_k : k \in \mathbf{N}\}$ siendo $A_k = \{(a_n)_n \in s' : \exists\alpha \quad |a_n| < \alpha(n+1)^k\}$ como es fácil de comprobar. En consecuencia $s\{L^1[0,1]\}$ es Fréchet por [ROSIER] pág. 490 3.(5).

4.13 TEOREMA. *X es isomorfo a* $s\{L^1[0,1]\}$.

DEMOSTRACION

Defino

$$F : X \to s\{L^1[0,1]\}$$
$$F(f) = (f_n)_n \quad donde$$
$$f_n(t) = f(t+n)e^{-\frac{t+n}{2}}\chi_{[0,1]}$$

Probaré que $(f_n)_n \in s\{L^1[0,1]\}$. En efecto, dado $k \in \mathbf{N}$ $(1+t^2)^k e^{-\frac{t}{2}} f(t) \in L^1$ luego

$$(1+n^2)^k \int_{[n,n+1]} |e^{-\frac{t}{2}} f(t)|\, dt \le$$
$$\le \int_{[n,n+1]} |(1+t^2)^k e^{-\frac{t}{2}} f(t)|\, dt \le$$
$$\le M_k$$

en consecuencia $(1+n^2)^k\|f_n\|_1 \leq M_k$ luego $\|f_n\|_1 \leq \frac{M_k}{(1+n^2)^k}$ y por tanto $\sum_n n^k\|f_n\|_1 < \infty$ para todo $k \in \mathbf{N}$. Luego está bien definida. Además obviamente es biyectiva. Su inversa es $F^{-1}((f_n)_n) = \sum_n f_n(t-n)e^{\frac{t}{2}}\chi_{[n,n+1]}$. Para probar que F es un isomorfismo basta utilizar el teorema del grafo cerrado entre espacios de Fréchet.

4.14 DEFINICION.

I) $A_k\{L^\infty[0,1]\} = \{(f_n)_n : f_n \in L^\infty[0,1]$ *y* $(\|f_n\|_\infty)_n \in A_k\}$ *dotado de la topología de la norma* $\|(f_n)_n\|_k = \inf\{\alpha : \|f_n\|_\infty \leq \alpha(n+1)^k\}$.

II) $s'\{L^\infty[0,1]\} = \{(f_n)_n : f_n \in L^\infty[0,1]$ *y* $(\|f_n\|_\infty)_n \in s'\} = \cup_{k=0}^\infty A_k\{L^\infty[0,1]\}$ *con la topología límite inductivo de* $A_k\{L^\infty[0,1]\}$ *y lo denotaremos* $(s'\{L^\infty[0,1]\}, l.i.)$.

4.15 NOTA

Según [ROSIER] $A_k\{L^\infty[0,1]\}$ es $A_k\{L^\infty[0,1]\}_{\mathcal{M}}$ con $\mathcal{M} = \{A^k\}$ siendo $A^k = \{(a_n)_n \in s : \sum_n |a_n|n^k < \infty\}$

4.16 DEFINICION. *Defino la topología $\mathcal{B}$ sobre $s'\{L^\infty[0,1]\}$ como la generada por las seminormas siguientes* $\|f_n\|_R = \sup\{\sum_n |a_n|\|f_n\|_\infty : (a_n)_n \in R\}$ *donde R varía en los subconjuntos acotados de s. Siguiendo la notación de [ROSIER] sería* $s'\{L^\infty[0,1]\}_{\mathcal{B}}$

4.17 TEOREMA. *Y es isomorfo a* $(s'\{L^\infty[0,1]\}, l.i.)$

DEMOSTRACION

Sea $F : Y \to s'\{L^\infty[0,1]\}$ definida por $F(f) = (f_n)_n$ donde $f_n(t) = f(t+n)e^{\frac{t+n}{2}}$. Bastará probar que F restringida a Y_k es un isomorfismo de Y_k en $A_k\{[0,1]\}$.

En efecto, como $f \in Y_k$ se tiene $(1+t^2)^{-k}e^{\frac{t}{2}}f(t) \in L^\infty[0,+\infty)$ de donde

$$(1+(n+1)^2)^{-k}e^{\frac{t+n}{2}}f(t+n) \leq (1+(t+n)^2)^{-k}e^{\frac{t+n}{2}}f(t+n) \leq M_k$$

cuando $t \in [0,1]$, i.e. si $t \in [0,1]$

$$\|f_n\|_\infty M_k(1+(n+1)^2)^k \leq \alpha(n+1)^k$$

y por tanto $(f_n)_n \in A_k\{L^\infty[0,1]\}$ por lo que está bien definida. Claramente es biyectiva, siendo su inversa $F^{-1}((f_n)_n) = \sum_n f_n(t-n)e^{-\frac{t}{2}}\chi_{[n,n+1]}(t)$. Aplicando el teorema del grafo cerrado entre espacios de Banach, se prueba que F es un isomorfismo entre Y_k y $A_k\{[0,1]\}$.

4.18 DEFINICION. $[s\{L^1[0,1]\}]$ *serán los elementos de* $s\{L^1[0,1]\}$ *que son límites de sus sucesiones finitas, i.e.* $f_n = \lim_{k\to\infty} g_n^k$ *donde* $g_n^k(t) = \begin{cases} f_n(t) & \text{si } n \leq k \\ 0 & \text{si } n > k \end{cases}$

4.19 LEMA. $[s\{L^1[0,1]\}] = s\{L^1[0,1]\}$

DEMOSTRACION

Bastará probar que $\lim_{k\to\infty} \|(f_n) - (g_n^k)\|_m = 0$ para todo $m \in \mathbf{N}$, pero fijado m

$$\|(f_n) - (g_n^k)\|_m = \sum_{n=1}^{\infty} n^m \|f_n - g_n^k\|_1 =$$
$$= \sum_{n=k+1}^{\infty} n^m \|f_n\|_1$$

y obviamente tiende a 0 cuando k tiende a ∞ pues $\sum_{n=1}^{\infty} n^m \|f_n\|_1 < \infty$.

4.20 TEOREMA. *$(s\{L^1[0,1]\})'$ con la topología fuerte es isomorfo a $(s'\{L^\infty[0,1]\})_{\mathcal{B}}$.*

DEMOSTRACION

Se deduce de [ROSIER] pág. 496 6.(2) (a) y el lema anterior.

4.21 TEOREMA. *X' con la topología fuerte es isomorfo a Y.*

DEMOSTRACION

Por el teorema 4.13 X es isomorfo a $s\{L^1[0,1]\}$ en consecuencia por teorema 4.20 $(X', \beta(X', X))$ es isomorfo a $(s'\{L^\infty[0,1]\})_{\mathcal{B}}$, por teorema 4.17 Y es isomorfo a $(s'\{L^\infty[0,1]\}, l.i.)$. Bastará probar pues que las topologías $\mathcal{B}$ y $l.i.$ son iguales. Ahora $l.i.$ es mas fina que $\mathcal{B}$ pues la aplicación $G : Y \to X'$ definida en 4.3 es continua (4.4) y ahora basta considerar los anteriores isomorfismos. Probemos pues que $\mathcal{B}$ es mas fina que $l.i.$ Para ello sea B del sistema de entornos en $l.i.$ i.e. $B = \Gamma(\cup B_k)$ donde $B_k = \{(f_n) \in A_k\{L^\infty[0,1]\} : \|f_n\|_\infty \le \alpha_k(n+1)^k\}$ para ciertos α_k. Probar que B está en $\mathcal{B}$ es dar un conjunto acotado R en s tal que

$\{(g_n) \in s'\{L^\infty[0,1]\} : \|(g_n)\|_R < 1\} \subset B$. Ahora en $s' = \cup A_k$ coinciden la topología fuerte y la de límite inductivo, luego dado $B' = \Gamma(\cup B'_k)$ con $B'_k = \{(x_n) \in A_k : |x_n| \leq \alpha_k(n+1)^k\}$ existe R acotado en s tal que $R^\circ \subset B'$. Probaremos que dado $(g_n) \in s'\{L^\infty[0,1]\}$ tal que $\|(g_n)\|_R < 1$ está en B. Como $\|(g_n)\|_R = \sup\{\sum_n |a_n|\|g_n\|_\infty : (a_n) \in R\}$ y $\|(g_n)\|_R < 1$ se deduce que $(\|(g_n)\|_\infty) \in R^\circ \subset B'$ luego existe γ_i $i = 1, \cdots, N$ con $(\|(g_n)\|_\infty) = \sum_{i=1}^N \gamma_i(x_n^i)$ con $(x_n^i) \in B'_{k_i}$ i. e. $|x_n^i| < \alpha_{k_i} n^{k_i}$. Sea $r_n^i = \frac{\gamma_i x_n^i}{\|(g_n)\|_\infty}$, si $\|(g_n)\|_\infty \neq 0$ y pongamos $r_n^i = 0$ si $\|(g_n)\|_\infty = 0$ y $f_n^i = (r_n^i/\gamma_i)g_n$. Claramente

$$\|f_n^i\|_\infty = \|\frac{r_n^i}{\gamma_i} g_n\|_\infty \leq \|\frac{x_n^i}{\|g_n\|_\infty} g_n\|_\infty = |x_n^i| < \alpha_{k_i}(n+1)^{k_i}$$

luego $(f_n^i) \in B_{k_i}$. Ahora $\sum_{i=1}^N r_n^i = \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i x_n^i}{\|(g_n)\|_\infty} = 1$ en consecuencia $g_n = \sum_{i=1}^N \gamma_i f_n^i$ y por tanto $(g_n) \in B$.

4.21 COROLARIO. $(s'\{L^\infty[0,1]\}, l.i.) = (s'\{L^\infty[0,1]\})_B$

CAPITULO 5

CEROS DE ALGUNAS CLASES DE FUNCIONES ANALITICAS

La primera parte del capítulo estará destinada a estudiar los ceros de las funciones enteras transformadas de Fourier de distribuciones de soporte compacto (ver 1.25). Utilizando la caracterización que da [RUDIN] [1] pág. 190 (ver tema 0) (el factor 2π que nos aparece es por la diferente definición de la transformada de Fourier) de estas funciones enteras, obtenemos

5.1 LEMA. *Sea $u \in \mathcal{E}'$, entonces $\tilde{u}$ tiene orden menor o igual que 1.*

5.2 LEMA. *Sea $u \in \mathcal{E}'$ y $z_1, \cdots, z_n$ ceros de $\tilde{u}$. Entonces existe $v \in \mathcal{E}'$ verificando:*

a) $\tilde{v}(z) = \frac{\tilde{u}(z)}{\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)}$
b) $\mathrm{sop(u)} \subset \mathrm{sop(v)}$
c) $\sup\{|t| : t \in \mathrm{sop(u)}\} = \sup\{|\mathrm{t}| : \mathrm{t} \in \mathrm{sop(v)}\}$

DEMOSTRACION

Sea $\alpha = \sup\{|t| : t \in \mathrm{sopu}\}$ por ser $\mathrm{sopu} \subset [-\alpha, \alpha]$ $\tilde{u}$ verifica $|\tilde{u}(z)| \leq M(1+|z|^2)^n e^{2\pi\alpha|\Im z|}$ ([RUDIN][1] pág. 190) es claro que $f(z) = \frac{\tilde{u}(z)}{\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)}$ verifica $|f(z)| \leq M'(1+|z|^2)^n e^{2\pi\alpha|\Im z|}$ por lo que existe $v \in \mathcal{E}'$ con $\tilde{v}(z) = f(z)$ y $\mathrm{sopv} \subset [-\alpha, \alpha]$ en consecuencia $\sup\{|t| : t \in \mathrm{sopv}\} \leq \alpha$. Como

$\tilde{u}(z) = \tilde{v}(z)\prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$ por 1.18 2) y 3.10 $u = v * \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta^{(k)}$ por lo que sopu $\subset$ sopv $+ \{0\} \subset$ sopv y ahora es fácil concluir.

NOTA

a) En el lema no se puede conseguir sopu = sopv, pues basta considerar $v = e^x \chi_{[0,1]}$ y $u = \frac{1}{4\pi i} e^x \chi_{[0,1]} * (\delta' - \delta)$

b) Si sólo consideramos $z_1 = 0, \cdots z_n = 0$ resulta $u = \frac{1}{(2\pi i)^n}\delta(n) * v = \frac{1}{(2\pi i)^n} d^n v$, y es fácil comprobar que $\sup\{t : t \in \text{sopu}\} = \sup\{t : t \in \text{sopv}\}$ y $\inf\{t : t \in \text{sopu}\} = \inf\{t : t \in \text{sopv}\}$.

Damos ahora un primer resultado referente a los ceros

5.3 **TEOREMA.** *Sea $u \in \mathcal{E}'$, entonces $\tilde{u}$ tiene un número finito de ceros si y sólo si existe $x \in \mathbf{R}$ tal que $u = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_x^{(k)}$ siendo n el número de ceros contados con su multiplicidad. (i.e. existe $x \in \mathbf{R}$ tal que sopu $= \{x\}$)*

DEMOSTRACION

$\Rightarrow$) Sean $z_1, \cdots, z_n$ los ceros de $\tilde{u}$, por el teorema anterior, existe $v \in \mathcal{E}'$ $\tilde{v}(z) = \frac{\tilde{u}(z)}{\prod_{k=1}^{n}(z - z_k)}$ y $\tilde{v}$ no tiene ceros. Como el orden de $\tilde{v}$ no es superior a 1, por el teorema de Hadamard [HOLLAND] pág. 68 $\tilde{v}(z) = e^{az+b}$ con $a, b \in \mathbf{C}$ i. e. $\tilde{v}(z) = \text{ctee}^{\Re az} e^{i\Im az}$, pero $\tilde{v}$ está acotado por un polinomio sobre el eje real, en consecuencia $\Re a = 0$ y queda $\tilde{u}(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)e^{-2\pi i z x}$ i.e. $u = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_x^{(k)}$.

$\Leftarrow$) Trivial

En los siguientes teoremas estudiamos el orden (ρ) y tipo (σ) de las funciones enteras transformadas de Fourier de distribuciones de soporte compacto (4.4 generaliza [BOAS] pág. 108 6.9.1). Así mismo damos un teorema de caracterización.

5.4 LEMA. *Sea $u \in \mathcal{E}'$ tal que $\tilde{u}$ tiene infinitos ceros. Dado $n \in \mathbf{N}$ existe $v \in \mathcal{E}'$ verificando:*

1) $\rho(\tilde{v}) = \rho(\tilde{u})$ *y* $\sigma(\tilde{v}) = \sigma(\tilde{u})$.
2) $|\tilde{v}(x)| \leq \mathrm{cte}(\frac{1}{1+x^2})^n$ *para* x *real* .
3) $\mathrm{sopu} \subset \mathrm{sopv}$ *y* $\sup\{|t| : t \in \mathrm{sopu}\} = \sup\{|t| : t \in \mathrm{sopv}\}$.

DEMOSTRACION

Si $\tilde{u}$ no tuviera ceros reales, utilizando el lema 2 consigo $v \in \mathcal{E}'$, con $\tilde{v}(z) = \frac{\tilde{u}(z)}{\prod_{n=1}^{N}(z-z_n)}$, siendo z_n ceros de $\tilde{u}$, y N suficientemente grande para que $|\tilde{v}(x)| \leq \mathrm{cte}(\frac{1}{1+x^2})^n$, si x es real, y en consecuencia tendría 2) y 3). Por diferenciarse $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ en un polinomio se tendría 1).

Si $\tilde{u}$ tiene ceros reales, sea $f(z) = \tilde{u}(z + i\gamma)$ con γ conveniente para que f no tenga ceros reales. Tomo $w = e^{2\pi\gamma i t}u$ y es claro que $\tilde{w}(z) = f(z)$, $\rho(\tilde{u}) = \rho(\tilde{w})$, $\sigma(\tilde{u}) = \sigma(\tilde{w})$ y sopu = sopw. Se sigue por lo anterior.

5.5 TEOREMA. *Sea $u \in \mathcal{E}'$, entonces una de las siguientes afirmaciones es cierta:*

a) El orden de $\tilde{u}$ es cero, en cuyo caso $\tilde{u}$ es un polinomio y sopu $= \{0\}$.

b) El orden de $\tilde{u}$ es uno, en cuyo caso el tipo de $\tilde{u}$ es $\tau = 2\pi \sup\{|t| : t \in$ sopu$\}$

DEMOSTRACION

Sea $\rho(\tilde{u}) < 1$. Si $\tilde{u}(x) \in L^2$ para x real, puesto que $\rho(\tilde{u}) < 1$ dado $\epsilon > 0$ puedo encontrar $A > 0$ verificando $|\tilde{u}(z)| \leq Ae^{2\pi\epsilon|z|}$. Por [RUDIN] [2] pag 426 existe $u \in L^2([-\epsilon, \epsilon])$, como esto es para todo $\epsilon > 0$ resulta sopu $= \{0\}$ con lo que $\tilde{u}$ sería un polinomio y $\rho(\tilde{u}) = 0$.

Si $\tilde{u}(x) \notin L^2$ pero tiene un número infinito de ceros, por el lema anterior encuentro $v \in \mathcal{E}'$ con $\tilde{v}(x) \in L^2$ y $\sup\{|t| : t \in \text{sopu}\} = \sup\{|\text{t}| : \text{t} \in \text{sopv}\}$. Por lo anterior sopv $= \{0\}$ i. e. sopu $= \{0\}$ con lo cual sería un polinomio y tendría un número finito de ceros, que es contradicción.

Luego si $\tilde{u}(x) \notin L^2$ tiene un número finito de ceros. Por el teorema 3 $u = \sum_{finita} \alpha_k \delta_x^{(k)}$ y puesto que $\rho(\tilde{u}) < 1$ tendría que ser $x = 0$ i.e. sopu $\subset \{0\}$ con lo que $\tilde{u}$ es un polinomio y $\rho(\tilde{u}) = 0$.

Si $\rho(\tilde{u}) = 1$ y sopu $= \{\text{x}_0\}$ por el teorema 3 es claro que $\sigma(\tilde{u}) = 2\pi|x_0|$.

Si $\rho(\tilde{u}) = 1$ y sopu $\neq \{\text{x}_0\}$ por el teorema 3 $\tilde{u}$ tiene infinitos ceros. Sea $v \in \mathcal{E}'$ obtenida por el lema anterior, verificando $\tilde{v}(x) \in L^2$ y sea $\beta = \sup\{|t| : t \in$ sopv$\} = \sup\{|\text{t}| : \text{t} \in \text{sopv}\}$. Pretendemos probar que $\sigma(\tilde{u}) = 2\pi\beta$, o lo que es igual $\sigma(\tilde{v}) = 2\pi\beta$. Al ser $\tilde{v}(x) \in L^2$ si $|\tilde{v}(z)| \leq Ae^{2\pi\alpha|z|}$ para ciertos A, $\alpha > 0$, por [RUDIN] [2] pág. 426 se tendría sopv $\subset [-\alpha, \alpha]$ y en consecuencia $\alpha \geq \beta$ i. e. $\sigma(\tilde{v}) \geq 2\pi\beta$. La igualdad se tiene pues al ser sopv $\subset [-\beta, \beta]$, por el mismo teorema de [RUDIN] [2] $|\tilde{v}(z)| \leq \text{ctee}^{2\pi\beta|z|}$.

5.6 TEOREMA. *Sea $f(z)$ entera. Son equivalentes:*

a) Existe $u \in \mathcal{E}'$ tal que $\tilde{u}(z) = f(z)$

b) b.1) $\rho(f) = 1$ *o* $\rho(f) = 0$.

b.2) El tipo de f *es finito.*

b.3) $|f(x)| < P(x)$ *para todo* $x \in \mathbf{R}$ *siendo* P *un polinomio.*

DEMOSTRACION

a) $\Rightarrow$ b) Teoremas anteriores.

b) $\Rightarrow$ a) Si f tiene un número finito de ceros, procediendo como en la demostración del teorema 3 obtengo que $f(z) = P(z)e^{ix_0}$ para cierto $x_0 \in \mathbf{R}$ por lo que existe $u \in \mathcal{E}'$ con $\tilde{u}(z) = f(z)$.

Si f tiene un número infinito de ceros, puedo suponer que no hay ceros reales con lo cual definiendo $g(z) = \frac{f(z)}{\prod_{k=1}^{N}(z-z_k)}$ con z_k ceros de f consigo que $g(x) \in L^2$ y orden y tipo de $g(z)$ iguales a los de $f(z)$. De b.1) y b.2) obtengo que $|g(z)| \leq \text{ctee}^{a|z|}$ para cierto a, por [RUDIN] [2] pág. 426 existe $F \in L^2([-\frac{a}{2\pi}, \frac{a}{2\pi}])$ con $\tilde{F}(z) = g(z)$ y en consecuencia existe $u \in \mathcal{E}'$ con $\tilde{u}(z) = f(z)$.

El siguiente resultado generaliza ligeramente [BOAS] 6.9.4 pág. 108 y nos será de utilidad en el teorema siguiente. La demostración es diferente y por eso la incluimos.

5.7 **TEOREMA.** *Sea* $u \in \mathcal{E}'$, $\alpha = \sup\{t : t \in \text{sopu}\}$, $\beta = \inf\{t : t \in \text{sopu}\}$. *Entonces el diagrama indicador* D *de* $\tilde{u}$ *es* $[-2\pi i\alpha, -2\pi i\beta]$.

DEMOSTRACION

Seguiremos las definiciones de [BOAS]. Estudiaremos la función indicador de $\tilde{u}$, esto es $h(\theta) = \limsup_{r\to\infty} r^{-1} log|f(re^{i\theta})|$ ([BOAS] 5.1.1 pág. 66).

Como $u \in \mathcal{E}'$ se tiene $|\tilde{u}(z)| \leq M(1+|z|^2)^N e^{2\pi\gamma|\Im z|}$ con $\gamma = \frac{\sigma(\tilde{u})}{2\pi} = \sup\{|t| : t \in sopu\}$ es claro que $h(\theta) \leq 2\pi\gamma|\mathrm{sen}\theta|$ luego $h(0) \leq 0$ y $h(\pi) \leq 0$ pero por [BOAS] 5.4.4 pág. 76 $h(0) + h(\pi) \geq 0$ en consecuencia $h(0) = h(\pi) = 0$ (1) . Por [BOAS] 5.3.7 pág. 74 $h(-\theta)$ es la función soporte de D. Por (1) D es un intervalo del eje imaginario.

Supongamos que $\beta = 0$ en consecuencia $\alpha = \gamma > 0$. Como sopu $\subset [0, +\infty)$ por 3.7 $|\tilde{u}(z)| \leq M_1(1+|z|^2)^{N_1}\frac{1}{|y|^{N_2}}$ si $\Im z < 0$. Si $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ es claro que $h(\theta) = 0$ como $h(-\theta)$ es la función soporte de D es claro que $D = [ia, 0]$ con $a < 0$. Por [BOAS] 5.4.1 pág. 75 como $\tilde{u}$ tiene orden 1 (si no sería un polinomio por teorema 4 y es claro que $D = \{0\}$) h alcanza el máximo en su tipo i.e. $|a| = h(\frac{\pi}{2}) = 2\pi\gamma = 2\pi\alpha$ luego $D = [-2\pi\alpha i, 0] = [-2\pi\alpha i, -2\pi\beta i]$.

Probemos el caso general. Sea $g(z) = e^{2\pi i\beta z}\tilde{u}(z) = \widetilde{\tau_{-\beta}u}(z) = \tilde{v}(z)$ es claro que $\inf\{t : t \in \text{sopv}\} = 0$ y $\sup\{t : t \in \text{sopv}\} = \alpha - \beta$ en consecuencia por lo anterior $D_g = [-2\pi(\alpha-\beta)i, 0]$ como $\tilde{u} = e^{-2\pi i\beta z}g(z)$ y el diagrama indicador de $e^{-2\pi i\beta z}$ es $\{-2\pi\beta i\}$ por [BOAS] 5.4.12 pág. 77 $D_{\tilde{u}} = [-2\pi\alpha i, -2\pi\beta i]$.

5.8 **NOTA**

a) Sea $u \in \mathcal{E}'$ de forma que $\tilde{u}(0) = 1$, por 5.6 al ser $u \in \mathcal{E}'$, $\tilde{u}(x)$ está acotado por un polinomio para x real, en consecuencia $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log^+|\tilde{u}(x)|}{1+x^2}\,dx < +\infty$. Entonces por [BOAS] 6.3.6 pág 85 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log|\tilde{u}(x)||}{1+x^2}\,dx < +\infty$ y en consecuencia tanto $\int_1^{+\infty} \frac{\log|\tilde{u}(x)|}{x^2}\,dx < +\infty$ como el valor principal de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log|\tilde{u}(x)|}{x^2}\,dx < +\infty$ son finitos.

b) Si $u \in \mathcal{E}'$ y $\tilde{u}(0) = 0$ por el lema 5.2 podemos conseguir v tal que $\tilde{v}(0) = 1$ y con el mismo diagrama indicador (ver nota b) pág. 72), por lo que la función indicador $h(\theta)$ no varía.

Los resultados anteriores permiten dar las siguientes restricciones sobre los ceros de las transformadas de Fourier de distribuciones de soporte compacto.

5.9 **TEOREMA.** *Sea $u \in \mathcal{E}'$ tal que $\tilde{u}$ tiene infinitos ceros. Sean $(z_n)_n$ sus ceros no nulos. Entonces:*

a) $\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{|\Im z_n|}{|z_n|^2} < +\infty$

b) Para todo $\epsilon > 0$ se verifica que $\sum_{n\in\mathbf{N}}(\frac{1}{|z_n|})^{1+\epsilon} < \infty$

c) $\sum_{|z_n|\leq R} \frac{1}{z_n}$ converge cuando R tiende a ∞

d) Los ceros tienen una densidad y ésta es igual a la derecha que a la izquierda del eje imaginario, i.e. $\lim_{r\to\infty} \frac{n^+(r)}{r} = \lim_{r\to\infty} \frac{n^-(r)}{r}$ donde $n^+(r)$ y $n^-(r)$ indican el número de ceros de la función $\tilde{u}$ en $\{z \in \mathbf{C} : |z| \leq r \text{ y } \Re z \geq 0\}$ y $\{z \in \mathbf{C} : |z| \leq r \text{ y } \Re z < 0\}$ respectivamente.
Más aun, $\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\, d\theta$.

d) $\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{1}{|z_n|} = \infty$

DEMOSTRTACION

Sin perder generalidad, usando el lema 5.2 podemos suponer que $\tilde{u}(0) = 1$.

b) se deduce pues al tener $\tilde{u}$ infinitos ceros por 5.5 $\rho(\tilde{u}) = 1$ y en consecuencia los ceros tienen exponente de convergencia 1 i.e. para todo $\epsilon > 0 \quad \sum_{n\in\mathbf{N}}(\frac{1}{|z_n|})^{1+\epsilon} < \infty$.

La condición a) es consecuencia de [BOAS] 6.3.14 pág. 86, pues por la nota anterior $\int_1^{+\infty} \frac{\log|\tilde{u}(x)|}{x^2}\, dx < +\infty$.

La condición c) se obtiene por ser $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log|\tilde{u}(x)|}{x^2}\,dx < +\infty$, el teorema anterior 5.7 sobre la función $h(\theta)$ y [BOAS] 8.4.16 pág. 146 y 8.4.20 pág. 147.

Para la condición d) sólo resta probar que $\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\,d\theta$ (Nótese que por la nota 5.8 b) la función $h(\theta)$ no varía al suponer $\tilde{u}(0) = 1$). Pero por [BOAS] 8.3.11 pág. 140 esto equivale a que $\lim_{r\to\infty} \frac{\log|\tilde{u}(re^{i\theta})|}{r}$ exista para todo θ salvo un cierto conjunto de r de densidad 1, lo que está garantizado por [BOAS] 8.4.20 pág 147, y las partes c) y d) de este teorema ya probadas.

Probemos por último e). Si $\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{1}{|z_n|} < \infty$ por [BOAS] 2.10.13 pág. 29 $f(z) = \prod_{n\in\mathbf{N}}(1-\frac{z}{z_n})$ tiene orden 1 y tipo 0, por el teorema de Hadamard, es claro que $\tilde{u}(z) = Me^{az}f(z)$ con lo que $|\tilde{u}(x)| = |M|e^{\Re ax}|f(x)|$. Como $u \in \mathcal{E}'$ $|\tilde{u}(x)| < M'(1+x^2)^N$ y queda $|f(x)| < \mathrm{cte}(1+x^2)^N e^{-\Re ax}$. Por [BOAS] 3.7.3 pág. 52 , dado $\epsilon > 0$ puedo encontrar r suficientemente grande tal que $-\epsilon r < \log m(r)$ i.e. $e^{-\epsilon r} < m(r)$ siendo $m(r) = \inf\{|f(z)| : |z| = r\}$. Si $\Re a > 0$ sea $\epsilon < \Re a$ entonces $e^{-\epsilon r} < m(r) \leq |f(r)| < \mathrm{cte}(1+r^2)^N e^{-\Re ar}$ tomando r grande es contradicción. Si $\Re a < 0$ se procede de forma análoga usando $f(-r)$ en lugar de $f(r)$. Si $\Re a = 0$ el tipo de $\tilde{u}$ es 0 y 5.4 b) nos da que u tiene soporte contenido en $\{0\}$ lo que es contradictorio con la hipótesis de tener $\tilde{u}$ infinitos ceros. En consecuencia $\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{1}{|z_n|} = \infty$.

PROBLEMA

Dada $(z_n)_n$ verificando las hipótesis del teorema anterior, ¿ existe una distribución de soporte compacto de manera que $(z_n)_n$ sean los ceros de su transformada de Fourier?.

Teniendo en cuenta el teorema 5.7 , la parte d) del teorema anterior permite relacionar la densidad de los ceros de $\tilde{u}$ con el soporte de u. Esto implica algunas relaciones de permanencia sobre el soporte de una convolución:

5.10 **COROLARIO.** *Sea* $u \in \mathcal{E}'$ *y* $\alpha = \sup\{t : t \in \mathrm{sopu}\}$, $\beta = \inf\{t : t \in \mathrm{sopu}\}$. *Entonces* $\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r} = 2(\alpha - \beta)$, *donde* $n(r)$ *indica el número de ceros de* $\tilde{u}$ *en* $\{z \in \mathbf{C} : |z| \leq r\}$. *En consecuencia si* $\tilde{u}$ *tiene infinitos ceros* $\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r} > 0$.

DEMOSTRACION

Por d) del teorema anterior $\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\, d\theta$. Por el teorema 5.7 $h(\theta)$ es la función soporte de $[2\pi i\beta, 2\pi i\alpha]$ y en consecuencia

$$h(\theta) = \begin{cases} 2\pi\alpha \mathrm{sen}\theta & \text{si } 0 \leq \theta \leq \pi \\ 2\pi\beta \mathrm{sen}\theta & \text{si } -\pi \leq \theta \leq 0 \end{cases}$$

Queda $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\, d\theta = 2(\alpha - \beta)$.

Se concluye por el teorema 5.3.

5.11 **COROLARIO.** *Sean* $u_1, u_2 \in \mathcal{E}'$ *entonces*

$$\inf\{t : t \in \mathrm{sop}(\mathrm{u}_1 * \mathrm{u}_2)\} = \inf\{\mathrm{t} : \mathrm{t} \in \mathrm{sopu}_1\} + \inf\{\mathrm{t} : \mathrm{t} \in \mathrm{sopu}_2\}$$

$$\sup\{t : t \in \mathrm{sop}(\mathrm{u}_1 * \mathrm{u}_2)\} = \sup\{\mathrm{t} : \mathrm{t} \in \mathrm{sopu}_1\} + \sup\{\mathrm{t} : \mathrm{t} \in \mathrm{sopu}_2\}$$

DEMOSTRACON

Sabemos que $\mathrm{sop}(\mathrm{u}_1 * \mathrm{u}_2) \subset \mathrm{sopu}_1 + \mathrm{sopu}_2$. Sea $\alpha_i = \sup\{t : t \in \mathrm{sopu_i}\}$ y $\beta_i = \inf\{t : t \in \mathrm{sopu_i}\}$.

Es claro que $\mathrm{sop}(\mathrm{u}_1 * \mathrm{u}_2) \subset [\beta_1 + \beta_2, \alpha_1 + \alpha_2]$ (1). Pero como $\widetilde{u_1 * u_2} = \tilde{u}_1 \tilde{u}_2$ resulta $n_{\widetilde{u_1 * u_2}}(r) = n_{\tilde{u}_1} + n_{\tilde{u}_2}(r)$. Por el teorema anterior, el diámetro del soporte de $u_1 * u_2$ será $(\alpha_1 + \alpha_2 - (\beta_1 + \beta_2))$, y el corolario se deduce de (1).

El siguiente teorema relaciona el problema de la completitud de (x^{iz_n}) en algunos espacios de funciones, con la existencia de una distribución de soporte compacto cuya transformada de Fourier se anule en $(z_n)_n$.

5.12 **TEOREMA.** *Sea $(z_n)_n$ una sucesión de números complejos. Son equivalentes:*

a) Existe $u \in \mathcal{E}'$ tal que $\tilde{u}(z_n) = 0$.

b) Existe $u \in \mathcal{D}$ tal que $\tilde{u}(z_n) = 0$.

c) Existe $\delta > 0$ tal que (x^{iz_n}) no es total en $C[\delta, 1]$

d) Existe $\delta > 0$ tal que (x^{iz_n}) no es total en $L^p[\delta, 1]$ para todo $p \geq 1$.

DEMOSTRACION

La equivalencia de a) y b) es clara pues dado $u \in \mathcal{E}'$ tomando $\phi \in \mathcal{D}$ $u*\phi \in \mathcal{D}$ y $\widetilde{u * \phi} = \tilde{u}\tilde{\phi}$.

Veamos b) $\Rightarrow$ c). Sea $\phi \in \mathcal{D}$ con $\tilde{\phi}(z_n) = 0$. Puedo tomar sop$\phi \subset$ [0, M] con lo que $\int_0^M \phi(t)e^{-2\pi i t z_n}\, dt = 0$ haciendo $x = e^{-2\pi t}$ resulta $\int_{e^{-2\pi M}}^1 \frac{\phi(-\frac{1}{2\pi}logx)}{x} x^{iz_n}\, dx = 0$ por ser $\phi \in \mathcal{D}$ es claro que $\frac{\phi(-\frac{1}{2\pi}logx)}{x} \in C[e^{-2\pi M}, 1]$ luego (x^{iz_n}) no es total en $C[\delta, 1]$.

Probemos que c) $\Rightarrow$ a). Sea $\mu \in C^*[\delta, 1]$ no nula tal que $\mu(x^{iz_n}) = 0$. Sea $\phi \in \mathcal{D}$, es claro que $f(x) = \phi(-\frac{1}{2\pi}logx) \in C[\delta, 1]$ y v definida por $v(\phi(t)) = \mu(f(x))$ está en $\mathcal{E}'$. Ahora $\tilde{v}(z_n) = v(e^{-2\pi i z_n t}) = \mu(x^{iz_n}) = 0$.

La equivalencia que resta se hace de forma análoga.

5.13 COROLARIO. *Si* (x^{iz_n}) *no es completo en* $C[\delta, 1]$ *para cierto* $\delta > 0$, *entonces existe* $f \in C[\delta, 1]$ *tal que* $\int_\delta^1 f(x)x^{iz_n}\,dx = 0$.

5.14 COROLARIO. *Si* f *está en alguno de los espacios* $C[\delta, 1]$, $L^p[\delta, 1]$ *con* $p \geq 1$ *y* $\delta > 0$, *entonces existen infinitos* $(z_n)_n$ *tales que* $\int_\delta^1 f(x)x^{iz_n}\,dx = 0$.

DEMOSTRACION

Sea $\phi(t) = -2\pi f(e^{-2\pi t})e^{-2\pi t}$, claramente $\phi \in \mathcal{E}'$ y sopϕ no se reduce a un punto, en consecuencia por el teorema 3, existen infinitos ceros de $\tilde{\phi}$ i.e. existen $(z_n)_n$ infinitos tales que $\int_\delta^1 f(x)x^{iz_n}\,dx = 0$.

El siguiente teorema da algunas condiciones suficientes sobre los puntos $(z_n)_n$ para la existencia de una distribución de soporte compacto cuya transformada de Fourier se anule en ellos.

5.15 TEOREMA. *Sean* $(z_n)_n$ *números complejos verificando una de las condiciones siguientes:*

a) $z_n \in \mathbf{R}$ *y* $n \leq z_n \leq n+1$ *para* $n \in \mathbf{Z}$.

b) *Existe* $(\alpha_n)_n$ *sucesión de números reales tales que* $\sum_n |\alpha_n| < \infty$ *y* $\sum_n e^{-\Im z_n \alpha_n} < \infty$.

c) $\sum_n \frac{1}{|\Re z_n|} < \infty$.

entonces existe $u \in \mathcal{E}'$ *tal que* $\tilde{u}(z_n) = 0$.

DEMOSTRACION

Si se verifica a) por [BOAS] 9.6.3 pág. 161 puedo encontrar una función entera $f(z)$ que se anula exactamente en z_n, de orden 1 y tipo π y acotada por $|x|$ en el eje real, se concluye por teorema 5.
Si se verifica b). Sea $f_n(z) = 1 - e^{2\pi i \alpha_n z_n} e^{-2\pi i \alpha_n z}$ y $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ como $|f_n(z)| \leq 1 + e^{-2\pi\alpha_n \Im z_n} e^{2\pi\alpha_n \Im z}$ por b) $f(z)$ es entera y es claro que $f(z_n) = 0$. Veamos que existe $u \in \mathcal{E}'$ tal que $\tilde{u}(z) = f(z)$. Sea $\mathcal{C}_a(\mathbf{R})$ el espacio de Banach de las funciones continuas y acotadas con valores en $\mathbf{C}$. Sean $\mu_m \in \mathcal{C}_a'(\mathbf{R})$ definidas por $\mu_m = *_{n=1}^{m}(\delta - e^{2\pi i \alpha_n z_n}\delta_{\alpha_n})$. Es claro por b) que $\|\mu_m\| \leq$ cte y sop$\mu_m \subset [-\beta, \beta]$ siendo $\beta = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|$. Como la bola del dual de un espacio de Banach es débil compacta, existe μ adherente a $(\mu_m)_m$. Es claro que sop$\mu \subset [-\beta, \beta]$ por lo que $\mu \in \mathcal{E}'$ y

$$\tilde{\mu}(z) = \lim_{m\to\infty} \tilde{\mu}_m(z) =$$
$$= \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \widetilde{e^{2\pi i \alpha_n z_n}\delta_{\alpha_n}}) =$$
$$= \prod_{m=1}^{\infty} 1 - e^{2\pi i \alpha_n z_n} e^{-2\pi i \alpha_n z} = f(z)$$

Si $(z_n)_n$ verifica c). Sea $w_n = e^{-2\pi i z_n \gamma_n}$ donde $\gamma_n = \frac{1}{-2\Re z_n}$. Claramente $\arg(w_n) = \pi$, en consecuencia existen a_n, $b_n > 0$ verificando $a_n + b_n = 1$ y $a_n + b_n e^{-2\pi i z_n \gamma_n} = 0$. Sean $\mu_m \in \mathcal{C}_a'(\mathbf{R})$ definidas por $\mu_m = *_{n=1}^{m}(a_n\delta + b_n\delta_{\gamma_n})$. Por construcción $\|\mu_m\| = 1$ y sop$\mu_m \subset [-\gamma, \gamma]$ siendo $\gamma = \sum_n \frac{1}{2|\Re z_n|}$ que es finito por c). En consecuencia existe μ punto adherente a $(\mu_n)_n$. Claramente sop$\mu \subset [-\gamma, \gamma]$ con lo que $\mu \in \mathcal{E}'$. Además $\mu \neq 0$ pues $\tilde{\mu}(0) = \lim_{m\to\infty} \tilde{\mu}_m(0) = 1$ y $\tilde{\mu}(z_n) = 0$, los 2 últimos asertos por la elección de a_n, b_n.

El siguiente lema, simplifica la condición b) del teorema anterior.

5.16 LEMA. *Sea $(a_n)_n$ una sucesión de números reales positivos con* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Existe $(\alpha_n)_n$ positivos tal que $\sum_n \alpha_n < \infty$ y $\sum_n e^{-\frac{\alpha_n}{a_n}} < \infty$ si y sólo si* $\sum_n a_n log a_n < \infty$.

(En consecuencia b) del teorema anterior queda:

b) $\sum_n |\frac{log(|\Im z_n|)}{\Im z_n}| < \infty$.)

DEMOSTRACION

Si $\sum_n a_n log a_n < \infty$, tomamos $\alpha_n = -a_n log a_n$ y es claro que cumple las condiciones requeridas.

Supongamos pues, que existe la serie convergente $\sum_n \alpha_n$ tal que $\sum_n e^{-\frac{\alpha_n}{a_n}} < \infty$. Debemos probar que $\sum_n \alpha_n log \alpha_n$ es convergente. Eliminando si es necesario los primeros términos podemos suponer, sin perder generalidad, que $\sum_n e^{-\frac{\alpha_n}{a_n}} = r < 1$. Así que $e^{-\frac{\alpha_n}{a_n}} < r$ y por tanto $\alpha_n > a_n log(\frac{1}{r}) > 0$. Además $\sum_n \alpha_n = \alpha > 0$. Afirmamos entonces que se alcanza el mínimo de $f(y) = \sum_n e^{-\frac{y_n}{a_n}}$ sujeto a la condición $\sum_n y_n = \alpha$. En efecto sean $y^{(k)} = (y_n^k)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones tales que $\sum_n y_n^k = \alpha$ y $f(y^{(k)}) = \sum_n e^{-\frac{y_n^k}{a_n}} = r_k$ converge al mínimo de $f(y)$. Podemos suponer que cada $r_k \leq r$. Entonces cada y_n^k se encuentra en el intervalo $[a_n log(\frac{1}{r}), \alpha]$ y podemos suponer $\lim_{k\to\infty} y_n^k = y_n$ existe para cada n. La sucesión $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ es tal que $\sum_n y_n \leq \alpha$ y $\sum_n e^{-\frac{y_n}{a_n}} \leq \inf_k r_k$. Multiplicando y por el número $\frac{\alpha}{\sum_n y_n}$ (cada $y_n > 0$) obtenemos z tal que $\sum_n z_n = \alpha$ y $\sum_n e^{-\frac{z_n}{a_n}} \leq \inf_k r_k$. Así si consideramos $exp(-\frac{\alpha - \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n}{a_1}) + \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\frac{\alpha_n}{a_n}}$ como función de α_n alcanza un mínimo en $\alpha_n = y_n$ cuando las demás variables valen $\alpha_k = y_k$ luego debe ser $exp(-\frac{\alpha - \sum_{k=2}^{\infty} y_k}{a_1})\frac{1}{a_1} - e^{-\frac{y_n}{a_n}}\frac{1}{a_n} = 0$ es decir $e^{-\frac{y_1}{a_1}}\frac{1}{a_1} - e^{-\frac{y_n}{a_n}}\frac{1}{a_n} = 0$ de aquí $e^{\frac{y_n}{a_n} - \frac{y_1}{a_1}} = \frac{a_1}{a_n}$ i.e. $\frac{y_n}{a_n} = \frac{y_1}{a_1} + log(\frac{a_1}{a_n})$. En definitiva $y_n = a_n(\frac{y_1}{a_1} + log a_1) - a_n log a_n$. Como $\sum_n y_n$, $\sum_n a_n$ son convergentes, también lo es $\sum_n a_n log a_n$.

PROBLEMA

Por 5.9 si existe $u \in \mathcal{E}'$ tal que $\tilde{u}(z_n) = 0$ $(z_n)_n$ verifica (1) $\sum_n \frac{|\Im z_n|}{|z_n|^2} < \infty$ y (2) $\sum_n (\frac{1}{|z_n|})^{1+\epsilon} < \infty$ para todo $\epsilon > 0$. Recíprocamente si $(z_n)_n$ verifica (1) y (2) ¿ Existirá $u \in \mathcal{E}'$ con $\tilde{u}(z_n) = 0$?.

Relacionamos a continuación, la densidad de la sucesión $(z_n)_n$ con el diámetro de una distribución $u \in \mathcal{E}'$ que verifique $\tilde{u}(z_n) = 0$.

5.17 **TEOREMA.** *Sea $(z_n)_n$ una sucesión de números complejos verificando $\liminf_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r} = \delta > 0$ (donde $n(r)$ indica el número de los $(z_n)_n$ tales que $|z_n| \leq r$). Entonces si $u \in \mathcal{E}'$ verifica $\tilde{u}(z_n) = 0$ el diámetro del soporte de u es mayor o igual que $\frac{\delta}{2}$.*

DEMOSTRACION

En efecto, si $u \in \mathcal{E}'$ verifica $\tilde{u}(z_n) = 0$ entonces $n_{\tilde{u}}(r) \geq n(r)$ con lo cual $\lim_{r\to\infty} \frac{n_{\tilde{u}}(r)}{r} \geq \liminf_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r} = \delta$. Por 5.10 $\lim_{r\to\infty} \frac{n_{\tilde{u}}(r)}{r}$ vale el doble del diámetro del soporte de u, con lo cual concluimos.

Para sucesiones $(z_n)_n$ que verifiquen $\liminf_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r} = 0$, se pueden encontrar en general distribuciones u con diámetro del soporte tan pequeño como se desee y tales que $\tilde{u}$ se anula en $(z_n)_n$. Si $(z_n)_n$ son un número finito esto es trivial por 5.3. Ponemos un ejemplo para $(z_n)_n$ infinitos.

EJEMPLO

Sea $z_n = 2^n i$ (claramente $\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r} = 0$). Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $u_\epsilon \in \mathcal{E}'$ verificando $\tilde{u}_\epsilon(z_n) = 0$ y con diámetro del soporte menor que ϵ.

En efecto, tomando $\alpha_n = \frac{n\log 2}{2^n}\epsilon$, es claro que $\sum_n \alpha_n < \infty$ y puesto que $e^{-2^n \alpha_n} = 2^{-\epsilon n}$ entonces $\sum_n e^{-\Im z_n \alpha_n} < \infty$, aplicando 5.15 b) existe $u \in \mathcal{E}'$ verificando que $\tilde{u}(z_n) = 0$ y sopu $\subset [-\beta, \beta]$ (ver demostración), donde $\beta = \sum_n \alpha_n = \epsilon \sum_n \frac{n\log 2}{2^n}$ y ya es fácil concluir.

Mediante la transformación $w = \frac{-\frac{1}{2}+2\pi i z}{\frac{1}{2}+2\pi i z}$ dada $u \in \mathcal{E}'$ obtenemos $\breve{u} \in H(D)$ que según 3.13 viene dada por $\breve{u}(w) = (1-w)\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ donde $a_n = < u, L_n(t)e^{-\frac{t}{2}} >$. Obtenemos así un espacio de funciones analíticas en el disco. Los siguientes teoremas prueban que, similarmente a lo que ocurre en otros espacios de funciones analíticas en el disco (H^p $p \geq 1$, N) puedo, utilizando el producto de Blaschke, encontrar otra función en el espacio sin ceros en el disco y con el mismo valor en módulo en la frontera que la función de partida. Por comodidad los teoremas se probarán en el semiplano inferior y sin perdida de generalidad supondremos que $\tilde{u}(0) \neq 0$. (Obsérvese, que si bien se eliminan los ceros en el semiplano inferior, se añaden otros en el semiplano superior. El teorema 5.3 elimina la posibilidad de plantearse el problema de eliminar todos los ceros de la función).

5.18 **TEOREMA.** *Sea $u \in \mathcal{E}'$, $\tau = \sup\{t : t \in$ sopu$\}$, $(z_n)_n$ los ceros de $\tilde{u}$ en el semiplano inferior, y $B(z)$ el producto de Blaschke formado con ellos, i.e.*

$B(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{4}+4\pi^2\bar{z}_n^2}{|\frac{1}{4}+4\pi^2\bar{z}_n 2|}\frac{z_n-z}{\bar{z}_n-z}$. *Entonces existe* $v\in\mathcal{E}'$ *con* sopv $\subset[-\tau,\tau]$ *y verificando* $\tilde{v}(z)=\frac{\tilde{u}(z)}{B(z)}$.

DEMOSTRACION

Primero, por el teorema 9 a) $(z_n)_n$ verifican la condición para poder definir $B(z)$. Consideremos $B_n(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{4}+4\pi^2\bar{z}_n^2}{|\frac{1}{4}+4\pi^2\bar{z}_n 2|}\frac{z_k-z}{\bar{z}_k-z}$. Como $u\in\mathcal{E}'$ existen $M>0$, $N\in\mathbf{N}$ tales que $|\tilde{u}(z)|\leq M(1+|z|^2)^N e^{2\pi\tau|\Im z|}$ con $\tau=\sup\{t: t\in \mathrm{sop} u\}$, en consecuencia es claro que existe $M_n'>0$ tal que $|\frac{\tilde{u}(z)}{B_n(z)}|\leq M_n'(1+|z|^2)^N e^{2\pi\tau|\Im z|}$ con lo que existen $v_n\in\mathcal{E}'$ verificando $\tilde{v}_n(z)=\frac{\tilde{u}(z)}{B_n(z)}$ y $\mathrm{sopv}_n\subset[-\tau,\tau]$. Probemos que $(v_n)_n$ convergen en $\mathcal{D}'$. Para ello, sea $\phi\in\mathcal{D}$ se tiene

$$<v_n,\phi>=<\hat{v}_n,\check{\hat{\phi}}>=$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{v}_n(t)\hat{\phi}(-t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\hat{u}(t)}{B_n(t)}\hat{\phi}(-t)\,dt$$

en consecuencia

$$<v_n-v_m,\phi>=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{u}(t)(\frac{B_m(t)-B_n(t)}{B_n(t)B_m(t)})\hat{\phi}(-t)\,dt.$$

Dado $\epsilon>0$ como $|\tilde{u}(t)|<M(1+|t|^2)^N$ y $M(1+|t|^2)^N|\hat{\phi}(-t)|\in L^1$ existe $H>0$ tal que $\int_{\mathbf{R}\setminus[-H,H]}M(1+|t|^2)^N|\hat{\phi}(-t)|\,dt<\epsilon$. Por [GARNETT] pág. 75 dado $\epsilon>0$ y $[-H,H]$ existe $k\in\mathbf{N}$ tal que si $n,m\geq k$ $|B_n(t)-B_m(t)|<\epsilon$ para todo $t\in[-H,H]$. Tomando $n,m\geq k$

$$|<v_n-v_m,\phi>|=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{u}(t)|(\frac{|B_m(t)-B_n(t)|}{|B_n(t)B_m(t)|}|\hat{\phi}(-t)|\,dt\leq$$
$$\leq\int_{\mathbf{R}\setminus[-H,H]}2M(1+|t|^2)^N|\hat{\phi}(-t)|\,dt$$
$$+\int_{-H}^{H}\epsilon(1+|t|^2)^N|\hat{\phi}(-t)|\,dt\leq$$
$$\leq 2\epsilon+\mathrm{cte}\epsilon$$

en consecuencia $(v_n)_n$ es de Cauchy en $\mathcal{D}'$ luego existe $v \in \mathcal{D}'$ tal que $\lim_{n\to\infty} v_n = v$. Como $\mathrm{sopv_n} \subset [-\tau,\tau]$ es claro que $v \in \mathcal{E}'$ y es fácil concluir.

5.19 **COROLARIO.** *Sea $u \in \mathcal{D}$, $\tau = \sup\{t : t \in sopu\}$, $(z_n)_n$ los ceros de $\tilde{u}$ en el semiplano inferior y $B(z)$ el producto de Blaschke formado con ellos, entonces existe $v \in \mathcal{D}$ verificando $\tilde{v}(z) = \frac{\tilde{u}(z)}{B(z)}$ y* $\mathrm{sopv} \subset [-\tau,\tau]$.

DEMOSTRACION

Por el teorema anterior existe $v \in \mathcal{E}'$ con $\tilde{v}(z) = \frac{\tilde{u}(z)}{B(z)}$, bastará probar que $v \in \mathcal{C}^\infty$. Pero puesto que $t^n|\tilde{v}(t)| = t^n|\frac{\tilde{u}(t)}{B(t)}| = t^n|\tilde{u}(t)| \in L^1$ para todo $n \in \mathbf{N}$ es claro que $v(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}(t)e^{2\pi itx}\,dt$ es una función de clase infinito.

Durante el resto del capítulo, estudiamos si es posible dar teoremas similares a los dos últimos para las funciones de $A(D)$ y $A'(D)$ (ver capítulo 3) . En este sentido, comenzamos dando algunos resultados sobre los ceros en el disco unidad de las funciones de $A(D)$.

5.20 **LEMA.** *Sea $f \in A(D)$, (no idénticamente cero) $(a_n)_n$ sus ceros en el disco (ordenados en orden creciente de sus módulos y considerando su multiplicidad), Ω los puntos de acumulación de los ceros en la circunferencia. Entonces*

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|) < \infty$.

b) Ω tiene medida cero.

DEMOSTRACION

Por 3.5 $A(D) \in H^\infty$, para la parte a) basta aplicar [RUDIN] [2] pág. 353. Para b), sea $f \in A(D)$ (no idénticamente cero) , por lo tanto $f \in H^\infty$. Sea $f^*(e^{i\theta})$ la extensión de f a la circunferencia por continuidad (obviamente admite extensión por 3.5), por [RUDIN] [2] 17.18 pág. 392 los puntos donde f^* se anula son un conjunto de medida nula, y este conjunto contiene a los puntos de acumulación de los ceros de f en el interior del disco.

5.21 **TEOREMA.** *Sea $\phi \in S^+ \setminus S$, entonces los ceros de $\breve{\phi}(w)$ no pueden tener a $w = 1$ como punto de acumulación.*

DEMOSTRACION

Por reducción al absurdo. Sean $(a_n)_n$ de módulo menor que 1 tales que $\breve{\phi}(a_n) = 0$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Al ser $\phi \in S^+ \setminus S$ por 1.5 existe $k \in \mathbf{N}$ con $\phi^{(k)}(0) = a \neq 0$, y todas las derivadas de orden inferior son nulas en cero. Sea $d^{k+1}\phi$ la derivada de ϕ como distribución. Obviamente $d^{k+1}\phi = a\delta + \phi(k+1)$. Como $\phi^{(k+1)} \in S^+$ obtenemos $d^{k+1}\phi - a\delta \in S^+$ y en consecuencia $(d^{k+1}\phi - a\delta)\breve{}(w) \in A(D)$ por 1.18 1) y 4), y teniendo en cuenta que $z = \frac{1}{4\pi i}\frac{w+1}{w-1}$ se tiene $(d^{k+1}\phi - a\delta)\breve{}(w) = (\frac{1}{2}\frac{w+1}{w-1})^{k+1}\breve{\phi}(w) - a$. Como $\breve{\phi}(a_n) = 0$ obtenemos $(\frac{1}{2}\frac{a_n+1}{a_n-1})^{k+1}\breve{\phi}(a_n) - a = -a$ y por tanto

$$\lim_{n\to\infty}[(\frac{1}{2}\frac{a_n+1}{a_n-1})^k\breve{\phi}(a_n) - a] = -a \tag{1}$$

Pero las funciones de $A(D)$ son continuas en el disco cerrado y valen 0 en $w = 1$, como $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ resulta $\lim_{n\to\infty}[(\frac{1}{2}\frac{a_n+1}{a_n-1})^{k+1}\breve{\phi}(a_n) - a] = 0$. Por (1) $a = 0$ que es contradicción.

5.22 COROLARIO. *Sea $\phi \in S^+ \setminus S$ y con soporte compacto. Entonces $\check{\phi}$ tiene un número finito de ceros.*

DEMOSTRACION

Al ser ϕ de soporte compacto $\check{\phi}$ es analítica salvo en $w = 1$, por tanto si tuviera un número infinito de ceros, acumularían en $w = 1$ y contradiría el teorema anterior.

5.20 a) permite considerar el producto de Blaschke formado con los ceros de una función de $A(D)$. (Aquí, también consideramos sin perdida de generalidad que las funciones no se anulan en el origen). Nos planteamos el siguiente problema (análogo a 5.18 5.19 para el espacio $A(D)$).

5.23 PROBLEMA

Sea $f \in A(D)$ y B el producto de Blaschke formado con sus ceros, i. e. $B(w) = \prod_{n=1}^{\infty} -\frac{\bar{w}_n}{|w_n|}\frac{w-w_n}{1-\bar{w}_n w}$ con $(w_n)_n$ los ceros de f. ¿ Es $\frac{f}{B} \in A(D)$?. Daremos a continuación algunos resultados parciales relacionados con este problema.

5.24 TEOREMA. *Si $f \in A(D)$ tiene un número finito de ceros, entonces $\frac{f}{B} \in A(D)$.*

DEMOSTRACION

Basta probar que si $f \in A(D)$ y si $f(a) = 0$ con $|a| < 1$, entonces $f(w)\frac{1-\bar{a}w}{a-w} \in A(D)$, más aun, bastará con que $\frac{f(w)}{a-w} \in A(D)$.Como $f(w) \in$

$A(D)$ por 3.4 $f(w) = (1-w)\sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n$ con $(a_n)_n \in s$. Resulta

$$a(1-w)\sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n \frac{1}{1-\frac{w}{a}} = a(1-w)\sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} w^n =$$
$$= a(1-w)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} a^{-k}\right) w^n$$

Como $f(a) = 0$ resulta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a^n = 0$ y por el lema 0.14 a) $(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} a^{-k})_n \in s$, basta volver a aplicar 3.4.

5.25 **COROLARIO.** *Sea* $\phi \in S^+$ *con soporte compacto, entonces* $\frac{\check{\phi}}{B} \in A(D)$.

DEMOSTRACION

Si $\phi \in S^+ \cap S$, sea $\tau = \sup\{t : t \in \text{sop}\phi\}$. Sea $\varphi(t) = \phi(t+\frac{\tau}{2})$ es claro que $\sup\{|t| : t \in \text{sop}\varphi\} = \frac{\tau}{2}$ y $\varphi \in \mathcal{D}$, además $\tilde{\varphi}(z) = e^{2\pi i z \frac{\tau}{2}}\tilde{\phi}(z)$, luego ϕ y φ tienen los mismo ceros. Notaremos indistintamente al producto de Blaschke para los ceros de $\tilde{\phi}(z)$ que al producto de Blaschke para los ceros de $\check{\phi}(w)$. Por 5.19 existe $v \in \mathcal{D}$ verificando $\tilde{v}(z) = \frac{\tilde{\varphi}(z)}{B(z)} = e^{2\pi i z \frac{\tau}{2}}\frac{\tilde{\phi}(z)}{B(z)}$ y sopv $\subset [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}]$, en consecuencia $u(t) = v(t-\frac{\tau}{2})$ verifica sopu $\subset [0,\tau]$ y $\tilde{u}(z) = \frac{\tilde{\phi}(z)}{B(z)}$ y de aquí $\frac{\check{\phi}(w)}{B(w)} \in A(D)$.
Si $\phi \in S^+ \setminus S$ basta aplicar 5.22 y 5.24.

En lo que sigue se darán algunos resultados sobre los ceros de las funciones de $A'(D)$, mostrando que en general no tiene sentido plantearse el problema análogo a 5.23 para $A'(D)$ pues hay funciones de este espacio cuyos ceros no verifican la propiedad necesaria para definir el producto de Blaschke.

5.26 TEOREMA. *Sea* $f \in A'(D)$, $(a_n)_n$ *sus ceros en el disco. Entonces para todo* $\epsilon > 0$ $\sum_{n=0}^{\infty}(1-|a_n|)^{1+\epsilon} < \infty$.

DEMOSTRACION

Por 3.5 4) existe $N \in \mathbf{N}$ y $c > 0$ tal que $|f(w)| \leq \frac{c}{(1-|w|)^N}$ i.e. $|\frac{f(w)}{c}| \leq \frac{1}{(1-|w|)^N}$ entonces para cada $\epsilon > 0$ existen $r_0, k > 0$ tal que si $r > r_0$ se verifica $log^+|\frac{f(re^{i\theta})}{c}| \leq k\frac{1}{(1-r)^\epsilon}$ luego $T(r,\frac{f}{c}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} log^+|\frac{f(re^{i\theta})}{c}|\, d\theta \leq k'\frac{1}{(1-r)^\epsilon}$ para $r > r_0$. En consecuencia segun [JUNEJA-KAPOOR] pág. 14 el orden de Nevalinna de $\frac{f}{c}$ es cero y en consecuencia el grado de Nevalinna de f es cero, luego por [JUNEJA-KAPOOR] 1.3.1 pág. 15 para todo $\epsilon > 0$ $\sum_{n=0}^{\infty}(1-|a_n|)^{1+\epsilon} < \infty$ siendo $(a_n)_n$ los ceros de f en el disco unidad.

5.27 EJEMPLO. *Existe una función* $f \in A'(D)$ *tal que sus ceros* $(a_n)_n$ *en el disco verifican* $\sum_{n=0}^{\infty}(1-|a_n|) = \infty$.

Probaremos que la función $f(w) = 1 - 504\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)w^n$ donde $\sigma_5(n)$ denota la suma de las pontencias quintas de los divisores de n verifica la propiedad requerida.

1) Dados dos números complejos $\mathbf{R}$-independientes w_1, w_2 definen el retículo $\Omega = \mathbf{Z}w_1 + \mathbf{Z}w_2$. Definimos $G_6 = \sum_{w\in\Omega, w\neq 0}\frac{1}{w^6}$. Consideremos la función $g_3(\tau) = 140\sum'_{n,m}\frac{1}{(m+n\tau)^6}$ donde la suma se extiende a todas las parejas de enteros salvo la $(0,0)$ (lo que denotamos $\sum'$). Esta función está definida para $\Im\tau > 0$. Consideremos el grupo unimodular $H = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a,b,c,d \in \mathbf{Z}$ y $ad - bc = 1\}$.

Entonces $g_3(\tau) = (c\tau + d)^{-6}g_3(\frac{a\tau+b}{c\tau+d})$ para toda $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H$. En efecto $G_6 = G_6(w_1,w_2) = \sum'_{n,m}\frac{1}{(nw_1+mw_2)^6}$, haciendo $\tau = \frac{w_1}{w_2}$ queda $G_6(w_1,w_2) = w_1^{-6}G_6(1,\tau) = \frac{w_1^{-6}}{140}g_3(\tau)$. Como G_6 sólo depende de Ω tomando otra base

w'_1, w'_2 resulta $G_6(w_1, w_2) = G_6(w'_1, w'_2)$.

Consideremos $\Omega(1,\tau)$. Dado $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H$ es claro que $a\tau + b$, $c\tau + d$ forman base de $\Omega(1,\tau)$ y además $\Im(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) > 0$ luego

$$G_6(1,\tau) = G_6(c\tau + d, a\tau + b) = (c\tau + d)^{-6} G_6(1, \frac{a\tau + b}{c\tau + d})$$

i.e. $g_3(\tau) = (c\tau + d)^{-6} g_3(\frac{a\tau+b}{c\tau+d})$.

2) Para toda $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H \quad g_3(\frac{ai+b}{ci+d}) = 0$.

Tomo $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in H$ por 1) $g_3(i) = (-i)^{-6} g_3(\frac{1}{-i}) = -g_3(i)$ luego $g_3(i) = 0$. Tomando $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H$ por 1) $0 = g_3(i) = (ci + d)^{-6} g_3(\frac{ai+b}{ci+d})$ luego $g_3(\frac{ai+b}{ci+d}) = 0$.

3) Si $(\eta_k)_k$ son los ceros de g_3 entonces $\sum_{k\in\mathbf{N}} \frac{\Im\eta_k}{1+|\eta_k|^2} = \infty$.

Por 2)

$$\sum_{k\in\mathbf{N}} \frac{\Im\eta_k}{1 + |\eta_k|^2} \geq \sum_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in H} \frac{\Im(\frac{ai+b}{ci+d})}{1 + |\frac{ai+b}{ci+d}|^2} \geq$$

$$\geq \sum_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in H\ ,\ a,b>0} \frac{\Im(\frac{(ai+b)(-ci+d)}{c^2+d^2})}{1 + \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}} =$$

$$= \sum_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in H\ ,\ a,b>0} \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \geq \cdots$$

Sean a y b primos entre si, existen por tanto $\alpha, \beta \in \mathbf{N}$ verificando $a\alpha - b\beta = 1$. En consecuencia las soluciones enteras de $ax - by = 1$ serán de la forma $x = \alpha + bt$, $y = \beta + at$ con $t \in \mathbf{Z}$ luego hay una solución $0 \leq y \leq a - 1$ y en consecuencia $0 \leq x = \frac{1+by}{a} \leq \frac{1+b(a-1)}{a} = b + \frac{1-b}{a} \leq b$

pues $b \in \mathbf{N}$ como $ax - by = 1$ resulta $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H$. En consecuencia dados $a, b \in \mathbf{N}$ primos entre si existen $d, c \in \mathbf{N}$ verificando $d \leq b$, $c \leq a - 1 \leq a$ y $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H$ con lo que $\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2} \geq \frac{1}{a^2+b^2+a^2+b^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{a^2+b^2}$. En consecuencia obtenemos :

$$\cdots \geq \frac{1}{2} \sum_{a,b \text{primos entre si}} \frac{1}{a^2+b^2}$$

Comprobemos que está última serie diverge. Para ello sea

$$\frac{\pi^2}{6} \sum\nolimits_{a,b\text{primos entre si}} \frac{1}{a^2+b^2} =$$
$$= \left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^2}\right)\left(\sum_{a,b\text{primos entre si}} \frac{1}{a^2+b^2}\right) \geq$$
$$\geq \sum_{m,n=1 \quad m \neq n}^{\infty} \frac{1}{m^2+n^2} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2+n^2} - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2} =$$
$$= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2+n^2} - \frac{\pi^2}{12} \geq \int_1^{\infty}\int_1^{\infty} \frac{dx\,dy}{x^2+y^2} - \frac{\pi^2}{12} =$$
$$= \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} \int_1^{\infty} \frac{d(\frac{y}{x})}{1+\frac{y^2}{x^2}} - \frac{\pi^2}{12} = \int_1^{\infty} \mathrm{arctg}(\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}})|_1^{\infty} \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}} - \frac{\pi^2}{12} =$$
$$= \int_1^{\infty} (\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}(\frac{1}{\mathrm{x}}))\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}} - \frac{\pi^2}{12} =$$
$$= \int_1^{\infty} \mathrm{arctgx}\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}} - \frac{\pi^2}{12} = \infty$$

4) $g_3(\tau) = \frac{8\pi^6}{27}(1 - 504\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_5(k) e^{2\pi i k t})$
[APOSTOL] 1.18 pág. 20.
5) Sea $f(w) = \frac{8\pi^6}{27}(1 - 504\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_5(k)w^k)$ con $|w| < 1$ y $(a_n)_n$ sus ceros en el disco. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |a_n|) = \infty$
Si $(a_n)_n$ son los ceros de $f(w)$ es claro que los ceros de $g_3(\tau)$ son de la forma

$\eta_{k,n} = \frac{1}{2\pi i} log a_k = n + \frac{arg(a_k)}{2\pi} - i\frac{log|a_k|}{2\pi}$, en consecuencia

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{\Im\eta_{k,n}}{1+|\eta_{k,n}|^2} = \sum_k \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{-\frac{log|a_k|}{2\pi}}{1+(n+\frac{arg(a_k)}{2\pi})^2 + (\frac{log|a_k|}{2\pi})^2} \leq$$

$$\leq \sum_k \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{-\frac{log|a_k|}{2\pi}}{1+(n+\frac{arg(a_k)}{2\pi})^2} \leq \cdots$$

Por ser $-1 \leq \frac{arg(a_k)}{2\pi} \leq 1$ se obtiene

$$\cdots \leq \sum_k -\frac{log|a_k|}{2\pi}\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+(n+1)^2} + \sum_{n\leq -1} \frac{1}{1+(n-1)^2} + \frac{1}{2}\right) \leq$$

$$\leq \mathrm{cte} \sum_{\mathrm{k}} -\mathrm{log}|\mathrm{a_k}|$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)$ fuera convergente $\sum_k -log|a_k|$ también lo sería y en consecuencia $\sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{\Im\eta_{k,n}}{1+|\eta_{k,n}|^2}$ en contra de 3).

6) $f(w) \in A'(D)$

Basta probar que $\sigma_5(k) \in s'$ pero en [APOSTOL] pág. 135 se prueba que $\sigma_5(k) = 0(n^5)$ con lo que $f(w) \in A'(D)$.

5.28 PROBLEMA

¿ Es cierto el recíproco de 5.26? i. e. Dada una sucesión $(a_n)_n$ en el disco unidad verificando $\sum_n (1-|a_n|)^{1+\epsilon} < \infty$ ¿ existe $f \in A'(D)$ tal que $f(a_n) = 0$.

5.29 COROLARIO. *Existe $u \in (S^+)'$ tal que para toda $v \in (S^+)'$ $u * v \notin L^p$ con $1 \leq p \leq 2$.*

DEMOSTRACION

En efecto, sea u tal que $\tilde{u}(z) = g_3(z)$, con g_3 la función que aparece en el ejemplo anterior. Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que existiera $w \in (S^+)'$ tal que $u * w \in L^p$ para cierto p con $1 \leq p \leq 2$. Sea $f(z) = \widetilde{u * w}(-z)$. Si $f \in H^q(\Pi^+)$ con q exponente conjugado de p, por [GARNETT] pág. 55, sus ceros en el semiplano superior verifican $\sum_n \frac{\Im z_n}{1+|z_n|^2} < \infty$ (1). Pero como $f(z) = \widetilde{u * w}(-z) = \tilde{u}(-z)\tilde{w}(-z) = g_3(-z)\tilde{w}(-z)$ hay contradicción, pues los ceros de g_3 según 3) del ejemplo anterior, no verifican (1).

Probemos pues que $f \in H^q(\Pi^+)$.

Puesto que $u * w \in L^p$ con $1 \leq p \leq 2$, $\widehat{u * w}(-t) \in L^q$.

Probemos previamente que existe una función $h \in H^q(\Pi^+)$ tal que $\widehat{u * w}(-t)$ es el límite no tangencial de h. Por [GARNETT] pág. 88 2 iii), es suficiente probar que si $g \in H^p$ entonces $\int \widehat{u * w}(-t)g(t)\, dt = 0$. Pero si $g \in H^p$ con $1 \leq p \leq 2$, por [GARNETT] pág. 88 2 iv) $\hat{g}(s) = 0$ si $s < 0$, como $\text{sop}(\mathrm{u} * \mathrm{w}) \subset [0, +\infty)$, resulta:

$$\int \widehat{u * w}(-t)g(t)\, dt = (2) = \int (u * w)(s)\hat{g}(-s)\, ds = 0$$

(para garantizar (2), ver teorema 0.32 del capítulo 0).

Sea pues $h \in H^q(\Pi^+)$ tal que $\widehat{u * w}(-t)$ es el límite no tangencial de h. Bastará probar que $h = f$.

Ahora por [GARNETT] pág. 53 y pág. 57

$$|h(-z)| \leq \text{cte}\frac{1}{(-\Im \mathrm{z})^{\frac{1}{q}}} \qquad (3)$$

$$\text{y } h(t + iy) \text{converge en } L^q \text{ a } \widehat{u * w}(t) \text{ cuando } y \text{ tiende a } 0^+ \qquad (4)$$

Por (3) y 3.7 $h(-z) \in A'(\Pi^-)$ y en consecuencia existe $v \in (S^+)'$ con $h(-z) = \tilde{v}(z)$. De (4) deducimos que $h(t + iy) = \tilde{v}(-t - iy)$ converge a $\widehat{u * w}(t)$ en S' cuando y tiende a 0^+. Por 1.16 $\hat{v} = \widehat{u * w}$ y en consecuencia $v = u * w$ de donde $h = f$.

Para finalizar, aunque queda un poco alejado del contexto general, planteamos el siguiente problema:

5.30 PROBLEMA

Sean $f \in L^p(\mathbf{R})$ y $g \in L^q(\mathbf{R})$, con p y q exponentes conjugados, tales que $\mathrm{sop}(\hat{\mathrm{f}}) \cap \mathrm{sop}(\check{\mathrm{g}}) \subset \{0\}$. ¿ Se verifica que $\int_{\mathbf{R}} f(t)g(t)\,dt = 0$?.

Damos un resultado parcial al problema anterior:

5.31 PROPOSICION. *En las condiciones del problema anterior, si* $\mathrm{sop}(\hat{\mathrm{f}})$ *y* $\mathrm{sop}(\hat{\mathrm{g}})$ *están contenidos en* $[0, +\infty)$ *(o* $(-\infty, 0]$*), entonces* $\int_{\mathbf{R}} f(t)g(t)\,dt = 0$.

DEMOSTRACION

En efecto $\widehat{fg}(s) = \hat{f} * \hat{g}(s)$, por las condiciones sobre los soportes $\mathrm{sop}(\hat{\mathrm{f}} * \hat{\mathrm{g}}) \subset [0, +\infty)$ i.e. si $s < 0$, $\widehat{fg}(s) = 0$, por [GARNETT] pág. 88 2 fg es el límite tangencial de una función de $H^1(\Pi^+)$ y de aqui, por la misma cita anterior (iii)) $\int_{\mathbf{R}} f(t)g(t)\,dt = 0$.

REFERENCIAS

[1] APOSTOL T.M.:*Modular Functions and Dirichlet series in Number Theory*

Springer-Verlag, New York (1976)

[2] ARIAS DE REYNA MARTINEZ J.: *Definición y estudio de una función indefinidamente diferenciable de soporte compacto*

Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. **76**, 21-39 (1982)

[3] BEURLING A, MALLIAVIN P.: *On the closure of characters and the zeros of entire functions.*

Acta Math. **118** , 79-93 (1967)

[4] BOAS R. P.: *Entire Functions*

Academic Press, New York (1954)

[5] DITKINE-PROUDNIKOV: *Calcul operationnel*

Editorial Mir (décima edición), Moscu (1983)

[6] ERDELYI A. [1]: *Tables of integral transforms*

Volumen 1. McGraw Hill, New York (1954)

[7] ERDELYI A. [2]: *Higher transcendental functions*

Volumen 2. McGraw Hill, New York (1953)

[8] ERDELYI A. [3]: *Tables of integral transforms*

Volumen 3. McGraw Hill, New York (1954)

[9] FRIEDLANDER F.G.: *Introduction to the theory of distributions*

Cambridge University Press, Cambridge (1982)

[10] GARNETT J.B.: *Bounded analitic funcitons*
Academic Press, New York (1981)

[11] GERRETSEN J., SANSONE G.: *Lectures on the theory of functions of a complex variable*
Volumen 1. P. Noordholf, Groningen (1960)

[12] GRADSHTEYN-RYZHIK: *Table of integrals, series and products*
Academic Press, New York (1980)

[13] HOLLAND A.S.B.: *Introduccion to the theory of entire functions*
Academic Press, New York (1973)

[14] HORVATH J.: *Topological Vector spaces and distributions*
Volumen 1. Adisson Wesley, Reading (1966)

[15] JUNEJA-KAPOOR: *Analytic functions- Growth aspects*
Pitman, Boston (1985)

[16] LEBEDEV N.N.: *Special functions and their applications*
Rover, New York (1972)

[17] ROSIER R.C.: *Dual spaces of certain vector sequence spaces*
Pac. J. Math. **46**, 487-501 (1973)

[18] RUDIN W. [1]: *Análisis funcional*
Reverte, Barcelona (1979)

[19] RUDIN W. [2]: *Análisis real y complejo*
(Tercera edición) Mc Graw-Hill, Madrid (1987)

[20] SANSONE G.: *Orthogonal functions*
Interscience, New York (1959)

[21] SCHWARTZ L.: *Theorie de distritutions*
Hermann, Paris (1950)

[22] SCHWATT I.J.: *Operatons with series*
Chelsea (Segunda Edición), New York

[23] SHOAT and TAMARKIN: *The problen of moments*
American Mathematical Society, Providence (1943)

[24] SIEGEL A.R.: *On the Muntz-Szàsz theorem*
Proc. Amer. Math. Soc., **36**, 161-166 (1972)

[25] TILLMANN H.G.: *Darstellung der Schawartschen distributionen dusch analytische funktionen*
Math. Zeitschr., **77**, 106-124 (1961)

[26] TITCHMARSH E.C.: *Theory of Fouriers integrals*
Oxford University Press, London (1948)

[27] TREVES F.: *Topological vector spaces, distributions and kernels*
Academic Press, New York (1967)

[28] VALDIVIA M.: *Interpolación en espacios de funciones holomorfas con desarrollos asintóticos*
Por aparecer.

[29] VO-KHAC-KHOAN [1],[2]: *Distributions analyse de Fourier, operateurs aux derivees partielles*
Vuibert, Paris (1972)

[30] YU-CHENG-SHEN: *The identical vanishing of the Laplace integrals*
Duke Math. J., **14**, 967-973 (1947)

[31] ZEMANIAN A.H.: *Generalized integral transformation* Interscience publishers, New York (1968)

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. Antonio Durán Guardeño titulada Transformadas de Fourier y coeficientes de Fourier-Laguerre de distribuciones temperadas con soporte positivo acordó otorgarle la calificación de Apto 'Cum laude' por unanimidad

Sevilla, 14 de Julio 1988

El Vocal,	El Vocal,	El Vocal,
		Luis Bernal
El Presidente	El Secretario,	El Doctorado,