

TESIS

Dinámica de Sistemas Multicuerpo Rígido-flexibles en Coordenadas Absolutas

por

DANIEL GARCÍA VALLEJO

Ingeniero Industrial

presentada en la

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE
INGENIEROS**

de la

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

para la obtención del
Grado de Doctor Ingeniero Industrial

Sevilla, Junio de 2006

Dinámica de Sistemas Multicuerpo
Rígido-flexibles en Coordenadas Absolutas

Sevilla, Junio de 2006

Fdo.- Juana María Mayo Núñez
Directora de Tesis

Fdo.- Jaime Domínguez Abascal
Director de Tesis

Fdo.- Daniel García Vallejo
Doctorando

A mis padres y a mis hermanos
con todo mi cariño.

Agradecimientos

Mis primeras palabras de agradecimiento quiero dedicarlas a quienes en mi corazón van primero: mis padres y mis hermanos. A mi familia le debo las pocas virtudes con las que he contado para realizar esta tesis. Por eso, este trabajo y el esfuerzo que ha supuesto están dedicados a ellos con la misma dulzura con la que ellos me han dedicado su apoyo y su cariño.

Durante el curso 2000-2001, cuando terminaba la carrera en la E.T.S. de Ingenieros Industriales de Málaga, tuve la enorme suerte de conocer al profesor Antonio González, quien despertó en mí el interés por la investigación y me aconsejó que siguiera el camino en el que me encuentro. Durante todo este tiempo su amistad ha sido un gran apoyo.

En el año 2003 tuve la oportunidad de visitar la Universidad de Illinois en Chicago y trabajar durante seis meses con el profesor Ahmed Shabana, a quien quiero agradecer sus enseñanzas y su atención. Al año siguiente, realicé una estancia en la Universidad Tecnológica de Lappeenranta para trabajar con el profesor Aki Mikkola. Siempre recordaré esos cuatro meses con una intensidad especial. Su dedicación, su ilusión y su capacidad de ilusionar dejaron en mi una huella imborrable.

Quiero, también, expresar mi agradecimiento a mis compañeros del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Sevilla, así como a mis directores de tesis, Juana Mayo y Jaime Domínguez. Muy especial es mi gratitud hacia Juan Valverde, Luis Bohórquez, Mercedes García, Sergio Muñoz, Manuel Sánchez

y José Luis Escalona, quienes con simpatía me han hecho las cosas más fáciles y me han regalado su amistad.

Por último, quiero dar las gracias a todos mis amigos, que desde más lejos o más cerca me han ayudado con cariño y comprensión en muchos momentos buenos y en otros no tan buenos. Muchas gracias, Quino, Diana, María, Pablo, Susana, Juan Pablo, Edu, Ale, Clara, Rafael Mendiola...

Sevilla, Junio de 2006

Índice general

1. Dinámica de Sistemas Multicuerpo	1
1.1. Introducción	1
1.2. Tipos de coordenadas usadas en Dinámica de Sistemas Multicuerpo	5
1.2.1. Coordenadas usadas para describir sólidos rígidos	6
1.2.2. Coordenadas usadas para describir sólidos flexibles	8
1.3. Objetivos de este estudio	14
2. Introducción a las técnicas de la Dinámica de Sistemas Multi-	
cuerpo	17
2.1. Tipos de análisis en Dinámica de Sistemas Multicuerpo	18
2.2. Ecuaciones del movimiento de un sistema multicuerpo	20
2.3. Dinámica del sólido rígido en coordenadas naturales	22
2.3.1. Dinámica del sólido rígido con movimiento plano	23
2.3.2. Dinámica del sólido rígido en el espacio	27
2.4. Dinámica del sólido flexible en coordenadas nodales absolutas . . .	31
2.4.1. Elementos viga tipo Euler-Bernoulli con movimiento plano	33
2.4.2. Elementos viga de Omar	38
2.4.3. Elementos viga de Yakoub	42
2.4.4. Elementos viga de Dufva	45
2.4.5. Otras formulaciones de elementos basados en ANCF	49
2.5. Integración de las ecuaciones del movimiento	51

4.5.4. Par de revolución	141
4.5.5. Par cilíndrico	145
4.5.6. Par prismático	151
4.5.7. Junta Universal	154
4.5.8. Tabla resumen de las ecuaciones de restricción anteriores .	155
4.6. Deslizamiento sobre trayectorias curvas o flexibles	157
4.6.1. Par con deslizamiento sobre trayectoria flexible	158
4.6.2. Par de deslizamiento a lo largo de una trayectoria curva indeformable	167
5. Aplicación de la formulación rígido-flexible	169
5.1. Mecanismos RF con movimiento plano	170
5.1.1. Mecanismo de tres barras	170
5.1.2. Mecanismo de cuatro barras	176
5.2. Mecanismos RF con movimiento espacial	178
5.2.1. Mecanismo espacial de cuatro barras	178
5.2.2. Simulación dinámica de una pala de rotor de helicóptero conectado a eje rígido	184
6. Estudio del efecto de rigidización geométrica	191
6.1. El efecto de rigidización geométrica	193
6.2. Modelo de un elemento basado en elasticidad lineal	195
6.2.1. Ecuaciones del movimiento	196
6.2.2. Análisis modal	201
6.3. Modelado mediante la formulación de referencias flotantes frente a la formulación en coordenadas nodales absolutas	204
6.4. Formulación en coordenadas nodales absolutas	205
6.4.1. Primer elemento	206
6.4.2. Segundo elemento	207
6.4.3. Conectividad de los elementos	210

6.4.4. Análisis modal	213
6.5. Modelado con la formulación en referencias flotantes	216
6.6. Formulación en referencias flotantes modificada	218
6.7. Conclusión sobre el análisis lineal	222
6.8. Análisis mediante elementos finitos no lineales	224
6.8.1. Modelo plano	227
6.8.2. Modelo espacial	229
7. Simulación de una transmisión por correa entre dos poleas	231
7.1. Análisis mediante el MEF de transmisiones por correa	232
7.2. Formulación del elemento tipo correa	234
7.3. Modelo de fuerzas de contacto en la interacción correa-polea	238
7.3.1. Fuerzas normales en la zona de contacto	240
7.3.2. Fuerzas tangenciales debidas a la fricción	241
7.3.3. Par transmitido por la correa a la polea conducida	243
7.4. Ecuaciones del movimiento del sistema	244
7.5. Resultados numéricos en velocidades y tensiones de contacto	246
8. Resumen y conclusiones	255
8.1. Resumen	255
8.2. Conclusiones	258
8.3. Contribuciones originales de esta tesis	264
8.4. Publicaciones derivadas de esta tesis	265
8.5. Líneas de investigación futuras	266
A. Transformación ortogonal y linealización de las fuerzas elásticas	267
A.1. Rotación de la función de fuerzas elásticas	267
A.2. Rotación de la matriz de masa	271
A.3. Linealización de las fuerzas elásticas	271

Índice de tablas

3.1. Influencia del número de elementos.	78
3.2. Influencia del tiempo de simulación.	79
4.1. Tabla resumen de los pares cinemáticos.	156
5.1. Propiedades de las barras rígidas.	179
6.1. Propiedades de la viga.	202
6.2. Tiempos de CPU empleados para cada integrador.	229
7.1. Parámetros del modelo de la transmisión.	247

Índice de figuras

1.1. Ejemplo de un sistema multicuerpo.	2
1.2. Coordenadas de punto de referencia y coordenadas relativas.	7
1.3. Sistema de referencia flotante.	9
1.4. Sistemas de referencia co-rotacionales.	11
2.1. Sólido rígido con movimiento plano.	23
2.2. Sólido rígido descrito por cuatro puntos básicos.	27
2.3. Sistemas de referencia locales del elemento.	37
2.4. Dos configuraciones posibles del elemento finito.	39
2.5. Coordenadas nodales del elemento viga tridimensional.	43
2.6. Configuraciones de referencia y deformada del elemento finito.	46
3.1. Movimiento general de un sólido.	59
3.2. Correspondencia biunívoca entre los puntos de la configuración rec- ta y los de las configuraciones de referencia y real.	60
3.3. Configuraciones de referencia paralelas.	72
3.4. Configuraciones de referencia rotadas.	74
3.5. Deflexión del extremo libre de la viga.	80
3.6. Energía de deformación elástica de la viga.	81
3.7. Sistema de dos masas concentradas conectadas por muelle y amor- tiguador.	83

3.8. Esquema de la viga sujeta a traslación.	99
3.9. Desplazamiento relativo de un extremo respecto al centro.	100
3.10. Velocidad del punto medio de la viga.	101
3.11. Balance de energía en la viga.	102
3.12. Influencia del factor de amortiguamiento.	102
3.13. Viga rotando alrededor de un eje perpendicular.	103
3.14. Deflexión del extremo libre de la viga.	104
3.15. Velocidad de giro del extremo libre de la viga.	105
3.16. Evolución de las energías cinética y elástica.	106
4.1. Coordenadas naturales de un punto básico y coordenadas nodales absolutas de un nodo.	109
4.2. Sistema rígido-flexible.	111
4.3. Triedro de la sección transversal.	129
4.4. Unión rígida.	134
4.5. Ángulos formados por los triedros de la sección y del sólido rígido.	136
4.6. Unión rígida en el caso plano.	138
4.7. Par esférico.	140
4.8. Par de revolución en el caso plano.	141
4.9. Par de revolución.	142
4.10. Esquema del par de revolución.	143
4.11. Par cilíndrico.	146
4.12. Esquema del par cilíndrico.	147
4.13. Par de deslizamiento.	150
4.14. Par prismático.	151
4.15. Esquema del par prismático.	152
4.16. Junta universal.	154
4.17. Par con deslizamiento y una rotación restringida.	158
4.18. Par de deslizamiento sobre trayectoria curva.	167

5.1. Mecanismo RF con deslizamiento sobre barra flexible.	170
5.2. Desplazamiento transversal del extremo de la barra flexible.	171
5.3. Convergencia del modelo de sección reducida.	172
5.4. Trayectoria del extremo de la barra O_1B	173
5.5. Coordenada s y elemento en contacto.	174
5.6. Balance de energía.	175
5.7. Mecanismo RF de 4 barras.	176
5.8. Momento en el par de deslizamiento.	177
5.9. Mecanismo cuatro barras espacial.	179
5.10. Desplazamiento por deformación según y local.	180
5.11. Distancia $E-C$	181
5.12. (a) Desplazamiento según y local ($E=10$ GPa) (b) Desplazamiento según z local ($E=10$ GPa).	182
5.13. (a) Desplazamiento según y local ($E=5$ GPa) (b) Desplazamiento según z local ($E=5$ GPa).	183
5.14. (a) Distancia $E-C$ ($E = 10$ GPa) y (b) Distancia $E-C$ ($E = 5$ GPa)	184
5.15. Esquema de la conexión de la pala al eje.	185
5.16. Movimiento de lead-lag de la pala.	188
5.17. Movimiento longitudinal del extremo de la pala.	189
5.18. Lead-lag, flap y desplazamiento longitudinal del extremo de la pala durante un ciclo de rotación (0.2325 s).	190
6.1. Modelo de un elemento.	196
6.2. Desplazamiento transversal ($\omega=4$ rad/s).	203
6.3. Modelo de dos elementos de la viga.	205
6.4. Sistemas de referencia usados.	207
6.5. Velocidad crítica adimensional.	213
6.6. Velocidad crítica adimensional de varios modelos.	214
6.7. Desplazamiento transversal ($\omega=8$ rad/s).	215
6.8. Movimiento de un elemento finito.	220

6.9. Viga sometida a rotación.	226
6.10. Desplazamiento transversal del extremo libre ($\Omega = 2$ rad/s).	227
6.11. Desplazamiento transversal del extremo libre ($\Omega = 4$ rad/s).	228
6.12. Desplazamiento transversal del extremo libre ($\Omega = 2$ rad/s).	230
6.13. Desplazamiento transversal del extremo libre ($\Omega = 4$ rad/s).	230
7.1. Posición del punto P del elemento finito.	235
7.2. Interacción de la correa y la polea.	239
7.3. Ley de fricción trilineal.	241
7.4. Esquema del sistema de transmisión.	246
7.5. Velocidad angular de la polea conducida para distinto número de elementos.	248
7.6. Influencia de la rigidez de la correa.	249
7.7. Influencia del parámetro v_s	250
7.8. Relación de transmisión para distinto radio.	251
7.9. (a) Fuerza normal de contacto de cada polea ($v_s=1\cdot 10^4$ Kg/ms) (b) Fuerza de fricción de cada polea ($v_s=1\cdot 10^4$ Kg/m s).	252
7.10. (a) Fuerza normal de contacto de cada polea ($v_s=1\cdot 10^5$ Kg/ms) (b) Fuerza de fricción de cada polea ($v_s=1\cdot 10^5$ Kg/m s).	253

Capítulo 1

Dinámica de Sistemas

Multicuerpo

1.1. Introducción

Desde los sorprendentes diseños de Leonardo da Vinci hasta nuestros días, la complejidad de los mecanismos que el hombre ha utilizado en sus ingenios no ha hecho más que aumentar. Materiales más ligeros, diseños más económicos, condiciones de funcionamiento más duras, etc. son algunos de los objetivos a los que se enfrentan los ingenieros mecánicos de nuestros días. Afortunadamente, la dificultad a la que hoy día nos enfrentamos es un reflejo del grado de desarrollo que se ha alcanzado en Ingeniería Mecánica.

Un mecanismo puede ser entendido como un conjunto de sólidos interconectados con el propósito de transferir el movimiento y/o fuerza de una fuente a una salida [1]. Del estudio de mecanismos se ha ocupado tradicionalmente la Teoría de Máquinas y Mecanismos. La complejidad en el diseño de mecanismos parece ilimitada y, por tanto, el interés que despierta esta parte de la mecánica ha ido creciendo con el tiempo. Desde muy temprano se entiende la necesidad de una es-

tandarización en el estudio de los sistemas mecánicos, dada la cantidad de grupos que dedicaban su investigación a estos sistemas. Así, en 1977, respaldado por la IUTAM (International Union of Theoretical and Applied Mechanics), tiene lugar en Munich el primer symposium internacional sobre lo que se empezó a denominar *Multibody Dynamics*. Al objeto de tal symposium se le suele denominar en castellano como *Dinámica de Sistemas Multicuerpo* (DSM). En un sistema multicuerpo como el ejemplo de la figura 1.1, en general, pueden encontrarse sólidos rígidos y flexibles interconectados mediante pares cinemáticos y sometidos a la acción de fuerzas externas y/o restricciones de movimiento.

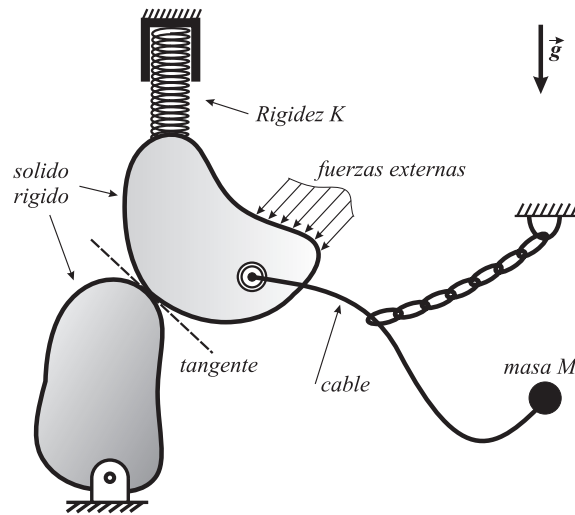


Figura 1.1: Ejemplo de un sistema multicuerpo.

El primer libro de texto enteramente dedicado a la dinámica de sistemas multicuerpo aparece en 1977 escrito por Wittenburg [2]. Si bien, esta disciplina podría haber permanecido dentro de la conocida Teoría de Máquinas y Mecanismos, hoy día es tal la especialización y el grado de desarrollo alcanzados que parece haberse constituido en una rama de la Mecánica Clásica. El enfoque computacional parece ser un rasgo común a los trabajos que se enmarcan dentro de la DSM y que les

confiere un carácter no siempre presente en todo el ámbito de la Cinemática y Dinámica de Máquinas.

El siguiente congreso internacional en torno a la DSM tuvo lugar en Iowa City en 1983 y fue organizado por NATO Advanced Study Institute. De esta forma, en nuestros días son numerosos los organismos que concentran su interés en la DSM y en casi todos los congresos de Ingeniería Mecánica se incluye una sesión sobre DSM. Cabe resaltar que durante el año 2005 se ha organizado por primera vez en España, con sede en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid, un congreso ECCOMAS (European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering) exclusivamente dedicado a la DSM con gran afluencia de participantes. El interés sigue creciendo de forma que, hoy día, las técnicas de la DSM ya consolidadas se exportan a otros campos de la técnica, como la dinámica de vehículos ferrocarriles [3] o de satélites [4], y no dejan de aparecer aplicaciones en las que estas técnicas representan una atractiva alternativa, como en análisis de sistemas nano o micro electro-mecánicos [3, 5].

Otra prueba del estado de madurez que ha alcanzado la DSM es la cantidad de artículos de revisión que pueden encontrarse en la bibliografía. En el año 1997, nace la revista internacional *Multibody System Dynamics* incluyendo en su primer número dos artículos de revisión firmados por los doctores A. Shabana [6] y W. Schielen [3]. En dichos trabajos se hace un recorrido por la historia de la DSM y se apuntan algunas de las aplicaciones que más interés empezaban a suscitar. En la actualidad hay ya dos revistas internacionales, *Multibody System Dynamics* y *Journal of Multi-body Dynamics*, dedicadas exclusivamente a la DSM. Wasfy y Noor [5] han publicado durante 2003 una exhaustiva revisión bibliográfica de los trabajos realizados en el campo de la DSM. En dicho artículo se clasifican las distintas formulaciones en tres grupos de acuerdo al tipo de sistema de referencia usado para definir las variables del sistema. Estos tres grupos son los métodos que usan referencias flotantes, los que usan un sistema de referencia co-rotacional y los

que usan el sistema inercial únicamente. En la sección siguiente, donde se hace un breve repaso de los trabajos realizados en la DSM, se sigue la misma clasificación que la adoptada por Wasfy y Noor [5].

Las herramientas desarrolladas por la DSM se sustentan por las más elementales leyes de la física. De hecho, ya d'Alembert en 1743 [7] planteó las ecuaciones de un sistema compuesto por sólidos rígidos sujetos a ciertas restricciones que eran contempladas mediante fuerzas de reacción. No obstante, el primer análisis sistemático de un sistema de sólidos interconectados fue realizado por Lagrange en 1788 [7] sentando las bases de lo que hoy se conoce como Mecánica Analítica. Las ecuaciones de primera y segunda especie presentadas por Lagrange [7] constituían los sistemas DAE (Differential Algebraic Equations) y ODE (Ordinary Differential Equations) que describen el movimiento de los sistemas mecánicos. Desgraciadamente, no había, entonces, técnicas numéricas ni ordenadores que permitieran obtener la solución de cualquier sistema. Hoy día, al contrario que entonces, en la mente del ingeniero analista no se contempla la posibilidad de que la dinámica de un sistema no pueda ser desgranada con ayuda de alguna de las técnicas de la DSM. Sin embargo, la complejidad de las ecuaciones de movimiento ha motivado la búsqueda de procedimientos que permitan obtenerlas con el menor esfuerzo posible. Una amplia revisión de estos procedimientos puede encontrarse en el trabajo publicado por H. Bremer [8].

El desarrollo de la informática y de las técnicas numéricas ha sido, por tanto, vital para la consolidación de la DSM. Incluso se han comercializado varios programas de propósito general para el análisis de sistemas multicuerpo como ADAMS o DADS. La facilidad de comunicación que brinda internet ha permitido pensar en la creación de un código abierto que pueda ser usado por cualquier grupo de investigación, para lo cual la estandarización es primordial. Por tanto, la Dinámica de Sistemas Multicuerpo sigue experimentando un continuo desarrollo a la vez que ofrece herramientas en un aceptable estado de madurez.

1.2. Tipos de coordenadas usadas en Dinámica de Sistemas Multicuerpo

En un sistema multicuerpo, el movimiento absoluto de un sólido con respecto a una referencia, la cual se define mediante un sistema de coordenadas inercial, puede considerarse como la superposición de grandes rotaciones y deformaciones dependiendo de la flexibilidad de éste. Dicho movimiento con respecto al sistema inercial se define matemáticamente a partir de la evolución temporal de un conjunto de variables. Si el sólido es rígido, existe un número mínimo de variables cuya evolución temporal define completamente el movimiento del sólido. Este conjunto mínimo de variables constituye el número de grados de libertad del sólido. Así, para un sólido rígido libre, es decir, que no está sujeto a restricciones de movimiento, el número de grados de libertad es tres, cuando su movimiento es plano, y seis, cuando su movimiento es espacial. No obstante, el movimiento de un sólido rígido puede describirse mediante otro conjunto más numeroso de variables que satisfacen ciertas relaciones entre sí. En este caso dichas relaciones se traducen en ecuaciones de restricción que hay que añadir al sistema de ecuaciones diferenciales de movimiento. Como se verá a continuación, el tipo de variables a usar puede ser muy variado.

En el caso de sólidos flexibles el número de grados de libertad es infinito. Así, puede pensarse que el movimiento de cada punto material es independiente del de los demás puntos aunque esté sujeto a la acción de las fuerzas internas debidas a la flexibilidad del sólido. Por tanto, se entiende que si un sólido en un sistema puede ser considerado rígido, se obtendrá una gran reducción en el número de coordenadas a usar.

Existe cierta libertad a la hora de elegir el tipo de variables a usar, siendo dicha elección, el aspecto que mejor caracteriza la formulación en cuestión. A continuación se repasará con brevedad los tipos de coordenadas que se han usado para describir la dinámica de sistemas multicuerpo rígidos, en primer lugar, y

flexibles, posteriormente.

1.2.1. Coordenadas usadas para describir sólidos rígidos

La dinámica de los sólidos rígidos que componen un determinado sistema multicuerpo puede describirse mediante distintos conjuntos de coordenadas. En algunos casos es posible utilizar las ecuaciones de Lagrange de segunda especie, es decir, utilizando un conjunto mínimo de coordenadas igual al número de grados de libertad del sistema [7]. En este caso se habla de *coordenadas independientes*. Sin embargo, el uso de este tipo de coordenadas no resulta sistemático y, por tanto, la programación de las ecuaciones de movimientos se reduce a casos particulares: un programa para cada aplicación.

Frente a las coordenadas independientes, existe la posibilidad de usar un conjunto más numeroso de variables para obtener un sistema de ecuaciones menos complicado. En ese caso, las variables deben satisfacer ciertas relaciones entre sí que constituyen las ecuaciones de restricción. Así, el problema dinámico se puede formular de acuerdo a las ecuaciones de Lagrange de primera especie, que constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas, y al conjunto de coordenadas se las denomina *dependientes*. Existen ciertas diferencias entre el uso de coordenadas *dependientes* e *independientes* [9], siendo la principal, la mayor complejidad de las ecuaciones en coordenadas independientes.

Entre las coordenadas dependientes, se contemplan las coordenadas *relativas* y las *coordenadas de punto de referencia* o *cartesianas*. Las coordenadas relativas refieren la posición u orientación de un sólido respecto a otro [10]. En cambio, las coordenadas de punto de referencia o cartesianas refieren la posición y orientación de cada sólido respecto al sistema global [11]. Generalmente, las coordenadas de punto de referencia contienen las componentes de un vector de posición y un conjunto de ángulos o parámetros angulares que definen la orientación de un sistema de referencia del sólido respecto al sistema global. En la figura 1.2, se representan dos sólidos rígidos que están conectados por un par de revolución. En dicha figura,

la posición del sólido rígido j se describe simultáneamente mediante dos conjuntos de coordenadas: de punto de referencia, \mathbf{R}^j y θ^j , y relativas al sólido i , ${}^i\mathbf{R}^j$ y ${}^i\theta^j$. Las coordenadas relativas dan lugar a un menor número de ecuaciones que las coordenadas de punto de referencia, pero con un alto grado de no linealidad y, por este motivo, es más difícil su utilización en programas de propósito general.

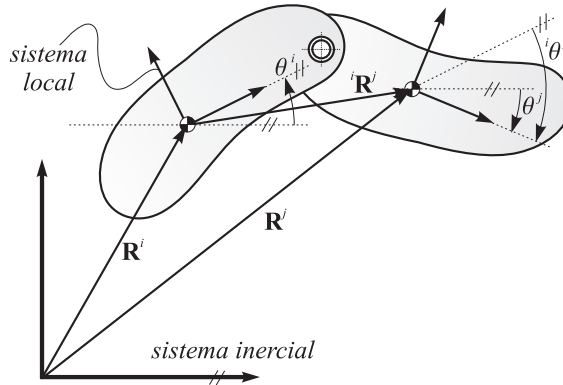


Figura 1.2: Coordenadas de punto de referencia y coordenadas relativas.

En la década de los ochenta aparece un nuevo método basado en coordenadas totalmente cartesianas para el estudio de la dinámica de sistemas multicuerpo rígidos. Las coordenadas usadas en el nuevo método se dan a conocer como *coordenadas naturales* [12, 13]. Previamente y con la denominación de coordenadas básicas [14, 15], este tipo de coordenadas se había usado en problemas cinemáticos, demostrando ser un procedimiento prometedor para análisis dinámicos. A diferencia de las coordenadas de punto de referencia, que usan ángulos o parámetros angulares [16], las coordenadas naturales se componen de vectores de posición de puntos materiales o vectores que definen trayectorias en los sólidos [12], es decir, coordenadas exclusivamente cartesianas. El método de las coordenadas naturales permite compartir coordenadas entre distintos sólidos puesto que generalmente las coordenadas utilizadas pertenecen a puntos o vectores que definen los pares cinemáticos que conectan sólidos entre sí. Esta característica permite una enorme reducción

en el número de coordenadas total requerido para modelar un mecanismo. Unda *et al.* [17] realizan un estudio comparativo entre el uso de coordenadas naturales y de punto de referencia. Los autores concluyen que el número de coordenadas naturales es siempre menor que el de coordenadas de referencia. Además, la formulación en coordenadas naturales utiliza restricciones cinemáticas más sencillas que la de punto de referencia y la estructura de la matriz jacobiana de las restricciones en ambas formulaciones es igualmente dispersa. Unda *et al.* [17] estudian también diversas posibilidades para la obtención de las ecuaciones de movimiento, concluyendo que la resolución en coordenadas independientes es la alternativa más eficiente cuando se usan las coordenadas naturales. Igualmente, este procedimiento conserva el carácter sistemático que permite su utilización para el desarrollo de programas de propósito general. No obstante, el número de coordenadas naturales, también llamadas coordenadas de elementos finitos [18], sigue siendo mayor que el de coordenadas relativas [13].

1.2.2. Coordenadas usadas para describir sólidos flexibles

La descripción de la deformación que experimenta un sólido flexible durante el movimiento requiere el uso de un número adicional de coordenadas. Son numerosos los procedimientos que se han usado en Dinámica de Sistemas Multicuerpo Flexibles, cada uno de ellos caracterizado por una determinada elección de las coordenadas, medida de las deformaciones, etc. Resultaría muy complicado hacer aquí un detallado repaso de la bibliografía relacionada con sistemas multicuerpo flexibles. No en vano, en el artículo de revisión publicado en 2003 por Wasfy y Noor [5] se incluyen 877 referencias. En esta sección, se ha optado por seguir el mismo criterio de clasificación que dichos autores, atendiendo más bien a los sistemas de referencia usados para medir la deformación que al tipo concreto de coordenadas.

A continuación se describen las formulaciones más usadas en dinámica de sistemas multicuerpo flexibles en base a los sistemas de referencia empleados.

Métodos de Referencias Flotantes

Este método aparece durante la década de los sesenta fruto de la investigación realizada en el campo de la dinámica de máquinas, las aplicaciones aeroespaciales y el método de elementos finitos [6]. Como una extensión lógica de las formulaciones basadas en coordenadas de punto de referencia, la formulación en referencias flotantes utiliza la descripción del movimiento de un sistema de referencia móvil ligado al sólido para representar las grandes rotaciones que experimenta el sólido (figura 1.3).

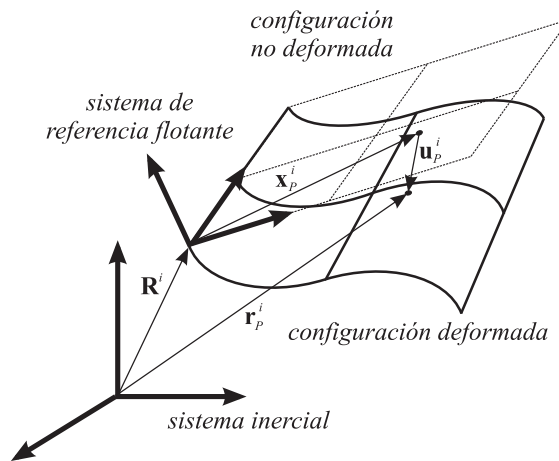


Figura 1.3: Sistema de referencia flotante.

El movimiento de este sistema de referencia se puede describir mediante alguno de los conjuntos de coordenadas desarrollados para sólidos rígidos. Generalmente, los más usados han sido las coordenadas de punto de referencia, tomando como tal punto el origen del sistema de referencia flotante y ángulos o parámetros angulares para definir la orientación del sistema de referencia flotante [19]. También las coordenadas naturales se han empleado satisfactoriamente para describir el sistema de referencia flotante [20].

El movimiento total está compuesto por la suma de la deformación del sólido

respecto a la configuración no deformada, descrita por el sistema de referencia flotante, y del movimiento de dicho sistema (figura 1.3). La deformación del sólido respecto al sistema de referencia flotante se ha descrito mediante diferentes técnicas como la expansión modal [20] o el método de elementos finitos [19]. En caso de usar una discretización de elementos finitos que describen traslaciones de sólido rígido, es necesario utilizar un sistema de referencia intermedio que es paralelo al sistema de referencia del elemento en su configuración indeformada para modelar correctamente el movimiento de sólido rígido del elemento [21]. El movimiento total del sólido flexible resulta de la superposición del movimiento del sistema de referencia flotante y de la deformación del sólido con respecto a tal sistema. Este procedimiento es apropiado para aplicaciones en las que las deformaciones son pequeñas, aunque no linealidades como la rigidización geométrica han podido abordarse mediante esta formulación [22]. La formulación en referencias flotantes presenta como característica el acoplamiento entre los distintos términos de inercia y la presencia de términos cuadráticos en velocidades debidos a fuerzas de inercia centrífugas y de Coriolis. Además, esta formulación permite hacer uso de la síntesis modal de componentes [19] para reducir el número de coordenadas del sistema, de forma que puede reducirse considerablemente el tiempo del cálculo.

Métodos Co-rotacionales

Las formulaciones co-rotacionales utilizan un sistema de referencia, llamado sistema co-rotacional, que sigue aproximadamente el movimiento como sólido rígido de cada elemento finito. Así, esta formulación es diferente de la formulación en referencias flotantes, que usa un único sistema de referencia para todos los elementos de un mismo sólido. Este procedimiento fue inicialmente usado por Belitschko y Hsieh [23] para elementos triangulares planos y viga de dos dimensiones. En estos métodos, el sistema co-rotacional se puede construir de diversas maneras como se muestra en la figura 1.4. Por ejemplo, en elementos tipo placa se puede construir de forma que dos de los vectores unitarios estén contenidos en el plano definido

por las líneas que unen nodos opuestos de un elemento, sin embargo, esto puede producir algunas asimetrías en el comportamiento [5]. También pueden seguirse otros criterios según los cuales el movimiento del sistema co-rotacional no coincide con el movimiento de ningún punto del elemento finito. De esta forma, puede usarse la descomposición polar del gradiente de deformaciones o un procedimiento de minimización cuadrática de la diferencia de orientaciones de los lados del elemento y los ejes del sistema co-rotacional [5].

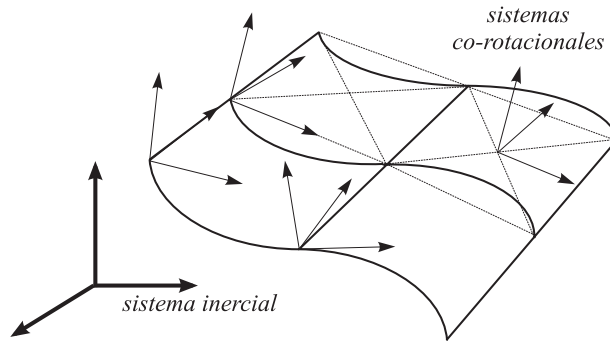


Figura 1.4: Sistemas de referencia co-rotacionales.

Esta formulación ha hecho posible utilizar elementos no isoparamétricos mediante procedimientos incrementales, dado que estos elementos sólo pueden describir rotaciones pequeñas. Sin embargo, las formulaciones incrementales no conducen a una descripción exacta de la dinámica del sólido rígido [24]. Por este motivo, es necesario utilizar métodos de integración que conserven la energía, sobre todo cuando el número de incrementos de tiempo empleados en la integración es muy elevado [23].

Debido al uso del sistema co-rotacional para la definición de las fuerzas elásticas, los efectos geoméricamente no lineales se incorporan automáticamente. A diferencia de lo que ocurre con la formulación en referencias flotantes, la síntesis modal de componentes no es aplicable en estos métodos debido a la no linealidad del vector de fuerzas elásticas.

Métodos Inerciales

Los métodos basados en coordenadas inerciales utilizan, a diferencia de los dos mencionados anteriormente, un único sistema global de referencia para describir la dinámica de los elementos de un sólido cualquiera. De esta forma, todas las variables usadas en estos métodos están definidas en el sistema global. Las primeras aplicaciones de este tipo de métodos en dinámica de sistemas multicuerpo son los trabajos de Simo [25] y Simo y Vu-Quoc [26, 27]. En el modelo de Simo, la cinemática del elemento se define con la ayuda de un triedro ortogonal móvil tal que uno de los vectores permanece normal a la sección transversal en cualquier configuración deformada [25]. Así, cualquier configuración de este modelo de viga está completamente definida si se conoce la evolución de la matriz ortogonal que representa la rotación del triedro móvil y la posición de la línea media. El autovalor real proporciona la rotación de la sección alrededor del autovector asociado, que está situado sobre la línea media. En esta formulación las ecuaciones de balance se linealizan y se integran por medio de un procedimiento numérico especial [26].

En la formulación de Simo [26], la posición de un punto arbitrario del elemento se obtiene mediante interpolación de los vectores de posición de los nodos y de la rotación de las secciones extremas. Sin embargo, es posible utilizar una descripción similar en la que, en lugar de interpolar las rotaciones que definen la orientación del triedro de la sección, se interpolen los vectores del propio triedro [28, 13]. Esta descripción tiene la particularidad de incluir restricciones no lineales que aseguran la ortogonalidad y normalidad de los vectores del triedro. Ambas formulaciones, la de Simo [25, 26] y la de Avello [28], se encuadran dentro de las llamadas formulaciones en *vectores de grandes rotaciones*.

La formulación en coordenadas nodales absolutas, *absolute nodal coordinate formulation*, o ANCF en adelante [19, 29, 30], utiliza también un conjunto de coordenadas definidas en un sistema de referencia inercial. Esta formulación se desarrolló originalmente haciendo uso de un sistema de referencia local para medir las deformaciones de los elementos finitos [19], por lo que puede considerarse

como un método co-rotacional. Berzeri *et al.* [31] estudiaron algunas de las posibilidades para definir el sistema de referencia local del elemento. Sin embargo, los posteriores trabajos en torno a esta formulación se orientaron al uso del sistema global como único sistema de referencia para medir deformaciones en los elementos finitos [32, 33, 34, 35]. Por este motivo se introdujeron en la formulación medidas de deformación no lineales como el tensor de Green-Lagrange. A partir de estos trabajos, la ANCF puede considerarse un método totalmente inercial. La característica principal de esta formulación es el uso de las derivadas parciales del vector de posición del nodo con respecto a los parámetros locales del elemento, también llamadas pendientes, como variables nodales, en lugar de pequeñas o grandes rotaciones [19]. Debido a que sólo se usan variables globales, la matriz de masa es constante y no aparecen términos debidos a fuerzas de inercia centrífugas o de Coriolis en las ecuaciones de movimiento. La ANCF, además, carece de algunos de los problemas asociados a las formulaciones incrementales de elementos finitos como es la descripción inexacta de la inercia de sólido rígido de los elementos finitos [24].

Berzeri y Shabana [32] introdujeron por primera vez el uso de medidas globales de deformación en esta formulación. En este trabajo se comparan cuatro modelos de fuerzas no lineales para elementos viga parametrizados como una línea. Estas medidas de deformación tienen en cuenta efectos geométricos no lineales, tales como las grandes deformaciones o el acoplamiento entre distintos modos de deformación. A partir del trabajo de Omar y Shabana [33], los elementos finitos isoparamétricos desarrollados en el contexto de la ANCF se parametrizan como superficies, en modelos bidimensionales, o volúmenes [34, 35, 36], en elementos viga o placa tridimensionales. Los nuevos elementos permiten la deformación por cortante, así como la deformación de la sección transversal.

El uso de una medida de deformaciones no lineal como el tensor de Green-Lagrange junto con la descripción volumétrica de la cinemática de los elementos tipo viga dan lugar a una medida inexacta de los desplazamientos por deformación

debida al bloqueo por efecto Poisson [37, 38]. Este bloqueo puede evitarse si se utiliza un valor nulo del módulo de Poisson. Sin embargo, hay algunas preguntas abiertas relativas a la baja tasa de convergencia del elemento. De hecho, el elemento bidimensional desarrollado por Kerkkänen *et al.* [39] que usa una interpolación lineal presenta un tasa de convergencia similar a la del elemento con interpolación cúbica de Omar y Shabana [33]. En este sentido, Dufva *et al.* [40, 41] han desarrollado recientemente elementos viga bidimensionales y tridimensionales basados en la ANCF que no padecen la mencionada baja tasa de convergencia. En tales elementos la rotación de la sección debida a flexión y a deformación por cortante se describe de forma separada, a diferencia de lo que ocurre en los elementos de tipo viga anteriores [33, 34].

En el capítulo siguiente se completa la revisión bibliográfica de la formulación en coordenadas nodales absolutas explicando con detalle la obtención de los elementos finitos que se usarán a lo largo de esta tesis.

1.3. Objetivos de este estudio

En la mayoría de los sistemas mecánicos suelen encontrarse elementos con una rigidez suficiente para que puedan considerarse como sólidos rígidos. Esta consideración conlleva un ahorro computacional relevante puesto que el número de variables que se necesitan para describir su dinámica puede reducirse a seis, en el caso espacial, o a tres, en el caso plano. En esta tesis, se trata pues de desarrollar una metodología que permita modelar sistemas rígido-flexibles combinando una formulación para sólidos rígidos con una formulación para sólidos flexibles. Para ello será necesario estudiar con detalle las ecuaciones asociadas a los pares cinemáticos que conectan sólidos rígidos con sólidos flexibles.

En el caso de los sólidos flexibles se ha decidido usar la formulación en coordenadas nodales absolutas. En cuanto a los sólidos rígidos se ha seleccionado una formulación también basada en coordenadas inerciales, la formulación en coorde-

nadas naturales. Así, las variables usadas para describir la dinámica de los sólidos rígidos y de los sólidos flexibles serán del mismo tipo. Se incidirá en la ventaja de usar el mismo tipo de variables en lo relativo a la formulación de restricciones y a la obtención de las ecuaciones del movimiento. En 1990, A. Avello [28] desarrolló una formulación rígido-flexible en la que también se usa un conjunto de variables inerciales o absolutas tanto para los sólidos flexibles como para los rígidos. Sin embargo, aunque los sólidos rígidos se describen de igual forma que en la presente tesis, la formulación de los flexibles se basa en la teoría de vectores de grandes rotaciones. Los elementos obtenidos con tal formulación presentan restricciones no lineales que limitan el módulo de estos vectores. Además, tales vectores y el vector de posición del nodo son independientes, lo cual puede suponer una redundancia a la hora de definir las deformaciones dentro del elemento [42]. En cambio, la formulación en coordenadas nodales absolutas aprovecha el gradiente del vector de posición para definir la rotación finita del elemento sin imponer restricciones no lineales. Por tanto, los objetivos perseguidos en el trabajo de A. Avello [28] y en la presente tesis son distintos.

Debido a su reciente aparición, algunos aspectos de la formulación en coordenadas nodales absolutas pueden mejorarse. Así, el algoritmo para la evaluación de las fuerzas elásticas de los elementos flexibles que se encuentra en la bibliografía resulta computacionalmente muy costoso y se pretende optimizar dicho algoritmo [33, 34]. A su vez, no se encuentra en la bibliografía relacionada con esta formulación ningún modelo de amortiguamiento interno. Por este motivo, el desarrollo de un modelo de amortiguamiento interno para la formulación en coordenadas absolutas es otro de los objetivos que se persiguen.

En mecanismos sometidos a rotación, el acoplamiento entre los esfuerzos axiales y de flexión es imprescindible para obtener una solución numérica aceptable [43]. Por este motivo, se pretende estudiar el comportamiento de la formulación en coordenadas nodales absolutas ante este tipo de aplicaciones. El clásico problema de la viga flexible sometida a rotación se usará para hacer un análisis detallado

mediante dicha formulación.

Capítulo 2

Introducción a las técnicas de la Dinámica de Sistemas Multicuerpo

En este capítulo se revisan algunos aspectos importantes de la Dinámica de Sistemas Multicuerpo. Estos pueden considerarse la base para las contribuciones propias de este trabajo. Así, ninguna de las secciones que componen este capítulo contienen resultados obtenidos por el autor, sino que recogen las principales herramientas de que se ha valido para llevar a cabo los desarrollos que posteriormente se acometen. En concreto, se detallan las formulaciones en coordenadas naturales y en coordenadas nodales absolutas que después se usan para describir la dinámica de los sólidos rígidos y flexibles, respectivamente. En el caso de la formulación en coordenadas nodales absolutas, se describen las formulaciones de los elementos que se usan posteriormente. Junto a estas formulaciones, se incluyen algunas ideas básicas sobre la formulación de las ecuaciones del movimiento y su integración numérica.

2.1. Tipos de análisis en Dinámica de Sistemas Multicuerpo

En sistemas multicuerpo compuestos por sólidos rígidos que experimentan grandes rotaciones se presentan fundamentalmente tres tipos de análisis: cinemático, dinámico directo y dinámico inverso. El problema cinemático es aquél en el que se requiere conocer la posición de cada uno de los sólidos que componen el sistema multicuerpo cuando se impone un determinado movimiento sobre los grados de libertad del sistema. El movimiento de tales grados de libertad se impone a través de restricciones cinemáticas en las que se especifica la evolución temporal de ciertas variables. Así, el problema cinemático consiste en resolver un sistema no lineal de ecuaciones que incluye las restricciones asociadas a los pares cinemáticos que conectan los distintos sólidos del sistema y las restricciones de movimiento antes mencionadas [16]. El sistema de ecuaciones no lineales a resolver, compuesto por las ecuaciones de restricción, puede escribirse como sigue:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

donde \mathbf{C} es el vector compuesto por las ecuaciones de restricción, \mathbf{q} es el vector de coordenadas del sistema y t representa el tiempo. Si el número de ecuaciones independientes es igual al número de coordenadas del sistema, el sistema puede resolverse. Una vez resuelto el problema de posición, las velocidades pueden obtenerse a través de un sistema de ecuaciones lineales que se obtiene derivando (2.1) como se muestra a continuación:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{C}_t \quad (2.2)$$

donde $\dot{\mathbf{q}}$ es el vector de velocidades, $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}$ es la matriz jacobiana de las restricciones de la ecuación (2.1) y \mathbf{C}_t es la derivada parcial de las restricciones con respecto al tiempo. Conocidos los vectores de coordenadas y velocidades, las aceleraciones se pueden obtener derivando la ecuación (2.2) como se muestra a continuación:

$$\mathbf{C}_q \ddot{\mathbf{q}} = -\frac{\partial(\mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} - 2\mathbf{C}_{qt} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{C}_{tt} \quad (2.3)$$

donde $\ddot{\mathbf{q}}$ es el vector de aceleraciones, \mathbf{C}_{qt} es la derivada parcial de la matriz jacobiana de las restricciones con respecto al tiempo y \mathbf{C}_{tt} es la segunda derivada parcial del vector de restricciones con respecto al tiempo.

Por otro lado, el análisis dinámico directo consiste en conocer la evolución temporal de las variables que describen la posición de los distintos sólidos cuando se imponen una serie de fuerzas externas. Este tipo de análisis requiere la integración de un sistema de ecuaciones diferenciales cuyas variables deben satisfacer las ecuaciones no lineales de restricción asociadas a los pares cinemáticos que conectan los distintos sólidos. Este sistema de ecuaciones se denomina DAE [44, 45], del inglés *Differential Algebraic Equations*. Así pues, incluyendo las reacciones en los pares mediante la técnica de los multiplicadores de Lagrange, el sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas que hay que resolver puede escribirse como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \\ \mathbf{C}(\mathbf{q}, t) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde \mathbf{M} es la matriz de masa del sistema y $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ es un vector de fuerzas generalizadas que puede incluir fuerzas externas, fuerzas internas de carácter elástico o disipativo y, dependiendo de la formulación usada, términos cuadráticos en velocidades debidos a fuerzas de inercia centrífugas o de Coriolis. El sistema de ecuaciones (2.4) puede obtenerse mediante las ecuaciones de Lagrange o mediante cualquier otro método de la Mecánica Analítica.

El análisis dinámico inverso consiste en calcular el conjunto de fuerzas motoras y/o reacciones en los pares que provocan un determinado movimiento. El análisis dinámico inverso en sistemas multicuerpo rígidos requiere la resolución de las m ecuaciones algebraicas de restricción $\mathbf{C}(\mathbf{q}, t)$, conocidos los valores de los $n - m$ grados de libertad del sistema, siendo n el número de coordenadas generalizadas.

De esta forma, una vez que se conocen las coordenadas, velocidades y aceleraciones generalizadas, se puede utilizar la primera de las ecuaciones (2.4) para obtener los multiplicadores de Lagrange que permiten calcular las fuerzas de reacción. Para ello, el vector de ecuaciones de restricción se completa con las restricciones que describen la evolución temporal de los grados de libertad del sistema. De esta forma, el vector $\mathbf{C}(\mathbf{q}, t)$ alcanza el tamaño n y la matriz jacobiana $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}$ de la ecuación (2.4) es una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ que puede invertirse si las ecuaciones de restricción son independientes.

A diferencia de lo que ocurre con los sistemas formados exclusivamente por sólidos rígidos, la presencia de sólidos flexibles implica en los tres tipos de análisis antes mencionados un solo procedimiento de resolución: la integración de las ecuaciones del movimiento. Esto es debido a que no se conoce la evolución temporal de las coordenadas que describen la deformación del sólido y, por lo tanto, siempre se obtienen al integrar la ecuación (2.4). De hecho, la deformación de los sólidos que componen el sistema no puede prescribirse, puesto que dependerá, entre otras, de las fuerzas de inercia. Por lo tanto, incluso cuando se conoce el movimiento de todos los grados de libertad como sólido rígido del sistema, será necesario integrar el sistema de ecuaciones (2.4) para conocer la deformación de las partes flexibles.

2.2. Ecuaciones del movimiento de un sistema multicuerpo

Existen numerosas posibilidades para obtener las ecuaciones del movimiento de un sistema multicuerpo. Un buen análisis de estas posibilidades se muestra en la revisión realizada por Bremer [8]. En ella, Bremer, revisa los principales métodos utilizados en dinámica analítica, desde las ecuaciones de Gibbs (1879)-Appel (1899), Hamilton (1834) o Lagrange (1780) hasta otros métodos más modernos como el método de la ecuación central o los métodos de proyección. En determinados problemas, el uso de un método u otro puede ser decisivo. Por ejemplo, el uso

del método de las potencias virtuales conlleva cierta simplificación en la obtención de las ecuaciones del movimiento cuando la energía cinética del sólido en cuestión depende, no sólo de las velocidades, sino también de las coordenadas generalizadas. Con este método se consigue evitar hacer derivadas de la energía cinética con respecto a las coordenadas generalizadas, lo cual conduce a una sencilla expresión de las fuerzas de inercia. García de Jalón y Bayo [13] utilizan el método de las potencias virtuales para obtener las ecuaciones del movimiento en sistemas multicuerpo. A diferencia del método de los desplazamientos virtuales, este método utiliza velocidades virtuales, las cuales no son cantidades infinitesimales sino que pueden tener un valor finito. Éstas son un conjunto de velocidades imaginarias que para un instante de tiempo son consistentes con la expresión homogénea de las restricciones de velocidad. Es decir, las velocidades virtuales satisfacen la siguiente ecuación:

$$\mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}}^* = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

donde $\dot{\mathbf{q}}^*$ es el vector de velocidades virtuales. A diferencia de la ecuación (2.2), el término \mathbf{C}_t no aparece en la (2.5) puesto que las velocidades virtuales se definen en un instante de tiempo concreto.

Las ecuaciones de Lagrange son, también, extensamente usadas en DSM [16, 19]. En estas ecuaciones, la dinámica del sistema se obtiene mediante diferenciación de las energías puestas en juego en el sistema. Por tanto, para obtener las ecuaciones es necesario calcular, en primer lugar, las energías cinética y potencial, así como el trabajo realizado por otras fuerzas no conservativas. Por su parte, las fuerzas de restricción se pueden introducir en estas ecuaciones a través de los multiplicadores de Lagrange. Así, las ecuaciones del movimiento de un sistema multicuerpo se obtienen de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_e \quad (2.6)$$

donde L es la función lagrangiana, que se define como la diferencia entre la energía

cinética, T , y la energía potencial, V , ($L = T - V$) y \mathbf{Q}_e es el vector de fuerzas externas generalizadas. La ecuación (2.6), constituye un sistema de n ecuaciones, siendo n el número de coordenadas generalizadas, con $n + m$ incógnitas, n coordenadas generalizadas y los m multiplicadores de Lagrange que componen el vector λ . Por este motivo, las ecuaciones diferenciales (2.6) deben resolverse junto con las m ecuaciones de restricción de la ecuación (2.1). Así, el sistema de ecuaciones diferenciales (2.6) junto con las restricciones (2.1), dan lugar al sistema DAE presentado anteriormente en (2.4).

En esta tesis, las ecuaciones del movimiento de los sistemas multicuerpo tratados se obtendrán a través de las ecuaciones de Lagrange. Por este motivo, en las próximas secciones se revisan los procedimientos a seguir para obtener los términos requeridos en las ecuaciones de Lagrange, tanto en el caso de sólidos rígidos, que serán tratados mediante el uso de coordenadas naturales, como de sólidos flexibles, que se modelaran mediante coordenadas nodales absolutas.

2.3. Dinámica del sólido rígido en coordenadas naturales

En el capítulo anterior se mencionaron brevemente las formulaciones usadas más frecuentemente para describir la dinámica de un sistema compuesto por sólidos rígidos. Entre aquellas, la formulación en coordenadas naturales se caracteriza por usar un conjunto de variables definidas en el sistema global de referencia. Este conjunto de variables está compuesto por las coordenadas cartesianas de ciertos puntos y vectores del sólido rígido. Estos puntos y vectores suelen estar asociados a los pares cinemáticos, por lo que, como se verá, cada uno de los sólidos conectados por el par pueden usar estas coordenadas en su descripción cinemática. Esta posibilidad de compartir coordenadas supone un enorme ahorro computacional pues con ello se reduce el número total de coordenadas del sistema, así como el de restricciones. De esta forma, algunos pares no requieren la introducción de ningun-

na restricción cinemática, como es el caso del par esférico [13]. A continuación, se describe el uso de esta formulación en el caso plano y en el caso espacial.

2.3.1. Dinámica del sólido rígido con movimiento plano

Para describir la posición de un sólido en el plano es necesario conocer la posición de uno de sus puntos y la orientación del sólido respecto al sistema global. Por tanto, tres es el número mínimo de coordenadas necesario. Sin embargo, si se conoce la posición de dos puntos distintos del sólido es posible conocer la posición de cualquier otro punto del sólido. Es el caso representado en la figura 2.1. A estos puntos se les denominará puntos *básicos*, en adelante. A partir de la posición de dos puntos del sólido rígido es posible definir un sistema de referencia local en el cual la posición de cualquier punto es fija. Por ejemplo, un posible sistema de referencia es el que se representa en la figura 2.1 con uno de sus ejes a lo largo de la línea que une ambos puntos y el otro perpendicular.

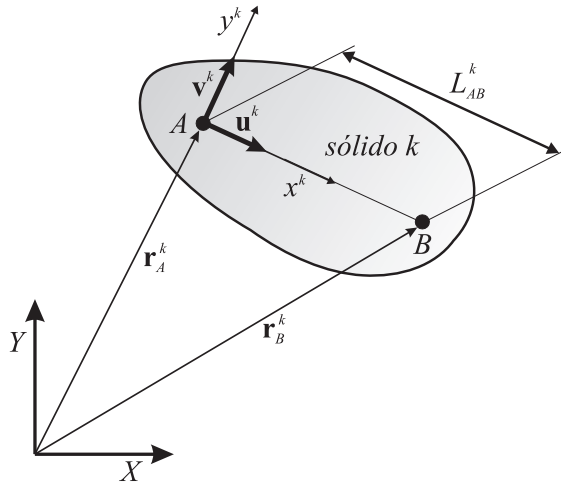


Figura 2.1: Sólido rígido con movimiento plano.

La matriz de rotación que define la orientación del sistema de referencia local

del sólido tiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^k & \mathbf{v}^k \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

donde \mathbf{u}^k y \mathbf{v}^k son dos vectores unitarios y ortogonales que se definen como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^k &= \frac{\mathbf{r}_B^k - \mathbf{r}_A^k}{|\mathbf{r}_B^k - \mathbf{r}_A^k|} = \frac{\mathbf{r}_B^k - \mathbf{r}_A^k}{L_{AB}^k}, \\ \mathbf{v}^k &= \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{u}^k \end{aligned} \quad (2.8)$$

siendo $\tilde{\mathbf{I}}$ una matriz constante que, aplicada sobre un vector, realiza una rotación de noventa grados en sentido antihorario. En la ecuación anterior \mathbf{r}_A^k y \mathbf{r}_B^k son los vectores de posición de los puntos A y B , respectivamente, y L_{AB}^k es la distancia entre ambos puntos (figura 2.1). La matriz $\tilde{\mathbf{I}}$ se escribe como sigue:

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

El conjunto de coordenadas seleccionado para el sólido k de la figura 2.1 excede el número de grados de libertad, por lo que estas coordenadas no son independientes. Dado que el sólido es rígido, es fácil concluir que la restricción que deben cumplir las coordenadas del sólido es la de mantener constante la distancia L_{AB}^k entre los puntos A y B . De esta forma, el vector de coordenadas del sólido rígido puede escribirse como sigue:

$$\mathbf{d}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_A^k{}^T & \mathbf{r}_B^k{}^T \end{bmatrix}^T \quad (2.10)$$

y la restricción de distancia constante:

$$(\mathbf{r}_B^k - \mathbf{r}_A^k)^T (\mathbf{r}_B^k - \mathbf{r}_A^k) = (L_{AB}^k)^2 \quad (2.11)$$

La restricción de la ecuación (2.11) también puede escribirse en forma matricial de la siguiente manera [13]:

$$\mathbf{d}^{kT} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & -\mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \mathbf{d}^k = (L_{AB}^k)^2 \quad (2.12)$$

donde \mathbf{I}_2 es la matriz identidad de tamaño 2.

Aunque, se ha utilizado un ejemplo en el que las coordenadas naturales pertenecen a dos puntos del sólido, podrían haberse seleccionado las coordenadas de un punto y un vector del sólido. Incluso es posible utilizar un conjunto más numeroso de coordenadas, lo cual implica añadir más restricciones que garanticen la constancia de la distancia entre puntos o de los ángulos formados por vectores. García de Jalón y Bayo [13] dan las siguientes recomendaciones para seleccionar un adecuado conjunto de coordenadas:

1. Cada sólido debe tener, al menos, dos puntos básicos para que pueda describirse su movimiento.
2. Cada par de revolución debe tener un punto básico, que es compartido por los dos sólidos que conecta.
3. Cada par prismático implica dos puntos en un sólido para definir la trayectoria de deslizamiento y un punto en el otro.
4. Cualquier otro punto o vector que sea importante puede seleccionarse como punto básico y sus coordenadas pasarían a formar parte del conjunto de incógnitas.

En esta formulación, la energía cinética tiene una expresión muy sencilla, como se verá a continuación. Siguiendo con el ejemplo de la figura 2.1, la posición de cualquier punto del sólido puede expresarse en función de la posición del punto A y la matriz de rotación \mathbf{A}^k de la siguiente forma:

$$\mathbf{r}^k = \mathbf{r}_A^k + \mathbf{A}^k \mathbf{r}^k \quad (2.13)$$

donde $\bar{\mathbf{r}}^k = \begin{bmatrix} x^k & y^k \end{bmatrix}^T$ es el vector de posición del punto en el sistema local del sólido k . Sustituyendo la expresión de la matriz de rotación de la ecuación (2.7), la ecuación (2.13) puede escribirse de la siguiente forma:

$$\mathbf{r}^k = \mathbf{C}^k \mathbf{d}^k \quad (2.14)$$

donde

$$\mathbf{C}^k = \left[\left(1 - \frac{x^k}{L_{AB}^k} \right) \mathbf{I} - \frac{y^k}{L_{AB}^k} \tilde{\mathbf{I}} \quad \frac{x^k}{L_{AB}^k} \mathbf{I} + \frac{y^k}{L_{AB}^k} \tilde{\mathbf{I}} \right] \quad (2.15)$$

Como puede comprobarse observando la ecuación (2.15), la matriz \mathbf{C}^k no depende de las coordenadas naturales del sólido. Por este motivo, la relación entre el vector de velocidades y las derivadas con respecto al tiempo de los vectores de posición de los puntos básicos tiene la siguiente expresión:

$$\dot{\mathbf{r}}^k = \mathbf{C}^k \dot{\mathbf{d}}^k \quad (2.16)$$

Así, la energía cinética del sólido rígido k se calcula integrando en el volumen del sólido

$$T_r^k = \frac{1}{2} \int_{V^k} \rho^k (\dot{\mathbf{r}}^k)^2 dV = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{d}}^k)^T \mathbf{M}_r^k \dot{\mathbf{d}}^k \quad (2.17)$$

donde ρ^k es la densidad del sólido y \mathbf{M}_r^k es la matriz de masa del sólido rígido k , cuya expresión se obtiene mediante la integral

$$\mathbf{M}_r^k = \frac{1}{2} \int_{V^k} \rho^k \mathbf{C}^{kT} \mathbf{C}^k dV \quad (2.18)$$

Nótese que la matriz de masa del sólido resulta constante. Por otro lado, la ecuación (2.14), puede usarse para calcular el vector de fuerzas generalizadas, \mathbf{Q}_e^k , asociado a una posible sollicitación externa. Este vector se obtiene a partir del trabajo virtual de la fuerza de la siguiente manera:

$$\delta W_e^k = \delta \mathbf{r}^{kT} \mathbf{F} = \delta \mathbf{d}^{kT} \mathbf{C}^{kT} \mathbf{F} = \delta \mathbf{d}^{kT} \mathbf{Q}_e^k \quad (2.19)$$

2.3.2. Dinámica del sólido rígido en el espacio

La descripción del movimiento espacial de sólidos rígidos mediante coordenadas naturales es del todo similar a lo que se ha descrito en la sección anterior. El número de grados de libertad de un sólido rígido en el espacio es seis, por lo que el número de coordenadas naturales es ahora mayor. García de Jalón y Bayo [13] explican que la posición y orientación de un sólido en el espacio queda definida si se conocen la posición de al menos tres puntos no alineados del sólido o un punto y dos vectores no paralelos. Sin embargo, esta elección del número de coordenadas da lugar a una matriz de masa no constante [13].

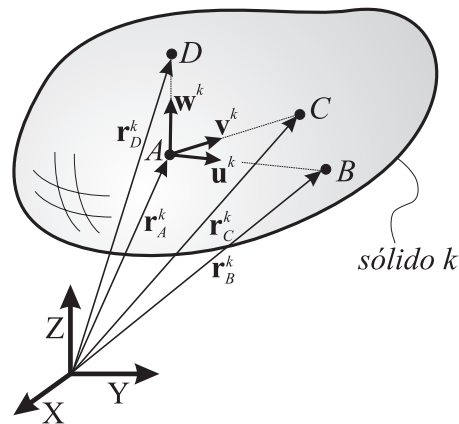


Figura 2.2: Sólido rígido descrito por cuatro puntos básicos.

En cambio, cuatro puntos no coplanarios pueden usarse como conjunto de coordenadas naturales y obtener una matriz de masa constante. Lo mismo ocurre en el caso de usar un punto y tres vectores linealmente independientes o dos puntos y dos vectores no paralelos entre sí, ni con la dirección que forma la línea que une los dos puntos. La razón por la que estas configuraciones dan lugar a una matriz de masa constante es porque permiten expresar la posición de cualquier punto del sólido como combinación lineal de las coordenadas seleccionadas. En la figura 2.2

se representa el caso de un sólido en el que se han utilizado cuatro puntos básicos para definir el sistema de referencia local.

El sólido de la figura 2.2 se usa en esta sección como ejemplo para explicar como obtener la matriz de masa y el resto de fuerzas del elemento. Igual que en el caso plano, la posición de un punto cualquiera del sólido puede escribirse de la siguiente forma:

$$\mathbf{r}^k = \mathbf{r}_A^k + \mathbf{A}^k \bar{\mathbf{r}}^k \quad (2.20)$$

donde $\bar{\mathbf{r}}^k = \begin{bmatrix} x^k & y^k & z^k \end{bmatrix}^T$ es el vector de posición del punto en el sistema de referencia local, \mathbf{A}^k es una matriz de rotación que relaciona el sistema de referencia local y el global y tiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^k & \mathbf{v}^k & \mathbf{w}^k \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

siendo \mathbf{u}^k , \mathbf{v}^k y \mathbf{w}^k tres vectores ortonormales. Estos vectores ortonormales pueden expresarse como combinación lineal de los vectores definidos por los cuatro puntos básicos. Ello puede realizarse, por ejemplo, mediante el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt [46]. Una vez hecho esto, los vectores pueden expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^k &= \alpha_1^k (\mathbf{r}_B^k - \mathbf{r}_A^k) + \alpha_2^k (\mathbf{r}_C^k - \mathbf{r}_A^k) + \alpha_3^k (\mathbf{r}_D^k - \mathbf{r}_A^k) \\ \mathbf{v}^k &= \beta_1^k (\mathbf{r}_B^k - \mathbf{r}_A^k) + \beta_2^k (\mathbf{r}_C^k - \mathbf{r}_A^k) + \beta_3^k (\mathbf{r}_D^k - \mathbf{r}_A^k) \\ \mathbf{w}^k &= \gamma_1^k (\mathbf{r}_B^k - \mathbf{r}_A^k) + \gamma_2^k (\mathbf{r}_C^k - \mathbf{r}_A^k) + \gamma_3^k (\mathbf{r}_D^k - \mathbf{r}_A^k) \end{aligned} \quad (2.22)$$

De esta forma, sustituyendo las expresiones de la ecuación (2.22) en la ecuación (2.20), la posición de un punto arbitrario puede escribirse como se muestra a continuación:

$$\mathbf{r}^k = \mathbf{C}^k \mathbf{d}^k \quad (2.23)$$

donde

$$\mathbf{d}^k = \left[\mathbf{r}_A^{kT} \quad \mathbf{r}_B^{kT} \quad \mathbf{r}_C^{kT} \quad \mathbf{r}_D^{kT} \right]^T \quad (2.24)$$

La expresión de la matriz puede escribirse en función de las coordenadas del punto en el sistema de referencia local y de los parámetros utilizados en las ecuaciones (2.22) como sigue:

$$\mathbf{C}^k = \left[c_1^k \mathbf{I} \quad c_2^k \mathbf{I} \quad c_3^k \mathbf{I} \quad c_4^k \mathbf{I} \right] \quad (2.25)$$

donde los coeficientes c_1^k , c_2^k , c_3^k y c_4^k no dependen de las coordenadas de los puntos básicos y tienen la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} c_1^k &= 1 - x^k \sum_{j=1}^3 \alpha_j^k - y^k \sum_{j=1}^3 \beta_j^k - z^k \sum_{j=1}^3 \gamma_j^k \\ c_2^k &= x^k \alpha_1^k + y^k \beta_1^k + z^k \gamma_1^k \\ c_3^k &= x^k \alpha_2^k + y^k \beta_2^k + z^k \gamma_2^k \\ c_4^k &= x^k \alpha_3^k + y^k \beta_3^k + z^k \gamma_3^k \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde x^k , y^k y z^k son coordenadas en el sistema local de referencia del sólido k .

En el caso del sólido rígido de la figura 2.2, es necesario añadir un total de seis ecuaciones de restricción puesto que el número total de coordenadas naturales del sólido es doce y el número de grados de libertad es seis. Estas restricciones deben garantizar el carácter rígido del sólido. Así, las distancias entre los puntos deben mantenerse constantes y los ángulos que forman los vectores que van de un punto a otro, también. En el caso del sólido de la figura 2.2, el conjunto de restricciones que garantizan la rigidez del sólido puede ser el siguiente:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{r}_B^k - \mathbf{r}_A^k)^T (\mathbf{r}_B^k - \mathbf{r}_A^k) &= (L_{AB}^k)^2 \\
(\mathbf{r}_C^k - \mathbf{r}_A^k)^T (\mathbf{r}_C^k - \mathbf{r}_A^k) &= (L_{AC}^k)^2 \\
(\mathbf{r}_D^k - \mathbf{r}_A^k)^T (\mathbf{r}_D^k - \mathbf{r}_A^k) &= (L_{AD}^k)^2 \\
(\mathbf{r}_C^k - \mathbf{r}_B^k)^T (\mathbf{r}_C^k - \mathbf{r}_B^k) &= (L_{BC}^k)^2 \\
(\mathbf{r}_D^k - \mathbf{r}_B^k)^T (\mathbf{r}_D^k - \mathbf{r}_B^k) &= (L_{BD}^k)^2 \\
(\mathbf{r}_D^k - \mathbf{r}_C^k)^T (\mathbf{r}_D^k - \mathbf{r}_C^k) &= (L_{CD}^k)^2
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Las ecuaciones (2.28) garantizan que las distancias entre los puntos, tomados dos a dos, son constantes. Aunque también se pueden emplear algunas restricción que garanticen que los ángulos formados por los vectores definidos por tres puntos no alineados se mantiene constante. Así, por ejemplo, se podrían sustituir las tres últimas ecuaciones en (2.27) por las tres siguientes:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{r}_B^k - \mathbf{r}_A^k)^T (\mathbf{r}_C^k - \mathbf{r}_A^k) &= L_{AB}^k L_{AC}^k \cos \widehat{BAC} \\
(\mathbf{r}_B^k - \mathbf{r}_A^k)^T (\mathbf{r}_D^k - \mathbf{r}_A^k) &= L_{AB}^k L_{AD}^k \cos \widehat{BAD} \\
(\mathbf{r}_C^k - \mathbf{r}_A^k)^T (\mathbf{r}_D^k - \mathbf{r}_A^k) &= L_{AC}^k L_{AD}^k \cos \widehat{CAD}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

De forma similar se procedería si se hubiera seleccionado otro conjunto de coordenadas naturales que incluyera vectores fijos en el sólido en lugar de vectores de posición de puntos. García de Jalón y Bayo [13] dan las siguientes recomendaciones para seleccionar un adecuado conjunto de puntos básicos y de vectores unitarios

1. Un sólido debe contener un número suficiente de puntos básicos y vectores unitarios tal que su movimiento esté completamente definido.
2. Debe utilizarse un punto básico en aquellos pares en los que existe un punto común entre los sólidos conectados. Esto ocurre en pares esféricos, de revolución, juntas universales, etc.

3. Se debe usar un vector unitario en aquellos pares cinemáticos que tienen un eje de rotación o de traslación. A veces, el papel de un vector unitario puede ser desempeñado por dos puntos básicos.
4. Todos los puntos y vectores de interés pueden utilizarse como variables.
5. Cada vector unitario está asociado a un punto básico, aunque puede estar asociado a varios puntos básicos a la vez.

La ecuación (2.23) puede usarse de la misma forma que en el caso plano para obtener la matriz de masa y las fuerzas externas generalizadas, obteniéndose expresiones idénticas a las (2.18) y (2.19), respectivamente. En el caso de que se usen menos de doce coordenadas naturales para describir la dinámica del sólido rígido, por ejemplo, las coordenadas de un punto y dos vectores, o las coordenadas de dos puntos y un vector adicional, la matriz de masa no es constante. Ello se debe a que para construir un triedro en el sólido se requiere el producto vectorial de los dos vectores que definen las coordenadas naturales. Por este motivo, no es posible expresar la posición de un punto como combinación lineal de las coordenadas naturales. En el caso de que se use un número de coordenadas menor que doce, resulta más conveniente formular las ecuaciones del elemento mediante el método de las potencias virtuales [13]. Sin embargo, en este trabajo se pretende utilizar una formulación que conserve el carácter constante de la matriz de masa, por lo que se asume que el número de coordenadas naturales es el suficiente para obtener una matriz de masa constante. En tal caso, el método de las potencias virtuales no supone una ventaja sustancial con respecto al uso de las ecuaciones de Lagrange.

2.4. Dinámica del sólido flexible en coordenadas nodales absolutas

La formulación en coordenadas nodales absolutas es un procedimiento de elementos finitos especialmente apropiado para sólidos flexibles que experimentan

grandes desplazamientos por deformación así como grandes rotaciones. Como se mencionó en la introducción, esta formulación ha sido desarrollada recientemente por Ahmed A. Shabana y sus colaboradores [30]. Su característica fundamental es el uso de un conjunto de coordenadas referidas a un sistema de referencia global. Esta formulación se desarrolló dentro del contexto de la dinámica de sistemas multicuerpo, estando los primeros desarrollos orientados a la formulación de barras flexibles [47], aunque, posteriormente, se ha extendido la formulación al caso de elementos placa/lámina [36].

En esta formulación, la descripción cinemática del elemento finito utiliza los vectores de posición de los nodos junto con otros vectores denominados *pendientes* que también están asociados a los nodos. Estos vectores no son más que las derivadas parciales del vector de posición con respecto a las coordenadas locales del elemento. En los primeros trabajos relacionados con esta formulación [47] se utilizaba únicamente la derivada parcial del vector de posición con respecto a una coordenada longitudinal del elemento. Así pues, el vector de coordenadas nodales se escribía de la siguiente forma:

$$\mathbf{e}^{ijm} = \left[\mathbf{r}^{ijmT} \quad \frac{\partial \mathbf{r}^{ijmT}}{\partial x} \right]^T \quad (2.29)$$

donde \mathbf{r}^{ijm} es el vector de posición del nodo m del elemento j del sólido i y $\partial \mathbf{r}^{ijm} / \partial x$ es la derivada parcial del vector de posición del nodo con respecto a la coordenada longitudinal x . Este último es el vector que se ha denominado más arriba vector pendiente. La coordenada longitudinal x con respecto a la cual se deriva pertenece a la configuración indeformada del elemento. Este vector de coordenadas fue usado en la formulación de elementos viga tipo Euler-Bernoulli con movimiento plano [19]. Posteriormente, se han añadido otras variables nodales como se verá en las secciones que siguen.

2.4.1. Elementos viga tipo Euler-Bernoulli con movimiento plano

En la formulación de elementos viga de Euler-Bernoulli se asume que la sección recta permanece perpendicular a la línea media del elemento, por lo que el giro de la sección se debe a deformación por flexión y no por cortante. Así pues, para formular este tipo de elementos es suficiente con describir la posición de la línea media del elemento. Para ello, Escalona *et al.* [47] utilizaron el vector de coordenadas nodales de la ecuación (2.29). Las componentes del vector de posición de un punto del elemento se describen mediante polinomios de Hermite, cúbicos en la coordenada local x , como se muestra a continuación:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \\ b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

donde r_1 y r_2 son las componentes del vector de posición de un punto arbitrario expresadas en coordenadas cartesianas. La ecuación (2.30) puede escribirse en términos del vector de coordenadas nodales del elemento como sigue:

$$\mathbf{r}^{ij} = \mathbf{S}^{ij} \mathbf{e}^{ij} \quad (2.31)$$

siendo \mathbf{S}^{ij} , la matriz de forma del elemento ij :

$$\mathbf{S}^{ij} = \begin{bmatrix} s_1^{ij} & 0 & s_2^{ij} & 0 & s_3^{ij} & 0 & s_4^{ij} & 0 \\ 0 & s_1^{ij} & 0 & s_2^{ij} & 0 & s_3^{ij} & 0 & s_4^{ij} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

donde, ignorando el superíndice que refiere al elemento j del sólido i , los polinomios de la matriz de funciones de forma se escriben como sigue:

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ s_2 &= l_e (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \\ s_3 &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ s_4 &= l_e (-\xi^2 + \xi^3) \end{aligned} \quad (2.33)$$

siendo l_e la longitud del elemento sin deformar, $\xi = x/l_e$ es el parámetro adimensional en la dirección longitudinal del elemento y el vector de coordenadas del elemento ij se escribe como sigue:

$$\mathbf{e}^{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{ijmT} & \mathbf{e}^{ijnT} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^{ijmT} & \frac{\partial \mathbf{r}^{ijmT}}{\partial x} & \mathbf{r}^{ijnT} & \frac{\partial \mathbf{r}^{ijnT}}{\partial x} \end{bmatrix}^T \quad (2.34)$$

Nótese que en la ecuación (2.34), m y n hacen referencia a los dos nodos del elemento ij .

Con la descripción anterior, la energía cinética se puede calcular de forma directa puesto que la velocidad de un punto es proporcional a la derivada temporal de las coordenadas nodales del elemento, de acuerdo con la ecuación (2.31). De esta forma, la energía cinética del elemento se escribe de la siguiente forma:

$$T_e^{ij} = \frac{1}{2} \int_{V_e^{ij}} \rho^{ij} (\dot{\mathbf{r}}^{ij})^2 dV = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{e}}^{ij})^T \mathbf{M}_e^{ij} \dot{\mathbf{e}}^{ij} \quad (2.35)$$

donde ρ^{ij} es la densidad de masa del material. Así pues, la matriz de masa del elemento ij , \mathbf{M}_e^{ij} , se define como se muestra a continuación:

$$\mathbf{M}_e^{ij} = \int_{V_e^{ij}} \rho^{ij} \mathbf{S}^{ijT} \mathbf{S}^{ij} dV \quad (2.36)$$

Merece especial mención el hecho de que la matriz de masa del elemento resulta ser constante. Esto es debido a que el vector velocidad es proporcional a la derivada temporal del vector de coordenadas nodales, gracias al uso de un conjunto de coordenadas referidas al sistema de referencia global. De hecho, la matriz de masa de los elementos basados en la ANCF es constante como se verá en secciones posteriores, no sólo en elementos tipo viga con movimiento plano sino también en elementos viga y placa tridimensionales. Este hecho constituye una gran ventaja a la hora de integrar numéricamente las ecuaciones del movimiento, puesto que sólo es necesario invertir la matriz de masa una sola vez. Además, en las ecuaciones del movimiento del elemento finito no aparecen términos cuadráticos en velocidades asociados a fuerzas de inercia centrífugas o de Coriolis.

El comportamiento elástico del elemento viene dado por la definición de las fuerzas internas que se producen como consecuencia de la deformación. En la formulación de estos elementos, el vector de fuerzas elásticas se obtiene a partir de la energía de deformación elástica, U_e , como se muestra a continuación:

$$\mathbf{Q}_e = -\frac{\partial U_e}{\partial \mathbf{e}} \quad (2.37)$$

siendo \mathbf{e} el vector de coordenadas nodales y \mathbf{Q}_e , el vector de fuerzas elásticas. Nótese que en la ecuación (2.37) y en la descripción del cálculo de las fuerzas elásticas sucesivo, se suprimirá el uso de superíndices para indicar el elemento por simplicidad. La energía de deformación elástica de un elemento viga puede calcularse mediante la integral del producto de la tensión y deformación a lo largo del volumen del elemento

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \sigma_l \varepsilon_l dV \quad (2.38)$$

donde V_e es el volumen del elemento, σ_l es la tensión en dirección longitudinal y ε_l es la deformación en la dirección longitudinal. Para un material elástico lineal, la tensión longitudinal puede expresarse como $\sigma_l = E\varepsilon_l$, siendo E el modulo de Young del material. Por otro lado, cuando las deformaciones son pequeñas, la deformación longitudinal puede expresarse de la siguiente forma:

$$\varepsilon_l = \frac{\partial u_l}{\partial x} - y \frac{\partial^2 u_t}{\partial x^2} \quad (2.39)$$

donde y es la coordenada local a lo largo de la sección y u_l y u_t son los desplazamientos por deformación en las direcciones longitudinal y transversal del elemento, respectivamente. De acuerdo con la ecuación (2.39), la energía de deformación puede escribirse de la siguiente forma:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^{l_e} \left[EI \left(\frac{\partial^2 u_t}{\partial x^2} \right)^2 + EA \left(\frac{\partial u_l}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (2.40)$$

donde I es el momento de inercia de la sección y A es el área de la sección transversal del elemento. Nótese que en la obtención de la ecuación anterior se ha aprovechado que, debido a la simetría de la sección, $\int_A y \, dydz = 0$.

La medida de los desplazamientos por deformación constituye un punto clave en la formulación de estos elementos al que se dedica especial atención en la literatura [31, 32]. Son varias las posibles funciones de fuerzas elásticas disponibles para este elemento finito. Una posibilidad consiste en utilizar una medida no lineal de deformaciones que incorpore acoplamiento entre distintos modos de deformación como la utilizada por Berzeri *et al.* [32]. Estos autores [32] proponen distintos modelos simplificados que tienen en cuenta no linealidades geométricas. Todos los modelos que proponen tienen como característica común el uso de la medida global de deformación de Green-Lagrange en dirección longitudinal. La deformación debida a la flexión se calcula en base a la curvatura de la línea media del elemento.

Por otro lado, existe la posibilidad de utilizar un sistema de referencia local para medir la deformación experimentada por el elemento como diferencia de la posición del elemento y la posición de una supuesta configuración indeformada que sigue aproximadamente el movimiento del elemento. Es necesario, pues, que el elemento no experimente movimientos como sólido rígido con respecto a la configuración de referencia. La posición de la configuración de referencia viene definida por el sistema de referencia local. Berzeri *et al.* [31] estudiaron dos posibilidades para definir el sistema de referencia local: la original [47], $X_b Y_b$ en la figura 2.3, que consiste en definir el eje horizontal a lo largo de la línea que une los nodos del elemento, y otra en la que el eje horizontal es tangente a la línea media del elemento en uno de los nodos, $X_t Y_t$ en la figura 2.3.

De acuerdo con la figura 2.3, el desplazamiento por deformación de un punto puede calcularse como diferencia de su vector de posición y el vector de posición del punto en la configuración de referencia:

$$\mathbf{u}_f = \begin{bmatrix} u_l \\ u_t \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T (\mathbf{r} - \mathbf{r}_O) - \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

donde \mathbf{A} es una matriz de transformación que relaciona la orientación del sistema de referencia local con respecto al sistema global y x es la posición del punto a lo largo de la configuración de referencia.

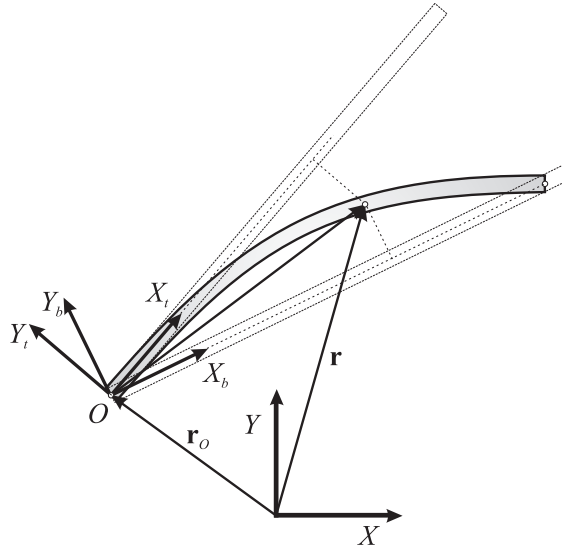


Figura 2.3: Sistemas de referencia locales del elemento.

Es importante resaltar que la expresión matemática que define las fuerzas elásticas del elemento resulta bastante compleja en los casos antes mencionados. Dichas expresiones pueden encontrarse en la bibliografía, tanto para la formulación no lineal [32] como para la lineal [31]. Por tanto, si bien las fuerzas de inercia tienen una expresión muy sencilla debido a que la matriz de masa es constante, las fuerzas elásticas requieren un considerable esfuerzo computacional. Esta situación es opuesta a lo que ocurre con la formulación en referencias flotantes, en la que la matriz de masa depende de las coordenadas modales, mientras que la matriz de rigidez suele ser constante y, en ocasiones, diagonal.

Cabe mencionar que el procedimiento descrito para calcular las fuerzas elásticas de este elemento tiene más en común con los métodos co-rotacionales que con los métodos inerciales debido al uso de un sistema de referencia local para el cálculo de las deformaciones. Este enfoque, sin embargo, no se consideró en las sucesivas formulaciones de elementos basados en la ANCF, como se verá en secciones posteriores.

Las fuerzas generalizadas de la ecuación (2.4), debidas, por ejemplo, a sollicitaciones externas que actúan sobre el elemento o a mecanismos de disipación, se pueden calcular a partir del trabajo virtual de dichas fuerzas. A continuación, como ejemplo, se muestra el procedimiento para calcular el vector de fuerzas generalizado asociado a una fuerza externa concentrada:

$$\delta W_e = \delta \mathbf{r}^T \mathbf{F} = \delta \mathbf{e}^T \mathbf{S}^T \mathbf{F} = \mathbf{e}^T \mathbf{Q}_e \quad (2.42)$$

donde $\delta \mathbf{r}$ es un desplazamiento virtual del punto sobre el que se aplica la fuerza externa, \mathbf{F} .

Finalmente, la ANCF se caracteriza también por ser un procedimiento no incremental. Por este motivo, no hay necesidad de usar métodos numéricos especiales sino que los integradores más elementales dan buenos resultados [48].

2.4.2. Elementos viga de Omar

En el año 2001, Omar y Shabana [33] presentaron una nueva parametrización del elemento viga con movimiento plano basado en coordenadas nodales absolutas. El nuevo elemento se describe mediante una superficie en lugar de mediante una línea. Ello se consigue a través de la inclusión de la derivada de la posición con respecto a una coordenada local transversal, $\partial \mathbf{r}^{ijm} / \partial y$, como se muestra en la figura 2.4. En dicha figura pueden observarse dos configuraciones del elemento: la configuración inicial y una configuración deformada.

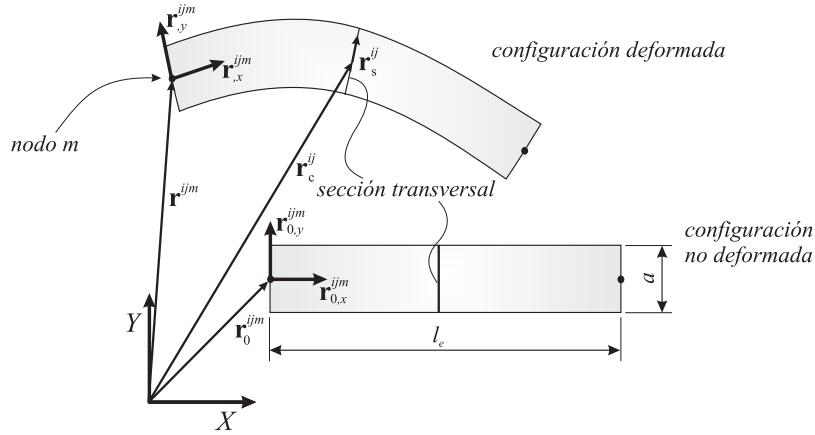


Figura 2.4: Dos configuraciones posibles del elemento finito.

El vector de coordenadas del nodo m del elemento j del sólido flexible i se escribe como sigue:

$$\mathbf{e}^{ijm} = \left[\mathbf{r}^{ijmT} \quad \frac{\partial \mathbf{r}^{ijmT}}{\partial x} \quad \frac{\partial \mathbf{r}^{ijmT}}{\partial y} \right]^T \quad (2.43)$$

Nótese que el vector de coordenadas de un nodo consta, en este elemento, de seis coordenadas en lugar de cuatro, como en el elemento anteriormente descrito. La introducción del nuevo vector $\partial \mathbf{r}^{ijm} / \partial y$ permite definir la orientación de la sección transversal de forma que ésta puede no ser perpendicular a la línea media del elemento. Así, el vector de posición de un punto del elemento puede descomponerse en la suma del vector de posición de un punto de la línea media, \mathbf{r}_c^{ij} , y un vector contenido en la sección transversal, \mathbf{r}_s^{ij} , (figura 2.4). Este vector contenido en la sección transversal depende sólo de los vectores $\partial \mathbf{r} / \partial y$ de cada nodo, por lo que, al ser estos vectores independientes de las demás coordenadas nodales, la sección podría formar un ángulo arbitrario con la línea media. De esta forma, la formulación de este elemento permite la deformación por cortante.

El vector de posición de un punto arbitrario del nuevo elemento se describe mediante polinomios cúbicos en la coordenada longitudinal x y lineales en y :

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5x^3 \\ b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy + b_4x^2 + b_5x^3 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

De acuerdo con la ecuación (2.44), esta descripción da lugar a la siguiente matriz de funciones de forma del elemento ij :

$$\mathbf{S}^{ij} = \begin{bmatrix} s_1^{ij} & 0 & s_2^{ij} & 0 & s_3^{ij} & 0 & s_4^{ij} & 0 & s_5^{ij} & 0 & s_6^{ij} & 0 \\ 0 & s_1^{ij} & 0 & s_2^{ij} & 0 & s_3^{ij} & 0 & s_4^{ij} & 0 & s_5^{ij} & 0 & s_6^{ij} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

donde, ignorando el superíndice que refiere al elemento j del sólido i , los polinomios de la matriz de funciones de forma se escriben como sigue:

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ s_2 &= l_e (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \\ s_3 &= l_e \eta (1 - \xi) \\ s_4 &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ s_5 &= l_e (-\xi^2 + \xi^3) \\ s_6 &= l_e \eta \xi \end{aligned} \quad (2.46)$$

donde $\eta = y/l_e$ es el parámetro adimensional en la dirección transversal del elemento. Así, el vector de coordenadas nodales del elemento, se compone de las coordenadas de los nodos m y n del elemento:

$$\mathbf{e}^{ij} = \left[\mathbf{r}^{ijmT} \quad \frac{\partial \mathbf{r}^{ijmT}}{\partial x} \quad \frac{\partial \mathbf{r}^{ijmT}}{\partial y} \quad \mathbf{r}^{ijnT} \quad \frac{\partial \mathbf{r}^{ijnT}}{\partial x} \quad \frac{\partial \mathbf{r}^{ijnT}}{\partial y} \right]^T \quad (2.47)$$

Las ecuaciones del movimiento de este elemento pueden obtenerse mediante las ecuaciones de Lagrange. De esta forma, las fuerzas de inercia tienen una expresión tan simple como en el elemento antes descrito, si bien el tamaño de la matriz de masa constante es ahora mayor. Puesto que el elemento obtenido es isoparamétrico, es posible utilizar las funciones de forma anteriores para describir elementos cuya

configuración de referencia está deformada. De acuerdo con la ecuación (2.35), la matriz de masa del elemento se escribe como se muestra a continuación:

$$\mathbf{M}_e^{ij} = \int_{\Phi_0(\Omega^{ij})} \rho^{ij} \mathbf{S}^{ijT} \mathbf{S}^{ij} dV_0 = \int_{\Omega^{ij}} \rho^{ij} \mathbf{S}^{ijT} \mathbf{S}^{ij} \left| \mathbf{J}_0^{ij} \right| dv \quad (2.48)$$

donde ρ^{ij} es la densidad del material en la configuración de referencia, $\Phi_0(\Omega^{ij})$ es el volumen del elemento en la configuración de referencia, Ω^{ij} es el volumen del elemento en la configuración recta o indeformada y $\left| \mathbf{J}_0^{ij} \right|$ es el jacobiano de la transformación entre la configuración recta y la configuración de referencia. Merece la pena aclarar que la configuración de referencia puede no ser recta, aunque, en el caso de la figura 2.4, se ha representado una configuración inicial o de referencia no deformada.

Al igual que en la descripción del cálculo de las fuerzas elásticas del elemento anteriormente mencionado, éstas se obtienen mediante derivación de la energía de deformación elástica almacenada por el elemento (ecuación (2.37)). Sin embargo, en la formulación presentada por Omar y Shabana [33], las deformaciones se definen en el sistema global en lugar de usar un sistema de referencia local. De esta forma, la medida de las deformaciones está basada en el tensor de deformaciones de Green-Lagrange como se muestra a continuación:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{J}^T \mathbf{J} - \mathbf{I} \right) \quad (2.49)$$

donde \mathbf{J} es el gradiente de deformación, que expresa la derivada del vector de posición con respecto al vector de posición en la configuración indeformada. Es decir,

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}_0} \quad (2.50)$$

siendo \mathbf{r}_0 el vector de posición de un punto en la configuración de referencia. Finalmente, la energía de deformación elástica se calcula integrando sobre el volumen del elemento el producto del tensor de deformaciones de Green-Lagrange, $\boldsymbol{\varepsilon}^{ij}$, y el

segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchoff [33], $\boldsymbol{\sigma}^{ij}$. De nuevo, dependiendo de si la configuración de referencia está deformada o no, puede usarse la transformación de coordenadas entre la configuración recta y la de referencia:

$$U_e^{ij} = \frac{1}{2} \int_{\Phi_0(\Omega^{ij})} \boldsymbol{\sigma}^{ij} : \boldsymbol{\varepsilon}^{ij} dV_0 = \frac{1}{2} \int_{\Omega^{ij}} \boldsymbol{\sigma}^{ij} : \boldsymbol{\varepsilon}^{ij} \left| \mathbf{J}_0^{ij} \right| dv \quad (2.51)$$

donde $:$ indica el producto interno de tensores, es decir, la suma del producto de las componentes correspondientes, $\boldsymbol{\sigma}^{ij}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}^{ij}$ están definidos en un punto arbitrario del elemento y $\Phi_0(\Omega^{ij})$ y Ω^{ij} son los volúmenes del elemento en la configuración de referencia y en la configuración recta indeformada, respectivamente.

Las fuerzas generalizadas asociadas a sollicitaciones externas aplicadas sobre el elemento se pueden calcular a partir del trabajo virtual realizado, como se explicó en la ecuación (2.42).

2.4.3. Elementos viga de Yakoub

A partir del elemento bidimensional de Omar, la extensión del modelo a elementos tipo viga tridimensionales es directa, sin más que añadir la derivada del vector de posición respecto a una coordenada local en la dirección perpendicular [35, 34]. El nuevo vector de coordenadas nodales se compone de los siguientes vectores:

$$\mathbf{e}^{ijm} = \left[\mathbf{r}^{ijmT} \quad \frac{\partial \mathbf{r}^{ijmT}}{\partial x} \quad \frac{\partial \mathbf{r}^{ijmT}}{\partial y} \quad \frac{\partial \mathbf{r}^{ijmT}}{\partial z} \right]^T \quad (2.52)$$

donde z es la coordenada local añadida en la dirección perpendicular. Los vectores $\partial \mathbf{r}^{ijm} / \partial x$, $\partial \mathbf{r}^{ijm} / \partial y$ y $\partial \mathbf{r}^{ijm} / \partial z$ forman un triedro ortonormal en la configuración indeformada del elemento. Sin embargo, cuando el elemento se deforma, estos vectores pueden variar en módulo y dirección, dejando de ser perpendiculares entre sí (figura 2.5).

En este elemento el vector de coordenadas contiene nueve coordenadas. Los vectores $\partial \mathbf{r} / \partial y$ y $\partial \mathbf{r} / \partial z$ describen la sección transversal del elemento, de forma que

cualquier vector contenido en la sección recta se puede escribir como combinación lineal de ambos vectores [35]. Además, Yakoub y Shabana [35] demostraron que el módulo y la dirección de ambos vectores determinan el tamaño y la distorsión de la sección.

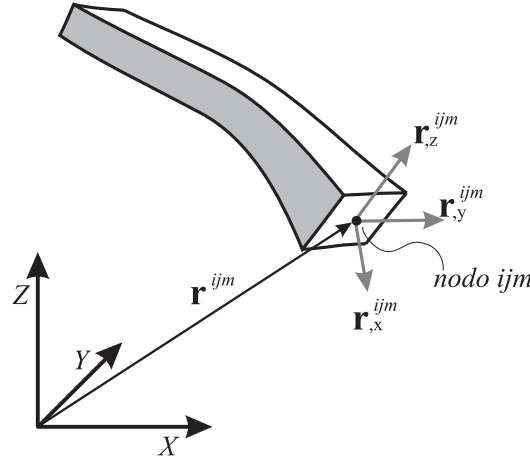


Figura 2.5: Coordenadas nodales del elemento viga tridimensional.

Al igual que en el elemento de Omar, el vector de posición de un punto arbitrario del nuevo elemento se describe mediante polinomios cúbicos en la coordenada longitudinal x y lineales en y y z :

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5xz + a_6x^2 + a_7x^3 \\ b_0 + b_1x + b_2y + b_3z + b_4xy + b_5xz + b_6x^2 + b_7x^3 \\ c_0 + c_1x + c_2y + c_3z + c_4xy + c_5xz + c_6x^2 + c_7x^3 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

De acuerdo con la ecuación anterior, la matriz de funciones de forma del elemento ij puede escribirse de forma compacta como sigue:

$$\mathbf{S}^{ij} = \begin{bmatrix} s_1^{ij} \mathbf{I}_3 & s_2^{ij} \mathbf{I}_3 & s_3^{ij} \mathbf{I}_3 & s_4^{ij} \mathbf{I}_3 & s_5^{ij} \mathbf{I}_3 & s_6^{ij} \mathbf{I}_3 & s_7^{ij} \mathbf{I}_3 & s_8^{ij} \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

donde \mathbf{S}^{ij} se ha escrito como matriz de bloques, siendo \mathbf{I}_3 la matriz identidad de tamaño tres. Ignorando el superíndice que refiere al elemento j del sólido i , los polinomios de la matriz de funciones de forma tienen la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\
s_2 &= l_e (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \\
s_3 &= l_e \eta (1 - \xi) \\
s_4 &= l_e \zeta (1 - \xi) \\
s_5 &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \\
s_6 &= l_e (-\xi^2 + \xi^3) \\
s_7 &= l_e \eta \xi \\
s_8 &= l_e \zeta \xi
\end{aligned} \tag{2.55}$$

donde $\eta = y/l_e$ y $\zeta = z/l_e$ son los parámetros adimensionales en la dirección transversal y $\xi = x/l_e$, en la dirección longitudinal del elemento. Así, el vector de coordenadas nodales del elemento, se compone de las coordenadas de los nodos m y n del elemento:

$$\mathbf{e}^{ij} = \left[\mathbf{r}^{ijmT} \quad \frac{\partial \mathbf{r}^{ijmT}}{\partial x} \quad \frac{\partial \mathbf{r}^{ijmT}}{\partial y} \quad \frac{\partial \mathbf{r}^{ijmT}}{\partial z} \quad \mathbf{r}^{ijnT} \quad \frac{\partial \mathbf{r}^{ijnT}}{\partial x} \quad \frac{\partial \mathbf{r}^{ijnT}}{\partial y} \quad \frac{\partial \mathbf{r}^{ijnT}}{\partial z} \right]^T \tag{2.56}$$

Las fuerzas de inercia tienen una expresión idéntica a las obtenidas para el elemento de Omar, si bien las dimensiones de la matriz de masa son mayores. De esta forma, la matriz de masa se obtiene a partir de la ecuación (2.48). El cálculo de las fuerzas elásticas y externas también es idéntico al realizado para el elemento de Omar [33, 35].

2.4.4. Elementos viga de Dufva

El comportamiento de los elementos de Omar y de Yakoub anteriormente descritos ha sido estudiado en detalle por Sapanen y Mikkola [37], quienes han puesto de manifiesto algunas de las debilidades de estos elementos. En concreto, estos elementos tienen una reducida tasa de convergencia de la malla de elementos finitos. Es decir, se requiere un número excesivamente alto de elementos para obtener resultados de una exactitud aceptable. Además, en caso de pequeñas deformaciones, estos autores demostraron que los elementos son incapaces de reproducir los resultados que se desprenden de la teoría lineal con un reducido número de elementos. Sapanen y Mikkola [37, 38] demostraron que ello es debido en gran medida a la pobre descripción de las deformaciones de flexión usadas en la formulación de Omar y Shabana [33] y de Yakoub y Shabana [35, 34]. Además, detectaron que los elementos descritos anteriormente sufren el denominado bloqueo por efecto Poisson. Este bloqueo impide, por ejemplo, que un modelo con estos elementos de una viga en voladizo sometida a una fuerza concentrada en un extremo arroje el valor exacto del desplazamiento en el extremo, a menos que el módulo de Poisson sea cero. Según los citados autores, debido a que la sección del elemento no puede adoptar un forma trapezoidal al deformarse el elemento por flexión, aparecen tensiones normales transversales espurias. Dichas tensiones espurias afectan a la tensión normal longitudinal si el módulo de Poisson es distinto de cero provocando un comportamiento excesivamente rígido del elemento.

Basándose en los hechos anteriores, Dufva *et al.* [40] proponen una formulación diferente de las fuerzas elásticas para el elemento de Omar. La nueva formulación presenta una mejor tasa de convergencia, mucho más acorde para elementos de orden superior. De esta forma, la formulación de Dufva *et al.* [40] utiliza la misma formulación para las fuerzas de inercia y fuerzas generalizadas externas que la de Omar.

En el elemento de Dufva se considera que el sistema local de la configuración de referencia del elemento coincide inicialmente con el sistema global de referencia.

Aunque la generalización a elementos inicialmente curvos o con una orientación arbitraria es posible *a priori*, su implementación no fue considerada por Sopanen y Mikkola [37]. En estos elementos, la rotación total de la sección transversal del elemento es la suma de la rotación de la sección debida a flexión y de la deformación por cortante. Esta suposición se escribe matemáticamente a continuación:

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_0 + \mathbf{A}_\gamma \mathbf{A}_\psi \mathbf{y}_P - \mathbf{y}_P \quad (2.57)$$

donde \mathbf{A}_ψ es una matriz de transformación que representa el giro de la sección por flexión, \mathbf{A}_γ representa el giro de la sección debido a la deformación por cortante, \mathbf{y}_P es un vector contenido en la sección recta del elemento en la configuración de referencia y \mathbf{u}_P y \mathbf{u}_0 son los desplazamientos de los puntos P y P_0 debidos a la deformación como se muestra en la figura 2.6. De la ecuación (2.57) se deduce que la sección puede girar pero no deformarse, al contrario de lo que ocurre en la formulación de Omar.

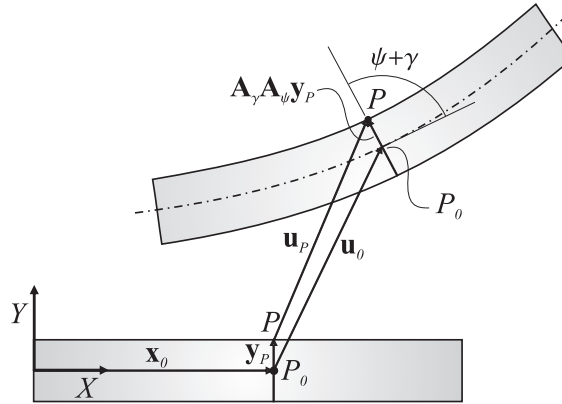


Figura 2.6: Configuraciones de referencia y deformada del elemento finito.

El ángulo girado por la sección debido a la flexión de la línea media puede expresarse en función de la orientación del vector tangente a la línea media, es decir, $\partial \mathbf{r} / \partial x$. Por otra parte, estos autores consideran el ángulo girado por la

sección debido a deformación por cortante suficientemente pequeño como para poder hacer la aproximación

$$\cos \gamma \approx 1 \quad (2.58)$$

Por otro lado, el seno del ángulo γ puede obtenerse del producto escalar de los vectores $\mathbf{r}_{,x}$, que es tangente a la línea media, y $\mathbf{r}_{,y}$, que está contenido en la sección recta. De esta forma, se puede escribir

$$\mathbf{r}_{,x}^T \mathbf{r}_{,y} = |\mathbf{r}_{,x}| |\mathbf{r}_{,y}| \cos \left(\frac{\pi}{2} + \gamma \right) \quad (2.59)$$

donde los subíndices “ $,x$ ” e “ $,y$ ” indican derivadas con respecto a x e y , respectivamente. De la ecuación anterior

$$\sin \gamma = - \frac{\mathbf{r}_{,x}^T \mathbf{r}_{,y}}{|\mathbf{r}_{,x}| |\mathbf{r}_{,y}|} \quad (2.60)$$

La reducida tasa de convergencia del elemento de Omar se debe, en parte, además de a la pobre descripción de la deformación longitudinal a flexión que se ha mencionado antes, al denominado bloqueo por cortante [40]. Este bloqueo se debe a una sobreestimación de la energía elástica de deformación por cortante al evaluar las fuerzas elásticas, por lo que el elemento se muestra más rígido de lo esperado a flexión [49]. Para evitar el mencionado bloqueo, Dufva *et al.* [40] proponen utilizar la ecuación (2.60) para calcular el ángulo girado debido a la deformación por cortante de las secciones extremas del elemento e interpolar linealmente el seno del ángulo γ en los puntos del interior del elemento. Así, el seno del ángulo γ se interpola como se muestra a continuación:

$$\sin \gamma^{ij} = (1 - \xi) \sin \gamma^{ijm} + \xi \sin \gamma^{ijn} \quad (2.61)$$

donde m y n son, de nuevo, los nodos del elemento j del sólido i y ξ es la coordenada local a lo largo del elemento. De esta forma, se obtiene una distribución lineal de la deformación por cortante a lo largo del elemento. Esto permite al elemento

satisfacer la prueba de bloqueo por cortante consistente en una viga en voladizo sometida a carga concentrada en un extremo. Sin embargo, en situaciones en las que las deformaciones por cortante sean importantes puede dar lugar a una pobre descripción de las deformaciones.

A partir de los desplazamientos de la ecuación (2.57), el tensor de deformaciones de Green-Lagrange puede calcularse como sigue:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\bar{\mathbf{J}}^T + \bar{\mathbf{J}} + \bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{J}} \right) \quad (2.62)$$

donde $\bar{\mathbf{J}}$ es el gradiente del vector de desplazamiento de los puntos del sólido con respecto a los puntos en la configuración de referencia. Dicho gradiente se calcula como se muestra a continuación:

$$\bar{\mathbf{J}} = \frac{\partial \mathbf{u}_P}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.63)$$

Debido a que la deformación en la dirección transversal es pequeña, los autores introducen la siguiente simplificación:

$$\varepsilon_{yy}^{ij} = (1 - \xi) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right|^{ijm} + \xi \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right|^{ijn} \quad (2.64)$$

De acuerdo con el cálculo de las deformaciones anterior, los autores evalúan la energía de deformación a partir de la expresión

$$U_e = \int_{\Phi_0(\Omega)} \left(E\varepsilon_{xx}^2 + E\varepsilon_{yy}^2 + 4Gk_s\varepsilon_{xy}^2 \right) dV_0 \quad (2.65)$$

donde se han eliminado los superíndices que indican el elemento por simplicidad. Debido a que la deformación tangencial es constante a lo largo de la sección transversal, los autores incluyen el factor de corrección k_s en la energía de deformación transversal. De nuevo, las fuerzas elásticas generalizadas pueden obtenerse a través de la ecuación (2.37).

Dufva *et al.* [40] demostraron que el elemento finito que proponen ofrece una mejor tasa de convergencia que el elemento de Omar en varios problemas estáticos y dinámicos, a pesar de que ambos usan el mismo tipo de funciones de forma.

2.4.5. Otras formulaciones de elementos basados en ANCF

En esta sección se revisan algunos de los más importantes avances en el desarrollo de elementos finitos basados en coordenadas absolutas. Sin embargo, no se incluyen detalles de su formulación puesto que no serán utilizados en el desarrollo de esta tesis. La mayoría de estos trabajos han aparecido durante el desarrollo de esta tesis, por lo que no ha habido opción a utilizarlos, aun cuando supongan una mejor alternativa. En el momento actual, la ANCF es objeto de una intensa investigación por su reciente aparición. Ello queda patente en la referencia [50], donde se revisan las más importantes contribuciones en torno a esta formulación.

La extensión del elemento bidimensional tipo Euler-Bernoulli presentado en la sección 2.4.1 a aplicaciones espaciales encuentra gran dificultad para describir la torsión y la rotación de la sección alrededor de su eje longitudinal. Esto es debido a que el conjunto de coordenadas nodales de la ecuación (2.29) sólo puede describir la posición de la línea media. Si bien Von Dombrowski [51] ha desarrollado un elemento con tales características, este elemento requiere una coordenada local adicional a las de la ecuación (2.29) para describir la rotación de la sección alrededor de su eje longitudinal. Por este motivo, la matriz de masa no resulta constante. Dmitrochenko y Pogorelov [52] utilizan el mismo concepto pero miden la rotación de la sección con respecto al sistema de referencia de Frenet, obteniendo también un conjunto de coordenadas que no son puramente absolutas y una matriz de masa no constante. Recientemente, Gerstmayr y Shabana [53] han desarrollado un elemento en el que no se incluyen efectos torsionales ni tampoco la inercia a la rotación alrededor de un eje longitudinal. El elemento finito obtenido sólo es resistente a flexión y tracción-compresión, por lo que su uso se limita a aplicaciones muy particulares.

Una vez puestas de manifiesto por Sapanen *et al.* [37, 38] las dificultades de los elementos finitos de Omar y de Yakoub basados en la Mecánica de Medios Continuos para dar resultados satisfactorios con un aceptable número de elementos, han sido numerosos los autores que han participado en el desarrollo de nuevos

elementos finitos. En concreto, Schwab y Meijard [54] han reformulado las fuerzas elásticas para el elemento de Yakoub utilizando únicamente las deformaciones a lo largo de la línea media del elemento. Además, estos autores consiguen evitar el bloqueo imponiendo que la deformación por cortante varíe linealmente, en base al principio de Hellinger-Reisner. Este enfoque es conceptualmente muy similar al procedimiento presentado por Dufva *et al.* [40]. De hecho, el modelo utilizado por Dufva *et al.* en elementos bidimensionales ha sido recientemente generalizado por los mismos autores a elementos viga con movimiento espacial [41]. Por otra parte, Sugiyama *et al.* [55] proponen mejorar la tasa de convergencia del elemento a través de la inclusión de ciertas restricciones que eliminan algunos modos de deformación del elemento. Para ello se definen las deformaciones en un sistema de referencia local tangente a la línea media y se restringen algunos modos de deformación, para así obtener elementos tipo Reissner o tipo Euler-Bernoulli. De acuerdo con lo señalado por Söpanen y Mikkola [37], Gerstmayr y Shabana [53] han desarrollado un elemento con un número mayor de coordenadas por nodo que el de Yakoub, lo cual permite usar polinomios de mayor grado como funciones de forma. Así, estos autores consiguen describir mejor la deformación por flexión del elemento, a costa de un número excesivamente alto de coordenadas sin una interpretación física clara, que además conlleva la inclusión de modos de deformación con frecuencias muy altas asociadas.

Otra idea que ha sido llevada a cabo por Kerkkänen *et al.* [39] ha sido la de utilizar funciones de forma lineales tanto para describir la posición de la línea media como para interpolar los vectores que definen la sección. Estos autores han demostrado que una descripción tal de la cinemática del elemento conduce a una tasa de convergencia similar a la que tiene el elemento de Omar [33], que usa un mayor número de coordenadas. Este hecho pone claramente de manifiesto las limitaciones de los elementos de Omar y la necesidad de buscar alguna manera de acelerar la convergencia o el cálculo de fuerzas.

Paralelamente al desarrollo de elementos finitos tipo viga han aparecido tam-

bién elementos tipo placa/lámina basados en coordenadas absolutas. Los primeros elementos tipo placa dentro de la ANCF fueron desarrollados por Mikkola y Shabana [36, 56]. Al igual que los elementos viga de Yakoub, estos elementos están parametrizados como un volumen. Mikkola y Shabana [36] presentaron dos funciones de forma distintas para elementos placa, una de las cuales da lugar a un elemento conforme, es decir, con continuidad de desplazamientos y de sus derivadas primeras. En este trabajo, las fuerzas elásticas están basadas en la Mecánica de Medios Continuos de forma idéntica a la descrita para el elemento bidimensional de Omar. Estos elementos padecen los mismos problemas que los elementos de Omar y Yakoub relativos al bloqueo por efecto Poisson y la baja tasa de convergencia. Por este motivo, Matikainen y Mikkola [57] han reformulado el cálculo de fuerzas elásticas para el elemento presentado previamente por Mikkola y Shabana [36] obteniendo un elemento con mejores prestaciones. La nueva función de fuerzas elásticas está basada en los conceptos utilizados por Dufva *et al.* en la formulación del elemento viga bidimensional. La ANCF también se ha usado para desarrollar elementos placa parametrizados como una superficie en los trabajos de Dmitrochenko y Pogorelov [52] y más recientemente por Dufva y Shabana [58].

2.5. Integración de las ecuaciones del movimiento

En las secciones 2.3 y 2.4 se han detallado los aspectos fundamentales de las formulaciones en coordenadas naturales y nodales absolutas, respectivamente. En ellas se explica cómo se obtienen las energías cinética y potencial elástica, en el caso flexible, así como el trabajo virtual de fuerzas no conservativas. Calculados estos términos, las ecuaciones de Lagrange recogidas en la sección 2.2 pueden usarse para obtener las ecuaciones del movimiento del sistema multicuerpo.

Como se dijo en la sección dedicada a las coordenadas nodales absolutas, las fuerzas elásticas se calculan sin necesidad de usar un procedimiento incremental. Por este motivo, las ecuaciones diferenciales algebraicas del sistema pueden inte-

grarse usando los métodos convencionales para la resolución de sistemas DAE. Sin embargo, el sistema de la ecuación (2.4) puede transformarse en un sistema ODE si se derivan las restricciones dos veces con respecto al tiempo. Si se hace esto, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C}_q^T \\ \mathbf{C}_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}_d \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

donde \mathbf{M} es la matriz de masa del sistema rígido-flexible, \mathbf{Q} es el vector de fuerzas generalizadas, que incluye las fuerzas externas, elásticas o de disipación, si las hubiera. El vector \mathbf{Q}_d contiene derivadas de las ecuaciones de restricción de la siguiente forma:

$$\mathbf{Q}_d = -(\mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}})_q \dot{\mathbf{q}} - 2\mathbf{C}_{qt} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{C}_{tt} \quad (2.67)$$

Invirtiendo la matriz de la ecuación (2.66), pueden despejarse las aceleraciones y escribir el sistema de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (2.68)$$

Debido a que se han derivado dos veces con respecto al tiempo las ecuaciones de restricción, es necesario utilizar algún medio para estabilizar las ecuaciones de restricción durante el proceso de integración. En caso contrario, las ecuaciones podrían dejar de satisfacerse durante la integración debido a la propagación de errores numéricos. Para ello existen varias posibilidades como la estabilización de Baumgarte [13] o la proyección en posición, velocidad y aceleración [59].

Para la integración de las ecuaciones del movimiento, una vez puestas de la forma mostrada en la ecuación (2.68) puede utilizarse, en general, cualquier método de integración para sistemas ODE. Sin embargo, Sugiyama y Shabana [48] recomiendan el uso de integradores implícitos con la formulación en coordenadas absolutas por el carácter rígido de las ecuaciones diferenciales a las que da lugar.

2.6. Comentario final a este capítulo

Las secciones que se incluyen en este capítulo se han dedicado a revisar los conceptos fundamentales de la Dinámica de Sistemas Multicuerpo que se han considerado necesarios para comprender el desarrollo posterior. Las ecuaciones de Lagrange que se presentaron en la sección 2.2 se usarán en adelante para obtener las ecuaciones del movimiento de los sistemas multicuerpo que se tratan en esta tesis.

Por otro lado, los detalles sobre las formulaciones en coordenadas naturales y nodales absolutas que se han incluido en las secciones 2.3 y 2.4 se usarán en el capítulo siguiente para formular las ecuaciones de los pares cinemáticos entre sólidos rígidos y flexibles. Además, se usarán en los últimos capítulos para modelar algunos sistemas multicuerpo.

Por todo lo anterior, este es un punto de inflexión en esta tesis, en el que se separan las herramientas usadas de las contribuciones originales de este trabajo.

Capítulo 3

Formulación en coordenadas nodales absolutas

3.1. Introducción

En Mecánica Computacional, la eficiencia de un determinado método suele caracterizarse fundamentalmente por la velocidad con la que pueden llevarse a cabo simulaciones con un aceptable grado de exactitud. A la vez, a una formulación para el análisis dinámico de mecanismos flexibles se le exige un cierto número de capacidades como la posibilidad de modelar el amortiguamiento interno, grandes deformaciones o considerar el acoplamiento entre distintos modos de deformación. Sin embargo, la inclusión de tales capacidades suele implicar una mayor complejidad de las ecuaciones y, por tanto, un aumento del coste computacional. Por este motivo es importante el estudio numérico de las funciones implicadas en las ecuaciones del sistema y la búsqueda de algoritmos que permitan una evaluación eficiente de tales funciones.

Tal y como se ha puesto de manifiesto en el capítulo 2, la formulación en coordenadas nodales absolutas es un procedimiento desarrollado recientemente para el

análisis de sistemas multicuerpo flexibles. Por este motivo, gran parte del contenido de esta tesis se ha dedicado al desarrollo de ciertos aspectos de dicha formulación que en el momento en el que se comenzó este estudio estaban poco avanzados.

En este sentido, se han estudiado las formulaciones propuestas por Omar y Shabana [33] y por Yakoub y Shabana [34] para la evaluación de las fuerzas elásticas en elementos viga deformable por cortante de dos y tres dimensiones, respectivamente. Se ha desarrollado un nuevo algoritmo para la evaluación de las fuerzas elásticas, así como su matriz jacobiana y la energía de deformación elástica [60]. Con este algoritmo se consigue reducir enormemente el tiempo de simulación. El algoritmo desarrollado brinda la posibilidad de evaluar analíticamente la matriz jacobiana de las fuerzas elásticas con un reducido número de operaciones, consiguiendo, a la vez, exactitud y rapidez de cómputo. Además, las fuerzas elásticas tienen la propiedad de permitir que, bajo ciertas condiciones, varios elementos puedan compartir algunas cantidades que permanecen invariantes durante la simulación, minimizando así la cantidad de memoria requerida para su almacenamiento.

En determinadas aplicaciones es necesario introducir el efecto disipativo debido a la fricción interna del material. Tal es el caso del SET (Short Electrodynamic Tether), que es una estructura espacial desplegable cuyo movimiento está fuertemente condicionado por el amortiguamiento [4]. Por este motivo se ha desarrollado un modelo de amortiguamiento interno basado en el cálculo de una función de Rayleigh, de forma que sólo se amortigüen los movimientos por deformación y no el movimiento de sólido rígido.

Este capítulo contiene dos secciones en las que se presentan las contribuciones de esta tesis a la formulación en coordenadas nodales absolutas. En la sección 3.2 se presenta un procedimiento alternativo para evaluar las fuerzas elásticas en elementos finitos previamente desarrollados [33, 34, 35, 36] en los cuales la flexibilidad se introduce haciendo uso de los conceptos fundamentales de la Mecánica de

Medios Continuos. En la sección 3.3 se presenta un modelo de amortiguamiento interno para la formulación en coordenadas nodales absolutas que se basa en un modelo viscoelástico lineal.

3.2. Evaluación de las fuerzas elásticas en los sólidos flexibles

En el procedimiento no incremental de elementos finitos de la formulación en coordenadas nodales absolutas, el uso de coordenadas nodales referidas a un sistema inercial tiene como resultado la obtención de una matriz de masa constante y, como consecuencia, que los términos correspondientes a las fuerzas de inercia centrífugas y de Coriolis no aparecen en las ecuaciones del movimiento. Sin embargo, las fuerzas elásticas no son fáciles de evaluar y tienen una expresión complicada.

El elemento finito tipo viga con deformación por cortante de Omar [33] presenta una diferencia fundamental respecto al elemento tipo Euler-Bernoulli [47], desarrollado con anterioridad: el elemento no se parametriza como una línea sino como una superficie. La nueva parametrización permite que la sección transversal del elemento se deforme y que no se mantenga perpendicular a la línea media. Por otro lado, el elemento de Yakoub [35, 34] para aplicaciones con movimiento espacial se parametriza como un volumen. Por tanto, la formulación de las fuerzas elásticas debe tener en cuenta los modos de deformación adicionales que las nuevas parametrizaciones permiten. Si las deformaciones en el interior del elemento finito pueden considerarse pequeñas, la teoría de vigas de Timoshenko puede usarse para formular las fuerzas elásticas [35]. Sin embargo, la función de fuerzas elásticas así obtenida tiene una expresión no lineal bastante complicada debido al uso de coordenadas referidas a un sistema inercial. Además, la teoría de Timoshenko asume que la sección de la viga se mantiene rígida, cosa que las parametrizaciones de los elementos de Omar y de Yakoub no garantizan. Estos inconvenientes pueden

evitarse cuando las fuerzas elásticas se calculan a partir de la energía de deformación de un volumen diferencial del elemento [34]. Omar y Shabana [33] y Yakoub y Shabana [34] proponen el uso del tensor de deformaciones de Green-Lagrange, junto con el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchoff, obteniéndose una expresión para las fuerzas elásticas no más complicada que la obtenida mediante la teoría de vigas de Timoshenko [35]. Siguiendo este procedimiento para el cálculo de las fuerzas, los elementos finitos cuya configuración de referencia es recta pueden tratarse de forma más fácil puesto que la integral sobre el volumen del elemento puede hacerse simbólicamente. Sin embargo, si la configuración de referencia del elemento es curva, es necesario resolver ciertas integrales de funciones racionales que dependen de la configuración del elemento. Por este motivo, dada la necesidad de usar una metodología sistemática, la integración numérica sobre el volumen del elemento parece prácticamente inevitable en la bibliografía [33, 34]. No obstante, en este capítulo se demuestra que dicha expresión puede simplificarse enormemente e, incluso, evitar la integración sobre el volumen del elemento en cada evaluación de las fuerzas elásticas, independientemente de que la configuración de referencia sea curva o no.

3.2.1. Obtención de las fuerzas elásticas

Esta sección está dedicada al estudio de la expresión que adoptan las fuerzas elásticas obtenidas usando la relación no lineal de Green-Lagrange entre las deformaciones y los desplazamientos [34]. Persiguiendo una mayor claridad en la exposición, la notación se ha simplificado eliminando los índices que refieren a nodos, elementos o sólidos. De esta forma, se considera un elemento genérico en todo el desarrollo de esta sección. Resulta conveniente señalar que los vectores y matrices se representan por símbolos en negrita, un subíndice asociado a una matriz refiere la fila correspondiente y dos subíndices asociados a una matriz, la componente correspondiente.

En la figura 3.1 se muestra un esquema de un sólido deformable que experimen-

ta un movimiento general, es decir, una traslación, una rotación o una deformación o todo a la vez. En dicha figura, la configuración de referencia se representa con el símbolo Φ_0 , en la cual la posición de uno de sus puntos, el punto material P_0 , se representa por el vector \mathbf{r}_0 . Después de experimentar un movimiento general, el sólido ocupa la región del espacio Φ y \mathbf{r} es ahora el vector de posición del punto espacial P . Con esta nomenclatura, el gradiente de deformación se calcula como sigue:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}_0} \quad (3.1)$$

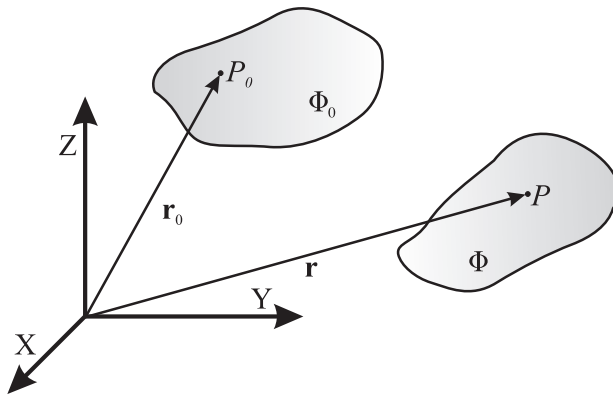


Figura 3.1: Movimiento general de un sólido.

El tensor de deformaciones no lineal de Green-Lagrange se escribe en función del gradiente de deformaciones de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{J}^T \mathbf{J} - \mathbf{I}) \quad (3.2)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad. Se puede comprobar que esta medida de deformaciones se anula para un movimiento como sólido rígido, puesto que en tal caso, \mathbf{J} resulta ser una matriz ortogonal [61].

En la figura 3.2 se reproduce la misma situación que en la figura 3.1, pero considerando que el sólido es ahora un elemento finito tipo viga. Así, el vector de posición de un punto material arbitrario, \mathbf{r}_0 , puede interpolarse usando la matriz de funciones de forma del elemento, $\mathbf{S}(\mathbf{x})$, como se expresa a continuación:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{S}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_0 \quad (3.3)$$

donde \mathbf{e}_0 es el vector de coordenadas nodales que describe la configuración de referencia del elemento finito considerado y \mathbf{x} es un vector formado por las coordenadas locales del punto en la configuración recta (figura 3.2). Dicho vector tiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T \quad (3.4)$$

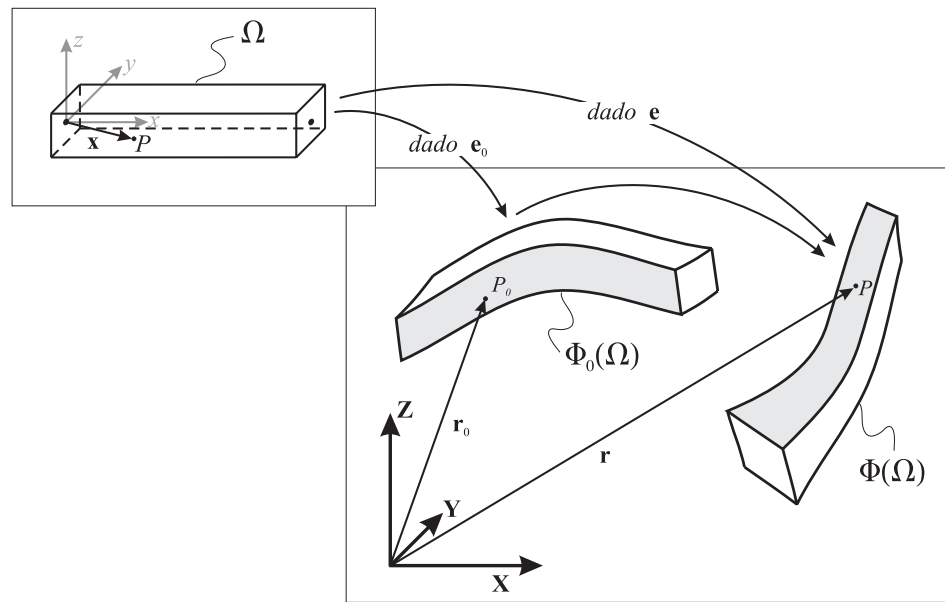


Figura 3.2: Correspondencia biunívoca entre los puntos de la configuración recta y los de las configuraciones de referencia y real.

La ecuación (3.3) refleja la relación biunívoca establecida entre los puntos de la configuración recta y los de la configuración de referencia, la cual no tiene por qué ser recta en general, a partir del vector de coordenadas nodales \mathbf{e}_0 . Igualmente, se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos de la configuración recta y los puntos de la configuración real del elemento si se conoce el vector de coordenadas nodales, \mathbf{e} , del elemento

$$\mathbf{r} = \mathbf{S}(\mathbf{x}) \mathbf{e} \quad (3.5)$$

De acuerdo con la situación representada en la figura 3.2, los puntos de la configuración de referencia ocupan la región del espacio $\Phi_0(\Omega)$, mientras que los puntos de la configuración real ocupan la región $\Phi(\Omega)$. Ambas regiones se pueden obtener mediante las transformaciones de las ecuaciones (3.3) y (3.5), respectivamente, a partir del dominio Ω de la configuración recta o indeformada. El gradiente de deformación puede obtenerse a través de la regla de la cadena como se muestra a continuación:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}_0} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{r}_0} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{J}_0^{-1} \quad (3.6)$$

donde

$$\mathbf{J}_0 = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.7)$$

Usando la ecuación (3.6), el tensor de deformaciones de la ecuación (3.2) queda determinado para cada punto del elemento finito [33, 34]. De esta forma, es posible calcular la energía de deformación del elemento y obtener las fuerzas elásticas como fuerzas que derivan de un potencial [33, 34, 36]. Sin embargo, esta forma de proceder conduce a una expresión de las fuerzas elásticas algo compleja, que, además, cuenta con el inconveniente de requerir la integración sobre el volumen del elemento para cada evaluación [35, 36]. Esto, no obstante, no es necesario como se verá a continuación.

Para evitar llegar a una expresión tan complicada de las fuerzas elásticas, se propone una forma alternativa de calcular las deformaciones. El gradiente de una de las componentes del vector de posición puede expresarse, haciendo uso de la regla de la cadena, como sigue:

$$\left(\frac{\partial r_i}{\partial \mathbf{x}}\right)^T = \mathbf{J}_0^T \left(\frac{\partial r_i}{\partial \mathbf{r}_0}\right)^T \quad (3.8)$$

Así, la ecuación (3.8) permite despejar la componente ij del gradiente de deformación de la ecuación (3.1) en función del vector de coordenadas nodales como sigue:

$$\frac{\partial r_i}{\partial r_{0j}} = \left(\mathbf{J}_0^{-T}\right)_j \frac{\partial r_i}{\partial \mathbf{x}} = \left(\mathbf{J}_0^{-T}\right)_j \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{i,x} \\ \mathbf{S}_{i,y} \\ \mathbf{S}_{i,z} \end{bmatrix} \mathbf{e} \quad (3.9)$$

donde \mathbf{J}_0^{-T} representa la traspuesta de la inversa de \mathbf{J}_0 , $\mathbf{S}_{i,x}$, $\mathbf{S}_{i,y}$ y $\mathbf{S}_{i,z}$ son las derivadas de la fila i de la matriz de funciones de forma con respecto a las coordenadas x , y y z del elemento en la configuración recta. En adelante, se usará esta nomenclatura para escribir de forma simplificada las derivadas parciales. De esta forma, un subíndice tras una coma indica una derivada parcial.

La ecuación (3.9) puede representarse de la forma:

$$\frac{\partial r_i}{\partial r_{0j}} = \mathbf{S}_{i,j} \mathbf{e} \quad (3.10)$$

donde $\mathbf{S}_{i,j}$ representa la fila i de la matriz \mathbf{S}_j , cuya expresión es:

$$\mathbf{S}_{i,j} = \left(\mathbf{J}_0^{-T}\right)_j \left(\left[\mathbf{S}_{i,x}^T \quad \mathbf{S}_{i,y}^T \quad \mathbf{S}_{i,z}^T \right]^T \right) \quad (3.11)$$

A partir de la ecuación (3.11) puede definirse la matriz \mathbf{S}_j de la siguiente forma:

$$\mathbf{S}_{,j} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{1,j} \\ \mathbf{S}_{2,j} \\ \mathbf{S}_{3,j} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

lo cual permite escribir el gradiente de deformación de la siguiente manera:

$$\mathbf{J} = [\mathbf{S}_1 \mathbf{e} \quad \mathbf{S}_2 \mathbf{e} \quad \mathbf{S}_3 \mathbf{e}] \quad (3.13)$$

donde cada producto $\mathbf{S}_{,j} \mathbf{e}$ es un vector columna y el subíndice ",j" ($j = 1, 2, 3$) representa la derivada parcial con respecto a r_{0j} .

Una vez escrito el gradiente de deformación como aparece en la ecuación (3.13), las componentes del tensor de deformaciones de Green-Lagrange pueden escribirse como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,1}^T \mathbf{S}_{,1} \mathbf{e} - 1 \right) & \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,1}^T \mathbf{S}_{,2} \mathbf{e} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,2}^T \mathbf{S}_{,2} \mathbf{e} - 1 \right) & \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,2}^T \mathbf{S}_{,3} \mathbf{e} \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,3}^T \mathbf{S}_{,3} \mathbf{e} - 1 \right) & \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,1}^T \mathbf{S}_{,3} \mathbf{e} \end{aligned} \quad (3.14)$$

La energía elástica almacenada en el elemento se calcula integrando sobre el volumen del elemento el producto del tensor de deformaciones de Green-Lagrange por su tensor de tensiones conjugado, es decir, el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchoff [49]

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\Phi_0(\Omega)} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} dV_0 \quad (3.15)$$

donde $\Phi_0(\Omega)$ es la región del espacio que ocupa el elemento en la configuración de referencia, $\boldsymbol{\sigma}$ es el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchoff y $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el tensor de deformaciones de Green-Lagrange. Dado que la configuración de referencia puede no ser recta, la integral de volumen (3.15) puede evaluarse más fácilmente sobre el dominio indeformado Ω , haciendo uso de la transformación de la ecuación (3.3),

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} |\mathbf{J}_0| dv \quad (3.16)$$

Después de realizar el producto tensorial, la energía de deformación de la ecuación (3.15) tiene la siguiente expresión:

$$U_e = \int_{\Phi_0(\Omega)} \frac{\lambda + 2G}{2} (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) + \lambda (\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33}) + 2G (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2) dV_0 \quad (3.17)$$

donde λ es la constante elástica de Lamé y G es el modulo tangente. Puesto que las fuerzas elásticas son fuerzas conservativas, su expresión puede obtenerse derivando la energía con respecto a las coordenadas nodales como se muestra a continuación:

$$\mathbf{F}_e = - \left(\frac{\partial U_e}{\partial \mathbf{e}} \right)^T \quad (3.18)$$

Desarrollando la ecuación (3.18) se encuentra la siguiente expresión para las fuerzas elásticas, en la que las derivadas parciales se han introducido dentro de la integral de volumen:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_e^T = & - \int_{\Phi_0(\Omega)} \frac{\lambda + 2G}{2} \left(2\varepsilon_{11} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \mathbf{e}} + 2\varepsilon_{22} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \mathbf{e}} + 2\varepsilon_{33} \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial \mathbf{e}} \right) \\ & + \lambda \left(\varepsilon_{11} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \mathbf{e}} + \varepsilon_{22} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \mathbf{e}} + \varepsilon_{11} \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial \mathbf{e}} + \varepsilon_{33} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \mathbf{e}} + \varepsilon_{22} \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial \mathbf{e}} + \varepsilon_{33} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \mathbf{e}} \right) \\ & + 2G \left(2\varepsilon_{12} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \mathbf{e}} + 2\varepsilon_{13} \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial \mathbf{e}} + 2\varepsilon_{23} \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial \mathbf{e}} \right) dV_0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde las derivadas parciales de las componentes del tensor de deformaciones se pueden calcular a partir de la ecuación (3.14)

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \mathbf{e}} = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \left(\mathbf{S}_{,i}^T \mathbf{S}_{,j} + \mathbf{S}_{,j}^T \mathbf{S}_{,i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad j \geq i \quad (3.20)$$

Merece la pena destacar la importancia de factorizar el vector de coordenadas nodales, \mathbf{e} , en la ecuación (3.13), puesto que si se utiliza directamente la expresión de la ecuación (3.6) la función de las fuerzas elásticas adquiere una expresión bastante complicada y poco sistemática. Sustituyendo las expresiones de las deformaciones de las ecuaciones (3.14) y sus derivadas (ecuaciones (3.20)) en la ecuación

(3.19), se comprueba que el vector de fuerzas elásticas puede escribirse como producto de una matriz de rigidez no lineal por el vector de coordenadas nodales, como se muestra a continuación:

$$\mathbf{F}_e = -\mathbf{K}(\mathbf{e}) \mathbf{e} \quad (3.21)$$

donde la matriz de rigidez no lineal tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathbf{e}) = & \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\lambda + 2G}{2} \int_{\Phi_0(\Omega)} \left(\mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\alpha} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\alpha} - \mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\alpha} \right) dV_0 \\ & + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^3 \frac{\lambda}{2} \int_{\Phi_0(\Omega)} \left(\mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\alpha} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,\beta}^T \mathbf{S}_{,\beta} - \mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\alpha} \right) dV_0 \\ & + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^3 G \int_{\Phi_0(\Omega)} \left(\mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\beta} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\beta} \right) dV_0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Como puede observarse en la ecuación (3.22), los coeficientes de la matriz de rigidez no lineal son funciones polinómicas en las coordenadas nodales. Por este motivo, sería posible integrar uno a uno los coeficientes de dicha matriz, quedando, así, cada uno de ellos definido explícitamente como una función de las coordenadas nodales. Sin embargo, este procedimiento no es sistemático puesto que habría que tratar cada coeficiente por separado, manejando expresiones muy complicadas ya que el número de coordenadas nodales por elemento es elevado (12 en vigas bidimensionales, 24 en vigas tridimensionales y 48 en placas).

Las integrales que aparecen en la ecuación (3.22) son integrales de funciones racionales en el caso general de que la configuración de referencia no sea recta. Esto es consecuencia de la presencia de la inversa del jacobiano asociado a la configuración de referencia, \mathbf{J}_0 , en el cálculo de las matrices $\mathbf{S}_{,j}$, como puede observarse en la ecuación (3.11). Así, dado el vector que define la configuración de referencia, \mathbf{e}_0 , la integración simbólica es factible, aunque depende de la configuración de referencia. Si quisiera evaluarse de forma simbólica, se debería hacer una factorización distin-

ta para cada configuración de referencia. Por tanto, a la hora de programar es más eficaz el uso de una cuadratura numérica [44] para evaluar las integrales, puesto que el proceso de integración se hace independiente de la expresión a integrar y, por ende, de la configuración de referencia.

Reconocida la conveniencia de integrar numéricamente, sería deseable evitar tener que hacer dicha integración para cada evaluación y eliminar la necesidad de manipular las coordenadas nodales durante la integración, con lo que se conseguiría un enorme ahorro computacional. Ambos objetivos pueden alcanzarse siguiendo el procedimiento que se describe a continuación. Dicho procedimiento está basado en el calculo de ciertas matrices constantes, que se referirán en adelante como matrices invariantes o, simplemente, invariantes.

Agrupando los términos que dependen del vector de coordenadas nodales, \mathbf{e} , por un lado y los que no dependen por otro, la matriz de rigidez no lineal puede escribirse como suma de dos matrices, una matriz constante y otra que depende de \mathbf{e} :

$$\mathbf{K}(\mathbf{e}) = \mathbf{K}_2(\mathbf{e}) + \mathbf{K}_1 \quad (3.23)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2(\mathbf{e}) = & \sum_{\alpha=1}^n \frac{\lambda + 2G}{2} \int_{\Phi_0(\Omega)} \left(\mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\alpha} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\alpha} \right) dV_0 \\ & + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^n \int_{\Phi_0(\Omega)} \frac{\lambda}{2} \left(\mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\alpha} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,\beta}^T \mathbf{S}_{,\beta} \right) + G \left(\mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\beta} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\beta} \right) dV_0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

y

$$\mathbf{K}_1 = -k_n \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Phi_0(\Omega)} \mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\alpha} dV_0 \quad (3.25)$$

En las ecuaciones anteriores, (3.24) y (3.25), n es la dimensión del espacio, de forma

que $n = 2$ para los elementos de Omar y $n = 3$ para los de Yakoub. Además, la constante k_n de la ecuación (3.25) toma los siguientes valores:

$$\begin{aligned} k_2 &= (\lambda + 2G) \\ k_3 &= \frac{3\lambda + 2G}{2} \end{aligned} \quad (3.26)$$

La ecuación (3.24) puede simplificarse aun más si se consideran las relaciones algebraicas que a continuación se presentan. Sea $\mathbf{A}\mathbf{e}\mathbf{e}^T\mathbf{B}$, donde \mathbf{A} y \mathbf{B} son dos matrices arbitrarias. Un término cualquiera de la matriz producto puede escribirse de la siguiente forma:

$$(\mathbf{A}\mathbf{e}\mathbf{e}^T\mathbf{B})_{ij} = \sum_k \sum_l A_{ik} e_k e_l B_{lj} = \sum_k \sum_l e_k (A)_{ik} (B^T)_{jl} e_l = \mathbf{e}^T \mathbf{C}^{ij} \mathbf{e} \quad (3.27)$$

donde la matriz \mathbf{C}^{ij} se calcula como se muestra a continuación:

$$\mathbf{C}^{ij} = (\mathbf{A}_i)^T (\mathbf{B}^T)_j \quad (3.28)$$

Por tanto, según la ecuación (3.28), \mathbf{C}^{ij} es una matriz que se construye como el producto de la transpuesta de la fila i de \mathbf{A} por la fila j de la transpuesta de \mathbf{B} . Usando la ecuación (3.27) se concluye que las componentes de la matriz $\mathbf{K}_2(\mathbf{e})$ son formas cuadráticas de las coordenadas nodales y pueden calcularse mediante la expresión:

$$(\mathbf{K}_2(\mathbf{e}))_{ij} = \mathbf{e}^T \mathbf{C}_{\mathbf{K}_2}^{ij} \mathbf{e} \quad (3.29)$$

donde $\mathbf{C}_{\mathbf{K}_2}^{ij}$ es una matriz dispersa resultado de sumar los términos tipo \mathbf{C}^{ij} que aparecen en la ecuación (3.24) tras aplicar la ecuación (3.27) a cada término del tipo $\mathbf{A}\mathbf{e}\mathbf{e}^T\mathbf{B}$ de la (3.24). Esta matriz \mathbf{C}^{ij} se calcula de forma sistemática como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{\mathbf{K}_2}^{ij}(\mathbf{e}) &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{\lambda + 2G}{2} \int_{\Phi_0(\Omega)} \left(\mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\alpha} \right)_i^T \left(\mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\alpha} \right)_j dV_0 \\
&+ \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^n \int_{\Phi_0(\Omega)} \frac{\lambda}{2} \left(\mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\alpha} \right)_i^T \left(\mathbf{S}_{,\beta}^T \mathbf{S}_{,\beta} \right)_j + G \left(\mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\beta} \right)_i^T \left(\mathbf{S}_{,\beta}^T \mathbf{S}_{,\alpha} \right)_j dV_0 \quad (3.30)
\end{aligned}$$

donde $\left(\mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\alpha} \right)_i$ representa la fila i de la matriz $\mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\alpha}$. Por tanto, la matriz $\mathbf{C}_{\mathbf{K}_2}^{ij}$ no varía durante la simulación y se denominará matriz invariante o, simplemente, invariante. Nótese que existe un invariante asociado a cada una de las componentes de la matriz $\mathbf{K}_2(\mathbf{e})$.

Observando la ecuación (3.24) se comprueba que la matriz $\mathbf{K}_2(\mathbf{e})$ es simétrica y, por tanto, los invariantes sólo tienen que calcularse para los términos de la diagonal y del triángulo inferior o superior de dicha matriz. Además, el hecho de que dichas matrices sean dispersas permite almacenar una cantidad no muy grande de datos para la evaluación de las fuerzas.

El procedimiento propuesto en esta sección permite evitar la integración numérica de grandes matrices para cada evaluación de las fuerzas elásticas incluso en el caso de que la configuración de referencia sea curva.

3.2.2. Obtención de la matriz jacobiana

El uso de integradores implícitos para integrar las ecuaciones del movimiento del sistema requiere evaluar la matriz jacobiana de las mismas. Esta matriz, a su vez, es función de la matriz jacobiana de las fuerzas elásticas. Además, el uso de la formulación en análisis estáticos también implica la resolución de un sistema de ecuaciones no lineales cuya matriz jacobiana es también función de la matriz jacobiana de las fuerzas elásticas. Por tanto, resulta conveniente estudiar la posibilidad de evaluar la matriz jacobiana de la forma más eficiente.

Frente a la evaluación numérica, mediante diferencias finitas, por ejemplo, la obtención de una expresión analítica, cuando es posible, supone una considerable

reducción del coste computacional. Para entender esto, basta pensar que una evaluación numérica de la matriz jacobiana requiere del orden de $n + 1$ evaluaciones de la función de las fuerzas elásticas, siendo n el número de coordenadas generalizadas. Derivando analíticamente la expresión de las fuerzas elásticas, ecuación (3.21), respecto a las coordenadas generalizadas, puede obtenerse una expresión para la matriz jacobiana de las fuerzas elásticas. Sin embargo, si la derivación se realiza usando la matriz de rigidez de la ecuación (3.22), la expresión obtenida para la matriz jacobiana contiene términos que no pueden sacarse fuera de las integrales de volumen de forma sistemática. Por eso, la integración numérica resulta casi inevitable si se quiere mantener una expresión compacta, como la mostrada a continuación:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{F}_e}{\partial \mathbf{e}} = & \\
& - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\lambda + 2G}{2} \int_{\Phi_0(\Omega)} \left(\left(\mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\alpha} \mathbf{e} \right) \mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\alpha} + 2 \mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\alpha} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\alpha} - \mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\alpha} \right) dV_0 \\
& - \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^n \frac{\lambda}{2} \int_{\Phi_0(\Omega)} \left(\left(\mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,\beta}^T \mathbf{S}_{,\beta} \mathbf{e} \right) \mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\alpha} + 2 \mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\alpha} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,\beta}^T \mathbf{S}_{,\beta} - \mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\alpha} \right) dV_0 \\
& - \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^n G \int_{\Phi_0(\Omega)} \left(\left(\mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\beta} \mathbf{e} \right) \mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\beta} + \mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\beta} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \left(\mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\beta} + \mathbf{S}_{,\beta}^T \mathbf{S}_{,\alpha} \right) \right) dV_0
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Por el contrario, el uso de las matrices invariantes asociadas a las fuerzas elásticas no sólo simplifica la evaluación de dichas fuerzas, sino que también simplifica la obtención de la matriz jacobiana. El cálculo de la matriz jacobiana de las fuerzas elásticas se puede hacer a partir de la ecuación (3.29) para representar los coeficientes de la componente \mathbf{K}_2 . De esta forma se llega a la siguiente expresión:

$$\left(\frac{\mathbf{F}_e}{\partial \mathbf{e}} \right)_{ik} = \frac{\partial F_{e_i}}{\partial e_k} = -\mathbf{K}_{ik}(\mathbf{e}) - \sum_j \sum_s e_s \left(\mathbf{C}_{\mathbf{K}_2}^{ij} + \mathbf{C}_{\mathbf{K}_2}^{ijT} \right)_{sk} e_j \tag{3.32}$$

que es mucho más sencilla. Los superíndices de la ecuación anterior denotan la componente de la matriz \mathbf{K}_2 a la que está asociada dicha matriz invariante y los subíndices representan la componente de la matriz de que se trate. De esta forma, la integración numérica sobre el volumen del elemento ha sido evitada sin que la nueva expresión sea menos apropiada para su uso computacional. De hecho, la evaluación de la matriz jacobiana haciendo uso de los invariantes reduce el coste de una de las tareas más costosas durante la simulación numérica mediante integradores implícitos: el cálculo de la matriz jacobiana.

3.2.3. Energía de deformación elástica

La energía de deformación elástica almacenada por el elemento finito se puede calcular integrando la ecuación (3.15). Igual que se hizo con la expresión de las fuerzas elásticas del elemento, se puede usar la ecuación (3.27) para sacar fuera de la integral el vector de coordenadas nodales. Así, se demuestra que la energía de deformación elástica se puede evaluar usando el conjunto de matrices invariantes como sigue:

$$U_e = \frac{1}{4} \mathbf{e}^T \mathbf{K}_2(\mathbf{e}) \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{e} + U_0 \quad (3.33)$$

Para el caso de elementos viga tridimensionales de Yakoub, la constante U_0 en el caso de usar elementos viga tridimensionales tiene la siguiente expresión:

$$U_0^{3D} = \frac{9\lambda + 6G}{8} V_e \quad (3.34)$$

donde V_e es el volumen del elemento en la configuración de referencia. Por otro lado, para elementos viga de dos dimensiones de Omar la expresión es:

$$U_0^{2D} = \frac{\lambda + G}{2} V_e \quad (3.35)$$

Generalmente se prescinde de las constantes cuando se da una expresión de la energía de deformación, sin embargo, puesto que se usará en algunos balances

de energía, aquí se da el valor de la constante que garantiza que la energía de deformación es nula cuando las deformaciones son nulas.

3.2.4. Invariantes de elementos similares

La gran ventaja de los invariantes es el evitar la integración numérica en cada evaluación de las fuerzas elásticas. Sin embargo, si cada elemento tiene un conjunto de matrices invariantes distinto, se corre el riesgo de tener que almacenar demasiada información durante la fase de pre-proceso, lo cual puede limitar la memoria disponible para el resto de tareas a realizar durante la simulación. Por eso es interesante estudiar la posibilidad de que varios elementos compartan el mismo conjunto de invariantes. Con ello se reducirán los cálculos de la fase de pre-proceso y la cantidad de datos a almacenar.

Muy frecuentemente, la discretización de un sistema multicuerpo flexible mediante elementos finitos da lugar a un elevado número de elementos con propiedades geométricas y mecánicas similares. Imagínese, por ejemplo, el caso de una viga recta con una orientación cualquiera que se discretiza en un cierto número de elementos de la misma longitud. Está claro, pues, que todos esos elementos tendrán las mismas dimensiones y propiedades del material. De igual forma, se logrará un gran ahorro computacional si se demuestra que todos los elementos comparten el mismo conjunto de matrices invariantes.

En la figura 3.3 se muestran las configuraciones de referencia de dos elementos finitos distintos. Ambas configuraciones son paralelas, es decir, se puede pasar de una a otra mediante una traslación.

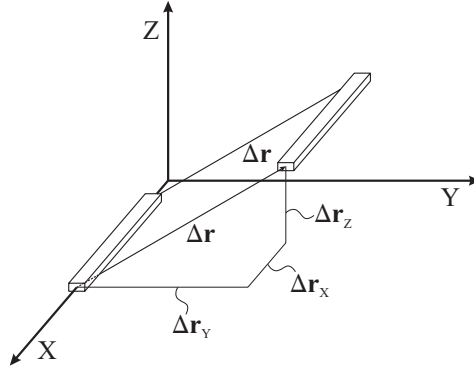


Figura 3.3: Configuraciones de referencia paralelas.

Matemáticamente, la traslación entre ambas configuraciones de referencia se expresa como sigue:

$$\mathbf{e}'_0 = \mathbf{e}_0 + \mathbf{d}_0 \quad (3.36)$$

donde \mathbf{e}'_0 y \mathbf{e}_0 son las configuraciones de referencia y \mathbf{d}_0 es el vector que representa la traslación en coordenadas nodales y que tiene la siguiente expresión para el caso de un elemento viga tridimensional:

$$\mathbf{d}_0 = \left[\Delta \mathbf{r}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \Delta \mathbf{r}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \right]^T \quad (3.37)$$

De acuerdo con las ecuaciones (3.11) y (3.15), una condición suficiente para que dos elementos con configuraciones de referencia distintas tengan la misma expresión de las fuerzas elásticas y, por tanto, el mismo conjunto de invariantes, es que el jacobiano de la transformación a la configuración recta sea el mismo para ambos, es decir, $\mathbf{J}'_0 = \mathbf{J}_0$. Recordando la ecuación (3.7), es fácil ver que lo anterior se cumple gracias a que se cumplen las siguientes relaciones:

$$\mathbf{S}_{,x} \mathbf{d}_0 = \mathbf{S}_{,y} \mathbf{d}_0 = \mathbf{S}_{,z} \mathbf{d}_0 = \mathbf{0} \quad (3.38)$$

Por tanto, en el caso antes mencionado de una viga recta discretizada en elementos iguales, sólo es necesario calcular y almacenar los invariantes de uno de ellos. Nótese, que la traslación no tiene una dirección determinada, por lo que, si se tuvieran otras barras paralelas, discretizadas con elementos similares, también podrían hacer uso de dicha propiedad.

En el caso de que las configuraciones de referencia estén relacionadas a través de una rotación, como se observa en la figura 3.4, si bien la función de fuerzas elásticas de cada uno tiene una expresión distinta, es posible utilizar el mismo conjunto de invariantes para ambos elementos como se muestra a continuación.

Para ver esto, basta pensar que los dos elementos de la figura 3.4 tienen la misma función de fuerzas elásticas expresada en sistemas de referencia distintos puesto que cada uno ocupa la misma posición respecto a su sistema de referencia. Por lo tanto, si se pueden relacionar los vectores de coordenadas nodales absolutas respecto a ambos sistemas de referencia de alguna forma, se podrán reutilizar los invariantes calculados para uno de ellos. De hecho, la relación que hay entre los vectores escritos en ambos sistemas de referencia es una rotación como sigue:

$$\mathbf{e}' = \mathbf{A}_0 \mathbf{e} \quad (3.39)$$

donde \mathbf{A}_0 es una matriz diagonal por bloques, cuyos bloques son ortogonales [62].

Introduciendo el cambio de variable de la ecuación (3.39), en la expresión de las fuerzas elásticas en el sistema girado se obtiene lo siguiente:

$$\mathbf{K}'(\mathbf{e}) = \mathbf{A}_0^T \mathbf{K}'_2(\mathbf{e}) \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_0^T \mathbf{K}'_1 \mathbf{A}_0 \quad (3.40)$$

donde se ha pre-multiplicado el vector de fuerzas elásticas por la matriz de rotación para expresarlo en el sistema global no girado. Así, las matrices que intervienen en la ecuación (3.40) tienen las siguientes expresiones:

$$\mathbf{K}'_1 = \mathbf{K}_1 \quad (3.41)$$

$$(\mathbf{K}'_2(\mathbf{e}))_{ij} = \mathbf{e}^T \mathbf{A}_0^T \mathbf{C}_{\mathbf{K}_2}^{ij} \mathbf{A}_0 \mathbf{e} \quad (3.42)$$

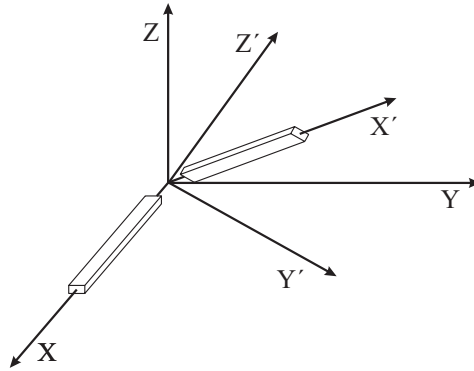


Figura 3.4: Configuraciones de referencia rotadas.

Por tanto, para evaluar las fuerzas elásticas de un elemento cuya configuración de referencia se obtiene a través de una rotación de los sistemas de referencia, también se pueden reutilizar los invariantes calculados previamente para otro elemento similar. Este hecho, junto con la invarianza respecto a la traslación de la configuración de referencia permite reducir el cálculo y la cantidad de datos a almacenar en la fase de pre-proceso.

3.2.5. Coste computacional derivado del uso de invariantes

El uso de las matrices invariantes en el cálculo de las fuerzas elásticas evita la integración numérica en cada evaluación de éstas, acelerando el proceso. Sin embargo, requiere un pre-procesado adicional cuyo coste es interesante estudiar. Es lógico pensar que su uso será conveniente o no, dependiendo del número de evaluaciones de función necesarias en una cierta simulación.

En esta sección se utiliza un problema de pequeñas deformaciones cuya solución es bien conocida para estudiar el ahorro computacional que implica el uso de las

matrices invariantes. El problema que se trata consiste en el estudio de la dinámica de una viga en voladizo sometida a una carga concentrada en su extremo libre y cuyo valor depende del tiempo. Dicho problema se resuelve usando la formulación basada en las matrices invariantes [60] y usando la formulación original de los elementos [34]. El número de operaciones aritméticas y el tiempo de CPU se usan para comparar ambas formulaciones del elemento.

La viga en estudio tiene una sección cuadrada de 0.1 m de lado y 5 m de longitud. El material del que está hecha la viga tiene una densidad de 8145.2 Kg/m³ y un módulo de Young de 132 GPa. El módulo de Poisson del material se considera nulo para evitar el bloqueo del elemento por efecto Poisson siguiendo las recomendaciones de Sopenan y Mikkola [37, 38].

La carga concentrada aplicada en el extremo libre de la viga en voladizo varía según la siguiente expresión:

$$\mathbf{F}(t) = \begin{cases} \frac{F}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi t}{t_c} \right) & t < t_c \\ F & t \geq t_c \end{cases} \quad (3.43)$$

donde F es el valor máximo alcanzado en el régimen estacionario, que en este caso es de 300 N.

Aunque manipulando algebraicamente el sistema de ecuaciones diferenciales, las condiciones de contorno podrían eliminarse por ser ecuaciones lineales, en este caso el sistema se resuelve con las restricciones. Para las integrales de volumen se ha utilizado una cuadratura de Gauss con cinco puntos de integración en la dirección longitudinal del elemento y tres en ambas direcciones de la sección [63]. Para comparar el coste computacional de ambas formulaciones se variará el número de elementos y el tiempo de simulación.

El sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas (DAE) se integra usando la regla trapezoidal [44], que es un integrador implícito de segundo orden. Para garantizar que se cumplen las restricciones se usa un algoritmo basado en proyección de velocidad y posición [64]. El uso de un integrador implícito requiere el cálculo

lo de la matriz jacobiana del sistema de ecuaciones. Puesto que la evaluación de la matriz jacobiana sin el uso de las matrices invariantes implica la integración numérica sobre el volumen del elemento, se ha utilizado para la integración de las ecuaciones obtenidas con ambas formulaciones la matriz jacobiana de las fuerzas elásticas calculada mediante el uso de los invariantes. De esta forma, las diferencias que se encuentren entre los resultados de ambas formulaciones son sólo atribuibles a la evaluación de las fuerzas elásticas. Nótese que la ventaja del uso de invariantes sería más evidente si se tuviera que integrar la matriz jacobiana sobre el volumen del elemento para cada evaluación de ésta.

El desplazamiento transversal del extremo libre y la frecuencia natural se usan para validar los resultados obtenidos. Así, el desplazamiento por flexión del extremo de la viga bajo la acción de una carga concentrada se escribe, en caso de pequeñas deformaciones, como sigue:

$$\delta_L = \frac{PL^3}{3EI} \quad (3.44)$$

Por su parte, la frecuencia natural de flexión de una viga en voladizo se escribe como sigue:

$$\omega_n = (1.8751)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \quad (3.45)$$

En un primer análisis, se simulan 4 segundos con un valor de t_c igual a 3.5 s. La simulación se lleva a cabo con tres modelos que difieren en el número de elementos y cada modelo se resuelve con y sin matrices invariantes. Para ello se usa un ordenador Pentium 4, 3.06 GHz con 2 GB de memoria RAM.

La tabla 3.1 muestra una comparación de los resultados obtenidos con y sin el uso de invariantes para tres discretizaciones distintas: 2, 5 y 10 elementos. En dicha tabla δ es el valor medio del desplazamiento transversal en régimen estacionario del extremo libre de la viga en cada modelo y ω_n representa la frecuencia a la que vibra la viga cuando la carga ha alcanzado el valor estacionario. Usando las ecuaciones (3.44) y (3.45) se obtienen unos valores del desplazamiento transversal de flexión y

de la frecuencia natural de 0.0114 m y 16.24 rad/s, respectivamente. Como puede observarse en la tabla, los valores de δ y ω_n coinciden aproximadamente con los valores obtenidos con las ecuaciones (3.44) y (3.45), si bien muestran una tasa de convergencia anormalmente baja. El número de evaluaciones de la función de fuerzas elásticas se muestra en la cuarta columna puesto que es un buen indicador del coste de la simulación. Este valor es constante en los tres casos porque se ha simulado el mismo tiempo y con el mismo paso de integración. Lógicamente, cuanto mayor sea el número de evaluaciones de la función de las fuerzas elásticas mayor será la diferencia entre usar o no las matrices invariantes. Las dos últimas columnas de la tabla 3.1 muestran el número de operaciones aritméticas y el tiempo de CPU empleado en cada simulación. El coste computacional, en el caso de usar invariantes, se ha dividido en las distintas etapas del análisis, de forma que en el preproceso se incluye el coste relativo al cálculo de los invariantes y en la simulación, el resto del análisis. Como se observa en la tabla 3.1, el ahorro en tiempo de CPU se hace muy importante cuando el número de elementos aumenta. Se observa cómo el uso de los invariantes conduce a un considerable ahorro de tiempo de CPU, así como de operaciones algebraicas. El ahorro es mayor, en términos absolutos, cuando el número de elementos aumenta.

Para entender mejor los resultados mostrados en la tabla, merece la pena ver el número de operaciones que requiere una única evaluación de las fuerzas elásticas. Así, el coste computacional asociado a la evaluación de las fuerzas elásticas sin usar invariantes es de $9.16 \cdot 10^6$, mientras que sólo $5.52 \cdot 10^4$ operaciones se necesitan cuando se usan las matrices invariantes del elemento finito. Sin embargo, las $5.52 \cdot 10^4$ operaciones anteriores no contienen el coste asociado al cálculo de los propios invariantes. El cálculo de las matrices invariantes implica un coste computacional constante e independiente del tiempo de simulación de $7.45 \cdot 10^8$ y el tiempo de CPU requerido en el equipo usado es de 20.13 segundos. Dados los números anteriores, puede esperarse que para un número de evaluaciones de función superior a 80 resulta más conveniente el uso de invariantes, lo cual esta casi

N° de elementos	δ (cm)	ω_n (rad/s)	N° de evaluaciones de función	Uso de invariantes	Parte del análisis	N° de operaciones aritméticas	Tiempo de CPU (s)
2	1.07	16.89	301	sí	pre-proceso	$1.48 \cdot 10^9$	40.2
					simulación	$2.37 \cdot 10^8$	68.7
				no	completo	$1.71 \cdot 10^9$	108.9
					completo	$7.78 \cdot 10^9$	312.4
5	1.13	16.41	301	sí	pre-proceso	$3.72 \cdot 10^9$	100.6
					simulación	$1.31 \cdot 10^9$	136.4
				no	completo	$4.03 \cdot 10^9$	237.0
					completo	$2.21 \cdot 10^{10}$	910.4
10	1.14	16.28	301	sí	pre-proceso	$7.45 \cdot 10^9$	201.3
					simulación	$6.82 \cdot 10^9$	296.2
				no	completo	$1.42 \cdot 10^{10}$	497.5
					completo	$5.45 \cdot 10^{10}$	2930.8

Tabla 3.1: Influencia del número de elementos.

garantizado en cualquier simulación.

El beneficio que se obtiene con el uso de matrices invariantes aparece más evidente en simulaciones largas donde el número de evaluaciones de función es muy elevado como se recoge en la tabla 3.2. Los resultados de dicha tabla se han obtenido con un modelo de cinco elementos variando el tiempo de simulación de 10 a 30 segundos como se muestra en la primera columna. En cada caso el valor de t_c es 0.875 veces el tiempo de simulación. La segunda columna muestra cómo el número de evaluaciones de las fuerzas elásticas aumenta con el tiempo de simulación, como consecuencia de usar el mismo paso de integración en todos los casos. De nuevo, el coste computacional se recoge en las dos últimas columnas de la tabla. Como puede verse en la tabla 3.2, el coste del preprocesado se hace cada vez menos importante con respecto al coste de la simulación cuando el tiempo simulado aumenta. De hecho, el preproceso consume el 21.3 por ciento del tiempo de CPU para la simulación de 10 segundos y sólo el 6 por ciento para una simulación de 30 segundos.

Tiempo de simulación (s)	N ° de evaluaciones de función	Uso de invariantes	Parte del análisis	N ° de operaciones aritméticas	Tiempo de CPU (s)
10	754	sí	pre-proceso	$3.72 \cdot 10^9$	100.6
			simulación	$3.29 \cdot 10^9$	372.4
		no	completo	$7.01 \cdot 10^9$	473.0
			completo	$5.53 \cdot 10^{10}$	2466.2
20	1450	sí	pre-proceso	$3.72 \cdot 10^9$	100.6
			simulación	$6.42 \cdot 10^9$	1226.0
		no	completo	$1.01 \cdot 10^{10}$	1326.6
			completo	$1.07 \cdot 10^{11}$	8446.0
30	2039	sí	pre-proceso	$3.72 \cdot 10^9$	100.6
			simulación	$9.27 \cdot 10^9$	1570.5
		no	completo	$1.30 \cdot 10^{10}$	1671.1
			completo	$1.54 \cdot 10^{11}$	10424.1

Tabla 3.2: Influencia del tiempo de simulación.

Como segundo ejemplo, se ha simulado la dinámica de una viga que gira en un plano, alrededor de un eje que pasa por uno de sus extremos. El efecto de rigidización centrífuga que aparece en este problema requiere un tratamiento especial como es sabido [62, 43, 65, 66]. Una alternativa para resolver este tipo de problemas es el uso de una formulación que tenga en cuenta no linealidades geométricas, tales como el acoplamiento entre el comportamiento en flexión y tracción. El uso de una medida de la tensión basada en el tensor de Green-Lagrange incorpora este efecto.

La viga objeto de estudio tiene una sección de $7.299 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ de área y $8.215 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$ de momento de inercia. La longitud de la viga es de 8 metros, la densidad, 2766.67 kg/m^3 , y el módulo de Young, 68.95 GPa . La viga se hace rotar alrededor de uno de sus extremos según la siguiente ecuación:

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{\omega_s}{T_s} \left(\frac{t^2}{2} + \frac{T_s^2}{4\pi^2} \left(\cos \frac{2\pi t}{T_s} - 1 \right) \right) & t < T_s \\ \omega_s \left(t - \frac{T_s}{2} \right) & t \geq T_s \end{cases} \quad (3.46)$$

donde T_s es igual a 15 segundos y w_s es igual a 4 rad/s.

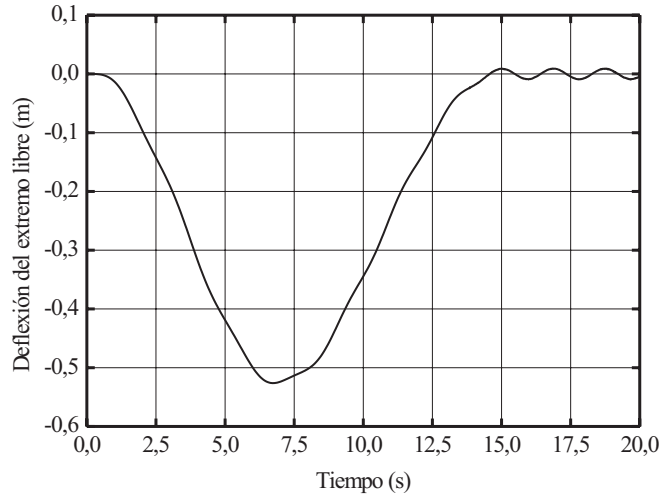


Figura 3.5: Deflexión del extremo libre de la viga.

La viga se ha modelado con diez elementos bidimensionales con tres puntos de integración en la sección y cinco en su eje longitudinal. Al igual que en el ejemplo anterior se ha usado la regla trapezoidal para la integración de las ecuaciones del movimiento.

En la figura 3.5 se muestra la deflexión del extremo libre de la viga medida con respecto a la tangente a la línea media por el eje de giro. Los resultados obtenidos muestran un buen acuerdo con los resultados que pueden encontrarse en la bibliografía [67, 68]. La importancia de este ejemplo reside en el hecho de que

se realizan 20072 evaluaciones de función durante la simulación. Con este número de evaluaciones de función, no existe duda al respecto de las ventajas derivadas del uso de las matrices invariantes. La energía elástica almacenada por la viga se muestra en la figura 3.6. Como era de esperar, la energía de deformación elástica aumenta y disminuye de la misma forma que la deformación del elemento. Cuando la velocidad alcanza el valor estacionario, la viga queda deformada axialmente como consecuencia de la rotación y, por tanto, la energía adquiere un valor distinto de cero.

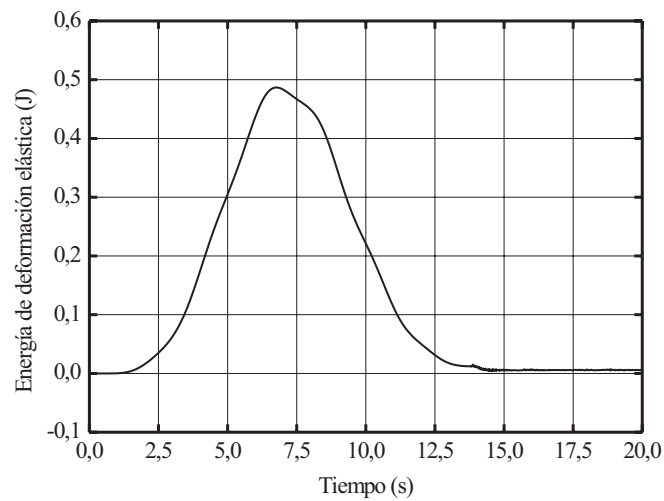


Figura 3.6: Energía de deformación elástica de la viga.

3.3. Modelo de amortiguamiento interno

Entre las causas más frecuentes de amortiguamiento en sistemas multicuerpo se encuentra el amortiguamiento interno o histerético. Si bien, la contribución de este tipo de amortiguamiento al total de la energía que se disipa suele ser pequeña comparada con la disipación que se produce por fricción en las juntas o la interacción con un fluido circundante, puede ser importante en determinadas circunstancias. Entre ellas se pueden citar los sistemas que funcionan en vacío como, por ejemplo, el SET (Short Electrodynamic Tether) estudiado por Valverde *et al.* [4]. También cabe mencionar a los materiales en los que el amortiguamiento interno es especialmente importante u otras situaciones en las que el amortiguamiento interno gobierna las ecuaciones del sistema. Por ello, es útil, en general, y necesario en ciertas ocasiones, disponer de un modelo de amortiguamiento interno.

Dada la reciente aparición de la formulación en coordenadas nodales absolutas, no hay hasta el momento ningún modelo de amortiguamiento interno. Algunos autores han introducido modelos de amortiguamiento viscoso proporcional [69, 70] en la formulación para algunos elementos en concreto. Takahashi *et al.* [69], por ejemplo, utilizan el elemento tipo Euler-Bernoulli de cuatro grados de libertad por nodo [47]. Al introducir el amortiguamiento se asume que las deformaciones en el elemento son pequeñas, para simplificar la expresión de las fuerzas elásticas y así obtener una matriz constante relacionada con la rigidez a flexión. Este modelo es muy particular y debido a que la matriz de amortiguamiento es proporcional a la matriz de masa, disipa energía cuando el elemento se mueve como un sólido rígido.

El amortiguamiento proporcional puede ser una alternativa cuando se tienen las matrices de masa y rigidez modal del sistema, ya que en ese caso es sencillo amortiguar únicamente los modos de deformación y no los de sólido rígido. Sin embargo, por la propia naturaleza de la formulación en coordenadas nodales absolutas, esto no es posible puesto que las variables nodales contienen la información relativa al movimiento como sólido rígido y al movimiento por deformación. Para

simular convenientemente el amortiguamiento interno, es imprescindible que sólo haya disipación cuando haya deformación, por lo que la medida de deformación es una pieza clave del modelo.

3.3.1. Función de disipación

Uno de los procedimientos más ampliamente utilizados para introducir amortiguamiento en un sistema es el desarrollo de una función de disipación de Rayleigh [71]. Tal función permite derivar de forma sistemática las fuerzas de amortiguamiento mediante derivadas parciales con respecto a las velocidades generalizadas. La idea de la función de disipación aparece clara al evaluar el trabajo virtual realizado por las fuerzas de amortiguamiento tal y como se muestra a continuación. Considérese, por ejemplo, el sistema de masas concentradas de la figura 3.7. En ese sistema, las masas m_1 y m_2 están conectadas por un muelle y un amortiguador. Dicho amortiguador representa el amortiguamiento interno del sistema compuesto por las dos masas.

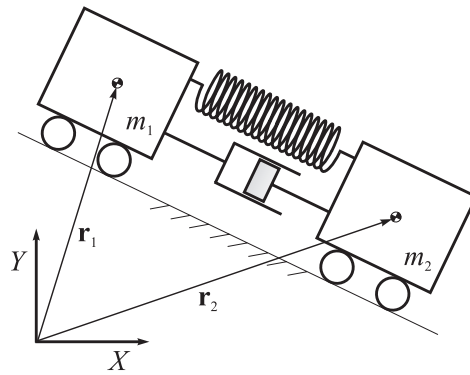


Figura 3.7: Sistema de dos masas concentradas conectadas por muelle y amortiguador.

Puede asumirse que las fuerzas de disipación en cada una de las masas son proporcionales a la velocidad relativa de separación de ambas y actúan en la misma

dirección y sentido contrario que el vector velocidad relativa. En ese caso, las expresiones de las fuerzas sobre cada masa pueden escribirse:

$$\mathbf{F}_1 = -c(\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2) \quad \mathbf{F}_2 = -c(\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1) \quad (3.47)$$

donde \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 son las fuerzas de amortiguamiento sobre las masas m_1 y m_2 , respectivamente, y c es la constante de proporcionalidad, que depende del amortiguador. El trabajo virtual realizado por estas fuerzas puede calcularse sumando el trabajo realizado sobre cada masa:

$$\delta W = \mathbf{F}_1 \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \delta \mathbf{r}_2 = \mathbf{F}_1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_i} \delta q_i + \mathbf{F}_2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \quad (3.48)$$

donde q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) son las coordenadas generalizadas del sistema. La ecuación (3.48) puede usarse junto con la siguiente relación de la Mecánica Analítica:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_j}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.49)$$

para obtener una expresión de la función de disipación de Rayleigh [71]. Así, las fuerzas de amortiguamiento generalizadas de la ecuación (3.48) pueden definirse como sigue:

$$Q_i = -\frac{\partial F_d}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.50)$$

donde F_d es la función de disipación, la cual tiene unidades de potencia, y se calcula como sigue a continuación:

$$F_d = \frac{1}{2}c(\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2)^2 \quad (3.51)$$

Como se observa en la ecuación anterior, la función de disipación de Rayleigh es una función cuadrática de la velocidad relativa entre las masas. La expresión de la ecuación (3.51) sugiere la idea de utilizar la velocidad de deformación de un punto material de un sólido deformable para obtener una función de disipación.

De acuerdo con lo anterior, una posible expresión para la función de disipación de un sólido deformable podría ser:

$$F_d = \frac{1}{2} \int_{\Phi_0(\Omega)} c \dot{\epsilon}^2 dV_0 \quad (3.52)$$

donde $\dot{\epsilon}$ es derivada temporal de la deformación de un punto. La ecuación (3.52) asume que el movimiento de un punto no produce fuerzas de amortiguamiento en el resto de puntos del sólido. Sin embargo, no es necesario mantener esta suposición y pueden obtenerse funciones más generales. Además, c podría variar de punto a punto del sólido. En este trabajo, se usa este procedimiento para desarrollar una función de Rayleigh que permita obtener unas fuerzas internas de disipación adecuadas.

3.3.2. Función de disipación y fuerzas disipativas

Los modelos de amortiguamiento para elementos viga o placa en el campo de las vibraciones suelen basarse en conceptos viscoelásticos [72]. Tales modelos se han diseñado frecuentemente para estados simples de tensión como flexión, tracción-compresión o torsión por medio de la inclusión de un factor de disipación. Así, por ejemplo, para un elemento viga, un modelo viscoelástico lineal para las tensiones normales utiliza la siguiente ecuación:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x + \gamma_x E \dot{\varepsilon}_x \quad (3.53)$$

donde σ_x es la tensión normal en dirección longitudinal, E es el módulo de Young del material, γ_x es el factor de disipación, ε_x y $\dot{\varepsilon}_x$ son la deformación y la velocidad de deformación en dirección longitudinal, respectivamente. Sin embargo, los modelos de amortiguamiento basados en relaciones viscoelásticas lineales pueden generalizarse a estados de tensión multiaxial [73]. Para ello debe tenerse en cuenta que la respuesta de los materiales ante sollicitaciones que produzcan deformaciones desviadoras o de dilatación son diferentes y, por tanto, deberían ser distintos los

factores de disipación que relacionan las tensiones con las derivadas con respecto al tiempo de las deformaciones [74]. El modelo viscoelástico multiaxial que se usará en esta sección considera una relación equivalente a la ecuación (3.53) para las componentes desviadoras y otra para las octaédricas. Ambas relaciones utilizan dos factores de disipación distintos

$$\begin{aligned} s_{ij} &= 2Gd_{ij} + 2G\gamma_d\dot{d}_{ij} \\ \sigma_{ii} &= 3K\varepsilon_{ii} + 3K\gamma_s\dot{\varepsilon}_{ii} \end{aligned} \quad (3.54)$$

donde s_{ij} y d_{ij} son los tensores desviadores de tensión y deformación, respectivamente, G es el modulo de rigidez transversal del material, σ_{ii} y ε_{ii} son los tensores octaédricos de tensión y deformación, respectivamente, K es el modulo de rigidez volumétrica del material y el punto sobre un símbolo implica derivada con respecto al tiempo. γ_s y γ_d en la ecuación (3.54) son los factores de disipación asociados a las tensiones de dilatación y desviadoras, respectivamente.

El tensor desviador de tensiones puede obtenerse derivando la parte de la energía de deformación que preserva el volumen con respecto al tensor de deformación de Cauchy-Green como se explica en [75]. Cuando se usa una descripción material, como es el caso del modelo de fuerzas internas que se usa aquí, las expresiones de los tensores desviadores y volumétricos son bastante complicadas. Sin embargo, las grandes deformaciones no suelen ser comunes en la mayoría de las aplicaciones de la dinámica de sistemas multicuerpo. En tal caso, es razonable utilizar una descripción sencilla de las componentes desviadoras de los tensores de tensión y deformación como la que se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{1}{3} \sigma_{ii} \delta_{ij} + s_{ij} \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{3} \varepsilon_{ii} \delta_{ij} + d_{ij} \end{aligned} \quad (3.55)$$

El uso de la ecuación (3.55) confina el modelo al caso de grandes desplazamientos por deformación pero pequeñas deformaciones, lo que es muy común en aplicaciones multicuerpo. En caso de que puedan producirse grandes deformaciones,

será necesaria la expresión exacta para las componentes desviadora y octaédrica [75, 42]. Sustituyendo las ecuaciones constitutivas (3.54) y la segunda de las ecuaciones (3.55) en la primera ecuación (3.55), las componentes del tensor de tensiones pueden escribirse en función de las del tensor de deformaciones y de las de la derivada temporal del tensor de deformaciones como sigue:

$$\sigma_{ij} = \underbrace{2G\varepsilon_{ij} + \left(K - \frac{2G}{3}\right)\varepsilon_{ii}\delta_{ij}}_{\text{parte elástica, } \boldsymbol{\sigma}_e} + \underbrace{2G\gamma_d\dot{\varepsilon}_{ij} + \left(K\gamma_s - \frac{2G\gamma_d}{3}\right)\dot{\varepsilon}_{ii}\delta_{ij}}_{\text{parte viscosa, } \boldsymbol{\sigma}_v} \quad (3.56)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. La función de disipación que se está buscando, P_d , puede calcularse de forma similar a como se calculó la energía elástica. Así, la parte viscosa del tensor de tensiones se multiplica por la derivada con respecto al tiempo del tensor de deformaciones para obtener una función de disipación por unidad de volumen cuya estructura es similar a la de la ecuación (3.52):

$$P_d = \frac{1}{2} \int_{\Phi_0(\Omega)} \boldsymbol{\sigma}_v : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV_0 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_v : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} |\mathbf{J}_0| dv \quad (3.57)$$

Nótese que la función de disipación se diferencia de la potencia disipada por las fuerzas de amortiguamiento en el factor 1/2. Recordando las ecuaciones (3.14), es sencillo ver que la derivada con respecto al tiempo de las deformaciones puede escribirse como sigue:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^T \left(\mathbf{S}_{,i}^T \mathbf{S}_{,j} + \mathbf{S}_{,j}^T \mathbf{S}_{,i} \right) \mathbf{e} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.58)$$

Al sustituir la ecuación (3.58) dentro de la ecuación (3.57) se observa que la potencia disipada es una forma cuadrática con respecto al vector velocidad generalizado. En la siguiente expresión, la función de disipación de la ecuación (3.57) se ha utilizado para obtener las fuerzas de amortiguamiento a través de la derivada con respecto a $\dot{\mathbf{e}}$, de acuerdo con la ecuación (3.50):

$$\mathbf{Q}_d = - \left(\frac{\partial P_d}{\partial \dot{\mathbf{e}}} \right)^T \quad (3.59)$$

La expresión correspondiente del vector de fuerzas de amortiguamiento generalizado para un elemento flexible arbitrario es:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_d = - \int_{\Phi_0(\Omega)} \left[\left(K\gamma_s + \frac{4G\gamma_d}{3} \right) \left(2\dot{\epsilon}_{11} \frac{\partial \dot{\epsilon}_{11}^T}{\partial \dot{\mathbf{e}}} + 2\dot{\epsilon}_{22} \frac{\partial \dot{\epsilon}_{22}^T}{\partial \dot{\mathbf{e}}} + 2\dot{\epsilon}_{33} \frac{\partial \dot{\epsilon}_{33}^T}{\partial \dot{\mathbf{e}}} \right) + \right. \\ \left. 4G\gamma_d \left(2\dot{\epsilon}_{12} \frac{\partial \dot{\epsilon}_{12}^T}{\partial \dot{\mathbf{e}}} + 2\dot{\epsilon}_{13} \frac{\partial \dot{\epsilon}_{13}^T}{\partial \dot{\mathbf{e}}} + 2\dot{\epsilon}_{23} \frac{\partial \dot{\epsilon}_{23}^T}{\partial \dot{\mathbf{e}}} \right) + \left(2K\gamma_s - \frac{4G\gamma_d}{3} \right) \left(\dot{\epsilon}_{11} \frac{\partial \dot{\epsilon}_{22}^T}{\partial \dot{\mathbf{e}}} \right. \right. \\ \left. \left. + \dot{\epsilon}_{22} \frac{\partial \dot{\epsilon}_{11}^T}{\partial \dot{\mathbf{e}}} + \dot{\epsilon}_{11} \frac{\partial \dot{\epsilon}_{33}^T}{\partial \dot{\mathbf{e}}} + \dot{\epsilon}_{33} \frac{\partial \dot{\epsilon}_{11}^T}{\partial \dot{\mathbf{e}}} + \dot{\epsilon}_{22} \frac{\partial \dot{\epsilon}_{33}^T}{\partial \dot{\mathbf{e}}} + \dot{\epsilon}_{33} \frac{\partial \dot{\epsilon}_{22}^T}{\partial \dot{\mathbf{e}}} \right) \right] dV_0 = -\mathbf{C}(\mathbf{e}) \dot{\mathbf{e}} \end{aligned} \quad (3.60)$$

donde $\mathbf{C}(\mathbf{e})$ es una matriz dependiente de las coordenadas nodales.

Después de algunas manipulaciones algebraicas, la matriz de amortiguamiento adquiere la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{e}) = \int_{\Phi_0(\Omega)} \left[\left(2K\gamma_s + \frac{8G\gamma_d}{3} \right) \left(\sum_{\alpha=1}^3 \mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\alpha} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\alpha} \right) + \right. \\ \left. 2G\gamma_d \left(\sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^3 \mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\beta} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\beta} + \mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\beta} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,\beta}^T \mathbf{S}_{,\alpha} \right) + \right. \\ \left. \left(2K\gamma_s - \frac{4G\gamma_d}{3} \right) \left(\sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^3 \mathbf{S}_{,\alpha}^T \mathbf{S}_{,\alpha} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,\beta}^T \mathbf{S}_{,\beta} \right) \right] dV_0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

La matriz de amortiguamiento resulta ser una función no lineal del vector de coordenadas nodales con una estructura similar a la de la matriz de rigidez de la ecuación (3.24). Al igual que se hizo con las fuerzas elásticas, se puede encontrar un procedimiento sistemático para factorizar los vectores de coordenadas nodales que permita agilizar el cálculo. De esta forma, la complicada expresión de la ecuación (3.61) no requiere la integración sobre el volumen del elemento por cada evaluación de las fuerzas de amortiguamiento, ya que las coordenadas nodales pueden sacarse fuera de la integral con ayuda de la ecuación (3.27). De hecho, la expresión de una

componente cualquiera de la matriz de amortiguamiento es una forma cuadrática de las coordenadas nodales. La matriz de esta forma cuadrática puede integrarse por adelantado y, una vez hecho esto, la integral sobre el volumen del elemento no se realiza más. De esta forma, evaluar las fuerzas de amortiguamiento requiere un menor número de operaciones.

Cálculo de los factores de disipación

Hasta este momento, hay dos parámetros, los factores de disipación, γ_s y γ_d , a los que resta asignarles un valor, lo cual se acometerá para cada problema en particular. En la bibliografía relacionada con este tipo de amortiguamiento pueden encontrarse valores experimentales para estos parámetros [76]. Sin embargo, no todos los materiales han sido estudiados experimentalmente y puede que estos datos no se encuentren fácilmente. En ese caso, es posible realizar experimentos de laboratorio que permitan caracterizar dichos parámetros [77].

Mientras que la cantidad de energía que se disipa en un ciclo de histéresis es aproximadamente constante en la práctica, la aproximación viscosa hace que la energía disipada dependa de la frecuencia de excitación [72]. Debido a que el modelo empleado simula el amortiguamiento interno mediante un modelo viscoso, los valores más adecuados de los parámetros γ_s y γ_d variarán con la frecuencias implicadas en el problema. Los valores de estos parámetros pueden estimarse mediante un procedimiento analítico [78]. Dicho procedimiento se basa en el hecho de que el factor de amortiguamiento crítico de un modelo visco-elástico lineal unidimensional como el siguiente:

$$\sigma = E(\varepsilon + \gamma\dot{\varepsilon}) \quad (3.62)$$

tiene la siguiente expresión [79]:

$$\gamma^{crit} = \frac{2}{\omega_n} \quad (3.63)$$

donde γ^{crit} es el valor del factor γ que produce un amortiguamiento crítico. A partir de la ecuación (3.63), el valor del factor de amortiguamiento se puede calcular como una fracción del amortiguamiento crítico

$$\gamma = \frac{2\xi}{\omega_n} \quad (3.64)$$

Típicamente, los valores de este porcentaje están por debajo de 0.05 en los materiales más comunes.

A diferencia de la relación de la ecuación (3.62), el modelo de amortiguamiento interno que se ha presentado en este capítulo está basado en una relación viscoelástica multiaxial. Esto ha de tenerse en cuenta a la hora de estimar el valor de los factores de disipación. No obstante, también puede usarse la idea de calcular los factores de disipación como una fracción del factor crítico. De esta forma, para estimar el valor del factor γ_d , puede usarse el factor crítico bajo unas sollicitaciones que produzcan únicamente deformación tangencial. En el caso de barras, esto ocurre si se somete la barra a torsión. De acuerdo con el modelo viscoelástico propuesto en la ecuación (3.56), el estado tensional de un punto de la barra sujeta a torsión es el siguiente:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{yz} &= 0 \\ \sigma_{xy} &= 2G\varepsilon_{xy} + 2G\gamma_d\dot{\varepsilon}_{xy} \\ \sigma_{xz} &= 2G\varepsilon_{xz} + 2G\gamma_d\dot{\varepsilon}_{xz} \end{aligned} \quad (3.65)$$

donde se cumple que

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{xz} \quad (3.66)$$

Debido a que en la ecuación (3.65) sólo aparece el factor γ_d , parece lógico calcular este factor a partir de la frecuencia natural de torsión de la barra mediante la ecuación (3.63). Como se sabe, las condiciones de contorno influyen en el valor de las frecuencias naturales de la barra. Por ello, para calcular la frecuencia natural de

torsión, es importante utilizar unas condiciones de contorno de la barra similares a las que ésta tiene como parte del sistema multicuerpo del que forma parte. Así, el factor γ_d puede calcularse como sigue:

$$\gamma_d = \frac{2\xi}{\omega_n^d} \quad (3.67)$$

donde ω_n^d es la frecuencia natural de torsión más próxima a la frecuencia a la que se mueve el sistema.

Por otro lado, para calcular el valor del factor γ_s , debe utilizarse la frecuencia natural de la barra en un estado tensional que implique deformaciones volumétricas. Así, si sólo hay deformaciones longitudinales, como en estados de tracción-compresión o de flexión pura, el estado tensional, de acuerdo con la ecuación (3.56), será

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \left(K + \frac{4G}{3}\right) \varepsilon_{xx} + \left(K - \frac{2G}{3}\right) (\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \\ &+ \left(\gamma_s K + \frac{4\gamma_d G}{3}\right) \dot{\varepsilon}_{xx} + \left(\gamma_s K - \frac{2\gamma_d G}{3}\right) (\dot{\varepsilon}_{yy} + \dot{\varepsilon}_{zz}) \quad (3.68) \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \end{aligned}$$

donde σ_{xx} depende tanto de γ_s como de γ_d . A continuación, la ecuación (3.68) se escribirá de forma similar a (3.62), para poder utilizar una expresión del factor de disipación similar al de la ecuación (3.64)

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} + E\gamma_{xx}\dot{\varepsilon}_{xx} \quad (3.69)$$

En tal caso, el factor γ_{xx} puede calcularse fácilmente de la misma forma que γ_d , es decir, como una fracción ξ del factor crítico de disipación

$$\gamma_{xx} = \frac{2\xi}{\omega_n^{xx}} \quad (3.70)$$

donde ω_n^{xx} es la frecuencia natural de la barra con unas condiciones de contorno similares a las que tiene la barra como parte del sistema multicuerpo al que perte-

nece. Esta frecuencia puede obtenerse del problema de tracción-compresión o del de flexión pura dependiendo de cual de estos modos de deformación predomine. Una vez que se ha estimado el valor de γ_{xx} , el valor de γ_s puede estimarse como se explica en lo que sigue.

De acuerdo con la ecuación (3.68), σ_{xx} podría escribirse en función de ε_{xx} y $\dot{\varepsilon}_{xx}$ si se conocen las relaciones entre $(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})$ y ε_{xx} y entre $(\dot{\varepsilon}_{yy} + \dot{\varepsilon}_{zz})$ y $\dot{\varepsilon}_{xx}$. Estas relaciones pueden obtenerse a partir de la suma de las expresiones de las tensiones en las direcciones transversales de la viga

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = 0 = & \left(K + \frac{4G}{3} \right) \varepsilon_{yy} + \left(K - \frac{2G}{3} \right) (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) \\ & + \left(\gamma_s K + \frac{4\gamma_d G}{3} \right) \dot{\varepsilon}_{yy} + \left(\gamma_s K - \frac{2\gamma_d G}{3} \right) (\dot{\varepsilon}_{xx} + \dot{\varepsilon}_{zz}) \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = 0 = & \left(K + \frac{4G}{3} \right) \varepsilon_{zz} + \left(K - \frac{2G}{3} \right) (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \\ & + \left(\gamma_s K + \frac{4\gamma_d G}{3} \right) \dot{\varepsilon}_{zz} + \left(\gamma_s K - \frac{2\gamma_d G}{3} \right) (\dot{\varepsilon}_{xx} + \dot{\varepsilon}_{yy}) \end{aligned} \quad (3.72)$$

En vista de las dos ecuaciones anteriores puede obtenerse una relación para $(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})$ en función de ε_{xx} utilizando la siguiente idea: sea ε la deformación de un sólido bajo un conjunto de cargas aplicadas, que puede considerarse normalmente una función periódica de frecuencia característica ω . En tal caso, la deformación puede expresarse como [76]

$$\varepsilon \simeq f(\omega t) \quad (3.73)$$

luego

$$\dot{\varepsilon} \simeq \omega f(\omega t) \simeq \omega \varepsilon \quad (3.74)$$

La ecuación anterior permite escribir las siguientes relaciones:

$$\gamma \dot{\varepsilon} \simeq \gamma \omega \varepsilon \simeq 2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \varepsilon \quad (3.75)$$

Debido a que se espera que el sistema opere a frecuencias próximas a la frecuencia ω_n y que los valores de ξ suelen estar por debajo de 0.05, puede asumirse la siguiente desigualdad:

$$\gamma \dot{\varepsilon} \ll \varepsilon \quad (3.76)$$

De esta forma, las derivadas con respecto al tiempo de las deformaciones de las ecuaciones (3.71) y (3.72) pueden considerarse más pequeñas que las deformaciones, incluso despreciables frente a ellas. En tal caso, sumando las ecuaciones (3.71) y (3.72), el factor $(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})$ puede expresarse en términos de ε_{xx} como

$$(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = -\frac{3K - 2G}{3K + G} \varepsilon_{xx} \quad (3.77)$$

Derivando con respecto al tiempo la ecuación (3.77) se obtiene la siguiente relación para las velocidades de deformación:

$$(\dot{\varepsilon}_{yy} + \dot{\varepsilon}_{zz}) = -\frac{3K - 2G}{3K + G} \dot{\varepsilon}_{xx} \quad (3.78)$$

Sustituyendo las relaciones (3.77) y (3.78) dentro de la expresión de σ_{xx} dada por (3.56), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\sigma_{xx} = \frac{9KG}{3K + G} \varepsilon_{xx} + \frac{\gamma_s + 2\gamma_d}{3} \frac{9KG}{3K + G} \dot{\varepsilon}_{xx} \quad (3.79)$$

Ahora, comparando las ecuaciones (3.69) y (3.79), se puede identificar la relación entre γ_{xx} , γ_s y γ_d que se muestra a continuación:

$$\gamma_{xx} = \frac{\gamma_s + 2\gamma_d}{3} \quad (3.80)$$

De acuerdo con la ecuación anterior, una vez estimados los valores de γ_d a partir de la frecuencia natural de torsión y γ_{xx} a partir de la frecuencia natural de tracción o de flexión, puede calcularse un valor para γ_s . Es importante mencionar que el procedimiento explicado aquí está basado en el cálculo de unas frecuencias naturales parecidas a las que tiene el elemento en cuestión como parte del mecanismo. Nótese que no se pretende realizar un análisis modal del mecanismo en cada posición, puesto que ello conllevaría un procedimiento excesivamente laborioso que no concuerda con la estimación final de los factores de disipación como una

fracción del valor crítico. Por el contrario, cada barra se estudia por separado con condiciones de contorno similares a las que les impone la conexión con el resto del mecanismo. El procedimiento explicado permite estimar unos valores aproximados mediante un cálculo sencillo.

3.3.3. Evaluación de las fuerzas de amortiguamiento

Para evaluar de forma sistemática las fuerzas de amortiguamiento se usará el procedimiento descrito en la sección 3.2 para evaluar las fuerzas elásticas. De acuerdo con la forma de la matriz de amortiguamiento de la ecuación (3.61), cada una de sus componentes puede calcularse como una forma cuadrática del vector de coordenadas. Por este motivo, se puede comprobar que haciendo uso de la transformación representada por las ecuaciones (3.27) y (3.28), cada término de la matriz de amortiguamiento puede expresarse de la siguiente forma:

$$(\mathbf{C}(\mathbf{e}))_{ij} = \mathbf{e}^T \mathbf{C}^{ij} \mathbf{e} \quad (3.81)$$

donde las matrices \mathbf{C}^{ij} se calculan como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{ij} = \int_{\Phi_0(\Omega)} & \left[\left(2K\gamma_s + \frac{8G\gamma_d}{3} \right) \left(\sum_{\alpha=1}^3 (\mathbf{s}_{,\alpha}^T \mathbf{s}_{,\alpha})_i^T (\mathbf{s}_{,\alpha}^T \mathbf{s}_{,\alpha})_j \right) + \right. \\ & 2G\gamma_d \left(\sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^3 (\mathbf{s}_{,\alpha}^T \mathbf{s}_{,\beta})_i^T (\mathbf{s}_{,\beta}^T \mathbf{s}_{,\alpha})_j + (\mathbf{s}_{,\alpha}^T \mathbf{s}_{,\beta})_i^T (\mathbf{s}_{,\alpha}^T \mathbf{s}_{,\beta})_j \right) + \\ & \left. \left(2K\gamma_s - \frac{4G\gamma_d}{3} \right) \left(\sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^3 (\mathbf{s}_{,\alpha}^T \mathbf{s}_{,\alpha})_i^T (\mathbf{s}_{,\beta}^T \mathbf{s}_{,\beta})_j \right) \right] dV_0 \end{aligned} \quad (3.82)$$

Nótese que el número de nodos del elemento no afecta a la expresión de los invariantes de la ecuación (3.81) más que en el tamaño de las matrices de funciones de forma. Por tanto, la ecuación (3.81) puede usarse tanto para elementos tipo

placa como para elementos tipo viga sin más que utilizar la matriz de funciones de forma correspondiente. Además, al igual que ocurre con los invariantes de las fuerzas elásticas, los de las fuerzas de amortiguamiento son invariantes respecto a traslaciones o rotaciones de la configuración de referencia. Esta propiedad, permite reducir el cálculo cuando se tienen muchos elementos con geometría y propiedades mecánicas semejantes, caso que es bastante frecuente.

Como se ha dicho, las matrices invariantes se obtienen integrando sobre el volumen del elemento en la fase de pre-proceso y son almacenadas para evaluar las fuerzas de amortiguamiento durante la fase de simulación. La estructura de estas matrices permite, además, que la información necesaria se almacene de forma sistemática. En la ecuación (3.61), puede verse que la matriz de amortiguamiento es simétrica, por lo que sólo se necesitan almacenar los invariantes correspondientes a la diagonal y al triángulo superior o inferior de la matriz. Además, dada la estructura de bloques de la matriz de funciones de forma, cada bloque 3×3 de la matriz de amortiguamiento tiene asociado un invariante cuyos bloques 3×3 tienen un único valor asociado. Así, los invariantes de las fuerzas de amortiguamiento, junto con los de las fuerzas elásticas y la matriz de masa, conforman el conjunto de datos que hay que calcular durante la etapa de pre-proceso.

3.3.4. Cálculo de la matriz jacobiana de las fuerzas de amortiguamiento

Las ecuaciones a que da lugar la formulación en coordenadas nodales absolutas suelen ser rígidas y, por este motivo, es conveniente el uso de integradores implícitos. Sugiyama y Shabana [48] han estudiado el comportamiento de distintos integradores numéricos implícitos y explícitos en varios modelos simulados con ANCF. El coste computacional de los distintos métodos aconseja el uso de integradores implícitos en la mayoría de los casos cuando se usa ANCF. Por tanto, el cálculo eficiente de la matriz jacobiana de las fuerzas de amortiguamiento es importante. Esta matriz puede calcularse de forma numérica mediante diferencias

finitas. Sin embargo, la derivación numérica supone un enorme esfuerzo pues requiere un elevado número de evaluaciones de función, tanto mayor cuanto mayor sea el número de grados de libertad del sistema. Es siempre más conveniente derivar analíticamente si es posible. Al igual que ocurre con las fuerzas elásticas, la matriz jacobiana de las fuerzas de amortiguamiento se calcula fácilmente mediante el uso de los invariantes desarrollados en la sección 3.3.3.

Las fuerzas de amortiguamiento dependen tanto de las coordenadas nodales como de las velocidades nodales, debido al uso de un conjunto de coordenadas inerciales. Por esta razón, las derivadas con respecto a las coordenadas y velocidades nodales son necesarias para evaluar la matriz jacobiana de las ecuaciones del movimiento del sistema. Usando la sencilla estructura de los invariantes descrita en la sección 3.3.3, las derivadas parciales con respecto a las coordenadas nodales pueden evaluarse sin necesidad de integrar sobre el volumen del elemento

$$\left(\frac{\partial \mathbf{Q}_d}{\partial \mathbf{e}}\right)_{ik} = -\sum_{j=1}^{N_{nc}} \sum_{m=1}^{N_{nc}} e_m \left(C_{mk}^{ij} + C_{km}^{ij}\right) \dot{e}_j \quad (3.83)$$

donde C_{mk}^{ij} es la componente en la fila m y columna k de la matriz invariante correspondiente al elemento ij de la matriz de amortiguamiento $\mathbf{C}(\mathbf{e})$ y N_{nc} es el número de coordenadas nodales absolutas. Por otro lado, las derivadas parciales con respecto a las velocidades nodales se pueden expresar de la forma:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{Q}_d}{\partial \dot{\mathbf{e}}}\right)_{ik} = -\mathbf{e}^T \mathbf{C}^{ik} \mathbf{e} \quad (3.84)$$

El disponer de una expresión exacta para las derivadas parciales de las fuerzas de amortiguamiento es una importante cualidad de esta formulación puesto que simplifica la evaluación de la matriz jacobiana de las ecuaciones del movimiento. De hecho, el cálculo de la matriz jacobiana es una de las tareas numéricamente más costosas cuando se usa un método de integración implícito. Además, la derivación numérica puede ocasionar errores numéricos y, con ello, disminuir la tasa de convergencia del procedimiento iterativo.

La función de disipación en el modelo de amortiguamiento interno propuesto puede evaluarse a partir de los invariantes como sigue:

$$P_d = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{C}(\mathbf{e}) \dot{\mathbf{e}} \quad (3.85)$$

3.3.5. Conservación de la energía en movimientos de sólido rígido

Los sistemas multicuerpo suelen experimentar tanto deformación como grandes rotaciones y traslaciones como sólido rígido a la vez. Por tanto, es fundamental para cualquier modelo de amortiguamiento interno no disipar energía cuando el sistema se mueve como un sólido rígido. Para ello, es necesario separar el movimiento por deformación del movimiento como sólido rígido.

Como puede deducirse al observar la ecuación (3.60), el modelo propuesto producirá fuerzas de amortiguamiento nulas si las derivadas con respecto al tiempo de las componentes del tensor de deformación son todas nulas. Además, cuando se usa como medida no lineal de deformación el tensor de Green-Lagrange, las derivadas temporales de dicho tensor son siempre cero para movimientos de sólido rígido. Para demostrar este hecho, supóngase que la posición global de un punto arbitrario del sólido durante un movimiento de sólido rígido puede escribirse como sigue:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3.86)$$

donde \mathbf{R} es la posición global de un punto del sólido, \mathbf{A} es una matriz ortogonal de rotación que relaciona el sistema local del sólido con el global y \mathbf{x} es la posición del punto en el sistema local del sólido. De acuerdo con la ecuación (3.86), el gradiente de deformación puede expresarse como sigue a continuación:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}_0} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \mathbf{x}} \right]^{-1} = \mathbf{A} \mathbf{A}_0^{-1} \quad (3.87)$$

donde \mathbf{A}_0 es la matriz constante de rotación correspondiente a la configuración de referencia. De la ecuación (3.87), la derivada temporal del tensor de deformación de Green-Lagrange puede expresarse como sigue:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{J}}^T \mathbf{J} + \mathbf{J}^T \dot{\mathbf{J}}) = \frac{1}{2} \mathbf{A}_0^{-T} (\dot{\mathbf{A}}^T \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{A}}) \mathbf{A}_0^{-1} \quad (3.88)$$

Dado que la matriz de rotación es una matriz ortogonal, se tiene que:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (3.89)$$

A continuación, derivando ambos lados de la ecuación anterior con respecto al tiempo se obtiene lo siguiente:

$$\dot{\mathbf{A}}^T \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{A}} = \mathbf{0} \quad (3.90)$$

que coincide con el término entre paréntesis en el lado derecho de la ecuación (3.88). Así, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ se anula para movimientos de sólido rígido. Por tanto, el requerimiento de no disipar energía en movimientos de sólido rígido se cumple automáticamente cuando se usa la relación no lineal deformación-desplazamiento de Green-Lagrange para evaluar las derivadas con respecto al tiempo del tensor de deformación. Algo que era previsible, ya que, en la formulación, los términos de disipación se han asociado a las deformaciones. Teniendo en cuenta que el movimiento de sólido rígido no produce deformación, no debe producir disipación.

3.3.6. Uso del modelo de amortiguamiento

Para demostrar el uso del modelo de amortiguamiento propuesto, se resolverán dos problemas en los que el hecho de no disipar energía en movimientos de sólido rígido queda comprobado. En la figura 3.8 se muestra un esquema del problema que se resuelve en primer lugar. Éste consiste en una viga inicialmente en reposo y en posición vertical que se somete a la acción de una fuerza concentrada en su punto medio y que se mantiene constante durante un segundo, tiempo tras el cual

se elimina. Este problema también lo resolvieron Takahashi *et al.* [69], aunque con otras propiedades mecánicas de la viga, para mostrar el uso de su modelo de amortiguamiento proporcional.

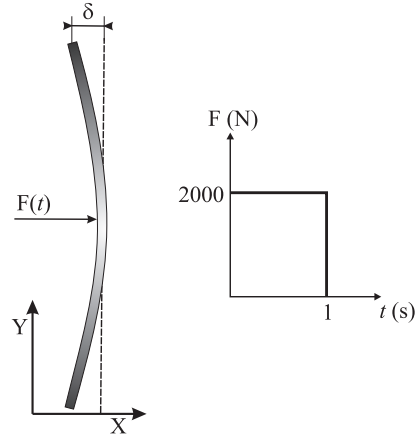


Figura 3.8: Esquema de la viga sujeta a traslación.

La longitud de la viga se supuso 8 m, mientras que el área de su sección recta y el momento de inercia de la sección se consideraron 0.0307 m^2 y $7.854 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$, respectivamente. La densidad del material se consideró 7860 kg/m^3 y el módulo de Young, 2.10 GPa. Siguiendo las recomendaciones dadas por Sopenan y Mikko-la [37], el módulo de Poisson se consideró nulo para evitar el bloqueo por efecto Poisson de los elementos usados. La viga, inicialmente recta, se discretizó usando 8 elementos bidimensionales [33]. La posición de la viga en el instante inicial coincidía con el eje de ordenadas representado en la figura 3.8. Los coeficientes de amortiguamiento se estimaron a partir de las frecuencias naturales de flexión y torsión de una viga con los extremos libres siguiendo el procedimiento descrito anteriormente en la sección 3.3.2. Así, se tomaron unos valores de γ_s y γ_d de 0.016 y 0.00038, respectivamente, basados en una relación de amortiguamiento igual a

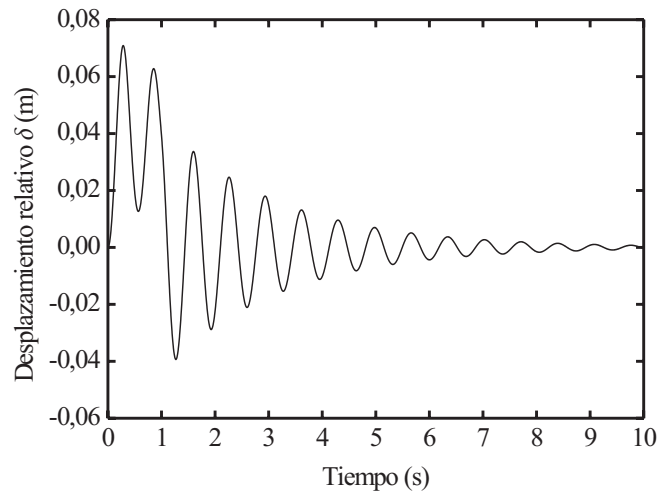


Figura 3.9: Desplazamiento relativo de un extremo respecto al centro.

0.05.

La figura 3.9 muestra el desplazamiento en X relativo de uno de los extremos respecto al centro de la viga como medida de la deformación que sufre ésta. Como se observa en dicha figura, la deformación alcanza un valor máximo durante el tiempo en el cual la carga se aplica. Después de retirar la carga, el desplazamiento por deformación disminuye debido a la disipación causada por el amortiguamiento interno. Usando el método del decremento logarítmico sobre los resultados de la figura 3.9 para estimar el valor del factor de amortiguamiento, se obtiene un valor de ξ igual a 0.0503, que es bastante cercano al 0.05 supuesto.

La velocidad del punto medio de la viga se muestra en la figura 3.10 junto con la velocidad que tendría el centro de gravedad de la misma viga si fuera rígida. La figura muestra cómo la velocidad del punto medio de la viga flexible tiende a la del centro de gravedad de la viga rígida. Esto es debido a que el momento lineal

se conserva en ausencia de fuerzas externas y las de amortiguamiento son fuerzas internas. Por tanto, esta gráfica demuestra que el modelo de amortiguamiento no disipa energía del movimiento como sólido rígido.

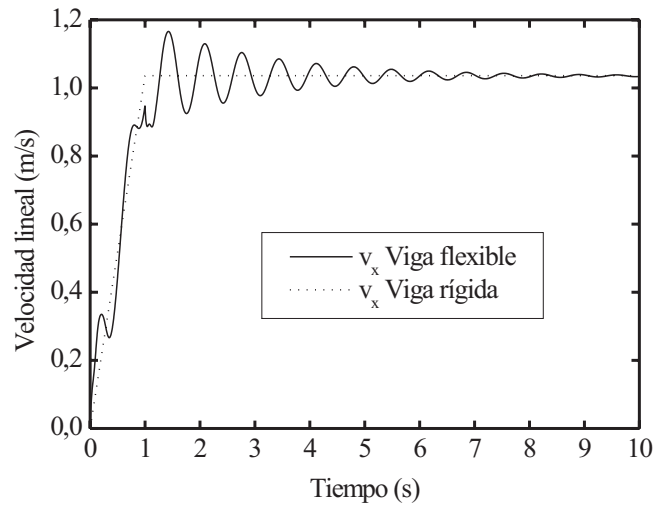


Figura 3.10: Velocidad del punto medio de la viga.

Finalmente, la figura 3.11 muestra la evolución con el tiempo de las energías elástica y cinética de la viga flexible. Mientras la carga actúa sobre la viga, la suma de las energías elástica y cinética aumenta. Sin embargo, una vez que se retira la fuerza concentrada, la suma de ambas energías empieza a decrecer debido a la disipación interna. En la figura se puede ver que cuando la energía de deformación elástica ha sido completamente disipada, la suma de las energías cinética y elástica se mantiene constante. Esto quiere decir que cuando sólo queda un movimiento de sólido rígido en la viga, no hay más disipación interna y, como consecuencia, la energía cinética tiende a una horizontal.

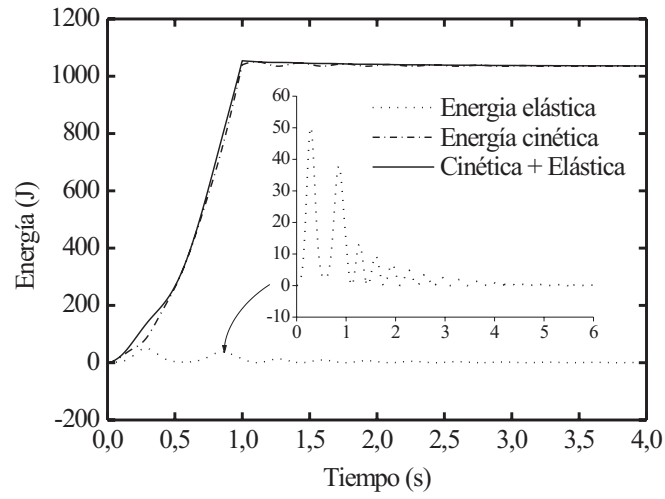


Figura 3.11: Balance de energía en la viga.

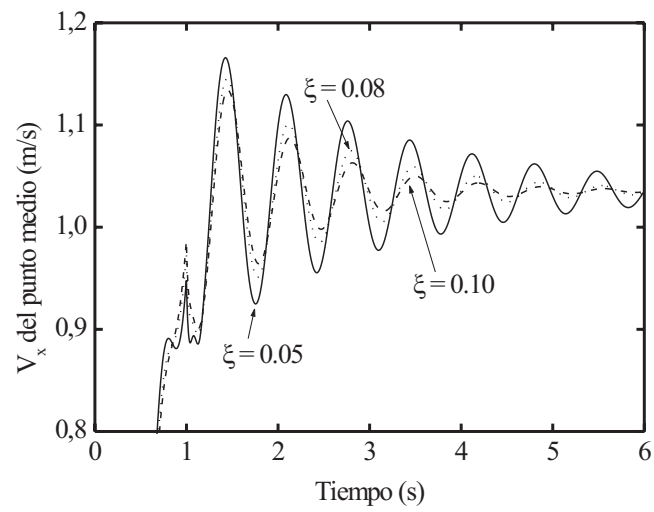


Figura 3.12: Influencia del factor de amortiguamiento.

La influencia de factor de amortiguamiento ξ se muestra en la figura 3.12. A medida que el factor de amortiguamiento aumenta, el sistema resulta más amortiguado y la frecuencia de vibración de la viga, que depende de este factor, decrece.

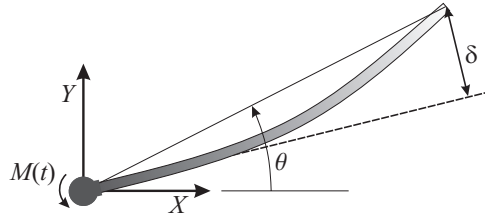


Figura 3.13: Viga rotando alrededor de un eje perpendicular.

En el ejemplo anterior se demostró que el modelo de amortiguamiento interno presentado no disipa energía cuando el sólido flexible en cuestión se traslada sin deformarse. A continuación se muestra otro ejemplo en el que se comprueba que tampoco se disipa energía cuando rota sin deformarse. El ejemplo consiste en una viga que gira alrededor de un eje perpendicular a ella, como se muestra en la figura 3.13. Las propiedades geométricas y mecánicas de la viga son idénticas a las del ejemplo anterior. El extremo por el que pasa el eje de giro está unido al sistema de referencia fijo por un par de revolución. Los parámetros γ_s y γ_d se calculan a partir de las frecuencias de torsión y flexión de la viga siguiendo el procedimiento propuesto en la sección 3.3.2 para un factor de amortiguamiento, ξ , igual a 0.05.

En el extremo articulado de la viga se aplica un momento de 5000 Nm que se mantiene constante durante dos segundos desde el instante inicial. La figura 3.14 muestra el desplazamiento transversal del extremo libre de la viga (δ en la figura 3.14) respecto a un eje tangente por el extremo articulado de la viga. Como puede observarse en dicha figura, la amplitud de las oscilaciones empieza a decrecer cuando el momento externo desaparece.

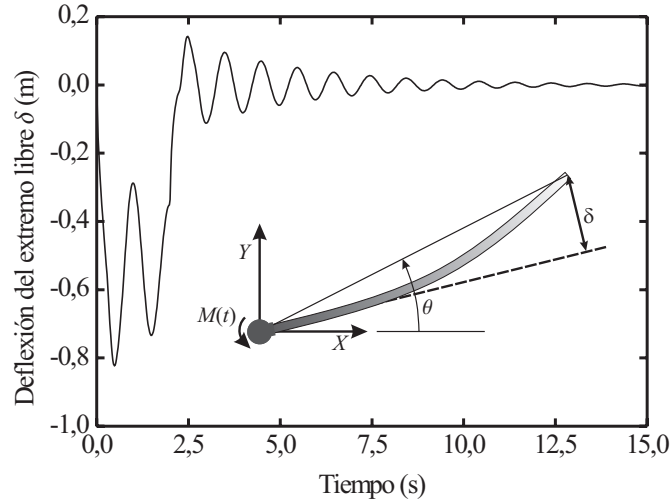


Figura 3.14: Deflexión del extremo libre de la viga.

Para comprobar que la rotación de la viga como sólido rígido no puede amortiguarse con el modelo propuesto, se resolverá un modelo formado por una viga rígida con las mismas propiedades geométricas y la misma densidad de masa. En este ejemplo se usan las coordenadas y velocidades nodales para calcular la velocidad de rotación del extremo libre de la viga. Así, el ángulo θ de la figura 3.13 se puede escribir en función de las coordenadas nodales como sigue:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{r_2}{r_1} \quad (3.91)$$

donde r_1 y r_2 son las coordenadas globales de posición del nodo. De la ecuación (3.91) se obtiene que la derivada con respecto al tiempo de la coordenada angular θ puede expresarse como a continuación:

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{r}_2 r_1 - \dot{r}_1 r_2}{r_1^2 + r_2^2} \quad (3.92)$$

La figura 3.15 muestra la variación de la derivada con respecto al tiempo de la coordenada angular, $\dot{\theta}$, del extremo libre de la viga flexible junto con la velocidad

angular de rotación de la viga rígida. Como se observa en la figura, la velocidad angular de la viga aumenta linealmente mientras el momento se aplica sobre la viga. Cuando el momento desaparece, la velocidad angular de la viga rígida permanece constante. La derivada con respecto al tiempo del ángulo θ exhibe un comportamiento similar pero acompañado de fluctuaciones debidas a la flexibilidad de la viga. Estas fluctuaciones son amortiguadas y $\dot{\theta}$ tiende al valor de la velocidad angular de la viga rígida debido a que ahora la viga flexible gira sin deformarse.

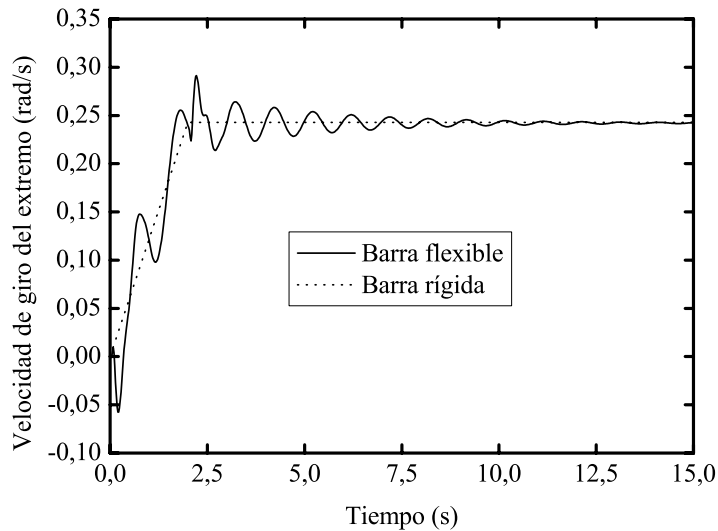


Figura 3.15: Velocidad de giro del extremo libre de la viga.

Finalmente, la figura 3.16 muestra la evolución temporal de las energías cinética y de deformación elástica de la viga flexible. Como en el ejemplo anterior, la energía elástica se disipa hasta que la deformación desaparece. Después de algún tiempo, la energía cinética tiende a un valor constante que corresponde al valor de la energía cinética de la viga rígida sujeta a una velocidad de rotación constante. En otras palabras, la viga gira sin deformarse alrededor del eje perpendicular sin disipar energía de ningún tipo.

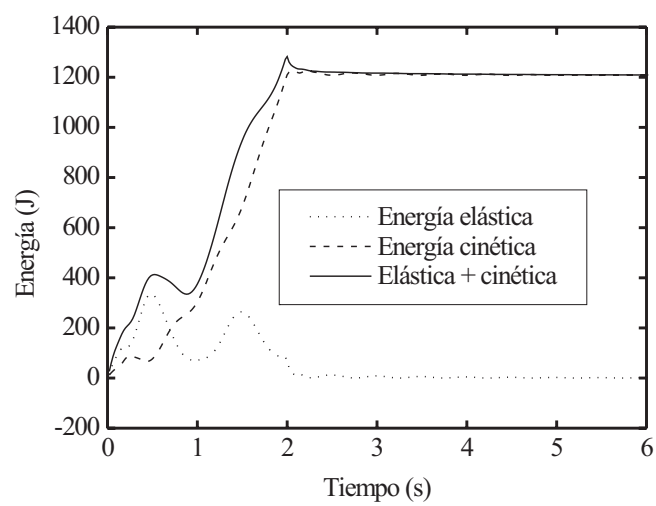


Figura 3.16: Evolución de las energías cinética y elástica.

Capítulo 4

Sistemas rígido-flexibles

En muchos sistemas multicuerpo, la rigidez de algunos componentes es tan alta que estos pueden ser modelados como sólidos rígidos. En tal caso, el número de variables necesarias es menor que para modelar sólidos flexibles, por lo que esta consideración resulta muy conveniente. Como se anticipó en el capítulo 2, en esta tesis los sólidos rígidos serán modelados mediante el uso de coordenadas naturales, mientras que los flexibles se modelan mediante coordenadas nodales absolutas. Ambas formulaciones fueron brevemente presentadas en dicho capítulo. Se explicó entonces que las variables usadas por ambas formulaciones son esencialmente la misma cosa, es decir, ambas formulaciones usan vectores de posición y vectores asociados a puntos.

El presente capítulo contiene una formulación para sistemas rígido-flexibles construida en base a las similitudes conceptuales entre las formulaciones en coordenadas naturales y nodales absolutas. En la sección 4.1 se describen las variables usadas tanto en la formulación en coordenadas naturales como en la formulación en coordenadas nodales absolutas. Dicha sección permite concluir que las variables de ambas formulaciones tienen una interpretación geométrica muy parecida. Gracias a este parecido, en la sección 4.2 se explica, a través de un mecanismo

rígido-flexible sencillo, un procedimiento por el cual pueden reducirse el número de coordenadas y de restricciones de este sistema. A continuación, este procedimiento se presenta de forma más general en la sección 4.3, explicando con más detalle la nomenclatura que usa el procedimiento en el caso de un mecanismo genérico. La sección 4.4 se dedica al estudio detallado de los pares cinemáticos más comunes en sistemas rígido-flexibles. En esta sección, se presentan las ecuaciones de restricción y la matriz jacobiana que se obtienen cuando la formulación propuesta se usa para modelar diversos pares cinemáticos. Por último, la sección 4.6 presenta algunos pares que permiten el deslizamiento relativo a lo largo de trayectorias flexibles o curvas cuya formulación es complicada.

4.1. Interpretación geométrica de las coordenadas naturales y nodales absolutas

En el capítulo 2 se presentaron los conceptos básicos de las formulaciones en coordenadas naturales y nodales absolutas. Entonces se vio que la formulación en coordenadas naturales utiliza un conjunto de coordenadas compuesto por los vectores de posición de ciertos puntos, denominados puntos básicos, y algunos vectores asociados a dichos puntos básicos. Si el número de puntos básicos es suficiente (dos en sólidos con movimiento plano y cuatro en sólidos con movimiento espacial), pueden no utilizarse vectores asociados a los puntos básicos. En general, un punto básico podrá tener a lo sumo tres vectores asociados. Dado el carácter rígido del sólido, estos vectores pueden considerarse “anclados” en el sólido, lo cual se traduce en las ecuaciones de restricción (2.11), (2.27) y (2.28) que mantienen el módulo y orientación relativa constante.

En la figura 4.1 se representa el vector de posición \mathbf{r}_A^k del punto básico A , perteneciente a un posible sólido rígido, k , y los vectores \mathbf{u}^k , \mathbf{v}^k y \mathbf{w}^k asociados a dicho punto. Así, cómo se explicó en el capítulo 2, la posición de un punto arbitrario del sólido rígido puede expresarse como combinación lineal de los vectores \mathbf{r}_A^k , \mathbf{u}^k ,

\mathbf{v}^k y \mathbf{w}^k . Es importante recordar que tanto el vector de posición \mathbf{r}_A^k , como los vectores \mathbf{u}^k , \mathbf{v}^k y \mathbf{w}^k están definidos en el sistema global inercial XYZ .

En la figura 4.1 se representa también un nodo de un posible sólido flexible. El conjunto de coordenadas del nodo m del elemento j del sólido flexible i se compone del vector de posición del nodo, \mathbf{r}^{ijm} , y de las *pendientes* asociadas al nodo, $\mathbf{r}_{,x}^{ijm}$, $\mathbf{r}_{,y}^{ijm}$ y $\mathbf{r}_{,z}^{ijm}$. Estos vectores, denominados pendientes, representan las derivadas parciales del vector de posición con respecto a las coordenadas locales del elemento, x , y y z , como se explicó en la sección 2.4. De esta forma, las pendientes no son más que vectores definidos en el sistema global inercial con la característica de que sus componentes definen la variación de la posición del nodo con respecto a las coordenadas locales del elemento finito. De acuerdo con las definiciones anteriores, puede comprobarse la gran similitud que guardan los vectores \mathbf{u}^k , \mathbf{v}^k y \mathbf{w}^k con los vectores $\mathbf{r}_{,x}^{ijm}$, $\mathbf{r}_{,y}^{ijm}$ y $\mathbf{r}_{,z}^{ijm}$ de la figura 4.1.

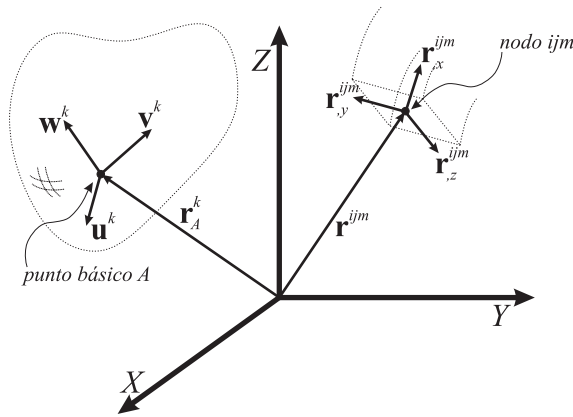


Figura 4.1: Coordenadas naturales de un punto básico y coordenadas nodales absolutas de un nodo.

Aparte de la diferencia conceptual entre los vectores asociados al punto básico y las pendientes del nodo, existe una diferencia formal: el módulo y la orientación relativa de los vectores \mathbf{u}^k , \mathbf{v}^k y \mathbf{w}^k no pueden cambiar, mientras que los de los

vectores $\mathbf{r}_{,x}^{ijm}$, $\mathbf{r}_{,y}^{ijm}$ y $\mathbf{r}_{,z}^{ijm}$, sí. No sólo pueden cambiar sino que deben hacerlo para describir la deformación del sólido. Esta diferencia formal entre ambos conjuntos de vectores se traduce en que hay ecuaciones de restricciones asociadas a los vectores \mathbf{u}^k , \mathbf{v}^k y \mathbf{w}^k y no las habrá, en general, asociadas a $\mathbf{r}_{,x}^{ijm}$, $\mathbf{r}_{,y}^{ijm}$ y $\mathbf{r}_{,z}^{ijm}$, salvo que se quiera impedir la deformación del sólido flexible. No obstante, el tratamiento de unas coordenadas y de otras es el mismo, independientemente de las restricciones que se incluyan en el sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas que define el movimiento del sistema.

4.2. Coordenadas que pueden compartir varios sólidos

La idea de compartir las coordenadas naturales entre sólidos rígidos supone una reducción muy significativa del número total de coordenadas y de ecuaciones de restricción. Este planteamiento ha sido usado con éxito por García de Jalón y colaboradores [13]. Por otro lado, siempre existe la posibilidad de eliminar las restricciones de tipo lineal, puesto que éstas permiten expresar un número de coordenadas igual al número de restricciones lineales en función del resto de coordenadas del sistema. Una vez despejadas estas coordenadas, su expresión puede sustituirse en el sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas, quedando éste expresado en función del resto de coordenadas y sin restricciones lineales.

Estrictamente hablando, tanto compartir las coordenadas como eliminar restricciones lineales son una misma cosa, puesto que al compartir coordenadas se están eliminando implícitamente las restricciones lineales que definen que un punto pertenece a dos sólidos, o, mejor dicho, que dos puntos de dos sólidos distintos ocupan siempre la misma posición. Sin embargo, compartir las coordenadas puede hacerse de manera directa en la fase de definición del modelo. Para ello sólo hay que establecer adecuadamente la conectividad de los sólidos teniendo en cuenta que varios sólidos pueden usar un mismo punto para describir su posición. Como

se verá a continuación, esto lleva a un proceso de ensamblaje de las matrices y vectores del sistema idéntico al usado en el método de elementos finitos.

En la figura 4.2 se representa un sistema multicuerpo con movimiento plano compuesto por tres sólidos, los sólidos rígidos 1 y 2, conectados por una barra flexible, el sólido flexible 1, mediante pares de revolución. De acuerdo con lo explicado en el capítulo 2 respecto a las formulaciones en coordenadas naturales y nodales absolutas, en caso de que el movimiento sea plano, cada sólido rígido puede describirse mediante los vectores de posición de, al menos, dos puntos básicos, \mathbf{r}_A^k y \mathbf{r}_B^k . La barra flexible, en caso de usar, por ejemplo, el elemento de Omar [33], requiere un vector de posición por cada nodo, \mathbf{r}^{ijm} , y dos pendientes por cada nodo, $\mathbf{r}_{,x}^{ijm}$ y $\mathbf{r}_{,y}^{ijm}$. Suponiendo que en la figura 4.2 la barra flexible se modela con un sólo elemento, se requerirían 10 magnitudes vectoriales para definir el movimiento de los tres sólidos, es decir, 20 coordenadas si el movimiento es plano. Además, habría que incluir dos ecuaciones vectoriales de restricciones asociadas a los pares de revolución.

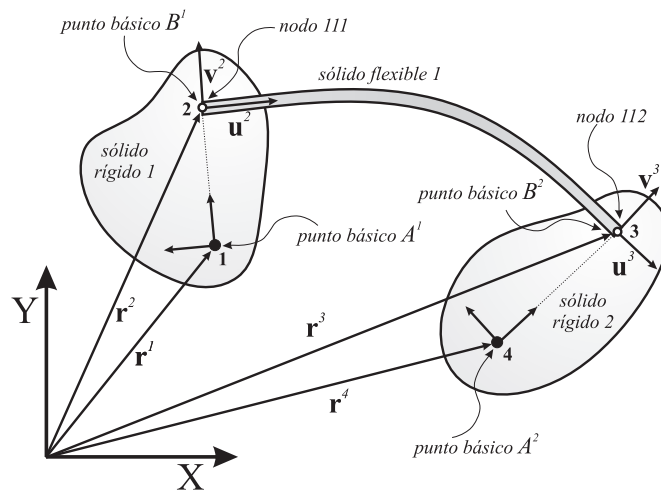


Figura 4.2: Sistema rígido-flexible.

Sin embargo, el número de coordenadas que realmente se necesitan es cierta-

mente menor. Para demostrar este hecho, previo a la construcción de las matrices y vectores del sistema, se definen los nodos y puntos básicos del sistema como se muestra en la figura 4.2. En dicha figura, el punto básico B^1 del sólido rígido 1 se hace coincidir con el nodo 1 del elemento 1 del sólido flexible 1, llamando al punto que ocupan ambos, punto 2. Lo mismo se hace con el punto 3, que representa a la vez al nodo 2 del elemento 1 del sólido flexible 1 y al punto básico B^2 del sólido rígido 2. Con ello se consigue que el número de magnitudes vectoriales utilizadas sea de 8, lo que hace un total de 16 coordenadas si el movimiento es plano. En este caso, las restricciones asociadas a los pares de revolución no se necesitan puesto que las ligaduras impuestas por ambos pares se definen implícitamente.

De acuerdo con la nomenclatura definida en la figura 4.2, el vector de coordenadas que define el movimiento del sólido es ahora el siguiente:

$$\mathbf{q} = \left[\mathbf{r}^{1T} \quad \mathbf{r}^{2T} \quad \mathbf{u}^{2T} \quad \mathbf{v}^{2T} \quad \mathbf{r}^{3T} \quad \mathbf{u}^{3T} \quad \mathbf{v}^{3T} \quad \mathbf{r}^{4T} \right]^T \quad (4.1)$$

Nótese que se ha utilizado intencionadamente un nombre genérico para designar las pendientes asociadas a los nodos del elemento flexible. Ello se hace para resaltar que dichos vectores, las pendientes, son vectores similares a los utilizados para definir los sólidos rígidos. Para obtener los vectores de coordenadas de cada sólido se utilizarán matrices booleanas de conectividad, de la misma forma que en el método de elementos finitos. Así, el sólido rígido 1, tiene el siguiente vector de coordenadas naturales:

$$\mathbf{d}^1 = \mathbf{B}_r^1 \mathbf{q} \quad (4.2)$$

donde \mathbf{d}^1 es el vector de coordenadas naturales del sólido rígido 1, que, de acuerdo con lo explicado en la sección 2.3.1, tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{d}^1 = \left[\mathbf{r}_A^1{}^T \quad \mathbf{r}_B^1{}^T \right]^T \quad (4.3)$$

La matriz de conectividad se escribe

$$\mathbf{B}_r^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

siendo \mathbf{I}_2 la matriz identidad de tamaño 2 y $\mathbf{0}$, un bloque de ceros de tamaño 2. De igual forma, el vector de coordenadas naturales del sólido rígido 2, se obtiene de la siguiente forma:

$$\mathbf{d}^2 = \mathbf{B}_r^2 \mathbf{q} \quad (4.5)$$

donde \mathbf{d}^2 tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{d}^2 = \left[\mathbf{r}_A^{2T} \quad \mathbf{r}_B^{2T} \right]^T \quad (4.6)$$

Por otro lado, la matriz de conectividad asociada al sólido rígido 2 tiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{B}_r^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Por último, el vector de coordenadas nodales del elemento finito 1 del sólido flexible 1, que conecta los dos sólidos rígidos, se obtiene a través de su matriz de conectividad como sigue:

$$\mathbf{e}^{11} = \mathbf{B}_f^{11} \mathbf{q} \quad (4.8)$$

donde:

$$\mathbf{e}^{11} = \left[\mathbf{r}^{111T} \quad \mathbf{r}_{,x}^{111T} \quad \mathbf{r}_{,y}^{111T} \quad \mathbf{r}^{112T} \quad \mathbf{r}_{,x}^{112T} \quad \mathbf{r}_{,y}^{112T} \right]^T \quad (4.9)$$

$$\mathbf{B}_f^{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Las ecuaciones (4.2), (4.5) y (4.8) permiten obtener la energía cinética del sistema de forma similar a como se hace en el método de elementos finitos:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}^{1T} \mathbf{M}_r^1 \dot{\mathbf{d}}^1 + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}^{2T} \mathbf{M}_r^2 \dot{\mathbf{d}}^2 + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^{11T} \mathbf{M}_e^{11} \dot{\mathbf{e}}^{11} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}_r^{1T} \mathbf{M}_r^1 \mathbf{B}_r^1 \dot{\mathbf{q}} \\ & + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}_r^{2T} \mathbf{M}_r^2 \mathbf{B}_r^2 \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}_f^{11T} \mathbf{M}_e^{11} \mathbf{B}_f^{11} \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde \mathbf{M}_e^{11} es la matriz de masa del elemento finito definida en la sección 2.4.2, \mathbf{M}_r^1 y \mathbf{M}_r^2 son matrices de masa similares a la del sólido rígido definida en la sección 2.3.1. De esta forma, se observa que la matriz de masa del sistema puede ensamblarse de forma similar a como se hace en el método de elementos finitos:

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^2 \mathbf{B}_r^{kT} \mathbf{M}_r^k \mathbf{B}_r^k + \mathbf{B}_f^{11T} \mathbf{M}_e^{11} \mathbf{B}_f^{11} \quad (4.12)$$

El vector de fuerzas generalizadas se ensambla siguiendo el mismo procedimiento:

$$\mathbf{Q} = \sum_{j=1}^2 \mathbf{B}_r^{jT} \mathbf{Q}_r^j + \mathbf{B}_f^{11T} \mathbf{Q}_f^{11} \quad (4.13)$$

siendo \mathbf{Q}_r^k el vector de fuerzas generalizadas aplicadas sobre el sólido rígido k , \mathbf{Q}_f^{11} el vector de fuerzas generalizadas aplicadas sobre el elemento finito 1 del sólido flexible 1 que incluirá el vector de fuerzas elásticas y \mathbf{Q} , el vector de fuerzas generalizadas del sistema.

Tras el desarrollo anterior el sistema de la figura 4.2 queda descrito por el vector de coordenadas de la ecuación (4.1) sin necesidad de añadir al sistema

de ecuaciones diferenciales las restricciones asociadas a los pares de revolución. Sin embargo, el sistema anterior debe resolverse con las restricciones de distancia constante propias de los sólidos rígidos. Dichas restricciones son las siguientes para el sistema de la figura 4.2:

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_B^1 - \mathbf{r}_A^1)^T (\mathbf{r}_B^1 - \mathbf{r}_A^1) &= (L_{AB}^1)^2 \\ (\mathbf{r}_B^2 - \mathbf{r}_A^2)^T (\mathbf{r}_B^2 - \mathbf{r}_A^2) &= (L_{AB}^2)^2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Las restricciones de la ecuación (4.14), pueden escribirse de forma matricial con la ayuda de la ecuación (2.12) y las ecuaciones que expresan la conectividad, (4.2), (4.5) y (4.8), como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^T \mathbf{B}_r^{1T} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & -\mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \mathbf{B}_r^1 \mathbf{q} &= (L_{AB}^1)^2 \\ \mathbf{q}^T \mathbf{B}_r^{2T} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & -\mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \mathbf{B}_r^2 \mathbf{q} &= (L_{AB}^2)^2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Por todo lo dicho anteriormente, las coordenadas se compartirán en la etapa de definición del modelo, es decir, antes de construir el sistema de ecuaciones diferenciales. Las ecuaciones lineales, si las hubiera, se eliminarán posteriormente, esto es, después de ensamblar las matrices y vectores del sistema.

4.3. Definición de la nomenclatura empleada

En la sección anterior se ha utilizado un ejemplo bidimensional sencillo para explicar el proceso por el cual se comparten las coordenadas de ciertos puntos y vectores. En esta sección se pretende definir con claridad y generalidad la nomenclatura que se va a usar para definir el vector de coordenadas del sistema. Una vez definido este vector, pueden ensamblarse las matrices y vectores del sistema compartiendo algunas coordenadas a través del uso de matrices de conectividad.

El proceso de numeración de los puntos de interés y los vectores asociados a cada punto es muy importante. Este puede hacerse a la vez que se van introduciendo los sólidos en el modelo del sistema. En general, en un sistema multicuerpo tendremos un conjunto de puntos de interés que pueden tener hasta dos vectores asociados, en aplicaciones con movimiento plano, o hasta tres, en aplicaciones tridimensionales. Estos puntos de interés se corresponden con los puntos básicos de la formulación en coordenadas naturales o con los nodos en la formulación en coordenadas nodales absolutas. Consideremos en adelante, para mayor generalidad, que tratamos con un sistema multicuerpo con movimiento tridimensional. Así, un punto de interés, por ejemplo el punto p , puede tener alguno de los siguientes conjuntos de vectores asociados:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{r}^p \\
 & \mathbf{r}^p, \mathbf{u}^p \\
 & \mathbf{r}^p, \mathbf{u}^p, \mathbf{v}^p \\
 & \mathbf{r}^p, \mathbf{u}^p, \mathbf{v}^p, \mathbf{w}^p
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

donde \mathbf{r}^p es el vector de posición del punto de interés p y \mathbf{u}^p , \mathbf{v}^p y \mathbf{w}^p son vectores asociados a dicho punto p . Cuando el punto de interés corresponde a un nodo de un elemento flexible siempre tiene asociado el último de los cuatro conjuntos de vectores que se muestran en la ecuación (4.16). Sin embargo, si el punto de interés se corresponde con un punto básico de un sólido rígido, cualquiera de las cuatro posibilidades puede presentarse. De esta forma, un posible vector de coordenadas del sistema tendrá la forma siguiente:

$$\mathbf{q} = \left[\mathbf{r}^{1T} \quad \mathbf{u}^{1T} \quad \dots \quad \mathbf{r}^{2T} \quad \mathbf{u}^{2T} \quad \mathbf{v}^{2T} \quad \dots \quad \mathbf{r}^{N_p T} \quad \mathbf{u}^{N_p T} \quad \mathbf{v}^{N_p T} \quad \mathbf{w}^{N_p T} \right]^T \tag{4.17}$$

donde N_p es el número de puntos de interés. Como se explicó en la sección anterior, para cada sólido ha de construirse una matriz booleana de conectividad, de forma que para cada sólido se tiene lo siguiente:

$$\mathbf{d}^k = \mathbf{B}_r^k \mathbf{q} \quad (4.18)$$

en el caso de sólido rígido k , o

$$\mathbf{e}^{ij} = \mathbf{B}_f^{ij} \mathbf{q} \quad (4.19)$$

para el elemento finito j del sólido flexible i . Así, de forma similar a como se explicó en la sección anterior, la energía cinética del sistema puede calcularse de la siguiente forma:

$$T = \sum_{k=1}^{N_r} \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}^{kT} \mathbf{M}_r^k \dot{\mathbf{d}}^k + \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^{N_i} \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^{ijT} \mathbf{M}_e^{ij} \dot{\mathbf{e}}^{ij} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.20)$$

donde N_r es el número de sólidos rígidos, N_f es el número de sólidos flexibles, N_i es el número de elementos del sólido flexible i y \mathbf{M} es la matriz de masa del sistema. Nótese que \mathbf{M}_e^{ij} y \mathbf{M}_r^k son las matrices de masa de un elemento finito y de un sólido rígido que se definieron en el capítulo 2. La matriz de masa del sistema se obtiene de la siguiente forma:

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^{N_r} \mathbf{B}_r^{kT} \mathbf{M}_r^k \mathbf{B}_r^k + \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^{N_i} \mathbf{B}_f^{ijT} \mathbf{M}_e^{ij} \mathbf{B}_f^{ij} \quad (4.21)$$

Por otro lado, el vector de fuerzas generalizado del sistema ha de obtenerse de la misma forma que la matriz de masa:

$$\mathbf{Q} = \sum_{k=1}^{N_r} \mathbf{B}_r^{kT} \mathbf{Q}_r^k + \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^{N_i} \mathbf{B}_f^{ijT} \mathbf{Q}_f^{ij} \quad (4.22)$$

El vector de coordenadas del sistema puede, sin embargo, reducirse más si, en caso de haberlas, se desean eliminar las restricciones lineales del sistema. Pero esto será, como se ha dicho antes, posterior al ensamblaje de las matrices y vectores del sistema y será tratado en la siguiente sección.

4.4. Eliminación de las restricciones lineales

Las restricciones lineales de cualquier sistema multicuerpo pueden eliminarse de forma sencilla siguiendo cualquiera de los procedimientos utilizados para eliminar ecuaciones de restricción, como el método de Wehage [19]. Así, el conjunto de ecuaciones de restricciones puede separarse en dos subconjuntos: el de ecuaciones lineales, \mathbf{C}^l , y el de ecuaciones no lineales, \mathbf{C}^{nl} .

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^l(\mathbf{q}, t) \\ \mathbf{C}^{nl}(\mathbf{q}, t) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.23)$$

Para un desplazamiento virtual en las coordenadas del sistema, las restricciones lineales dan lugar a la siguiente ecuación:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{q}_{li}}^l \delta \mathbf{q}_{li} + \mathbf{C}_{\mathbf{q}_{ld}}^l \delta \mathbf{q}_{ld} = \mathbf{0} \quad (4.24)$$

donde \mathbf{q}_{ld} es un vector que contiene un conjunto de coordenadas que son linealmente dependientes de las demás y \mathbf{q}_{li} , un vector que contienen el resto de coordenadas. Nótese que las coordenadas \mathbf{q}_{li} no son independientes puesto que están relacionadas unas con otras a través de las ecuaciones no lineales de restricción, $\mathbf{C}^{nl}(\mathbf{q}, t)$. Además, los coeficientes de las matrices $\mathbf{C}_{\mathbf{q}_{li}}^l$ y $\mathbf{C}_{\mathbf{q}_{ld}}^l$ únicamente pueden ser función del tiempo ya que las restricciones \mathbf{C}^l son lineales en las coordenadas del sistema. De esta forma, el vector de coordenadas del sistema puede escribirse como a continuación se muestra:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{li} \\ \mathbf{q}_{ld} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Si todas las ecuaciones lineales de restricción son independientes, $\mathbf{C}_{\mathbf{q}_{ld}}^l$ debe ser una matriz cuadrada y no singular, por lo que puede escribirse la siguiente relación:

$$\delta \mathbf{q}_{ld} = - \left(\mathbf{C}_{\mathbf{q}_{ld}}^l \right)^{-1} \mathbf{C}_{\mathbf{q}_{li}}^l \delta \mathbf{q}_{li} \quad (4.26)$$

Con ayuda de la ecuación (4.26), las coordenadas del sistema pueden escribirse en función de \mathbf{q}_{li} como sigue:

$$\delta \mathbf{q} = \mathbf{B}^l \delta \mathbf{q}_{li} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -(\mathbf{C}_{\mathbf{q}_{ld}}^l)^{-1} \mathbf{C}_{\mathbf{q}_{li}}^l \end{bmatrix} \delta \mathbf{q}_{li} \quad (4.27)$$

donde \mathbf{B}^l es una matriz de transformación de coeficientes constantes o dependientes del tiempo. De forma similar a lo realizado para los desplazamientos virtuales, derivando las restricciones lineales con respecto al tiempo se obtienen las siguientes ecuaciones para las velocidades y aceleraciones:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}^l \dot{\mathbf{q}}_{li} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -(\mathbf{C}_{\mathbf{q}_{ld}}^l)^{-1} \mathbf{C}_t^l \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}^l \ddot{\mathbf{q}}_{li} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -(\mathbf{C}_{\mathbf{q}_{ld}}^l)^{-1} (2\mathbf{C}_{t\mathbf{q}_{li}}^l \dot{\mathbf{q}}_{li} + 2\mathbf{C}_{t\mathbf{q}_{ld}}^l \dot{\mathbf{q}}_{ld} + \mathbf{C}_{tt}^l) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

donde \mathbf{C}_t^l es la derivada parcial con respecto al tiempo del vector de restricciones lineales. Nótese que la ecuación (4.28) debe usarse en la (4.29), para que así queden las aceleraciones $\ddot{\mathbf{q}}$ expresadas en función de $\ddot{\mathbf{q}}_{li}$ y $\dot{\mathbf{q}}_{li}$.

Es muy frecuente que las ecuaciones lineales de restricción se deban a pares cinemáticos cuya definición no incluye dependencia con el tiempo. Este es el caso, por ejemplo, de un par esférico, como se verá más adelante. En tal caso, las ecuaciones (4.28) y (4.29) se reducen a las siguientes:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}^l \dot{\mathbf{q}}_{li} \quad (4.30)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}^l \ddot{\mathbf{q}}_{li} \quad (4.31)$$

Con la ayuda de la transformación de coordenadas definida en esta sección, pueden eliminarse definitivamente las ecuaciones lineales del sistema de ecuaciones. Para ello, las ecuaciones (4.30) y (4.31) se sustituyen en la (2.4) como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{lT} \mathbf{M} \mathbf{B}^l \ddot{\mathbf{q}}_{li} + \mathbf{B}^{lT} \mathbf{C}_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{B}^{lT} \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \\ \mathbf{C}^{nl}(\mathbf{q}_{li}, t) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.32)$$

En la ecuación (4.32), el vector de fuerzas generalizadas se ha dejado en función del vector de coordenadas para hacer énfasis en un hecho hasta el momento no mencionado: se requiere expresar el propio vector de coordenadas en función de \mathbf{q}_{li} . Puesto que las ecuaciones son lineales, es fácil entender que la relación que se requiere es idéntica a la ecuación (4.24) para el vector de coordenadas:

$$\mathbf{q} = \mathbf{B}^l \mathbf{q}_{li} \quad (4.33)$$

Desarrollando el segundo término de la ecuación (4.32) se observa cómo realmente las ecuaciones lineales de restricción desaparecen al introducir la transformación de coordenadas presentada en esta sección. Para ver esto, la matriz jacobiana de las ecuaciones de restricción puede escribirse como sigue:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\mathbf{q}_{li}}^l & \mathbf{C}_{\mathbf{q}_{ld}}^l \\ \mathbf{C}_{\mathbf{q}_{li}}^{nl} & \mathbf{C}_{\mathbf{q}_{ld}}^{nl} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

A continuación se desarrolla el producto $\mathbf{B}^{lT} \mathbf{C}_{\mathbf{q}}^T$, donde las filas que multiplican a los multiplicadores asociados a las restricciones lineales se hacen cero. Por tanto, el sistema de ecuaciones queda expresado en función de las coordenadas \mathbf{q}_{li} .

$$\mathbf{B}^{lT} \mathbf{C}_{\mathbf{q}}^T = \left(\mathbf{C}_{\mathbf{q}} \mathbf{B}^l \right)^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{q}_{li}}^{nl} - \mathbf{C}_{\mathbf{q}_{ld}}^{nl} \left(\mathbf{C}_{\mathbf{q}_{ld}}^l \right)^{-1} \mathbf{C}_{\mathbf{q}_{li}}^l \end{bmatrix}^T \quad (4.35)$$

Aunque este procedimiento es siempre válido, en casos en los que el sistema multicuerpo contiene numerosas ecuaciones de restricción puede ser complicado seleccionar un conjunto de coordenadas linealmente independientes. Además, en tal caso, realizar la inversa de $\mathbf{C}_{\mathbf{q}_{ld}}$ puede requerir un número muy elevado de operaciones. Por este motivo, puede ser práctico definir una metodología que permita de forma sistemática la eliminación de las restricciones lineales. Esto es lo

que se hace en la siguiente sección, definiendo un criterio para eliminar las restricciones lineales de forma secuencial, que garantiza que siempre son linealmente independientes. Además, la transformación de coordenadas no requiere el cálculo de $\mathbf{C}_{\mathbf{q}_{id}}$.

4.4.1. Reducción secuencial de los vectores de coordenadas y de restricciones

El vector de coordenadas del sistema está compuesto por una serie de vectores cuyo tamaño depende del movimiento del sistema multicuerpo. El vector de coordenadas se compone de vectores de tamaño dos si el movimiento es plano, o de tamaño tres si el movimiento es espacial. En cualquiera de los casos, el vector de coordenadas puede escribirse de la siguiente forma:

$$\mathbf{q} = \left[\mathbf{q}_1^T \quad \mathbf{q}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{q}_{NCV}^T \right]^T \quad (4.36)$$

donde NCV representa el número de coordenadas vectoriales y \mathbf{q}_s representa un vector de tamaño dos o tamaño tres, según que el movimiento sea plano o espacial. Se ha preferido, por simplicidad, utilizar \mathbf{q}_s para designar indistintamente a \mathbf{r}_p o a cualquiera de los vectores \mathbf{u}_p , \mathbf{v}_p o \mathbf{w}_p , para explicar el procedimiento mediante el cual se eliminan las coordenadas.

En general el sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas contendrá un total de NRL restricciones lineales, entendiendo que se trata de ecuaciones vectoriales cuya dimensión es la misma que la de los \mathbf{q}_s . En esta sección se explica cómo se eliminan las restricciones lineales de forma secuencial en un número de pasos igual al número de ecuaciones vectoriales lineales de restricción, NRL . Cada uno de estos pasos consiste en una modificación de las matrices y vectores del sistema y una posterior reenumeración de las componentes del vector de coordenadas. En el caso bidimensional estas restricciones pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\mathbf{q}_{s3} = \mathbf{T}_{s3,s1}\mathbf{q}_{s1} + \mathbf{T}_{s3,s2}\mathbf{q}_{s2} \quad (4.37)$$

donde \mathbf{q}_{s3} son las coordenadas de un vector que puede escribirse como combinación lineal de las coordenadas de otros dos vectores \mathbf{q}_{s1} y \mathbf{q}_{s2} . Esta ecuación permite escribir el siguiente cambio de variable:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{s1} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{s2} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{s3} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{NCV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & & \cdots & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \cdots & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \mathbf{I} & & \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{T}_{s3,s1} & \cdots & \mathbf{T}_{s3,s2} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & & & \vdots & \mathbf{I} & \\ \mathbf{0} & & & & & & \mathbf{0} & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{s1} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{s2} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{NCV} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

donde los subíndices $s1$, $s2$ y $s3$ representan las posiciones de los vectores implicados en la ecuación lineal de restricción de la ecuación (4.37). Nótese que el vector $s3$ se va a eliminar en función de $s1$ y $s2$. La ecuación (4.38) puede escribirse de forma más compacta como sigue:

$$\mathbf{q}^{k-1} = \mathbf{T}_0^k \mathbf{q}_0^k \quad (4.39)$$

donde el superíndice k se refiere, esta vez, a la restricción que se pretende eliminar, de forma que cuando se está eliminando la restricción $k = 1$, \mathbf{q}^0 es el vector de coordenadas inicial, justo después de compartir las coordenadas y, por tanto, está compuesto de NCV vectores. Durante la eliminación de la restricción vectorial k , tanto \mathbf{q}^{k-1} como \mathbf{q}_0^k contienen un número de $NCV - (k - 1)$ vectores. Por su parte, la matriz \mathbf{T}_0^k es una matriz cuadrada con una columna de bloques nulos, la columna $s3$, y bloques identidad en todas las posiciones de la diagonal excepto una, la $s3$. La fila $s3$ de bloques contiene los bloques $\mathbf{T}_{s3,s1}$ y $\mathbf{T}_{s3,s2}$ en las columnas

$s1$ y $s2$, respectivamente. Por otro lado, \mathbf{q}_0^k es un vector de coordenadas idéntico a \mathbf{q}^{k-1} , excepto en la componente \mathbf{q}_{s3} que ha sido substituida por un vector de ceros del mismo tamaño.

La matriz de transformación de la ecuación (4.39) puede introducirse en las ecuaciones del movimiento del sistema para escribirlas en términos del vector \mathbf{q}_0^k en lugar de \mathbf{q}^{k-1} . Ello implica premultiplicar por \mathbf{T}_0^k para obtener la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_0^{kT} \mathbf{M}^{k-1} \mathbf{T}_0^k \ddot{\mathbf{q}}_0^k + \mathbf{T}_0^{kT} \mathbf{C}_q^{k-1T} \boldsymbol{\lambda}^{k-1} &= \mathbf{T}_0^{kT} \mathbf{Q}^{k-1} \\ \mathbf{C}^k(\mathbf{q}_0^k, t) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.40)$$

donde no se ha incluido en las ecuaciones de restricción, la restricción que se está eliminando. Por este motivo, \mathbf{C}^k contiene las $NRL - k$ que quedan por eliminar. Como se demuestra la ecuación (4.35), el producto $\mathbf{T}_0^{kT} \mathbf{C}_q^{k-1T}$ permite eliminar los multiplicadores de Lagrange, $\boldsymbol{\lambda}$, asociados a la restricción que se está eliminando. Además, debido a la columna de bloques nulos de la matriz \mathbf{T}_0^k , la nueva matriz jacobiana de las restricciones, que resulta del producto $\mathbf{T}_0^{kT} \mathbf{C}_q^{k-1T}$ tiene una fila de bloques nulos, la fila $s3$.

Habida cuenta de la expresión de esta matriz, las multiplicaciones por \mathbf{T}_0^k implican muchos productos por bloques nulos, que no se realizan en la práctica. Así, el producto:

$$\mathbf{M}_0^k = \mathbf{T}_0^{kT} \mathbf{M}^{k-1} \mathbf{T}_0^k \quad (4.41)$$

implica sólo algunas operaciones entre bloques que se detallarán a continuación. Nótese que la matriz \mathbf{M}_0^k contiene una fila y una columna de bloques nulos, concretamente, la fila $s3$ y la columna $s3$. A continuación se calculan los demás bloques de la matriz \mathbf{M}_0^k pertenecientes a las filas $s1$ y $s2$ y columnas $s1$ y $s2$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{0i,s1}^k &= \mathbf{M}_{i,s1}^{k-1} + \mathbf{M}_{i,s3}^{k-1} \mathbf{T}_{s3,s1} \\
&\quad (i = 1 \dots (NCV - (k - 1)), i \neq s1, s2, s3) \\
\mathbf{M}_{0i,s2}^k &= \mathbf{M}_{i,s2}^{k-1} + \mathbf{M}_{i,s3}^{k-1} \mathbf{T}_{s3,s2} \\
&\quad (i = 1 \dots (NCV - (k - 1)), i \neq s1, s2, s3) \\
\mathbf{M}_{0s1,j}^k &= \mathbf{M}_{s1,j}^{k-1} + \mathbf{T}_{s3,s1}^T \mathbf{M}_{s3,j}^{k-1} \\
&\quad (j = 1 \dots (NCV - (k - 1)), j \neq s1, s2, s3) \\
\mathbf{M}_{0s2,j}^k &= \mathbf{M}_{s2,j}^{k-1} + \mathbf{T}_{s3,s2}^T \mathbf{M}_{s3,j}^{k-1} \\
&\quad (j = 1 \dots (NCV - (k - 1)), j \neq s1, s2, s3)
\end{aligned} \tag{4.42}$$

a los que hay que añadir los cuatro bloques siguientes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{0s1,s1}^k &= \mathbf{M}_{s1,s1}^{k-1} + \mathbf{M}_{s1,s3}^{k-1} \mathbf{T}_{s3,s1} \\
&\quad + \mathbf{T}_{s3,s1}^T \mathbf{M}_{s3,s1}^{k-1} + \mathbf{T}_{s3,s1}^T \mathbf{M}_{s3,s3}^{k-1} \mathbf{T}_{s3,s1} \\
\mathbf{M}_{0s1,s2}^k &= \mathbf{M}_{s1,s2}^{k-1} + \mathbf{M}_{s1,s3}^{k-1} \mathbf{T}_{s3,s2} \\
&\quad + \mathbf{T}_{s3,s1}^T \mathbf{M}_{s3,s2}^{k-1} + \mathbf{T}_{s3,s1}^T \mathbf{M}_{s3,s3}^{k-1} \mathbf{T}_{s3,s2} \\
\mathbf{M}_{0s2,s1}^k &= \mathbf{M}_{s2,s1}^{k-1} + \mathbf{M}_{s2,s3}^{k-1} \mathbf{T}_{s3,s1} \\
&\quad + \mathbf{T}_{s3,s2}^T \mathbf{M}_{s3,s1}^{k-1} + \mathbf{T}_{s3,s2}^T \mathbf{M}_{s3,s3}^{k-1} \mathbf{T}_{s3,s1} \\
\mathbf{M}_{0s2,s2}^k &= \mathbf{M}_{s2,s2}^{k-1} + \mathbf{M}_{s2,s3}^{k-1} \mathbf{T}_{s3,s2} \\
&\quad + \mathbf{T}_{s3,s2}^T \mathbf{M}_{s3,s2}^{k-1} + \mathbf{T}_{s3,s2}^T \mathbf{M}_{s3,s3}^{k-1} \mathbf{T}_{s3,s2}
\end{aligned} \tag{4.43}$$

y el resto de componentes de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{0i,j}^k &= \mathbf{M}_{i,j}^{k-1} \quad \text{si } i, j \neq s1, s2, s3 \\
\mathbf{M}_{0i,j}^k &= \mathbf{0} \quad \text{si } i = s3 \text{ o } j = s3
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Una vez efectuados los productos por la matriz \mathbf{T}_0^k , el sistema de ecuaciones diferenciales que se mostró en la ecuación (4.40) puede ahora escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0^k \ddot{\mathbf{q}}_0^k + \mathbf{T}_0^{kT} \mathbf{C}_q^{k-1T} \lambda^{k-1} &= \mathbf{Q}_0^k \\ \mathbf{C}^k(\mathbf{q}_0^k, t) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.45)$$

donde \mathbf{Q}_0^k representa el producto $\mathbf{T}_0^{kT} \mathbf{Q}^{k-1}$.

El sistema de ecuaciones anterior tiene las siguientes características:

1. Debido a que la matriz \mathbf{T}_0^k , tiene una columna de bloques nulos, la ecuación vectorial $s3$ es nula. Esto es, tanto la matriz \mathbf{M}_0^k , como la nueva matriz jacobiana, que resulta del producto $\mathbf{T}_0^{kT} \mathbf{C}_q^{k-1T}$ como el nuevo vector de fuerzas generalizado \mathbf{Q}_0^k , tienen bloques nulos en la fila $s3$.
2. El producto $\mathbf{T}_0^{kT} \mathbf{C}_q^{k-1T}$ tiene una columna de bloques nulos que multiplica a los multiplicadores asociados a la restricción que se está eliminando.

A continuación, la eliminación de la ecuación de restricción se completa con un reordenamiento de los vectores y matrices. La ecuación diferencial $s3$ ha quedado reducida a cero por lo que puede quitarse del sistema de ecuaciones. Esto se consigue eliminando la fila $s3$ en la matriz de masa, la nueva matriz jacobiana y el nuevo vector de fuerzas generalizadas. Además, el vector de coordenadas \mathbf{q}_0^k contiene un vector de ceros que debe eliminarse. Este proceso se resume como sigue:

1. La matriz de masa \mathbf{M}_0^k tiene la fila $s3$ y la columna $s3$ de bloques nulos. A partir de esta matriz se construye la matriz \mathbf{M}^k eliminando la fila y la columna de bloques nulos y renumerando de forma consecutiva los bloques de la matriz.
2. El vector de aceleraciones $\ddot{\mathbf{q}}_0^k$ tiene un vector de ceros en la posición $s3$. El nuevo vector de aceleraciones se construye eliminando dicho vector nulo y, de nuevo, numerando de forma consecutiva los vectores de que se compone el nuevo $\ddot{\mathbf{q}}^k$.

3. El producto $\mathbf{T}_0^{kT} \mathbf{C}_q^{k-1T}$ da lugar a la nueva matriz jacobiana de las restricciones, \mathbf{C}_q^k , que se obtiene eliminando la fila de bloques $s3$ y la columna de bloques nulos debida a la eliminación de las restricción.
4. El nuevo vector de multiplicadores de Lagrange, $\boldsymbol{\lambda}^k$, se obtiene eliminando en $\boldsymbol{\lambda}^{k-1}$ los multiplicadores asociados a la restricción que se está eliminando.
5. El vector de fuerzas generalizadas \mathbf{Q}^k se obtiene eliminando en \mathbf{Q}_0^k el vector nulo que está en la posición $s3$.

Después de los cambios anteriores, el sistema ya puede escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^k \ddot{\mathbf{q}}^k + \mathbf{C}_q^{kT} \boldsymbol{\lambda}^k &= \mathbf{Q}^k \\ \mathbf{C}^k(\mathbf{q}^k, t) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.46)$$

El sistema de la ecuación (4.46) ya está preparado para eliminar la siguiente ecuación vectorial lineal de restricción.

El desarrollo anterior vale igualmente para el caso tridimensional con la salvedad de que los vectores de los que se compone el vector de coordenadas tienen un tamaño mayor. Además, las restricciones lineales, como se verá en las secciones sucesivas, tienen la siguiente forma:

$$\mathbf{q}_{s5} = \mathbf{T}_{s5,s1} \mathbf{q}_{s1} + \mathbf{T}_{s5,s2} \mathbf{q}_{s2} + \mathbf{T}_{s5,s3} \mathbf{q}_{s3} + \mathbf{T}_{s5,s4} \mathbf{q}_{s4} \quad (4.47)$$

donde \mathbf{q}_{s5} son las coordenadas de un vector que puede escribirse como combinación lineal de las coordenadas de otros cuatro vectores \mathbf{q}_{s1} , \mathbf{q}_{s2} , \mathbf{q}_{s3} y \mathbf{q}_{s4} .

La ecuación anterior es similar a la (4.37) y se usará para construir la correspondiente matriz \mathbf{T}_0^k . La nueva matriz es similar a la que aparece en la ecuación (4.38), pero con los cuatro bloques anteriores en la fila $s5$, en lugar de los dos de aquella ecuación. El resto de características de la matriz de transformación son

idénticas a las de la ecuación (4.38). Nótese que, en este caso, el vector \mathbf{q}_{s5} se elimina en función de \mathbf{q}_{s1} , \mathbf{q}_{s2} , \mathbf{q}_{s3} y \mathbf{q}_{s4} .

En las próximas secciones se describe como se obtienen las ecuaciones de restricción de los pares cinemáticos más comunes. Entonces se verá que muchos de estos pares dan lugar a ecuaciones lineales que pueden ser eliminadas.

4.5. Ecuaciones asociadas a los pares cinemáticos más comunes

En la presente sección se describen los pares cinemáticos más frecuentemente usados en sistemas multicuerpo. En todos los casos se considerará que uno de los sólidos es rígido y el otro, flexible. La formulación de pares cinemáticos entre sólidos de la misma naturaleza puede encontrarse en la bibliografía [13, 80]. Cuando las ecuaciones de restricción sean lineales, éstas se expresarán en la forma que aparece en las ecuaciones (4.37) y (4.47) para aplicaciones con movimiento plano y espacial, respectivamente.

Para cada uno de los pares cinemáticos que se citan a continuación se obtendrán las ecuaciones vectoriales de restricción asociadas al par y la expresión de la matriz jacobiana de dicha restricción. De forma que, para un determinado par cinemático que conecta dos sólidos, se obtendrá una ecuación vectorial del tipo:

$$\mathbf{c}^r(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0} \quad (4.48)$$

donde r indica el número de la restricción. El vector \mathbf{c}^r tendrá una dimensión, n_r , igual al número de grados de libertad restringidos. Por otro lado, la matriz jacobiana de la restricción anterior se representará de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \mathbf{c}^r}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{H}_{\mathbf{q}}^r \quad (4.49)$$

donde $\mathbf{H}_{\mathbf{q}}^r$ es una matriz de dimensiones $n_r \times n_c$, siendo n_c el número total de coordenadas del sistema. De esta forma, el vector de restricciones del sistema de

la ecuación (4.23) se construye a partir de los vectores de la ecuación (4.48) como sigue:

$$\mathbf{C} = \left[\mathbf{c}^{1T} \quad \mathbf{c}^{2T} \quad \dots \quad \mathbf{c}^{NRVT} \right]^T = \mathbf{0} \quad (4.50)$$

donde NRV es el número de restricciones vectoriales. De igual forma, la matriz jacobiana de las restricciones puede construirse a partir de las \mathbf{H}_q^r como sigue:

$$\mathbf{C}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_q^1 \\ \mathbf{H}_q^2 \\ \vdots \\ \mathbf{H}_q^{NRV} \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Lo que resta de este capítulo se dedica al cálculo de la expresión de \mathbf{c}^r y de \mathbf{H}_q^r para cada par cinemático. En cada caso se considerará que el movimiento es tridimensional por su mayor riqueza. Sin embargo, en aquellos pares en los que tenga sentido una particularización al caso bidimensional, ésta se incluirá como una subsección.

4.5.1. Definición de un triedro ortogonal

La formulación de algunas de las restricciones que siguen a continuación requiere el uso de un sistema de referencia local. De esta forma, la orientación relativa entre dos sólidos rígidos puede expresarse en función de la orientación de sus triedros locales, lo cual puede ser necesario, por ejemplo, en pares que permiten la rotación alrededor de ciertos ejes. Así, para definir algunas de las restricciones asociadas a pares cinemáticos de deslizamiento se necesita hacer uso de ciertos vectores. Tales son, por ejemplo, los vectores que definen el eje de un par de revolución o la dirección de deslizamiento de un par prismático o cilíndrico. A menudo resulta más fácil expresar dichos vectores en un sistema de referencia local asociado al sólido o al propio par cinemático. En el caso de un sólido rígido, el sistema local formado por los vectores \mathbf{u}^k y \mathbf{v}^k para sólidos con movimiento plano (figura 2.1)

y por los vectores \mathbf{u}^k , \mathbf{v}^k y \mathbf{w}^k para sólidos con movimiento espacial (figura 2.2), puede usarse perfectamente para definir la orientación de un vector cualquiera. Sin embargo, en el caso de una barra flexible, la definición de un triedro ortogonal requiere un cálculo más elaborado.

En el caso de elementos viga flexibles modelados con coordenadas absolutas, se puede recurrir a distintos sistemas de referencia. Una posibilidad que ha sido usada con éxito es la de definir un sistema de referencia con un vector tangente a la línea central de la viga [80]. Este triedro será referido en este trabajo como *triedro tangente*. Usando este sistema de referencia dos de los vectores resultan perpendiculares a la línea media, por lo que, si hay deformación por cortante, no estarán contenidos en la sección transversal de la viga. El uso de este triedro trae como consecuencia inmediata el hecho de que, en los extremos de un elemento viga con deformación por cortante, el triedro no es perpendicular a la sección. Esto da lugar a una interpretación poco clara de las condiciones de conexión entre sólidos. Por este motivo, en este estudio se ha preferido utilizar un triedro tal que dos de sus vectores están contenidos en la sección recta de la viga [80]. De esta forma, el triedro así definido se diferenciará del triedro tangente cuando haya deformaciones debidas al cortante, como se muestra en la figura 4.3. En esta figura se observa que el vector perpendicular a la sección transversal, \mathbf{t}_s , difiere, en un estado arbitrario de deformación, del vector tangente a la línea media del elemento, \mathbf{t} . El triedro anterior será referido en adelante como *triedro de la sección transversal*.

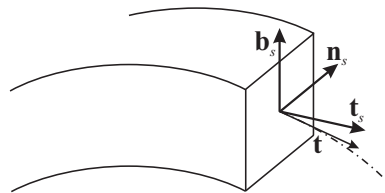


Figura 4.3: Triedro de la sección transversal.

Dos de los vectores que definen el triedro se obtienen tras aplicar el procedi-

miento de ortogonalización de Gram-Schmidt a las derivadas parciales con respecto a los parámetros transversales y y z , que están contenidos en la sección recta del elemento [34]. Uno de los vectores unitarios puede escogerse a lo largo de la dirección definida por la derivada parcial con respecto al parámetro transversal y como se muestra a continuación:

$$\mathbf{n}_s = \frac{\hat{\mathbf{n}}_s}{\|\hat{\mathbf{n}}_s\|} \quad (4.52)$$

donde

$$\hat{\mathbf{n}}_s = \mathbf{r}_{,y} \quad (4.53)$$

Para obtener el segundo vector contenido en la sección transversal, se aplica el proceso de Gram-Schmidt, como se ha dicho antes, a los vectores \mathbf{n}_s y $\mathbf{r}_{,z}$. Así, de igual forma que como se hizo con el vector unitario \mathbf{n}_s , el vector unitario \mathbf{b}_s se obtiene como sigue:

$$\mathbf{b}_s = \frac{\hat{\mathbf{b}}_s}{\|\hat{\mathbf{b}}_s\|} \quad (4.54)$$

siendo esta vez

$$\hat{\mathbf{b}}_s = \mathbf{r}_{,z} - (\mathbf{r}_{,z}^T \mathbf{n}_s) \mathbf{n}_s \quad (4.55)$$

Con los vectores anteriores puede definirse un vector perpendicular a la sección transversal mediante el producto vectorial de \mathbf{n}_s y \mathbf{b}_s :

$$\mathbf{t}_s = \mathbf{n}_s \wedge \mathbf{b}_s = \tilde{\mathbf{n}}_s \mathbf{b}_s = -\tilde{\mathbf{b}}_s \mathbf{n}_s \quad (4.56)$$

En la ecuación (4.56), $\tilde{\mathbf{n}}_s$ y $\tilde{\mathbf{b}}_s$ representan dos matrices antisimétricas formadas con las componentes de \mathbf{n}_s y \mathbf{b}_s de la siguiente forma:

$$\tilde{\mathbf{n}}_s = \begin{pmatrix} 0 & -n_{s3} & n_{s2} \\ n_{s3} & 0 & -n_{s1} \\ -n_{s2} & n_{s1} & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{b}}_s = \begin{pmatrix} 0 & -b_{s3} & b_{s2} \\ b_{s3} & 0 & -b_{s1} \\ -b_{s2} & b_{s1} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

La expresión anterior ofrece ciertas ventajas a la hora de evaluar derivadas de un producto de vectores, como se verá más adelante. Con los tres vectores anteriores puede formarse la matriz de transformación que expresa la orientación del triedro de la sección recta en el sistema global como se muestra a continuación.

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_s & \mathbf{n}_s & \mathbf{b}_s \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Para obtener la matriz jacobiana de las restricciones, a menudo se necesitan las derivadas con respecto al vector de coordenadas, de los vectores que componen el triedro ortogonal de la sección transversal. Así, puede comprobarse que la derivada del vector \mathbf{n}_s con respecto al vector de coordenadas es la siguiente:

$$\frac{\partial \mathbf{n}_s}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{\|\hat{\mathbf{n}}_s\|} \left(\mathbf{I} - \frac{\hat{\mathbf{n}}_s \hat{\mathbf{n}}_s^T}{\hat{\mathbf{n}}_s^T \hat{\mathbf{n}}_s} \right) \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}_s}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.59)$$

donde \mathbf{q} es el vector de coordenadas del sistema que aparece en la ecuación (4.17). La derivada anterior requiere la evaluación de $\partial \hat{\mathbf{n}}_s / \partial \mathbf{q}$. Esta derivada, sin embargo, es sencilla de evaluar usando la ecuación (4.53), la función de forma del elemento y la matriz de conectividad presentada en la ecuación (4.19):

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{n}}_s}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \left(\mathbf{S}_{,y}^{ij} \mathbf{B}_f^{ij} \mathbf{q} \right)}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{S}_{,y}^{ij} \mathbf{B}_f^{ij} \quad (4.60)$$

donde se asume que el triedro pertenece al elemento j del sólido flexible i . De forma similar, la derivada con respecto a \mathbf{q} del vector \mathbf{b}_s de la ecuación (4.54) tiene la siguiente expresión:

$$\frac{\partial \mathbf{b}_s}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{\|\hat{\mathbf{b}}_s\|} \left(\mathbf{I} - \frac{\hat{\mathbf{b}}_s \hat{\mathbf{b}}_s^T}{\hat{\mathbf{b}}_s^T \hat{\mathbf{b}}_s} \right) \frac{\partial \hat{\mathbf{b}}_s}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.61)$$

En este caso, la derivada $\partial \hat{\mathbf{b}}_s / \partial \mathbf{q}$ es algo más complicada debido a la expresión de $\hat{\mathbf{b}}_s$ (ecuación (4.55)):

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{b}}_s}{\partial \mathbf{q}} = (\mathbf{I} - \mathbf{n}_s \mathbf{n}_s^T) \frac{\partial \mathbf{r}_{,z}}{\partial \mathbf{q}} - (\mathbf{r}_{,z}^T \mathbf{n}_s \mathbf{I} + \mathbf{n}_s \mathbf{r}_{,z}^T) \frac{\partial \mathbf{n}_s}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.62)$$

donde falta por evaluar la derivada $\partial \mathbf{r}_{,z} / \partial \mathbf{q}$, lo cual puede hacerse de forma idéntica a como se hizo con la derivada $\partial \mathbf{r}_{,y} / \partial \mathbf{q}$ en la ecuación (4.60). Por último, la derivada del vector \mathbf{t}_s puede calcularse de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \mathbf{t}_s}{\partial \mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{n}}_s \frac{\partial \mathbf{b}_s}{\partial \mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{b}}_s \frac{\partial \mathbf{n}_s}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.63)$$

donde se ha hecho uso de la expresión del producto vectorial de la ecuación (4.56).

En elementos bidimensionales parametrizados como superficies, el triedro de la sección recta tiene un eje perpendicular al plano de movimiento, el definido por \mathbf{b}_s . Los otros dos vectores pueden obtenerse de forma sencilla como se indica a continuación. El vector unitario \mathbf{n}_s puede escribirse:

$$\mathbf{n}_s = \frac{\hat{\mathbf{n}}_s}{\|\hat{\mathbf{n}}_s\|} \quad (4.64)$$

donde

$$\hat{\mathbf{n}}_s = \mathbf{r}_{,y} \quad (4.65)$$

Las expresiones anteriores son idénticas a las (4.52) y (4.53) con la única diferencia de la dimensión de los vectores. Por su parte, el vector perpendicular a la sección recta puede obtenerse de la siguiente forma:

$$\mathbf{t}_s = -\tilde{\mathbf{I}} \mathbf{n}_s \quad (4.66)$$

Siendo $\tilde{\mathbf{I}}$ es la matriz definida en la ecuación (2.9) del capítulo 2.

Las derivadas con respecto al vector de coordenadas, requeridas para el cálculo de la matriz jacobiana, se calculan de forma similar a como se hizo en la ecuación (4.59).

Por otro lado, para elementos bidimensionales tipo Euler-Bernoulli parametrizados como una línea, dado que la sección recta se mantiene perpendicular a la línea media del elemento, el triedro tangente y el triedro de la sección son idénticos. En este caso, el vector tangente puede obtenerse a través de la siguiente ecuación:

$$\mathbf{t}_s = \frac{\hat{\mathbf{t}}_s}{\|\hat{\mathbf{t}}_s\|} \quad (4.67)$$

donde $\hat{\mathbf{t}}_s = \mathbf{r}_{,x}$ y el vector perpendicular $\mathbf{n}_s = \tilde{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{t}}_s$.

En el caso de un sólido rígido, también deben obtenerse las derivadas de los vectores que definen el sistema local de referencia. Las expresiones de estas derivadas dependen de las magnitudes usadas para describir el sólido. Si, por ejemplo, se usan cuatro puntos básicos, las derivadas requeridas pueden obtenerse directamente de las ecuaciones (2.22) como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}^k}{\partial \mathbf{q}} &= \alpha_1^k \left(\frac{\partial \mathbf{r}_B^k}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{r}_A^k}{\partial \mathbf{q}} \right) + \alpha_2^k \left(\frac{\partial \mathbf{r}_C^k}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{r}_A^k}{\partial \mathbf{q}} \right) + \alpha_3^k \left(\frac{\partial \mathbf{r}_D^k}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{r}_A^k}{\partial \mathbf{q}} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{v}^k}{\partial \mathbf{q}} &= \beta_1^k \left(\frac{\partial \mathbf{r}_B^k}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{r}_A^k}{\partial \mathbf{q}} \right) + \beta_2^k \left(\frac{\partial \mathbf{r}_C^k}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{r}_A^k}{\partial \mathbf{q}} \right) + \beta_3^k \left(\frac{\partial \mathbf{r}_D^k}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{r}_A^k}{\partial \mathbf{q}} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{w}^k}{\partial \mathbf{q}} &= \gamma_1^k \left(\frac{\partial \mathbf{r}_B^k}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{r}_A^k}{\partial \mathbf{q}} \right) + \gamma_2^k \left(\frac{\partial \mathbf{r}_C^k}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{r}_A^k}{\partial \mathbf{q}} \right) + \gamma_3^k \left(\frac{\partial \mathbf{r}_D^k}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{r}_A^k}{\partial \mathbf{q}} \right) \end{aligned} \quad (4.68)$$

donde α_j^k , β_j^k y γ_j^k ($j = 1, 2, 3$) se definieron en la sección 2.3.2 del capítulo 2. Nótese que las derivadas $\partial \mathbf{r}_A^k / \partial \mathbf{q}$, $\partial \mathbf{r}_B^k / \partial \mathbf{q}$, $\partial \mathbf{r}_C^k / \partial \mathbf{q}$ y $\partial \mathbf{r}_D^k / \partial \mathbf{q}$ son matrices booleanas cuya definición es sencilla.

4.5.2. Unión rígida entre sólidos

Cuando los sólidos son rígidos, la unión rígida entre ellos impide el desplazamiento y el giro relativo entre los puntos de ambos sólidos. Ello se consigue restringiendo seis grados de libertad entre ambos sólidos. Sin embargo, cuando uno de los sólidos es flexible, esta situación no se produce puesto que los puntos del sólido flexible se mueven unos respecto a otros. En tal caso, las condiciones de conexión entre ambos sólidos han de analizarse con detalle.

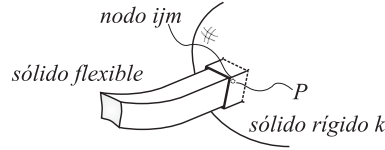


Figura 4.4: Unión rígida.

Una posible conexión rígida puede consistir en impedir que la sección transversal extrema del elemento viga pueda desplazarse o girar respecto al sólido rígido al que el elemento está conectado. El desplazamiento puede impedirse si se impone que las coordenadas de dos puntos de ambos sólidos son iguales:

$$\mathbf{r}^{ijm} - \mathbf{r}_P^k = \mathbf{0} \quad (4.69)$$

donde \mathbf{r}^{ijm} es el vector de posición del nodo ijm y \mathbf{r}_P^k es el vector de posición del punto P del sólido rígido k . Sin embargo, la restricción de la ecuación (4.69) puede no ser necesaria si el punto P es uno de los puntos básicos del sólido k pues, en ese caso, las coordenadas del punto pueden compartirse usando el procedimiento descrito en la sección 4.3.

Si el sólido k tiene suficientes puntos básicos, la restricción de la ecuación (4.69) da lugar a una ecuación vectorial lineal. Para ello, pueden expresarse las coordenadas del punto P en función de las coordenadas de los puntos básicos del sólido k por medio de la ecuaciones (2.20) y (2.22). Así, si el sólido rígido está descrito por cuatro puntos básicos, recordando la ecuación (2.25), la ecuación (4.69) puede escribirse de la misma forma que la ecuación (4.47):

$$\mathbf{r}^{ijm} = c_{1P}^k \mathbf{r}_A^k + c_{2P}^k \mathbf{r}_B^k + c_{3P}^k \mathbf{r}_C^k + c_{4P}^k \mathbf{r}_D^k \quad (4.70)$$

donde c_{1P}^k , c_{2P}^k , c_{3P}^k y c_{4P}^k son los coeficientes que aparecen en la ecuación (2.26) particularizados para el punto P del sólido rígido k . De acuerdo con el desarrollo de la sección 4.4.1, la ecuación (4.70) es idéntica a la ecuación (4.47) con las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_{s5} &= \mathbf{r}^{ijm} & \mathbf{T}_{s5,s1} &= c_1^k \mathbf{I} \\
\mathbf{q}_{s1} &= \mathbf{r}_A^k & \mathbf{T}_{s5,s2} &= c_2^k \mathbf{I} \\
\mathbf{q}_{s2} &= \mathbf{r}_B^k & \mathbf{T}_{s5,s3} &= c_3^k \mathbf{I} \\
\mathbf{q}_{s3} &= \mathbf{r}_C^k & \mathbf{T}_{s5,s4} &= c_4^k \mathbf{I} \\
\mathbf{q}_{s4} &= \mathbf{r}_D^k & &
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Con la ecuación (4.70) se pretende eliminar las coordenadas correspondientes al vector de posición del nodo ijm , aunque se podía haber decidido eliminar cualquiera de los vectores del sólido rígido. Resulta, sin embargo, más cómodo eliminar las coordenadas del vector de posición del nodo, puesto que de esta manera no hay que reformular las restricciones asociadas al sólido rígido.

Además de restringir el desplazamiento relativo es necesario restringir la orientación relativa del triedro de la sección transversal y del sistema de referencia local del sólido rígido. Para ello, es suficiente con mantener constantes los ángulos formados por tres pares de vectores de los dos triedros. Estos ángulos se definen en la figura 4.5. El ángulo formado por dos vectores puede calcularse mediante el producto escalar de vectores. Así pues, las restricciones que garantizan que la orientación de ambos sistemas de referencia es fija se escriben, de acuerdo con la figura 4.5, como sigue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_s^{ijmT} \mathbf{u}^k - \cos \gamma_t &= 0 \\
\mathbf{n}_s^{ijmT} \mathbf{v}^k - \cos \gamma_n &= 0 \\
\mathbf{b}_s^{ijmT} \mathbf{w}^k - \cos \gamma_b &= 0
\end{aligned} \tag{4.72}$$

donde todos los vectores son unitarios, por lo que no aparecen los módulos de los vectores en las ecuaciones anteriores.

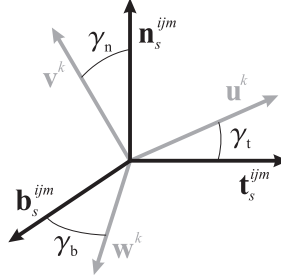


Figura 4.5: Ángulos formados por los triédros de la sección y del sólido rígido.

La matriz jacobiana de las restricciones en el caso de que se compartan las coordenadas del punto común está compuesta por las derivadas de las tres ecuaciones (4.72) como sigue:

$$\mathbf{H}_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_s^{ijmT} \frac{\partial \mathbf{u}^k}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{u}^{kT} \frac{\partial \mathbf{t}_s^{ijm}}{\partial \mathbf{q}} \\ \mathbf{n}_s^{ijmT} \frac{\partial \mathbf{v}^k}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{v}^{kT} \frac{\partial \mathbf{n}_s^{ijm}}{\partial \mathbf{q}} \\ \mathbf{b}_s^{ijmT} \frac{\partial \mathbf{w}^k}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{w}^{kT} \frac{\partial \mathbf{b}_s^{ijm}}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

donde las derivadas de los vectores que definen los triédros de la sección transversal, \mathbf{t}_s^{ijm} , \mathbf{n}_s^{ijm} y \mathbf{b}_s^{ijm} , y del sólido rígido, \mathbf{u}^k , \mathbf{v}^k y \mathbf{w}^k , se calcularon en la sección 4.5.1. En el caso de que el punto común no haya sido considerado un punto básico y se deba incluir la restricción vectorial lineal asociada, la matriz jacobiana de las restricciones incluirá la derivada de la restricción (4.70):

$$\mathbf{H}_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}^{ijm}}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{T}_{s5,s1} \frac{\mathbf{r}_A^k}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{T}_{s5,s2} \frac{\mathbf{r}_B^k}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{T}_{s5,s3} \frac{\mathbf{r}_C^k}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{T}_{s5,s4} \frac{\mathbf{r}_D^k}{\partial \mathbf{q}} \\ \mathbf{t}_s^{ijmT} \frac{\partial \mathbf{u}^k}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{u}^{kT} \frac{\partial \mathbf{t}_s^{ijm}}{\partial \mathbf{q}} \\ \mathbf{n}_s^{ijmT} \frac{\partial \mathbf{v}^k}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{v}^{kT} \frac{\partial \mathbf{n}_s^{ijm}}{\partial \mathbf{q}} \\ \mathbf{b}_s^{ijmT} \frac{\partial \mathbf{w}^k}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{w}^{kT} \frac{\partial \mathbf{b}_s^{ijm}}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

A continuación se explica cómo bajo algunas circunstancias especiales, es posible obtener un gran beneficio del uso de las formulaciones en coordenadas naturales y nodales absolutas. Un ejemplo muy significativo es el caso de una unión rígida

en la que los vectores del nodo del elemento viga tienen restringido su módulo y su orientación relativa. En ese caso, el vector de posición, \mathbf{r}^{ijm} , y los tres vectores del nodo, $\mathbf{r}_{,x}^{ijm}$, $\mathbf{r}_{,y}^{ijm}$ y $\mathbf{r}_{,z}^{ijm}$, pueden compartirse para describir el sólido rígido. Esta circunstancia permite eliminar un gran número de coordenadas. Sin embargo, el hecho de que los vectores $\mathbf{r}_{,x}^{ijm}$, $\mathbf{r}_{,y}^{ijm}$ y $\mathbf{r}_{,z}^{ijm}$ del nodo tengan su módulo y su orientación relativa restringida limita las posibilidades de deformación del elemento [80], por lo que su uso puede modificar significativamente su comportamiento. Las restricciones propias del sólido rígido en un caso tal se traducen en las siguientes:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_{,x}^{ijm}| &= cte & \mathbf{r}_{,x}^{ijmT} \mathbf{r}_{,y}^{ijm} &= cte \\ |\mathbf{r}_{,y}^{ijm}| &= cte & \mathbf{r}_{,x}^{ijmT} \mathbf{r}_{,z}^{ijm} &= cte \\ |\mathbf{r}_{,z}^{ijm}| &= cte & \mathbf{r}_{,y}^{ijmT} \mathbf{r}_{,z}^{ijm} &= cte \end{aligned} \quad (4.75)$$

Si se prefiere permitir la deformación por cortante de la sección final del elemento flexible la situación anterior no es válida. En tal caso, pueden compartirse únicamente $\mathbf{r}_{,y}^{ijm}$ y $\mathbf{r}_{,z}^{ijm}$ y permitir que $\mathbf{r}_{,x}^{ijm}$ pueda variar en módulo y dirección. En ese caso, la sección final no podrá deformarse. Ahora, tres de las seis restricciones propias del sólido rígido tridimensional son las siguientes:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_{,y}^{ijm}| &= cte & \mathbf{r}_{,y}^{ijmT} \mathbf{r}_{,z}^{ijm} &= cte \\ |\mathbf{r}_{,z}^{ijm}| &= cte & & \end{aligned} \quad (4.76)$$

Las otras tres restricciones del sólido rígido tridimensional deben aplicarse sobre las coordenadas naturales de un punto o un vector de dicho sólido rígido.

Unión rígida en el caso plano

Si el movimiento del sistema es plano, es habitual utilizar las formulaciones bidimensionales en coordenadas naturales y nodales absolutas. En ese caso el número de grados de libertad de un sólido es menor, como ya se explicó, por lo que el número de ecuaciones de restricción asociadas a los pares cinemáticos es también menor.

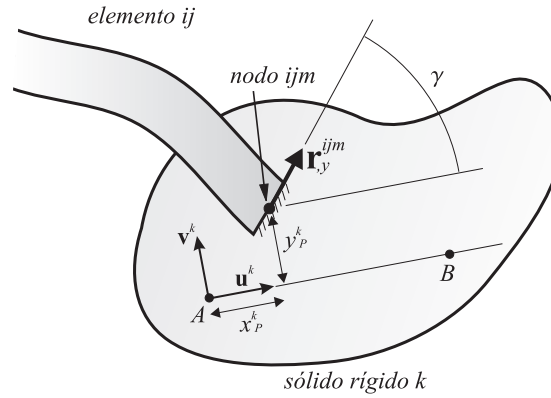


Figura 4.6: Unión rígida en el caso plano.

En la figura 4.6 se muestra un esquema de una conexión rígida entre un sólido flexible y un sólido rígido. De acuerdo con lo explicado en el caso espacial, el desplazamiento puede impedirse compartiendo las coordenadas del punto común de ambos sólidos. Si, por el contrario, se desea formular la ecuación lineal de restricción se tiene, de nuevo, la ecuación (4.69). Esta ecuación se puede escribir en la forma dada por la ecuación (4.37), con la ayuda de las expresiones de los vectores unitarios del sistema local del sólido rígido (ecuaciones (2.8)) que se describieron en la sección 2.3.1:

$$\mathbf{r}^{ijm} = \left[\left(1 - \frac{x_P^k}{L_{AB}^k} \right) \mathbf{I} - \frac{y_P^k}{L_{AB}^k} \tilde{\mathbf{I}} \right] \mathbf{r}_A^k + \left[\frac{x_P^k}{L_{AB}^k} \mathbf{I} + \frac{y_P^k}{L_{AB}^k} \tilde{\mathbf{I}} \right] \mathbf{r}_B^k \quad (4.77)$$

De acuerdo con la nomenclatura empleada en la ecuación (4.37), se pueden identificar los siguientes términos:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{s3} &= \mathbf{r}^{ijm} & \mathbf{T}_{s3,s1} &= \left(1 - \frac{x_P^k}{L_{AB}^k} \right) \mathbf{I} - \frac{y_P^k}{L_{AB}^k} \tilde{\mathbf{I}} \\ \mathbf{q}_{s1} &= \mathbf{r}_A^k & & \\ \mathbf{q}_{s2} &= \mathbf{r}_B^k & \mathbf{T}_{s3,s2} &= \frac{x_P^k}{L_{AB}^k} \mathbf{I} + \frac{y_P^k}{L_{AB}^k} \tilde{\mathbf{I}} \end{aligned} \quad (4.78)$$

Por otro lado, la rotación relativa entre la sección extrema del elemento y el sólido rígido puede impedirse a través del producto escalar de los siguientes

vectores:

$$\mathbf{n}_s^T \mathbf{u}^k = \cos \gamma \quad (4.79)$$

donde \mathbf{n}_s es el vector unitario paralelo a $\mathbf{r}_{,y}^{ijm}$ y γ es el ángulo que forma dicho vector con uno de los vectores que definen el sistema local de referencia del sólido rígido k (figura 4.6). Naturalmente, se puede compartir el vector $\mathbf{r}_{,y}^{ijm}$ entre ambos sólidos como se hizo en el caso tridimensional. De nuevo, merece la pena recordar que al compartir dicho vector su módulo se mantiene constante o, lo que es igual, la sección no puede deformarse. Si no se comparten las coordenadas de dicho vector, otra opción es escribir el vector como combinación lineal de los vectores unitarios del sistema de referencia local del sólido rígido k de la forma siguiente:

$$\mathbf{r}_{,y}^{ijm} = \bar{r}_{u,y}^k \mathbf{u}^k + \bar{r}_{v,y}^k \mathbf{v}^k \quad (4.80)$$

donde $\bar{r}_{u,y}^k$ y $\bar{r}_{v,y}^k$ son las componentes constantes del vector $\mathbf{r}_{,y}^{ijm}$ en el sistema local de referencia del sólido rígido k . Esta ecuación también puede escribirse en la forma de la ecuación (4.37), de acuerdo con la expresión de los vectores unitarios \mathbf{u}^k y \mathbf{v}^k de la ecuación (2.8), de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{s3} &= \mathbf{r}_{,y}^{ijm} & \mathbf{T}_{s3,s1} &= -\frac{\bar{r}_{u,y}^k}{L_{AB}^k} \mathbf{I} - \frac{\bar{r}_{v,y}^k}{L_{AB}^k} \tilde{\mathbf{I}} \\ \mathbf{q}_{s1} &= \mathbf{r}_A^k & & \\ \mathbf{q}_{s2} &= \mathbf{r}_B^k & \mathbf{T}_{s3,s2} &= \frac{\bar{r}_{u,y}^k}{L_{AB}^k} \mathbf{I} + \frac{\bar{r}_{v,y}^k}{L_{AB}^k} \tilde{\mathbf{I}} \end{aligned} \quad (4.81)$$

Al igual que si se comparten las coordenadas, la ecuación lineal (4.80) restringe implícitamente el módulo de $\mathbf{r}_{,y}^{ijm}$, por lo que la sección tampoco puede deformarse en este caso. Esta ecuación también puede eliminarse siguiendo el procedimiento descrito en la sección 4.4.1. La matriz jacobiana de las restricciones en el caso bidimensional es totalmente similar al caso espacial.

4.5.3. Par esférico

El par esférico representa el caso más sencillo de conexión entre un sólido rígido y un sólido flexible. Este par cinemático impide el desplazamiento relativo entre dos sólidos, permitiendo la rotación relativa de uno respecto al otro alrededor de cualquier eje. La situación más ventajosa es aquella en la que el punto común de los sólidos conectados es un punto básico del sólido rígido. En este caso, las restricciones asociadas al par cinemático no se necesitan si se comparten las coordenadas de acuerdo al procedimiento que se presentó en la sección 4.3. En este caso, por lo tanto, no hay restricciones asociadas al par cinemático.

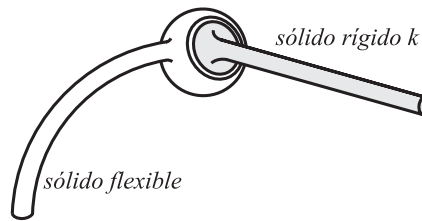


Figura 4.7: Par esférico.

Como se explicó en el caso de la unión rígida, si el punto común de ambos sólidos no es un punto básico, se debe introducir la ecuación lineal vectorial de la ecuación (4.69). En este caso, la matriz jacobiana de las restricciones tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{H}_{\mathbf{q}} = \left[\frac{\partial \mathbf{r}^{ijm}}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{T}_{s5,s1} \frac{\mathbf{r}_A^k}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{T}_{s5,s2} \frac{\mathbf{r}_B^k}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{T}_{s5,s3} \frac{\mathbf{r}_C^k}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{T}_{s5,s4} \frac{\mathbf{r}_D^k}{\partial \mathbf{q}} \right] \quad (4.82)$$

Esta restricción puede eliminarse según el procedimiento explicado en la sección 4.4.1.

Par esférico en el caso plano

Cuando el movimiento es plano, tanto el par de revolución como el par esférico se reducen a un mismo tipo de par. Un esquema del par se muestra en la figura 4.8. Este par permite únicamente la rotación relativa entre los dos sólidos, por lo que tiene dos ecuaciones de restricción asociadas.

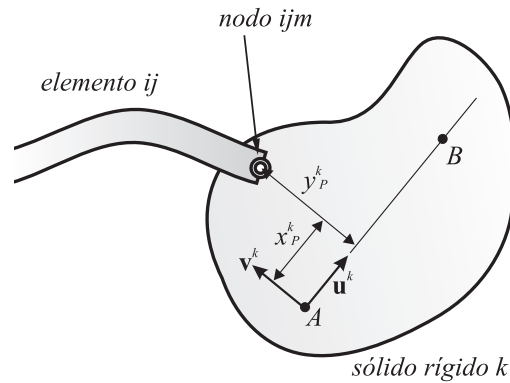


Figura 4.8: Par de revolución en el caso plano.

La formulación de este par consiste en impedir el desplazamiento relativo entre ambos sólidos. Ello puede hacerse compartiendo las coordenadas del punto común o a través de la ecuación lineal de restricción (4.77) de la sección anterior.

4.5.4. Par de revolución

El par de revolución que se representa en la figura 4.9 impide el desplazamiento relativo entre los sólidos conectados, permitiendo la rotación relativa de un sólido respecto al otro alrededor de un eje con una dirección definida. Al igual que en el par esférico y la unión rígida, ambos sólidos poseen un punto en común. Esta condición puede satisfacerse si se comparten las coordenadas de dicho punto, es decir, si el punto se considera punto básico de uno de los sólidos de acuerdo con el procedimiento explicado en la sección 4.3. Sin embargo, si el punto común no es

uno de los puntos básicos del sólido rígido, se deberá utilizar, de nuevo, la ecuación vectorial lineal de la ecuación (4.69).

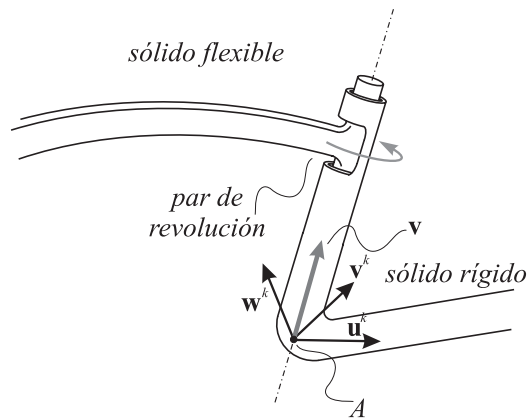


Figura 4.9: Par de revolución.

Las restricciones asociadas a la rotación relativa de ambos sólidos dan lugar a ecuaciones no lineales, como en el caso de la unión rígida. El vector que define la dirección del eje de rotación relativa entre los sólidos es constante en el sistema de referencia local del sólido rígido. Por tanto, las restricciones asociadas a este par pueden obtenerse a través del producto escalar del vector que define el eje de giro, v , y dos vectores del sólido flexible perpendiculares al eje de giro, v_1 y v_2 (figura 4.10). Debido a la flexibilidad de uno de los sólidos, no es posible *a priori* encontrar un vector que se mantenga fijo en el sólido flexible: es posible definir un vector de módulo y dirección constantes en el triedro de la sección transversal, pero ello no implica necesariamente que el vector tenga dirección constante respecto a la sección transversal del elemento, puesto que esta puede experimentar deformación. El vector que define la dirección del eje de giro puede expresarse con la ayuda del sistema de referencia de la sección recta, así como otros vectores necesarios para formular la ecuación de restricción.

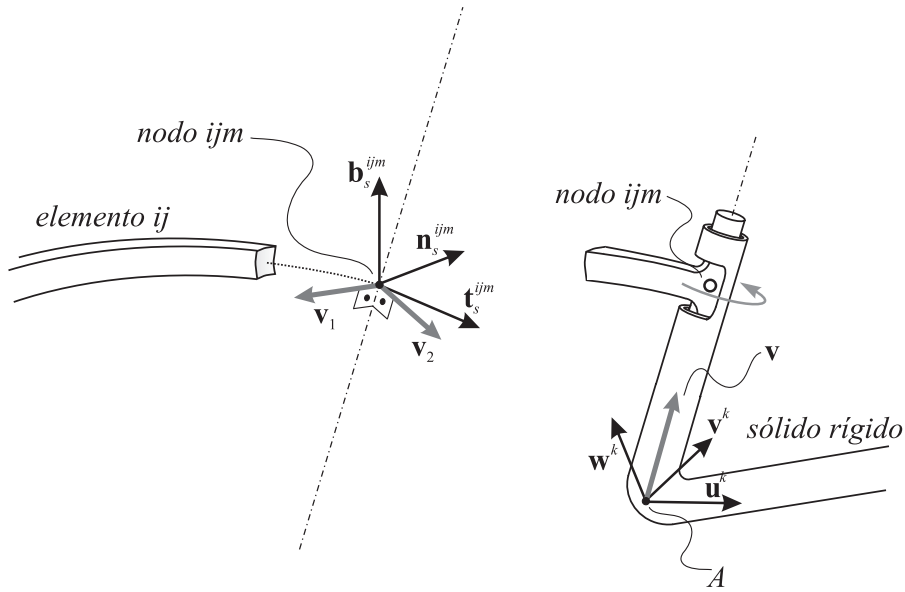


Figura 4.10: Esquema del par de revolución.

En la figura 4.10 se ha realizado un corte sobre el esquema de la figura 4.9 para presentar con más claridad los vectores implicados en la formulación de las ecuaciones de restricción. Sobre el nodo ijm del elemento flexible representado en la figura 4.10 se han dibujado los vectores que componen el triedro de la sección transversal. Por otro lado, sobre el punto A del sólido rígido, se han dibujado los vectores que definen el sistema de referencia local del sólido rígido. Este sistema se define en función de las coordenadas naturales del sólido rígido como explican García de Jalón y Bayo [13]. Así, este sistema local puede usarse para definir la orientación del eje de giro a través del vector \mathbf{v} de la figura.

El vector \mathbf{v} de la figura 4.10 que define la dirección del eje de giro tiene componentes constantes conocidas en el sistema local del sólido rígido:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^k \bar{\mathbf{v}}^k \quad (4.83)$$

donde \mathbf{A}^k es la matriz de transformación que define la orientación del sistema local del sólido rígido k y $\bar{\mathbf{v}}^k$ es el vector que define la dirección del eje en el sistema local. La matriz de transformación anterior se calculó en la sección 2.3.2 para el caso de un sólido definido por cuatro puntos básicos.

Por otro lado, los vectores perpendiculares al eje de giro pertenecientes al sólido flexible tienen, en el triedro de la sección transversal, la expresión

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \mathbf{A}_s^{ijm} \bar{\mathbf{v}}_1^{ijm} \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{A}_s^{ijm} \bar{\mathbf{v}}_2^{ijm}\end{aligned}\quad (4.84)$$

donde $\bar{\mathbf{v}}_1^{ijm}$ y $\bar{\mathbf{v}}_2^{ijm}$ tienen componentes constantes. De esta forma, las restricciones que garantizan el giro alrededor de un solo eje, definido por el vector \mathbf{v} se escriben a continuación:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1^T \mathbf{v} &= 0 \\ \mathbf{v}_2^T \mathbf{v} &= 0\end{aligned}\quad (4.85)$$

La matriz jacobiana de las restricciones asociadas a este par cinemático en el caso de que las coordenadas del punto común se compartan por los dos sólidos, contiene sólo las derivadas de las ecuaciones (4.85) que se muestran a continuación:

$$\mathbf{H}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{v}^T \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \mathbf{q}} \\ \mathbf{v}_2^T \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{v}^T \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix}\quad (4.86)$$

donde las derivadas anteriores pueden expresarse en función de las derivadas de los vectores que definen los triedros locales definidos en la sección 4.5.1 como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{q}} &= \bar{v}_1^k \frac{\partial \mathbf{u}^k}{\partial \mathbf{q}} + \bar{v}_2^k \frac{\partial \mathbf{v}^k}{\partial \mathbf{q}} + \bar{v}_3^k \frac{\partial \mathbf{w}^k}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \mathbf{q}} &= \bar{v}_{11}^k \frac{\partial \mathbf{t}_s^{ijm}}{\partial \mathbf{q}} + \bar{v}_{12}^{ijm} \frac{\partial \mathbf{n}_s^{ijm}}{\partial \mathbf{q}} + \bar{v}_{13}^{ijm} \frac{\partial \mathbf{b}_s^{ijm}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial \mathbf{q}} &= \bar{v}_{21}^k \frac{\partial \mathbf{t}_s^{ijm}}{\partial \mathbf{q}} + \bar{v}_{22}^{ijm} \frac{\partial \mathbf{n}_s^{ijm}}{\partial \mathbf{q}} + \bar{v}_{23}^{ijm} \frac{\partial \mathbf{b}_s^{ijm}}{\partial \mathbf{q}}\end{aligned}\quad (4.87)$$

En la ecuación anterior, \bar{v}_r^k , \bar{v}_{1r}^{ijm} y \bar{v}_{2r}^{ijm} ($r = 1, 2, 3$) son las componentes constantes de los vectores $\bar{\mathbf{v}}^k$, $\bar{\mathbf{v}}_1^{ijm}$ y $\bar{\mathbf{v}}_2^{ijm}$, respectivamente. Al igual que en casos anteriores, si las coordenadas del punto común no se comparten, el vector de restricciones contiene la ecuación (4.70) y la matriz jacobiana contiene las derivadas de aquella ecuación

$$\mathbf{H}_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}^{ijm}}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{T}_{s5,s1} \frac{\mathbf{r}_A^k}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{T}_{s5,s2} \frac{\mathbf{r}_B^k}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{T}_{s5,s3} \frac{\mathbf{r}_C^k}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{T}_{s5,s4} \frac{\mathbf{r}_D^k}{\partial \mathbf{q}} \\ \mathbf{v}_1^T \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{v}^T \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \mathbf{q}} \\ \mathbf{v}_2^T \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{v}^T \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

Existen, sin embargo, situaciones en las que es posible compartir las coordenadas de alguno de los vectores contenidos en la sección transversal, $\mathbf{r}_{,y}$ o $\mathbf{r}_{,z}$. Esta situación se da cuando el eje de giro tiene, en todo momento, la dirección que define alguno de estos dos vectores. En ese caso, si se hace mantener su módulo constante, este vector puede compartirse entre ambos sólidos. En esta situación el número de coordenadas disminuye en tres, pero, al mismo tiempo, se limita la deformación de la sección en la dirección del vector compartido. Sin embargo, es importante resaltar que esta deformación suele ser muy pequeña en muchos casos. Por lo tanto, es posible implementar este par cinemático sin incluir restricción alguna, puesto que, en este caso, las restricciones de distancia y ángulo constantes propias del sólido rígido garantizan que sólo se da el movimiento relativo permitido por el par.

4.5.5. Par cilíndrico

El par cilíndrico puede obtenerse a partir de un par de revolución si se permite el desplazamiento relativo a lo largo del eje de giro. Así, el número de grados de libertad no restringidos por este par es de dos, uno de rotación y otro de traslación. En la figura 4.11 puede observarse un esquema simplificado de un par cilíndrico entre un sólido flexible y un sólido rígido.

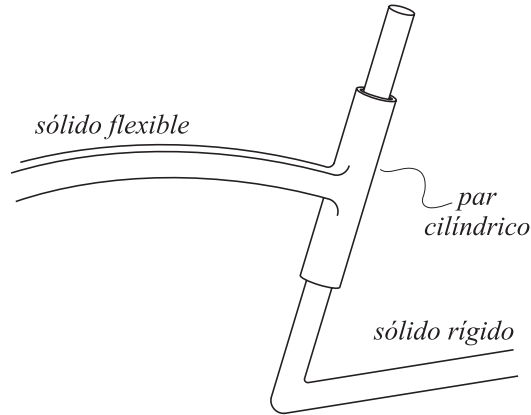


Figura 4.11: Par cilíndrico.

Cuando este tipo de par se usa para conectar sólidos rígidos, cuatro ecuaciones de restricción son suficientes para garantizar que se produce el movimiento relativo permitido. Como en casos anteriores, la flexibilidad de uno de los sólidos obliga al uso de un sistema de referencia local para establecer las restricciones. De esta forma, las restricciones se imponen entre el sólido rígido y el triedro de la sección, pues debido a la flexibilidad, un punto arbitrario del sólido flexible puede tener un movimiento cualquiera respecto al rígido, no sólo la traslación y la rotación permitidas.

Las ecuaciones que garantizan que el nodo ijm y el punto A de la figura 4.12 se mueven sobre la línea definida por el par cinemático se obtienen con la ayuda del producto escalar por dos vectores definidos en el triedro de la sección transversal, \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 :

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}^{ijm} - \mathbf{r}_A^k)^T \mathbf{v}_1 &= 0 \\ (\mathbf{r}^{ijm} - \mathbf{r}_A^k)^T \mathbf{v}_2 &= 0 \end{aligned} \tag{4.89}$$

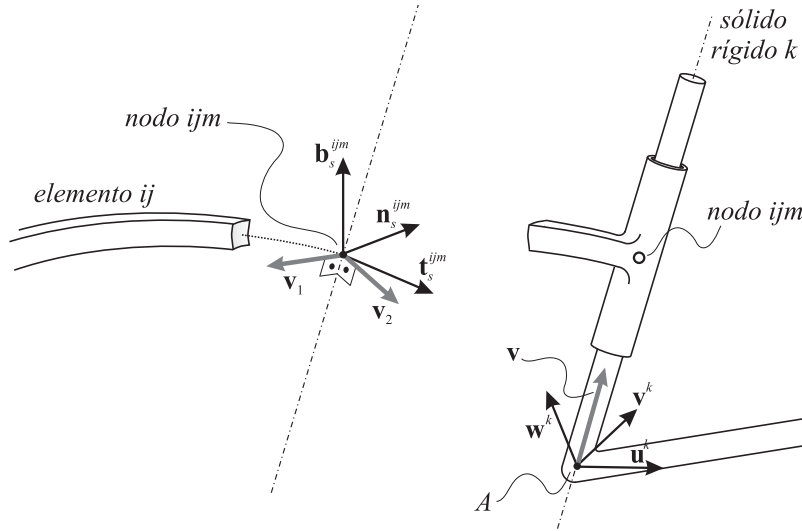


Figura 4.12: Esquema del par cilíndrico.

En la ecuación anterior, los vectores \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 , definidos en las ecuaciones (4.84), tienen coordenadas constantes en el triedro de la sección transversal y son perpendiculares al vector que define el eje de rotación, como se muestra en la figura 4.12. Estos vectores se definieron en la sección anterior mediante las ecuaciones (4.84). Por otro lado, la restricción que impide las rotaciones alrededor de dos ejes perpendiculares al vector \mathbf{v} se expresa mediante los productos escalares

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T \mathbf{v}_1 &= 0 \\ \mathbf{v}^T \mathbf{v}_2 &= 0 \end{aligned} \tag{4.90}$$

La matriz jacobiana de las restricciones anteriores se calcula como se muestra a continuación:

$$\mathbf{H}_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} (\mathbf{r}^{ijm} - \mathbf{r}_A^k)^T \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{v}_1^T \left(\frac{\partial \mathbf{r}^{ijm}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{r}_A^k}{\partial \mathbf{q}} \right) \\ (\mathbf{r}^{ijm} - \mathbf{r}_A^k)^T \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{v}_2^T \left(\frac{\partial \mathbf{r}^{ijm}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{r}_A^k}{\partial \mathbf{q}} \right) \\ \mathbf{v}^T \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{v}_1^T \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{q}} \\ \mathbf{v}^T \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{v}_2^T \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

Al igual que ocurre en la formulación del par de revolución de la sección anterior, las derivadas parciales de los vectores \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 y \mathbf{v} se calculan mediante las ecuaciones (4.87).

Hasta ahora se ha considerado una situación general para formular las ecuaciones de restricción del par cinemático en la que no aparece ninguna restricción lineal como la de la ecuación (4.70). Sin embargo, en algunas ocasiones puede reducirse el número de restricciones si se comparten ciertas coordenadas o bien si se eliminan restricciones lineales. Ambos casos se presentan si el vector que define el eje de giro coincide con alguno de los vectores contenidos en la sección transversal, $\mathbf{r}_{,y}$ o $\mathbf{r}_{,z}$. En esa situación, el vector \mathbf{v} que define el eje de giro puede incluirse en las coordenadas naturales del sólido rígido y ser compartido por ambos sólidos según el procedimiento descrito en la sección 4.3. Es importante destacar que debido a que el módulo del vector compartido es constante, de acuerdo con el carácter rígido de uno de los sólidos, la deformación de la sección transversal en la dirección de ese vector queda automáticamente impedida. De hecho, al compartir las tres componentes de un vector, se están restringiendo dos grados de libertad de rotación y un grado de libertad de deformación. En ese caso, el par cinemático sólo requiere el uso de las ecuaciones de restricción (4.89).

Si el vector que coincide con el eje de giro no está dentro del conjunto de coordenadas naturales del sólido rígido pero sí coincide con la dirección que define el vector $\mathbf{r}_{,y}$ o $\mathbf{r}_{,z}$, se puede, en todo caso, obtener una ecuación lineal que puede luego eliminarse como se explicó en la sección 4.4.1. Así, si el eje de giro tiene la dirección, por ejemplo, del vector $\mathbf{r}_{,y}$

$$\mathbf{r}_{,y}^{ijm} - \mathbf{A}^k \bar{\mathbf{v}}^k = 0 \quad (4.92)$$

La ecuación anterior puede desarrollarse haciendo uso de la primera de las ecuaciones (2.22) de la sección 2.3.2 para escribirla de forma similar a la ecuación (4.47). Así, el conjunto de ecuaciones de restricción se compone de cinco ecuaciones: las ecuaciones (4.89) y las tres resultantes de (4.92). Sin embargo, después de aplicar el proceso de reducción de las ecuaciones de restricción descrito en la sección 4.4.1 se tiene el mismo número de ecuaciones e incógnitas que si se comparten desde el principio. Además, la ecuación (4.92) también implica que el módulo de $\mathbf{r}_{,y}$ se mantiene constante, es decir, la sección transversal tampoco puede deformarse en esa dirección.

El par helicoidal puede considerarse un caso particular del par cilíndrico en el que el ángulo girado está relacionado con el desplazamiento a lo largo del eje. Para ello, a las ecuaciones de restricción del par hay que añadir una ecuación que relaciona el ángulo y el desplazamiento a lo largo del eje.

Par cilíndrico en el caso plano

El par cilíndrico en el caso plano se reduce a un par de deslizamiento en el que la sección final del elemento flexible ij desliza a lo largo una trayectoria recta en el sólido rígido. Este par cinemático elimina dos de los tres grados de libertad relativos entre ambos sólidos. En la figura 4.13 puede verse un esquema de la conexión de un sólido rígido y un elemento finito flexible a través de este par. Las ecuaciones que garantizan el deslizamiento de la sección final del elemento flexible a lo largo de la trayectoria rígida esquematizada en la figura 4.13 son equivalentes a las ecuaciones (4.89) y (4.90).

La ecuación (4.89) se reduce a la siguiente ecuación, que garantiza que el nodo ijm se mueve a lo largo de la línea que forma un ángulo γ con la dirección del vector unitario \mathbf{u}^k (figura 4.13):

$$(\mathbf{r}^{ijm} - \mathbf{r}_A^k)^T \mathbf{u}^k - \|\mathbf{r}^{ijm} - \mathbf{r}_A^k\| \cos \gamma = 0 \quad (4.93)$$

Por otro lado, el giro de la sección transversal del nodo ijm puede impedirse mediante una ecuación equivalente a una de las (4.90):

$$\mathbf{r}_{,y}^{ijmT} \mathbf{u}^k - \|\mathbf{r}_{,y}^{ijm}\| \cos \gamma = 0 \quad (4.94)$$

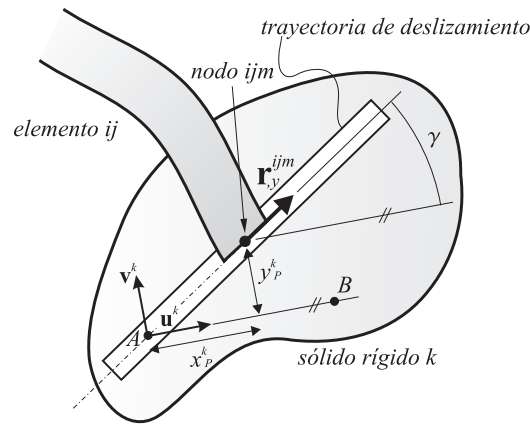


Figura 4.13: Par de deslizamiento.

Como en situaciones anteriormente descritas, la formulación del par puede simplificarse si se comparten coordenadas o se eliminan restricciones de tipo lineal. En este caso, el vector $\mathbf{r}_{,y}^{ijm}$ puede compartirse por ambos sólidos. Esto, como ya se ha mencionado, impide la deformación de la sección transversal del sólido debido a las restricciones de módulo constante del sólido rígido. Otra posibilidad es utilizar la ecuación vectorial lineal (4.80), que puede luego ser eliminada según el procedimiento descrito en la sección 4.4.1. Dicha restricción lineal impide también la deformación de la sección transversal.

4.5.6. Par prismático

El par prismático se puede obtener a partir del par cilíndrico si se restringe la rotación alrededor del eje del par. En ese caso, el único movimiento relativo que permite el par es el desplazamiento a lo largo del eje que se muestra en la figura 4.14. Como en el caso anterior, la trayectoria de desplazamiento no se deforma, pues pertenece al sólido rígido. En una sección posterior se tratará el caso en el que la trayectoria de desplazamiento puede deformarse, lo cual da lugar a una formulación más compleja.

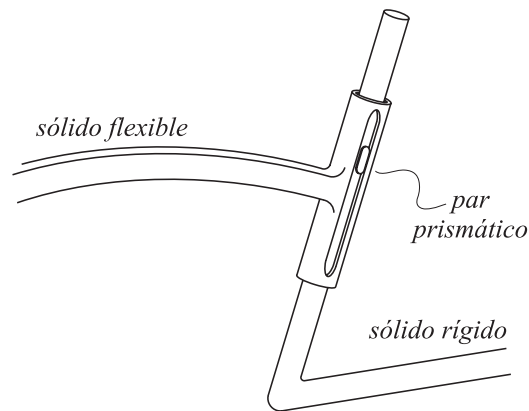


Figura 4.14: Par prismático.

El conjunto de restricciones de este par puede obtenerse, en general, añadiendo a las restricciones del par cilíndrico (ecuaciones (4.89) y (4.90)) una restricción que impida el giro alrededor del eje del par. Para ello se puede usar otro vector perpendicular al eje de giro que pertenezca al sólido rígido como el vector \mathbf{v}_3 que se muestra en la figura 4.15. Este vector tiene componentes constantes en el sistema local del sólido rígido

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{A}^k \bar{\mathbf{v}}_3^k \quad (4.95)$$

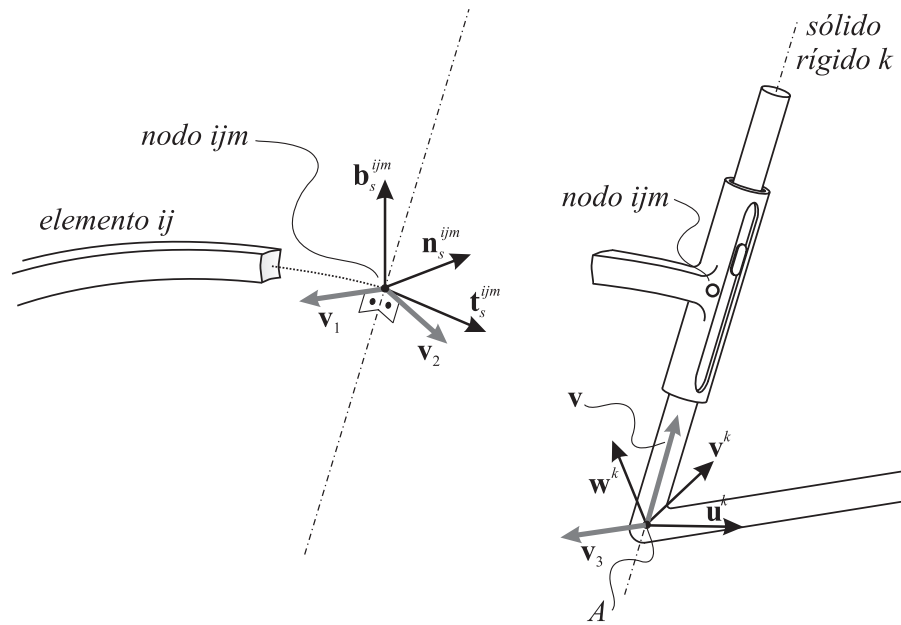


Figura 4.15: Esquema del par prismático.

En el caso de la figura 4.15, el vector \mathbf{v}_3 se ha escogido perpendicular al vector \mathbf{v}_2 de forma que el giro puede restringirse añadiendo la siguiente ecuación de restricción:

$$\mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_3 = 0 \quad (4.96)$$

Nótese que el vector \mathbf{v}_3 no tiene por qué ser perpendicular a \mathbf{v}_2 , siendo, en tal caso, el producto anterior distinto de cero. La derivada de la restricción anterior debe añadirse a la matriz jacobiana de las restricciones representada en la ecuación (4.91):

$$\mathbf{H}_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} (\mathbf{r}^{ijm} - \mathbf{r}_A^k)^T \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{v}_1^T \left(\frac{\partial \mathbf{r}^{ijm}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{r}_A^k}{\partial \mathbf{q}} \right) \\ (\mathbf{r}^{ijm} - \mathbf{r}_A^k)^T \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{v}_2^T \left(\frac{\partial \mathbf{r}^{ijm}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{r}_A^k}{\partial \mathbf{q}} \right) \\ \mathbf{v}_1^T \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{v}_1^T \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{q}} \\ \mathbf{v}_2^T \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{v}_2^T \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{q}} \\ \mathbf{v}_2^T \frac{\partial \mathbf{v}_3}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{v}_3^T \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (4.97)$$

Como en casos anteriores es posible compartir algunas de las variables nodales absolutas y naturales o utilizar algunas restricciones lineales que pueden eliminarse posteriormente. Así, si el vector que define la trayectoria de deslizamiento coincide con alguno de los vectores que definen la sección transversal, por ejemplo $\mathbf{r}_{,y}$, este vector puede compartirse. Además, el otro vector contenido en la sección transversal, $\mathbf{r}_{,z}$, y el vector tangente a la línea media, $\mathbf{r}_{,x}$ pueden compartirse para definir completamente el sistema local del sólido rígido. De esta forma, se eliminan las tres restricciones formadas por las ecuaciones (4.90) y (4.96). El papel de estas restricciones es asumido automáticamente por las restricciones de ángulo constante propias del sólido rígido, teniéndose una situación idéntica a la que se muestra en las ecuaciones (4.75). Nótese que la deformación del nodo queda totalmente impedida por las restricciones (4.75). La formulación del par se reduce en este caso a las ecuaciones (4.89) y la matriz jacobiana de las restricciones se compone únicamente de los dos primeros términos de la ecuación (4.91).

Por otro lado, si los vectores del nodo no se incluyen dentro de las coordenadas naturales del sólido rígido, aún es posible expresar estos vectores en el sistema de referencia local del sólido rígido, como se hizo en la sección anterior con la ecuación (4.92), para obtener ecuaciones lineales que puedan luego eliminarse. Al igual que entonces, la deformación en el nodo queda impedida pues el módulo y la orientación relativa de los vectores se mantiene constante.

De la misma forma que se ha propuesto compartir los tres vectores del nodo, se puede compartir un número menor de ellos con la intención de que la deformación en el nodo no quede totalmente impedida. Así, si se desea permitir la deformación

por cortante de la sección final del elemento finito no debe compartirse el vector $\mathbf{r}_{,x}$ e incluir la ecuación (4.96) para impedir la rotación a lo largo del vector que define la trayectoria de deslizamiento.

4.5.7. Junta Universal

La junta universal puede obtenerse a partir de un par esférico añadiendo una restricción angular. Este tipo de par permite dos grados de libertad de giro alrededor de dos ejes perpendiculares como puede verse en la figura 4.16. Por tanto, a las restricciones del par esférico hay que añadir la siguiente ecuación

$$\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 = 0 \quad (4.98)$$

donde \mathbf{v}_1 es un vector perteneciente al sólido flexible cuyas componentes se suponen constantes en el triedro de la sección transversal y \mathbf{v}_2 es un vector perteneciente al sólido rígido. Ambos vectores pueden calcularse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{A}_s^{ijm} \bar{\mathbf{v}}_1^{ijm} \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{A}^k \bar{\mathbf{v}}_2^k \end{aligned} \quad (4.99)$$

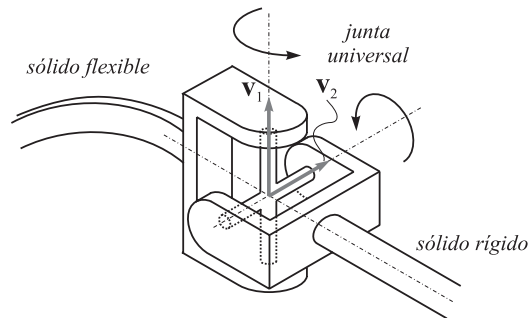


Figura 4.16: Junta universal.

Junto con la ecuación de restricción (4.99) debe añadirse a la matriz jacobiana de las restricciones un término compuesto por la siguiente ecuación

$$\mathbf{v}_1^T \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{v}_2^T \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.100)$$

Es importante resaltar que las situaciones en las que es posible compartir coordenadas o eliminar restricciones lineales en este tipo de par son las mismas que en el caso del par esférico, siendo las coordenadas del punto común las únicas que pueden compartirse.

4.5.8. Tabla resumen de las ecuaciones de restricción anteriores

Las distintas situaciones que pueden encontrarse en la formulación de cada uno de los pares tratados se recogen en la tabla 4.1. En dicha tabla, la segunda columna contiene el número de grados de libertad que permite cada uno de los pares cinemáticos que se muestran en la primera columna. La tercera columna de la tabla 4.1 muestra el número de ecuaciones de restricción asociadas a cada par cinemático y si estas son lineales o no. A este respecto, debe aclararse que la abreviatura PC indica que las restricciones lineales están asociadas a la existencia de un punto común. En esta misma columna se incluye la posibilidad de formular algunas ecuaciones de restricción mediante ecuaciones lineales, como se explicó en cada caso. Como puede verse, el número de ecuaciones lineales es mayor que el de ecuaciones no lineales. Ello es debido a que la formulación mediante ecuaciones lineales conlleva también la restricción de la deformación de la sección transversal de un nodo de un elemento finito. Este hecho, si ocurre, se hace notar en la tabla 4.1 mediante un asterisco. La cuarta columna de la tabla contiene el número de ecuaciones de restricción asociadas a los pares cinemáticos en el caso de que los sólidos conectados compartan algunas coordenadas. De nuevo, para compartir alguna coordenada puede ser necesario impedir la deformación, lo cual se vuelve a notar mediante un asterisco.

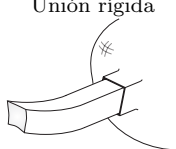

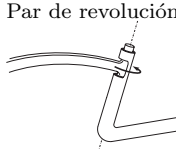


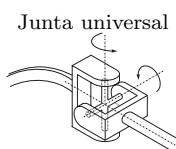
Par cinemático	Grados de libertad permitidos	Número de restricciones en un caso general	Número de restricciones si se comparten coordenadas
Unión rígida 	Ninguno.	a) 3 lineales PC + 3 angulares no lineales. b) 3 lineales PC + 9* lineales.	0* .
Esférico 	3 rotaciones.	3 lineales PC.	0 .
Par de revolución 	1 rotación.	a) 3 lineales PC + 2 angulares. b) 3 lineales PC + 3* lineales si la dirección del eje coincide con $r_{,y}$ o $r_{,z}$.	0* si la dirección del eje coincide con la de $r_{,y}$ o $r_{,z}$ o 2 angulares, en general.
Par cilíndrico 	1 de deslizamiento + 1 de rotación.	a) 4 no lineales. b) 2 no lineales + 3* lineales si la dirección del eje coincide con $r_{,y}$ o $r_{,z}$.	2* si la dirección del eje coincide con $r_{,y}$ o $r_{,z}$.
Par prismático 	1 de deslizamiento.	a) 5 no lineales. b) 3 no lineales + 3* lineales si la dirección del eje coincide con $r_{,y}$ o $r_{,z}$.	3* si la dirección del eje coincide con $r_{,y}$ o $r_{,z}$.
Junta universal 	2 rotaciones.	3 lineales PC + 1 angular no lineal.	1 .

Tabla 4.1: Tabla resumen de los pares cinemáticos.

Comparando las dos últimas columnas de la tabla anterior, puede verse que, en cada caso, el número de ecuaciones de restricción se reduce considerablemente cuando se comparten coordenadas. Además, si se eliminan las ecuaciones lineales de restricción se obtiene el mismo número de ecuaciones que si se comparten coordenadas.

4.6. Ecuaciones asociadas a pares con deslizamiento sobre trayectorias curvas o flexibles

En la sección anterior se describieron las ecuaciones de restricción asociadas a los pares cinemáticos más comunes. Dichos pares compartían la característica de que algunas de las restricciones podían eliminarse compartiendo algunas coordenadas o a través de ecuaciones lineales de restricción. Por el contrario, los pares cinemáticos que se describen a continuación dan lugar a ecuaciones de restricción no lineales que no pueden evitarse de las formas antes mencionadas. Estos pares pueden considerarse generalizaciones de los pares prismático y cilíndrico de la sección anterior. Al contrario que en esos casos, la trayectoria de deslizamiento no es generalmente recta sino que, bien puede deformarse, bien se describe mediante una función no lineal.

En este tipo de pares, el punto de contacto se localiza mediante una coordenada adicional. Esta coordenada no tiene propiedades de inercia asociadas, por lo que se denomina coordenada no generalizada [80]. Nótese que al añadir una coordenada, debe añadirse una restricción adicional para no aumentar el número de grados de libertad que permite el par.

Como se explicó en la sección 2.5, derivando las ecuaciones de restricción con respecto al tiempo, el sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas de índice tres puede transformarse en el de índice uno [44] que se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_q^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_s^T \\ \mathbf{C}_q & \mathbf{C}_s & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{s}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_d \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

donde \mathbf{s} es un vector que contiene las coordenadas no generalizadas utilizadas debido a la presencia de pares de deslizamiento y \mathbf{C}_s es la matriz jacobiana de las ecuaciones de restricciones con respecto al vector de coordenadas no generalizadas.

4.6.1. Par con deslizamiento sobre trayectoria flexible

En la figura 4.17 se representa un esquema de un par de deslizamiento en el que el extremo de una barra rígida desliza a lo largo de una barra flexible. En el caso concreto de la figura, la barra rígida puede girar alrededor de dos ejes: uno, tangente a la línea media de la barra flexible, y otro, perpendicular a este.

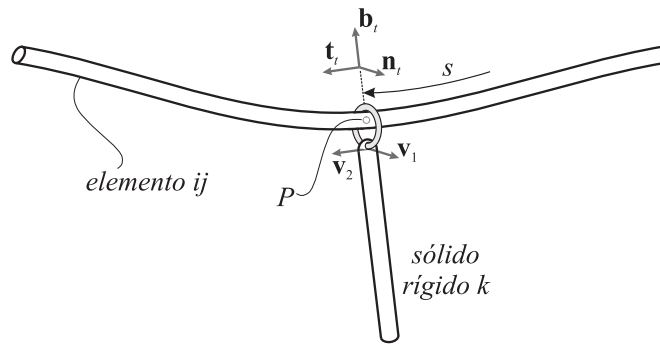


Figura 4.17: Par con deslizamiento y una rotación restringida.

El deslizamiento de un punto del sólido rígido a lo largo de la barra flexible puede formularse mediante el uso de la coordenada no generalizada, s , que se representa en la figura 4.17. Esta coordenada está medida sobre la barra indeformada y permite localizar el punto de contacto. El deslizamiento a lo largo de la barra flexible restringe dos grados de libertad, sin embargo, debido al uso de un parámetro adicional, se utilizan tres ecuaciones de restricción independientes. Estas tres

ecuaciones se obtienen al imponer que ambos sólidos tienen un punto en común, el punto P .

$$\mathbf{r}_P^k - \mathbf{r}_P^{ij} = \mathbf{0} \quad (4.102)$$

donde \mathbf{r}_P^{ij} es el vector del punto P como perteneciente al elemento ij . Este vector es función de la coordenada no generalizada

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_P^{ij} &= \mathbf{S}_P^{ij} \mathbf{e}^{ij} \\ \mathbf{S}_P^{ij} &= \mathbf{S}^{ij} \Big|_{\xi_P^{ij}, 0, 0} \\ \mathbf{e}^{ij} &= \mathbf{B}_f^{ij} \mathbf{q} \end{aligned} \quad (4.103)$$

siendo \mathbf{B}_f^{ij} la matriz de conectividad del elemento ij presentada en la sección 4.3 y ξ_P^{ij} la coordenada adimensional que localiza el punto P dentro del elemento finito ij . Dicha coordenada puede escribirse en función de la coordenada no generalizada s como sigue:

$$\xi_P^{ij} = \frac{1}{l_e^{ij}} \left(s - \sum_{n=1}^{j-1} l_e^{in} \right) \quad (4.104)$$

donde l_e^{ij} y l_e^{in} son las longitudes no deformadas de los elementos j y n del sólido flexible i . La matriz jacobiana de las ecuaciones de restricción (4.102) puede calcularse como se muestra a continuación:

$$\mathbf{H}_q = \frac{\partial \mathbf{r}_P^k}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{S}_P^{ij} \mathbf{B}_f^{ij} \quad (4.105)$$

donde \mathbf{B}_f^{ij} es la matriz de conectividad del elemento definida en la sección 4.3. La derivada $\partial \mathbf{r}_P^k / \partial \mathbf{q}$ no tiene dificultad puesto que el punto P tiene coordenadas constantes en el sistema de referencia local. Por otro lado, la matriz jacobiana con respecto al parámetro s se calcula, de acuerdo con la ecuación (4.104), mediante la regla de la cadena:

$$\mathbf{H}_s = -\frac{1}{l_e^{ij}} \left. \frac{\partial \mathbf{S}^{ij} \mathbf{B}_f^{ij} \mathbf{q}}{\partial \xi} \right|_{\xi_p^{ij}} \quad (4.106)$$

Merece la pena resaltar el hecho de que la formulación en coordenadas nodales absolutas no utiliza modos de deformación sujetos a condiciones de referencia determinadas. Hwang y Haug [81] han estudiado la formulación de pares de deslizamiento cuando se usa la formulación en referencias flotantes. En su trabajo puede verse cómo el movimiento del punto de contacto hace que sea difícil encontrar unas condiciones de referencia apropiadas para todo el movimiento. Dependiendo de la posición del punto de contacto, unas condiciones de referencia resultan más apropiadas que otras. Sin embargo, este problema no se encuentra en la formulación en coordenadas nodales absolutas debido al uso de una descripción global del movimiento de los puntos del sólido flexible.

Hasta aquí se ha explicado la inclusión de un parámetro adicional que permite formular las ecuaciones del par de deslizamiento de forma sencilla. Se ha visto que la inclusión de dicho parámetro requiere el uso de tres ecuaciones de restricción en lugar de dos, que es el número de grados de libertad restringidos a un punto que se mueve a lo largo de una línea. La orientación del sólido rígido respecto al flexible puede estar restringida dependiendo del tipo de conexión, obteniéndose distintas configuraciones. Independientemente de ello, las distintas posibilidades que se muestran a continuación contienen las ecuaciones (4.102) que garantizan el deslizamiento.

Las restricciones angulares que limitan las rotaciones relativas entre ambos sólidos deben formularse con la ayuda de un triedro en el sólido flexible con origen en el punto común y otro fijo en el sólido rígido. Para el triedro del sólido flexible puede utilizarse el triedro de la sección transversal descrito en la sección 4.5.1, sin embargo, debido a la deformación por cortante del elemento finito, este triedro no se mantiene tangente a la línea media del elemento. Por ese motivo, para formular pares de deslizamiento resulta más conveniente utilizar el triedro tangente cuya definición puede encontrarse con detalle en el trabajo de Sugiyama *et al.* [80]. Por

ello, antes de usar las diferentes restricciones van a describirse dicho triedro y sus derivadas.

Triedro tangente y derivadas de los vectores que lo componen

En el triedro tangente, uno de los vectores unitarios, \mathbf{t}_t , se toma según la tangente a la línea media del elemento flexible. Esto se consigue normalizando la derivada parcial con respecto al parámetro longitudinal

$$\mathbf{t}_t = \frac{\hat{\mathbf{t}}_t}{\|\hat{\mathbf{t}}_t\|} \quad \hat{\mathbf{t}}_t = \mathbf{r}_{,x} \quad (4.107)$$

El origen del triedro tangente ha de considerarse en el punto común P del elemento en contacto ij (figura 4.17). En la ecuación anterior $\mathbf{r}_{,x}$ carece del subíndice P y los superíndices ij , lo cual se ha hecho para no complicar excesivamente la nomenclatura. Debe asumirse, por tanto, en la ecuación anterior y en lo que queda de sección que $\mathbf{r}_{,x}$ y $\mathbf{r}_{,y}$ están evaluados en el punto P .

El vector binormal \mathbf{b}_t se elige de forma que sea perpendicular al vector tangente y a uno de los dos vectores contenidos en la sección recta, en concreto el vector $\mathbf{r}_{,y}$. Así, este vector tiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{b}_t = \frac{\hat{\mathbf{b}}_t}{\|\hat{\mathbf{b}}_t\|} \quad \hat{\mathbf{b}}_t = \mathbf{r}_{,x} \wedge \mathbf{r}_{,y} \quad (4.108)$$

Por último, el vector normal puede obtenerse en función de los dos anteriores con la condición de que sea perpendicular a ambos. De nuevo, esto se consigue con el producto vectorial.

$$\mathbf{n}_t = \mathbf{b}_t \wedge \mathbf{t}_t \quad (4.109)$$

Las derivadas parciales con respecto a las coordenadas generalizadas y no generalizadas de los vectores anteriores son necesarias durante el cálculo de la matriz jacobiana de las ecuaciones de restricción. A continuación, se detalla su cálculo puesto que no se ha encontrado en la bibliografía.

Las derivadas del vector tangente tienen la siguiente expresión:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{t}}_t}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{\|\hat{\mathbf{t}}_t\|} \left(\mathbf{I} - \frac{\hat{\mathbf{t}}_t \hat{\mathbf{t}}_t^T}{\|\hat{\mathbf{t}}_t\|^2} \right) \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}_t}{\partial \mathbf{q}} \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}_t}{\partial s} = \frac{1}{\|\hat{\mathbf{t}}_t\|} \left(\mathbf{I} - \frac{\hat{\mathbf{t}}_t \hat{\mathbf{t}}_t^T}{\|\hat{\mathbf{t}}_t\|^2} \right) \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}_t}{\partial s} \quad (4.110)$$

donde las derivadas $\partial \hat{\mathbf{t}}_t / \partial \mathbf{q}$ y $\partial \hat{\mathbf{t}}_t / \partial s$ se muestran a continuación:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{t}}_t}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{S}_{,x}^{ij} \mathbf{B}_f^{ij} \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}_t}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{r}_{,x}}{\partial \xi_P^{ij}} \frac{\partial \xi_P^{ij}}{\partial s} = \frac{1}{l_e^{ij}} \mathbf{S}_{,x\xi}^{ij} \Big|_{\xi_P^{ij}} \mathbf{B}_f^{ij} \mathbf{q} \quad (4.111)$$

En la ecuación anterior se ha hecho uso de la relación entre ξ_P^{ij} y s dada por la ecuación (4.104). Además, se ha considerado que $\mathbf{r}_{,x}$ está evaluado en ξ_P^{ij} , como se recordó anteriormente.

De acuerdo con la ecuación (4.108), las derivadas parciales de \mathbf{b}_t se calculan como sigue:

$$\frac{\partial \mathbf{b}_t}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{\|\hat{\mathbf{b}}_t\|} \left(\mathbf{I} - \frac{\hat{\mathbf{b}}_t \hat{\mathbf{b}}_t^T}{\|\hat{\mathbf{b}}_t\|^2} \right) \left(\tilde{\mathbf{r}}_{,x} \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}_y}{\partial \mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{r}}_{,y} \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}_x}{\partial \mathbf{q}} \right) \quad (4.112)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}_t}{\partial s} = \frac{1}{\|\hat{\mathbf{b}}_t\|} \left(\mathbf{I} - \frac{\hat{\mathbf{b}}_t \hat{\mathbf{b}}_t^T}{\|\hat{\mathbf{b}}_t\|^2} \right) \left(\tilde{\mathbf{r}}_{,x} \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}_y}{\partial s} - \tilde{\mathbf{r}}_{,y} \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}_x}{\partial s} \right) \quad (4.113)$$

donde el símbolo $\tilde{\mathbf{a}}$ asociado al vector \mathbf{a} se definió en la ecuación (4.57). Al igual que la derivada de $\mathbf{r}_{,x}$ de la ecuación (4.111), la derivada de $\mathbf{r}_{,y}$ con respecto a la coordenada no generalizada s se calcula con la ayuda de la ecuación (4.104) como sigue:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}_{,y}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{r}_{,y}}{\partial \xi_P^{ij}} \frac{\partial \xi_P^{ij}}{\partial s} = \frac{1}{l_e^{ij}} \mathbf{S}_{,y\xi}^{ij} \Big|_{\xi_P^{ij}} \mathbf{B}_f^{ij} \mathbf{q} \quad (4.114)$$

Por último, de acuerdo con la ecuación (4.109) las derivadas del vector \mathbf{n}_t se calculan utilizando las derivadas anteriores, como se muestra a continuación:

$$\frac{\partial \mathbf{n}_t}{\partial \mathbf{q}} = \left(\tilde{\mathbf{b}}_t \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}_t}{\partial \mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{t}}_t \frac{\partial \hat{\mathbf{b}}_t}{\partial \mathbf{q}} \right) \quad (4.115)$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}_t}{\partial s} = \left(\tilde{\mathbf{b}}_t \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}_t}{\partial s} - \tilde{\mathbf{t}}_t \frac{\partial \hat{\mathbf{b}}_t}{\partial s} \right) \quad (4.116)$$

Las expresiones anteriores se utilizarán en lo que sigue para obtener los Jacobianos de las ecuaciones de restricción con respecto a las coordenadas generalizadas y no generalizadas.

Deslizamiento y tres rotaciones relativas libres

Este par cinemático es equivalente a un par esférico que pudiera desplazarse libremente a lo largo una trayectoria curva representada por la barra flexible. Las ecuaciones de restricción de este par deben garantizar únicamente que el punto común se mueve a lo largo de la barra flexible. Por tanto, las ecuaciones de este par son las (4.102) y las matrices jacobianas, las de las ecuaciones (4.105) y (4.106).

Deslizamiento y dos rotaciones relativas libres

Este es el caso representado en la figura 4.17 que resulta equivalente a un par cinemático compuesto por la unión de dos pares de revolución de ejes perpendiculares que pueden deslizar libremente a lo largo de la barra flexible. En este tipo de par debe añadirse una restricción adicional a las restricciones (4.102). Ésta es una restricción angular entre un vector fijo en el sólido rígido y alguno de los vectores que forman el triedro tangente del sólido flexible. En el caso concreto de la figura 4.17, la restricción a añadir se puede escribir a través del producto escalar del vector, \mathbf{v}_1 , y el vector tangente a la línea media del elemento, \mathbf{t}_t , como sigue:

$$\mathbf{v}_1^T \mathbf{t}_t = 0 \quad (4.117)$$

Con la nueva ecuación de restricción, la matriz jacobiana de las restricciones con respecto a las coordenadas generalizadas debe contener una fila más que contiene la derivada de la ecuación (4.117)

$$\mathbf{H}_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_P^k}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{S}_P^{ij} \mathbf{B}_f^{ij} \\ \mathbf{v}_1^T \frac{\partial \mathbf{t}_t}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{t}_t^T \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (4.118)$$

donde la derivada $\partial \mathbf{v}_1 / \partial \mathbf{q}$ puede calcularse en función de las derivadas de los vectores que definen el sistema local del sólido rígido como se muestra en la ecua-

ción (4.87). Por otro lado, la matriz jacobiana con respecto a la coordenada no generalizada s se puede escribir:

$$\mathbf{H}_s = \left[\begin{array}{c} -\frac{1}{l_e^{ij}} \frac{\partial \mathbf{S}^{ij} \mathbf{B}_f^{ij} \mathbf{q}}{\partial \xi} \Big|_{\xi_P^{ij}} \\ \mathbf{v}_1^T \frac{\partial \mathbf{t}_t}{\partial s} \end{array} \right] \quad (4.119)$$

Nótese que el término $\mathbf{t}_t^T \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial s}$ no aparece en la ecuación (4.119) puesto que las coordenadas del punto P del sólido rígido k no dependen del parámetro s .

Deslizamiento y una rotación relativa libre

Aún es posible restringir alguna más de las rotaciones relativas entre el sólido flexible y el rígido. Este es el caso de un par cilíndrico con trayectoria deformable. En tal caso, los únicos grados de libertad que permite el par cinemático son el desplazamiento a lo largo de la barra flexible y la rotación del sólido rígido alrededor de la línea media de la barra flexible. Las ecuaciones de este par pueden obtenerse añadiendo a la ecuación (4.102) las siguientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1^T \mathbf{t}_t &= 0 \\ \mathbf{v}_2^T \mathbf{b}_t &= 0 \end{aligned} \quad (4.120)$$

Al igual que en el par anterior, la matriz jacobiana de las restricciones queda modificada, adoptando la forma:

$$\mathbf{H}_q = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial \mathbf{r}_P^k}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{S}_P^{ij} \mathbf{B}_f^{ij} \\ \mathbf{v}_1^T \frac{\partial \mathbf{t}_t}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{t}_t^T \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \mathbf{q}} \\ \mathbf{v}_2^T \frac{\partial \mathbf{b}_t}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{b}_t^T \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial \mathbf{q}} \end{array} \right] \quad (4.121)$$

Por su parte, la matriz jacobiana con respecto al parámetro adicional tiene la expresión

$$\mathbf{H}_s = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l_e^{ij}} \frac{\partial \mathbf{S}^{ij} \mathbf{B}_f^{ij} \mathbf{q}}{\partial \xi} \Big|_{\xi_P^{ij}} \\ \mathbf{v}_1^T \frac{\partial \mathbf{t}_t}{\partial s} \\ \mathbf{v}_2^T \frac{\partial \mathbf{b}_t}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (4.122)$$

Merece la pena resaltar que podrían haberse obtenido otros pares cinemáticos distintos restringiendo distintas rotaciones relativas. Así por ejemplo, si se hubiera permitido la rotación alrededor del vector \mathbf{v}_1 de la figura 4.17 el par obtenido sería equivalente a un par de revolución cuyo eje se define a lo largo de \mathbf{v}_1 que puede desplazarse alrededor de la barra flexible. En ese caso, en lugar de la segunda ecuación (4.120) se debería haber incluido la ecuación $\mathbf{v}_1^T \mathbf{b}_t = 0$, lo cual daría lugar a matrices jacobianas distintas.

Deslizamiento y ninguna rotación relativa libre

Es posible también impedir todas las rotaciones relativas entre el sólido rígido y el triedro tangente del sólido flexible. Si esto se hace, el par cinemático así obtenido, sería equivalente a un par prismático cuya trayectoria de deslizamiento es flexible. Para ello, a las restricciones (4.102) deben añadirse tres ecuaciones escalares como las siguientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1^T \mathbf{t}_t &= 0 \\ \mathbf{v}_2^T \mathbf{b}_t &= 0 \\ \mathbf{v}_1^T \mathbf{b}_t &= 0 \end{aligned} \quad (4.123)$$

La matriz jacobiana de las ecuaciones de restricción se escribe entonces:

$$\mathbf{H}_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_P^t}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{S}_P^{ij} \mathbf{B}_f^{ij} \\ \mathbf{v}_1^T \frac{\partial \mathbf{t}_t}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{t}_t^T \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \mathbf{q}} \\ \mathbf{v}_2^T \frac{\partial \mathbf{b}_t}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{b}_t^T \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial \mathbf{q}} \\ \mathbf{v}_1^T \frac{\partial \mathbf{b}_t}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{b}_t^T \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (4.124)$$

y la matriz jacobiana con respecto a la coordenada no generalizada

$$\mathbf{H}_s = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l_e^{ij}} \frac{\partial \mathbf{S}^{ij} \mathbf{B}_f^{ij} \mathbf{q}}{\partial \xi} \Big|_{\xi_P^{ij}} \\ \mathbf{v}_1^T \frac{\partial \mathbf{t}_t}{\partial s} \\ \mathbf{v}_2^T \frac{\partial \mathbf{b}_t}{\partial s} \\ \mathbf{v}_1^T \frac{\partial \mathbf{b}_t}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (4.125)$$

Pares de deslizamiento sobre trayectoria flexible con movimiento plano

En el caso de que el movimiento del sistema sea plano y se desee utilizar la formulación bidimensional, el número de ecuaciones necesarias para formular este tipo de par cinemático es menor. La localización del punto de contacto puede hacerse a través de la versión bidimensional de la ecuación (4.102). Esta ecuación vectorial se compone en este caso de dos ecuaciones, que sólo restringen un grado de libertad debido a la adición de la coordenada no generalizada s .

La definición del triedro tangente es mucho más sencilla en este caso que en el caso espacial. El vector tangente puede expresarse

$$\mathbf{t}_t = \frac{\hat{\mathbf{t}}_t}{\|\hat{\mathbf{t}}_t\|} \quad (4.126)$$

donde $\hat{\mathbf{t}}_t = \mathbf{r}_{,x}$ y el vector perpendicular $\mathbf{n}_t = \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{t}_t$. Así, las derivadas del vector tangente \mathbf{t}_t con respecto a las coordenadas generalizadas y no generalizadas tienen expresiones idénticas a las del caso espacial, ecuación (4.110). Sin embargo, en el caso plano, la derivada del vector perpendicular \mathbf{n}_t puede calcularse fácilmente con ayuda de la matriz de rotación $\tilde{\mathbf{I}}$ como sigue:

$$\frac{\partial \mathbf{n}_t}{\partial \mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{I}} \frac{\partial \mathbf{t}_t}{\partial \mathbf{q}} \quad \frac{\partial \mathbf{n}_t}{\partial s} = \tilde{\mathbf{I}} \frac{\partial \mathbf{t}_t}{\partial s} \quad (4.127)$$

En el caso plano, la rotación relativa entre el sólido rígido y el triedro tangente puede impedirse a través de una ecuación escalar que describa el ángulo formado por un vector definido en el triedro tangente y un vector del sólido rígido. Se trataría entonces de una ecuación similar a la ecuación (4.117), cuya matriz jacobiana fue presentada en la sección anterior.

4.6.2. Par de deslizamiento a lo largo de una trayectoria curva indeformable

Otra situación en la que las ecuaciones de restricción son inevitablemente no lineales se da en el par de deslizamiento sobre trayectoria curva indeformable. La formulación de este tipo de pares resulta muy similar a los pares con deslizamiento sobre trayectoria flexible debido a la conveniencia de utilizar un parámetro adicional que recorre la trayectoria de deslizamiento. En estos casos, la no linealidad viene de la descripción de la trayectoria. En la figura 4.18 puede verse un esquema de una conexión de este tipo en un sistema rígido-flexible plano.

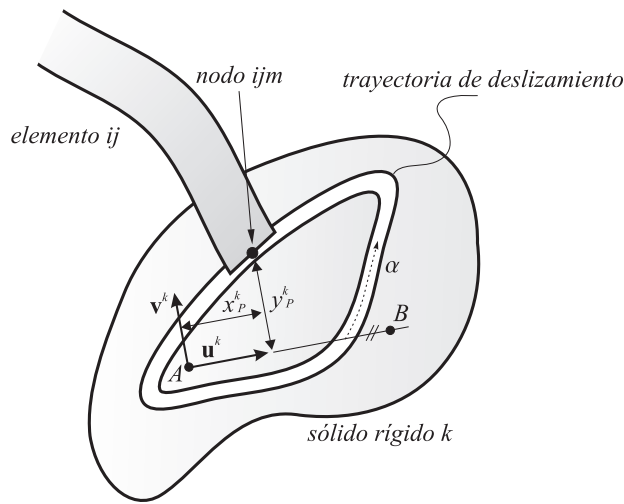


Figura 4.18: Par de deslizamiento sobre trayectoria curva.

La posición del punto de contacto en el sistema de referencia del sólido rígido es, por tanto, una función del parámetro α que recorre la curva

$$\bar{\mathbf{r}}_P^k = \mathbf{f}(\alpha) \quad (4.128)$$

donde $\bar{\mathbf{r}}_P^k$ es el vector de posición en el sistema de referencia local del sólido. El parámetro α puede tratarse como una coordenada no generalizada más. Con la

ayuda de la ecuación anterior, la restricción que garantiza la existencia de un punto en común tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{r}^{ijm} - \mathbf{r}_A^k - \mathbf{A}^k \mathbf{r}_P^k(\alpha) = \mathbf{0} \quad (4.129)$$

Para formular las restricciones angulares que impiden las rotaciones relativas entre ambos sólidos es necesario el uso de un triedro local en el sólido rígido con origen en el punto de contacto. Para ello puede utilizarse, por ejemplo, el triedro de Frenet [82], que se obtiene para cada punto de la curva en función del parámetro α . No obstante, el triedro de Frenet no está bien definido en tramos rectos por lo que, en esos casos, habría que definir los vectores unitarios del triedro local de forma especial. Una vez definido el triedro local en el punto de contacto, las rotaciones relativas pueden restringirse de forma similar a como se hizo en la formulación de los pares de deslizamiento sobre trayectorias flexibles, ecuaciones (4.123).

Capítulo 5

Aplicación de la formulación rígido-flexible

En este capítulo se presentan algunos ejemplos numéricos para los que se aplican los conceptos descritos en capítulos anteriores. El capítulo se divide en dos secciones. En la primera de ellas se presentan resultados obtenidos mediante simulación empleando la formulación rígido-flexible presentada en el capítulo 4 a mecanismos con movimiento plano. La segunda parte de este capítulo muestra los resultados obtenidos de la simulación dinámica de algunos mecanismos con movimiento espacial. Las barras flexibles de los mecanismos con movimiento plano han sido modeladas con elementos de Omar [33], mientras que en los mecanismos con movimiento espacial se han modelado las barras flexibles con elementos de Yakoub [34]. Una de las contribuciones de esta tesis que más trascendencia ha tenido es el algoritmo presentado en el capítulo 3 para la evaluación de las fuerzas elásticas en dichos elementos por cuanto ha posibilitado la simulación de los ejemplos aquí presentados dentro de unos tiempos de cálculo razonables. Adicionalmente, en uno de los ejemplos se ha introducido disipación de energía debido a rozamiento interno mediante el modelo de amortiguamiento interno desarrollado en el capítulo 3. Nótese que en este capítulo se utiliza la expresión abreviada: “mecanismo RF” cuando se quiere decir “mecanismo rígido-flexible”.

5.1. Mecanismos RF con movimiento plano

A continuación se presentan dos mecanismos rígido-flexibles con movimiento plano. El primero de ellos es un mecanismo que resulta de una inversión del mecanismo biela-manivela. El segundo es un mecanismo obtenido a partir del primero, añadiendo una barra y una restricción adicional a uno de los pares cinemáticos.

5.1.1. Mecanismo de tres barras

Un esquema del mecanismo objeto de estudio puede observarse en la figura 5.1. Este mecanismo está compuesto por una barra fija, la barra flexible O_1B y la manivela rígida O_2A . En este mecanismo, la barra flexible O_1B sirve de guía de deslizamiento para la corredera sin masa que está unida mediante un par de revolución a la manivela rígida O_2A . Por tanto, el par cinemático localizado en el punto A permite el giro relativo de las barras O_1B y O_2A . Este par se modela mediante las ecuaciones de restricción descritas en el capítulo 4 para pares de deslizamiento sobre trayectoria flexible.

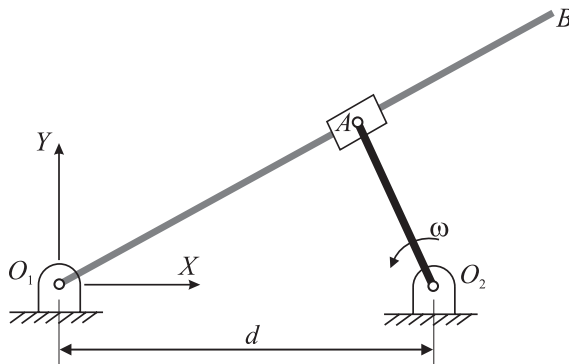


Figura 5.1: Mecanismo RF con deslizamiento sobre barra flexible.

En un primer modelo de este mecanismo, el material de la barra flexible tiene un módulo de Young de 200 GPa, así como un módulo de Poisson nulo para evitar el bloqueo de Poisson, de acuerdo con las recomendaciones dadas en la bibliografía

[37]. La densidad del material es 7878 kg/m^3 y la longitud de la barra, 0.5 m . La manivela rígida, por su parte, tiene una longitud de 0.08 m , una sección transversal de $2.827 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ y una densidad de 3939 kg/m^3 . Por otro lado, la distancia d que separa los pares de revolución O_1 y O_2 es de 0.24 m . En la posición inicial, la barra flexible se encuentra sobre la línea $O_1 - O_2$ y, en ese momento, la barra no está deformada. La manivela rígida se hace girar a una velocidad constante de 30 rad/s .

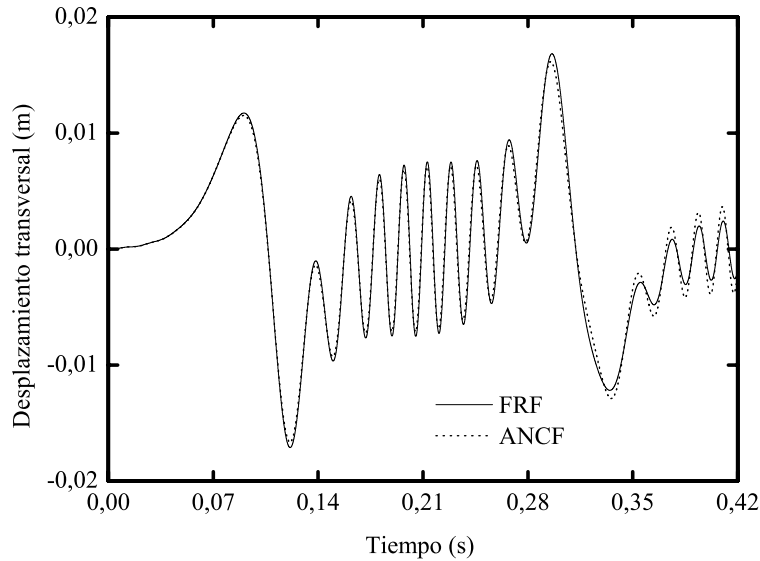


Figura 5.2: Desplazamiento transversal del extremo de la barra flexible.

En el primer modelo del sistema se pretende comparar los resultados obtenidos con la formulación presentada en el capítulo 4 con los que se obtienen si la barra flexible se modela mediante una formulación en referencias flotantes (FFR). La formulación FFR que se emplea utiliza los modos de vibración de una viga con condiciones de contorno de viga en voladizo para expandir el campo de desplazamientos por deformación de la barra flexible. Los tres primeros modos de flexión se usan para los desplazamientos transversales y el primer modo axial para los

desplazamientos longitudinales con respecto a la referencia flotante.

Dado que la formulación FFR empleada sólo puede usarse bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones, se le asigna a la sección transversal de la barra flexible un valor suficiente para que la rigidez de la barra permita sólo pequeñas deformaciones. Así, el área de la sección recta de la barra flexible es $2.827 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ y el momento de inercia de la sección, $6.362 \cdot 10^{-11} \text{ m}^4$. Para discretizar la barra flexible se usan un total de cuatro elementos finitos en este caso.

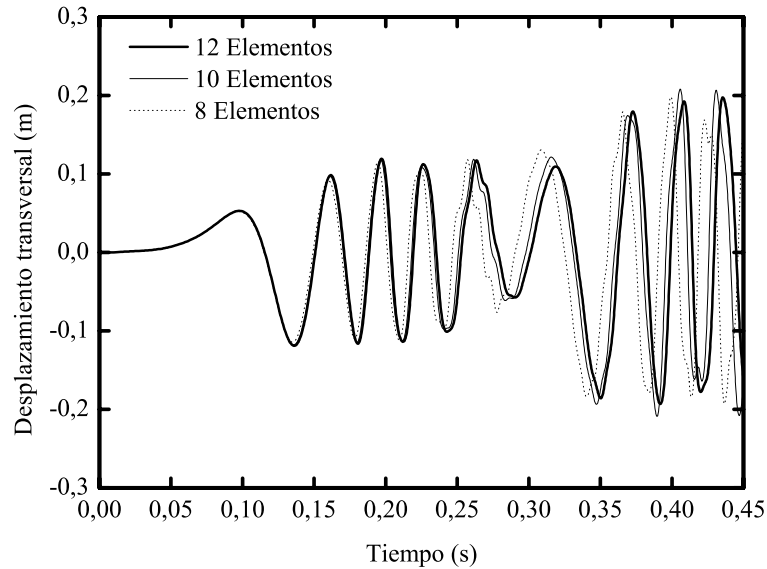


Figura 5.3: Convergencia del modelo de sección reducida.

La figura 5.2 muestra el desplazamiento transversal del extremo B de la barra flexible medido en un sistema de referencia local cuyo eje de abscisas es, en cada momento, tangente a la barra flexible en el origen de coordenadas, que se encuentra en el punto O_1 . Dicho sistema coincide en el modelo FFR con el sistema de referencia flotante empleado. Se puede observar un buen acuerdo entre los resultados que se obtienen mediante ambas formulaciones. También, puede comprobarse que el desplazamiento máximo del extremo de la barra flexible no llega a superar el 4%

de la longitud de dicha barra, por lo que puede asegurarse que las deformaciones son pequeñas.

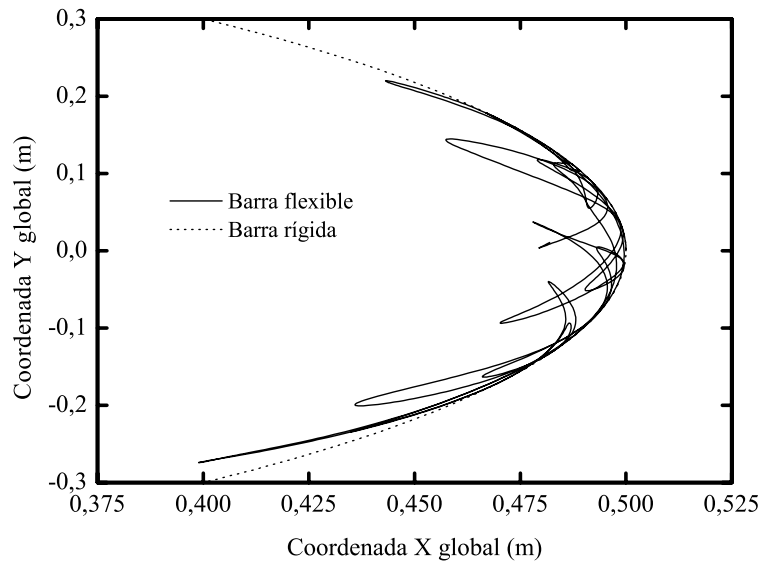


Figura 5.4: Trayectoria del extremo de la barra O_1B .

En el segundo modelo, para permitir deformaciones mayores se reducirá la sección transversal de la barra flexible del modelo hasta un valor de $2.827 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$, que se corresponde con un momento de inercia de la sección de $1.591 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4$. De nuevo se simulan dos ciclos de la manivela, la cual gira a la misma velocidad que en el modelo de pequeños desplazamientos anterior. El número de elementos finitos usados para discretizar la barra flexible en el modelo de grandes desplazamientos se varía entre 8, 10 y 12 para estudiar la convergencia del modelo. En la figura 5.3, se muestran los desplazamientos por deformación del extremo libre, obtenidos para distinto número de elementos. Se observa que las diferencias entre los resultados del modelo de 10 y del de 12 elementos son suficientemente pequeñas en comparación con la magnitud del desplazamiento. Por este motivo, se utilizará en adelante el modelo de 10 elementos para obtener algunos resultados más.

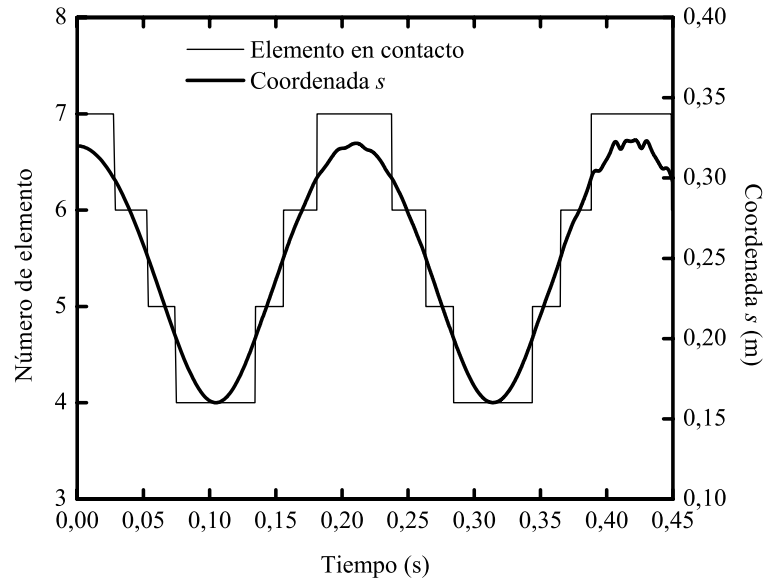


Figura 5.5: Coordenada s y elemento en contacto.

En la figura 5.4 se muestra la trayectoria del extremo libre de la barra flexible, punto B , durante dos ciclos de rotación de la manivela rígida O_2A . En la misma figura se ha representado la trayectoria que seguiría el punto B en el caso de que la barra O_1B fuera rígida. Dicha trayectoria es circular aunque en la figura esto no pueda apreciarse debido a las diferentes escalas usadas en los ejes de abscisas y ordenadas. Se puede observar en esta figura que, por un lado, la deformación es suficientemente grande como para causar que el movimiento de dicho punto se aleje del arco de circunferencia que describiría dicho punto si el mecanismo fuera rígido. Por otro lado, se observa que el modelo no lineal de fuerzas elásticas incorpora el acoplamiento entre la deformación axial y de flexión puesto que los desplazamientos del extremo se producen siempre hacia el interior del arco de circunferencia antes mencionado y no hacia fuera, como se observaría en un modelo lineal.

La figura 5.5 muestra la evolución de la coordenada no generalizada s asociada al par de deslizamiento (ver sección 4.6). Los valores que esta coordenada adquiere

se observan en el eje de ordenadas derecho, mientras que en el eje izquierdo se observa el número del elemento que alberga al punto A en cada instante. De esta manera se verifica que el algoritmo que tiene en cuenta el cambio de elemento para modificar las ecuaciones de restricciones funciona correctamente.

La evolución de las energías cinética y de deformación se muestra en la figura 5.6 junto con la evolución del trabajo realizado por el motor que mantiene constante la velocidad de la manivela rígida. En esta figura se observa que el balance de energía se satisface, puesto que la suma de las energías cinética y elástica menos el trabajo aportado es siempre igual al valor de la energía cinética inicial. Dicho valor se corresponde con la energía cinética del sistema en el instante inicial, puesto que se consideró como condición inicial que la barra flexible no estaba deformada.

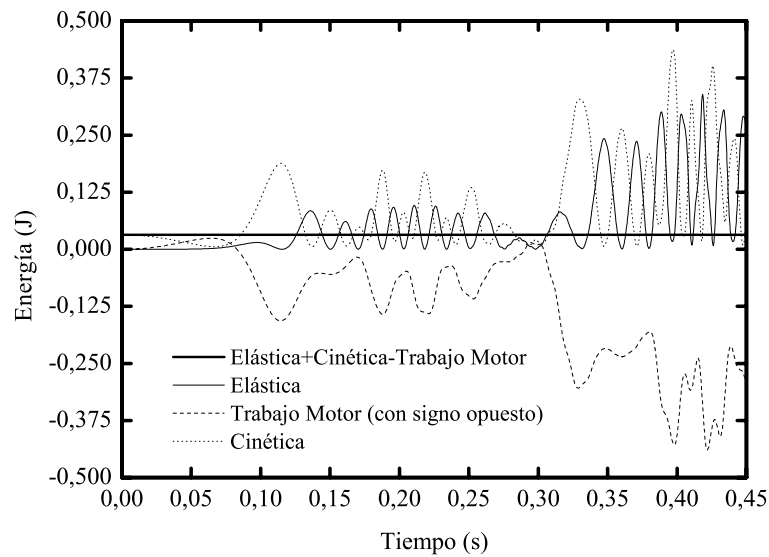


Figura 5.6: Balance de energía.

Las ecuaciones diferenciales del movimiento que se obtienen mediante la ANCF no incluyen linealización de las rotaciones o de las fuerzas elásticas. Por este motivo, los integradores de tipo conservativo no son necesarios cuando se usa esta

formulación. En el caso del mecanismo de la figura 5.1, se ha usado un método explícito Runge-Kutta-Heun de segundo orden.

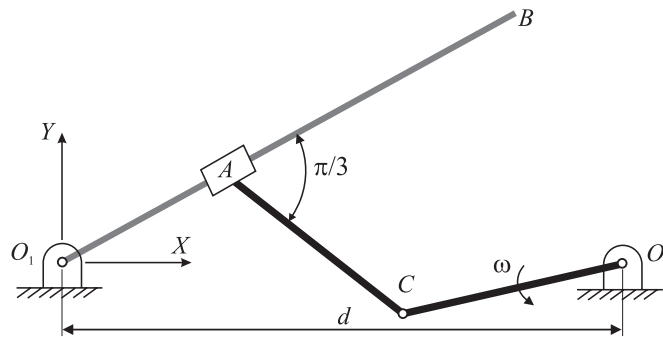


Figura 5.7: Mecanismo RF de 4 barras.

5.1.2. Mecanismo de cuatro barras

Para comprobar el funcionamiento de las restricciones de deslizamiento que impiden el giro relativo se simula la dinámica del mecanismo de cuatro barras de la figura 5.7. En este mecanismo, la barra O_1B es flexible; las propiedades geométricas y del material son las mismas que las primeras consideradas para la barra O_1B del mecanismo resuelto anteriormente. En este mecanismo, las dos barras rígidas situadas entre O_2 y A están unidas por un par de revolución. Ambas tienen una longitud de 0.08 metros, una densidad de 3939 kg/m^3 y una sección circular de 6 mm de diámetro. La manivela articulada al punto O_2 se hace girar a una velocidad constante de 1 rad/s, considerando que en el instante inicial la barra flexible está sobre la línea que une los puntos O_1 y O_2 . El par cinemático que conecta la barra rígida AC con la barra flexible permite el deslizamiento del extremo A de la barra rígida a lo largo de la línea central de O_1B . Además, el ángulo de $\pi/3$ radianes que forma la barra AC con la línea central de la barra flexible en el punto A se mantiene constante durante la simulación. Al igual que en el mecanismo anterior, la distancia d que separa los puntos O_1 y O_2 es de 0.24 m. En el instante inicial la barra flexible no experimenta deformación alguna y,

por tanto, está recta.

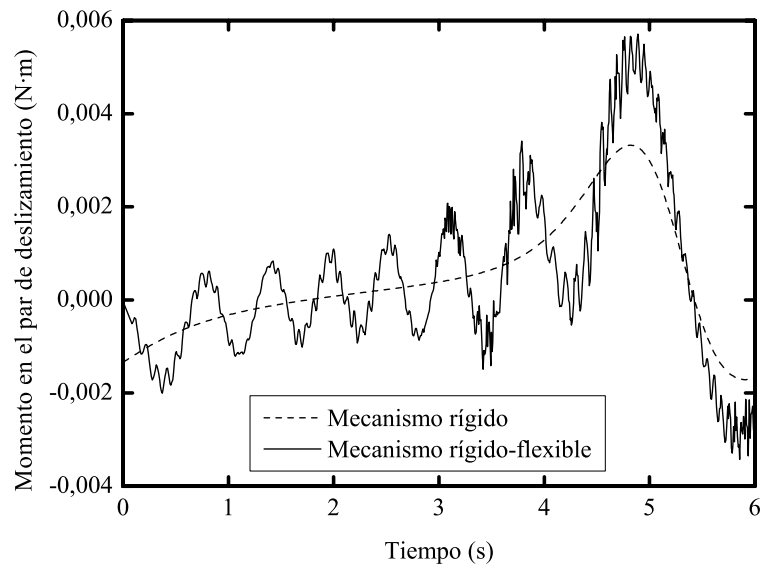


Figura 5.8: Momento en el par de deslizamiento.

En esta simulación se ha calculado la evolución del par de reacción en el punto A que mantiene el ángulo relativo constante. Los resultados obtenidos se representan en la figura 5.8 junto con el valor de la reacción que se obtendría en dicho par cinemático si la barra O_2B fuera rígida, a igualdad del resto de propiedades. Se observan ciertas oscilaciones con respecto al valor correspondiente al mecanismo rígido. Como puede deducirse al observar la figura, el par de deslizamiento utilizado provoca que se exciten modos de deformación asociados a frecuencias altas. Estas oscilaciones no se aprecian, sin embargo, en los resultados obtenidos para el mecanismo anterior en el que el par de deslizamiento permitía la rotación relativa de las barras. Por tanto, puede deducirse que la restricción del ángulo relativo activa modos de deformación asociados a frecuencias altas. Merece la pena remarcar que la presencia de estas altas frecuencias dificulta la integración numérica de las ecuaciones.

5.2. Mecanismos RF con movimiento espacial

En esta sección se presentan dos ejemplos de aplicación de la formulación rígido-flexible a la simulación dinámica de mecanismos espaciales. En primer lugar se modela un mecanismo rígido-flexible espacial de cuatro barras, también conocido en la bibliografía como mecanismo RSCR. Además, este mecanismo se utiliza para estudiar la influencia del amortiguamiento interno en la dinámica del sistema. Para ello, se utilizará el modelo de amortiguamiento interno presentado en el capítulo 3.

5.2.1. Mecanismo espacial de cuatro barras

Para demostrar la utilidad del procedimiento que se propone en el capítulo 4, se utiliza el mecanismo espacial de cuatro barras de la figura 5.9. El mecanismo está compuesto por tres barras rígidas de sección circular, AB , DE , y EF , y una barra flexible, BC . La barra flexible, con 1036 Kg/m^3 de densidad y un módulo de Young de 10 MPa , tiene sección cuadrada de 0.05 m de lado y una longitud de 0.5 m . Las propiedades de las barras rígidas se muestran en la tabla 1. La barra conductora, AB , está unida a la barra fija a través de un par de revolución, cuyo eje está alineado con el vector \mathbf{v}_A (inicialmente paralelo a DE). La velocidad de giro de AB varía según:

$$\omega(t) = \begin{cases} \frac{\omega}{T} \left(t - \frac{T}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T} \right), & t < T \\ \omega, & t \geq T \end{cases} \quad (5.1)$$

donde T y ω toman unos valores de 1.5 s y 2 rad/s , respectivamente.

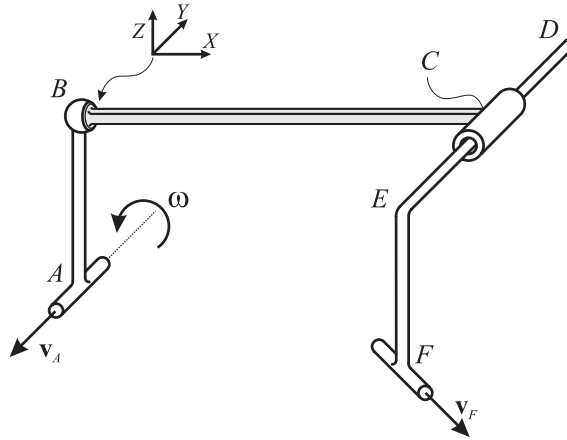


Figura 5.9: Mecanismo cuatro barras espacial.

La barra AB se articula con la barra BC a través de un par esférico, que no añade restricción alguna al sistema de ecuaciones del movimiento, puesto que se comparten las coordenadas del nodo y del punto de la barra rígida coincidentes en B . El par cilíndrico que une las barras BC y DE añade solo dos ecuaciones al sistema, que imponen que los puntos D , C y E están alineados. Por otro lado, la restricción que impide los otros giros relativos entre ambas barras (alrededor del eje BC y alrededor de un eje paralelo a EF) puede eliminarse si se escribe el vector $\partial \mathbf{r} / \partial y$ del nodo que coincide con C como combinación lineal de las coordenadas de la barra DE .

Barra	Masa (Kg)	Longitud (m)	Radio (m)
AB	0.2	0.3	0.01
DE	0.5	0.8	0.01
EF	0.2	0.3	0.01

Tabla 5.1: Propiedades de las barras rígidas.

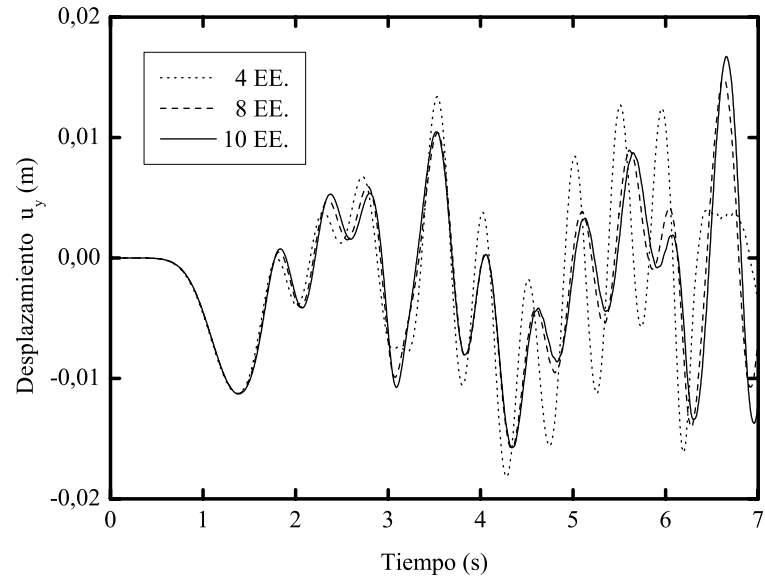
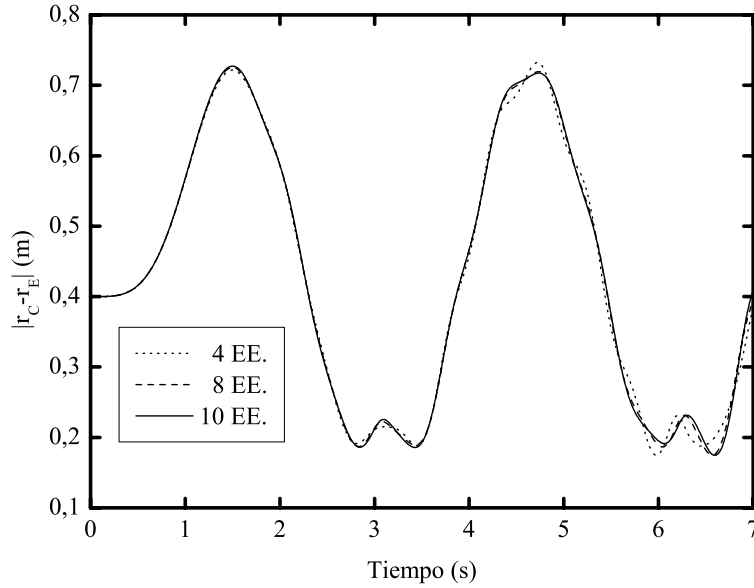


Figura 5.10: Desplazamiento por deformación según y local.

En la figura 5.10 se muestra el desplazamiento transversal por flexión del punto C expresado en el sistema local de referencia unido al punto B (figura 5.9). Dicho sistema de referencia tiene el eje X tangente a la línea media en el punto B y el eje Z , perpendicular a los vectores $\partial \mathbf{r} / \partial x$ y $\partial \mathbf{r} / \partial y$ del nodo que coincide con B . Inicialmente, los ejes y y z locales están contenidos en la sección recta de la barra flexible que pasa por B . A su vez, la figura 5.11 muestra la evolución con el tiempo de la distancia entre los puntos E y C . Ambas gráficas muestran los resultados obtenidos con distinto número de elementos. Las barras DE y EF pueden tratarse como una única barra, si bien, el considerar dos barras no supone que la unión rígida en E añada alguna restricción ya que pueden compartirse las coordenadas de los puntos D , E y F , así como el vector \mathbf{v}_F , que define el eje del par de revolución que une EF a la barra fija y forma 45 grados con \mathbf{v}_A .

Figura 5.11: Distancia $E-C$.

La energía que se disipa mediante el denominado amortiguamiento interno suele, a menudo, no considerarse en aplicaciones multicuerpo puesto que se espera que el movimiento global no se vea significativamente afectado. Tanto es así, que el primer intento de incluir el amortiguamiento interno en la formulación en coordenadas absolutas aparece recientemente en [78]. En las simulaciones que se muestran a continuación se utiliza un amortiguamiento estructural del 5% respecto al amortiguamiento crítico. Con este valor, se espera que las fuerzas de amortiguamiento interno no afecten significativamente.

A continuación se utiliza el mecanismo espacial de cuatro barras presentado en esta sección para estudiar la influencia de un valor de amortiguamiento interno del 5%. El mecanismo se simula con y sin amortiguamiento interno y los resultados obtenidos mediante ambos métodos se comparan a continuación. Las propiedades de las barras rígidas son, de nuevo, las que aparecen en la tabla 5.1. Sin embargo, para este ejemplo, la barra flexible BC tiene una sección cuadrada de 10^{-4} m²,

una densidad de 7850 Kg/m^3 y una longitud de 0.5 m .

En las simulaciones que se presentan a continuación se usan dos valores diferentes para el módulo de Young. De nuevo, como recomiendan Sapanen y Mikkola [37], al módulo de Poisson se le da un valor nulo para evitar el denominado bloqueo por efecto Poisson. Por su parte, los factores de disipación γ_s y γ_d , presentados en el capítulo 3, han sido calculados como un porcentaje del 5% con respecto al valor crítico como se explicó en dicho capítulo. Así, los valores críticos se obtienen aplicando relaciones del tipo siguiente:

$$\gamma^{crit} = \frac{2}{\omega_n} \quad (5.2)$$

donde ω_n es la frecuencia natural más cercana a la frecuencia de la excitación. Como se explicó en el capítulo 3, la frecuencia natural de torsión puede usarse para calcular el valor de γ_d y la frecuencia natural de flexión, para calcular γ_s .

En ambas simulaciones el mecanismo se somete a la misma ley de movimiento presentada al principio de la sección. Las figuras 5.12 y 5.13 muestran los desplazamientos por deformación del punto C medidos en el sistema de referencia tangente situado en el punto B de la barra flexible y descrito anteriormente (figura 5.9).

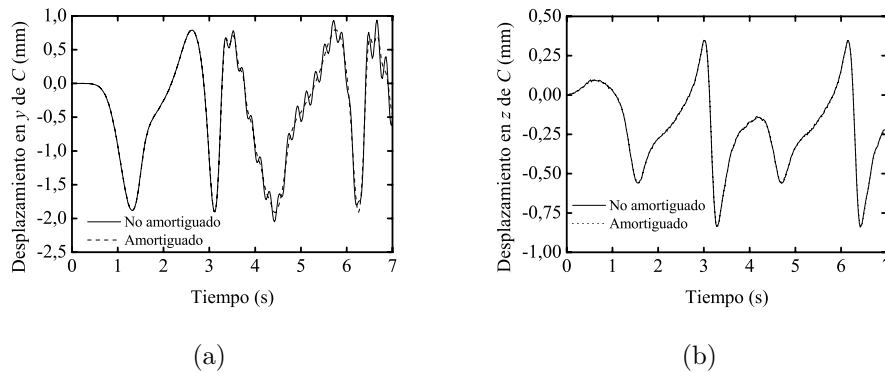


Figura 5.12: (a) Desplazamiento según y local ($E=10 \text{ GPa}$) (b) Desplazamiento según z local ($E=10 \text{ GPa}$).

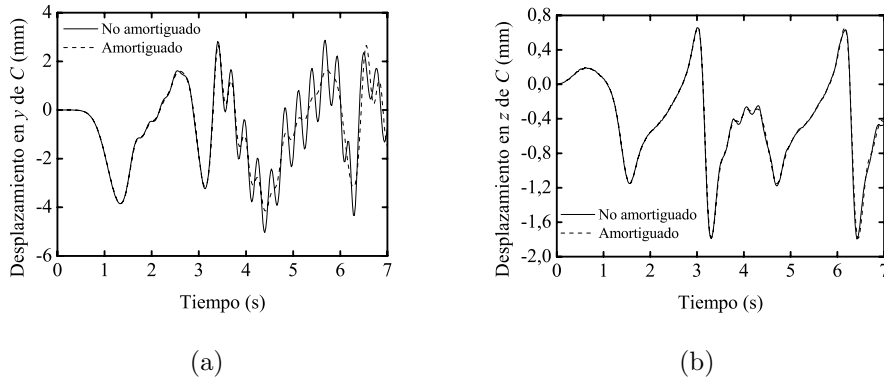


Figura 5.13: (a) Desplazamiento según y local ($E=5$ GPa) (b) Desplazamiento según z local ($E=5$ GPa).

Los resultados que se muestran en la figura 5.12 se han obtenido con un modulo de Young de 10 GPa y una discretización de seis elementos finitos. Como puede observarse en la figura, la magnitud de la deformación a lo largo del eje y local es significativamente mayor que a lo largo del eje z local. Esto es debido a las diferentes condiciones de contorno que encuentra la viga al deformarse en dichos planos. En el plano XZ la viga BC se comporta aproximadamente como una viga biapoyada, mientras que en el plano XY , el comportamiento está más proximo al de una viga apoyada en un extremo y con empotramiento deslizante en el otro. Dado que la sección es cuadrada y el material es isótropo, se espera que el comportamiento en el plano XZ encuentre una rigidez mayor que la que encuentra en el plano XY para pequeñas deformaciones. De hecho la viga con condiciones apoyada y empotramiento deslizante se comporta como una viga biapoyada que fuera el doble de larga. En la figura 5.12 se observan ciertas diferencias en las respuestas cuando se introduce un amortiguamiento interno correspondiente a un 5% con respecto al valor crítico y cuando no se introduce.

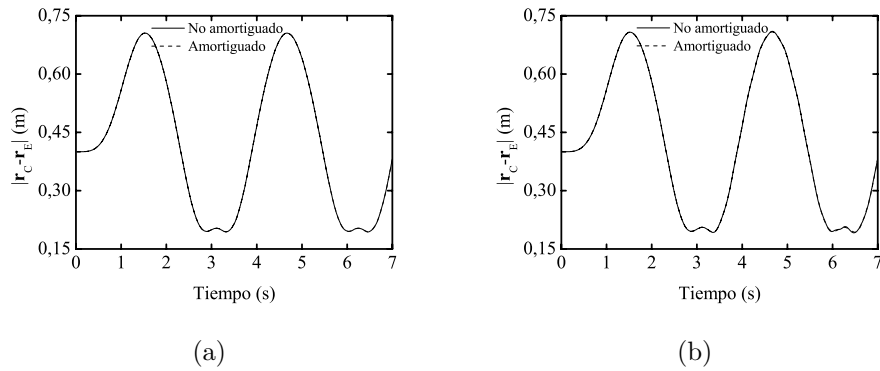


Figura 5.14: (a) Distancia $E-C$ ($E = 10$ GPa) y (b) Distancia $E-C$ ($E = 5$ GPa)

Las diferencias se vuelven más importantes cuando la rigidez del material se reduce como puede observarse en la figura 5.13 para un modelo con un módulo de Young de 5 GPa. Sin embargo, las deformaciones de ambos modelos son tan pequeñas que el movimiento global de ambos sistemas es similar. En la figura 5.14, se muestra la evolución de la distancia entre los puntos C y E con el tiempo para ambos valores del módulo de Young. Esta distancia depende del deslizamiento permitido por el par cilíndrico situado en el extremo C de la barra flexible, el cual tiene una magnitud mucho mayor que la deformación en la misma dirección. Por esta razón, la influencia del amortiguamiento interno es prácticamente despreciable en estas gráficas. Sin embargo, la integración numérica de las ecuaciones del movimiento resulta mucho más fácil en caso de añadir amortiguamiento interno. Como conclusión, un amortiguamiento correspondiente al 5% del valor crítico produce diferencias apreciables de la deformación del sistema, aunque estas no sean suficientemente grandes como para alterar significativamente el movimiento global.

5.2.2. Simulación dinámica de una pala de rotor de helicóptero conectado a eje rígido

La investigación en el campo de la dinámica de helicópteros ha contribuido a la comprensión del problema de la rigidez geométrica, puesto que ésta influye, en gran

medida, en el movimiento de las palas de los rotores. De hecho, la fuente principal de la rigidez a flexión es el efecto centrífugo derivado de las altas velocidades angulares que se utilizan a menudo en estas aplicaciones. La pala de helicóptero se modela en muchas investigaciones como una viga, usando las simplificaciones con respecto a las deformaciones elásticas que se hacen a menudo. Por ejemplo, la deformación longitudinal de una viga de Euler-Bernoulli se define como sigue [83]:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (5.3)$$

donde u y w son, respectivamente, los desplazamientos axiales y transversales de un punto de la viga.

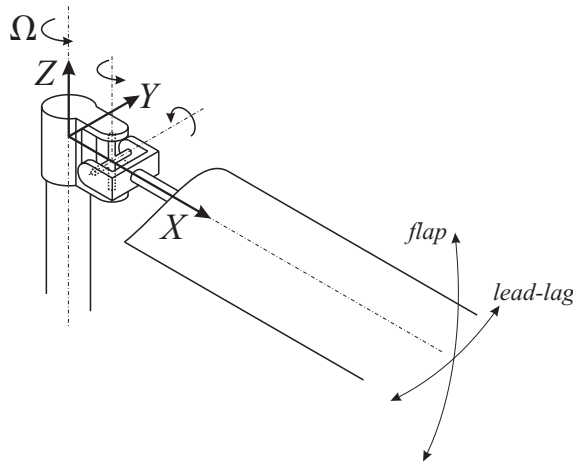


Figura 5.15: Esquema de la conexión de la pala al eje.

La deformación longitudinal de la ecuación (5.3) corresponde a la aproximación de segundo orden para una viga de Euler-Bernoulli [84], y, consecuentemente, no todos los términos usados en la definición exacta de la deformación se consideran en la ecuación (5.3). Además, cuando la expresión de la ecuación (5.3) se utiliza en la ecuación del movimiento, se requiere una alta precisión en la evaluación de los desplazamientos para representar exactamente la rigidez axial. La razón es que la

pala, en la mayoría de los usos, es tan inextensible que los dos términos en el lado derecho de la ecuación (5.3) tienen casi la misma magnitud pero signo contrario [83]. Este hecho conduce a un mal-condicionamiento en la evaluación exacta de la deformación axial. Si la deformación axial no se evalúa exactamente, los términos dominantes que contribuyen a la rigidez de la pala no se calculan correctamente. Este problema se puede evitar usando una formulación mixta de elementos finitos en la cual la fuerza axial se utiliza como variable independiente en las ecuaciones del sistema [83]. Usando esta formulación mixta para las palas del rotor de un helicóptero se han obtenido buenos resultados [83].

La formulación en coordenadas nodales absolutas (ANCF) se puede utilizar en el análisis del problema de palas de rotor sin necesidad de hacer suposiciones con respecto a la geometría o a la deformación elástica [66]. Por ejemplo, la ANCF considera automáticamente deformaciones de cortante, inercia a rotación de la sección y acoplamiento dinámico entre diversos modos de desplazamiento. Otra ventaja de usar ANCF es la evaluación exacta de la tensión axial. Como fue expuesto en el capítulo 3, la ANCF permite usar el tensor no lineal de deformación de Green-Lagrange para formular las fuerzas elásticas del elemento. Esta medida de deformación, para una viga de dos dimensiones, conduce a la definición siguiente de la deformación axial:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial r_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial r_2}{\partial x} \right)^2 - 1 \right) \quad (5.4)$$

donde r_1 y r_2 son las coordenadas cartesianas de un punto arbitrario de la viga y x es la coordenada longitudinal del elemento viga. Puesto que r_1 y r_2 son coordenadas globales, ninguna de estas dos coordenadas se puede considerar debida a la flexión o a la deformación axial solamente. En su lugar, cada coordenada contribuye a las deformaciones axiales y de flexión así como al movimiento como sólido rígido del cuerpo. Además, el problema del mal-condicionamiento como resultado del uso de la ecuación (5.3) no se encuentra en la evaluación de la deformación usando la ecuación (5.4), ya que esta deformación se representa como la suma de números

positivos menos un número entero. Por tanto, el problema de la pérdida de cifras significativas como consecuencia de la substracción no se encuentra aquí. En lo que sigue, se examina el comportamiento dinámico de una pala articulada mediante una junta universal a un eje rígido que gira con una velocidad angular dependiente del tiempo. La figura 5.15 muestra la conexión de la pala con el eje del rotor. La rotación del rotor se define según:

$$\theta(t) = \begin{cases} \Omega_0 t + \frac{\Omega}{T} \left(\frac{t^2}{2} + \frac{T^2}{4\pi^2} \left(\cos \frac{2\pi t}{T} - 1 \right) \right) & t < T \\ \Omega_0 t + \Omega \left(t - \frac{T}{2} \right) & t \geq T \end{cases} \quad (5.5)$$

donde Ω_0 es la velocidad angular inicial, $\Omega_0 + \Omega$ es la velocidad angular final, y T es el tiempo de aceleración desde Ω_0 a $\Omega_0 + \Omega$. La pala gira alrededor de un eje vertical, a la vez que no se utilizan fuerzas aerodinámicas en el modelo. La pala se somete a la carga gravitacional y a las fuerzas dinámicas debidas a la rotación del eje. Inicialmente, éste rota a una velocidad angular, Ω_0 , constante de 47.7 r.p.m. Al principio de la simulación, las fuerzas gravitacionales hacen doblarse a la pala y rotar fuera del plano horizontal, mientras que la velocidad angular comienza a aumentar hasta 258 r.p.m.; esta aceleración se produce durante 30 segundos. El material de la pala tiene una densidad de masa de 2767.0 Kg/m³, un módulo de Young de 6522 GPa y un módulo de rigidez transversal de 3261 GPa. El extremo articulado de la viga está situado a 20 centímetros del eje de giro (figura 5.15) y la longitud total de la pala es de 8 m. Los momentos de inercia de la sección son 1.18943·10⁻⁸ m⁴ y 2.68028·10⁻⁸ m⁴ para el movimiento de flap y lead-lag (figura 5.15), respectivamente, y la rigidez a torsión, GJ, tiene un valor de 126191 Nm².

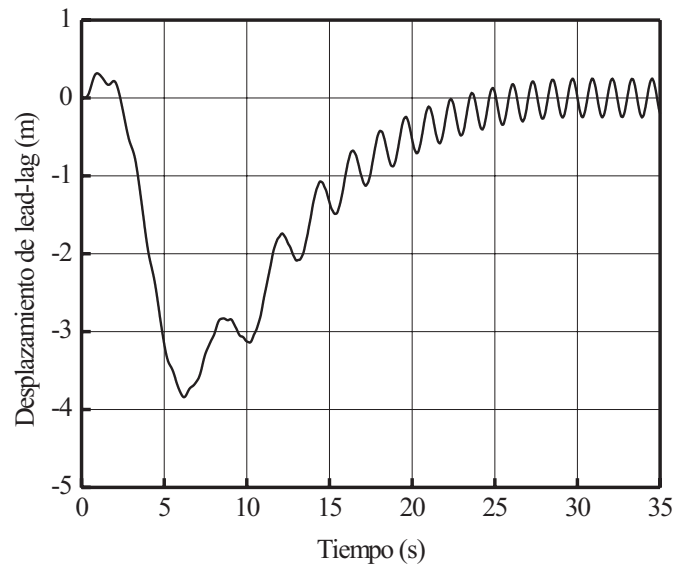


Figura 5.16: Movimiento de lead-lag de la pala.

Los desplazamientos se miden en un sistema de coordenadas solidario al eje de giro. Este sistema de referencia tiene el eje Z a lo largo del eje de revolución y el eje X inicialmente a lo largo de la línea central de la pala (figura 5.15). Las figuras 5.16 y 5.17 muestran el desplazamiento de lead-lag (a lo largo de Y) y los desplazamientos longitudinales (a lo largo de X) del extremo libre de la pala. Nótese que el máximo valor del desplazamiento de lead-lag es alto puesto que la junta universal permite la rotación rígida del cuerpo en el plano XY . Los desplazamientos iniciales de avance mostrados en la figura se atribuyen a las fuerzas de inercia de Coriolis que son generadas por el acoplamiento de la velocidad angular de giro del sistema de referencia y el movimiento de flap inicial de la pala debido al efecto de la gravedad. Los desplazamientos por deformación que experimenta la pala flexible para los valores de las rigideces y de la velocidad de giro del rotor

que se han usado son varios ordenes de magnitud inferiores a los desplazamientos como sólido rígido. Por este motivo, el movimiento que se muestra en las figuras 5.16 y 5.17 es prácticamente igual al que se obtendría considerando la pala como un sólido rígido.

Como puede observarse en la figura 5.17, la componente longitudinal del desplazamiento del extremo de la pala también alcanza un valor alto (alrededor de 1 metro), lo cual se atribuye a la rotación rígida del cuerpo alrededor del eje contenido en el plano XY de la junta universal como resultado de las fuerzas gravitacionales.

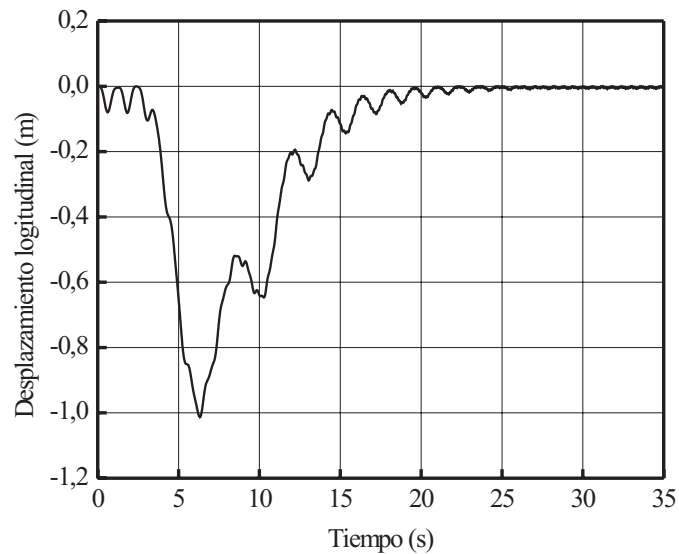


Figura 5.17: Movimiento longitudinal del extremo de la pala.

La figura 5.18 muestra el desplazamiento longitudinal medido en el sistema de coordenadas móvil durante un ciclo de rotación que comienza en el segundo 32. Nótese que este instante pertenece al periodo de rotación a velocidad angular

constante. Los movimientos de flap y lead-lag también se muestran en la figura 5.18 durante un ciclo de la rotación de la pala. El movimiento de flap tiene aproximadamente el mismo período de rotación que el eje del rotor, puesto que este movimiento es principalmente movimiento como sólido rígido de la pala.

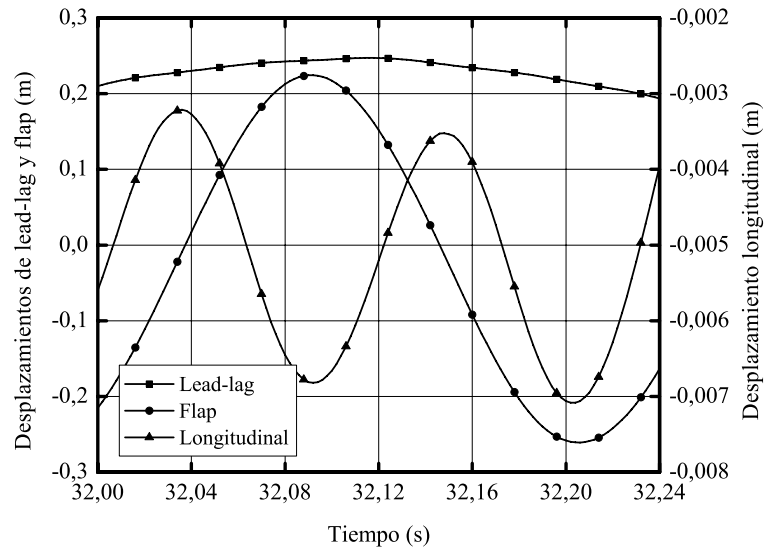


Figura 5.18: Lead-lag, flap y desplazamiento longitudinal del extremo de la pala durante un ciclo de rotación (0.2325 s).

Capítulo 6

Estudio del efecto de rigidización geométrica

Las soluciones obtenidas mediante modelos de elementos finitos basados en la teoría lineal de la elasticidad en el estudio de problemas en los que el acoplamiento entre los desplazamientos axiales y de flexión es importante tienen ciertas limitaciones. Este es el caso de una viga que se hace girar alrededor de un eje perpendicular que pasa por uno de sus extremos. En el problema de la viga giratoria, las fuerzas centrífugas pueden alcanzar un valor suficientemente alto como para que tal acoplamiento sea importante. Es bien conocido el hecho de que un modelo de una subestructura basado en la teoría lineal de la elasticidad produce soluciones erróneas en este problema [43, 67]. El uso de varias estructuras se presenta en la literatura como una forma de evitar que esto ocurra [67]. Sin embargo, no está claro si un modelo de varias subestructuras puede también producir soluciones erróneas para valores de la velocidad angular distintos del valor crítico del modelo de una subestructura. De esta forma, el principal motivo del estudio contenido en este capítulo es el hecho de que al estudiar la dinámica de una viga que gira alrededor de un eje perpendicular que pasa por uno de sus extremos pueden obtenerse soluciones inestables para modelos que usan más de una subestructura [68]. La inestabilidad de la solución está directamente relacionada con la singularidad de

la matriz de rigidez equivalente y tal singularidad ocurre cuando la velocidad angular alcanza la primera frecuencia natural de la viga con condiciones de contorno de viga en voladizo [62].

La formulación en coordenadas nodales absolutas, al contrario que otras formulaciones convencionales de elementos finitos frecuentemente usadas, tiene en cuenta el acoplamiento entre el comportamiento a flexión y a tracción-compresión debido al uso de un sistema de referencia local en cada elemento para formular las fuerzas elásticas. De esta forma, cada elemento se comporta como una subestructura distinta. A diferencia de otras formulaciones que usan la técnica de subestructuración, la formulación en coordenadas nodales absolutas permite eliminar las restricciones de conexión entre elementos, por lo que resulta especialmente apropiada para este análisis. Resulta fundamental para el análisis que se presenta en este capítulo el hecho de que, en la formulación en coordenadas nodales absolutas, tanto la matriz de masa como la función que define las fuerzas elásticas son invariantes respecto a una transformación ortogonal de coordenadas (apéndice A).

En este capítulo se estudia también el uso de la formulación de elementos finitos basada en el método de las referencias flotantes para el problema de la viga que gira alrededor de un eje perpendicular. Es bien sabido que debido al uso de la teoría lineal de la elasticidad y de un mismo sistema de referencia local para calcular las deformaciones de todos los elementos, no es posible incorporar el acoplamiento entre esfuerzos axiales y de flexión que el problema de la viga requiere. Por este motivo, cuando la viga rotativa se modela mediante la formulación de elementos finitos basada en el método de las referencias flotantes, se obtiene una velocidad crítica por encima de la cual, las soluciones se muestran inestables. Esta velocidad es independiente del número de elementos usados para discretizar la viga. En este capítulo se estudia la posibilidad de introducir en dicha formulación el acoplamiento entre esfuerzos axiales y de flexión mediante la consideración de la rotación relativa de los elementos.

6.1. El efecto de rigidización geométrica

Desde los años cincuenta se ha prestado especial atención al problema de la viga que gira alrededor de un eje perpendicular que pasa por uno de sus extremos. Uno de los primeros trabajos al respecto es el de Schilhansl [85], quien desarrolló las ecuaciones diferenciales de la vibración de una viga que gira en régimen estacionario. Durante más de veinticinco años, la mayor parte de la investigación en este campo se concentró en el estudio de vigas unidimensionales sujetas a una rotación constante en el plano. En estos modelos ni el efecto de las fuerzas de Coriolis ni el acoplamiento entre flexión y tracción-compresión fue considerado. Algunas investigaciones posteriores presentaron análisis más detallados en los que se consideraban la rigidización debida a las fuerzas centrífugas y el efecto de las fuerzas de Coriolis. Algunas de estas investigaciones presentaban una teoría más completa para considerar el movimiento de una viga unida a una base que tiene un movimiento prescrito [43]. La elongación se introducía de forma que el movimiento de flexión de un punto de la viga da lugar a un desplazamiento longitudinal. De esta manera se produce la fuerza rigidizadora necesaria para eliminar la inestabilidad observada usando las formulaciones disponibles hasta el momento. Se demostró también que la clásica expansión modal que no tiene en cuenta dicho efecto rigidizador conduce a una solución inestable.

El estudio de vigas giratorias es un tema de interés por su importancia en muchas aplicaciones ingenieriles como las palas de rotores de helicópteros. La teoría de helicópteros pronto documentó la necesidad de considerar el acoplamiento entre flexión y tracción-compresión [86]. Recientemente, Ruzicka y Hodges [83] han usado un método mixto de elementos finitos en el que la fuerza axial es introducida como variable independiente en las ecuaciones dinámicas de palas de helicópteros obteniendo buenos resultados. Simo y Vu-Quoc [84] presentaron un clarificador trabajo en el que mostraron que el uso de la teoría lineal de la elasticidad conduce a la aparición de un término que disminuye la rigidez, haciendo que la matriz de rigidez equivalente sea singular para una cierta velocidad angular independiente-

mente del módulo de Young del material. Además, Simo y Vu-Quoc [84] mostraron que, al menos, deben considerarse términos cuadráticos en la relación deformación-desplazamiento para evitar la singularidad. Boutaghou y Erdman [87, 88] presentaron una revisión comparativa entre las teorías no lineales de vigas existentes hasta el momento, concluyendo que el método de Simo y Vu-Quoc [84] proporciona los mejores resultados.

La técnica de subestructuración también ha sido usada para modelar el efecto de rigidización geométrica [67]. Dentro de cada subestructura se usaron modos de vibración y modos de corrección estáticos junto con las suposiciones de la teoría lineal de la elasticidad. Sin embargo, no se ha estudiado la relación entre el número de subestructuras y la velocidad crítica a la que dicha inestabilidad puede ocurrir. También se han considerado los efectos de rigidización en sistemas multicuerpo considerando la configuración de referencia como un estado pretensado y, por tanto, incluyendo el efecto centrífugo en la energía potencial elástica, en lugar de en la cinética [89, 90]. Otros autores han discutido la importancia de la relación no lineal deformación-desplazamiento en la formulación de referencias flotantes [91, 92, 93, 94].

En el campo de la robótica, el interés por el control en tiempo real ha motivado el estudio de alternativas simples que eliminen la inestabilidad [95], demostrando que algunos de estos métodos fallan debido a que no tienen en cuenta la rigidización geométrica debido a una prematura linealización de las ecuaciones del movimiento [43, 95].

En un trabajo reciente, Berzeri y Shabana [68] mostraron que para vigas giratorias existe un valor crítico de la velocidad angular para el que la solución mediante un modelo de dos elementos finitos basado en la teoría elástica lineal puede dar soluciones inestables. En cambio, el uso de la teoría no lineal de medios continuos conduce a una solución estable independientemente del valor de la velocidad angular [68]. El objetivo de este capítulo es explicar el aumento de la velocidad crítica que se observa cuando se aumenta el número de elementos o subestructuras.

El siguiente apartado de esta sección presenta un análisis de una viga giratoria modelada con un único elemento finito y la teoría elástica lineal. A continuación, se discuten los resultados presentados por Berzeri y Shabana [68], que revelan que el incremento en el número de elementos finitos no siempre conduce a una solución estable para vigas giratorias. Los apartados posteriores ponen de manifiesto las diferencias entre las formulaciones de elementos finitos basadas en coordenadas nodales absolutas y en referencias flotantes.

6.2. Modelo de un elemento basado en elasticidad lineal

Recientemente, Berzeri y Shabana [68] han estudiado la dinámica de una viga que gira alrededor de un eje perpendicular que pasa por uno de sus extremos, utilizando la formulación en coordenadas nodales absolutas. Estos autores obtienen en su estudio soluciones inestables no sólo cuando se usa un sólo elemento finito sino también cuando se usan dos. Sin embargo, estos autores no profundizaron en ese hallazgo en su trabajo, puesto que el estudio se preocupaba más de la estabilidad de la solución de un modelo de un elemento. Como se explicó en el capítulo 2, en la ANCF cada elemento tipo Euler-Bernoulli utiliza su propio sistema local de referencia para el cálculo de las deformaciones y posterior obtención de las fuerzas elásticas. En este sentido cada uno de estos elementos puede considerarse como una subestructura independiente. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre cuando se usa la técnica de subestructuración con el método de referencias flotantes, en la ANCF no aparecen restricciones no lineales asociadas a la unión de las subestructuras. En la ANCF, estas restricciones se evitan al compartir las coordenadas nodales de dos elementos contiguos. Por lo tanto, el hecho de que un modelo de ANCF de dos elementos, o dos subestructuras, pueda producir soluciones erróneas es interesante y es en este trabajo de Berzeri y Shabana [68] cuando por primera vez que se documenta.

En esta sección se analiza el problema de una viga que gira a velocidad cons-

tante para explicar los resultados obtenidos por Berzeri y Shabana [68]. Para ello se usará un elemento viga bidimensional tipo Euler-Bernoulli formulado usando la teoría de la elasticidad lineal. En primer lugar, las ecuaciones del movimiento del elemento finito se expresan en un sistema de referencia que gira solidario al extremo de la viga (figura 6.1). Como se muestra en el apéndice A, la expresión de la matriz de rigidez del elemento es la misma en coordenadas del sistema inercial o del sistema de referencia giratorio. Sin embargo, las ecuaciones en el sistema giratorio incluyen dos términos adicionales, uno debido a las fuerzas de Coriolis, que consta de una matriz antisimétrica, y otro debido a fuerzas centrífugas, que consta de una matriz simétrica. Debido a que el análisis presentado en esta sección considera un solo elemento, los superíndices que refieren al sólido y al elemento se omiten por simplicidad.

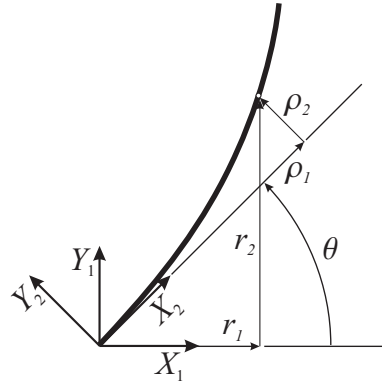


Figura 6.1: Modelo de un elemento.

6.2.1. Ecuaciones del movimiento

Supóngase la viga de la figura 6.1 modelada mediante un único elemento finito. Considerando que no se aplican fuerzas externas, las ecuaciones del movimiento del elemento finito usando la formulación en coordenadas nodales absolutas se escriben como sigue:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{e}} = \mathbf{Q}_r - \mathbf{F}_e \quad (6.1)$$

donde \mathbf{M} es la matriz de masa del elemento, \mathbf{Q}_r es el vector de fuerzas generalizadas debidas a las restricciones de movimiento impuestas sobre el extremo de la viga y \mathbf{F}_e es el vector de fuerzas elásticas generalizadas. Con el fin de escribir las ecuaciones del movimiento en el sistema de referencia giratorio, se introduce la siguiente transformación de coordenadas:

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_r \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

donde r_1 y r_2 , como se muestra en la figura 6.1, son las coordenadas en el sistema inercial, ρ_1 y ρ_2 son coordenadas en el sistema no inercial y

$$\mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

siendo θ el ángulo rotado por el sistema no inercial respecto al inercial.

La ecuación (6.2) permite escribir la relación entre los dos conjuntos de coordenadas del elemento. El primer conjunto es el vector \mathbf{e}^k del nodo k definido en el sistema inercial, mientras que el segundo conjunto es el vector \mathbf{q}^k , definido en el sistema de referencia giratorio. La transformación se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} e_1^k & e_2^k & e_3^k & e_4^k \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_r \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} q_1^k & q_2^k & q_3^k & q_4^k \end{bmatrix}^T \right) \quad (6.4)$$

donde

$$q_1^k = \rho_1^k, \quad q_2^k = \rho_2^k, \quad q_3^k = \frac{\partial \rho_1^k}{\partial x}, \quad q_4^k = \frac{\partial \rho_2^k}{\partial x} \quad (6.5)$$

son las coordenadas del nodo k ($k = 1, 2$) en el sistema de referencia no inercial. Está claro que la relación entre los dos conjuntos de coordenadas del elemento se puede escribir como sigue:

$$\mathbf{e} = \mathbf{A}\mathbf{q} \quad (6.6)$$

donde $\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_8]^T$ y $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_8]^T$. Las componentes de los vectores \mathbf{e} y \mathbf{q} de la ecuación (6.6) se enumeran siguiendo la siguiente regla: $e_{i+(k-1)} = e_1^k$ y $q_{i+(k-1)} = q_1^k$ con $i = 1, 2, 3, 4$ y $k = 1, 2$. Así, la matriz de la transformación se escribe como sigue:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_r \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Derivando la ecuación (6.6) dos veces con respecto al tiempo, sustituyendo en las ecuaciones del movimiento del elemento y, después, pre-multiplicando por \mathbf{A}^T , se obtiene:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} - \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{q} = \hat{\mathbf{Q}}_r - \mathbf{F}_e \quad (6.8)$$

donde ω es la velocidad angular de la viga, $\mathbf{C} = 2\mathbf{A}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{A}}$ es una matriz anti-simétrica que introduce el efecto de las fuerzas de inercia de Coriolis, $\omega^2 \mathbf{M}$ es una matriz simétrica que introduce el efecto de las fuerzas de inercia centrífugas, y $\hat{\mathbf{Q}}_r = [P_x \ P_y \ 0 \ M \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ es el nuevo vector de fuerzas de restricción generalizado. Como se muestra en el apéndice A, la expresión de las fuerzas elásticas es la misma cuando las ecuaciones se escriben en términos de las coordenadas absolutas, \mathbf{e} , o en términos de las coordenadas en el sistema no inercial, \mathbf{q} . Esto es:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{F}_e(\mathbf{e}) = \mathbf{A}^T \mathbf{F}_e(\mathbf{A}\mathbf{q}) = \mathbf{F}_e(\mathbf{q}) \quad (6.9)$$

Examinando la ecuación (6.8) se observa que la matriz de masa del elemento obtenido usando la formulación en coordenadas nodales absolutas es invariante con respecto a una transformación ortogonal. Las fuerzas de restricción son el resultado

de las siguientes restricciones cinemáticas, escritas en el sistema de coordenadas no inercial:

$$q_1 = \rho_1|_{x=0} = 0, \quad q_2 = \rho_2|_{x=0} = 0, \quad q_4 = \left. \frac{\partial \rho_2}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (6.10)$$

Usando estas ecuaciones de restricción, el vector de coordenadas \mathbf{q} se puede escribir en términos de las coordenadas independientes \mathbf{q}_i como sigue:

$$\mathbf{q} = \mathbf{B}\mathbf{q}_i \quad (6.11)$$

donde

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Sustituyendo la ecuación (6.11) en la ecuación (6.8) y premultiplicando por \mathbf{B}^T las ecuaciones del movimiento se escriben de la siguiente forma:

$$\bar{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}}_i + \bar{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{q}}_i - \omega^2 \bar{\mathbf{M}} \mathbf{q}_i = -\mathbf{B}^T \mathbf{F}_e(\mathbf{B}\mathbf{q}_i) \quad (6.13)$$

donde $\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{B}^T \mathbf{M} \mathbf{B}$, $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}$ y $\mathbf{B}^T \hat{\mathbf{Q}}_r = \mathbf{0}$. La desaparición de las fuerzas de restricción en la ecuación era de esperar puesto que ésta queda expresada en términos de las coordenadas independientes. Sin embargo, el vector de fuerzas elásticas es una función altamente no lineal de las coordenadas nodales [19] y no es fácil extraer conclusiones directamente de esta ecuación. Aprovechando que los desplazamientos por deformación dentro del elemento son pequeños en este problema, una vez expresados en el sistema no inercial, la expresión de las fuerzas elásticas puede linealizarse. Detalles acerca de esta linealización pueden encontrarse en el apéndice A. Las fuerzas elásticas linealizadas se obtienen a través de una expansión

en serie de Taylor alrededor de una posición de referencia definida en el sistema inercial, como sigue:

$$\mathbf{F}_e(\mathbf{q}) \simeq \mathbf{F}_e(\mathbf{q}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) = \mathbf{K}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \quad (6.14)$$

donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez definida en el apéndice A, y \mathbf{q}_0 es el vector de coordenadas nodales en la configuración de referencia, que tiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{q}_0 = \left[0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad L \quad 0 \quad 1 \quad 0 \right]^T \quad (6.15)$$

donde L es la longitud del elemento en la configuración indeformada. Es importante señalar que la suposición de pequeñas deformaciones dentro del elemento permanece válida tras la linealización ya que \mathbf{q}_0 contiene la configuración de referencia del elemento. Obviamente, $\mathbf{F}_e(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}$, es decir, las fuerzas elásticas son cero en la configuración indeformada. Las ecuaciones del movimiento para la viga giratoria se escriben en el sistema de referencia no inercial como sigue:

$$\bar{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}}_i + \bar{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{q}}_i + (\bar{\mathbf{K}} - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}) \mathbf{q}_i = \bar{\mathbf{K}} \mathbf{q}_{0i} \quad (6.16)$$

donde $\mathbf{q}_{0i} = \left[1 \quad L \quad 0 \quad 1 \quad 0 \right]^T$ y la matriz de rigidez constante tiene la siguiente expresión:

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{2EAL}{15} & -\frac{EA}{10} & 0 & -\frac{EAL}{30} & 0 \\ -\frac{EA}{10} & \frac{6EA}{5L} & 0 & -\frac{EA}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{EAL}{30} & -\frac{EA}{10} & 0 & \frac{2EAL}{15} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

donde E es el modulo de Young, I es el momento de inercia de la sección y A es el área de la sección. La matriz de rigidez equivalente $\bar{\mathbf{K}}_e$ se define como

$$\bar{\mathbf{K}}_e = (\bar{\mathbf{K}} - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}) \quad (6.18)$$

y el producto $\bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{q}$ se refiere en adelante como fuerza elástica equivalente.

6.2.2. Análisis modal

Está claro que para ciertos valores de la velocidad angular, la matriz de rigidez equivalente se hace singular. Esta singularidad afecta a las fuerzas elásticas necesarias para mantener la rigidez a flexión de la viga. Para aclarar el desarrollo posterior, se resuelve el siguiente problema de autovalores:

$$\left(\bar{\mathbf{M}}^{-1}\bar{\mathbf{K}} - \lambda\mathbf{I}\right)\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (6.19)$$

Nótese que los autovalores y autovectores de la ecuación (6.19) definen los modos de vibración de la viga con condiciones de contorno empujada-libre. Los autovectores, \mathbf{u} , y autovalores, λ , de la matriz $\bar{\mathbf{M}}^{-1}\bar{\mathbf{K}}$ de la ecuación (6.19) se escriben a continuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \left[0 \quad 0 \quad 0.725952L \quad 0 \quad 1 \right]^T & \lambda_1 &= \frac{12.4802EI}{mL^3} \\ \mathbf{u}_2 &= \left[0 \quad 0 \quad 0.13119L \quad 0 \quad 1 \right]^T & \lambda_2 &= \frac{1211.52EI}{mL^3} \\ \mathbf{u}_3 &= \left[0.417012 \quad 0.105914L \quad 0 \quad 1 \quad 0 \right]^T & \lambda_3 &= \frac{2.46774EA}{mL} \\ \mathbf{u}_4 &= \left[-8.0283 \quad 1.03372L \quad 0 \quad 1 \quad 0 \right]^T & \lambda_4 &= \frac{23.3913EA}{mL} \\ \mathbf{u}_5 &= \left[-42.6387 \quad -26.6396L \quad 0 \quad 1 \quad 0 \right]^T & \lambda_5 &= \frac{109.141EA}{mL} \end{aligned} \quad (6.20)$$

donde m es la masa del elemento. Es importante notar que los autovectores corresponden a dos modos de flexión y tres axiales y, lo que es más importante, que los modos axiales y de flexión están completamente desacoplados. Esto es, cada componente distinta de cero de un modo de flexión se corresponde con una componente igual a cero en un modo axial y cada componente distinta de cero de un modo axial se corresponde con una igual a cero en el modo de flexión. Sólo los autovectores \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 tienen la tercera componente distinta de cero, la cual corresponde a las fuerzas transversales del elemento. Debido a que los autovectores son linealmente independientes, todo vector de coordenadas \mathbf{q}_i puede ser escrito como una

combinación lineal de autovectores:

$$\mathbf{q}_i = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 + \alpha_4 \mathbf{u}_4 + \alpha_5 \mathbf{u}_5 \quad (6.21)$$

Si \mathbf{q}_i se multiplica por la matriz de rigidez equivalente, el término de fuerzas puede escribirse de la siguiente manera:

$$(\bar{\mathbf{K}} - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}) \mathbf{q}_i = \sum_{n=1}^5 \bar{\mathbf{F}}_n \quad (6.22)$$

donde

$$\bar{\mathbf{F}}_n = \alpha_n \left(1 - \frac{\omega^2}{\lambda_n} \right) \mathbf{f}_n \quad (6.23)$$

En la ecuación anterior \mathbf{f}_n es el producto de la matriz de rigidez $\bar{\mathbf{K}}$ por el autovector \mathbf{u}_n . Examinando la estructura de la matriz de rigidez en la ecuación (6.17) se puede ver que los vectores \mathbf{f}_1 y \mathbf{f}_2 son los únicos que contribuyen con fuerzas transversales mientras que \mathbf{f}_3 , \mathbf{f}_4 y \mathbf{f}_5 sólo contribuyen con fuerzas axiales. Esto es una consecuencia del uso de la teoría lineal de la elasticidad para definir las fuerzas elásticas del elemento.

Parámetro, Símbolo	Valor
Longitud, L	8.0 m
Densidad, ρ	2767 Kg/m ³
Área de la sección, A	7.299·10 ⁻⁵ m ²
Momento de inercia, I	8.214·10 ⁻⁹ m ⁴
Masa, m	1.615 Kg
Módulo de Young, E	6.895·10 ¹⁰ Pa

Tabla 6.1: Propiedades de la viga.

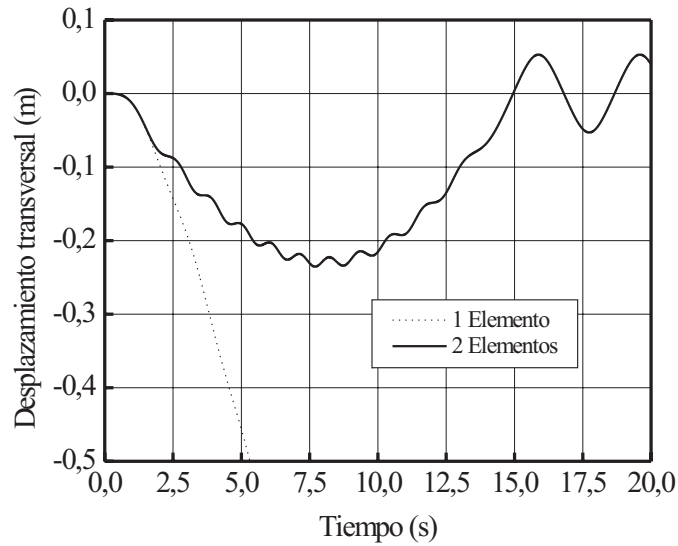


Figura 6.2: Desplazamiento transversal ($\omega=4$ rad/s).

Cuando el valor del cuadrado de la velocidad angular de rotación de la viga alcanza λ_1 , no hay contribución del primer modo a las fuerzas elásticas, esto es, $\bar{\mathbf{F}}_1 = \mathbf{0}$. Es importante resaltar que el primer modo contribuye significativamente a las fuerzas transversales. Más aún, si la velocidad angular aumenta, el término de fuerza correspondiente al primer modo, $\bar{\mathbf{F}}_1$, cambia de signo produciendo una reducción de la rigidez de la viga. Por este motivo, se considera que el término $\omega^2 \bar{\mathbf{M}}$ de la matriz de rigidez equivalente disminuye la resistencia del elemento. Sin embargo, esta reducción de la rigidez no se observa cuando se incluye el acoplamiento entre los modos axiales y de flexión [84].

Berzeri y Shabana [68] mostraron que para un modelo de coordenadas nodales absolutas con las propiedades de la tabla 6.1 se obtiene una solución inestable si la velocidad angular se aumenta hasta 10 rad/s. Sin embargo, para los valores de la tabla 6.1 y teniendo en cuenta los resultados de esta sección, la velocidad

angular crítica que se obtiene es de 2.92 rad/s. Esta velocidad crítica es también inferior, aunque más próxima, a 4 rad/s, que es la velocidad a la que se hace girar la viga por Wu *et al.* [67] para obtener una solución inestable. Los resultados que se representan en la figura 6.2 muestran que el modelo de coordenadas nodales absolutas descrito en esta sección produce una solución inestable cuando la velocidad angular se incrementa hasta 4 rad/s. Sin embargo, aumentando el número de elementos a dos, la solución obtenida es estable. Dicha simulación se ha llevado a cabo imponiendo que el extremo de la viga gira a una velocidad que depende del tiempo según una ley similar a la de la ecuación (5.1) en la que T y ω toman unos valores de 15 s y 4 rad/s, respectivamente. Para ello se han utilizado las ecuaciones (6.1), que están expresadas en el sistema inercial [47].

6.3. Modelado mediante la formulación de referencias flotantes frente a la formulación en coordenadas nodales absolutas

Como es sabido, cuando se usa la teoría de la elasticidad lineal en la formulación de referencias flotantes, se obtiene una solución inestable en el problema de la viga giratoria si el efecto de la rigidización geométrica no se considera. La velocidad crítica, en este caso, es siempre la primera frecuencia natural de flexión de la viga con condiciones de contorno empotrada-libre, independientemente del número de modos que se usen. Por otro lado, cuando se usa la formulación en coordenadas nodales absolutas con la teoría elástica lineal sin incluir términos que tengan en cuenta la rigidización geométrica, siempre existe una velocidad crítica en el problema de la viga giratoria, pero su valor depende del número de elementos empleados para modelar la viga. En las secciones siguientes se discuten las diferencias básicas entre un modelo de elementos finitos que usa la formulación en referencias flotantes y otro que usa coordenadas nodales absolutas para el problema de la viga giratoria. En ambas formulaciones, por simplicidad, la viga giratoria se supone modelada por dos elementos finitos y las funciones de forma en

ambos casos están formadas por polinomios de tercer grado para establecer una comparación justa.

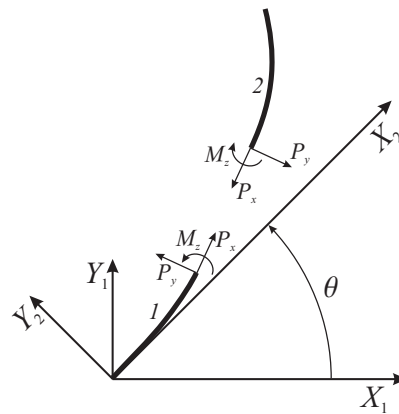


Figura 6.3: Modelo de dos elementos de la viga.

6.4. Formulación en coordenadas nodales absolutas

Para cada elemento finito se introduce un sistema de referencia local para formular las fuerzas elásticas, y como consecuencia, se obtiene un modelo equivalente a un modelo obtenido usando subestructuración. Dicho sistema de referencia separa el movimiento total del elemento en un movimiento de la referencia más un movimiento debido a la deformación. De esta manera se pueden escoger distintas condiciones de referencias como, por ejemplo, condiciones de viga empotrada-libre o de viga simplemente apoyada [25]. En esta sección se usa la referencia con condiciones de empotrada-libre. Las ecuaciones del movimiento de la viga se expresan en el sistema de referencia no inercial $X_2 Y_2$ (figura 6.3). Como en la sección anterior, la linealización de las fuerzas elásticas se ha usado para obtener ecuaciones más manejables. En las primeras subsecciones se construyen las ecuaciones del movimiento de cada elemento y en una subsección posterior se aplican las condiciones de conectividad para obtener las ecuaciones del movimiento de la viga.

6.4.1. Primer elemento

El primer elemento de la figura 6.3 se trata de la misma forma que el modelo de un elemento de la sección 6.2. Debido a que el sistema de referencia de este elemento coincide con el sistema de referencia no inercial, la linealización de las fuerzas elásticas puede hacerse en las ecuaciones expresadas en el sistema de referencia no inercial. Estas ecuaciones se obtuvieron en la sección 6.2 y se describen ahora para el primer elemento como sigue:

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}}_1 + \bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}_1 - \omega^2\bar{\mathbf{M}}\mathbf{q}_1 = -\mathbf{B}^T\mathbf{F}_e(\mathbf{B}\mathbf{q}_1) \quad (6.24)$$

donde \mathbf{q}_1 es el vector de coordenadas nodales del primer elemento. Este vector se escribe como sigue:

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} & q_{15} \end{bmatrix}^T \quad (6.25)$$

El vector \mathbf{q}_1 contiene sólo cinco coordenadas independientes ya que las condiciones de contorno de empotramiento han sido eliminadas a través de la matriz de conectividad \mathbf{B} . Las fuerzas elásticas pueden linealizarse, obteniendo una matriz de rigidez constante, ya que las deformaciones dentro del elemento se suponen pequeñas. Así, las ecuaciones del movimiento del primer elemento se escriben de la siguiente forma:

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}}_1 + \bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}_1 + (\bar{\mathbf{K}} - \omega^2\bar{\mathbf{M}})\mathbf{q}_1 = \bar{\mathbf{K}}\mathbf{q}_{01} \quad (6.26)$$

donde las matrices $\bar{\mathbf{M}}$, $\bar{\mathbf{C}}$, y $\bar{\mathbf{K}}$ tienen la misma estructura que las de la ecuación (6.16) del modelo de un elemento. El vector \mathbf{q}_{01} contiene las coordenadas nodales de la configuración de referencia del primer elemento, esto es:

$$\mathbf{q}_{01} = \begin{bmatrix} 1 & L/2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (6.27)$$

donde L es la longitud total de la viga considerada.

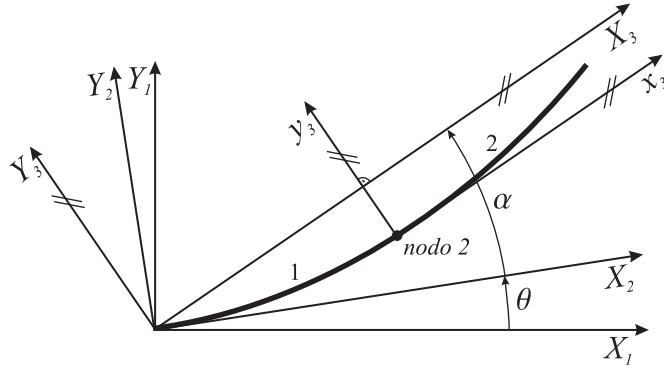


Figura 6.4: Sistemas de referencia usados.

6.4.2. Segundo elemento

Para linealizar consistentemente las fuerzas elásticas del segundo elemento de la figura 6.3, se introduce otro sistema de referencia giratorio. Las ecuaciones del movimiento del segundo elemento en el sistema giratorio $X_2 Y_2$ se obtienen usando la matriz de transformación de la ecuación (6.7) de la sección 6.2 y tienen la siguiente expresión:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_2 - \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{q}_2 = -\mathbf{F}_e(\mathbf{q}_2) \quad (6.28)$$

donde el vector de coordenadas nodales del segundo elemento en el sistema de referencia giratorio se escribe como sigue:

$$\mathbf{q}_2 = \left[q_{21} \quad q_{22} \quad q_{23} \quad q_{24} \quad q_{25} \quad q_{26} \quad q_{27} \quad q_{28} \right]^T \quad (6.29)$$

El sistema de referencia local del segundo elemento mostrado en la figura 6.4, sistema $x_3 y_3$, es tangente a la línea media de la viga en el nodo común a ambos elementos. Por este motivo, la posición del origen y la orientación del sistema de referencia local están únicamente definidas por las coordenadas del nodo 2 como sigue:

$$\rho_1 = q_{21}, \quad \rho_2 = q_{22}, \quad \cos \alpha = \frac{q_{23}}{\sqrt{q_{23}^2 + q_{24}^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{q_{24}}{\sqrt{q_{23}^2 + q_{24}^2}} \quad (6.30)$$

donde ρ_1 y ρ_2 son las componentes del vector de posición del punto inicial del segundo elemento en el sistema de referencia $X_2 Y_2$. El sistema de referencia $X_3 Y_3$ es también un sistema de referencia giratorio pero es paralelo al sistema local del segundo elemento, sistema $x_3 y_3$. En esta sección, el sistema $X_3 Y_3$ se usa por conveniencia como sistema de referencia intermedio para la linealización de las fuerzas elásticas. Las ecuaciones del movimiento del segundo elemento pueden ser escritas en términos de un nuevo conjunto de coordenadas definido en el sistema de referencia intermedio $X_3 Y_3$. Para ello, se introduce la siguiente transformación de coordenadas:

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

donde

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

En la ecuación (6.31), π_1 y π_2 son las coordenadas definidas en el sistema de referencia intermedio $X_3 Y_3$. Así, las coordenadas nodales en el sistema de referencia intermedio $X_3 Y_3$, denotadas por \mathbf{p} , se definen para el segundo elemento como

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} & p_{27} & p_{28} \end{bmatrix}^T \quad (6.33)$$

donde

$$\begin{aligned} p_{21} &= \pi_1|_{x=0} & p_{22} &= \pi_2|_{x=0} & p_{23} &= \frac{\partial \pi_1}{\partial x}|_{x=0} & p_{24} &= \frac{\partial \pi_2}{\partial x}|_{x=0} \\ p_{25} &= \pi_1|_{x=l_e} & p_{26} &= \pi_2|_{x=l_e} & p_{27} &= \frac{\partial \pi_1}{\partial x}|_{x=l_e} & p_{28} &= \frac{\partial \pi_2}{\partial x}|_{x=l_e} \end{aligned} \quad (6.34)$$

y l_e es la longitud del elemento. Usando la ecuación (6.31), la relación entre las coordenadas nodales \mathbf{q}_2 y el vector de coordenadas nodales \mathbf{p}_2 se puede escribir:

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{p}_2 \quad (6.35)$$

donde

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\alpha & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_\alpha & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_\alpha & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_\alpha \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

Nótese que esta matriz de transformación está expresada en función del ángulo α , que es función de las coordenadas nodales q_{23} y q_{24} , como se muestra en la ecuación (6.30). Debido a que la función que define las fuerzas elásticas permanece invariante ante una transformación ortogonal, la ecuación (6.35) se puede usar para escribir las ecuaciones del movimiento en el sistema de referencia intermedio como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\alpha^T \mathbf{M} \left(\mathbf{R}_\alpha \ddot{\mathbf{p}}_2 + 2\dot{\mathbf{R}}_\alpha \dot{\mathbf{p}}_2 + \ddot{\mathbf{R}}_\alpha \mathbf{p}_2 \right) + \mathbf{R}_\alpha^T \mathbf{C} \left(\mathbf{R}_\alpha \dot{\mathbf{p}}_2 + \dot{\mathbf{R}}_\alpha \mathbf{p}_2 \right) \\ - \omega^2 \mathbf{R}_\alpha^T \mathbf{M} \mathbf{R}_\alpha \mathbf{p}_2 = -\mathbf{F}_e(\mathbf{p}_2) \end{aligned} \quad (6.37)$$

En este nuevo sistema de referencia tiene sentido la linealización de las fuerzas elásticas mediante la ecuación (6.14). Dicha linealización produce la siguiente expresión:

$$\mathbf{F}_e(\mathbf{p}_2) \simeq \mathbf{K}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_{02}) \quad (6.38)$$

donde la matriz de rigidez \mathbf{K} se ha introducido anteriormente y \mathbf{p}_{02} es el vector de coordenadas nodales que se define a continuación:

$$\mathbf{p}_{02} = \mathbf{R}_\alpha^T \mathbf{q}_{02} \quad (6.39)$$

En esta ecuación, el vector \mathbf{q}_{02} se define como

$$\mathbf{q}_{02} = \begin{bmatrix} q_{21} & q_{22} & \cos \alpha & \sin \alpha & q_{21} + l_e \cos \alpha & q_{22} + l_e \sin \alpha & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix}^T \quad (6.40)$$

Es importante resaltar que el uso del sistema de referencia intermedio $X_3 Y_3$ permite la linealización de la expresión de las fuerzas elásticas por ser este sistema paralelo al sistema local del elemento. Tal linealización puede hacerse sólo si las deformaciones se suponen pequeñas en el sistema $X_3 Y_3$. En el apéndice A se demuestra que se obtiene la misma matriz constante de rigidez cuando se linealiza usando una configuración de referencia que es paralela al sistema de referencia local del elemento. Nótese que el sistema $X_2 Y_2$ no se ha usado ya que este sistema no comparte el movimiento como sólido rígido del sistema de referencia local del elemento. Usando la transformación de la ecuación (6.35), las ecuaciones de movimiento del segundo elemento en el sistema de referencia $X_2 Y_2$ después de la linealización se vuelven ahora a escribir como sigue:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_2 + (\mathbf{K}_\alpha - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q}_2 = \mathbf{K}_\alpha \mathbf{q}_{02} \quad (6.41)$$

donde

$$\mathbf{K}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha^T \mathbf{K} \mathbf{R}_\alpha \quad (6.42)$$

y

$$\mathbf{K}_\alpha \mathbf{q}_{02} = EA \begin{bmatrix} -\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (6.43)$$

6.4.3. Conectividad de los elementos

Una vez que las ecuaciones de cada elemento han sido expresadas en términos de las coordenadas nodales en el sistema de referencia no inercial $X_2 Y_2$ y las fuerzas elásticas han sido consistentemente linealizadas, se aplican las condiciones

de conectividad. Así, las ecuaciones del movimiento de los dos elementos pueden escribirse como sigue:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}}_1 + \bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}_1 + (\bar{\mathbf{K}} - \omega^2\bar{\mathbf{M}})\mathbf{q}_1 &= \bar{\mathbf{K}}\mathbf{q}_{01} + \bar{\mathbf{Q}}_{r1} \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_2 + (\mathbf{K}_\alpha - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{q}_2 &= \mathbf{K}_\alpha\mathbf{q}_{02} + \mathbf{Q}_{r2}\end{aligned}\quad (6.44)$$

donde

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{Q}}_{r1} &= \begin{bmatrix} 0 & P_x & P_y & Q_x & Q_y \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{Q}_{r2} &= \begin{bmatrix} -P_x & -P_y & -Q_x & -Q_y & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T\end{aligned}\quad (6.45)$$

siendo P_x , P_y , Q_x y Q_y fuerzas de restricción. Dichas fuerzas de restricción se deben a las siguientes restricciones entre las coordenadas de cada elemento:

$$q_{12} = q_{21}, \quad q_{13} = q_{22}, \quad q_{14} = q_{23}, \quad q_{15} = q_{24}\quad (6.46)$$

Las fuerzas generalizadas de restricción Q_x y Q_y asociadas a las pendientes pueden ser obtenidas a partir del trabajo virtual realizado por un momento, M_z (figura 6.3), con una variación de ángulo $\delta\alpha$ que puede expresarse en términos de las coordenadas nodales como sigue [19]:

$$\delta\alpha = \frac{e_3\delta e_4 - e_4\delta e_3}{e_3^2 + e_4^2}\quad (6.47)$$

Así,

$$Q_x = \frac{-M_z e_4}{e_3^2 + e_4^2}, \quad Q_y = \frac{M_z e_3}{e_3^2 + e_4^2}\quad (6.48)$$

Las coordenadas de ambos elementos, \mathbf{q}_1 y \mathbf{q}_2 , pueden agruparse en un único vector de coordenadas para la viga, \mathbf{q} . De esta forma, las condiciones de conectividad entre los elementos (ecuaciones (6.46)) pueden expresarse de la siguiente forma:

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{B}_1 \mathbf{q}, \quad \mathbf{q}_2 = \mathbf{B}_2 \mathbf{q} \quad (6.49)$$

siendo \mathbf{B}_1 y \mathbf{B}_2 matrices booleanas de conectividad. De acuerdo con la ecuación (6.48), es fácil ver que $\mathbf{B}_1^T \bar{\mathbf{Q}}_{r1} + \mathbf{B}_2^T \mathbf{Q}_{r2} = \mathbf{0}$. De esta forma, las fuerzas de restricción pueden eliminarse y el sistema de ecuaciones diferenciales de movimiento pueden escribirse como sigue:

$$\mathbf{M}_S \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_S \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_S - \omega^2 \mathbf{M}_S) \mathbf{q} = \mathbf{F}_S \quad (6.50)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_S &= \mathbf{B}_1^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2^T \mathbf{M} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_S &= \mathbf{B}_1^T \bar{\mathbf{C}} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2^T \mathbf{C} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{K}_S &= \mathbf{B}_1^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2^T \mathbf{K}_\alpha \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{F}_S &= \mathbf{B}_1^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{q}_{01} + \mathbf{B}_2^T \mathbf{K}_\alpha \mathbf{q}_{02} \end{aligned} \quad (6.51)$$

Merece la pena resaltar que las ecuaciones del movimiento del modelo de dos elementos han podido transformarse en ecuaciones diferenciales ordinarias, después de eliminar todas las restricciones. En el caso de que las subestructuras usaran coordenadas modales, la eliminación de las ecuaciones de restricción debidas a la conexión de las dos subestructuras no habría sido tan sencilla. He aquí una ventaja del modelo basado en la formulación en coordenadas nodales absolutas. Siguiendo el desarrollo presentado en la sección 6.2, se definirá una matriz de rigidez equivalente para el sistema de la ecuación (6.51). La nueva matriz de rigidez equivalente se escribe como sigue:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_S - \omega^2 \mathbf{M}_S \quad (6.52)$$

6.4.4. Análisis modal

Un análisis equivalente al que se presentó en la sección 6.2 para el modelo de un elemento puede ahora desarrollarse. La matriz de rigidez \mathbf{K}_S del sistema es función del ángulo α entre los ejes X_2 y X_3 y, como consecuencia, los valores de velocidad crítica que se obtienen de la ecuación (6.52) dependen igualmente del valor de este ángulo. A continuación se presenta la ecuación para el análisis de los autovalores del sistema:

$$(\mathbf{M}_S^{-1}\mathbf{K}_S - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (6.53)$$

El valor de la raíz cuadrada del autovalor más pequeño de la matriz $\mathbf{M}_S^{-1}\mathbf{K}_S$ corresponde a la velocidad crítica para este modelo de dos elementos. Considerando los datos de la tabla 6.1, la velocidad crítica de la viga bajo estudio puede ser representada como función del ángulo α , como se muestra en la figura 6.5.

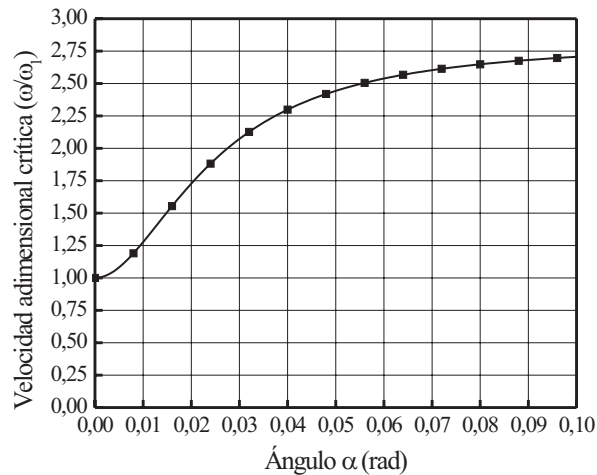


Figura 6.5: Velocidad crítica adimensional.

En esta figura se representa la velocidad crítica adimensional ω/ω_1 , donde ω_1 es

la frecuencia natural de la viga con condiciones de contorno de empotrada-libre. Se puede observar en la figura que cuando el ángulo α es cero, lo cual ocurre cuando la viga está recta (no hay deformación de flexión y, lo que es más importante, no hay efectos geométricos no lineales debidos a la rotación relativa entre ambos elementos) el valor de la frecuencia natural obtenido de la ecuación (6.53) coincide aproximadamente con el que se obtiene para el modelo de un elemento. Esto es de esperar ya que, en esta configuración, la frecuencia natural debería aproximar la frecuencia fundamental de la viga con condiciones de contorno de empotrada-libre, puesto que la ecuación (6.53) resulta equivalente a la ecuación (6.19). A medida que el ángulo α aumenta, lo cual implica que los sistemas de referencia locales de sendos elementos tienen diferente orientación y la viga flexa, el valor de la velocidad crítica aumenta.

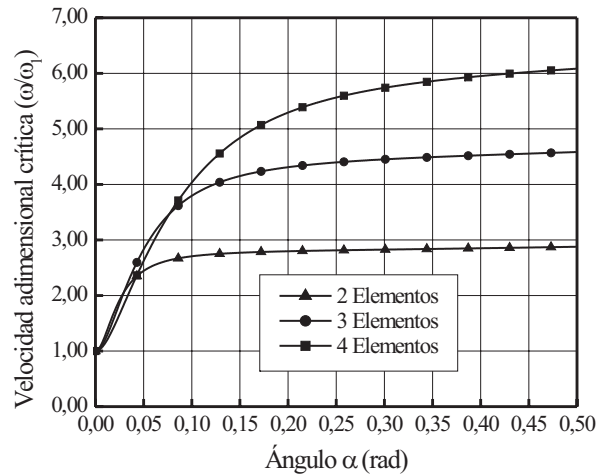


Figura 6.6: Velocidad crítica adimensional de varios modelos.

Estos resultados demuestran que cuando la viga experimenta flexión la frecuencia natural aumenta y eso explica el aumento del valor de la velocidad crítica cuando aumenta el número de elementos debido al efecto de la no linealidad geométrica

descrita mediante el ángulo α . La curva de la figura 6.5, tiende a un valor constante a medida que el ángulo α aumenta y, como consecuencia, existe también una velocidad crítica, para el modelo de dos elementos, independientemente de la cantidad de deformación.

La figura 6.6 muestra la velocidad crítica adimensional como función del ángulo α para modelos de dos, tres y cuatro elementos. El ángulo α se define como el ángulo entre la tangente en el punto medio de la viga y el eje X_2 . Como puede observarse en la figura 6.6, los tres modelos considerados muestran el mismo valor para la velocidad crítica cuando la viga no experimenta flexión ($\alpha = 0$).

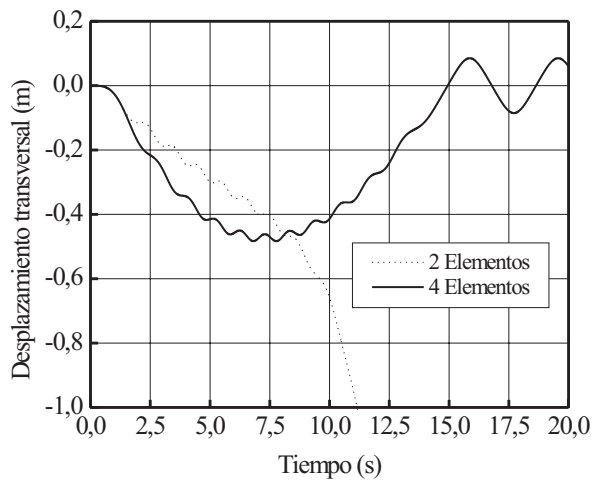


Figura 6.7: Desplazamiento transversal ($\omega=8$ rad/s).

Los resultados de la figura 6.6 muestran que aumentando el número de elementos del modelo, se obtiene un aumento en la frecuencia natural y, por tanto, en la velocidad crítica. No obstante, sigue existiendo una velocidad crítica. De hecho, puede observarse en la figura 6.2 que el modelo de dos elementos se comporta de forma estable para una velocidad angular de 4 rad/s ($\omega/\omega_1 = 1.37$). Sin embargo,

si la velocidad angular se aumenta hasta un valor de 8 rad/s ($\omega/\omega_1 = 2.74$), la solución obtenida con este modelo no es estable, como puede verse en la figura 6.7. De acuerdo con la figura 6.5, el modelo de dos elementos tiene una velocidad crítica inferior a $\omega/\omega_1 = 2.74$, por lo que el comportamiento inestable era esperado. La figura 6.7 también muestra que aumentando el número de elementos a cuatro, se obtiene una solución estable, lo cual concuerda con los resultados presentados en la figura 6.6.

Los resultados presentados en esta sección demuestran que el uso de un modelo de varios elementos basado en coordenadas nodales absolutas con teoría elástica lineal resulta en un acoplamiento entre desplazamientos que conduce a un aumento de la velocidad crítica. Este acoplamiento es capturado por la formulación en coordenadas nodales absolutas ya que la orientación de cada elemento entra en la formulación de las ecuaciones dinámicas. No ocurre lo mismo cuando se usan modos lineales en la formulación de referencias flotantes, a menos que se usen varias subestructuras. Nótese que el aumento de la velocidad angular crítica depende del número de elementos finitos que se hayan usado. A medida que el número de elementos aumenta se obtiene una representación más exacta de los efectos geométricos no lineales.

6.5. Modelado con la formulación en referencias flotantes

En el método de elementos finitos basado en la formulación en referencia flotantes, el movimiento absoluto de los puntos del sólido se suele describir como la superposición del movimiento del sistema de referencia y el movimiento de los puntos con respecto a la referencia. Usando este método para modelar la viga giratoria, las ecuaciones del movimiento de la viga giratoria pueden escribirse de la siguiente manera [19]:

$$\mathbf{m}_{ff}\ddot{\mathbf{q}}_f + \mathbf{K}_{ff}\mathbf{q}_f = \dot{\theta}^2 (\mathbf{m}_{ff}\mathbf{q}_f + \bar{\mathbf{I}}_0) + 2\dot{\theta}\tilde{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{q}}_f - \mathbf{m}_{f\theta}\ddot{\theta} \quad (6.54)$$

donde \mathbf{m}_{ff} y $-2\dot{\theta}\tilde{\mathbf{S}}$ son iguales a \mathbf{M}_S y \mathbf{C}_S de la ecuación (6.51), respectivamente. Sin embargo, la matriz de rigidez de la ecuación (6.54) es constante en todo momento y, por tanto, distinta de \mathbf{K}_S de la ecuación (6.51). Debido a que el movimiento del sistema de referencia es conocido en este modelo, sólo han de ser integrados los desplazamientos nodales de la ecuación (6.54). Es importante señalar que \mathbf{q}_f se define como un vector de desplazamientos nodales con respecto a la configuración de referencia o indeformada y, por esta razón, aparecen los términos $\mathbf{m}_{f\theta}\ddot{\theta}$ y $\dot{\theta}^2\bar{\mathbf{I}}_0$ en la ecuación (6.54) y no en la ecuación (6.51). La matriz de rigidez es constante como resultado del uso de la teoría elástica lineal y de un único sistema de referencia para medir la deformación de los puntos de la viga. Las fuerzas elásticas se derivan de la energía elástica, que puede escribirse:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EI \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 + EA \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (6.55)$$

donde E es el modulo de Young del material, I es el momento inercia de la sección, A es el área de la sección, L es la longitud de la viga, u_1 es el desplazamiento axial, u_2 es el desplazamiento transversal y x es la coordenada longitudinal de la viga en la configuración indeformada. Asumiendo que la viga es recta en la configuración indeformada, la integral anterior puede calcularse como la suma de la integral sobre cada elemento:

$$U_e = \sum_{j=1}^{n_e} \left[\frac{1}{2} \int_0^{l_e} \left[E^j I^j \left(\frac{\partial^2 u_2^j}{\partial x^{j2}} \right)^2 + E^j A^j \left(\frac{\partial u_1^j}{\partial x^j} \right)^2 \right] dx^j \right] \quad (6.56)$$

donde n_e es el numero total de elementos y el superíndice j se refiere al número de elementos. En la ecuación (6.56), se ha supuesto que el sistema de referencia local usado para describir las deformaciones de cada elemento es paralelo al sistema flotante y el cambio de orientación relativa de estos sistemas de referencia locales debidos a la deformación no se tiene en cuenta de forma alguna. Por esta razón, los desplazamientos elásticos de cada punto de un elemento finito se miden en el sistema de referencia flotante y las deformaciones elásticas dentro de cada elemento

se obtienen derivando los desplazamientos u_1^j y u_2^j como sigue:

$$\varepsilon_a^j = \frac{\partial u_1^j}{\partial x^j}, \quad \varepsilon_b^j = -y^j \frac{\partial^2 u_2^j}{\partial x^{j^2}} \quad (6.57)$$

donde ε_a^j es la deformación elástica debida a los esfuerzos axiales, ε_b^j es la deformación elástica debida a flexión e y^j es la coordenada de un punto de la sección recta respecto de la línea central de la viga. Como consecuencia, todos los elementos de la viga tienen la misma matriz de rigidez. Así, suponiendo que se usan sólo dos elementos, la matriz de rigidez de la viga se calcula como sigue:

$$\mathbf{K}_{ff} = \mathbf{B}_2^T \left(\mathbf{B}_1^{1T} \mathbf{K} \mathbf{B}_1^1 + \mathbf{B}_1^{2T} \mathbf{K} \mathbf{B}_1^2 \right) \mathbf{B}_2 \quad (6.58)$$

donde \mathbf{B}_1^1 y \mathbf{B}_1^2 son matrices booleanas de conectividad y \mathbf{B}_2 es una matriz que introduce las condiciones de referencia [19]. La matriz \mathbf{K}_{ff} de rigidez es igual a \mathbf{K}_S cuando el ángulo α es igual a cero pero difiere a medida que el ángulo α varía. Si se realiza un análisis de autovalores en la ecuación (6.54) similar a los anteriores, la velocidad crítica que se obtiene resulta ser constante e igual a la frecuencia natural de flexión de la viga con condiciones de borde empotrada-libre. El modelo de elementos finitos basado en la formulación de referencias flotantes no captura, por tanto, el acoplamiento entre los desplazamientos axiales y de flexión cuando se usa la teoría lineal de la elasticidad y no se toman medidas especiales para introducir este acoplamiento. En otras palabras, el método de elementos finitos basado en la formulación de referencias flotantes siempre exhibe inestabilidad cuando la velocidad angular de giro alcanza la frecuencia natural de la viga con condiciones de contorno de empotrada-libre independientemente del número de elementos usados en el modelo.

6.6. Formulación en referencias flotantes modificada

Observando las matrices de rigidez obtenidas mediante las dos formulaciones presentadas anteriormente, ecuaciones (6.51) y (6.54), se desprende que el método

de elementos finitos basado en la formulación en referencias flotantes puede ser modificada para tener en cuenta los efectos de rigidización geométrica. Obviamente, la principal diferencia entre ambas formulaciones se debe al uso de distintos sistemas de referencia local en cada elemento para medir las deformaciones. Para solucionar el problema asociado a la formulación presentada en la sección 6.5, el sistema de referencia flotante no se usará en este desarrollo para medir las deformaciones. En su lugar, se usa un sistema local tangente a la línea central del elemento por uno de sus nodos, nodo A de la figura 6.8. La orientación de este sistema con respecto al sistema de referencia flotante se calcula a partir de las coordenadas nodales de A como sigue:

$$\cos \alpha^j = \frac{1 + q_{f3}^j}{\sqrt{(1 + q_{f3}^j)^2 + (q_{f4}^j)^2}}, \quad \sin \alpha^j = \frac{q_{f4}^j}{\sqrt{(1 + q_{f3}^j)^2 + (q_{f4}^j)^2}} \quad (6.59)$$

donde q_{f3}^j y q_{f4}^j son los incrementos en las pendientes del primer nodo del elemento j . Las deformaciones elásticas del elemento finito j se calculan usando los desplazamientos elásticos del elemento finito, denotadas por $\bar{\mathbf{v}}_f^j$, con respecto al sistema de referencia local del elemento. Así, la ecuación (6.57) se reescribe como sigue:

$$\varepsilon_a^j = \frac{\partial \bar{v}_{f1}^j}{\partial x^j}, \quad \varepsilon_b^j = -y^j \frac{\partial^2 \bar{v}_{f2}^j}{\partial x^{j2}} \quad (6.60)$$

donde \bar{v}_{f1}^j y \bar{v}_{f2}^j son las componentes del vector de desplazamientos elásticos $\bar{\mathbf{v}}_f^j$ en el sistema local del elemento. La energía de deformación del elemento j se calcula:

$$U_e^j = \frac{1}{2} \int_0^{l_e} \left[E^j I^j \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_{f2}^j}{\partial x^{j2}} \right)^2 + E^j A^j \left(\frac{\partial \bar{v}_{f1}^j}{\partial x^j} \right)^2 \right] dx^j \quad (6.61)$$

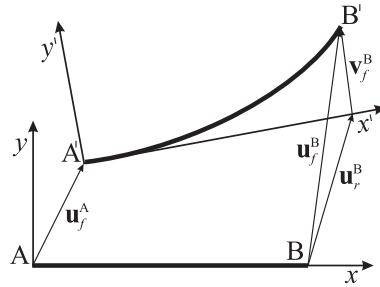


Figura 6.8: Movimiento de un elemento finito.

Para determinar los desplazamientos elásticos de los puntos de un elemento con respecto al sistema de referencia del elemento, considérese un elemento arbitrario como el mostrado en la figura 6.8. La línea central en la configuración indeformada se supone inicialmente coincidente con el eje x del sistema de referencia flotante mientras el sistema de referencia local del elemento se supone tangente a la línea central de la viga por el punto A' . Como puede observarse en la figura 6.8, el desplazamiento de un punto del elemento, por ejemplo, el punto B , puede descomponerse en la suma del desplazamiento del punto debido al movimiento como sólido rígido de la referencia local, \mathbf{u}_r^B , y el desplazamiento debido a deformación elástica del elemento, \mathbf{v}_f^B . El desplazamiento de un punto arbitrario debido al movimiento de sólido rígido del sistema local del elemento, \mathbf{u}_r , puede escribirse como sigue:

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_f^A + (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.62)$$

donde \mathbf{A} es una matriz ortogonal que expresa la orientación del sistema de referencia del elemento con respecto al sistema de referencia flotante (figura 6.8) y puede escribirse como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 \end{bmatrix} \quad (6.63)$$

donde \mathbf{i}_1 e \mathbf{i}_2 para el elemento j tienen la siguiente expresión:

$$\mathbf{i}_1^j = \begin{bmatrix} \cos \alpha^j & \sin \alpha^j \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{i}_2^j = \begin{bmatrix} -\sin \alpha^j & \cos \alpha^j \end{bmatrix}^T \quad (6.64)$$

El desplazamiento elástico de un punto arbitrario se calcula como la diferencia entre los desplazamientos \mathbf{u}_f y \mathbf{u}_r . Esta diferencia se proyecta en el sistema de referencia local del elemento usando la matriz ortogonal \mathbf{A} y puede escribirse:

$$\bar{\mathbf{v}}_f = \mathbf{A}^T (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_r) \quad (6.65)$$

donde sustituyendo la expresión de \mathbf{u}_r de la ecuación (6.62), se obtiene

$$\bar{\mathbf{v}}_f = \mathbf{A}^T (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_f^A) - (\mathbf{I} - \mathbf{A}^T) \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.66)$$

Supóngase la matriz identidad \mathbf{I} compuesta de la siguiente forma:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \end{bmatrix} \quad (6.67)$$

donde $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ y $\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. Así, las derivadas usadas en la ecuación (6.60) pueden escribirse con la ayuda de la ecuación (6.66) como sigue:

$$\frac{\partial \bar{v}_{f1}}{\partial x} = \mathbf{i}_1^T \mathbf{S}_{,x} \mathbf{q}_f - (\mathbf{i}^T - \mathbf{i}_1^T) \mathbf{i} = \mathbf{i}_1^T \mathbf{S}_{,x} \mathbf{q}_f + \mathbf{i}_1^T \mathbf{i} - 1 \quad (6.68)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{v}_{f2}}{\partial x^2} = \mathbf{i}_2^T \mathbf{S}_{,xx} \mathbf{q}_f \quad (6.69)$$

donde el superíndice que se refiere al elemento j ha sido eliminado por simplicidad. Puesto que el elemento finito en la configuración indeformada es recto, pueden escribirse la siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{i} = \mathbf{S}_{,x} \mathbf{q}_0 \quad (6.70)$$

$$\mathbf{S}_{,xx} \mathbf{q}_0 = \mathbf{0} \quad (6.71)$$

donde \mathbf{q}_0 es el vector de coordenadas nodales en la configuración indeformada. Usando las ecuaciones (6.70) y (6.71), las ecuaciones (6.68) y (6.69) pueden escribirse como sigue:

$$\frac{\partial \bar{v}_{f1}}{\partial x} = \mathbf{i}_1^T \mathbf{S}_{,x} \mathbf{q}_f + \mathbf{i}_1^T \mathbf{S}_{,x} \mathbf{q}_0 - 1 = \mathbf{i}_1^T \mathbf{S}_{,x} (\mathbf{q}_f + \mathbf{q}_0) - 1 = \mathbf{i}_1^T \mathbf{S}_{,x} \mathbf{q} - 1 \quad (6.72)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{v}_{f2}}{\partial x^2} = \mathbf{i}_2^T \mathbf{S}_{,xx} \mathbf{q}_f + \mathbf{i}_2^T \mathbf{S}_{,xx} \mathbf{q}_0 = \mathbf{i}_2^T \mathbf{S}_{,xx} (\mathbf{q}_f + \mathbf{q}_0) = \mathbf{i}_2^T \mathbf{S}_{,xx} \mathbf{q} \quad (6.73)$$

donde \mathbf{q} es el vector de coordenadas nodales que define la posición de los puntos del elemento en el sistema de referencia flotante. Puede concluirse que las ecuaciones (6.72) y (6.73) conducen a la misma expresión de la energía elástica que la formulación en coordenadas nodales absolutas [19]. Diferenciando la energía elástica con respecto al vector de desplazamientos nodales \mathbf{q}_f , se obtiene:

$$\frac{\partial U_e^{jT}}{\partial \mathbf{q}_f} = \frac{\partial U_e^{jT}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}_f} = \frac{\partial U_e^{jT}}{\partial \mathbf{q}} \quad (6.74)$$

puesto que

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}_f} = \frac{\partial \mathbf{q}_0}{\partial \mathbf{q}_f} + \frac{\partial \mathbf{q}_f}{\partial \mathbf{q}_f} = \mathbf{0} + \mathbf{I} \quad (6.75)$$

El desarrollo presentado en esta sección demuestra que el uso de la modificación propuesta para la formulación en referencias flotantes modificada lleva a los mismos resultados que la formulación en coordenadas nodales absolutas y que el uso de tal formulación lleva a una velocidad angular crítica que depende del número de elementos finitos cuando se usa teoría lineal de la elasticidad y no se toman medidas especiales para introducir acoplamiento entre esfuerzos axiales y de flexión como se recomienda en la literatura [92]. Este desarrollo confirma, a la vez, que cada elemento de la formulación en coordenadas nodales absolutas realmente se comporta como una subestructura distinta.

6.7. Conclusión sobre el análisis lineal

En este análisis, se ha usado el método de elementos finitos basado en la formulación en coordenadas nodales absolutas para estudiar el efecto de rigidización geométrica cuando se consideran las hipótesis de la teoría de la elasticidad lineal.

Se aporta información para entender el comportamiento de los modelos que hacen uso de la técnica de subestructuración. El modelo de coordenadas nodales absolutas es totalmente equivalente a un modelo con subestructuras, si bien, resulta más apropiado puesto que permite eliminar las restricciones no lineales que típicamente aparecen en otros modelos que usan subestructuración. Se ha demostrado que cuando se usa el método de los elementos finitos sin considerar los modos de vibración como funciones de forma, la velocidad angular crítica de la viga giratoria depende del número de elementos finitos usados en el modelo. El valor de la velocidad crítica aumenta con el número de elementos. Sin embargo, cuando no se consideran medidas especiales para incluir el acoplamiento entre los desplazamientos axiales y de flexión, siempre existe una velocidad crítica para la cual se obtiene una solución incorrecta independientemente del número de elementos finitos usados. Tal desplazamiento en la velocidad crítica no se observa cuando se usa el método de elementos finitos basado en la formulación en referencias flotantes. En tal caso, siempre se obtiene una solución incorrecta cuando la velocidad de rotación se aproxima a la frecuencia fundamental de flexión de la viga con condiciones de contorno de empotrada-libre, independientemente del número de elementos usado. Este problema asociado con la formulación en referencias flotantes es debido al hecho de que las matrices de rigidez de los elementos finitos definidas en la formulación de referencias flotantes son constantes y, por tanto, las pequeñas rotaciones de los sistemas de referencia de los elementos con respecto al sistema de referencia flotante no son consideradas en la formulación de las fuerzas elásticas. Se ha demostrado que si se consideran las rotaciones se obtiene un formulación en referencias flotantes que tiene una matriz de rigidez del elemento no lineal y la formulación resultante es totalmente equivalente a la formulación en coordenadas nodales absolutas. El uso de tal formulación lleva a una velocidad crítica que depende del número de elementos usados en el modelo.

6.8. Análisis mediante elementos finitos no lineales

Hasta este momento, se han discutido las limitaciones de la teoría lineal de la elasticidad para desarrollar una solución de elementos finitos para el problema de la viga giratoria. Se ha demostrado que cuando el número de elementos finitos aumenta, la velocidad crítica a la cual se obtiene la solución inestable e incorrecta también aumenta. Esta velocidad crítica sigue existiendo independientemente del número de elementos finitos cuando se utiliza la teoría lineal de la elasticidad y no se toma ninguna de las medidas recomendadas en la literatura [43, 84, 91, 92] para tratar el acoplamiento entre los desplazamientos axiales y de flexión. Se han comparado las formulaciones en coordenadas nodales absolutas y en referencias flotantes en relación al problema de la viga giratoria. Se ha demostrado que cuando se utiliza la formulación en coordenadas nodales absolutas, el aumento del número de elementos finitos conduce a un aumento de la velocidad crítica. La dependencia del valor de la velocidad crítica del número de elementos finitos se ha atribuido al hecho de que en la formulación en coordenadas nodales absolutas, se consideran las rotaciones relativas de los elementos finitos. Este hecho se ha demostrado comparando los resultados con los obtenidos usando la formulación en referencias flotantes, en la cual no se considera el efecto de las rotaciones relativas entre los elementos. Se ha demostrado que, cuando se usa el método de elementos finitos basado en la formulación de referencias flotantes, la solución incorrecta inestable se obtiene siempre a una velocidad crítica igual a la frecuencia natural de flexión de la viga en voladizo sin importar el número de elementos finitos usados. Se ha modificado el método de elementos finitos basado en la formulación en referencias flotantes para considerar el efecto de las rotaciones relativas entre los elementos finitos. Además, se ha demostrado que la nueva formulación conduce a la misma expresión para las fuerzas elásticas que la formulación en coordenadas nodales absolutas.

En la primera parte de este estudio, se han utilizado solamente ejemplos planos

de la viga giratoria compuestos por elementos viga de Euler-Bernoulli. Este modelo se puede generalizar de una manera sencilla usando la formulación en coordenadas nodales absolutas para tener en cuenta la inercia a rotación de la sección y la deformación por cortante [33]. El modelo presentado por Omar y Shabana [33] relaja también las suposiciones de la teoría de vigas de Timoshenko y permite la deformación de la sección transversal. Mientras que el modelado de la viga giratoria tridimensional con otras formulaciones existentes en la literatura conduce a un aumento en la complejidad del problema, la formulación en coordenadas nodales absolutas ofrece una alternativa para desarrollar una metodología sencilla y eficiente para estudiar la dinámica de este sistema. Los elementos finitos tridimensionales de la viga propuestos por Yakoub y Shabana [34, 35] relajan muchas de las suposiciones usadas en otros modelos existentes de la viga giratoria y permiten la deformación de la sección transversal. El uso de estos elementos tridimensionales de la viga con una teoría de la elasticidad que emplea relaciones no lineales deformaciones-desplazamientos conduce a un modelo más general que considera automáticamente el efecto de acoplamiento entre las deformaciones debidas a esfuerzos axiales y de flexión. En este modelo, la matriz de masa del sistema sigue siendo constante y las fuerzas elásticas se pueden desarrollar usando un procedimiento general de la mecánica de medios continuos. Este modelo se utiliza en este trabajo con métodos numéricos implícitos de integración para obtener la solución de los problemas tridimensionales de la viga giratoria. Se va a comprobar que el uso de la formulación coordenadas nodales absolutas junto con la teoría no lineal de la elasticidad conduce siempre a una solución estable independientemente del número de los elementos finitos usados en el modelo.

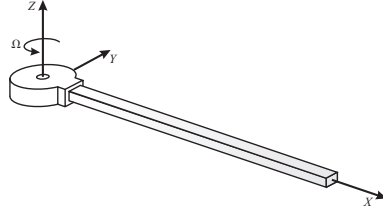


Figura 6.9: Viga sometida a rotación.

El problema de una viga que rota sobre un eje que pasa por uno de sus extremos y es perpendicular al eje longitudinal de la viga (figura 6.9) se ha utilizado como problema de prueba en muchas de las investigaciones sobre el efecto de rigidización geométrica. En el estudio numérico presentado en esta sección, el problema de la viga giratoria se utiliza para comparar los resultados obtenidos con la formulación en coordenadas nodales absolutas con los resultados disponibles en la bibliografía. La viga gira en el plano XY alrededor del eje Z , como se muestra en la figura 6.9. Esta figura también muestra la configuración inicial de la viga que corresponde a una velocidad inicial nula. Los parámetros geométricos y las constantes del material usadas en esta investigación son iguales que las usadas por otros autores [43, 67, 68]. Estas constantes se resumieron en la tabla 6.1 de la sección 6.2.2.

En el problema a resolver, la velocidad angular, Ω , comienza a aumentar suavemente con aceleración angular continua hasta que alcanza un valor constante. La orientación angular de la viga se da por las ecuaciones siguientes:

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{\Omega}{T} \left(\frac{t^2}{2} + \frac{T^2}{4\pi^2} \left(\cos \frac{2\pi t}{T} - 1 \right) \right) & t < T \\ \Omega \left(t - \frac{T}{2} \right) & t \geq T \end{cases} \quad (6.76)$$

donde Ω es el valor final de la velocidad angular y T es el tiempo en el cual la velocidad angular alcanza su valor constante. El análisis se va a realizar empleando dos modelos de características distintas. El primer modelo usa elementos finitos con parametrización bidimensional [33], mientras que el segundo modelo usa ele-

mentos finitos con parametrización espacial [34]. En ambos caso, los elementos finitos incorporan una definición no lineal de las fuerzas elásticas y son capaces de experimentar deformación por cortante.

6.8.1. Modelo plano

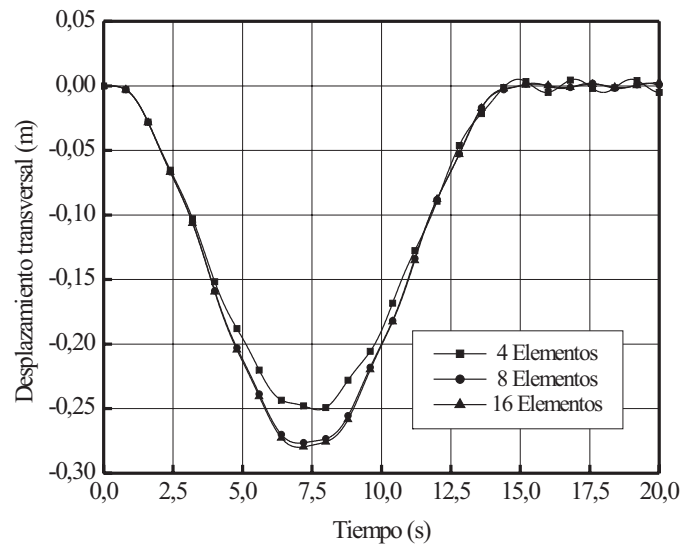


Figura 6.10: Desplazamiento transversal del extremo libre ($\Omega = 2$ rad/s).

En primer lugar se utiliza un modelo plano para la viga. En este modelo, se utiliza un elemento finito tipo viga deformable por cortante [33]. En esta simulación se utilizan dos valores de la velocidad angular, $\Omega=2$ and $\Omega=4$ rad/s para un valor de T igual a 15 segundos. Para ambas velocidades, el número de elementos se varía de cuatro a dieciséis. Puede observarse en los resultados presentados en los figuras 6.10 y 6.11 que el modelo de ocho elementos muestra un buen acuerdo con el modelo de dieciséis elementos, lo cual indica que se alcanza la convergencia y que los resultados del modelo de ocho elementos son aceptables. Estos resultados

están también en buen acuerdo con los obtenidos por Kane *et al.* [43] y Wu y Haug [67].

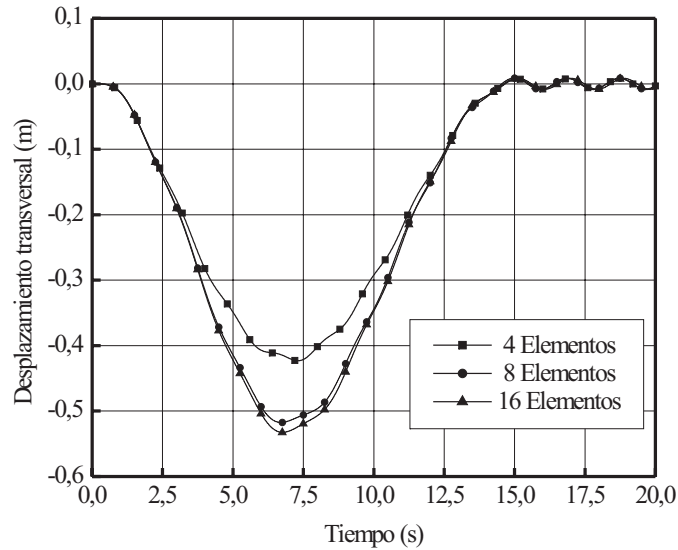


Figura 6.11: Desplazamiento transversal del extremo libre ($\Omega = 4$ rad/s).

El modelo se ha integrado con dos métodos implícitos de integración distintos. Por un lado, se ha usado la regla trapezoidal con paso constante, que es un método de segundo orden [96]. Por otro, se ha empleado la fórmula RadauII con control adaptativo del paso, que alcanza una exactitud de cuarto orden [45]. Ambos métodos requieren el cálculo de la matriz jacobiana de las ecuaciones para lo cual se han usado las expresiones desarrolladas en el capítulo 3. En la tabla 6.2 se resumen los tiempos de CPU que requiere la simulación en función de la tolerancia alcanzada y del método empleado. En la primera columna se muestra la tolerancia absoluta utilizada medida como la norma de la diferencia entre dos iteraciones sucesivas. Las tres columnas que le siguen muestran los tiempos de CPU que requiere cada método. En las simulaciones, se han utilizado dos valores distintos para el paso,

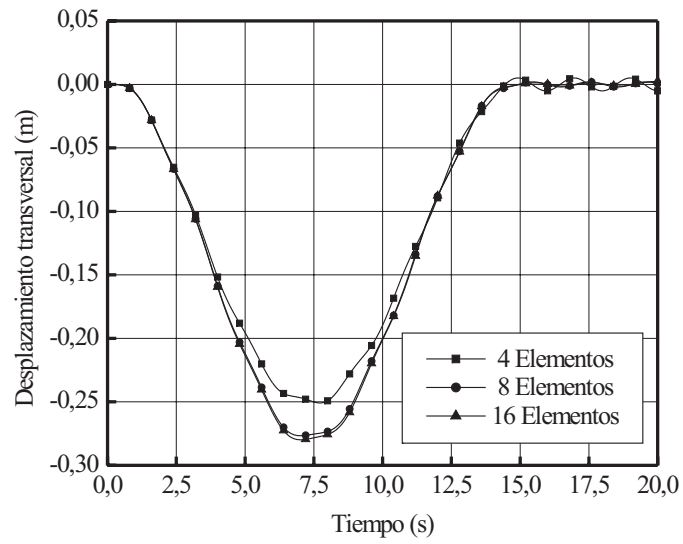
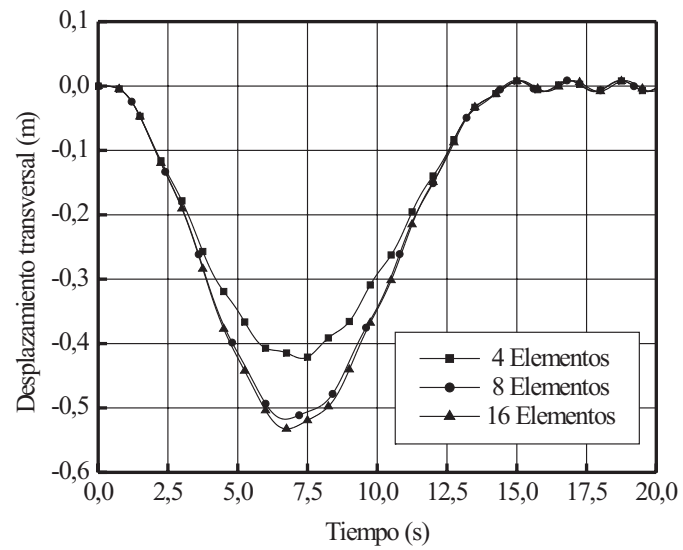
h , utilizado por la regla trapezoidal. Estos dos valores de h se corresponden con los valores entre los que varía el paso de tiempo utilizado por el algoritmo de RadauII. Como puede observarse en la tabla 6.2, la regla trapezoidal puede usarse para resolver el problema con un gran ahorro computacional y sin pérdida de exactitud.

Tolerancia absoluta	Regla trapezoidal ($h=5 \cdot 10^{-3}$ s)	Regla trapezoidal ($h=1 \cdot 10^{-3}$ s)	RadauII
10^{-2}	759 s	3783 s	3769 s
10^{-3}	748 s	3814 s	3703 s
10^{-4}	981 s	3738 s	4039 s

Tabla 6.2: Tiempos de CPU empleados para cada integrador.

6.8.2. Modelo espacial

Las simulaciones tridimensionales representan un desafío en los problemas en los cuales el acoplamiento entre desplazamientos debidos a esfuerzos axiales y de flexión es importante. Este acoplamiento es una fuente de la rigidez numérica pues los desplazamientos axiales están asociados a frecuencias mucho más altas que los desplazamientos debidos a flexión. Este hecho junto con el aumento significativo en el número de grados de libertad introducidos como resultado de usar elementos finitos tridimensionales hace la solución del problema mucho más difícil. Para resolver este problema tridimensional, la viga se modela usando el elemento finito tipo viga desarrollado por Yakoub y Shabana [34, 35]. Una vez más, la simulación se repite para dos velocidades angulares, $\Omega=2$ y $\Omega=4$ rad/s, y con el valor de T igual a 15 segundos. El número de elementos se aumenta progresivamente de cuatro a dieciséis en ambos casos. Puede verse en los resultados presentados en las figuras 6.12 y 6.13 que hay un buen acuerdo con los resultados de las simulaciones de dos dimensiones presentadas anteriormente [43, 67]. Como en el caso plano, el uso de ocho elementos conduce a los resultados aceptables.

Figura 6.12: Desplazamiento transversal del extremo libre ($\Omega = 2$ rad/s).Figura 6.13: Desplazamiento transversal del extremo libre ($\Omega = 4$ rad/s).

Capítulo 7

Simulación de una transmisión por correa entre dos poleas

El estudio de este tipo de transmisiones mediante procedimientos numéricos es relativamente reciente, ya que hasta los primeros trabajos de Leamy y Wasfy [97], la mayor parte de los estudios se basaban en consideraciones analíticas. El método de los elementos finitos brinda una potente herramienta para el análisis de este tipo de transmisiones. No obstante, esta aplicación es muy exigente en cuanto al tipo de elementos finitos y la modelización de las fuerzas de contacto. En cuanto a los elementos finitos, es necesario que estos incorporen la posibilidad de experimentar grandes rotaciones o movimientos como sólido rígido. Además, dependiendo de los parámetros del sistema puede ser necesario incorporar la deformación por cortante [98], así como no linealidades de tipo geométrico. Es más, las correas no tienen un comportamiento isótropo ya que suelen tener una armadura rígida que mejora la transmisión de potencia dentro de una matriz de un material de mucha menor rigidez pero de alta adherencia. De esta forma, el módulo de rigidez que la correa muestra a flexión es significativamente menor que el que muestra a tracción. Por tanto, es también necesario disponer de un elemento que se comporte como un trozo de correa. En cuanto al modelo de contacto, es deseable que éste permita

una descripción lo más realista posible de las fuerzas en la interacción polea-correa, a la vez que permita una eficiente evaluación numérica.

La formulación en coordenadas absolutas cumple todos los requerimientos mencionados en el párrafo anterior, por lo que se sitúa en buena posición en cuanto a los métodos a considerar para un análisis numérico de este tipo de aplicaciones. Con la incorporación, por primera vez, de elementos finitos de alto orden a este tipo de problemas se pretende obtener un modelo con un número de grados de libertad más reducido que el puede encontrarse en la bibliografía relacionada [99, 100].

7.1. Análisis mediante el MEF de transmisiones por correa

El estudio numérico de transmisiones mediante correas tiene un alto interés práctico debido a la amplia gama de aplicaciones domésticas o industriales en las que se encuentran. La correa se somete alternativamente a tensiones de distinta magnitud, lo que hace que fenómenos como la fatiga del material de la correa estén presentes en este sistema. El estudio de tensiones de contacto es también importante para predecir el desgaste de la correa, ya que con el deterioro de la correa aparecen ruidos en la transmisión y problemas de funcionamiento.

Leamy y Wasfy [101] han realizado una completa revisión de los estudios realizados en relación a las transmisiones por correa flexible. Estos autores clasifican el estudio de estas transmisiones en dos ramas, una trata fundamentalmente el estudio de la mecánica de la transmisión correa-polea y la otra, los estudios sobre la respuesta dinámica de las transmisiones. De acuerdo con la revisión realizada por Leamy y Wasfy [101], en el primer grupo no se ha considerado generalmente la excitación dinámica y por tanto, los efectos dinámicos derivados de comportamientos transitorios. En el segundo grupo de estudios, el contacto se ha simplificado excesivamente.

Leamy y Wasfy [97, 99, 100, 101] han realizado una enorme contribución al

estudio mediante elementos finitos de este tipo de aplicaciones. En sus estudios, Leamy *et al.* [102] utilizan un modelo de contacto elástico en el que se aplican un conjunto de fuerzas sobre los nodos, penalizando la penetración de dichos nodos sobre la superficie de la polea. Además, la fricción se modela mediante una ley trilineal que depende de la velocidad de deslizamiento. En sus análisis, han usado elementos lineales con posibilidad de experimentar sólo esfuerzos axiales [99] y, posteriormente, elementos que incorporan rigidez a flexión a través de un elemento en el cual la rigidez a rotación de las secciones inicial y final se incluye mediante un muelle a torsión [100]. Estos autores han obtenido buenos resultados con un número de elementos por cada mitad de polea del orden de 38 tipo viga o 100 sin rigidez a flexión.

Es importante resaltar que el tipo de coordenadas que estos autores han usado en sus modelos es inercial, es decir, están referidas a un sistema global. La ANCF utiliza, también, un conjunto de coordenadas inerciales, lo cual permite una sencilla interpretación de las magnitudes involucradas en la definición del contacto. El uso de una medida global de las deformaciones que no usa un sistema local es otra característica de esta formulación que la hace adecuada para esta aplicación. En la formulación en referencias flotantes, por ejemplo, el uso de una referencia local en el sólido para la medida de las deformaciones hace que los problemas con contactos localizados sean difíciles de tratar debido a la variación de las condiciones de referencia más adecuadas con el movimiento [81].

En esta sección se pretende realizar un modelo plano con elementos finitos de orden superior [33, 40] en los que las fuerzas de fricción puedan distribuirse a lo largo del elemento y, de esta forma, obtener un modelo del contacto más aproximado. Como se mencionó al principio de esta sección, se necesita un elemento con una dimensión mucho mayor que las otras dos, es decir, un elemento tipo barra, en el que la rigidez a flexión pueda disminuirse para reproducir el comportamiento de la correa. Para ello, se utiliza el elemento finito tipo correa que se presenta en la siguiente sección. En este elemento la definición de las fuerzas elásticas se basa

en una modificación de otro elemento finito bidimensional recientemente aparecido [40]. El nuevo elemento incorpora dos parámetros que permiten variar la rigidez axial y de flexión del elemento, de forma que el módulo de Young que se usa para calcular los esfuerzos debidos a deformaciones axiales o de flexión es distinto.

7.2. Formulación del elemento tipo correa

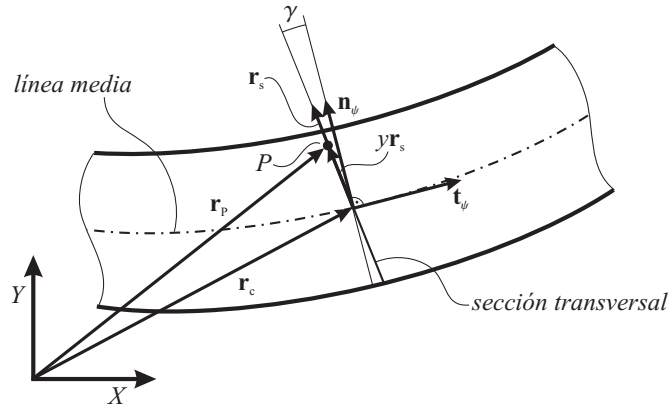
El elemento finito que se desarrolla en esta sección se basa en el elemento bidimensional de Dufva [40] descrito en el capítulo 2. En aquel elemento, la constante que relaciona la tensión normal longitudinal con la deformación normal longitudinal debida a flexión o deformación axial es la misma, es decir, el módulo de Young. Sin embargo, para simular mejor el comportamiento de un trozo de correa sería interesante disminuir el efecto de la flexión sobre las tensiones normales longitudinales. Para ello, es necesario separar las deformaciones normales longitudinales debidas a la flexión de las debidas a sollicitaciones axiales. Por tanto, el nuevo elemento utiliza las mismas funciones de forma y coordenadas nodales que el de Dufva, sin embargo, las fuerzas elásticas se formulan de forma distinta.

Como se explicó en el capítulo 2, la posición de un punto arbitrario P del elemento finito de Dufva [40] puede expresarse de la siguiente manera:

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_c + y\mathbf{r}_s \quad (7.1)$$

donde \mathbf{r}_c es el vector de posición del punto medio de aquella sección transversal que contiene al punto P , \mathbf{r}_s es un vector unitario contenido en la sección transversal e y es la coordenada transversal del elemento tal que $y\mathbf{r}_s$ es el vector que va del punto medio de la sección transversal al punto P (véase figura 7.1). La expresión del vector \mathbf{r}_c puede obtenerse a partir de la matriz de funciones de forma del elemento finito si se hace cero la coordenada transversal adimensional η :

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{S}\mathbf{e}|_{\eta=0} \quad (7.2)$$

Figura 7.1: Posición del punto P del elemento finito.

Por otro lado, el vector unitario \mathbf{r}_s puede obtenerse girando el vector unitario \mathbf{n}_ψ mostrado en la figura 7.1 el ángulo γ debido a la deformación por cortante. Nótese que el vector \mathbf{n}_ψ es perpendicular a la línea media del elemento. Para realizar el giro mencionado puede multiplicarse el vector \mathbf{n}_ψ por una matriz de rotación \mathbf{A}_γ . Dado que el giro de la sección debido al cortante es suficientemente pequeño, es posible hacer la siguiente aproximación [16]:

$$\mathbf{A}_\gamma = (\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{I}} \sin \gamma) \quad (7.3)$$

Por tanto, la expresión del vector unitario \mathbf{r}_s es:

$$\mathbf{r}_s = (\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{I}} \sin \gamma) \mathbf{n}_\psi \quad (7.4)$$

donde $\tilde{\mathbf{I}}$ es una matriz antisimétrica que se escribe como sigue

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

Por otro lado, el vector \mathbf{n}_ψ puede obtenerse a partir del vector tangente \mathbf{t}_ψ de la siguiente forma:

$$\mathbf{n}_\psi = \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{t}_\psi \quad (7.6)$$

donde \mathbf{t}_ψ se calcula a partir de la derivada del vector \mathbf{r}_c con respecto a la coordenada longitudinal de la siguiente forma:

$$\mathbf{t}_\psi = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}_c}{\partial x}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}_c}{\partial x} \right|} \quad (7.7)$$

Como en la formulación del elemento de Dufva [40], el seno del ángulo γ se puede interpolar linealmente entre los valores nodales de la siguiente forma:

$$\sin \gamma = (\sin \gamma)^{ijm} \left(1 - \frac{x}{L}\right) + (\sin \gamma)^{ijn} \frac{x}{L} \quad (7.8)$$

Las fuerzas elásticas pueden obtenerse derivando la energía de deformación elástica, cuya expresión es idéntica a la del elemento de Dufva [40]

$$U_e = \int_{V_e} (E\varepsilon_{xx}^2 + E\varepsilon_{yy}^2 + 4Gk_s\varepsilon_{xy}^2) dV \quad (7.9)$$

donde las deformaciones normal longitudinal y tangencial pueden obtenerse del tensor de Green-Lagrange y tienen las siguientes expresiones:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{,x}^T \mathbf{r}_{,x} - 1) \quad (7.10)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_{,x}^T \mathbf{r}_{,y} \quad (7.11)$$

Por otro lado, la deformación normal transversal tiene la misma expresión que en la formulación del elemento de Dufva. Puede comprobarse que los cuadrados de las deformaciones anteriores que aparecen en la ecuación (7.9) se escriben:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^2 = & \frac{1}{4} (\mathbf{r}_{c,x}^T \mathbf{r}_{c,x} - 1)^2 + y (\mathbf{r}_{c,x}^T \mathbf{r}_{c,x} - 1) (\mathbf{r}_{c,x}^T \mathbf{r}_{s,x} - 1) + \\ & y^2 \left[(\mathbf{r}_{c,x}^T \mathbf{r}_{s,x})^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{c,x}^T \mathbf{r}_{c,x} - 1) (\mathbf{r}_{s,x}^T \mathbf{r}_{s,x}) \right] + \\ & y^3 (\mathbf{r}_{c,x}^T \mathbf{r}_{s,x}) (\mathbf{r}_{s,x}^T \mathbf{r}_{s,x}) + \frac{1}{4} y^4 (\mathbf{r}_{s,x}^T \mathbf{r}_{s,x})^2 \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$\varepsilon_{xy}^2 = \frac{1}{4} (\mathbf{r}_{c,x}^T \mathbf{r}_s)^2 + \frac{1}{2} y (\mathbf{r}_{c,x}^T \mathbf{r}_s) (\mathbf{r}_{s,x}^T \mathbf{r}_s) + \frac{1}{4} y^2 (\mathbf{r}_{s,x}^T \mathbf{r}_s)^2 \quad (7.13)$$

Como se ha dicho anteriormente, se pretende separar la parte de la deformación normal longitudinal debida a esfuerzos axiales de la que es puramente debida a la flexión. Este término debido a esfuerzos axiales debe ser constante a lo largo de la sección transversal, por lo que no depende de la coordenada y . De esta forma, en la expresión de la ecuación (7.12) puede identificarse el primer término del miembro derecho como la elongación experimentada por el elemento. De hecho, este término coincide con el cuadrado de la elongación de la línea media del elemento [32], que tiene la siguiente expresión:

$$\varepsilon_l = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{c,x}^T \mathbf{r}_{c,x} - 1) \quad (7.14)$$

En las ecuaciones (7.12) y (7.13) aparecen términos multiplicados por potencias de la coordenada transversal y . En concreto, aparecen términos que multiplican a y , y^2 , y^3 e y^4 . Como puede deducirse de la expresión de la energía elástica de la ecuación (7.9), al integrar las deformaciones al cuadrado, ε_{xx}^2 y ε_{xy}^2 , en la coordenada transversal y , los términos que contienen potencias impares se anulan si la sección es simétrica, como es el caso de los elementos usados.

Finalmente, para poder variar el efecto de la deformación por flexión o por esfuerzos en la dirección axial, se van a introducir dos parámetros. Con estos parámetros se pretende variar el valor del módulo de Young que se usa para las tensiones normales longitudinales debidas a los dos tipos de deformación mencionados. Así, los dos términos de la energía de deformación de la ecuación (7.9) que corresponden a ε_{xx} y a ε_{xy} se escriben como sigue:

$$\frac{1}{2} \int_{V_e} E \varepsilon_{xx}^2 dV = \frac{1}{2} E \int_{V_e} \left[\frac{\alpha_1}{4} (\mathbf{r}_{c,x}^T \mathbf{r}_{c,x} - 1)^2 + \alpha_2 y^2 \left[(\mathbf{r}_{c,x}^T \mathbf{r}_{s,x})^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{c,x}^T \mathbf{r}_{c,x} - 1) (\mathbf{r}_{s,x}^T \mathbf{r}_{s,x}) \right] + \frac{\alpha_2}{4} y^4 (\mathbf{r}_{s,x}^T \mathbf{r}_{s,x})^2 \right] dV \quad (7.15)$$

$$\frac{1}{2} \int_{V_e} 4Gk_s \varepsilon_{xy}^2 dV = 2Gk_s \int_{V_e} \left[\frac{\alpha_2}{4} (\mathbf{r}_{c,x}^T \mathbf{r}_s)^2 + \frac{\alpha_2}{4} y^2 (\mathbf{r}_{s,x}^T \mathbf{r}_s)^2 \right] dV \quad (7.16)$$

Nótese que la energía de deformación tangencial se ha modificado usando el mismo parámetro que la energía debida a la flexión, puesto que cuando el elemento se solicita axialmente no deben aparecer esfuerzos tangenciales. Por último, la función de las fuerzas elásticas se puede obtener derivando la energía de deformación con respecto al vector de coordenadas nodales del elemento como sigue

$$\mathbf{Q}_e = -\frac{\partial U^T}{\partial \mathbf{e}} \quad (7.17)$$

7.3. Modelo de fuerzas de contacto en la interacción correa-polea

En los sistemas en los que se transmite potencia a través de una correa flexible, ésta tiene restringido su movimiento sobre la superficie de unas poleas. Normalmente, la rigidez de las poleas es muy superior a la de la correa flexible, por lo que éstas se pueden considerar rígidas. El contacto entre la correa y la superficie de la polea debe incluir fricción, que es, en definitiva, la causa de la transmisión del movimiento. En este estudio, el contacto con fricción se modela aplicando un método que se basa en los trabajos de Leamy y Wasfy [100, 101]. Se trata de un método elástico que usa una ley de fricción trilineal, que es numéricamente muy estable a la hora de integrar las ecuaciones del movimiento.

En los modelos propuestos por Leamy y Wasfy [100, 101], las fuerzas se aplican sobre los nodos de los elementos finitos. De esta forma, sobre cada nodo, se genera una fuerza de contacto normal y otra tangencial, debida a la fricción, cada vez que el nodo penetra en la superficie de la polea. Las fuerzas de reacción dependen significativamente de la penetración del nodo. Así, el contacto existe cuando el nodo está dentro de la polea. Con esta descripción del contacto, sus modelos de elementos finitos de bajo orden mostraron buenos resultados con una discretización

de 38 elementos por mitad de polea, cuando se tiene en cuenta la rigidez a flexión, y con 100, si no se introduce rigidez a flexión.

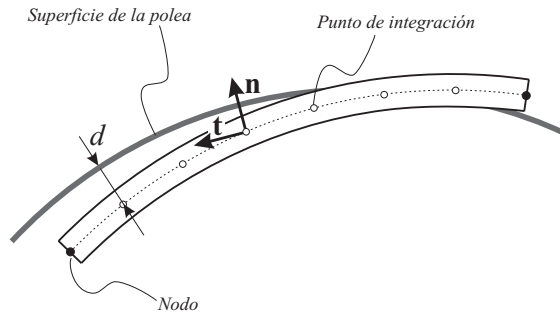


Figura 7.2: Interacción de la correa y la polea.

Al contrario que en los estudios de Leamy y Wasfy, el elemento bidimensional que se va a usar en este estudio (sección 7.2) es capaz de reproducir superficies curvas con un número no muy alto de elementos. De hecho, Dufva *et al.* [40] han demostrado que, usando sólo cuatro elementos como el elemento finito del cual se ha obtenido el elemento tipo correa de la sección anterior, es posible curvar una viga en voladizo en un círculo aplicando un cierto momento en el extremo. Ya que el elemento se puede curvar sobre la superficie de la polea, tiene sentido distribuir las fuerzas de contacto a lo largo del elemento. Así se obtendría una descripción más aproximada y realista de las fuerzas de contacto. Además, el uso de fuerzas distribuidas permite que el número de elementos se pueda reducir sin perjuicio de una mala aproximación de las fuerzas que intervienen en el contacto. Si por el contrario, las fuerzas se aplican en los nodos, el número de elementos no podría reducirse más allá de un valor para el cual el comportamiento de la correa se vería afectado por el carácter discreto del modelo de fuerzas de contacto. De cualquier forma, el modelo de contacto que se desarrolla a continuación puede considerarse como una extensión del modelo usado por Leamy y Wasfy [101, 100].

7.3.1. Fuerzas normales en la zona de contacto

En la descripción del contacto, se permite al elemento penetrar en la polea una cierta distancia d , como se muestra en la figura 7.2, y, como resultado de esa penetración, aparece una fuerza perpendicular a la superficie de la polea cuyo módulo es proporcional a la penetración. Además, se añade un término proporcional a la velocidad de penetración por motivos numéricos, puesto que con éste se consigue suavizar el contacto. La penetración es función de la coordenada longitudinal del elemento, x , y , como consecuencia, las fuerzas de contacto normales y tangenciales también son función de esta coordenada. Así, la expresión de la fuerza normal por unidad de longitud, \mathbf{f}_n , se escribe como sigue:

$$\mathbf{f}_n = \begin{cases} (k_p d + c_p \dot{d}) \mathbf{n}, & d \geq 0 \\ \mathbf{0}, & d < 0 \end{cases} \quad (7.18)$$

donde \mathbf{n} es un vector unitario normal a la superficie de la polea, d es la distancia desde un punto de la línea media de la correa hasta la superficie de la polea, medida en la dirección radial, y k_p y c_p son los valores por unidad de longitud de los penalizadores para la penetración y la velocidad de penetración, respectivamente.

Dado que la superficie sobre la que contacta la correa es circular, la evaluación de las variables involucradas en el contacto es muy sencilla. Así, la normal siempre se encuentra en la dirección de uno de los radios y la penetración puede medirse sobre dicha normal de la siguiente manera:

$$d = R - \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^T (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)} \quad (7.19)$$

donde R es el radio de la polea a considerar, \mathbf{r} es el vector de posición global de un punto arbitrario de la correa y \mathbf{r}_0 es el vector de posición del centro de la polea. En esta sección se han suprimido los subíndices que refieren al número de elemento. El vector normal, por su parte, se calcula de la siguiente forma:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^T (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}} \quad (7.20)$$

7.3.2. Fuerzas tangenciales debidas a la fricción

En un modelo de fricción de Coulomb, la fuerza tangencial es proporcional a la fuerza normal según el coeficiente de rozamiento siempre que haya deslizamiento. Sin embargo, la discontinuidad en el valor del coeficiente de rozamiento que supone el paso de un valor positivo de la velocidad relativa entre las superficies de contacto a uno negativo dificulta enormemente la integración de las ecuaciones. Por este motivo, Leamy y Wasfy [101] proponen una ley de fricción trilineal como la que se muestra en la gráfica de la figura 7.3. En dicha gráfica, la velocidad de deslizamiento, v_t , se representa en el eje horizontal, mientras que el módulo de la fuerza tangencial debida a la fricción, $|\mathbf{f}_t|$, se representa en el eje vertical. Como puede observarse, el módulo de la fuerza tangencial varía linealmente entre $-v_{t0}$ y v_{t0} , con una pendiente de valor ν_s .

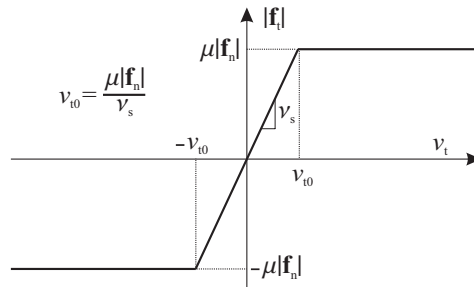


Figura 7.3: Ley de fricción trilineal.

Con esta ley de variación de $|\mathbf{f}_t|$ se consigue suavizar la discontinuidad de la fuerza de fricción y facilitar la integración numérica. De esta forma, la fuerza tangencial de fricción se escribe en función del coeficiente de rozamiento de la siguiente forma:

$$\mathbf{f}_t = -\mu(v_t) |\mathbf{f}_n| \mathbf{t} \quad (7.21)$$

donde \mathbf{f}_t es la fuerza tangencial de fricción por unidad de longitud, $\mu(v_t)$ es el coeficiente de fricción, que depende de la velocidad según se muestra en la figura 7.3 y $|\cdot|$ representa el módulo de un vector. Además, \mathbf{t} es un vector unitario perpendicular a \mathbf{n} , como se muestra en la figura 7.2, cuya expresión se obtiene de la siguiente manera:

$$\mathbf{t} = \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{n} \quad (7.22)$$

donde la matriz antisimétrica $\tilde{\mathbf{I}}$ se escribe como sigue:

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

De esta forma, v_t es la proyección sobre \mathbf{t} de la velocidad relativa entre las superficies de contacto. En el caso de que la polea gire alrededor de un eje perpendicular que pasa por su centro de masas, la proyección de la velocidad relativa de un punto arbitrario de la correa puede obtenerse con la siguiente expresión:

$$v_t = \mathbf{t}^T (\dot{\mathbf{r}} - \omega R \mathbf{t}) \quad (7.24)$$

donde ω es la velocidad angular de giro de la polea.

El parámetro ν_s de la figura 7.3 representa la pendiente de la recta central de la gráfica. Como puede verse, cuanto mayor sea el valor de dicha pendiente más se parece el modelo usado al modelo de Coulomb. Por tanto, este será un valor decisivo durante la simulación. Nótese, también, que para que se transmita el movimiento debe haber cierto deslizamiento relativo de las superficies de contacto. Esto impide que en las zonas de agarre exista una fuerza de rozamiento que transmita el movimiento, lo cual no es cierto en realidad.

7.3.3. Par transmitido por la correa a la polea conducida

Para la polea motora, la velocidad angular ω viene dada por una función explícita del tiempo. Sin embargo, la velocidad de giro de la polea conducida dependerá de cómo se transmita el movimiento entre la correa y la polea. Por tanto, el ángulo girado por la polea conducida puede incluirse en las ecuaciones como una variable más, incluyendo la ecuación de equilibrio de momentos en la polea conducida. Esta ecuación puede escribirse como sigue:

$$I\ddot{\theta} = \sum_{i=1}^{N_e} \int_0^{L_i} ((R-d) \mathbf{n} \times (-\mathbf{f}_t))_i dx + T_a \quad (7.25)$$

donde I es el momento de inercia de la polea alrededor de su centro, θ es el ángulo girado por la polea conducida, el índice i representa el elemento, N_e es el número de elementos usados para discretizar la correa, L_i es la longitud del elemento finito i y T_a es un posible par resistente aplicado sobre la polea conducida por otros accesorios que estuvieran conectados a esta.

Para obtener las fuerzas de contacto generalizadas se procede calculando el trabajo virtual realizado por dichas fuerzas. Este trabajo se puede calcular como se muestra a continuación:

$$\delta W^i = \int_0^{L_i} \delta \mathbf{r}^{iT} (\mathbf{f}_n^i + \mathbf{f}_t^i) dx = \delta \mathbf{e}^{iT} \int_0^{L_i} \mathbf{S}_0^i (\mathbf{f}_n^i + \mathbf{f}_t^i) dx = \delta \mathbf{e}^{iT} \mathbf{Q}_c^i \quad (7.26)$$

donde \mathbf{S}_0^i es la matriz de funciones de forma del elemento i evaluada sobre la línea media del elemento, es decir, $\mathbf{S}^i(x, 0)$, y \mathbf{Q}_c^i es el vector de fuerzas de contacto generalizadas. Las fuerzas de contacto se evalúan sobre la línea media del elemento y no sobre la cara inferior de éste con la intención de evitar la deformación del elemento en la dirección perpendicular a su línea media. Este modo de deformación está asociado a frecuencias mucho más altas que las de flexión, por lo que su consideración puede dificultar la integración numérica de las ecuaciones del movimiento. Para evaluar la integral de la ecuación (7.26) se usa una cuadratura de Gauss con un número suficiente de puntos de integración de acuerdo con

la complejidad de las expresiones a integrar. De hecho, las fuerzas de contacto no son funciones suaves debido a la propia definición de la fuerza normal como función (ecuación (7.18)). Además, el número de puntos de integración usados permitirá representar las tensiones de contacto con mayor o menor definición. Una buena representación de las tensiones de contacto permitirá localizar las posibles zonas de agarre o de deslizamiento.

Merece la pena resaltar que el uso de las coordenadas absolutas permite evaluar fácilmente si un elemento puede entrar en contacto o no puesto que las variables nodales contienen la posición global del nodo. Además, con el procedimiento propuesto, el contacto se evalúa sobre cada punto de integración por lo que no requiere una búsqueda previa de la zona de contacto.

7.4. Ecuaciones del movimiento del sistema

La correa flexible que transmite el movimiento en el sistema bajo estudio es un elemento circular, que como tal no tiene principio ni fin. Se parte de un elemento con geometría rectilínea cuya longitud coincide con el perímetro de la correa. Dicha geometría se discretiza mediante el elemento tipo correa presentado anteriormente. De esta forma, para obtener una geometría circular el primer nodo del elemento finito inicial debe conectarse con el segundo nodo del último elemento finito. De esta forma, la geometría deja de ser rectilínea para convertirse en una geometría circular. La conexión de los nodos inicial y final puede hacerse de la misma forma en la que se conectan todos los elementos entre si, es decir, compartiendo las coordenadas del nodo en común. Dado que la configuración de referencia de los elementos finitos es recta, en la configuración circular se tienen ciertas tensiones iniciales que están en equilibrio estático. Sin embargo, en el sistema formado por las poleas y la correa, esta última adquiere una forma no circular al montarse sobre las poleas.

Como se ha explicado anteriormente, el contacto entre polea y correa se garantiza mediante la inclusión de un conjunto de fuerzas y no mediante ecuaciones

de restricción. Por este motivo, las ecuaciones del movimiento del sistema bajo estudio sólo contienen las restricciones debidas a la conexión de los nodos inicial y final. Dicho sistema da lugar al siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales algebraicas:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{C}_e^T \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_c \\ \mathbf{C}(\mathbf{e}) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7.27)$$

donde $\mathbf{C}(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$ es el conjunto de restricciones lineales que representan la unión de los nodos inicial y final, \mathbf{M} es la matriz de masa de la correa, \mathbf{Q}_e es el vector de fuerzas elásticas generalizadas y \mathbf{Q}_c es el vector de fuerzas de contacto generalizadas. Nótese que el uso de un modelo elástico de contacto permite introducir el contacto sin necesidad de añadir ecuaciones de restricciones.

Este sistema puede reducirse a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias si las coordenadas de los nodos inicial y final se comparten o, dicho de otro modo, se eliminan las restricciones lineales junto con las coordenadas de uno de esos nodos. El sistema final de ecuaciones tiene la siguiente forma:

$$\hat{\mathbf{M}}\ddot{\hat{\mathbf{e}}} = \hat{\mathbf{Q}}_e + \hat{\mathbf{Q}}_c \quad (7.28)$$

donde $\hat{\mathbf{M}}$, $\hat{\mathbf{e}}$, $\hat{\mathbf{Q}}_e$ y $\hat{\mathbf{Q}}_c$ son la matriz de masa de la correa, el vector de coordenadas y los vectores de fuerzas generalizadas después de eliminar las restricciones lineales debidas a la conexión de los nodos inicial y final. Las ecuaciones del movimiento constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, por lo que es posible utilizar un método de integración no sofisticado. Para obtener los resultados de la simulación numérica que se muestran en la siguiente sección se ha usado la regla del trapecio.

7.5. Resultados numéricos en velocidades y tensiones de contacto

En este apartado, se muestran los resultados obtenidos con el modelo de la transmisión que se esquematiza en la figura 7.4. Las ecuaciones del movimiento de dicho sistema han sido integradas mediante un integrador implícito de segundo orden conocido como la regla del trapecio. Como se ha mencionado anteriormente, la correa se discretiza mediante el elemento tipo correa flexible presentado en la sección 7.2.

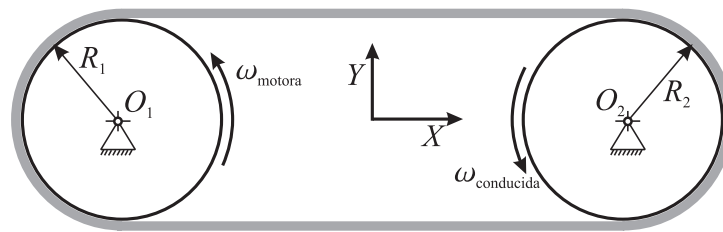


Figura 7.4: Esquema del sistema de transmisión.

El sistema que se muestra en la figura 7.4 está compuesto por dos poleas de radios R_1 y R_2 , cuyos centros se sitúan en O_1 y O_2 , respectivamente. Ambas poleas se consideran rígidas y con un solo grado de libertad de giro alrededor de su centro. Para que la fricción sea capaz de transmitir la rotación de la polea motora, es necesario que exista una fuerza normal suficiente entre la polea y la correa. Para ello la correa se monta sobre las poleas con una tensión inicial debida a que su longitud natural es inferior a dos veces la distancia entre ejes más la longitud de las dos semicircunferencias de las correas. En las simulaciones que se muestran a continuación la deformación inicial de la correa es de un 0.25%. El resto de parámetros del modelo aparece en la tabla 7.1.

Parámetro	Símbolo	Valor
Radio de la polea conductora	R_1	0.08125 m
Radio de la polea conducida	R_2	0.08125 m
Coordenadas del centro de la polea conductora	O_1	(-0.191441 m, 0.0 m)
Coordenadas del centro de la polea conducida	O_2	(0.191441 m, 0.0 m)
Densidad de masa de la correa	ρ	1036 Kg/m ³
Área de la sección recta indeformada	A	0.01·0.01 m ²
Módulo de Young de la correa	E	1.0·10 ⁸ Pa
Módulo de Poisson de la correa	ν	0.3
Penalizador de la penetración	k_p	1.0·10 ⁷ N/m ²
Penalizador de la velocidad de penetración	c_p	1.0·10 ¹ Ns/m ²
Coefficiente de rozamiento correa-polea	μ	1.2
Momento de inercia de la polea conducida	I	0.1 Kg m ²
Pendiente de la ley trilineal de fricción	v_s	1.0·10 ⁵ Kg/m s
Modificador de la rigidez axial	α_1	1.0
Modificador de la rigidez a flexión	α_2	0.01

Tabla 7.1: Parámetros del modelo de la transmisión.

La primera columna de la tabla 7.1 muestra el nombre del parámetro al que se le asigna un valor en la tercera columna, mientras que la segunda columna de la gráfica muestra el símbolo usado para representarlo. Con tales valores, la polea motora se somete al siguiente perfil de velocidad:

$$\omega_1 = \begin{cases} 0, & t \leq 0.05 \\ 12(t - 0.05)/0.55, & 0.05 < t \leq 0.6 \\ 12, & 0.6 < t \end{cases} \quad (7.29)$$

En la polea conducida no se aplica, en principio, ningún par resistente. Puesto que el sistema parte de una posición inicial con tensiones debidas a la deformación de la correa y al uso de un método de contacto elástico, antes de llevar a cabo la simulación se resuelve el problema estático (sin fuerzas de inercia) para obtener la solución de equilibrio que se usará como configuración inicial. Para resolver el problema estático se utiliza el método de Newton-Raphson para sistemas de ecuaciones no lineales [96].

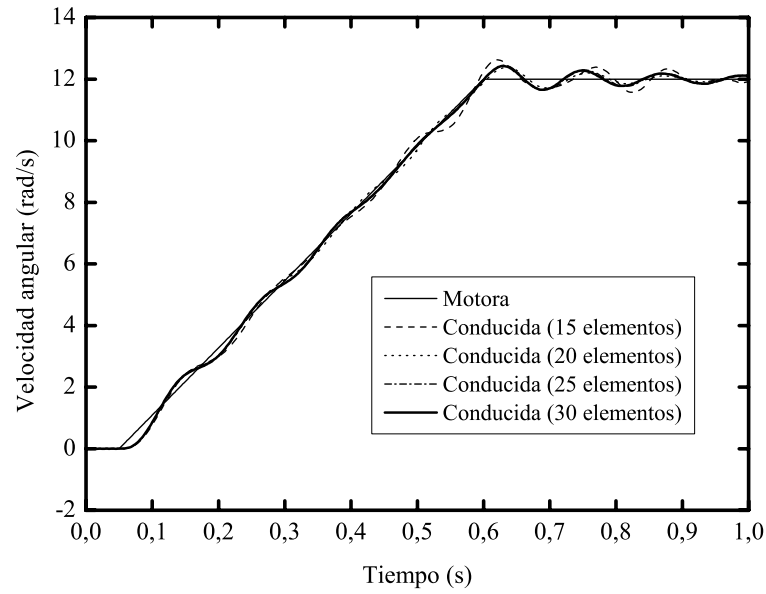


Figura 7.5: Velocidad angular de la polea conducida para distinto número de elementos.

La figura 7.5 muestra las velocidades angulares de las poleas conductora y conducida durante la simulación de varios modelos con distinto número de elementos. Como puede observarse en la figura, los resultados obtenidos con el modelo de 20 elementos son muy parecidos a los obtenidos con los modelos de 25 y 30 elementos. Sin embargo, el modelo de 15 elementos da resultados aún diferentes, por lo que el número mínimo de elementos es del orden de 20. Nótese que el modelo de 20 elementos utiliza cuatro elementos por mitad de polea mientras que los modelos de Leamy y Wasfy [100, 101] utilizan 38 elementos con resistencia a flexión y 100 sin rigidez a flexión por cada mitad de polea. De esta forma, el modelo de 20 elementos usa 30 coordenadas nodales por mitad de polea, mientras que los modelos de Leamy y Wasfy usan 154 y 202 coordenadas, respectivamente.

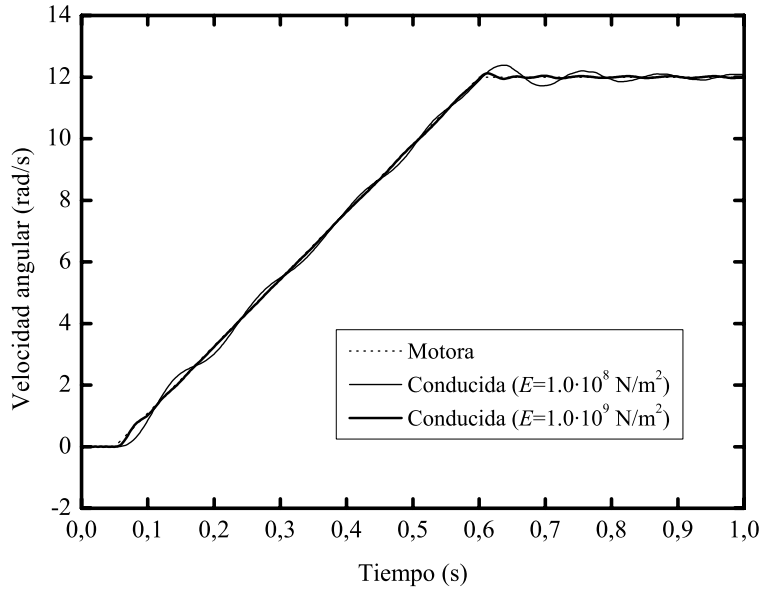


Figura 7.6: Influencia de la rigidez de la correa.

La amplitud de las oscilaciones de la velocidad angular de la polea conducida alrededor de la velocidad de la polea motora se reduce si se incrementa la rigidez del material de la correa. En la figura 7.6 se muestran los resultados de dos modelos de 20 elementos que solo se diferencian en el valor del módulo de Young. A continuación, en la figura 7.7 se muestra la influencia del parámetro v_s . En esta figura se presentan los resultados obtenidos con dos modelos de 20 elementos, módulo de Young de 1.0 GPa y con iguales valores del resto de parámetros excepto v_s . En la simulación se han usado dos valores de este parámetro, $1.0 \cdot 10^4$ y $1.0 \cdot 10^5$ Kg/m s. Se observa que, al aumentar el valor de este parámetro, la integración numérica de las ecuaciones se vuelve más complicada. Sin embargo, valores pequeños de v_s dan lugar a un excesivo deslizamiento de la correa sobre las poleas como se puede ver en los perfiles de velocidad que se muestran en la figura 7.7.

El modelo realizado no se restringe a sistemas en los que las poleas son idénticas. Como prueba de ello, se muestra a continuación (figura 7.8) la relación de

velocidades obtenida al simular un sistema con dos poleas de distinto radio. En tal sistema, la polea motora tiene un radio de 0.08125 m y la conducida, 0.1218 m. De nuevo, la elongación inicial de la correa se fija en un 0.25 %. El resto de valores de los parámetros son los mismos que se encuentran en la tabla 7.1.

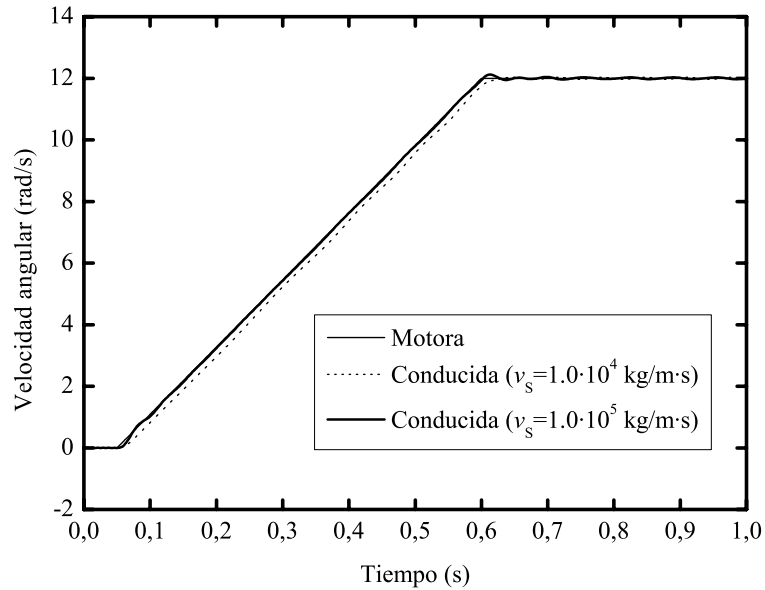


Figura 7.7: Influencia del parámetro v_s .

Merece la pena hacer hincapié en la importancia que tiene el reducir el número de elementos necesarios para modelar el contacto entre la correa y las poleas. Piénsese, por ejemplo, que en muchas aplicaciones la distancia entre centros es mucho mayor que la longitud de arco de polea sobre la que apoya la correa. También es muy frecuente el uso de poleas con radios muy distintos para producir un cambio de velocidad o par de un eje a otro. En tales casos, es importante cualquier reducción en el número de elementos por mitad de polea puesto que la polea más pequeña condiciona el número total de elementos necesarios.

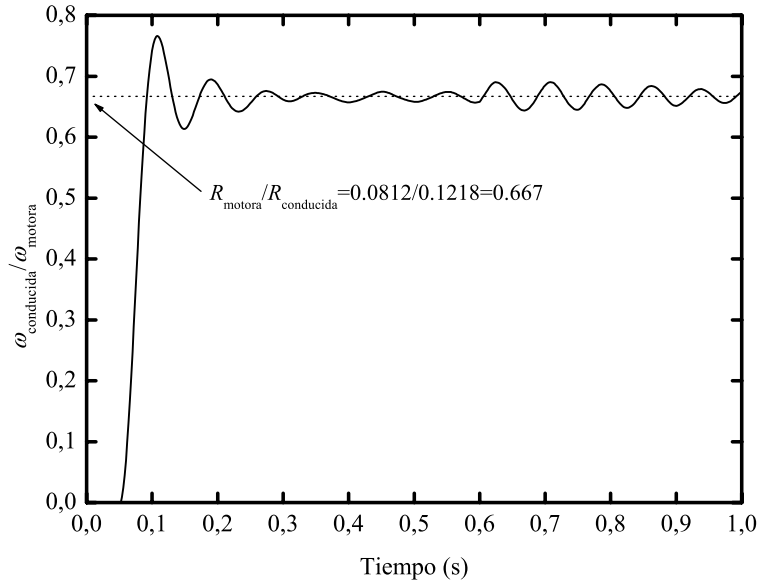


Figura 7.8: Relación de transmisión para distinto radio.

Para estudiar la distribución de fuerzas normales y de fricción en el contacto entre la correa y las poleas, se ha aplicado un par resistente sobre la polea conducida de acuerdo con la siguiente expresión:

$$T_a = \begin{cases} 0, & t \leq 0,05 \\ \frac{45}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi(t - 0,05)}{0,55} \right), & 0,05 < t \leq 0,6 \\ 45, & 0,6 < t \end{cases} \quad (7.30)$$

En este ejemplo, se usan los mismos parámetros geométricos que se muestran en la tabla 7.1, sin embargo, la elongación inicial se ha aumentado a un 2.5%. Por otro lado, el valor del parámetro que controla la rigidez a flexión de la polea se fija en 0.001 y el módulo de Young, en $1.0 \cdot 10^9$ N/m². La velocidad de giro final de la polea conductora se eleva a 120 rad/s y se aplica linealmente de forma similar a como se expresa en la ecuación (7.29). El número de elementos se ha aumentado a 30 para obtener la distribución de fuerzas de contacto y el valor de

v_s se fija inicialmente en $1.0 \cdot 10^4$ Kg/m s. El motivo de aumentar el número de elementos es porque se ha observado que las fuerzas de contacto muestran una mayor sensibilidad a la discretización usada. De esta forma, la figura 7.9 muestra las fuerzas normales (izquierda) y tangenciales (derecha) de contacto sobre ambas poleas. La figura 7.10 muestra las mismas magnitudes en el caso de que v_s se aumente a $1.0 \cdot 10^5$ Kg/m s. En ambas figuras, las fuerzas se representan a lo largo de una coordenada que recorre la longitud de la correa indeformada, desde el nodo 1 hasta el 31. Los resultados se han obtenido al final de la simulación, es decir, al cabo de un segundo.

Como puede verse en las figuras 7.9 y 7.10, el parámetro v_s ejerce una gran influencia sobre la distribución de fuerzas de contacto. Cuando v_s toma un valor de $1 \cdot 10^4$ Kg/m s, la tensión normal muestra una tendencia lineal, que también puede observarse en los resultados de Leamy y Wasfy [100, 101]. Las fuerzas de contacto tienen un aspecto menos lineal si v_s se aumenta hasta $1 \cdot 10^5$ Kg/ms, lo que también se observa en los resultados de la bibliografía mencionada. En las figuras se observan picos en la fuerza de fricción a la entrada y a la salida de poleas, lo que también se observa en las referencias [100, 101]. Este efecto se pronuncia para altos valores de v_s .

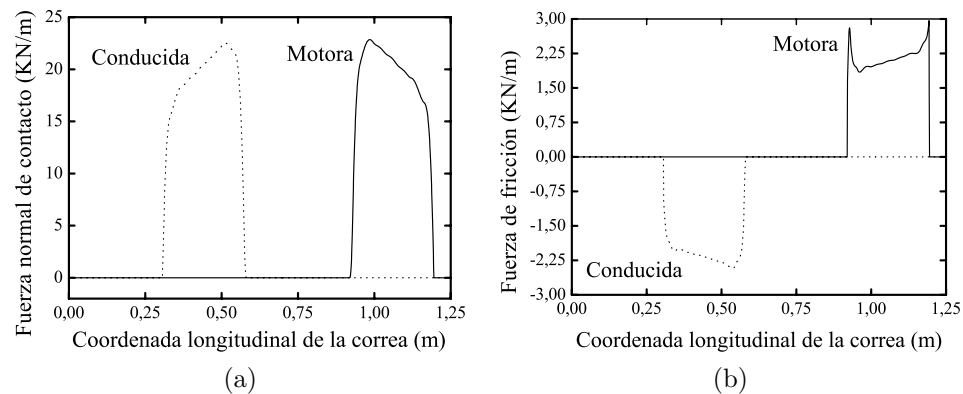


Figura 7.9: (a) Fuerza normal de contacto de cada polea ($v_s=1 \cdot 10^4$ Kg/m s) (b) Fuerza de fricción de cada polea ($v_s=1 \cdot 10^4$ Kg/m s).

La influencia del número de puntos de integración utilizados en el cálculo de las fuerzas del contacto se ha estudiado variando este número de 5 a 11. De esta forma, se ha podido observar que no se aprecian diferencias en las fuerzas de contacto para distinto número de puntos de integración.

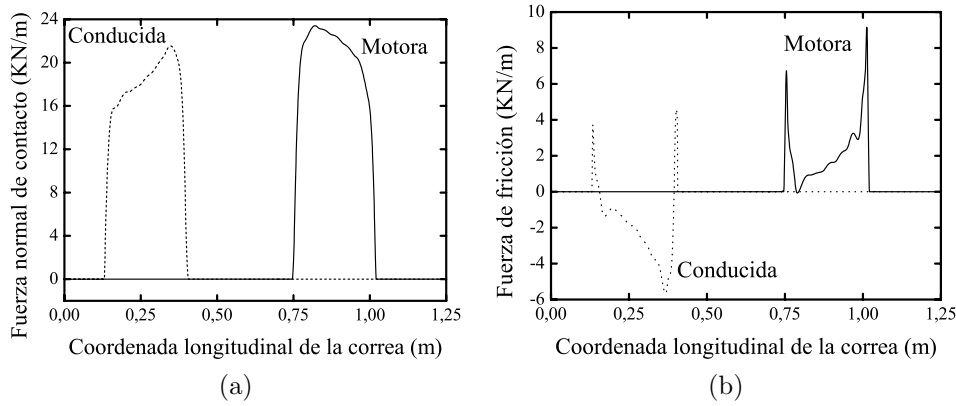


Figura 7.10: (a) Fuerza normal de contacto de cada polea ($v_s=1\cdot 10^5$ Kg/m s) (b) Fuerza de fricción de cada polea ($v_s=1\cdot 10^5$ Kg/m s).

Capítulo 8

Resumen y conclusiones

Este último capítulo comienza con un sumario de los contenidos que se han ido tratando a lo largo de la tesis en sus distintas partes. Tras el mencionado resumen, que pretende dibujar un esquema de esta tesis en la mente del lector, se presentan las conclusiones extraídas a lo largo del estudio realizado y se señalan las contribuciones originales de esta tesis. Finalmente, se concluye con una sección en la que se recogen las líneas de trabajo que se pretenden acometer tras la realización de esta tesis y se apuntan algunas otras alternativas que pueden continuar este trabajo.

8.1. Resumen

Las primeras líneas de esta tesis se emplearon para situar el estudio que se ha realizado en el contexto de la Dinámica de Sistemas Multicuerpo (DSM). Se revisó con brevedad la historia más reciente de la DSM y se hizo hincapié en el auge que en los últimos años está teniendo. Auge que ha sido posible, en gran medida, por la mejora en las prestaciones de los ordenadores actuales. Entre los posibles criterios que pueden utilizarse para clasificar las formulaciones disponibles en DSM, se escogió el tipo de coordenadas empleadas. De esta forma, se revisaron las formulaciones más usadas en sistemas multicuerpo rígidos, en primer lugar, y, posteriormente, en sistemas flexibles.

El siguiente capítulo se dedicó fundamentalmente a presentar la formulación en coordenadas nodales absolutas, diseñada para simular sistemas multicuerpo flexibles, y la formulación en coordenadas naturales, utilizada en sistemas compuestos por sólidos rígidos. En ambos casos se presentaron las formulaciones en los casos plano y espacial. Ambas formulaciones pertenecen al grupo de las formulaciones que utilizan coordenadas referidas a un sistema inercial. Se pusieron de manifiesto las características comunes de ambas formulaciones, como el uso únicamente de variables vectoriales como coordenadas o la constancia de la matriz de masa y, como consecuencia de ello, la ausencia de términos cuadráticos en velocidades asociadas a fuerzas de inercia centrífugas y de Coriolis. Este capítulo incluyó algunas de las nociones básicas sobre DSM que se han considerado importantes para comprender los desarrollos que se acometieron posteriormente.

Puestas de manifiesto algunas de las limitaciones de los elementos finitos basados en coordenadas absolutas en el capítulo 2, como la reducida tasa de convergencia, el tercer capítulo comienza con un estudio detallado del algoritmo de evaluación de las fuerzas elásticas en elementos deformables por cortante. Este estudio permitió elaborar una forma más eficiente de evaluar las fuerzas elásticas. Se mostró que las fuerzas elásticas del elemento finito pueden escribirse como el producto de una matriz de rigidez que depende de las coordenadas nodales y el vector de coordenadas nodales. Tras algunas operaciones algebraicas, la matriz de rigidez se descompuso en la suma de dos matrices, una constante y otra cuyos coeficientes pueden calcularse como formas cuadráticas del vector de coordenadas nodales. El nuevo algoritmo se basó en el uso de las matrices, denominadas matrices invariantes, asociadas a dichas formas cuadráticas. La evaluación de estas matrices y sus propiedades se detallaron en dicho capítulo. Con la ayuda de estas matrices, las fuerzas elásticas no requieren ser integradas sobre el volumen del elemento para cada evaluación de las fuerzas. El beneficio obtenido del uso de estas matrices se pudo observar en los resultados obtenidos en la simulación de un problema dinámico. Dada la relativamente reciente aparición de la formulación

en coordenadas nodales absolutas, no había en la bibliografía relacionada ningún modelo de amortiguamiento interno. Por este motivo, el capítulo 3 contiene también un modelo de amortiguamiento interno para la ANCF, cuyo algoritmo de evaluación hace también uso de la técnica de las matrices invariantes. El modelo de amortiguamiento desarrollado se basa en una relación viscoelástica lineal entre tensiones y deformaciones. Debido a que el comportamiento de los materiales ante deformaciones volumétricas y tagenciales suele ser diferente, se han utilizado dos relaciones viscoelásticas distintas para las componentes octaédricas y desviadoras de los tensores de tensión y deformación. En este capítulo se verificó analítica y numéricamente que el modelo de amortiguamiento desarrollado no produce disipación de energía durante el movimiento como sólido rígido del sistema.

En el capítulo 4 se abordó la formulación de las restricciones cinemáticas asociadas a los pares más usados. Este capítulo partió de la descripción de las variables usadas por las formulaciones en coordenadas nodales absolutas y en coordenadas naturales como una misma entidad geométrica. Esta coincidencia en ambas formulaciones hizo posible que pudieran compartirse las variables entre sólidos rígidos y flexibles, permitiendo reducir el número de coordenadas y de ecuaciones de restricción. Se presentó también un algoritmo secuencial para la eliminación de ecuaciones de restricción lineales que aparecen con frecuencia en la formulación de los pares cinemáticos. En otros casos, las ecuaciones de restricción eran inevitablemente no lineales, como es el caso de los pares de deslizamiento sobre trayectorias flexibles o curvas.

A continuación se han incluido los resultados numéricos obtenidos al aplicar la formulación rígido-flexible a algunos sistemas multicuerpo planos y espaciales. La formulación en coordenadas nodales absolutas posteriormente se usó en la simulación de una viga sometida a rotación alrededor de un eje perpendicular que pasa por uno de sus extremos. Los resultados que se obtienen mediante el uso de la ANCF en el estudio de la viga rotativa se analizaron y se pudieron extraer algunas conclusiones de la dinámica de este sistema. Por último, se simuló la dinámica

de una transmisión por correa entre dos poleas rígidas. En esta aplicación se requirió modificar la formulación del elemento finito de Dufva [40] para obtener un elemento tipo correa.

8.2. Conclusiones

A continuación se muestran las principales conclusiones extraídas del estudio realizado en esta tesis. Dichas conclusiones se agrupan según el tema del que se derivan.

Del desarrollo de un nuevo algoritmo para la evaluación de las fuerzas elásticas en elementos viga de Omar [33] y Yakoub [35, 34] con deformación por cortante se obtienen la siguientes conclusiones:

- Se ha demostrado que no es necesario realizar la integral de las fuerzas elástica sobre el volumen del elemento para cada evaluación de dicho vector de fuerzas, lo que reduce apreciablemente el tiempo de cálculo. La factorización de las coordenadas nodales fuera de dicha integral permite integrar las matrices invariantes una única vez para todo la simulación en la etapa de preproceso.
- Dado que la matriz de rigidez es simétrica, sólo es necesario calcular las matrices invariantes asociadas a los elementos situados en la diagonal y en el triángulo superior o inferior de la matriz.
- La estructura de bloques de la matriz de funciones de forma permite considerar que la matriz de rigidez está compuesta por bloques cuadrados, donde cada bloque tiene una única matriz invariante asociada. Además, cada una de estas matrices invariantes esta compuesta por bloques del mismo tamaño que tienen un único valor escalar asociado. Gracias a esta conclusión, el cálculo de estas matrices y la cantidad de información que hay que almacenar puede reducirse bastante.

- La matriz jacobiana de las fuerzas elásticas puede evaluarse en función de las mismas matrices invariantes. Esto produce un gran beneficio ya que se evita la integración de dicha matriz sobre el volumen del elemento, lo cual resulta muy costoso. Con este algoritmo de evaluación se obtiene la matriz jacobiana exacta de forma eficiente.
- La energía de deformación elástica del elemento también puede calcularse en función de las matrices invariantes.
- El mismo conjunto de matrices invariantes puede usarse para evaluar las fuerzas elásticas de dos elementos cuyas propiedades mecánicas sean iguales.
- El conjunto de matrices invariantes asociadas a un determinado elemento puede usarse para evaluar las fuerzas elásticas de otro elemento cuya configuración de referencia sea paralela.
- Los elementos cuyas configuraciones de referencia estén relacionadas por una rotación también comparten el conjunto de matrices invariantes. Este punto junto con los dos anteriores suponen una reducción considerable del número de matrices necesarias y de la memoria demandada en la fase de preproceso.
- Si un modelo contiene una discretización con numerosos elementos cuyas configuraciones de referencia son curvas y distintas, la cantidad de datos asociada a matrices invariantes a almacenar en la etapa de preproceso puede ser excesiva. En tal caso, puede ser conveniente integrar las fuerzas elásticas sobre el volumen del elemento en cada evaluación.

El estudio del modelo de amortiguamiento interno realizado en el capítulo 3 conduce a las siguientes conclusiones:

- El algoritmo desarrollado a partir del modelo de amortiguamiento permite la evaluación sistemática de las fuerzas de amortiguamiento. La evaluación las fuerzas de amortiguamiento hace uso de un conjunto de matrices invariantes

similar al descrito para las fuerzas elásticas, por lo que el modelo de fuerzas de amortiguamiento se beneficia de las mismas ventajas que el de las fuerzas elásticas.

- El modelo de amortiguamiento desarrollado no disipa energía durante el movimiento de sólido rígido.
- El modelo permite que la disipación ante sollicitaciones que produzcan deformaciones volumétricas sea distinta a las que produzcan una modificación del tensor desviador de deformaciones. Esto se controla a través de la inclusión de dos parámetros que pueden ser fijados por el usuario.
- Con la intención de obtener un modelo sistemático basado en la técnica de las matrices invariantes, el desviador de deformaciones se calculó asumiendo pequeñas deformaciones, pero grandes desplazamientos. Esto, si bien supuso una mejora a la hora de evaluar las fuerzas numéricamente, limita la aplicación de dicho modelo a situaciones en las que las deformaciones sean pequeñas. No obstante, el caso de pequeñas deformaciones y grandes desplazamientos es bastante común en dinámica de sistemas multicuerpo.
- Los parámetros del modelo pueden ser caracterizados mediante ensayos de laboratorio. Otra posibilidad consiste en estimar su valor mediante el análisis modal de configuraciones que compartan las condiciones de contorno con la configuración original.

De acuerdo con el estudio realizado sobre la formulación de pares cinemáticos entre sólidos rígidos y flexibles puede concluirse lo siguiente:

- El conjunto de coordenadas utilizadas en la formulación rígido-flexible presentada está definido por completo en el sistema global de referencia.
- No se usan ángulos ni parámetros angulares como variables, sino que todas las variables son vectores en el sistema global.

- La matriz de masa global del sistema rígido-flexible es constante como consecuencia del uso de variables inerciales. Por este motivo, las ecuaciones del movimiento no contienen términos cuadráticos en velocidades asociados a fuerzas de inercia centrífugas o de Coriolis.
- Se consigue una gran reducción en los números totales de coordenadas y de restricciones si se comparten las coordenadas de puntos y vectores mediante el uso de matrices de conectividad entre sólidos.
- Las ecuaciones lineales de restricción pueden eliminarse de forma secuencial transformando las ecuaciones del movimiento cada vez que se elimina una ecuación. La forma en la que se seleccionan las coordenadas que se eliminan evita tener que comprobar que las ecuaciones eliminadas son linealmente independientes, lo cual puede ser tedioso en sistemas con muchos grados de libertad.
- Los pares de deslizamiento sobre trayectorias flexibles o curvas rígidas dan lugar a ecuaciones no lineales y no pueden, en general, eliminarse algebraicamente. La razón por la que resultan no lineales es la descripción cinemática del elemento o de la curva rígida en cuestión.

Después del estudio del efecto de rigidización centrífuga en el problema de la viga rotativa mediante la formulación en coordenadas nodales absolutas se extraen las conclusiones que se enumeran a continuación:

- Cuando se utiliza un sólo elemento tipo Euler-Bernoulli basado en la formulación en coordenadas nodales absolutas y en teoría lineal de elasticidad para simular el problema de la viga rotativa se obtienen soluciones inestables cuando la velocidad de rotación alcanza la frecuencia natural de flexión de la viga en voladizo. Cuando se aumenta el número de elementos, se observa una dependencia del valor crítico de la velocidad con el número de elementos. Cuanto más alto es el número de elementos, mayor es el valor de la velocidad crítica. Sin embargo, se observa que el valor crítico no desaparece, sino

que siempre existe independientemente del número de elementos. En esta conclusión puede entenderse que se habla de subestructuras puesto que cada elemento tiene un sistema de referencia local.

- La formulación en referencias flotantes basada en coordenadas nodales [19] utiliza el mismo sistema de referencia para medir las deformaciones de todos los elementos, por lo que la matriz de rigidez de la viga es constante. La velocidad crítica en ese caso no depende del número de elementos, sino que es constante e igual a la frecuencia natural de la viga en voladizo. Sin embargo, se usa un sistema de referencia local para cada elemento se obtiene una función de fuerzas elásticas no lineal que es la misma que si se introduce una transformación de rotación en la función de fuerzas elásticas del elemento tipo Euler-Bernoulli.
- Una alternativa al uso de un elevado número de elementos (o subestructuras) es el uso de una relación no lineal entre desplazamientos y deformaciones que tenga en cuenta el acoplamiento entre las deformaciones axiales y de flexión. Los elementos de Omar [33] y Yakoub [34] dan resultados estables en el problema de la viga rotativa, alcanzando la convergencia con un número razonable de elementos.
- Cuando se usa la teoría lineal de la elasticidad siempre se observa una pérdida de rigidez al aumentar la velocidad que culmina con la inestabilidad. De esta forma, al aumentar el número de elementos se va aumentando la rigidez hasta la convergencia. En cambio, en la formulación elástica no lineal no se observa pérdida de rigidez, por lo que al aumentar el número de elementos se observa una disminución de la rigidez del modelo hasta la convergencia.
- El modelo de la viga rotativa con elementos 2D de Omar [33] se usa para comparar el comportamiento de dos integradores implícitos: la regla trapezoidal que es de segundo orden y el método Runge-Kutta basado en la fórmula *Radau IIA* que tiene quinto orden de exactitud. Se observa que la regla

trapezoidal da buenos resultados con un considerablemente menor esfuerzo computacional.

La simulación de la transmisión por correa flexible entre poleas rígidas mediante la formulación en coordenadas absolutas representa una aplicación de bastante interés en la que por primera vez se introduce la formulación en coordenadas nodales absolutas. Este análisis condujo a las conclusiones que se muestran a continuación:

- La formulación en coordenadas nodales absolutas ha facilitado la descripción del contacto entre polea y correa debido al uso de vectores de posición en el sistema inercial como variables.
- Se ha desarrollado un elemento finito tipo correa a partir del elemento de Dufva [40] que permite controlar la rigidez a flexión y la rigidez axial mediante el uso de dos parámetros. De esta forma, el elemento puede presentar una alta rigidez ante esfuerzos axiales a la vez que oponer una pequeña resistencia a la deformación por flexión.
- Debido al uso de un modelo de contacto elástico entre la correa y las poleas, que admite la penetración de la correa en la superficie de la polea para calcular las fuerzas de contacto, el método no requiere el uso de ecuaciones de restricción.
- Gracias al uso de elementos que pueden reproducir una geometría curva, se han distribuido las fuerzas de contacto a lo largo del elemento, en lugar de concentrarlas en los nodos como se ha hecho en la literatura relacionada con esta aplicación [99, 100, 101].
- El uso de elementos de orden superior y la distribución de las fuerzas de contacto a lo largo de los elementos ha permitido obtener una respuesta realista con un número de elementos considerablemente menor que los modelos encontrados en la bibliografía [100, 101].

8.3. Contribuciones originales de esta tesis

A continuación se recogen las ideas originales que se han desarrollado en esta tesis doctoral:

1. La combinación de las formulaciones en coordenadas nodales absolutas y en coordenadas naturales para sistemas rígido-flexibles. Dicha combinación permite reducir el número de ecuaciones de restricción y el total de coordenadas al compartir variables entre sólidos. Además, permite eliminar las restricciones lineales asociadas a algunos pares cinemáticos y produce una matriz de masa constante.
2. Las matrices invariantes asociadas a la evaluación de las fuerzas elásticas se han desarrollado por primera vez en esta tesis. Además, es también original el estudio de las propiedades de estas matrices y la posibilidad de usar las mismas matrices en la evaluación de las fuerzas elásticas asociadas a distintos elementos.
3. La introducción del amortiguamiento interno en la formulación en coordenadas nodales absolutas a través de una función de disipación de Rayleigh y el algoritmo de evaluación basado en las matrices de tipo invariante.
4. El uso de la formulación en coordenadas nodales absolutas en la simulación de la viga rotativa para estudiar la existencia de otras velocidades críticas del modelo con varias subestructuras. En el modelo realizado, cada elemento es equiparable a una subestructura, ya que cada uno tiene un sistema de coordenadas local, con la ventaja de poder eliminar todas las restricciones del modelo.
5. La modelización del sistema rígido-flexible compuesto por una correa flexible y dos poleas rígidas mediante la formulación en coordenadas nodales absolutas ha sido realizada por primera vez en esta tesis.

6. La modificación del elemento tipo viga de Dufva [40] para obtener el elemento tipo correa con la posibilidad de controlar las rigideces axial y de flexión mediante dos parámetros independientes.
7. La modificación del modelo de contacto de Leamy y Wasfy [101, 100] para poder distribuir las fuerzas de contacto a lo largo del elemento tipo correa.

8.4. Publicaciones derivadas de esta tesis

Los desarrollos contenidos en la presente tesis han dado lugar a las siguientes publicaciones indexadas:

1. D. García-Vallejo, J.L. Escalona, J. Mayo y J. Domínguez, “Describing rigid-flexible multibody systems using absolute coordinates”, *Nonlinear Dynamics*, **34**, 75-94, 2003.
2. D. García-Vallejo, J. Mayo, J.L. Escalona y J. Domínguez, “Efficient evaluation of the elastic forces and the Jacobian in the absolute nodal coordinate formulation”, *Nonlinear Dynamics*, **35**, 313-329, 2004.
3. Juana M. Mayo, Daniel García-Vallejo y Jaime Domínguez, “Study of the geometric stiffening effect: comparison of different formulations”, *Multibody System Dynamics*, **11**, 321-341, 2004.
4. García-Vallejo, D., Sugiyama, H., y Shabana, A. A., “Finite element analysis of the geometric stiffening effect: a correction in the floating frame of reference formulation”, *I-MECH E Journal of Multi-body Dynamics*, **219**, 187-202, 2005.
5. García-Vallejo, D., Sugiyama, H., y Shabana, A. A., “Finite element analysis of the geometric stiffening effect: nonlinear elasticity”, *I-MECH E Journal of Multi-body Dynamics*, **219**, 203-211, 2005.

6. García-Vallejo, D., Valverde, J., y Domínguez, J., “An internal damping model for the absolute nodal coordinate formulation”, *Nonlinear Dynamics*, **42**, 347-369, 2005.
7. Kerkkänen, K.S., García-Vallejo, D. y Mikkola, A.M., “Modeling of belt-drives using a large deformation finite element formulation”, *Nonlinear Dynamics*, **43**, 239-256, 2006.

8.5. Líneas de investigación futuras

Dentro de las posible líneas futuras de investigación está la implementación de la formulación rígido-flexible en un programa de propósito general para el análisis de mecanismos, pues hasta ahora, los problemas que se han resuelto han requerido programas particulares.

Otra línea a investigar es la mejora de la convergencia de los elementos finitos existentes. De hecho, se está estudiando la posibilidad utilizar la integración reducida para eliminar el bloqueo por cortante de los elementos de Omar [33].

El modelo de amortiguamiento puede completarse mediante el cálculo exacto de las componentes desviadoras y volumétricas. Con ello se obtendría un modelo más complejo y se perdería la agilidad del algoritmo presentado en esta tesis, pero se daría la posibilidad de aplicarlo en situaciones con grandes deformaciones.

Además, se podría completar el estudio de la viga rotativa con un análisis de estabilidad y bifurcaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias obtenidas mediante la ANCF para la viga rotativa con distintos valores de la velocidad de rotación.

Apéndice A

Transformación ortogonal y linealización de las fuerzas elásticas

A.1. Rotación de la función de fuerzas elásticas

En este apéndice se demuestra que, en la formulación en coordenadas nodales absolutas, la función de fuerzas elásticas de un elemento finito tipo Euler-Bernoulli tiene la misma expresión en el sistema global que en un sistema de referencia rotado como el de la figura 6.1 del capítulo 6. Para ello, se obtiene la expresión de la función de fuerzas elásticas por un procedimiento diferente al que se encuentra en la bibliografía [19, 47]. El vector de fuerzas elásticas se obtiene derivando con respecto al vector de coordenadas nodales absolutas la energía de deformación del elemento

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EI \left(\frac{\partial^2 u_t}{\partial x^2} \right)^2 + EA \left(\frac{\partial u_l}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (\text{A.1})$$

En la expresión anterior \mathbf{u}_t y \mathbf{u}_l representan, respectivamente, los desplazamientos transversal y longitudinal por deformación de un punto arbitrario del elemento finito. Estos desplazamientos están medidos en un sistema de referencia local del elemento (ver figura 2.3 del capítulo 2). En este apéndice se usa el sistema tangente

para calcular los desplazamientos por deformación del elemento finito. Así, los vectores unitarios que definen la dirección de los ejes del sistema local tienen las siguientes expresiones:

$$\mathbf{i}_1 = \frac{\partial \mathbf{r} / \partial x}{\|\partial \mathbf{r} / \partial x\|} \Big|_{x=0} = \frac{\mathbf{S}_{,x}(0) \mathbf{e}}{\|\mathbf{S}_{,x}(0) \mathbf{e}\|} = \frac{\mathbf{S}_{0,x} \mathbf{e}}{\sqrt{\mathbf{e}^T \mathbf{S}_{0,x}^T \mathbf{S}_{0,x} \mathbf{e}}} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{i}_2 = \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{i}_1 = \frac{\tilde{\mathbf{I}} \mathbf{S}_{0,x} \mathbf{e}}{\sqrt{\mathbf{e}^T \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{S}_{0,x}^T \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{S}_{0,x} \mathbf{e}}} \quad (\text{A.3})$$

donde

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Nótese que el vector unitario \mathbf{i}_1 es tangente a la línea media del elemento en el nodo inicial ($x = 0$) puesto que tiene la misma dirección que $\mathbf{r}_{,x}$. Para simplificar ligeramente la nomenclatura, en la ecuación (A.2) se ha utilizado la siguiente definición:

$$\mathbf{S}_{0,x} = \mathbf{S}_{,x}(0) \quad (\text{A.5})$$

Una vez que se han obtenido los vectores unitarios que definen la dirección de los ejes del sistema local de referencia, los desplazamientos de un punto arbitrario del elemento pueden obtenerse por proyección como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} u_l &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{i}_1 - x = \mathbf{e}^T (\mathbf{S} - \mathbf{S}_0)^T \mathbf{i}_1 - x \\ u_t &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{i}_2 = \mathbf{e}^T (\mathbf{S} - \mathbf{S}_0)^T \mathbf{i}_2 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

donde

$$\mathbf{S}_0 = \mathbf{S}(0) \quad (\text{A.7})$$

De acuerdo con la ecuación (A.1), las siguientes derivadas se necesitan para evaluar la energía de deformación del elemento finito

$$\frac{\partial u_l}{\partial x} = \mathbf{e}^T \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x} \right)^T \mathbf{i}_1 - 1 = \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{i}_1 - 1 = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{0,x} \mathbf{e}}{\sqrt{\mathbf{e}^T \mathbf{S}_{0,x}^T \mathbf{S}_{0,x} \mathbf{e}}} - 1 \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} = \mathbf{e}^T \left(\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial x^2} \right)^T \mathbf{i}_2 = \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,xx}^T \mathbf{i}_2 = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,xx}^T \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{S}_{0,x} \mathbf{e}}{\sqrt{\mathbf{e}^T \mathbf{S}_{0,x}^T \mathbf{S}_{0,x} \mathbf{e}}} \quad (\text{A.9})$$

Una vez, evaluada la expresión de la energía de deformación elástica del elemento, la función de fuerzas elásticas se obtiene de la siguiente forma:

$$\mathbf{F}_e = - \left(\frac{\partial U_e}{\partial \mathbf{e}} \right)^T \quad (\text{A.10})$$

Al derivar la expresión de la energía de deformación elástica de la ecuación (A.1) con respecto al vector de coordenadas se obtienen términos con la siguiente forma:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{e}} \left(\frac{\mathbf{e}^T \mathbf{C} \mathbf{e}}{\sqrt{\mathbf{e}^T \mathbf{B} \mathbf{e}}} \right)^2 \right]^T = \left[\frac{2(\mathbf{C} + \mathbf{C}^T) \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{C}}{\mathbf{e}^T \mathbf{B} \mathbf{e}} - \left(\frac{\mathbf{e}^T \mathbf{C} \mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \mathbf{B} \mathbf{e}} \right)^2 (\mathbf{B} + \mathbf{B}^T) \right] \mathbf{e} \quad (\text{A.11})$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{e}} \left(\frac{\mathbf{e}^T \mathbf{C} \mathbf{e}}{\sqrt{\mathbf{e}^T \mathbf{B} \mathbf{e}}} - 1 \right)^2 \right]^T = \left[\frac{2(\mathbf{C} + \mathbf{C}^T) \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{C}}{\mathbf{e}^T \mathbf{B} \mathbf{e}} - \left(\frac{\mathbf{e}^T \mathbf{C} \mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \mathbf{B} \mathbf{e}} \right)^2 (\mathbf{B} + \mathbf{B}^T) \right. \\ \left. - \frac{2(\mathbf{C} + \mathbf{C}^T)}{\sqrt{\mathbf{e}^T \mathbf{B} \mathbf{e}}} + \frac{(\mathbf{B} + \mathbf{B}^T) \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{C}}{(\mathbf{e}^T \mathbf{B} \mathbf{e})^{3/2}} \right] \mathbf{e} \quad (\text{A.12})$$

donde la matriz \mathbf{C} de la ecuación (A.11) representa el producto de matrices $\mathbf{S}_{,xx}^T \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{S}_{0,x}$, mientras que la matriz \mathbf{C} de la ecuación (A.12) representa el producto $\mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{0,x}$. Por otro lado, tanto en las ecuación (A.11) como en la (A.12), la matriz \mathbf{B} representa el producto $\mathbf{S}_{0,x}^T \mathbf{S}_{0,x}$.

Como se expuso en el capítulo 6, la formulación en coordenadas nodales absolutas permite relacionar dos vectores de coordenadas nodales definidos en dos sistemas que tienen el mismo origen pero distinta orientación de la siguiente forma:

$$\mathbf{e} = \mathbf{A}\mathbf{q} \quad (\text{A.13})$$

donde la matriz de transformación \mathbf{A} tiene la siguiente estructura diagonal por bloques:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_r \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

siendo

$$\mathbf{A}_r = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Puede comprobarse que los bloques de las matrices \mathbf{B} y \mathbf{C} de las ecuaciones (A.11) y (A.12) son, o bien diagonales o bien antisimétricos, debido a la estructura de la matriz de funciones de forma

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_1\mathbf{I} & s_2\mathbf{I} & s_3\mathbf{I} & s_4\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

De acuerdo con la estructura de las matrices \mathbf{B} y \mathbf{C} , es posible verificar que, para los dos posibles valores de \mathbf{C} , se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{B} \mathbf{e} &= \mathbf{B} \mathbf{q} \\ \mathbf{e}^T \mathbf{B} \mathbf{e} &= \mathbf{q}^T \mathbf{B} \mathbf{q} \\ \mathbf{e}^T \mathbf{C} \mathbf{e} &= \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q} \\ \mathbf{A}^T (\mathbf{C} + \mathbf{C}^T) \mathbf{e} &= (\mathbf{C} + \mathbf{C}^T) \mathbf{q} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

De esta forma, es fácil comprobar que las relaciones mostradas en la ecuación (A.17) conducen a la siguiente ecuación para la función de fuerzas elásticas:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{F}_e(\mathbf{e}) = \mathbf{A}^T \mathbf{F}_e(\mathbf{A}\mathbf{q}) = \mathbf{F}_e(\mathbf{q}) \quad (\text{A.18})$$

La ecuación anterior garantiza que al realizar el cambio de coordenadas de la ecuación (A.13), la expresión de la función \mathbf{F}_e no cambia. De esta forma, en el sistema de referencia global, el vector de fuerzas elásticas viene dado por $\mathbf{F}_e(\mathbf{e})$ mientras que en el sistema no inercial, viene dado por $\mathbf{F}_e(\mathbf{q})$.

A.2. Rotación de la matriz de masa

De igual forma que para las fuerzas elásticas, las matriz de masa resulta invariante respecto a una transformación ortogonal a través de la ecuación (A.13). En definitiva, se cumple la siguiente relación:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} = \mathbf{M} \quad (\text{A.19})$$

donde \mathbf{M} es la matriz de masa. Para verificar la ecuación anterior, recuérdese la expresión de la matriz de masa expuesta en el capítulo 2. Haciendo uso de la expresión de \mathbf{M} , la ecuación anterior puede escribirse como:

$$\mathbf{A}^T \left(\int_{V_e} \rho \mathbf{S}^T \mathbf{S} dV \right) \mathbf{A} = \int_{V_e} \rho \mathbf{S}^T \mathbf{S} dV \quad (\text{A.20})$$

donde la ecuación anterior es consecuencia de la siguiente relación:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{A} = (\mathbf{S} \mathbf{A})^T (\mathbf{S} \mathbf{A}) = \mathbf{S}^T \mathbf{S} \quad (\text{A.21})$$

Nótese que:

$$\mathbf{S} \mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc} s_1 \mathbf{A}_r & s_2 \mathbf{A}_r & s_3 \mathbf{A}_r & s_4 \mathbf{A}_r \end{array} \right] \quad (\text{A.22})$$

A.3. Linealización de las fuerzas elásticas

Cuando los desplazamientos por deformación son suficientemente pequeños, es posible linealizar la función de fuerzas elásticas en torno a una configuración de

referencia. Ello permite expresar las fuerzas elásticas a través de una matriz de rigidez constante. Así, para una configuración de referencia definida por un vector \mathbf{q}_0 , la matriz de rigidez constante se obtiene de la siguiente forma:

$$\mathbf{K} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}_e(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0} \quad (\text{A.23})$$

Es posible comprobar que cuando el vector \mathbf{q}_0 representa a un conjunto de configuraciones de referencia paralelas, la matriz que se obtiene es la misma. Esto permite utilizar el sistema de referencia intermedio que se presentó en el capítulo 6. Así, el conjunto de configuraciones de referencia paralelas al eje de abscisas queda representado por el vector:

$$\mathbf{q}_0 = \left[R_x \quad R_y \quad 1 \quad 0 \quad R_x + L \quad R_y \quad 1 \quad 0 \right]^T \quad (\text{A.24})$$

donde R_x y R_y son las coordenadas del nodo inicial del elemento finito en su configuración de referencia. De esta forma, es posible comprobar que la matriz de rigidez \mathbf{K} es independiente de los valores de R_x y R_y . Tras la linealización, dicha matriz tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{6EA}{5L} & 0 & \frac{EA}{10} & 0 & -\frac{6EA}{5L} & 0 & \frac{EA}{10} & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{EA}{10} & 0 & \frac{2EAL}{15} & 0 & -\frac{EA}{10} & 0 & -\frac{EAL}{30} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{6EA}{5L} & 0 & -\frac{EA}{10} & 0 & \frac{6EA}{5L} & 0 & -\frac{EA}{10} & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{EA}{10} & 0 & -\frac{EAL}{30} & 0 & -\frac{EA}{10} & 0 & \frac{2EAL}{15} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

Bibliografía

- [1] A. G. ERDMAN Y G. N. SANDOR. “Diseño de Mecanismos, Análisis y Síntesis”. Prentice Hall, México, tercera edición (1998).
- [2] J. WITTENBURG. “Dynamics of Systems of Rigid Bodies”. Teubner, Stuttgart, Germany (1977).
- [3] W. SCHIEHLEN. Multibody system dynamics: roots and perspectives. *Multibody System Dynamics* **1**, 149–188 (1997).
- [4] J. VALVERDE, J.L. ESCALONA, J. MAYO Y J. DOMÍNGUEZ. Dynamic analysis of a light structure in outer space: Short electrodynamic tether. *Multibody System Dynamics* **10**(1), 125–146 (2003).
- [5] T. M. WASFY Y A. K. NOOR. Computational strategies for flexible multibody systems. *Applied Mechanics Reviews* **56**(6), 553–613 (2003).
- [6] A. A. SHABANA. Flexible multibody dynamics: review of past and recent developments. *Multibody System Dynamics* **1**, 189–222 (1997).
- [7] F.R. GANTMÁJER. “Mecánica Analítica”. MIR, Moscú (1996).
- [8] H. BREMER. On the dynamics of elastic multibody systems. *Applied Mechanics Reviews* **52**(9), 275–303 (1999).
- [9] PARVIZ E. NIKRAVESH. “Computer-aided analysis of mechanical systems”. Prentice-Hall International, Inc., New Jersey, USA (1988).

- [10] B. PAUL Y K. KRAJČINOVIC. Computer analysis of machines with planar motion: Part 1 - kinematics; part 2 - dynamics. *ASME Journal of Applied Mechanics* **37**, 697–712 (1970).
- [11] E.J. HAUG. Elements and methods of computational dynamics. En E.J. HAUG, editor, “Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics”, páginas 3–38. Springer-Verlag, Heidelberg (1984).
- [12] J. GARCÍA DE JALÓN, J. UNDA, A. AVELLO Y J.M. JIMÉNEZ. Dynamic analysis of three-dimensional mechanisms in natural coordinates. *ASME Journal of Mechanisms, transmissions and automation in design* **109**, 460–465 (1987).
- [13] J. GARCÍA DE JALÓN Y E. BAYO. “Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems—The Real-Time Challenge”. Springer-Verlag, New York, USA (1993).
- [14] J. GARCÍA DE JALÓN, M.A. SERNA Y R. AVILÉS. Computer method for kinematic analysis of lower-pair mechanisms - i. *Mechanisms and Machine Theory* **16**(5), 543–556 (1981).
- [15] J. GARCÍA DE JALÓN, M.A. SERNA Y R. AVILÉS. Computer method for kinematic analysis of lower-pair mechanisms - ii. *Mechanisms and Machine Theory* **16**(5), 557–566 (1981).
- [16] A.A. SHABANA. “Computational Dynamics”. Second Edition. Wiley-Interscience, New York, USA (2001).
- [17] J. UNDA, J. GARCÍA DE JALÓN, F LOSANTOS Y R. ENPARANTZA. A comparative study on some different formulations of the dynamic equations of constrained mechanical systems. *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design* **109**, 566–474 (1987).
- [18] M. GÉRADIN Y A. CARDONA. “Flexible Multibody Dynamics. A finite element approach”. John Wiley & Sons Ltd, Chichester, England (2001).

- [19] A.A. SHABANA. “Dynamics of Multibody Systems, 2nd edition”. Cambridge University Press, New York, USA (1998).
- [20] N. VUKASOVIC, J.T. CELIGETA Y J. GARCÍA DE JALÓN. Flexible multibody dynamics based on a fully cartesian system of support coordinates. *ASME Journal of Mechanical Design* **115**, 294–299 (1993).
- [21] A. A. SHABANA Y R.A. WEHAGE. Coordinate reduction technique for transient analysis of spatial substructures with large angular rotations. *Journal of Structural Mechanics* **11** (1983).
- [22] J. MAYO. “Análisis geoméricamente no lineal en dinámica de mecanismos flexibles”. Tesis Doctoral, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, Universidad de Sevilla (1993).
- [23] T. BELYTSCHKO Y B.J. HSIEH. Non-linear transient finite element analysis with convected co-ordinates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **7**, 255–271 (1973).
- [24] A. A. SHABANA. Finite element incremental approach and exact rigid body inertia. *ASME Journal of Mechanical Design* **118** (1996).
- [25] J.C. SIMO. A finite strain beam formulation. the three-dimensional dynamic problem. part i. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **49**, 55–70 (1985).
- [26] J.C. SIMO Y L. VU-QUOC. A three-dimensional finite-strain rod model. part ii: Computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **58**, 79–116 (1986).
- [27] J.C. SIMO Y L. VU-QUOC. On the dynamics of flexible beams under large overall motions-the plane case: Part i and part ii. *ASME Journal of Applied Mechanics* **53**, 849–863 (1986).

- [28] A. AVELLO. “Dinámica de mecanismos flexibles con coordenadas cartesianas y teoría de grandes deformaciones”. Tesis Doctoral, Universidad de Navarra, San Sebastian (1990).
- [29] A. A. SHABANA, H HUSSEIN Y J. L. ESCALONA. Application of the absolute nodal coordinate formulation to large rotation and large deformation problems. *ASME Journal of Mechanical Design* **120** (1998).
- [30] A.A. SHABANA. Computer implementation of the absolute nodal coordinate formulation for flexible multibody dynamics. *Nonlinear Dynamics* **16**, 293–306 (1998).
- [31] M. BERZERI, M. CAMPANELLI Y A.A. SHABANA. Definition of the elastic forces in the finite-element absolute nodal coordinate formulation and the floating frame of reference formulation. *Multibody System Dynamics* **5**, 21–54 (2001).
- [32] M. BERZERI Y A. A. SHABANA. Development of simple models for the elastic forces in the absolute nodal co-ordinate formulation. *Journal of Sound and Vibration* **235**(4), 539–565 (2000).
- [33] M. OMAR Y A.A. SHABANA. A two-dimensional shear deformable beam for large rotation and deformation problems. *Journal of Sound and Vibration* **243**(3), 565–573 (2001).
- [34] R.Y. YAKOUB Y A.A. SHABANA. Three dimensional absolute nodal coordinate formulation for beam elements: Implementation and applications. *ASME Journal of Mechanical Design* **123**, 614–621 (2001).
- [35] A.A. SHABANA Y R.Y. YAKOUB. Three-dimensional absolute nodal coordinate formulation for beam elements: Theory. *ASME Journal of Mechanical Design* **123**, 606–613 (2001).

- [36] A.M. MIKKOLA Y A.A SHABANA. A non-incremental finite element procedure for the analysis of large deformation of plates and shells in mechanical system applications. *Multibody System Dynamics* **9** (2003).
- [37] J.T. SOPANEN Y A.M. MIKKOLA. Description of elastic forces in absolute nodal coordinate formulation. *Nonlinear Dynamics* **34** (2003).
- [38] J.T. SOPANEN Y A.M. MIKKOLA. Studies on the stiffness properties of the absolute nodal coordinate formulation for three-dimensional beams. En “Proceedings of the ASME DETC and CIE Conference”, Chicago, Illinois (2003). ISBN: 0-7918-3698-3.
- [39] K. S. KERKKANEN, J. T. SOPANEN Y A.M. MIKKOLA. A geometrically nonlinear beam element for multibody applications. *Journal of Mechanical Design*. In press.
- [40] K. DUFVA, J. SOPANEN Y A. MIKKOLA. A two-dimensional shear deformable beam element based on the absolute nodal coordinate formulation. *Journal of Sound and Vibration* **280**, 719–738 (2005).
- [41] K. DUFVA, J. SOPANEN Y A. MIKKOLA. Three-dimensional beam element based on a cross-sectional coordinate system approach. *Nonlinear Dynamics* (2005). In press.
- [42] H. SUGIYAMA Y A.A. SHABANA. Application of plasticity theory and absolute nodal coordinate formulation to flexible multibody system dynamics. *ASME Journal of Mechanical Design* **126**, 478–487 (2004).
- [43] T.R. KANE, R.R. RYAN Y A.K. BANERJEE. Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics* **10**(2), 139–151 (1987).
- [44] K.E. BRENAN, S.L. CAMPBELL Y L.R. PETZOLD. “Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations”. SIAM, Philadelphia, USA (1996).

- [45] E. HAIRER Y G. WANNER. “Ordinary Differential Equations: Stiff and Differential-Algebraic Problems”. Springer-Verlag, New York, USA (1996).
- [46] JUAN DE BURGOS ROMÁN. “Álgebra lineal y geometría cartesiana”. McGraw-Hill, Madrid (2002).
- [47] J.L. ESCALONA, H.A. HUSSIEN Y A.A. SHABANA. Application of the absolute nodal coordinate formulation to multibody system dynamics. *Journal of Sound and Vibration* **214**(5), 833–951 (1998).
- [48] H. SUGIYAMA Y A. A. SHABANA. On the use of implicit integration methods and the absolute nodal coordinate formulation in the analysis of elastoplastic deformation problems. *Nonlinear Dynamics* **37**(3), 245–270 (2004).
- [49] K.J. BATHE. “Finite Element Procedures”. Prentice Hall, New Jersey, USA (1996).
- [50] W. YOO, O. DMITROCHENKO Y D. POGORELOV. Review of finite elements using absolute nodal coordinates for large-deformation problems and matching physical experiments. En “Proceedings of the ASME DETC Conference”, Long Beach, California (2005). ISBN: 0-7918-3766-1.
- [51] S. VON DOMBROWSKI. Analysis of large flexible body deformation in multibody systems using absolute coordinates. *Multibody System Dynamics* **8** (2002).
- [52] O.N. DMITROCHENKO Y D.YU. POGORELOV. Generalization of plate finite elements for absolute nodal coordinate formulation. *Multibody System Dynamics* **10**, 17–43 (2003).
- [53] J. GERSTMAYER Y SHABANA A.A. Analysis of higher and lower order elements for the absolute nodal coordinate formulation. En “Proceedings of the ASME DETC Conference”, Long Beach, California (2005). ISBN: 0-7918-3766-1.

- [54] A.L. SCHWAB Y MEIJAARD J.P. Comparison of three-dimensional flexible beam elements for dynamic analysis: finite element method and absolute nodal coordinate formulation. En “Proceedings of the ASME DETC Conference”, Long Beach, California (2005). ISBN: 0-7918-3766-1.
- [55] H. SUGIYAMA, J. GERSTMAYER Y A.A. SHABANA. Cross-section deformation in the absolute nodal coordinate formulation. En “Proceedings of the ASME DETC Conference”, Long Beach, California (2005). ISBN: 0-7918-3766-1.
- [56] A. A. SHABANA Y A. M. MIKKOLA. On the use of the degenerate plate and the absolute nodal co-ordinate formulations in multibody system applications. *Journal of Sound and Vibration* **259**, 481–489 (2003).
- [57] M.K. MATIKAINEN Y MIKKOLA A.M. Improved description of elastic forces for the absolute nodal coordinate based plate element. En “Proceedings of the ASME DETC Conference”, Long Beach, California (2005). ISBN: 0-7918-3766-1.
- [58] K. DUFVA Y A.A. SHABANA. Analysis of thin plate structures using the absolute nodal coordinate formulation. *Proceedings of the IMechE Part K: Journal of Multi-body Dynamics* **219** (2005). In press.
- [59] J. CUADRADO, J. CARDENAL Y E. BAYO. Modelling and solution methods for efficient real-time simulation of multibody dynamics. *Multibody System Dynamics* **3**(1), 259–280 (1997).
- [60] D. GARCÍA-VALLEJO, J. MAYO, J.L. ESCALONA Y J. DOMÍNGUEZ. Efficient evaluation of the elastic forces and the jacobian in the absolute nodal coordinate formulation. *Nonlinear Dynamics* **35** (2004).
- [61] M.E. GURTIN. “An Introduction to Continuum Mechanics”. Academic Press, Inc., San Diego, USA (1981).

- [62] D. GARCÍA-VALLEJO, H. SUGIYAMA Y A.A. SHABANA. Finite element analysis of the geometric stiffening effect: a correction in the floating frame of reference formulation. *Proceedings of the IMechE, Part K: Journal of Multi-body Dynamics* **219**, 187–202 (2005).
- [63] O.C. ZIENKIEWICH Y R.L. TAYLOR. “The Finite Element Method, Volume 1”. McGraw-Hill, London, UK (1994).
- [64] J. CUADRADO, J. CARDENAL Y J. GARCÍA DE JALÓN. Flexible mechanisms through natural coordinates and component mode synthesis: An approach fully compatible with the rigid case. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* **39** (1996).
- [65] D. GARCÍA-VALLEJO, H. SUGIYAMA Y A. A. SHABANA. Finite element analysis of the geometric stiffening effect. Informe técnico MBS04-2-UIC, Dept. of Mechanical Engineering, UIC, Chicago, IL (2004).
- [66] D. GARCÍA-VALLEJO, H. SUGIYAMA Y A.A. SHABANA. Finite element analysis of the geometric stiffening effect: non-linear elasticity. *Proceedings of the IMechE, Part K: Journal of Multi-body Dynamics* **219**, 203–211 (2005).
- [67] S. WU Y E.J. HAUG. Geometric non-linear substructuring for dynamics of flexible mechanical systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **26**, 2211–2226 (1988).
- [68] M. BERZERI Y A.A. SHABANA. Study of the centrifugal stiffening effect using the finite element absolute nodal coordinate formulation. *Multibody System Dynamics* **7**, 357–387 (2002).
- [69] Y. TAKAHASHI, N. SHIMIZU Y K. SUZUKI. Introduction of damping matrix into absolute coordinate formulation. En “Proceedings of Asian Conference on Multibody Dynamics”, páginas 33–40, Iwaki, Fikushima (2002).

- [70] W. YOO, J. LEE, J. SOHN, S. PARK, O. DMITROCHENKO Y D. POGORELOV. Comparison of physical experiments and computer simulation with ancf: Large deformation of a thin cantilever beam. En “Proceedings of the ASME DETC and CIE Conference”, Chicago, Illinois (2003). ISBN: 0-7918-3698-3.
- [71] L. MEIROVITCH. “Methods of Analytical Mechanics”. McGraw-Hill, New York, USA (1970).
- [72] J.H. GINSBERG. “Mechanical and Structural Vibrations”. John Wiley and sons, New York, USA (2001).
- [73] L. KUBLER, P. EBERHARD Y J. GEISLER. Flexible multibody systems with large deformations and nonlinear damping using absolute nodal coordinates. *Nonlinear Dynamics* **34**, 31–52 (2003).
- [74] W.N. FINDLEY, J.S. LAI Y K. ONARAN. “Creep and Relaxation of nonlinear viscoelastic materials”. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Holland (1976).
- [75] J.C. SIMO Y T.J.R. HUGHES. “Computational Inelasticity”. New York, USA (1998).
- [76] J.C. SNOWDON. “Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems”. Wiley, New York, USA (1968).
- [77] A.D. NASHIF, D.I.G. JONES Y J.P.HENDERSON. “Vibration Damping”. John Wiley & Sons, New York, USA (1985).
- [78] D. GARCÍA-VALLEJO, J. VALVERDE Y J. DOMÍNGUEZ. An internal damping model for the absolute nodal coordinate formulation. *Nonlinear Dynamics* **42**, 347–369 (2005).
- [79] A.A. SHABANA. “Theory of Vibration, Volume II: Discrete and Continuous Systems”. Springer-Verlag, New York, USA (1991).

- [80] H. SUGIYAMA, J.L. ESCALONA Y A.A. SHABANA. Formulation of three-dimensional joint constraint using the absolute nodal coordinates. *Nonlinear Dynamics* **31** (2003).
- [81] R.S. HWANG Y E.J. HAUG. Translational joints in flexible multibody dynamics. *Mechanics of Structures and Machines* **18**, 543–564 (1990).
- [82] J.H. GINSBERG. “Advanced Engineering Dynamics”. Cambridge University Press, New York, EEUU (1995).
- [83] G.C. RUZICKA Y D.H. HODGES. Treatment of rotor blade elongation using a mixed finite element approach. En “American Helicopter Society Aeromechanics 2000 Conference”, Atlanta, Georgia (November 13-14 2000).
- [84] J.C. SIMO Y L. VU-QUOC. The role of non-linear theories in transient dynamic analysis of flexible structures. *Journal of Sound and Vibration* **119**(3), 487–508 (1987).
- [85] M.J. SCHILHANSL. Bending frequency of a rotating cantilever beam. *Journal of Applied Mechanics* **25**, 28–30 (1958).
- [86] W. JOHNSON. “Helicopter Theory”. Princeton University Press (1980).
- [87] Z.E. BOUTAGHOU Y A.G. ERDMAN. On various non-linear rod theories for the dynamic analysis of multi-body systems, part i: Formulations. *Journal of Sound and Vibration* **164**(2), 207–223 (1993).
- [88] Z.E. BOUTAGHOU Y A.G. ERDMAN. On various non-linear rod theories for the dynamic analysis of multi-body systems, part i: Applications. *Journal of Sound and Vibration* **164**(2), 225–236 (1993).
- [89] O. WALLRAPP Y R. SCHWERTASSEK. Representation of geometric stiffening in multibody system simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **32**, 1833–1850 (1991).

- [90] M. PASCAL. Some open problems in dynamic analysis of flexible multibody systems. *Multibody System Dynamics* **5**, 315–334 (2001).
- [91] E.M. BAKR Y A.A. SHABANA. Geometrically nonlinear analysis of multibody systems. *Computers & Structures* **23**, 739–751 (1986).
- [92] J. MAYO, J. DOMÍNGUEZ Y A. A. SHABANA. Geometrically nonlinear formulations of beams in flexible multibody dynamics. *ASME Journal of Vibration and Acoustics* **117**, 501–559 (1995).
- [93] J. MAYO Y J. DOMNGUEZ. Geometrically non-linear formulation of flexible multibody systems in terms of beam elements: Geometric stiffness. *Computers & Structures* **59**, 1039–1050 (1996).
- [94] J. MAYO Y J. DOMNGUEZ. A finite element geometrically nonlinear dynamic formulation of flexible multibody systems using a new displacements representation. *Journal of Vibration and Acoustics* **119**, 573–581 (1997).
- [95] J. MARTINS, M. AYALA Y J. S DA COSTA. Modelling of flexible beams for robotic manipulators. *Multibody System Dynamics* **7**, 79–100 (2002).
- [96] J. STOER Y R. BULIRSCH. “Introduction to Numerical Analysis”. Springer-Verlag, New York, USA (1993).
- [97] M.J. LEAMY, J.R. BARBER Y N.C. PERKINS. Dynamics of belt/pulley frictional contact. En “Proceedings of the IUTAM Symposium on Unilateral Multibody Contacts”, páginas 277–286, Munich, Alemania (1998).
- [98] G.G. GERBERT. Belt slip-a unified approach. *Journal of Mechanical Design* **118**, 432–438 (1998).
- [99] M.J. LEAMY Y T.M. WASFY. Analysis of belt-drive mechanics using a creep-rate-dependent friction law. *Journal of Applied Mechanics* **69**, 763–771 (2002).

-
- [100] T.M. WASFY Y M.J. LEAMY. Effect of bending stiffness on the dynamic and steady-state responses of belt-drives. En “Proceedings of the ASME 2000 Design Engineering Technical Conferences”, Montreal, Canada (September 29–October 2 2002).
- [101] M.J. LEAMY Y T.M. WASFY. Transient and steady-state dynamic finite element modeling of belt-drives. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control* **124**, 575–581 (2002).
- [102] M.J. LEAMY, J.R. BARBER Y N.C. PERKINS. Distortion of a harmonic elastic wave reflected from a dry friction support. *Journal of Applied Mechanics* **65**, 851–857 (1998).