UNIVERSIDAD DE SEVILLA

EL ESPACIO DE FUNCIONES INTEGRABLES RESPECTO DE UNA MEDIDA VECTORIAL

Memoria presentada por
D. Guillermo Curbera Costello
para optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas.

Guillermo Curbera Costello

V° B° Director

D. Francisco José Freniche Ibáñez.
Catedrático del Departamento de
Análisis Matemático de la
Universidad de Sevilla.

Sevilla, Junio 1992.

Esta memoria debe su existencia a la interacción de tres importantes fuerzas del Universo: el azar, el trabajo y el apoyo. El azar rige en lo más profundo el movimiento del Universo. A él debo el descubrimiento de las Matemáticas, la terminación de mis estudios y la relación con el Análisis Matemático. El trabajo es la expresión de la oposición que la vida, vegetal y animal, mantiene frente a la entropía. A él debo tanto grandes momentos de placer como profundas ansiedades. El apoyo es la expresión concreta de la solidaridad como motor individual y social. He recibido este apoyo en mi familia, entre mis amigos y en mi Departamento.

Quiero agradecer la inestimable ayuda y la tolerancia de mi director de Tesis Francisco José Freniche. Su serenidad me ha enseñado la confianza en el razonamiento riguroso.

Las visitas a Kent State University me han permitido conocer un estimulante ambiente universitario. La acogida allí recibida supera todo lo esperable. Quiero destacar el estímulo de J. Diestel.

A Luis Rodríguez Piazza agradezco haber sido permanente y generoso interlocutor. Nada hubiera sido igual sin la existencia de un proyecto colectivo, quizás no explícito, que comparto con mis compañeros Antonio Durán y Luis Rodríguez Piazza.

A Lourdes

Indice.

Introducción.

A comienzo de este siglo los trabajos de Lebesgue y otros matemáticos crean una teoría moderna y completa de integración que permite integrar de forma plenamente satisfactoria una amplia clase de funciones reales respecto de una medida positiva numerablemente aditiva. Entre las diversas direcciones de desarrollo de esta teoría destacan los trabajos de Bochner en 1933 que crea una teoría, similar a la de Lebesgue, que permite integrar funciones con valores vectoriales respecto de una medida positiva.

El estudio de la situación formalmente simétrica, es decir, la integración de funciones escalares respecto de una medida vectorial, debe esperar al año 1955 en que Bartle, Dunford y Schwartz publican su conocido artículo *"Weak compactness and vector measures"*. En él estudian los operadores débilmente compactos con valores en un espacio de Banach X y definidos en el espacio de funciones continuas sobre un espacio topológico compacto K

$$T: C(K) \longrightarrow X .$$

La técnica que utilizan para realizar este estudio es representar la acción del operador como la integración respecto de una medida, asociada al operador, con valores en el espacio de Banach X. Crean así una teoría de integración de funciones escalares respecto de una medida vectorial definida en una σ–álgebra y con valores en un espacio de Banach.

A comienzos de la década de los setenta Lewis publica los artículos *"Integration with respect to vector measures"* y *"On integrability and summability* *in vector spaces"*, donde desarrolla una teoría que permite integrar funciones escalares respecto de medidas con valores en un espacio vectorial topológico de Hausdorff localmente convexo. Cuando nos restringimos a espacios de Banach esta teoría es equivalente a la de Bartle, Dunford y Schwartz.

En 1975 aparece el libro "Vector measures and control systems" de Kluvánek y Knowles donde se estudia el espacio de funciones reales integrables respecto de una medida vectorial con valores en un espacio vectorial topológico de Hausdorff localmente convexo.

Nuestro estudio se hará para medidas ν definidas en una σ–álgebra y con valores en un espacio de Banach X. Consideraremos funciones con valores reales, lo que permite dotar al espacio $L^1(\nu)$ de funciones integrables respecto de ν de la estructura de retículo y por tanto utilizar las herramientas de la teoría de retículos de Banach.

Nuestro trabajo comenzó intentando responder a la pregunta verbal del Prof. J. Diestel acerca de si para el espacio $L^1(\nu)$ se cumplía el análogo al teorema de Talagrand sobre la completitud secuencial débil del espacio $L^1(\mu, X)$, de funciones con valores en X e integrables en el sentido de Bochner respecto de la medida positiva μ, cuando el espacio de Banach X es débilmente secuencialmente completo. La respuesta es afirmativa (Corolario 2.3).

Nos planteamos a continuación el problema general de estudiar la relación existente entre, por una parte, las propiedades de la medida vectorial ν y del espacio de Banach X, y, por otra, las propiedades del espacio $L^1(\nu)$ de funciones integrables respecto de ν. En este marco surgen ciertas preguntas naturales: ¿Determina el espacio X las propiedades de $L^1(\nu)$? Si esto es cierto ¿En qué medida ocurre? ¿Puede ser $L^1(\nu)$ reflexivo? ¿Cuándo es $L^1(\nu)$ un AL–espacio? La respuesta, total o parcial según los casos, a estas y otras preguntas constituye el contenido de esta memoria.

En los Preliminares establecemos la notación que se usa a lo largo de la memoria y se exponen los principales conceptos y resultados sobre medidas vectoriales y retículos de Banach que utilizaremos. Se hace especial hincapié en el concepto de conjunto L–débilmente compacto en un retículo de Banach, por su importancia en nuestro trabajo.

El primer capítulo de esta memoria consta de dos secciones. En la primera se exponen los principales resultados conocidos sobre la teoría de integración de funciones reales respecto de una medida vectorial ν definida en una σ–álgebra y con valores en un espacio de Banach X y sobre el espacio formado por dichas funciones, $L^1(\nu)$. Éste es un retículo de Banach orden continuo y con unidad débil.

En la segunda sección comienza nuestro propio estudio del espacio $L^1(\nu)$. La primera pregunta que se plantea es ¿Qué espacios se obtienen como L^1 de una medida vectorial? Identificamos de forma precisa esta clase: son los retículos de Banach orden continuos con unidad débil (Teorema 1.15).

Estudiamos la posible existencia de un espacio de Banach "universal", en el sentido de que todo espacio L^1 de una medida vectorial se pueda obtener a partir de una medida con valores en dicho espacio "universal". Se prueba que esto es posible para espacios $L^1(\nu)$ que sean separables y no tengan átomos, mediante medidas con valores en el espacio c_0 (Teorema 1.20).

Se carece de una identificación útil del dual del espacio $L^1(\nu)$. Por ello, estudiamos la posibilidad de caracterizar la convergencia débil en el espacio $L^1(\nu)$ a través de la convergencia débil de la integrales sobre conjuntos arbitrarios (Teorema 1.23).

En el segundo capítulo se estudian diversas propiedades del espacio $L^1(\nu)$, haciendo hincapié en el hecho de que las propiedades del espacio de Banach en que la medida toma valores determinan, en cierta medida, las propiedades del espacio $L^1(\nu)$. En este sentido se obtienen, entre otros, los siguientes resultados: si el espacio X no contiene ningún subespacio isomorfo a c_0 tampoco lo contiene $L^1(\nu)$; si X tiene cotipo $q \geq 2$ entonces $L^1(\nu)$ también tiene cotipo q; si X es un espacio con la propiedad de Schur entonces $L^1(\nu)$ tiene la propiedad positiva de Schur.

Probamos una versión reticular del teorema de Dunford–Pettis, que permite probar que si X tiene la propiedad de Schur y la medida ν tiene variación σ–finita entonces $L^1(\nu)$ tiene la propiedad de Dunford–Pettis (Teorema 2.10). También se deduce que si la medida ν tiene variación σ–finita y no tiene átomos entonces $L^1(\nu)$ no es reflexivo (Teorema 2.11).

Al poder obtenerse cualquier retículo de Banach orden continuo y con unidad débil como L^1 de una determinada medida vectorial, se sigue, en particular, que se puede obtener un espacio de Hilbert. El Teorema 2.13 da una condición suficiente para que una medida con valores en un espacio de cotipo 2 genere un espacio $L^1(\nu)$ orden isomorfo a un espacio de Hilbert.

La última parte del capítulo estudia una propiedad específica de los retículos de Banach: la propiedad de descomposición subsecuencial, cuyos orígenes están en las técnicas utilizadas por Kadec y Pelczynski en el estudio de los subespacios de los espacios $L^p[0,1]$. Damos condiciones suficientes para que $L^1(\nu)$ tenga esta propiedad (Teorema 2.14).

El tercer capítulo indaga la respuesta a la pregunta ¿Cuándo es $L^1(\nu)$ un AL–espacio? Probamos que esto ocurre exclusivamente cuando $L^1(\nu)$ es isomorfo al espacio $L^1(|\nu|)$ donde $|\nu|$ es la variación de la medida ν, la cual debe ser acotada. En la búsqueda de condiciones suficientes para que $L^1(\nu)$ sea un AL–espacio se prueba que la dominación de la variación por la semivariación no es suficiente (Ejemplo 3.3) y que tales condiciones no se pueden imponer sobre el espacio de Banach X (Ejemplo 3.5).

Se estudian medidas con valores en espacios con propiedades particulares obteniéndose condiciones suficientes si los valores se toman en un AL–espacio y una caracterización para medidas con valores en un espacio $C(K)$.

El estudio del caso general se hace identificando el dual de $L^1(\nu)$ con un ideal, reticular y algebraico, en $L_\infty(|\nu|)$ y utilizando la transformada de Gelfand y los caracteres sobre $L_\infty(|\nu|)$. Se hallan así condiciones en términos de los conjuntos de ceros de $L^1(\nu)^*$ y de un ideal en $L^1(\nu)^*$ asociado al conjunto de medidas $\{x^*\nu : x^* \in X^*\}$. El Teorema 3.16 da una condición necesaria y suficiente, en términos de la medida, para que el espacio $L^1(\nu)$ esté dado por una cantidad finita de espacios de la forma $L^1(|x^*\nu|)$.

El cuarto capítulo estudia los operadores con valores en $L^1(\nu)$. Para ello se utiliza la técnica de asociar a cada operador una medida, con valores en un espacio de operadores en este caso, y estudiar las propiedades del operador a través de las propiedades de la medida. Esta medida, en general, es acotada, finitamente aditiva y numerablemente aditiva en la topología fuerte de operadores.

El estudio se centra en hallar las propiedades de los operadores que corresponden a "mejores" propiedades de la medida asociada. Se caracterizan aquellos operadores cuya medida asociada es numerablemente aditiva en la topología uniforme de operadores: son los operadores L–débilmente compactos, que transforman conjuntos acotados en conjuntos L–débilmente compactos en $L^1(\nu)$ (Teorema 4.5). Para medidas ν con variación σ–finita, los operadores cuya medida asociada tiene variación acotada son aquéllos que factorizan mediante un operador integral a través del espacio $L^1(|\nu|)$ (Teorema 4.6). En las mismas condiciones, si se requiere que la medida asociada al operador tenga una derivada Bochner integrable respecto de su variación, el operador debe factorizar a través de $L^1(|\nu|)$ mediante un operador nuclear (Teorema 4.8). Que la condición anterior sea de hecho una caracterización, está íntimamente ligado a que la medida ν tenga una densidad fuertemente medible y Pettis integrable respecto de su variación (Teorema 4.9).

La última parte del capítulo está dedicada a aplicar los resultados anteriores al problema de relacionar la existencia de un subespacio isomorfo a ℓ_∞ en el espacio $\mathcal{L}(Y,X)$, de operadores lineales y continuos entre dos espacios Y y X, con la coincidencia de dicho espacio con algún ideal de operadores. En nuestro caso el espacio Y es un espacio de Banach arbitrario. Cuando X es un retículo de Banach orden continuo y con unidad débil, probamos que si $\mathcal{L}(Y,X)$ no contiene a ℓ_∞, entonces todo operador es L–débilmente compacto (Teorema 4.11). Cuando X es un retículo de Banach orden continuo y atómico, probamos que son equivalentes que todo operador de Y en X sea compacto y que $\mathcal{L}(Y,X)$ no contenga a ℓ_∞ (Teorema 4.12).

Preliminares y notación.

En este capítulo establecemos la notación que se usará en la memoria y recopilamos los resultados básicos que utilizaremos sobre medidas vectoriales y retículos de Banach. Los correspondientes a la teoría de medidas vectoriales se han extraido del capítulo I del libro de Diestel y Uhl [D–U]. Para la teoría de retículos de Banach se han seguido los capítulos 1.a y 1.b del volumen II del libro de Lindenstrauss y Tzafriri [L–T].

Un *espacio medible* es un par (Ω, Σ) donde Ω es un conjunto abstracto y Σ es una *σ–álgebra* de partes de Ω. Los elementos de Σ se denominan *conjuntos medibles*. Una *partición* de un conjunto medible A es una familia finita $(A_i)_1^n$ de conjuntos medibles disjuntos cuya unión es A.

Una *medida finitamente aditiva* es una función ν definida sobre una σ–álgebra y con valores en un espacio de Banach X, que cumple que $\nu(\emptyset) = 0$ y si A y B son conjuntos medibles disjuntos $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$.

Una medida es *acotada* si el conjunto de valores que toma está acotado; es *fuertemente aditiva* si para toda familia (A_n) de conjuntos medibles disjuntos la serie $\sum \nu(A_n)$ es convergente en X; y es *numerablemente aditiva* si la serie anterior converge a $\nu(\bigcup_n A_n)$. Toda medida numerablemente aditiva es fuertemente aditiva y éstas a su vez son acotadas. En caso de no especificarse, entenderemos por medida una medida numerablente aditiva.

Una medida es *escalar* si toma valores en el cuerpo de los escalares. Para nosotros, a lo largo de esta memoria, éste será el cuerpo de los números reales **R**. Una medida es *positiva* si es escalar y sus valores son no negativos. En el resto de los casos diremos que la medida es *vectorial*. Consideraremos, como es habitual, medidas con valores en $[0, +\infty]$, que denominaremos también *positivas*.

Un *espacio de medida* es una terna $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ donde (Ω, Σ) es un espacio medible y λ es una medida positiva numerablemente aditiva definida sobre Σ. El espacio de medida es finito si $\lambda(\Omega) < +\infty$ y es σ–finito si $\Omega = \cup_n A_n$ donde $\lambda(A_n) < +\infty$. Una propiedad se cumple *puntualmente en casi todo respecto de* λ si se cumple en todos los puntos de Ω salvo en los de un conjunto medible Z con $\lambda(Z) = 0$.

La *variación* de una medida ν es la menor medida positiva que domina a la medida ν. Se denota por $|\nu|$. Se prueba que es

$$|\nu|(A) = \sup\left\{\sum_1^n \|\nu(A_i)\| : (A_i)_1^n \text{ es una partición de } A\right\}.$$

Puede tomar valores infinitos.

Sea X un espacio de Banach. Denotaremos por B_X la bola unidad de X, es decir, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. X^* es el dual topológico de X y B_{X^*} su bola unidad. En X consideraremos la topología dada por la norma y la topología *débil*, denotada por $\sigma(X, X^*)$, que es la topología menos fina respecto de la cual son continuos los elementos del espacio dual. En X^* consideraremos la topología de la norma, la topología débil y la topologia *débil*–$*$, denotada por $\sigma(X^*, X)$, que es la topología menos fina respecto de la cual son continuos los elementos del espacio X.

Sea $\nu\colon \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial con valores en un espacio de Banach. La *semivariación* es la función de conjuntos definida sobre Σ por

$$\|\nu\|(A) = \sup\left\{|x^*\nu|(A) : x^* \in B_{X^*}\right\},$$

donde $|x^*\nu|$ es la variación de la medida escalar

$$A \in \Sigma \longmapsto x^*\nu(A) \in \mathbf{R}.$$

La semivariación no es, en general, una medida. Es monótona, es decir, si $B \subset A$ entonces $\|\nu\|(B) \leq \|\nu\|(A)$. Consideremos la siguiente función de conjuntos definida sobre Σ

$$|||\nu|||(A) = \sup\big\{\|\nu(B)\| : B \subset A, B \in \Sigma\big\}.$$

Entonces para todo conjunto medible A se cumple

$$|||\nu|||(A) \leq \|\nu\|(A) \leq 2 \cdot |||\nu|||(A).$$

Sea $\nu\colon \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial. Se dirá que una medida positiva λ es una *medida de control* para ν si se cumple que

$$\lim_{\lambda(A)\to 0} \|\nu\|(A) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\|\nu\|(A)\to 0} \lambda(A) = 0.$$

Existen medidas de control para medidas numerablemente aditivas. Un importante resultado de Rybakov (ver [D–U, IX.2]) prueba que si ν es una medida vectorial numerablemente aditiva, existe x_0^* en la bola unidad de X^* tal que la medida $|x_0^*\nu|$ es una medida de control para ν, luego se cumple

$$|x_0^*\nu| \leq \|\nu\| \quad \text{y} \quad \lim_{|x_0^*\nu|(A)\to 0} \|\nu\|(A) = 0.$$

Se dice que $|x_0^*\nu|$ es una *medida de control de Rybakov* para ν. La semivariación de ν y las medidas de control de ν tienen los mismos conjuntos nulos. Una propiedad se cumple *puntualmente en casi todo respecto de* ν si se cumple en todos los puntos de Ω salvo en un conjunto de semivariación nula. Es por tanto equivalente a que se cumpla puntualmente en casi todo respecto de una medida de control de ν.

Un *retículo de Banach* es un espacio de Banach E dotado de una relación de orden $\leq$ que cumple

1) si $x, y, z \in E$ y $x \leq y$ entonces $x + z \leq y + z$,

2) si $x, y \in E$ y $a \in \mathbf{R}$ con $a \geq 0$ entonces $ax \leq ay$,

3) para todo $x, y \in E$ existen el supremo y el ínfimo respecto del orden, de x e y,

4) si $|x| \leq |y|$ entonces $\|x\| \leq \|y\|$, donde $|x| = \sup\{x, -x\}$, es el *módulo* de x.

El dual de un retículo de Banach es un retículo de Banach para el orden natural: $x^* \leq y^*$ si y sólo si $x^*x \leq y^*x$ para todo $x \in E$ con $x \geq 0$.

Un conjunto A en E está acotado respecto del orden (*orden acotado*) si existe $x \geq 0$ tal que $|z| \leq x$ para todo $z \in A$. Se denota por $[x, y]$ el conjunto de todos los z tales que $x \leq z \leq y$. Un retículo de Banach es completo respecto del orden (*orden completo*) si todo conjunto acotado tiene supremo. Los retículos de Banach duales siempre son orden completos.

Un *ideal* en un retículo de Banach E es un subespacio vectorial F para el cual $y \in F$ siempre que $|y| \leq |x|$ para algún $x \in F$. Una *banda* es un ideal F que cumple que si $A \subset F$ y $\sup A$ existe en E, entonces $\sup A \in F$.

Un elemento $x > 0$ de un retículo de Banach es un *átomo* si cumple que $0 \leq z \leq x$ implica $z = ax$ donde a es un número real entre 0 y 1. Un retículo de Banach es atómico si existe una familia $\{x_\alpha\}$ de átomos que es completa, en el sentido de que si $\inf\{x, x_\alpha\} = 0$ para todo α, entonces $x = 0$.

Un operador lineal T entre dos retículos de Banach es un *orden isomorfismo* si es biyectivo y conserva la estructura del orden

$$T(\sup\{x, y\}) = \sup\{Tx, Ty\} \quad \text{y} \quad T(\inf\{x, y\}) = \inf\{Tx, Ty\}.$$

Un orden isomorfismo es siempre un isomorfismo topológico. Dos retículos de Banach son *orden isométricos* si existe entre ellos una isometría lineal sobreyectiva que conserva el orden.

Una propiedad fundamental es la orden continuidad. Un conjunto A está dirigido decrecientemente si para todos $x, y \in A$ existe $z \in A$ tal que $z \leq x$ y $z \leq y$. Un retículo de Banach tiene norma continua respecto del orden (*orden continuo*) si para todo conjunto dirigido decrecientemente cuyo ínfimo sea el cero, se cumple que $\inf \{ \|x\| : x \in A \} = 0$. Una importante caracterización de esta propiedad es [L–T II, Proposition 1.a.8]:

Un retículo de Banach es orden continuo si y sólo si toda sucesión creciente acotada respecto del orden es convergente.

Un elemento e es una *unidad débil* de E si se cumple que $\inf\{x, e\} = 0$ implica que $x = 0$. Es una *unidad* o unidad fuerte si $\|x\| \leq 1$ si y sólo si $|x| \leq e$.

Un *espacio de Banach de funciones* o espacio de Köthe de funciones respecto de un espacio de medida σ–finito $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ es [L–T II, Definition 1.b.17]: un espacio de Banach E de clases de funciones reales, iguales en casi todo respecto de λ, que son localmente integrables y que cumple

1) Si $|f(\omega)| \leq |g(\omega)|$, f es medible y $g \in E$, entonces $f \in E$ y $\|f\| \leq \|g\|$.

2) Para cada $A \in \Sigma$ de medida finita la función característica χ_A está en E.

El *dual de Köthe* de un espacio de Banach de funciones E es

$$\left\{ g\colon S \longrightarrow \mathbf{R} : g \text{ es medible y } fg \in L^1(\lambda) \text{ para toda } f \in E \right\}.$$

Cuando E es orden continuo, E^* coincide con el dual de Köthe [L–T II, p. 29]. Se puede considerar también el bidual de Köthe de E.

Los retículos de Banach orden continuos y con unidad débil se pueden representar como espacios de Banach de funciones [L–T II, Theorem 1.b.14].

Teorema. *Sea E un retículo de Banach orden continuo y con unidad débil. Entonces existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \Sigma, \lambda)$, un ideal $\tilde{E}$ de $L^1(\Omega, \Sigma, \lambda)$ y una norma de retículo $\|\cdot\|_{\tilde{E}}$ en $\tilde{E}$ tales que*

1) *E es orden isométrico a $(\tilde{E}, \|\cdot\|_{\tilde{E}})$.*
2) *$\tilde{E}$ es denso en $L^1(\Omega, \Sigma, \lambda)$ y $L_\infty(\Omega, \Sigma, \lambda)$ es denso en $\tilde{E}$.*
3) *$\|f\|_1 \leq \|f\|_{\tilde{E}} \leq 2\|f\|_\infty$ siempre que $f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \lambda)$.*
4) *La traspuesta de la isometría dada en 1) aplica E^* sobre el retículo de Banach $\tilde{E}^*$ de todas las funciones medibles g para las cuales*
$$\|g\|_{\tilde{E}^*} = \sup\left\{ \int_\Omega fg\, d\lambda : \|f\|_{\tilde{E}} \leq 1 \right\} < \infty.$$

El valor que toma el funcional correspondiente a g en $f \in \tilde{E}$ es $\int_\Omega fg\, d\lambda$.

Un concepto muy importante en varias partes de esta memoria es el de conjunto *L–débilmente compacto*, debido a Meyer–Nieberg [M 1, Definition II.1]. Un conjunto acotado K es L–débilmente compacto si para toda sucesión disjunta (y_n) que cumple $|y_n| \leq |x_n|$ con $x_n \in K$, se tiene que (y_n) tiende a cero en norma. En los retículos de Banach orden continuos este concepto es equivalente a ser *casi–orden acotado*, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \geq 0$ tal que $K \subset [-x, x] + \varepsilon B$ donde B es la bola unidad [M 1, Satz II.2]. Esta es la denominación que da Zaanen [Z, p. 501]. En los espacios de Banach de funciones orden continuos este concepto coincide con el de conjunto acotado *equi–integrable*: conjunto acotado que cumple
$$\lim_{\mu(A)\to 0} \sup\{\|f \cdot \chi_A\| : f \in K\} = 0.$$

Todo conjunto L–débilmente compacto es relativamente débilmente compacto [M 1, Satz II.6]. Los retículos de Banach en que los conjuntos L–débilmente compactos coinciden con los relativamente débilmente compactos son aquéllos en que todo subretículo cerrado de dimensión infinita contiene un subretículo isomorfo a ℓ^1 [M 2, Satz 14]. Sánchez Henríquez en su Tesis Doctoral prueba que esta propiedad es equivalente a la *propiedad positiva de Schur*: toda sucesión positiva y débilmente convergente es convergente [Sa, Teorema 1.16].

En los retículos de Banach orden continuos todo conjunto relativamente compacto es L–débilmente compacto [M 1, Korollar II.4]. Los retículos de Banach en que los conjuntos L–débilmente compactos coinciden con los relativamente compactos son los retículos de Banach orden continuos y atómicos [M 1, Beispiele II.7] y [A–S, Satz 1.1].

Un operador definido sobre un espacio de Banach y con valores en un retículo de Banach es un *operador L–débilmente compacto* si la imagen de la bola unidad es un conjunto L–débilmente compacto [M 2, Definition 1 iii)]. Zaanen los denomina operadores semi–compactos [Z, p. 529].

Sean X_i espacios de Banach $1 \leq i \leq n$. Para $1 \leq p < +\infty$ se denota por $\left(\bigoplus_1^n X_i\right)_p$ el espacio de n–túplas $(x_1, \ldots, x_n)$ con $x_i \in X_i$ dotado de la norma $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \left(\sum_1^n \|x_i\|^p\right)^{1/p}$.

La teoría de medidas vectoriales con sus aplicaciones puede verse en [D–U]. Sobre retículos de Banach véanse [L–T II] y los libros de Aliprantis y Burkinshaw [A–B], Meyer–Nieberg [M 3] y Schaefer [S].

CAPÍTULO 1: El espacio $L^1(\nu)$.

SECCIÓN 1. En esta sección presentamos los resultados conocidos sobre la teoría de integración de funciones reales respecto de una medida vectorial y sobre el espacio de funciones reales integrables respecto de una medida vectorial, que son relevantes para el desarrollo posterior de la memoria.

Sea (Ω, Σ) un espacio medible y sea X un espacio de Banach. Consideremos una medida vectorial numerablemente aditiva

$$\nu: \Sigma \longrightarrow X .$$

La siguiente definición se debe a Bartle, Dunford y Schwartz [B–D–S, Definition 2.5]. Estos autores consideraron funciones con valores reales o complejos. Nosotros nos restringimos a valores reales, con el objeto de aprovechar la estructura de orden del cuerpo de los números reales.

Sea f una función simple con valores reales. Existen $a_i \in \mathbf{R}$ y A_i conjuntos medibles $1 \leq i \leq n$, tales que

$$f = \sum_1^n a_i \chi_{A_i}.$$

Se define la *integral de f respecto de ν sobre un conjunto medible A* de la siguiente forma

$$\int_A f \, d\nu = \sum_1^n a_i \nu(A \cap A_i).$$

Es un elemento del espacio de Banach X que es independiente de la representación que se dé a f como combinación lineal de funciones características.

Esta definición permite definir el concepto de integrabilidad para funciones medibles.

Definición 1.1. *Sea $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ una función medible. Se dice que f es integrable respecto de ν si existe una sucesión (φ_n) de funciones simples tal que*

a) (φ_n) converge a f puntualmente en casi todo respecto de ν.

b) La sucesión $\left(\int_A \varphi_n \, d\nu\right)$ converge en norma en X, para todo $A \in \Sigma$.

En este caso se define la integral de f respecto de ν sobre A como el elemento de X dado por

$$\int_A f \, d\nu = \lim_n \int_A \varphi_n \, d\nu.$$

Esta definición no depende de la sucesión (φ_n). Lewis en [L 1] estudió la integración de funciones complejas respecto de una medida con valores en un espacio vectorial topológico de Hausdorff localmente convexo. Da la definición siguiente [L–1, Definition 2.1]. Como ya hemos señalado, nosotros nos restringimos a funciones con valores reales.

Definición 1.2. *Sea $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ una función medible. Se dice que f es integrable respecto de ν si*

a) f es integrable respecto de la medida $|x^*\nu|$ para cada $x^* \in X^*$.

b) Para cada $A \in \Sigma$ existe un elemento de X, denotado por $\int_A f \, d\nu$, tal que

$$\left\langle x^*, \int_A f \, d\nu \right\rangle = \int_A f \, d x^*\nu, \quad \text{para cada } x^* \in X^*.$$

Para medidas con valores en un espacio de Banach, Lewis prueba, basándose en el teorema de convergencia de Vitali, que esta definición es equivalente a la dada por Bartle, Dunford y Schwartz, [L–1, Theorem 2.4]. Utilizaremos por tanto ambas definiciones indistintamente a lo largo de esta memoria.

A continuación relacionamos algunas de las propiedades fundamentales de esta teoría de integración, probadas por Bartle, Dunford y Schwartz [B–D–S, Theorem 2.6] y por Lewis [L 1, Theorem 2.2].

Propiedades 1.3. *Se tienen las siguientes propiedades:*

1) Sea f una función medible esencialmente acotada respecto de ν, entonces f es integrable respecto de ν y

$$\left\| \int_A f \, d\nu \right\| \leq \|f\|_\infty \cdot \|\nu\|(A).$$

2) Si f es integrable respecto de ν la función de conjuntos

$$A \in \Sigma \longmapsto \Phi(A) = \int_A f \, d\nu \in X$$

es una medida numerablemente aditiva, que es absolutamente continua respecto de ν, es decir

$$\lim_{\|\nu\|(A) \to 0} \left\| \int_A f \, d\nu \right\| = 0.$$

La semivariación de Φ viene dada por la expresión:

$$\|\Phi\|(A) = \sup \left\{ \int_A |f| \, d|x^*\nu| : x^* \in B_{X^*} \right\}.$$

Es de señalar que la medida Φ de la proposición anterior es absolutamente continua respecto de cualquier medida de control de ν. La integración de funciones esencialmente acotadas respecto de ν, que aparece en 1.3.1), es conocida como la *integral de Bartle* [D–U, II.4].

Kluvánek y Knowles en su libro [K–K] consideran el espacio de funciones reales integrables respecto de una medida vectorial. Su estudio se hace para medidas con valores en un espacio vectorial topológico de Hausdorff localmente convexo, pero las mejores propiedades del espacio se obtienen cuando la medida toma valores en un espacio de Banach. Exponemos solamente los resultados que obtienen en este caso.

Bartle, Dunford y Schwartz habían observado que el conjunto de funciones integrables respecto de una medida vectorial es un espacio vectorial. Kluvánek y Knowles prueban que

$$\|f\|_\nu = \sup\left\{ \int |f| \, d|x^*\nu| : x^* \in B_{X^*} \right\}$$

es una seminorma en dicho espacio. Identificando dos funciones f y g cuando el conjunto en el que difieren tiene semivariación nula

$$f \sim g \iff \|\nu\| \left(\{\omega : f(\omega) \neq g(\omega)\}\right) = 0$$

se obtiene un espacio normado de clases de funciones integrables respecto de ν que se denota por $L^1(\nu)$. Este espacio es un espacio de Banach para la norma $\|\cdot\|_\nu$ anterior [K–K, II.2, Theorem IV.4.1 y Theorem IV.7.1].

El espacio $L^1(\nu)$ es un retículo si se le dota del orden dado por

$$f \leq g \iff f(\omega) \leq g(\omega) \ \ \omega \notin Z \text{ para } Z \in \Sigma, \ \ \|\nu\|(Z) = 0.$$

Más aún, $L^1(\nu)$ es un *ideal de funciones medibles*, es decir, si g está en $L^1(\nu)$ y f es una función medible tal que $|f| \leq |g|$ puntualmente en casi todo respecto de ν, entonces f está en $L^1(\nu)$ y de la expresión de la norma en $L^1(\nu)$ se sigue que $\|f\|_\nu \leq \|g\|_\nu$.

De gran importancia para el estudio que vamos a realizar es el siguiente resultado [K–K, Corollary II.4.2]:

En $L^1(\nu)$ toda sucesión creciente y acotada respecto del orden es convergente en norma.

Se sigue que $L^1(\nu)$ es un retículo de Banach orden continuo, ver Preliminares. Esta importante consequencia no fué extraida por Kluvánek y Knowles. Resultará ser central en nuestro estudio del espacio $L^1(\nu)$. Incluimos a continuación una prueba de este resultado.

Sea λ una medida de control de Rybakov para ν. Sea (f_n) una sucesión en $L^1(\nu)$ creciente y acotada respecto del orden por $g \in L^1(\nu)$. Podemos suponer que (f_n) es no negativa. Definamos la función $f(\omega) = \sup\{f_n(\omega) : n \in \mathbf{N}\}$. Es una función medible y y acotada por $g \in L^1(\nu)$. Como este espacio es un ideal de funciones medibles, se sigue que $f \in L^1(\nu)$. Veamos que (f_n) converge a f en $L^1(\nu)$. La sucesión (f_n) es creciente y acotada por f en $L^1(\lambda)$, luego es convergente en $L^1(\lambda)$. Al ser creciente se sigue que converge puntualmente en casi todo respecto de λ, luego, por el teorema de Egoroff, la convergencia es casi uniforme. Sea $\varepsilon > 0$. Existe un conjunto medible A con $\lambda(A) < \varepsilon$ y existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tales que, para todo $n \geq n_0$, se tiene

$$
\begin{aligned}
\|f - f_n\|_\nu &= \sup\left\{\int_\Omega |f - f_n|\, d|x^*\nu| : x^* \in B_{X^*}\right\} \\
&\leq \varepsilon \cdot \|\nu\|(\Omega \setminus A) + 2 \cdot \sup\left\{\int_A |f|\, d|x^*\nu| : x^* \in B_{X^*}\right\}.
\end{aligned}
$$

El resultado se sigue al ser la medida con densidad f respecto de ν absolutamente continua respecto de λ. Q.E.D.

Es fácil ver que $L^1(\nu)$ considerado como retículo de Banach tiene una unidad débil: consideremos la función χ_Ω, está en $L^1(\nu)$. Sea $f \in L^1(\nu)$ tal que $\inf\{|f|, \chi_\Omega\} = 0$, se sigue que $f \equiv 0$. Luego χ_Ω es una unidad débil de $L^1(\nu)$.

Sea $x^* \in X^*$. De la Definición 1.2 se sigue que $L^1(\nu)$ es un subespacio vectorial de $L^1(|x^*\nu|)$, y de la expresión de la norma en $L^1(\nu)$ se sigue que la inclusión

$$L^1(\nu) \longrightarrow L^1(|x^*\nu|)$$

es continua y $\|f\|_{L^1(|x^*\nu|)} \leq \|x^*\| \cdot \|f\|_\nu$.

Sea λ una medida de control de Rybakov para ν. Es de la forma $|x_0^*\nu|$ para $x_0^* \in B_{X^*}$. Se tienen las siguientes inclusiones naturales

$$L_\infty(\lambda) \longrightarrow L^1(\nu) \longrightarrow L^1(\lambda)$$

siendo los operadores inyecciones continuas. Del Teorema 1.6 se sigue que tienen imagen densa. Al tener ν y λ los mismos conjuntos nulos y ser $L^1(\nu)$ un ideal, se sigue que $L^1(\nu)$ es un espacio de Banach de funciones respecto del espacio de medida $(\Omega, \Sigma, \lambda)$.

Los resultados de Kluvánek y Knowles para medidas numerablemente aditivas con valores en un espacio de Banach y las consideraciones anteriores se pueden resumir en el teorema siguiente.

Teorema 1.4. *Sea $\nu\colon \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial con valores en un espacio de Banach. El espacio $L^1(\nu)$ es un retículo de Banach orden continuo y con unidad débil cuando se le dota de la norma*

$$\|f\|_\nu = \sup\left\{\int |f| \, d|x^*\nu| : x^* \in B_{X^*}\right\}$$

y del orden

$$f \leq g \iff f(\omega) \leq g(\omega) \;\; \omega \notin Z \text{ para } Z \in \Sigma, \;\; \|\nu\|(Z) = 0.$$

$L^1(\nu)$ es un espacio de Banach de funciones respecto del espacio de medida $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ donde λ es una medida de control de Rybakov para ν.

Norma equivalente 1.5. La norma de una función $f \in L^1(\nu)$ coincide con la semivariación de la medida con densidad f respecto de ν, Proposición 1.3.2). Se sigue de la expresión equivalente para la semivariación, ver Preliminares, que

$$|||f|||_\nu = \sup\left\{\left\|\int_A f\, d\nu\right\| : A \in \Sigma\right\}$$

es una norma equivalente a $\|\cdot\|_\nu$ en $L^1(\nu)$. No es compatible en general con la estructura de orden. Se cumple

$$|||f|||_\nu \leq \|f\|_\nu \leq 2 \cdot |||f|||_\nu .$$

Es de resaltar el siguiente resultado de Lewis [L 2, Theorem 3.5].

Teorema 1.6. *El conjunto de funciones simples es denso en $L^1(\nu)$.*

Por último señalar que esta teoría posee un "buen" teorema de la convergencia dominada [B–D–S, Theorem 2.8] y [L 1, Theorem 2.2].

Teorema 1.7. *Sea (f_n) una sucesión en $L^1(\nu)$ que converge puntualmente en casi todo respecto de ν a una función f y sea $g \in L^1(\nu)$ tal que $|f_n| \leq g$ para todo n. Entonces $f \in L^1(\nu)$ y (f_n) converge a f en $L^1(\nu)$.*

Integrabilidad escalar 1.8. Lewis en [L 1, Definition 2.5] define las funciones con integral generalizada como aquéllas que cumplen la condición a) de la Definición 1.2. Nosotros las denominaremos *funciones escalarmente integrables respecto de ν*. Es fácil ver que para estas funciones se cumple que para todo $A \in \Sigma$

$$\int_A f\, d\nu \in X^{**},$$

puesto que es límite puntual de integrales de funciones simples. Más aún, para estas funciones se sigue del Teorema de Banach–Steinhaus que

$$\sup\left\{\int |f|\, d\,|x^*\nu| : x^* \in B_{X^*}\right\} < +\infty.$$

Lewis prueba la siguiente caracterización de las funciones escalarmente integrables que son integrables.

Teorema 1.9. *Sea f una función escalarmente integrable respecto de la medida $\nu\colon \Sigma \longrightarrow X$. Consideremos la función de conjuntos*

$$A \in \Sigma \longmapsto \Phi(A) = \int_A f \, d\nu \in X^{**}.$$

Entonces son equivalentes:

a) La función f es integrable respecto de ν.

b) Φ es una medida numerablemente aditiva.

c) Φ es absolutamente continua respecto de ν, es decir,

$$\lim_{\|\nu\|(A)\to 0} \left\| \int_A f \, d\nu \right\| = 0.$$

Lewis caracteriza los espacios de Banach X con la propiedad de que la integrabilidad respecto de toda medida con valores en X es equivalente a la integrabilidad escalar como aquellos espacios en que toda serie débilmente incondicionalmente de Cauchy es incondicionalmente convergente [L–1, Theorem 5.1]. Considerando los resultados de Bessaga y Pelczynski [B–P] se tiene la siguiente caracterización.

Teorema 1.10. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

a) Para toda medida ν con valores en X, si f es una función escalarmente integrable respecto de ν, entonces f es integrable respecto de ν.

b) X no contiene ningún subespacio isomorfo a c_0.

Operador integración 1.11. Una herramienta fundamental en el estudio del espacio $L^1(\nu)$ es el *operador integración* definido por

$$f \in L^1(\nu) \longmapsto \nu(f) = \int f \, d\nu \in X\,,$$

que es lineal y continuo, cumpliendo $\|\nu(f)\| \leq \|f\|_\nu$.

Consideremos la medida $|\nu|$ variación de la medida ν. Lewis estudia la relación entre el espacio $L^1(|\nu|)$ y el espacio $L^1(\nu)$ [L 2, Theorem 4.1, Theorem 4.2 y Corollary 4.3].

Teorema 1.12. *Sea X un espacio de Banach, sea ν una medida vectorial con valores en X y sea $|\nu|$ su variación. Entonces:*

1) Si f está en $L^1(|\nu|)$ entonces f está en $L^1(\nu)$ y se tiene $\|f\|_\nu \leq \|f\|_{L^1(|\nu|)}$.

2) Sea $f \in L^1(\nu)$ y sea Φ la medida con densidad f respecto de ν, entonces $f \in L^1(|\nu|)$ si y sólo si la medida Φ tiene variación acotada, y en este caso

$$|\Phi|(A) = \int_A |f| \, d\,|\nu| \quad \text{para todo } \; A \in \Sigma.$$

3) X es de dimensión finita si y sólo si para toda medida ν con valores en X se cumple que toda función de $L^1(\nu)$ está en $L^1(|\nu|)$.

Se sigue que cuando X tiene dimensión finita los espacios $L^1(\nu)$ y $L^1(|\nu|)$ coinciden y sus normas son equivalentes.

Observaciones 1.13. **1.** Se dice que un espacio de medida $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ es *localizable* si para todo conjunto medible A de medida no nula existe un conjunto medible $B \subseteq A$ tal que $0 < \lambda(B) < +\infty$. Sea $\nu\colon \Sigma \longrightarrow X$ una medida numerablemente aditiva. Gracias a la existencia de una medida de control para ν se sigue, sin más que aplicar un teorema de Exhaución [D–U, Lemma III.2.4], que la variación de ν es localizable si y sólo si es σ–finita. La importancia de este hecho para nuestro estudio estriba en que allí donde la variación no sea localizable, el espacio $L^1(|\nu|)$ se reduce al vector nulo. Es decir si $|\nu|$ no es σ–finita existe un medible A con $|\nu|(A) > 0$, tal que para todo medible $B \subset A$ se tiene $|\nu|(B) = 0$ ó $|\nu|(B) = +\infty$. Por lo tanto si ν_A es la restricción de ν a A, se tiene que $L^1(|\nu_A|) = \emptyset$.

2. Consideremos una medida $\nu\colon \Sigma \longrightarrow X$ donde X es un subespacio cerrado de un espacio de Banach Y. La semivariación no varía al considerar que ν toma valores en Y. Se sigue de la Definición 1.1 que tampoco varía la integrabilidad y por tanto tampoco varía el espacio $L^1(\nu)$. Se concluye que, a efectos del estudio del espacio $L^1(\nu)$, se puede considerar que la medida ν toma valores en el espacio $[\nu(\Sigma)]$, clausura de la envolvente lineal del rango de ν.

3. Kluvánek y Knowles [K–K, II.7] consideran las suma directa de una familia arbitraria de medidas. Nosotros utilizamos la suma directa de dos medidas $(\Omega_i, \Sigma_i, \nu_i)$ con valores en espacios de Banach X_i, $i = 1, 2$, definida por

$$A \in \Sigma \longmapsto \nu_1 \oplus \nu_2(A) = \nu_1(A \cap \Omega_1) \oplus \nu_1(A \cap \Omega_2) \in X_1 \oplus X_2\,,$$

donde Ω es la unión disjunta de los espacios Ω_1 y Ω_2 y Σ es la σ–álgebra de subconjuntos A de Ω tales que $A \cap \Omega_i \in \Sigma_i$, $i = 1, 2$. Entonces se tiene que $L^1(\nu_1 \oplus \nu_2) = L^1(\nu_1) \oplus L^1(\nu_2)$, [K–K, Theorem II.7.2].

4. Para σ–álgebras finitas, el espacio $L^1(\nu)$ obtenido es de dimensión finita igual al cardinal de la σ–álgebra. Excluimos por tanto este caso en nuestro estudio.

El capítulo IV.10 del libro de Dunford y Schwartz [D–S] está dedicado a esta teoría de integración. Aparte de los autores ya mencionados, Debiéve [D] y

Thomas [Th] han trabajado también en esta teoría. Egghe [E] y Okada [O] han estudiado diversos aspectos del espacio $L^1(\nu)$. Otros autores han considerado en sus trabajos el espacio $L^1(\nu)$: Drewnowski [Dr]; Ghoussoub y Saab [G–S]; Kalton, Turret y Uhl [K–T–U]. Esta teoría de integración es un caso particular de las integrales bilineales estudiadas por Bartle [B], Brooks y Dinculeanu [B–D] y Dobrakov [Do 1 y 2].

SECCIÓN 2. En esta segunda sección comenzamos ya con nuestro propio estudio del espacio $L^1(\nu)$.

Espacio dual 1.14. La orden continuidad del espacio $L^1(\nu)$, Teorema 1.4, permite representar el espacio dual de $L^1(\nu)$, a través de la teoría de retículos de Banach.

$L^1(\nu)$ es un espacio de Banach de funciones respecto del espacio de medida $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ donde λ es una medida de control de Rybakov para ν. Al ser $L^1(\nu)$ orden continuo se sigue que el espacio $L^1(\nu)^*$ se puede representar como el dual de Köthe de $L^1(\nu)$, ver Preliminares:

$$L^1(\nu)^* = \{\, g\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R} : g \text{ es medible, y } gf \in L^1(\lambda) \quad \text{para toda} \quad f \in L^1(\nu)\,\},$$

estando la acción de tales funciones sobre $L^1(\nu)$ dada por

$$f \in L^1(\nu) \longmapsto \int gf\, d\lambda \in \mathbf{R}.$$

Como el espacio $L^1(\nu)$ contiene las funciones características de los conjuntos medibles, se sigue que las funciones de $L^1(\nu)^*$ están en $L^1(\lambda)$. Más aún, se sigue de la representación vista, que $L^1(\nu)^*$ es un *ideal de funciones medibles* en $L^1(\lambda)$, esto es, si $g \in L^1(\nu)^*$ y $h \in L^1(\lambda)$ tal que $|h| \leq |g|$, entonces $h \in L^1(\nu)^*$.

Se tienen las siguientes inclusiones naturales

$$L_\infty(\lambda) \longrightarrow L^1(\nu)^* \longrightarrow L^1(\lambda),$$

siendo los operadores inyecciones continuas, que cumplen: si $g \in L_\infty(\lambda)$ entonces $\|g\|_\infty \leq \|g\|_{L^1(\nu)^*}$ y si $g \in L^1(\nu)^*$ entonces $\|g\|_{L^1(\nu)^*} \leq \|\nu\|(\Omega) \cdot \|g\|_{L^1(\lambda)}$.

Son de especial relevancia en el espacio $L^1(\nu)^*$ los funcionales dados por

$$f \in L^1(\nu) \longmapsto \varphi_{x^*}(f) = \int f \, dx^*\nu \in \mathbf{R},$$

donde $x^* \in X^*$. Se tiene $\|\varphi_{x^*}\| \leq \|x^*\|$. Consideremos la medida escalar $x^*\nu$. Es absolutamente continua respecto de λ. Existe por tanto, en virtud del Teorema de Radon–Nikodym, una función h_{x^*} en $L^1(\lambda)$ tal que

$$x^*\nu(A) = \int_A h_{x^*} \, d\lambda \qquad \text{para todo} \;\; A \in \Sigma.$$

Se sigue que para toda $f \in L^1(\nu)$

$$\varphi_{x^*}(f) = \int f h_{x^*} \, d\lambda,$$

luego el funcional φ_{x^*} se puede identificar con la función h_{x^*} de $L^1(\lambda)$.

Consideraremos, más adelante, en $L^1(\nu)^*$ el *ideal reticular* generado por las funciones $\{h_{x^*} : x^* \in X^*\}$, que denotaremos por $\mathcal{I}$. Es decir

$$\mathcal{I} = \left\{ h \in L^1(\nu)^* : \text{ existen } x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^* \text{ tal que } |h| \leq \sum_1^n |h_{x_i^*}| \right\}.$$

Consideremos el bidual de Köthe de $L^1(\nu)$:

$$\{\, g\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R} : g \text{ es medible, y } gh \in L^1(\lambda) \;\; \text{para toda} \;\; h \in L^1(\nu)^* \}.$$

Como las funciones h_{x^*} están en $L^1(\nu)^*$ se sigue que el bidual de Köthe de $L^1(\nu)$ está incluido en el espacio de funciones escalarmente integrables respecto de ν. Por otra parte, si f es una función escalarmente integrable respecto de ν existe una sucesión de funciones simples que convergen puntualmente en casi todo a f; como además se cumple que $\|f\|_\nu < +\infty$, ver 1.8, se sigue de [L–T II, p. 30] que f está en el bidual de Köthe de $L^1(\nu)$. Luego ambos espacios coinciden.

El primer problema que se plantea en el estudio del espacio $L^1(\nu)$ es determinar qué espacios se obtienen como L^1 de una medida vectorial. Surge también de forma natural la pregunta de si el espacio $L^1(\nu)$ puede ser reflexivo ó un espacio de Hilbert. El teorema siguiente da una contestación completa a estos problemas, probando que la clase de espacios obtenidos como L^1 de una medida vectorial coincide con la clase de retículos de Banach orden continuos con unidad débil.

Teorema 1.15. *Sea E un retículo de Banach orden continuo con unidad débil. Existe una medida vectorial ν, con valores en E, tal que el espacio $L^1(\nu)$ es orden isomorfo e isométrico a E.*

DEMOSTRACIÓN. En estas condiciones, E es orden isomorfo e isométrico a un espacio de Banach de funciones respecto de un espacio de probabilidad $(\Omega, \Sigma, \lambda)$, ver Preliminares.

Consideremos la medida

$$A \in \Sigma \longmapsto \nu(A) = \chi_A \in E\,.$$

Está bien definida por ser E un espacio de Banach de funciones respecto de $(\Omega, \Sigma, \lambda)$.Es finitamente aditiva. Sea (A_n) una sucesión de conjuntos medibles disjuntos. Denotemos $B_n = \cup_1^n A_i$ para cada n, y $B = \cup_1^\infty A_i$, son conjuntos medibles. La sucesión de conjuntos (B_n) es creciente, luego la sucesión $\nu(B_n) = \chi_{B_n}$ es creciente en E. Como $B_n \subset B$ para todo n, se sigue que $\nu(B)$ acota en E a $\nu(B_n)$. De la orden continuidad de E se sigue que la sucesión $\big(\nu(B_n)\big)$ es convergente en E, a su supremo, que es $\nu(B)$. Luego la medida ν es numerablemente aditiva.

Como E es orden continuo el espacio dual coincide con el dual de Köthe (ver Preliminares):

$$E^* = \big\{\, g\colon S \longrightarrow \mathbf{R} \,:\, g \text{ es medible, y } gf \in L^1(\lambda) \text{ para toda } f \in E \big\}\,,$$

actuando estos elementos del dual sobre $L^1(\nu)$ por integración respecto de λ.

Sea $g \in E^*$. La medida $g\nu$ es

$$A \in \Sigma \longmapsto g\nu(A) = \int_A g \, d\lambda \in \mathbf{R}\,.$$

Es decir, es la medida de densidad g respecto de λ. Una función $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ es escalarmente integrable respecto de ν si es integrable respecto de todas las medidas $g\,d\lambda$ para toda $g \in E^*$.

Sea $f \in E$, se sigue que f es escalarmente integrable respecto de ν. Sea $A \in \Sigma$. El funcional

$$g \in E^* \longmapsto \int_A gf \, d\lambda = \big\langle g, f \cdot \chi_A \big\rangle \in \mathbf{R}\,,$$

define un elemento de E, pues $f \cdot \chi_A$ pertenece a E, para todo $A \in \Sigma$. Se sigue que $f \in L^1(\nu)$ y

$$\int_A f \, d\nu = f \cdot \chi_A \quad \text{para todo } A \in \Sigma.$$

Por otra parte, si $f \in L^1(\nu)$ el funcional anterior define un elemento de E para cada $A \in \Sigma$, luego $f \in E$.

Veamos que de hecho se tiene una isometría entre E y $L^1(\nu)$:

$$\begin{aligned}\|f\|_\nu &= \sup\left\{\int |f|\, d|g\nu| : g \in B_{E^*}\right\}\\ &= \sup\left\{\int |f||g|\, d\lambda : g \in B_{E^*}\right\}\\ &= \sup\left\{|\langle f, g\rangle| : g \in B_{E^*}\right\}\\ &= \|f\|_E.\end{aligned}$$

Se deduce de la prueba que el operador integración es la identidad de E en E. Q.E.D.

Se sigue del teorema anterior que los espacios $L^p[0,1]$ con $1 \leq p < +\infty$, los espacios de Orlicz que cumplan la condición Δ_2 y los espacios de Banach con base incondicional, están entre los espacios de la forma $L^1(\nu)$.

Para representar retículos de Banach orden continuos sin unidad débil se puede utilizar la integración respecto de medidas vectoriales definidas en δ–anillos, estudiada por Lewis [L 2] y posteriormente desarrollada por Masani y Niemi [M–N, 1 y 2]. Sea ν una medida vectorial numerablemente aditiva definida sobre un δ–anillo. El espacio $L^1(\nu)$ de funciones reales integrables respecto de ν en el sentido de Lewis, Definición 1.2, es un espacio de Banach, que Masani y Niemi denotan por $P_{1,\nu}$ [M–N 2, Theorem 4.7.c)]. Es un retículo de Banach cuando se le dota del orden puntual en casi todo respecto de ν. Utilizando la existencia de una medida de control para ν [Br, Theorem 1] se prueba que $L^1(\nu)$ es un retículo de Banach orden continuo, de forma análoga al caso de medidas definidas sobre σ–álgebras, ver discusión previa al Teorema 1.4. De hecho se tiene la siguiente extensión del Teorema 1.15.

Sea E un retículo de Banach orden continuo. Existe una medida numerablemente aditiva ν definida sobre un δ–anillo y con valores en E, tal que el espacio

$L^1(\nu)$ es orden isomorfo e isométrico a E.

La prueba se basa en que si E es orden continuo entonces se puede expresar como una suma incondicional de retículos de Banach E_α, orden continuos y con unidad débil [L–T II, Proposition 1.a.9]. Para cada E_α, en virtud del Teorema 1.15, existe un espacio Ω_α, una σ–álgebra Σ_α y una medida numerablemente aditiva $\nu_\alpha \colon \Sigma_\alpha \longrightarrow E_\alpha$ tales que $L^1(\nu_\alpha)$ es orden isomorfo e isométrico a E_α. Sea Ω la unión disjunta de los espacios Ω_α y consideremos el δ–anillo

$$D = \left\{ A = \bigcup_{i \in I} A_i : I \subset \mathcal{A} \text{ es finito } A_i \in \Sigma_i \right\}.$$

La medida

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i \in D \longmapsto \nu(A) = \sum_{i \in I} \nu_i(A_i) \in E\,,$$

está bien definida, es numerablemente aditiva sobre D y, gracias a la orden continuidad de E, se comprueba que la identidad es una biyección que conserva el orden y la norma entre los espacios $L^1(\nu)$ y E.

Veamos un ejemplo de la representación anterior. Si Γ es un conjunto no numerable, el espacio $\ell^1(\Gamma)$ es un retículo de Banach orden continuo y sin unidad débil. Se obtiene como $L^1(\nu)$ para la siguiente medida ν, definida sobre el δ–anillo D de partes finitas de Γ,

$$A \in D \longmapsto \nu(A) = \sum_{\gamma \in A} e_\gamma \in \ell^1(\Gamma)\,,$$

donde e_γ es la característica del punto γ.

Estudiamos a continuación la posibilidad de obtener los espacios $L^1(\nu)$ a través de medidas valoradas en un espacio de Banach fijo. Veremos en el Teorema 1.20 que si ν es una medida separable y sin átomos el espacio $L^1(\nu)$ se puede obtener a partir de una medida con valores en el espacio de Banach c_0. Estudiamos primero los átomos y la separabilidad del espacio $L^1(\nu)$.

Proposición 1.16. *Sea $f \in L^1(\nu)$. Entonces f es un átomo de $L^1(\nu)$ si y sólo si f es un múltiplo de χ_A, siendo $A \in \Sigma$ un átomo de ν.*

DEMOSTRACIÓN. Sea f un átomo de $L^1(\nu)$. Supongamos que f no es constante allí donde no es nula. Existe entonces $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, tal que los conjuntos $A = \{\omega : f(\omega) \geq a\}$ y $B = \{\omega : 0 < f(\omega) < a\}$ tienen ambos semivariación no nula. Entonces $0 < f \cdot \chi_A < f$, pero $f \cdot \chi_A$ no es múltiplo de f, contradiciendo que f sea un átomo de $L^1(\nu)$. Luego f es un múltiplo de la función característica del conjunto $A = \{\omega : f(\omega) > 0\}$. Si A no es un átomo de ν, existe $B \subset A$ tal que tanto B como $A \backslash B$ tienen semivariación no nula. La función $f \cdot \chi_B$ permite llegar a contradicción con el hecho de ser f un átomo de $L^1(\nu)$. Una argumentación similar prueba que si A es un átomo de ν, entonces χ_A es un átomo de $L^1(\nu)$. Q.E.D.

Corolario 1.17. *$L^1(\nu)$ es atómico si y sólo si ν es puramente atómica.*

Dado el espacio medible (Ω, Σ) y dada una medida vectorial $\nu: \Sigma \longrightarrow X$ podemos asociarle el siguiente espacio pseudométrico (Σ, d_ν) donde para $A, B \in \Sigma$ se define $d_\nu(A, B) = \|\nu\|(A \triangle B)$. Sea λ una medida de control de ν. El espacio (Σ, d_ν) es homeomorfo al espacio pseudométrico (Σ, d_λ), asociado al espacio de medida $(\Omega, \Sigma, \lambda)$. Se dice que una medida vectorial ν definida sobre Σ es *separable* si lo es el espacio (Σ, d_ν).

Proposición 1.18. *$L^1(\nu)$ es separable si y sólo si el espacio pseudométrico (Σ, d_ν) es separable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea λ una medida de control de Rybakov para ν. La separabilidad del espacio (Σ, d_ν) es equivalente a la de (Σ, d_λ). Es conocido que la separabilidad de (Σ, d_λ) es equivalente a la separabilidad de $L^1(\lambda)$. Supongamos que $L^1(\nu)$ es separable. Como la inyección $L^1(\nu) \longrightarrow L^1(\lambda)$ es continua y tiene imagen densa, se sigue que $L^1(\lambda)$ es separable y por tanto (Σ, d_ν) es separable.

Para probar el recíproco sea (A_n) una sucesión de medibles que es densa en (Σ, d_ν). Es fácil comprobar que las funciones simples con coeficientes racionales y soportadas sobre los (A_n) son densas en $L^1(\nu)$. Q.E.D.

El operador integración $\nu: L^1(\nu) \longrightarrow X$ es continuo. Si denotamos por $[\nu(\Sigma)]$ la clausura de la envoltura lineal del rango de ν, se tiene que $\nu: L^1(\nu) \longrightarrow [\nu(\Sigma)]$ es continuo y tiene imagen densa, pues ésta contiene las integrales de las funciones simples. Por otra parte se ha visto que es exclusivamente el espacio $[\nu(\Sigma)]$ el que determina el espacio $L^1(\nu)$, ver 1.13. Se tiene por tanto la proposición siguiente.

Proposición 1.19. *Sea $\nu: \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial tal que $L^1(\nu)$ es separable. Existe un subespacio vectorial $Y \subset X$, separable, con $\nu(\Sigma) \subset Y$ y tal que $\nu: \Sigma \longrightarrow Y$ genera el mismo espacio $L^1(\nu)$.*

Teorema 1.20. *Sea $\nu: \Sigma \longrightarrow X$ una medida separable y sin átomos. Entonces existe una medida $\mu: \Sigma \longrightarrow c_0$ tal que el espacio $L^1(\mu)$ es orden isomorfo e isométrico a $L^1(\nu)$.*

DEMOSTRACIÓN. Se ha visto que si la medida ν es separable también lo es $L^1(\nu)$; al ser las funciones simples densas en $L^1(\nu)$ existe una sucesión (f_n) de funciones simples que es densa en $L^1(\nu)$. Sea λ una medida de control de Rybakov para ν. Recordemos que $L^1(\nu)^*$ se puede identificar con un ideal de funciones en $L^1(\lambda)$.

La prueba se hará en cuatro pasos.

PASO PRIMERO. Existe una sucesión de funciones simples (h_n) que es densa en la bola unidad de $L^1(\nu)^*$ cuando se considera la topología débil–$*$.

Sea g un elemento de la bola unidad de $L^1(\nu)^*$. Existe una sucesión (φ_n) de funciones simples que converge puntualmente a g cumpliendo $|\varphi_n| \leq |g|$. Se tiene por tanto que para toda $f \in L^1(\nu)$

$$\langle \varphi_n, f \rangle = \int \varphi_n f \, d\lambda \quad \text{converge a} \quad \int g f \, d\lambda = \langle g, f \rangle.$$

Luego (φ_n) converge a g en la topología débil–$*$ de $L^1(\nu)^*$. Como $|\varphi_n| \leq |g|$, se sigue que φ_n están en $L^1(\nu)^*$ y $\|\varphi_n\| \leq \|g\| \leq 1$. Luego las funciones simples de norma menor o igual que uno forman un conjunto débil–$*$ denso en la bola unidad de $L^1(\nu)^*$.

Como el espacio $L^1(\nu)$ es separable, la bola unidad de $L^1(\nu)^*$ es metrizable para la topología débil–$*$. Se deduce que la bola unidad de $L^1(\nu)^*$ es separable para la topología débil–$*$. Luego existe una sucesión de funciones simples débil–$*$ densa.

PASO SEGUNDO. Existe una sucesión creciente (Σ_n) de sub–σ–álgebras finitas de Σ y existe una sucesión (g_n) de funciones simples cumpliendo

a) para cada n, las funciones f_n y g_n son medibles respecto de Σ_n,

b) para cada n, $|g_n| = |h_n|$,

c) (g_n, Σ_n) es una sucesión de diferencias de martingala, es decir, para todo n la esperanza condicionada de g_n respecto de Σ_{n-1} es nula.

Sea $g_1 = h_1$. Supongamos definidas las funciones $g_1, \ldots, g_{n-1}$ y las σ–álgebras $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_{n-2}$. Sea

$$\Sigma_{n-1} = \sigma(f_1, \ldots, f_{n-1}, g_1, \ldots, g_{n-1}),$$

la menor σ–álgebra respecto de la cual son medibles las funciones $f_1, \ldots, f_{n-1}$ y $g_1, \ldots, g_{n-1}$. Como estas funciones son simples, Σ_{n-1} es finito y por tanto está generado por una cantidad finita de átomos.

Sea A un conjunto de constancia de la función simple h_n. Sea B un átomo de Σ_{n-1}. Para definir g_n es suficiente hacerlo sobre cada conjunto no vacío $A \cap B$. Supongamos que $A \cap B$ no es vacío. Como la medida ν no tiene átomos, λ tampoco tiene átomos. Existen por tanto dos conjuntos medibles disjuntos C_1 y C_2 cuya unión es $A \cap B$ y tales que $\lambda(C_1) = \lambda(C_2)$.

Definimos g_n en $A \cap B$ de la forma siguiente:

$$g_n(\omega) = \begin{cases} h_n(\omega) & \text{si } \omega \in C_1, \\ \\ -h_n(\omega) & \text{si } \omega \in C_2. \end{cases}$$

La función g_n es simple y cumple b). Para comprobar que se cumple c) es suficiente ver que si A es un conjunto de constancia de h_n y B un átomo de Σ_{n-1}, entonces la integral de g_n sobre $A \cap B$ es nula.

Sea $\omega_0 \in A \cap B$:

$$\begin{aligned} \int_{A\cap B} g_n \, d\lambda &= \int_{C_1} g_n \, d\lambda + \int_{C_2} g_n \, d\lambda \\ &= \int_{C_1} h_n \, d\lambda - \int_{C_2} h_n \, d\lambda \\ &= h_n(\omega_0) \cdot \Big(\lambda(C_1) - \lambda(C_2) \Big) \\ &= 0 \end{aligned}$$

PASO TERCERO. La función de conjuntos siguiente es una medida numerablemente aditiva

$$A \in \Sigma \longmapsto \mu(A) = \left(\int_A g_n \, d\lambda \right)_0^\infty \in c_0 \,,$$

donde $g_0 \equiv 1$. Se cumple que si f está en $L^1(\nu)$ entonces f está en $L^1(\mu)$.

Sea f en $L^1(\nu)$. Dado $\varepsilon > 0$ por densidad de la sucesión (f_n) existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $\|f - f_{n_0}\|_\nu < \varepsilon$. Entonces

$$\begin{aligned} |\int g_n f \, d\lambda| &\leq |\int g_n(f - f_{n_0}) \, d\lambda| + |\int g_n f_{n_0} \, d\lambda| \\ &= |\langle g_n, f - f_{n_0} \rangle| + |\int g_n f_{n_0} \, d\lambda| \\ &\leq \varepsilon + |\int g_n f_{n_0} \, d\lambda|. \end{aligned}$$

Para $n > n_0$ la función f_{n_0} es medible respecto de Σ_{n-1}, luego, al ser (g_n, Σ_n) una sucesión de diferencias de martingala, la segunda integral es nula. Esto prueba que para toda función f en $L^1(\nu)$

$$\left(\int f g_n \, d\lambda \right)_0^\infty \in c_0. \tag{1}$$

Considerando $f = \chi_A$ para cada medible A se sigue que la medida μ está bien definida.

Sea $a^* = (a_n)$ en $\ell^1 = c_0^*$. Como las funciones (g_n) están en la bola unidad de $L^1(\nu)^*$ y la sucesión (a_n) es sumable, se sigue que la serie $\sum a_n g_n$ es absolutamente sumable en $L^1(\nu)^*$, luego absolutamente sumable en $L^1(\lambda)$. Se sigue que

$$a^*\mu(A) = \sum_0^\infty a_n \int_A g_n \, d\lambda = \int_A \left(\sum_0^\infty a_n g_n \right) d\lambda. \tag{2}$$

Luego la medida $a^*\mu$ es numerablemente aditiva. Por lo tanto la medida μ es débilmente numerablemente aditiva y por el teorema de Orlicz–Pettis es numerablemente aditiva.

Sea f en $L^1(\nu)$. De (2) se sigue que f es integrable respecto de la medida $a^*\mu$. Luego f es escalarmente integrable respecto de μ. De (1) se sigue que $\int_A f \, d\mu$ está en c_0, para todo $A \in \Sigma$. Luego f está en $L^1(\mu)$.

PASO CUARTO. La inclusión de $L^1(\nu)$ en $L^1(\mu)$ es sobreyectiva y conserva la norma.

Sea f en $L^1(\mu)$. Fijemos $x^* \in X^*$. Para cada $n \in \mathbf{N}$ sea $f_n = f \cdot \chi_{A_n}$, donde $A_n = \{\omega : |f(\omega)| \leq n\}$. Como f_n está acotada, pertenece a $L^1(\nu)$. Sea h_{x^*} la derivada de Radon–Nikodym de la medida $x^*\nu$ respecto de λ, está en la bola unidad de $L^1(\nu)^*$. Sea (h_{n_i}) una subsucesión de (h_n) que converge en la topología débil–$*$ a $|h_{x^*}|$.

Entonces

$$\begin{aligned} \int |f_n|\, d\,|x^*\nu| &= \int |f_n||h_{x^*}|\, d\lambda \\ &= \lim_i \int |f_n| h_{n_i}\, d\lambda \\ &\leq \lim_i \int |f_n||h_{n_i}|\, d\lambda \\ &= \lim_i \int |f_n||g_{n_i}|\, d\lambda. \end{aligned} \tag{3}$$

Sea e_n el n–ésimo vector de la base canónica de ℓ^1. La medida $|e_1\mu|$ es la medida de densidad g_0 respecto de λ. Se sigue que λ es una medida de control de Rybakov para μ.

El operador

$$f \in L^1(\mu) \longmapsto \int f g_n\, d\lambda \in \mathbf{R}$$

es la composición del operador integración respecto de μ con e_n, luego es un funcional lineal y continuo que tiene norma menor o igual que uno. Se sigue que

$$\int |f_n||g_{n_i}|\, d\lambda = \left\langle |f_n|, |g_{n_i}| \right\rangle \leq \|f_n\|_\mu \leq \|f\|_\mu. \tag{4}$$

De las desigualdades (3) y (4) se tiene

$$\int |f_n|\, d|x^*\nu| \leq \|f\|_\mu \;\text{ para todo } n \in \mathbf{N}.$$

Se sigue que

$$\int |f|\, d|x^*\nu| \leq \|f\|_\mu.$$

Luego f es integrable respecto de la medida $|x^*\nu|$. Por lo tanto f es escalarmente integrable respecto de ν y

$$\sup\left\{\int |f|\, d|x^*\nu| : x^* \in B_{X^*}\right\} \leq \|f\|_\mu. \tag{5}$$

Para probar que f está en $L^1(\nu)$ apliquemos el procedimiento anterior a las funciones $f_n - f_m$, que están en $L^1(\nu)$, obteniendo de (5)

$$\|f_n - f_m\|_\nu \leq \|f_n - f_m\|_\mu.$$

De la orden continuidad de $L^1(\mu)$ se sigue que (f_n) es una sucesión convergente en $L^1(\mu)$ y por tanto (f_n) es una sucesión de Cauchy en $L^1(\nu)$, que converge puntualmente en casi todo respecto de λ a f. Luego $f \in L^1(\nu)$ y de (5) se obtiene $\|f\|_\nu \leq \|f\|_\mu$.

Por otra parte, para $a^* = (a_n)$ en la bola unidad de ℓ^1 se ha visto que la medida $a^*\mu$ es la medida de densidad $\sum a_n g_n$ respecto de λ. Asimismo sabemos que la función $\sum a_n g_n$ está en $L^1(\nu)^*$ y tiene norma menor o igual que uno. Se sigue entonces que

$$\begin{aligned}\int |f|\, d|a^*\mu| &= \int |f| \cdot \left|\sum a_n g_n\right| d\lambda \\ &= \left\langle |f|, \left|\sum a_n g_n\right|\right\rangle \\ &\leq \|f\|_\nu .\end{aligned}$$

Tomando supremo en la bola unidad de ℓ^1 se obtiene $\|f\|_\mu \leq \|f\|_\nu$. Q.E.D.

Para estudiar la posible validez de este teorema en el caso de medidas puramente atómicas debemos estudiar previamente el espacio $L^1(\nu)$ que se obtiene para una de estas medidas.

Las medidas puramente atómicas numerablemente aditivas se pueden considerar definidas sobre la σ–álgebra $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ de partes de los números naturales. Esto se debe al hecho de que sólo puede haber una cantidad a lo más numerable de átomos de medida no nula. Esto a su vez se sigue de que para cada natural n sólo puede haber una cantidad finita de átomos, A_k, tales que $\|\nu(A_k)\| \geq 1/n$, ya que en caso contrario la serie $\sum \nu(A_k)$ no sería convergente, contradiciendo que $\nu(\cup A_k) = \sum \nu(A_k)$. Luego estas medidas son de la forma

$$A \in \mathcal{P}(\mathbf{N}) \longmapsto \nu(A) = \sum_{n \in A} x_n,$$

donde $\sum x_n$ es una serie incondicionalmente convergente.

Proposición 1.21. *Sea $\nu: \mathcal{P}(\mathbf{N}) \longrightarrow X$ una medida numerablemente aditiva. Sea $\nu(n) = x_n \in X$. Entonces $L^1(\nu)$ es el espacio de sucesiones siguiente*

$$\left\{(a_n) : \text{ la serie } \sum a_n x_n \text{ converge incondicionalmente en } X\right\},$$

siendo la norma

$$\|(a_n)\|_\nu = \sup\left\{\sum |a_n x^* x_n| : x^* \in B_{X^*}\right\}.$$

El espacio de funciones escalarmente integrables respecto de ν es

$$\left\{(a_n) : \text{la serie } \sum a_n x_n \text{ es débilmente incondicionalmente de Cauchy en } X\right\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $x^* \in X^*$. Consideremos la medida $x^*\nu$

$$A \in \mathcal{P}(\mathbf{N}) \longmapsto x^*\nu(A) = \sum_{n \in A} x^* x_n \in \mathbf{R}.$$

Su variación es la medida

$$A \in \mathcal{P}(\mathbf{N}) \longmapsto |x^*\nu|(A) = \sum_{n \in A} |x^* x_n| \in \mathbf{R}.$$

Sea (a_n) una sucesión real. Es integrable respecto de la medida $|x^*\nu|$ si y sólo si

$$\sum_1^\infty |a_n||x^*x_n| < +\infty.$$

Se sigue que (a_n) es escalarmente integrable respecto de ν si y sólo si la serie $\sum a_n x_n$ es débilmente incondicionalmente de Cauchy en X.

Para que (a_n) sea integrable respecto de ν debe ocurrir que para todo $A \subset \mathbf{N}$ el funcional

$$x^* \in X^* \longmapsto \sum_{n\in A} a_n x^* x_n \in \mathbf{R}$$

defina un elemento del espacio X, esto es, por el teorema de Orlicz–Pettis, que la serie $\sum_A a_n x_n$ converja incondicionalmente en X. La norma en $L^1(\nu)$ se deduce directamente de la expresión de las medidas $|x^*\nu|$. Q.E.D.

Se sigue de la proposición anterior que para medidas definidas sobre $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ la sucesión $\left(\chi_{\{n\}}\right)$ es una base incondicional de $L^1(\nu)$. El orden en $L^1(\nu)$ es el dado por las coordenadas. Se tiene además que $\|\chi_{\{n\}}\|_\nu = \|\nu(n)\|$.

La proposición siguiente recoge diversos resultados vistos anteriormente.

Proposición 1.22. *Sea E un retículo de Banach orden continuo con unidad débil. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

a) *E es puramente atómico.*

b) *E es orden isomorfo a $L^1(\nu)$ siendo ν puramente atómica.*

c) *En E los conjuntos relativamente compactos y los conjuntos L–débilmente compactos coinciden.*

d) *E es un espacio de Banach con una base incondicional.*

DEMOSTRACIÓN. La equivalencia entre a) y b) se sigue del Teorema 1.15 y del Corolario 1.17. Para la equivalencia entre a) y c) ver Preliminares.

Sea (y_n) una base incondicional de E. Es un retículo de Banach para el orden dado por las coordenadas

$$\sum a_n y_n \leq \sum b_n y_n \iff a_n \leq b_n \text{ para todo } n \in \mathbf{N},$$

y la norma equivalente

$$\left|\left|\left|\sum a_n y_n\right|\right|\right|_E = \sup\left\{\left\|\sum_{n\in A} a_n y_n\right\| : A \subset \mathbf{N}\right\}.$$

Sea (a_n) tal que $a_n > 0$ para todo n y $\sum a_n y_n$ está en E. La medida

$$A \in \mathcal{P}(\mathbf{N}) \longmapsto \nu(A) = \sum_{n\in A} a_n y_n \in E$$

es numerablemente aditiva. Se sigue de la Proposición 1.21 que $L^1(\nu)$ es el siguiente espacio de sucesiones

$$\left\{(b_n) : \text{ la serie } \sum b_n a_n y_n \text{ converge incondicionalmente en } E\right\}.$$

El operador

$$(b_n) \in L^1(\nu) \longmapsto \sum b_n a_n y_n \in E$$

es una biyección que conserva el orden. Es una isometría cuando se considera en $L^1(\nu)$ la norma equivalente $|||\cdot|||_\nu$. Q.E.D.

De la Proposición 1.22 se sigue que el espacio c_0 se puede obtener como $L^1(\nu)$ para una medida $\nu\colon \mathcal{P}(\mathbf{N}) \longrightarrow c_0$.

Para obtener el espacio ℓ^1 basta considerar la medida $\nu\colon \mathcal{P}(\mathbf{N}) \longrightarrow \mathbf{R} \subset c_0$ definida por $\nu(n) = a_n$ donde $a_n > 0$ para todo n y $(a_n) \in \ell^1$ está dada. Entonces

$$L^1(\nu) = \left\{(b_n) : \sum |a_n b_n| < +\infty\right\} \quad \text{y} \quad \|(b_n)\|_\nu = \sum |a_n b_n|.$$

Luego el operador

$$(x_n) \in \ell^1 \longmapsto (x_n/a_n) \in L^1(\nu)$$

es una biyección que conserva el orden y la norma.

Consideremos un espacio de Banach E con una base incondicional normalizada (y_n), que no contiene ningún subespacio isomorfo a c_0 ó ℓ^1, es decir E es reflexivo. En E se considera el orden dado por las coordenadas en la base (y_n). Entonces E no es orden isomorfo a $L^1(\nu)$ para una medida $\nu: \mathcal{P}(\mathbf{N}) \longrightarrow c_0$.

Supongamos lo contrario. Sea $T: E \longrightarrow L^1(\nu)$ un isomorfismo que conserva el orden. Consideremos el operador integración asociado $\nu: L^1(\nu) \longrightarrow c_0$. Para cada n sea $Ty_n = f_n \in L^1(\nu)$ y $\nu(f_n) = z_n \in c_0$. Se cumple entonces que la serie $\sum a_n y_n$ converge incondicionalmente en E si y sólo si la serie $\sum a_n z_n$ converge incondicionalmente en c_0. La suficiencia se sigue de la continuidad del operador $\nu \circ T$. Como y_n es un átomo de E, f_n es un átomo de $L^1(\nu)$, luego es múltiplo de $\chi_{\{n\}}$ y por tanto z_n es un múltiplo de $\nu(n)$. La necesidad se sigue entonces de la identificación del espacio $L^1(\nu)$ dada en la Proposición 1.21.

Al ser f_n un átomo de $L^1(\nu)$, se sigue que $\|z_n\| = \|f_n\|_\nu$, luego existe una constante $C > 0$ tal que $\|z_n\| \geq C$ para todo n. Como el espacio E no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ^1, la base (y_n) es contractiva ("shrinking"en la literatura inglesa), luego es débilmente nula. Por continuidad se deduce que la sucesión (z_n) es débilmente nula en c_0. El Principio de Selección de Bessaga y Pelczynski [L–T I, Proposition 1.a.12] garantiza la existencia de una subsucesión (z_{n_k}) que es una sucesión básica equivalente a una base de bloques de c_0, luego equivalente a la base canónica de c_0 [L–T I, Proposition 2.a.1]. Se sigue que (z_{n_k}) es una sucesión básica incondicional. Consideremos la restricción del operador $\nu \circ T$ a la clausura de la envoltura lineal de la sucesión (y_{n_k}) en E. En virtud de lo visto, es un isomorfismo sobre la clausura de la envoltura lineal de (z_{n_k}) en c_0. Este último espacio es isomorfo a c_0. Luego E contiene un subespacio isomorfo a c_0, contra nuestra hipótesis.

Volvamos a considerar el espacio dual de $L^1(\nu)$. En 1.14 se ha visto una representación del dual de $L^1(\nu)$. No es de gran utilidad para nuestro estudio del espacio $L^1(\nu)$, entre otras razones por no depender explícitamente del espacio de Banach X en que toma valores la medida. Egghe en [E, Theorem 2.5] da una representación de $L^1(\nu)^*$ para el caso de medidas de variación acotada como un cociente del espacio $L_\infty(|\nu|, X^*)$; desafortunadamente ni la prueba ni el resultado son correctos, [O, Example 2].

En la línea de buscar herramientas para el estudio del espacio $L^1(\nu)^*$ y de la topología débil de $L^1(\nu)$, consideraremos la condición siguiente. Sea (f_α) una red en $L^1(\nu)$ y sea $f \in L^1(\nu)$. Sea la condición

$$\int_A f_\alpha \, d\nu \text{ converge débilmente a } \int_A f \, d\nu \text{ en } X \text{ para cada } A \in \Sigma. \qquad (*)$$

La convergencia débil en $L^1(\nu)$ siempre implica la condición $(*)$ gracias a la continuidad del operador integración y del operador restricción $f \in L^1(\nu) \longmapsto f \cdot \chi_A \in L^1(\nu)$, para cada $A \in \Sigma$. Pero no es equivalente a la convergencia débil de la red. Esto se ve sin más que considerar el espacio $L^1[0,1]$ obtenido a partir de la medida de Lebesgue en [0,1].

Consideraremos la condición $(*)$ para redes acotadas. Se tiene el resultado siguiente, donde $\mathcal{I}$ es el ideal generado en $L^1(\nu)^*$ por las funciones $\{h_{x^*} : x^* \in X^*\}$, ver 1.14.

Teorema 1.23. *Sean las condiciones siguientes:*

a) $L^1(\nu)$ *no contiene ningún subespacio complementado isomorfo al espacio* ℓ^1.

b) El ideal $\mathcal{I}$ *es denso en* $L^1(\nu)^*$.

c) La convergencia débil en $L^1(\nu)$ *de redes acotadas está caracterizada por la convergencia débil en* X *de las integrales sobre conjuntos arbitrarios, es* *decir, si* (f_α) *es una red acotada en* $L^1(\nu)$ *entonces*

$$f_\alpha \xrightarrow{w} f \text{ en } L^1(\nu) \iff \int_A f_\alpha \, d\nu \xrightarrow{w} \int_A f \, d\nu \text{ en } X, \text{ para todo } A \in \Sigma.$$

Entonces a) implica b) y b) implica c).

DEMOSTRACIÓN. a) $\Rightarrow$ b) Supongamos que $L^1(\nu)$ no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ^1. Se sigue de resultados de Bessaga y Pelczynski [B–P, Theorem 4] que $L^1(\nu)^*$ no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ_∞. Como $L^1(\nu)^*$ es un retículo de Banach orden completo por ser un dual, se sigue que es orden continuo [A–B, Theorem 14.9]. En los retículos de Banach orden continuos los ideales cerrados son bandas [M 3, Corollary 2.4.4]. Como $L^1(\nu)$ es orden continuo se sigue que las bandas en $L^1(\nu)^*$ son cerradas para la topología débil–$*$ [M 3, Corollary 2.4.7]. Por lo tanto la clausura del ideal $\mathcal{I}$, que es un ideal también, es cerrada en la topología débil–$*$ de $L^1(\nu)^*$.

Por otra parte el ideal $\mathcal{I}$ es total para la topología débil–$*$. Para ver esto, sea $f \in L^1(\nu)$ tal que $\langle h, f\rangle = 0$ para toda $h \in \mathcal{I}$. Se sigue que para todo $x^* \in X^*$ y para todo $A \in \Sigma$

$$\int_A f \, dx^*\nu = \int_A f h_{x^*} \, d\lambda = \langle h_{x^*}\chi_A, f\rangle = 0.$$

De donde se deduce que $f \equiv 0$, lo que prueba la afirmación. De ser total se sigue, al ser un subespacio vectorial, que es denso en $L^1(\nu)$ para la topología débil–$*$.

Por tanto la clausura del ideal $\mathcal{I}$ es débil–$*$ cerrada y débil–$*$ densa, luego coincide con $L^1(\nu)$.

b) $\Rightarrow$ c) Hay que probar que la condición $(*)$ implica la convergencia débil. Es suficiente probarlo para $f = 0$. Sea (f_α) una red acotada en $L^1(\nu)$ tal que

$$\int_A f_\alpha \, dx^*\nu \longrightarrow 0 \quad \text{para todo } x^* \in X^* \text{ y para todo } A \in \Sigma.$$

Fijemos $x^* \in X^*$. Considerando la descomposición de Hahn de la medida $x^*\nu$, se deduce que la red (f_α) es débilmente nula en $L^1(|x^*\nu|)$.

Sea h un elemento del ideal $\mathcal{I}$. Existen entonces $x_1^*, \ldots, x_n^*$ en X^* tales que

$$|h| \leq \sum_1^n |h_{x_i^*}|.$$

Sea λ una medida de control de Rybakov para ν y sea μ la medida con densidad $|h|$ respecto de λ. De la desigualdad anterior se tiene la siguiente inyección continua

$$\left[\bigoplus_1^n L^1(|x_i^*\nu|)\right]_1 \longrightarrow L^1(\mu).$$

Luego la red (f_α) es débilmente nula en $L^1(\mu)$. Se sigue que para todo $A \in \Sigma$

$$\int_A f_\alpha |h| \, d\lambda \longrightarrow 0.$$

Descomponiendo h en su parte positiva y su parte negativa se deduce que

$$\langle h, f_\alpha \rangle = \int_A f_\alpha h \, d\lambda \longrightarrow 0. \tag{6}$$

De la densidad del ideal $\mathcal{I}$ en $L^1(\nu)^*$ y la acotación de la red (f_α), se sigue que (6) se cumple para todo $h \in L^1(\nu)^*$, luego (f_α) tiende débilmente a cero en $L^1(\nu)$. Q.E.D.

Debe observarse en relación con la condición a) del teorema anterior, que al ser $L^1(\nu)$ un retículo de Banach orden continuo, se sigue de un resultado de Tzafriri [T, Theorem 16] que siempre que contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1 contiene de hecho un subespacio complementado isomorfo a ℓ^1. La implicación a) $\Rightarrow$ c) ha sido probada independientemente por Okada para sucesiones de funciones [O, Corollary 16]. Para sucesiones se sigue del teorema de Banach–Steinhaus que la condición $(*)$ implica la acotación en norma, de la sucesión.

La condición c) no implica en general la condición a). Considérese el espacio ℓ^1 obtenido a partir de la medida con valores en ℓ^1 dada en la prueba del Teorema 1.15, se cumple c) puesto que el operador integración es el operador identidad.

Si la medida ν tiene rango relativamente compacto, también tiene rango relativamente compacto la medida con densidad f respecto de ν, para toda $f \in L^1(\nu)$. Se sigue entonces de los resultados de Lewis [L 3, Corollary 3.3] que, para medidas con rango relativamente compacto, la condición $(*)$ caracteriza la convergencia débil de sucesiones en $L^1(\nu)$. Si además el espacio X^* tiene la propiedad de Radon–Nikodym, entonces, de los trabajos de Graves y Ruess sobre convergencia de medidas, se sigue que el resultado anterior se extiende a redes acotadas [G–R, Corollary 7.3].

El ejemplo siguiente muestra una medida ν para la cual la condición $(*)$ no caracteriza la convergencia débil de sucesiones en $L^1(\nu)$.

Ejemplo 1.24. Sea $\mathcal{M}$ la σ–álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue en el intervalo $[0,+\infty)$ y sea m la medida de Lebesgue en dicho intervalo. Sean r_n las funciones de Rademacher, definidas en $[0,+\infty)$ por $r_n(t) = \operatorname{sign}(\operatorname{sen}(2^n\pi t))$. Consideremos la medida

$$A \in \mathcal{M} \longmapsto \nu(A) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\nu_k(A) \in \ell^2 ,$$

donde las medidas ν_k están definidas de la siguiente forma

$$\nu_k(A) = \left(\overbrace{0,\ldots,0}^{k-1}, \int_{A\cap[k-1,k]} r_k \, dm, \int_{A\cap[k-1,k]} r_{k+1} \, dm, \ldots \right) .$$

Cada medida ν_k está bien definida, es numerablemente aditiva y cumple

$$\|\nu_k(A)\|_2 \leq \|\chi_{A\cap[k-1,k]}\|_{L^2([k-1,k])} = m(A \cap [k-1,k])^{1/2}.$$

Luego la medida ν está bien definida y es numerablemente aditiva. Consideremos en $L^1(\nu)$ la sucesión (f_n) donde $f_n = 2^n \cdot \chi_{[n-1,n]}$. Como la función f_n está soportada en el intervalo $[n-1,n]$, se cumple:

$$\|f_n\|_\nu = \|\nu_n\|([n-1,n]) \leq 1.$$

Para todo $A \in \mathcal{M}$ se cumple:

$$\int_A f_n \, d\nu = \nu_n(A \cap [n-1,n]).$$

Este vector, de norma menor o igual que uno,pertenece al subespacio generado por los vectores $e_n, e_{n+1}, \ldots$ de la base canónica de ℓ^2, por lo tanto la sucesión $(\int_A f_n \, d\nu)$ tiende débilmente a cero en ℓ^2.

Sean $a_1, \ldots, a_N$ escalares. Para cada n, $1 \leq n \leq N$, consideremos el conjunto

$$A_n = \{t \in [n-1,n] : r_N(t) = \text{sign}(a_n)\}.$$

Se cumple entonces que

$$\int_{A_n} r_k \, dm = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq N; \\ (1/2) \cdot \text{sign}(a_n), & \text{si } k = N. \end{cases}$$

Luego se tiene que $\nu_n(A_n) = (1/2) \cdot \text{sign}(a_n) \cdot e_N$. Sea $A = \cup_1^N A_n$. Entonces

$$\begin{aligned} \left\| \sum_1^N a_n f_n \right\|_\nu &\geq \left\| \sum_1^N a_n \int_A f_n \, d\nu \right\|_2 \\ &= \left\| \sum_1^N a_n \nu_n(A_n) \right\|_2 \\ &= \left\| \sum_1^N a_n (1/2) \cdot \text{sign}(a_n) \cdot e_N \right\|_2 \\ &= (1/2) \sum_1^N |a_n|. \end{aligned}$$

Como la sucesión (f_n) está acotada, se sigue de lo anterior que (f_n) es una sucesión equivalente en $L^1(\nu)$ a la base canónica de ℓ^1. Luego (f_n) no tiende débilmente a cero en $L^1(\nu)$.

La medida ν tiene variación no acotada (para ver esto téngase en cuenta que ν es absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue y que el espacio ℓ^2 tiene la propiedad de Radon–Nikodym). Esto no es relevante, puesto que la misma construcción se puede realizar con valores en c_0 y la medida resultante tiene variación acotada.

CAPÍTULO 2: Propiedades del espacio $L^1(\nu)$.

En el capítulo anterior se ha visto que todo espacio $L^1(\nu)$ separable y sin átomos se puede obtener a partir de una medida con valores en c_0. Se deduce que las propiedades de $L^1(\nu)$ no determinan, en general, las propiedades del espacio de Banach X. Por el contrario, las propiedades de ν y de X sí determinan las propiedades del espacio $L^1(\nu)$: en qué medida esto ocurre es el objeto de estudio de este capítulo.

El espacio $L^1(\nu)$ es de generación débilmente compacta, es decir existe un conjunto relativamente débilmente compacto cuya envoltura lineal es densa en $L^1(\nu)$. Este resultado puede deducirse de la teoría general de retículos de Banach al ser $L^1(\nu)$ orden continuo [B–V–L]. Incluimos una prueba directa del resultado que se basa en las propiedades del rango de una medida vectorial y realza la importancia que la teoría de medidas vectoriales tiene en el estudio del espacio $L^1(\nu)$.

Teorema 2.1. *$L^1(\nu)$ es de generación débilmente compacta.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la siguiente función de conjuntos

$$A \in \Sigma \longmapsto \Phi(A) = \chi_A \in L^1(\nu)\ .$$

Es claramente una medida finitamente aditiva. Como $\|\Phi(A)\| = \|\chi_A\|_\nu = \|\nu\|(A)$ para cada $A \in \Sigma$, y la semivariación de ν es absolutamente continua respecto de una medida de control λ , se deduce que Φ es numerablemente aditiva. Por lo tanto su rango es un conjunto relativamente débilmente compacto en

$L^1(\nu)$ [D–U, Corollary I.2.7]. La envoltura lineal del rango de Φ es el conjunto de funciones simples, que son densas en $L^1(\nu)$, Teorema 1.6, con lo que queda probado el teorema. Q.E.D.

Consideremos la completitud secuencial del espacio $L^1(\nu)$ para la topología débil. Para retículos de Banach la propiedad de ser débilmente secuencialmente completo es equivalente a no contener ningún subespacio isomorfo a c_0 [L–T II, Theorem 1.c.4]. El siguiente teorema muestra cómo la no contención de subespacios isomorfos a c_0 se transmite del espacio de Banach X al espacio $L^1(\nu)$. Incluimos tres pruebas de este resultado, cada una de ellas utilizando distintas técnicas.

Teorema 2.2. *Sea X un espacio de Banach que no contiene ningún subespacio isomorfo a c_0. Entonces $L^1(\nu)$ no contiene ningún subespacio isomorfo a c_0.*

PRIMERA PRUEBA. Como $L^1(\nu)$ es un retículo de Banach, contiene un subespacio isomorfo a c_0 si y sólo si toda sucesión creciente y acotada en norma es convergente [L–T II, Theorem 1.c.4]. Sea (f_n) una sucesión en $L^1(\nu)$ creciente y acotada en norma. Sea $x^* \in X^*$, la sucesión (f_n) es creciente y acotada en norma en el espacio $L^1(|x^*\nu|)$. Como $|x^*\nu|$ es una medida positiva, el Teorema de Beppo–Levi garantiza que (f_n) es convergente en $L^1(|x^*\nu|)$ a una función $f_{x^*} \in L^1(|x^*\nu|)$. Sea λ una medida de control de Rybakov para ν. El razonamiento anterior muestra que (f_n) converge en $L^1(\lambda)$ a una función $f \in L^1(\lambda)$. Al ser creciente la sucesión, existe un conjunto medible Z con $\lambda(Z) = 0$ tal que $(f_n(\omega))$ converge a $f(\omega)$ para $\omega \notin Z$. Como la medida ν es absolutamente continua respecto de λ, para todo $x^* \in X^*$ se tiene $|x^*\nu|(Z) = 0$. Se sigue que $f = f_{x^*}$ en $L^1(|x^*\nu|)$. Luego $f \in L^1(|x^*\nu|)$ para todo $x^* \in X^*$. Por lo tanto la función f es escalarmente integrable.

El espacio de Banach X no contiene ningún subespacio isomorfo a c_0. Se sigue de la caracterización de Lewis, Teorema 1.10, que las funciones escalarmente integrables respecto de ν son de hecho integrables. Se deduce que $f \in L^1(\nu)$.

La sucesión (f_n) es creciente y está acotada en el orden en $L^1(\nu)$ por la función f. De la orden continuidad de $L^1(\nu)$ (Teorema 1.4) se sigue que (f_n) es convergente en norma, en $L^1(\nu)$. Q.E.D.

SEGUNDA PRUEBA. Probaremos el resultado contrarrecíproco. Supongamos que $L^1(\nu)$ contiene un subespacio isomorfo a c_0. Sea (f_n) una sucesión de funciones en $L^1(\nu)$ que es una sucesión básica equivalente en $L^1(\nu)$ a la base canónica de c_0. Cumple que

$$\text{existe } M > 0 \text{ tal que } \|f_n\|_\nu \geq M \text{ para todo } n \in \mathbf{N}, \tag{1}$$

y se cumple que $\sum f_n$ es una serie débilmente incondicionalmente de Cauchy en $L^1(\nu)$.

Sea λ una medida de control de Rybakov para ν. La inyección

$$L^1(\nu) \longrightarrow L^1(\lambda)$$

es continua, luego la serie $\sum f_n$ es débilmente incondicionalmente de Cauchy en $L^1(\lambda)$. Como el espacio $L^1(\lambda)$ no contiene ningún subespacio isomorfo a c_0, gracias a un resultado de Bessaga y Pelczynski [B–P, Theorem 5] se deduce que la serie $\sum f_n$ es incondicionalmente convergente en $L^1(\lambda)$. Por lo tanto la sucesión (f_n) tiende a cero en norma de $L^1(\lambda)$. Se sigue que existe una subsucesión (f_{n_k}) que tiende a cero puntualmente en casi todo respecto de λ.

Supongamos que para todo conjunto medible A se cumple

$$\int_A f_{n_k}\, d\nu \longrightarrow 0.$$

Entonces la sucesión (f_{n_k}) tiende a cero puntualmente en casi todo respecto de λ y cumple que $(\int_A f_{n_k}\, d\nu)$ tiende a cero en X para todo medible A. Se sigue, del

Teorema de Egoroff y del Teorema de Vitali–Hahn–Saks [D–U, Corollary I.4.10], que (f_{n_k}) tiende a cero en norma en $L^1(\nu)$, lo que contradice (1).

Luego existe un medible A tal que la sucesión $(\int_A f_{n_k}\, d\nu)$ no tiende a cero en X. Podemos suponer, pasando a una subsucesión si es necesario, que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left\| \int_A f_{n_k}\, d\nu) \right\| \geq C \quad \text{para todo } k \in \mathbf{N}. \tag{2}$$

Como la serie $\sum f_n$ es débilmente incondicionalmente de Cauchy en $L^1(\nu)$ y la aplicación

$$f \in L^1(\nu) \longmapsto \int_A f\, d\nu \in X$$

es continua, se sigue que la serie $\sum \int_A f_{n_k}\, d\nu$ es débilmente incondicionalmente de Cauchy en X y que la sucesión $(\int_A f_{n_k}\, d\nu)$ tiende débilmente a cero en X. Estas condiciones unidas a (2) garantizan, por el Principio de Selección de Bessaga y Pelczynski [B–P, Theorem 5] que existe una subsucesión de $(\int_A f_{n_k}\, d\nu)$, en X, que es una sucesión básica equivalente a la base canónica de c_0. Q.E.D.

La prueba anterior muestra que si $L^1(\nu)$ contiene un subespacio isomorfo a c_0, existe un subespacio en $L^1(\nu)$ isomorfo a c_0 sobre el cual el operador integración es un isomorfismo. Si (g_n) es la subsucesión de (f_n) tal que la sucesión $(\int_A g_n\, d\nu)$ es equivalente a la base canónica de c_0 en X, el subespacio mencionado sería la clausura en $L^1(\nu)$ de la envoltura lineal de las funciones $\{g_n \cdot \chi_A\}$.

TERCERA PRUEBA. Supongamos que X no contiene ningún subespacio isomorfo a c_0. Se sigue de la caracterización de Lewis Teorema 1.10 que el espacio de funciones integrables respecto de ν coincide con el espacio de funciones escalarmente integrables. Sabemos, 1.14, que este último espacio es el bidual de Köthe de $L^1(\nu)$. Luego se sigue que el espacio $L^1(\nu)$ coincide con su bidual de

Köthe. Esto es equivalente a que el espacio $L^1(\nu)$ cumpla la *propiedad de Fatou* (ver [L–T II, p. 30]), que es la siguiente

Sea (f_n) una sucesión en $L^1(\nu)$ creciente y acotada en norma. Entonces si $f = \sup f_n$ se cumple que f está en $L^1(\nu)$ y $(\|f_n\|_\nu)$ converge a $\|f\|_\nu$.

Luego $L^1(\nu)$ es un retículo de Banach orden continuo que cumple la propiedad de Fatou. Sea (f_n) una sucesión creciente y acotada en norma. De la propiedad de Fatou se sigue que $f = \sup f_n$ está en $L^1(\nu)$. Luego (f_n) es una sucesión creciente y acotada respecto del orden. Como $L^1(\nu)$ es orden continuo se sigue que (f_n) es convergente. Luego $L^1(\nu)$ no contiene ningún subespacio isomorfo a c_0. Q.E.D.

El Prof. I. Dobrakov indicó al autor que el siguiente corolario al Teorema 2.2 se puede también deducir de resultados de J. K. Brooks y N. Dinculeanu sobre integración bilineal [B–D, Corollary 8.10 y Theorem 9.1].

Corolario 2.3. *Sea X un espacio de Banach débilmente secuencialmente completo. Entonces $L^1(\nu)$ es débilmente secuencialmente completo.*

La implicación recíproca al Teorema 2.2 no es cierta como muestra el siguiente ejemplo. Del Teorema 1.20 se deduce que existe una medida ν con valores en c_0 para la cual $L^1(\nu) = L^1[0,1]$, espacio que no contiene a c_0. Sin embargo, dicho teorema no garantiza que exista un subespacio isomorfo a c_0 en la clausura de la envolvente lineal del rango de la medida. En el ejemplo siguiente se construye una medida que cumple lo anterior y tal que la envolvente lineal del rango es densa en c_0.

Ejemplo 2.4. Sea $\mathcal{M}$ la σ–álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue en el intervalo [0,1] y sea m la medida de Lebesgue en dicho intervalo. Consideremos la medida

$$A \in \mathcal{M} \longmapsto \nu(A) = \left(\int_A r_n \, dm \right) \in c_0 \, ,$$

donde r_n son las funciones de Rademacher definidas por $r_n(t) = \mathrm{sign}(\mathrm{sen}(2^n \pi t))$ para $n = 0, 1, \ldots$. El Lema de Riemann–Lebesgue prueba que ν está bien definida. De la acotación

$$\left\| \left(\int_A r_n \, dm \right) \right\|_\infty \leq m(A) \qquad \text{para todo} \qquad A \in \mathcal{M}$$

se sigue que ν es numerablemente aditiva, tiene variación acotada y $|\nu| \leq m$. Condiderando $x^* = e_k$ el k–ésimo vector de la base canónica de $c_0^* = \ell^1$, se tiene que $x^*\nu(A) = \int_A r_k \, dm$, luego $|x^*\nu| \equiv m$. Se deduce por tanto que la variación de la medida ν es la medida de Lebesgue m.

Sea $x^* = (a_n) \in \ell^1$. Al ser la sucesión (a_n) sumable y las funciones r_n acotadas en $L^1[0,1]$ se tiene

$$\langle x^*, \nu(A) \rangle = \sum a_n \int_A r_n \, dm = \int_A \left(\sum a_n r_n \right) \, dm. \tag{3}$$

Luego la medida $x^*\nu$ es la medida de densidad $\sum a_n r_n$ respecto de m. Sea $f \colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ una función medible. Supongamos que es escalarmente integrable respecto de ν. Para $x^* = e_k$ se tiene $|x^*\nu| = m$, luego $f \in L^1[0,1]$. Por otra parte de (3) se deduce la acotación $|x^*\nu|(A) \leq \|x^*\| \cdot m(A)$. Por lo tanto, si $f \in L^1[0,1]$ se sigue que $f \in L^1(|x^*\nu|)$ para todo $x^* \in X^*$, luego f es escalarmente integrable. Es decir, el espacio de funciones escalarmente integrables respecto de ν es $L^1[0,1]$.

Sea $f \in L^1(\nu)$. Consideremos el operador integración

$$f \in L^1(\nu) \longmapsto \nu(f) = \int f \, d\nu \in c_0 \, .$$

Sea $e_k \in \ell^1$. Entonces

$$\left\langle e_k, \int f \, d\nu \right\rangle = \int f \, d\, e_k \nu = \int f \, r_k \, dm.$$

Se sigue que $\nu(f) = \int f\,d\nu = \left(\int f\,r_n\,dm\right)_0^\infty$. Dada f escalarmente integrable, para obtener integrabilidad debe cumplirse que para todo conjunto medible A se tenga $\int_A f\,d\nu \in c_0$, lo cual es cierto, por el Lema de Riemann–Lebesgue, para toda $f \in L^1[0,1]$. Luego $L^1(\nu)$ y $L^1[0,1]$ coinciden como conjuntos.

La norma en $L^1(\nu)$ viene dada por la siguiente expresión

$$\|f\|_\nu = \sup\left\{\int_0^1 |f| \left|\sum a_n r_n\right| dm : \|(a_n)\|_1 \leq 1\right\}.$$

Considerando $(a_n) = e_k$ se deduce que $\|f\|_{L^1[0,1]} \leq \|f\|_\nu$. La desigualdad recíproca se sigue de $|\sum a_n r_n| \leq 1$ para $\|(a_n)\|_1 \leq 1$. Luego el espacio $L^1(\nu)$ es orden isométrico a $L^1[0,1]$.

La envoltura lineal del rango de la medida ν es densa en c_0. Para verlo considérense los conjuntos $A_n = \{t \in [0,1] : r_n(t) = 1\}$. Se tiene $\nu(A_n) = 1/2 \cdot e_n$ donde e_n es el n–ésimo vector de la base canónica de c_0.

Estudiamos a continuación como se traslada el cotipo del espacio de Banach X a $L^1(\nu)$. Se dice que un espacio de Banach X tiene *cotipo* q, para $2 \leq q < +\infty$, si existe una constante $C >$ tal que para todo $n \in \mathbf{N}$ y para cualesquiera elementos $x_1, \ldots, x_n$ de X se cumple

$$\left(\sum_1^n \|x_i\|^q\right)^{1/q} \leq C \cdot \int_0^1 \left\|\sum_1^n r_i(t) \cdot x_i\right\| dt,$$

donde (r_n) es la sucesión de funciones de Rademacher en el intervalo [0,1]. En los retículos de Banach la propiedad de tener cotipo $q > 2$ es equivalente a cumplir una *q–estimación inferior* [L–T II, p. 88]: existe una constante $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbf{N}$ y para cualesquiera elementos disjuntos dos a dos $x_1, \ldots, x_n$ en X se tiene

$$\left(\sum_1^n \|x_i\|^q\right)^{1/q} \leq C \cdot \left\|\sum_1^n x_i\right\|.$$

Para $q = 2$ la situación es distinta. En este caso cumplir una 2–estimación inferior no implica tener cotipo 2 [L–T II, Example 1.f.19]. Tener cotipo 2 es equivalente a ser 2–cóncavo [L–T II, Theorem 1.f.16]. Se dice que un retículo de Banach es *q–cóncavo* si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbf{N}$ y para cualesquiera elementos $x_1, \ldots, x_n$ de X se cumple

$$\left(\sum_1^n \|x_i\|^q\right)^{1/q} \leq C \cdot \left\| \left(\sum_1^n |x_i|^q\right)^{1/q} \right\|.$$

Teorema 2.5. *Sea X un espacio de Banach con cotipo q, para $q \geq 2$ y sea ν una medida con valores en X. Entonces $L^1(\nu)$ tiene cotipo q.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $q > 2$. Veamos que $L^1(\nu)$ cumple una q-estimación inferior. Sean $f_1, \ldots, f_n$ funciones disjuntas de $L^1(\nu)$. Sean $(A_i)_1^n$ conjuntos medibles disjuntos tales que cada A_i está contenido en el soporte de f_i. Entonces

$$\int_{\cup A_i} (\sum_1^n f_i)\, d\nu = \sum_1^n \int_{A_i} f_i \, d\nu.$$

Denotemos $x_i = \int_{A_i} f_i \, d\nu \in X$. Sea $(\theta_i)_1^n$ una elección arbitraria de signos $\theta_i = \pm 1$. Como las funciones f_i son disjuntas, se sigue que

$$\left\|\sum_1^n \theta_i \cdot x_i\right\| \leq \left\|\sum_1^n \theta_i \cdot f_i\right\|_\nu = \left\|\sum_1^n f_i\right\|_\nu$$

Promediando respecto de todas las posibles elecciones de signos se sigue que

$$\frac{1}{2^n} \cdot \sum_{\theta_i \in \{1,-1\}} \left\|\sum_1^n \theta_i \cdot x_i\right\| \leq \left\|\sum_1^n f_i\right\|_\nu . \tag{4}$$

Consideremos las funciones de Rademacher $r_1, \ldots, r_n$. El promedio que aparece en el primer miembro de (4) se puede expresar como

$$\frac{1}{2^n} \cdot \sum_{\theta_i \in \{1,-1\}} \left\|\sum_1^n \theta_i \cdot x_i\right\| = \int_0^1 \left\|\sum_1^n r_i(t) \cdot x_i\right\| \, dt. \tag{5}$$

Como el espacio de Banach X tiene cotipo q se sigue que existe una constante C tal que

$$\left(\sum_1^n \|x_i\|^q\right)^{1/q} \leq C \cdot \int_0^1 \left\|\sum_1^n r_i(t) \cdot x_i\right\| dt. \tag{6}$$

De (4), (5) y (6) se sigue que

$$\left(\sum_1^n \left\|\int_{A_i} f_i \, d\nu\right\|^q\right)^{1/q} \leq C \cdot \left\|\sum_1^n f_i\right\|_\nu .$$

Consideremos la desigualdad anterior, tomando supremo sobre todas las posibles elecciones de los conjuntos $(A_i)_1^n$, y considerando la norma equivalente $|||\cdot|||_\nu$ en $L^1(\nu)$, se deduce que

$$\left(\sum_1^n \|f_i\|_\nu^q\right)^{1/q} \leq 2\,C \cdot \left\|\sum_1^n f_i\right\|_\nu .$$

Luego $L^1(\nu)$ satisface una q–estimación inferior y por tanto tiene cotipo q.

Sea $q = 2$. Probaremos que $L^1(\nu)$ tiene cotipo 2 viendo que es 2–cóncavo. Sean $f_1, \ldots, f_n$ en $L^1(\nu)$. Sea $f = \left(\sum_1^n |f_i|^2\right)^{1/2}$, está en $L^1(\nu)$. Consideremos el ideal generado por f en $L^1(\nu)$

$$I(f) = \left\{g \in L^1(\nu) \, : \exists \lambda \mid 0 \leq |g| \leq \lambda f\right\}$$

con la norma

$$\|g\|_\infty = \inf\left\{\lambda \geq 0 : |g| \leq \lambda \cdot f / \|f\|\right\}$$

La compleción de $(I(f), \|\cdot\|_\infty)$ es un AM–espacio con unidad, luego en virtud de un resultado de Kakutani [L–T II, Theorem 1.b.6] es orden isométrico a un espacio $C(K)$. Como para toda función g de $I(f)$ se tiene $\|g\|_\infty \leq \|g\|_\nu$, la inyección

$$j\colon C(K) \longrightarrow L^1(\nu)$$

tiene norma uno y $\|f\|_\infty = \|f\|_\nu$. Consideremos la composición de esta inyección con el operador integración $\nu\colon L^1(\nu) \longrightarrow X$, es decir

$$\nu \circ j\colon C(K) \longrightarrow X .$$

Como X tiene cotipo 2, por el teorema de Grothendieck [P, Theorem 5.14], el operador $\nu \circ j$ es 2–sumante. Luego existe una constante $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbf{N}$ y para cualesquiera funciones $g_1, \ldots, g_n$ de $C(K)$ se tiene

$$\left(\sum_1^n \|\nu \circ j(g_i)\|^2\right)^{1/2} \leq C \cdot \sup\left\{\left(\sum_1^n |\langle \mu, g_i\rangle|^2\right)^{1/2} : \mu \in C(K)^*, \|\mu\| \leq 1\right\}.$$

El supremo de la desigualdad anterior es igual a $\|(\sum_1^n |g_i|^2)^{1/2}\|_\infty$.

Consideremos conjuntos medibles $(A_i)_1^n$ y sean $g_i = f_i \cdot \chi_{A_i}$. De la expresión anterior se sigue que

$$\begin{aligned}\left(\sum_1^n \left\|\int_{A_i} f_i \, d\nu\right\|^2\right)^{1/2} &\leq C \cdot \left\|\left(\sum_1^n |f_i \cdot \chi_{A_i}|^2\right)^{1/2}\right\|_\infty \\ &\leq C \cdot \left\|\left(\sum_1^n |f_i|^2\right)^{1/2}\right\|_\infty \\ &= C \cdot \left\|\left(\sum_1^n |f_i|^2\right)^{1/2}\right\|_\nu .\end{aligned}$$

Tomando supremo sobre todas las posibles elecciones de los conjuntos $(A_i)_1^n$ y considerando la norma equivalente $|||\cdot|||_\nu$ en $L^1(\nu)$ se deduce que

$$\left(\sum_1^n \|f_i\|_\nu^2\right)^{1/2} \leq 2C \cdot \left\|\left(\sum_1^n |f_i|^2\right)^{1/2}\right\|_\nu .$$

Luego $L^1(\nu)$ es 2–cóncavo y por tanto tiene cotipo 2. Q.E.D.

Un espacio de Banach se dice que tiene *tipo p*, para $1 \leq p \leq 2$, si existe una constante $C >$ tal que para todo $n \in \mathbf{N}$ y para cualesquiera elementos $x_1, \ldots, x_n$ de X se cumple

$$\int_0^1 \left\|\sum_1^n r_i(t) \cdot x_i\right\| dt \leq C \cdot \left(\sum_1^n \|x_i\|^q\right)^{1/q} .$$

El caso $p = 1$ corresponde a la desigualdad triangular de la norma. Se dice en este caso que X tiene tipo trivial o no tiene tipo. Los espacios de Hilbert tienen tipo 2.

El tipo no se traslada, en general, del espacio de Banach X al espacio $L^1(\nu)$ como muestra el espacio $L^1[0,1]$, que no tiene tipo, obtenido a partir de la medida de Lebesgue (con valores en $\mathbf{R}$).

Para espacios de Banach con propiedades especiales sí se obtienen datos sobre el tipo de $L^1(\nu)$. Probamos en primer lugar un resultado auxiliar, que tiene interés independiente. La proposición siguiente muestra cómo las propiedades del operador integración tienen un reflejo en el espacio $L^1(\nu)$.

Proposición 2.6. *Consideremos el operador integración $\nu: L^1(\nu) \longrightarrow X$. Si ν es compacto entonces el espacio $L^1(\nu)$ contiene un subespacio complementado isomorfo a ℓ^1.*

DEMOSTRACIÓN. Sea λ una medida de control de Rybakov para ν. Consideremos el traspuesto del operador integración $\nu^*: X^* \longrightarrow L^1(\nu)^*$, es compacto. Sea f en $L^1(\nu)$. Entonces

$$\langle \nu^*(x^*), f \rangle = \langle x^*, \nu(f) \rangle = \int f \, dx^*\nu = \int f h_{x^*} \, d\lambda ,$$

donde h_{x^*} es la derivada de Radon–Nikodym de la medida $x^*\nu$ respecto de λ, que es por tanto un elemento del espacio $L^1(\nu)^*$. Luego la norma en $L^1(\nu)$ se puede expresar de la siguiente forma

$$\|f\|_\nu = \sup \left\{ \int |f||h| \, d\lambda : h \in \nu^*(B_{X^*}) \right\} .$$

Sea f en $L^1(\nu)$ y sea A un conjunto medible. Se tiene

$$\begin{aligned}\|f\cdot\chi_A\|_\nu &= \sup\left\{\int_A |f||h|\,d\lambda : h\in\nu^*(B_{X^*})\right\}\\ &= \sup\Big\{\langle|f|,|h\cdot\chi_A|\rangle : h\in\nu^*(B_{X^*})\Big\}\\ &\le \|f\|_\nu\cdot\sup\Big\{\|h\cdot\chi_A\|_{L^1(\nu)^*} : h\in\nu^*(B_{X^*})\Big\}.\end{aligned}\tag{7}$$

Supongamos que $L^1(\nu)$ no contiene un subespacio complementado isomorfo a ℓ^1. Entonces en virtud de un resultado de Bessaga y Pelczynski [B–P, Theorem 4] se sigue que $L^1(\nu)^*$ no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ_∞. Como $L^1(\nu)^*$ es un retículo de Banach orden completo por ser un dual, se sigue que es orden continuo [A–B, Theorem 14.9]. En retículos de Banach orden continuos los conjuntos relativamente compactos son L–débilmente compactos y en $L^1(\nu)^*$, que es un espacio de Banach de funciones, estos últimos son equi–integrables, ver Preliminares. Como $\nu^*(B_{X^*})$ es compacto, se sigue que

$$\lim_{\lambda(A)\to 0}\sup\Big\{\|h\cdot\chi_A\|_{L^1(\nu)^*} : h\in\nu^*(B_{X^*})\Big\}=0.\tag{8}$$

Se sigue de (7) y (8) que en $L^1(\nu)$ los conjuntos acotados en norma son equi–integrables, luego son L–débilmente compactos. Los retículos de Banach de dimensión infinita en los que los conjuntos débilmente relativamente compactos coinciden con los conjuntos L–débilmente compactos están caracterizados por Meyer–Nieberg, ver Preliminares, por cumplir que todo subretículo de dimensión infinita contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1. Por otra parte la bola unidad de $L^1(\nu)$ al ser acotada es L–débilmente compacta y por tanto relativamente débilmente compacta. Luego $L^1(\nu)$ es reflexivo, pero esto es contradictorio con el hecho de contener subespacios isomorfos a ℓ^1. Q.E.D.

Teorema 2.7. *Sea $\nu\colon\Sigma\longrightarrow\ell^p$ para $1\le p<2$. Entonces el espacio $L^1(\nu)$ no tiene tipo 2.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $L^1(\nu)$ tiene tipo 2. ℓ^p tiene cotipo 2, si $1 \leq p < 2$, se sigue del Teorema 2.5 que $L^1(\nu)$ tiene cotipo 2. Del teorema de Kwapién [P, Theorem 3.3] se deduce que $L^1(\nu)$ es un espacio de Hilbert. Consideremos el operador integración $\nu: L^1(\nu) \longrightarrow \ell^p$. El operador ν es compacto pues la restricción a cualquier subespacio separable lo es, por el teorema de Pitt–Rosenthal, que afirma que todo operador de ℓ^q en ℓ^p para $q > p$ es compacto. De la proposición anterior se deduce que $L^1(\nu)$ contiene un subespacio complementado isomorfo a ℓ^1 y entonces no tendría tipo. Q.E.D.

Dunford y Pettis probaron que los operadores débilmente compactos definidos en $L^1[0,1]$ transforman conjuntos relativamente débilmente compactos en conjuntos relativamente compactos. Esta propiedad fué aislada y definida como *la propiedad de Dunford–Pettis* para espacios de Banach por Grothendieck. Entre los espacios que la cumplen están los AL–espacios y los AM–espacios. Estudiamos condiciones suficientes sobre la medida ν y el espacio de Banach X para que el espacio $L^1(\nu)$ tenga la propiedad de Dunford–Pettis. Teniendo en cuenta que en $L^1[0,1]$ los conjuntos débilmente relativamente compactos coinciden con los conjuntos L–débilmente compactos, el teorema siguiente se puede considerar, en cierto sentido, una extensión del Teorema de Dunford–Pettis.

Proposición 2.8. *Sea $\nu: \Sigma \longrightarrow X$ una medida con variación σ–finita, Y un espacio de Banach y $T: L^1(\nu) \longrightarrow Y$ un operador débilmente compacto. Entonces T transforma conjuntos L–débilmente compactos en conjuntos relativamente compactos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea λ una medida de control de Rybakov para ν. Consideremos la medida

$$A \in \Sigma \longmapsto F(A) = \chi_A \in L^1(\nu) .$$

Es numerablemente aditiva y absolutamente continua respecto de λ. Veamos que el rango medio de F es localmente acotado, es decir, para todo medible A con

$\lambda(A) > 0$ existe un medible $B \subset A$ con $\lambda(B) > 0$ tal que el conjunto de medias

$$\left\{ \frac{F(D)}{\lambda(D)} : D \in \Sigma, D \subset B \right\}$$

está acotado en $L^1(\nu)$. Como $|\nu|$ es σ–finita y absolutamente continua respecto de λ, existe una función $h \geq 0$ localmente integrable respecto de λ tal que $|\nu|(A) = \int_A h\, d\lambda$ para todo medible A (ambos miembros de la igualdad infinitos si lo es uno de ellos). Al ser $|\nu|$ σ–finita existe una partición (A_n) de Ω tal que $|\nu|(A_n) < +\infty$ para todo n.

Sea A medible con $\lambda(A) > 0$. Existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $\lambda(A \cap A_n) > 0$. Existe también $k \in \mathbf{N}$ tal que el conjunto $B = \{\omega \in A \cap A_n : h(\omega) \leq k\}$ cumple $|\nu|(B) > 0$. Entonces se cumple

$$|\nu|(D) = \int_D h\, d\lambda \leq k \cdot \lambda(D) \qquad \text{para todo medible} \quad D \subset B.$$

Se sigue de lo anterior que

$$\left\| \frac{\chi_D}{\lambda(D)} \right\|_\nu = \frac{\|\nu\|(D)}{\lambda(D)} \leq \frac{|\nu|(D)}{\lambda(D)} \leq k.$$

Consideremos la medida definida por

$$A \in \Sigma \longmapsto G(A) = T(\chi_A) \in Y.$$

Es numerablemente aditiva y absolutamente continua respecto de λ. La medida G permite representar el operador T: si $\varphi = \sum_1^n a_i \chi_{A_i}$ es una función simple se cumple

$$T(\varphi) = \sum_1^n a_i T(\chi_{A_i}) = \sum_1^n a_i G(A_i) = \int \varphi\, dG.$$

De la continuidad del operador T, y del hecho de ser la medida G absolutamente continua respecto de λ se sigue, considerando la Definición 1.1, que

$$\text{si} \quad f \in L^1(\nu) \quad \text{entonces} \qquad f \in L^1(G) \quad \text{y} \quad T(f) = \int f\, dG. \tag{9}$$

Como $G = T \circ F$ y el operador T es débilmente compacto, se sigue que el rango medio de G es localmente relativamente débilmente compacto. En estas condiciones en virtud del teorema de Radon–Nikodym vectorial (ver [D–U, Theorem III.2.18]) existe una función $g\colon \Omega \longrightarrow Y$ λ–medible y Pettis integrable respecto de λ tal que

$$G(A) = \text{Pettis-}\int_A g\, d\lambda.$$

En estas condiciones, sin más que considerar la Definición 1.2, se sigue que si f está en $L^1(G)$, entonces la función fg es integrable Pettis respecto de λ y

$$\int f\, dG = \text{Pettis-}\int fg\, d\lambda. \tag{10}$$

De (9) y (10) se deduce que el operador T se puede representar de la forma

$$T(f) = \int fg\, d\lambda.$$

Sea K un conjunto L–débilmente compacto en $L^1(\nu)$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } \lambda(A) < \delta \text{ entonces } \|f \cdot \chi_A\|_\nu < \varepsilon \text{ para toda } f \in K. \tag{11}$$

La densidad g es λ–medible, luego existe una sucesión de funciones simples g_n que convergen a g puntualmente en casi todo respecto de λ. Por el teorema de Egoroff la convergencia es casi uniforme, luego para $\delta > 0$ existe un medible A con $\lambda(A) < \delta$ tal que en $\Omega \setminus A$ la convergencia es uniforme. Sea $n \in \mathbf{N}$ tal que $\|g(\omega) - g_n(\omega)\| < \varepsilon$ para todo $\omega \in \Omega \setminus A$.

Entonces para f en K se tiene

$$\begin{aligned} Tf &= T(f \cdot \chi_A) + T(f \cdot \chi_{\Omega\setminus A}) \\ &= T(f \cdot \chi_A) + \int_{\Omega\setminus A} fg_n\, d\lambda + \int_{\Omega\setminus A} f(g - g_n)\, d\lambda \end{aligned}$$

De (11) se sigue que $\|T(f \cdot \chi_A)\| < \varepsilon \|T\|$. Por otra parte

$$\| \int_{\Omega \setminus A} f(g - g_n)\, d\lambda \| \leq \int_{\Omega \setminus A} |f| \|g - g_n\|\, d\lambda \leq \varepsilon \int |f|\, d\lambda \leq \varepsilon \cdot \|f\|_\nu \,.$$

K es acotado por ser L–débilmente compacto, se ha visto entonces que para todo $\varepsilon > 0$ existe una función simple $\varphi \colon \Omega \longrightarrow Y$ tal que los conjuntos $T(K)$ y $\{\int f\varphi\, d\lambda : f \in K\}$ distan menos de ε. Este último conjunto es relativamente compacto puesto que si $\varphi = \sum_1^n y_i \chi_{A_i}$ con $y_i \in Y$, entonces

$$\int f\varphi\, d\lambda = \sum_1^n y_i \int_{A_i} f\, d\lambda$$

y los coeficientes $\int_{A_i} f\, d\lambda$ están acotados por $\sup\{\|f\|_\nu : f \in K\}$. Luego $T(K)$ es relativamente compacto en Y. Q.E.D.

Un espacio de Banach se dice que tiene la *propiedad de Schur* si la convergencia débil de una sucesión implica su convergencia en norma. Para retículos de Banach consideramos también la propiedad positiva de Schur, definida en los Preliminares.

Proposición 2.9. *Sea X un espacio de Banach con la propiedad de Schur. Entonces $L^1(\nu)$ es un espacio con la propiedad positiva de Schur.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que probar que en $L^1(\nu)$ coinciden los conjuntos equi–integrables y los relativamente débilmente compactos. Supongamos que existe un conjunto $M \subset L^1(\nu)$ que es relativamente débilmente compacto pero no es L–débilmente compacto. Entonces existen funciones f_n en M y conjuntos medibles disjuntos A_n tales que para cierto $\varepsilon > 0$

$$\|f_n \cdot \chi_{A_n}\|_\nu \geq \varepsilon \quad \text{para todo } n \in \mathbf{N}. \tag{12}$$

Como $\{f_n : n \in \mathbf{N}\}$ es un conjunto relativamente débilmente compacto, por el teorema de Eberlein–Smulian, existe una subsucesión (f_{n_k}) que converge débilmente en $L^1(\nu)$ a cierta función $f \in L^1(\nu)$. Se sigue que para todo $A \in \Sigma$

$$\int_A f_{n_k}\, d\nu \ \text{ converge débilmente en } X \text{ a } \int_A f\, d\nu.$$

Al ser X un espacio de Schur, la convergencia anterior es en norma. Sean μ y μ_k las medidas con densidades f y f_{n_k} respecto de ν respectivamente. Son numerablemente aditivas y cumplen que $\mu_k(A)$ converge a $\mu(A)$ en norma, para todo $A \in \Sigma$. Por el teorema de Vitali–Hahn–Saks (ver [D–U, Corollary I.5.6]) se deduce que $\{\mu_k\}$ es una familia uniformemente numerablemente aditiva. Esto implica que

$$\lim_n \sup_k \|\mu_k\|(A_n) = 0,$$

lo cual contradice (12). Q.E.D.

Teorema 2.10. *Sea X un espacio de Banach con la propiedad de Schur y sea ν una medida con variación σ–finita. Entonces $L^1(\nu)$ tiene la propiedad de Dunford–Pettis. En particular, $L^1(\nu)$ no es reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición anterior, en $L^1(\nu)$ coinciden los conjuntos L–débilmente compactos y los relativamente débilmente compactos. Por la Proposición 2.8 todo operador débilmente compacto definido sobre $L^1(\nu)$ transforma conjuntos L–débilmente compactos en conjuntos relativamente compactos. Q.E.D.

De la Proposición 2.8 se sigue un resultado que recalca de nuevo la determinación que ejerce la medida sobre el espacio $L^1(\nu)$.

Teorema 2.11. *Sea ν una medida vectorial sin atómos y con variación σ–finita. Entonces $L^1(\nu)$ no es reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos por reducción al absurdo que $L^1(\nu)$ es reflexivo. Consideremos el operador identidad $I\colon L^1(\nu) \longrightarrow L^1(\nu)$, es débilmente compacto. Sea $K = \{f \in L^1(\nu) : |f| \leq 1\}$. Es equi–integrable puesto que está acotado en el orden por la función χ_Ω. De la Proposición 2.8 se sigue que K es relativamente compacto en $L^1(\nu)$. Sea λ una medida de control de Rybakov para ν. La inyección de $L^1(\nu)$ en $L^1(\lambda)$ es continua, luego K es relativamente compacto en $L^1(\lambda)$.

Como ν no tiene átomos, λ no tiene átomos. Se puede por tanto construir en $L^1(\lambda)$ una sucesión de funciones (r_n) de tipo Rademacher, que cumpla en particular $|r_n| = 1$ y $\|r_n - r_m\|_{L^1(\lambda)} = \lambda(\Omega)$. Pero $r_n \in K$ y esto contradice la compacidad de K en $L^1(\lambda)$. Q.E.D.

Se ha visto que la medida ν no tiene átomos si y sólo si el espacio $L^1(\nu)$ no tiene átomos Proposición 1.16. Se sigue del Corolario anterior por tanto que los espacios $L^p[0,1]$ para $1 < p < +\infty$ sólo se pueden obtener, orden isomórficamente, a partir de medidas cuya variación en cada medible es nula o infinita.

La condición de no existencia de átomos es necesaria. Basta considerar la medida $A \in \mathcal{P}(\mathbf{N}) \longmapsto \nu(A) = \sum a_n e_n \in \ell^2$ donde (a_n) es una sucesión positiva de ℓ^2. Se tiene $L^1(\nu) = \ell^2$, Proposición 1.22. La condición de σ–finitud de la medida también es necesaria. Basta considerar la medida $A \in \mathcal{M}[0,1] \longmapsto \nu(A) = \chi_A \in L^2[0,1]$. Cumple que $L^1(\nu) = L^2[0,1]$ y $|\nu|(A)$ es ó 0 ó $+\infty$.

L^p–espacios 2.12. Entre los retículos de Banach más importantes se hallan los L^p–espacios abstractos, $1 \leq p < +\infty$. Se dice que un retículo de Banach es un *L^p–espacio abstracto* si la potencia p–ésima de la norma es aditiva para elementos disjuntos, es decir, si para todo par de elementos disjuntos x e y se cumple

$$\|x+y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p.$$

Son retículos de Banach orden continuos. En virtud de un resultado de Kakutani y Bohnenblust [L–T II, Theorem 1.b.2] estos espacios son orden isomorfos e isométricos a un L^p–espacio "concreto", es decir: si E es un L^p–espacio abstracto existe un espacio de medida (S, σ, μ) tal que E es orden isomorfo e isométrico al espacio $L^p(S, \sigma, \mu)$. Cuando E tiene una unidad débil, entonces la medida μ se puede escoger finita.

Estudiemos esta situación para el espacio $L^1(\nu)$. Veamos la relación del espacio de medida (S, σ, μ) dado por el teorema de Kakutani y Bohnenblust, con la medida vectorial ν.

Supongamos que $L^1(\nu)$ es orden isomorfo a un L^p–espacio abstracto E. Es decir, existe un isomorfismo $T: L^1(\nu) \longrightarrow E$ que respeta el orden. Sean $f_1, \ldots, f_n$ funciones disjuntas en $L^1(\nu)$. Entonces, teniendo en cuenta que las funciones Tf_i son disjuntas en E, que es un L^p–espacio, se sigue que

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_1^n f_i \right\|_\nu^p &\leq \|T^{-1}\| \cdot \left\| \sum_1^n Tf_i \right\|^p \\
&= \|T^{-1}\| \cdot \left(\sum_1^n \|Tf_i\|^p \right) \\
&\leq \|T\| \cdot \|T^{-1}\| \cdot \left(\sum_1^n \|f_i\|_\nu^p \right).
\end{aligned}$$

De forma análoga se obtiene una minoración similar. Luego existen dos constantes C_1 y C_2 tales que para cualesquiera funciones disjuntas dos a dos $f_1, \ldots, f_n$ de $L^1(\nu)$ se cumple

$$C_1 \cdot \sum_1^n \|f_i\|_\nu^p \leq \left\| \sum_1^n f_i \right\|_\nu^p \leq C_2 \cdot \sum_1^n \|f_i\|_\nu^p. \tag{13}$$

Sea $(A_i)_1^n$ una partición de Ω. Apliquemos (13) a las funciones $f_i = \chi_{A_i}$. Se tiene

$$C_1 \cdot \sum_1^n \|\nu\|(A_i)^p \le \|\nu\| \left(\bigcup_1^n A_i \right)^p \le C_2 \cdot \sum_1^n \|\nu\|(A_i)^p. \tag{14}$$

Consideremos la siguiente función de conjuntos

$$A \in \Sigma \longmapsto \tau(A) = \sup \left\{ \sum_1^n \|\nu\|(A_i)^p : (A_i)_1^n \ \text{ es una partición de } \ A \right\} \in \mathbf{R}.$$

Está bien definida por (14), es decir, es finita. Es superaditiva y cumple

$$C_1 \cdot \tau(A) \le \|\nu\|(A)^p \le \tau(A).$$

Consideremos a continuación la función de conjuntos

$$A \in \Sigma \longmapsto \mu(A) = \inf \left\{ \sum_1^n \tau(A_i) : (A_i)_1^n \ \text{ es una partición de } \ A \right\} \in \mathbf{R}.$$

Está bien definida y es finita por (14) y la relación entre $\|\nu\|^p$ y τ. Es aditiva y cumple

$$C_1 \cdot \mu(A) \le \|\nu\|(A)^p \le C_2 \cdot \mu(A) \qquad \text{para todo} \qquad A \in \Sigma. \tag{15}$$

La semivariación es absolutamente continua respecto de una medida de control. Se sigue que también lo es la medida μ que por tanto es una medida numerablemente aditiva.

Consideremos el espacio $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Sea $f = \sum_1^n a_i \chi_{A_i}$ una función simple con $(A_i)_1^n$ disjuntos. Entonces de (13) se tiene

$$C_1 \cdot \sum_1^n |a_i|^p \|\nu\|(A_i)^p \le \|f\|_\nu^p \le C_2 \cdot \sum_1^n |a_i|^p \|\nu\|(A_i)^p.$$

De (15) se tiene

$$(C_1)^2 \cdot \sum_1^n |a_i|^p \mu(A_i) \le \|f\|_\nu^p \le (C_2)^2 \cdot \sum_1^n |a_i|^p \mu(A_i).$$

Luego sobre las funciones simples las normas de $L^1(\nu)$ y de $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ son equivalentes. Al ser las funciones simples densas en ambos espacios, se deduce que son orden isomorfos.

Consideremos la siguiente función de conjuntos

$$A \in \Sigma \longmapsto \|\nu\|(A)^p \in \mathbf{R}.$$

Es fácil comprobar que la medida μ antes construida es, en el espacio de las medidas reales numerablemente aditivas definidas sobre Σ, por una parte cota inferior de las medidas que mayoran a $\|\nu\|(\cdot)^p$ y, por otra parte cota superior de las medidas que minoran a $\|\nu\|(\cdot)^p$, Cuando $L^1(\nu)$ es un L^p–espacio abstracto se sigue del estudio anterior que $L^1(\nu) = L^p(\Omega, \Sigma, \|\nu\|^p)$, siendo en este caso $\|\nu\|^p$ una medida numerablemente aditiva. En el caso $p = 1$ la semivariación es aditiva y por tanto coincide con la variación de la medida. Este caso, el de los AL–espacios, se estudiará con detalle en el capítulo siguiente.

El caso $p = +\infty$ corresponde a los AM–espacios, que son aquellos retículos de Banach en los cuales para todo par de elementos disjuntos x e y se cumple

$$\|x + y\| = \sup\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Un AM–espacio que sea orden continuo es orden isomorfo e isométrico a $c_0(\Gamma)$ para algún conjunto de índices Γ [L–T II, Lemma 1.b.10]. La existencia de una unidad débil implica que Γ es numerable. Se sigue que si $L^1(\nu)$ es un AM–espacio la única posibilidad es c_0.

Resulta de interés hallar condiciones para que el espacio $L^1(\nu)$ sea orden isomorfo a un espacio de Hilbert. El ejemplo de la medida de Lebesgue en [0,1], con valores en $\mathbf{R}$, que da lugar a $L^1[0,1]$, muestra que estas condiciones deben ser más restrictivas que el que el espacio de Banach en que la medida toma valores sea un espacio de Hilbert.

Una sucesión (x_n) en un espacio de Banach se dice que es 2–*lacunar* si existe una constante $C > 0$ tal que para toda sucesión (α_n) en ℓ^2 se cumple que

$$\left\| \sum_1^\infty \alpha_n x_n \right\| \leq C \cdot \left(\sum_1^\infty \alpha_n^2 \right)^{1/2} .$$

Teorema 2.13. *Sea X un espacio de Banach con cotipo 2. Sea $\nu: \Sigma \longrightarrow X$ una medida cumpliendo que para toda partición $(A_n)_1^\infty$, la sucesión*

$$\left(\frac{\nu(A_n)}{\|\nu(A_n)\|} \right)$$

es 2–lacunar. Entonces $L^1(\nu)$ es orden isomorfo a un espacio de Hilbert.

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis dada una partición $(A_n)_1^\infty$ existe una constante, que depende de la partición, $K = K(A_n)$ tal que para toda sucesión (α_n) en ℓ^2 se cumple

$$\left\| \sum_1^\infty \alpha_n \frac{\nu(A_n)}{\|\nu(A_n)\|} \right\| \leq K \cdot \left(\sum_1^\infty \alpha_n^2 \right)^{1/2} . \tag{16}$$

Sea λ una medida de control de ν. Veamos que para todo $A \in \Sigma$ con $\lambda(A) > 0$ existe un medible $B \subset A$ con $\lambda(B) > 0$ tal que

$$\mathcal{K}(B) = \sup \{ K(B_n) : (B_n) \text{ es una partición de } B \} < +\infty.$$

Por reducción al absurdo supongamos que no. Existe entonces un medible A con $\lambda > 0$ tal que para todo $B \subset A$ con $\lambda(B) > 0$ se cumple $\mathcal{K}(B) = +\infty$. Sea (A_n) una partición de A tal que $\lambda(A_n) > 0$. Para cada $n \in \mathbf{N}$, como $\mathcal{K}(A_n) = +\infty$, existe una partición (A_i^n) de A_n tal que $K(A_i^n) > n$. Es decir existe $(\alpha_i^n) \in \ell^2$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^\infty \alpha_i^n \frac{\nu(A_i^n)}{\|\nu(A_i^n)\|} \right\| > n \cdot \left(\sum_{i=1}^\infty |\alpha_i^n|^2 \right)^{1/2} .$$

Luego existe un índice $i(n)$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{i(n)} \alpha_i^n \frac{\nu(A_i^n)}{\|\nu(A_i^n)\|} \right\| > n \cdot \left(\sum_{i=1}^{i(n)} |\alpha_i^n|^2 \right)^{1/2} .$$

Consideremos la partición

$$A_1^1,\, A_2^1,\, \ldots,\, A_{i(1)}^1,\, \bigcup_{i(1)}^{\infty} A_i^1,\, A_1^2,\, A_2^2,\, \ldots,\, A_{i(2)}^2,\, \bigcup_{i(2)}^{\infty} A_i^2,\, \ldots .$$

Es una partición de A y es fácil ver que, por construcción, la sucesión asociada no es 2–lacunar.

Estamos en condiciones de aplicar un teorema de Exhaución [D–U, Lemma III.2.4] a la propiedad (P) siguiente "ν tiene (P) en A si $\mathcal{K}(A) < +\infty$". Se sigue que existe una partición (B_n) de Ω tal que $\mathcal{K}(B_n) < +\infty$. Un razonamiento análogo al hecho anteriormente prueba que de hecho se tiene $K = \sup_n \mathcal{K}(B_n) < +\infty$.

Se sigue por tanto de la discusión anterior y de (16) que para toda partición (A_n) y para toda sucesión $(a_n) \in \ell^2$, considerando $\alpha_n = a_n\|\nu(A_n)\|$, se tiene

$$\begin{aligned} \left\| \sum_1^{\infty} a_n \nu(A_n) \right\| &= \left\| \sum_1^{\infty} \alpha_n \frac{\nu(A_n)}{\|\nu(A_n)\|} \right\| \\ &\leq K \cdot \left(\sum_1^{\infty} a_n^2 \|\nu(A_n)\|^2 \right)^{1/2} \qquad (17) \\ &\leq K \cdot \left(\sum_1^{\infty} a_n^2 \|\nu\|(A_n)^2 \right)^{1/2} . \end{aligned}$$

Sea g una función simple. Se puede expresar $g = \sum_1^n a_i \chi_{A_i}$ donde los conjuntos A_i son disjuntos. Sea $B \in \Sigma$, entonces por (17) se tiene

$$\begin{aligned} \| \int_B g\, d\nu \| &= \left\| \sum_1^n a_i \nu(A_i \cap B) \right\| \\ &\leq K \cdot \left(\sum_1^n a_i^2 \|\nu\|(A_i \cap B)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq K \cdot \left(\sum_1^n a_i^2 \|\nu\|(A_i)^2 \right)^{1/2} . \end{aligned}$$

Considerando la norma equivalente $|||\cdot|||$ en $L^1(\nu)$ se deduce que

$$\left\| \sum_1^n a_i \chi_{A_i} \right\|_\nu \leq 2K \cdot \left(\sum_1^n a_i^2 \|\nu\|(A_i)^2 \right)^{1/2} . \tag{18}$$

De la hipótesis de tener X cotipo 2 se deduce, por el Teorema 2.5, que $L^1(\nu)$ tiene cotipo 2 luego es 2–cóncavo. Existe entonces una constante $C > 0$ tal que para cualesquiera escalares $a_1, \ldots, a_n$ y conjuntos medibles $A_1, \ldots, A_n$ se cumple

$$\left(\sum_1^n a_i^2 \|\nu\|(A_i)^2 \right)^{1/2} \leq C \cdot \left\| \left(\sum_1^n |a_i \chi_{A_i}|^2 \right)^{1/2} \right\|_\nu .$$

Como los conjuntos A_i son disjuntos en este caso, se tiene

$$\left\| \left(\sum_1^n |a_i \chi_{A_i}|^2 \right)^{1/2} \right\|_\nu = \left\| \sum_1^n a_i \chi_{A_i} \right\|_\nu .$$

Luego

$$\left(\sum_1^n a_i^2 \|\nu\|(A_i)^2 \right)^{1/2} \leq C \cdot \left\| \sum_1^n a_i \chi_{A_i} \right\|_\nu . \tag{19}$$

Se sigue por tanto que si $g = \sum_1^n a_i \chi_{A_i}$ es una función simple siendo los conjuntos A_i disjuntos, entonces

$$1/C \cdot \left(\sum_1^n a_i^2 \|\nu\|(A_i)^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_1^n a_i \chi_{A_i} \right\|_\nu \leq 2K \cdot \left(\sum_1^n a_n^2 \|\nu\|(A_i)^2 \right)^{1/2} . \tag{20}$$

De la desigualdad anterior evaluada para $a_1 = \ldots = a_n = 1$ se obtiene, para conjuntos medibles disjuntos $(A_i)_1^n$,

$$C \cdot \sum_1^n \|\nu\|(A_i)^2 \leq \|\nu\|(\bigcup_1^n A_i)^2 \leq K \cdot \sum_1^n \|\nu\|(A_i)^2.$$

Esta desigualdad, similar a (13) con $p = 2$, permite aplicar el mismo razonamiento de la prueba de la Proposición 2.12, para obtener la medida μ asociada al cuadrado de la semivariación. De (20) se sigue que $L^1(\nu)$ es orden isomorfo al espacio $L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$, que es un espacio de Hilbert. Q.E.D.

Dedicamos la parte final de este capítulo a estudiar una propiedad más específica propia de los retículos de Banach. Su origen está en el estudio por Kadec y Pelczynski en [K–P] de los subespacios de $L^p[0,1]$. La siguiente definición se debe a Weis [W].

Definición. [W, Definition 2.1] *Sea X un retículo de Banach orden continuo y con unidad débil. Se dice que X tiene la propiedad de descomposición subsecuencial (subsequence splitting property) si dada una sucesión acotada (f_n) en X existe una subsucesión (f_{n_k}) y existen sucesiones (g_k) y (h_k) tales que*

a) $f_{n_k} = g_k + h_k$ *para todo k.*

b) g_k *y* h_k *son disjuntos, para cada k.*

c) La sucesión (g_k) es equi–integrable.

d) (h_k) *son disjuntos dos a dos.*

Los espacios $L^p[0,1]$ cumplen esta propiedad. El espacio c_0 es un ejemplo de retículo que no la cumple. Figiel, Ghoussoub y Johnson han construido un retículo de Banach p-convexo y reflexivo que tampoco cumple la propiedad, ver

[W]. Weis en [W] realiza la siguiente construcción para caracterizar los retículos de Banach que cumplen la propiedad de descomposición subsecuencial.

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro libre en $\mathbf{N}$. Consideremos el ultraproducto de X por $\mathcal{U}$:

$$X_{\mathcal{U}} = \ell_\infty(X)/M \quad \text{donde} \quad M = \left\{(f_n) \in \ell_\infty(X) : \lim_{\mathcal{U}} \|f_n\| = 0\right\}.$$

Denotaremos por $[f_n]$ la clase de equivalencia de la sucesión (f_n). El espacio $X_{\mathcal{U}}$ es un retículo de Banach para la norma y el orden siguientes

$$\begin{aligned} \|[f_n]\|_{\mathcal{U}} &= \lim_{\mathcal{U}} \|f_n\|, \\ \inf\{[f_n],[g_n]\} &= [\inf\{f_n, g_n\}]. \end{aligned}$$

Para más detalles referentes a ultraproductos véase Heinrich [H].

Denotemos por $\mathbf{1}$ la unidad débil de X. Sea $[\mathbf{1}]$ la clase de equivalencia de la sucesión constante igual a $\mathbf{1}$. Sea $\tilde{X}$ la banda generada por $[\mathbf{1}]$ en $X_{\mathcal{U}}$, es decir $\tilde{X} = [\mathbf{1}]^{\perp\perp}$. Weis da la siguiente caracterización.

Teorema. [W, Theorem 2.5] *Sea X un retículo de Banach orden continuo con unidad débil. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) X tiene la propiedad de descomposición subsecuencial.

2) $\tilde{X}$ tiene norma orden continua.

3) $\tilde{X}$ no contiene ningún subespacio isomorfo a c_0.

En este contexto se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.14. *Sea X un retículo de Banach con norma orden continua y unidad débil tal que X y X^* tienen la propiedad de descomposición subsecuencial. Sea $\nu: \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial cuyo rango sea equi–integrable en X. Entonces $L^1(\nu)$ tiene la propiedad de descomposición subsecuencial.*

DEMOSTRACIÓN. Para probarlo construiremos una medida $\tilde{\nu}$ tal que el espacio $\tilde{L}^1(\nu)$ esté contenido orden isomórficamente en el espacio $L^1(\tilde{\nu})$. Este último es orden continuo, Teorema 1.4. Se sigue que $\tilde{L}^1(\nu)$ es orden continuo y por la caracterización de Weis quedará probado el Teorema.

Construyamos la medida $\tilde{\nu}$. Sea λ una medida de control de Rybakov para ν. Para esta medida se tiene

$$L_\infty(\Omega, \Sigma, \lambda) \longrightarrow L^1(\nu) \longrightarrow L^1(\Omega, \Sigma, \lambda),$$

siendo todas las inclusiones continuas.

Dacunha-Castelle y Krivine en [D–K 1] y [D–K 2] prueban que el ultraproducto del espacio $L^1(\Omega, \Sigma, \lambda)$ se puede identificar de la siguiente forma

$$L^1(\Omega, \Sigma, \lambda)_{\mathcal{U}} = L^1(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma}, \tilde{\lambda}) \oplus \Delta'$$

donde $(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma}, \tilde{\lambda})$ es un espacio de medida y los elementos de Δ' son disjuntos de $[\chi_\Omega]$. Por lo tanto se sigue que

$$\tilde{L}^1(\Omega, \Sigma, \lambda) = L^1(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma}, \tilde{\lambda}).$$

El mismo procedimiento se puede realizar con $L_\infty(\Omega, \Sigma, \lambda)$. Esto permite identificar $\tilde{L}^1(\nu)$ como un espacio de funciones utilizando el ultraproducto de las inclusiones del diagrama anterior

$$L_\infty(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma}, \tilde{\lambda}) \longrightarrow \tilde{L}^1(\nu) \longrightarrow L^1(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma}, \tilde{\lambda}),$$

siendo estas inclusiones continuas. Véase Weis [W].

La σ–álgebra $\tilde{\Sigma}$ es isomorfa al anillo de Boole $\{[\chi_{A_n}] : A_n \in \Sigma\}$ en el espacio $L^1(\Omega, \Sigma, \lambda)_{\mathcal{U}}$. Luego cada medible $\tilde{A} \in \tilde{\Sigma}$ se puede identificar con una sucesión (A_n) para $A_n \in \Sigma$, identificando dos sucesiones (A_n) y (B_n) si $\lim_{\mathcal{U}} \lambda(A_n \triangle B_n) = 0$.

La medida $\tilde{\lambda}$ está definida así:

$$\tilde{A} = (A_n) \in \tilde{\Sigma} \longmapsto \tilde{\lambda}(\tilde{A}) = \lim_{\mathcal{U}} \lambda(A_n) \in \mathbf{R}.$$

Una función $\tilde{f}$ de $L^1(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma}, \tilde{\lambda})$ es un elemento $[f_n]$ de $L^1(\Omega, \Sigma, \lambda)_{\mathcal{U}}$, estando la integración respecto de $\tilde{\lambda}$ definida como sigue, para $\tilde{A} = (A_n) \in \tilde{\Sigma}$

$$\int_{\tilde{A}} \tilde{f}\, d\tilde{\lambda} = \lim_{\mathcal{U}} \int_{A_n} f_n \, d\lambda.$$

Para más detalles véase Heinrich [H].

Definimos la medida $\tilde{\nu}$ de la siguiente forma

$$\tilde{A} = (A_n) \in \tilde{\Sigma} \longmapsto \tilde{\nu}(\tilde{A}) = [\nu(A_n)] \in X_{\mathcal{U}}.$$

Como la medida ν está acotada, $\tilde{\nu}$ está bien definida. Es finitamente aditiva. Sea $\varepsilon > 0$. Como ν es absolutamente continua respecto de λ, existe $\delta > 0$ tal que si $\lambda(A) < \delta$ entonces $\|\nu\|(A) < \varepsilon$. Sea $\tilde{A} = (A_n) \in \tilde{\Sigma}$ tal que $\tilde{\lambda}(\tilde{A}) < \delta$, esto es $\lim_{\mathcal{U}} \lambda(A_n) < \delta$. Existe entonces $V \in \mathcal{U}$ tal que para todo $n \in V$ se tiene $\lambda(A_n) < \delta$. Luego para todo $n \in V$ se tiene $\|\nu(A_n)\| \leq \|\nu\|(A_n) < \varepsilon$. Luego $\|\tilde{\nu}(\tilde{A})\|_{\mathcal{U}} < \varepsilon$. Por lo tanto $\tilde{\nu}$ es absolutamente continua respecto de $\tilde{\lambda}$ y se deduce que $\tilde{\nu}$ es numerablemente aditiva.

Por hipótesis el rango de la medida ν equi–integrable en X. Utilizando el resultado siguiente de Weis se deduce que la medida $\tilde{\nu}$ toma valores en $\tilde{X}$.

Proposición. [W, Proposition 1.5] *Sea (f_n) equi–integrable en X. Entonces $[f_n]$ es un elemento orden continuo de $\tilde{X}$.*

Veamos que $\tilde{L}^1(\nu)$ está contenido en $L^1(\tilde{\nu})$. Bastará probar que los elementos de $\tilde{L}^1(\nu)$ son escalarmente integrables respecto de $\tilde{\nu}$, puesto que por hipótesis

X tiene la propiedad de descomposición subsecuencial y por tanto del teorema de Weis se sigue que $\tilde{X}$ no contiene ningún subespacio isomorfo a c_0. La caracterización de Lewis, Teorema 1.10, garantiza entonces que la integrabilidad respecto de $\tilde{\nu}$ es equivalente a la integrabilidad escalar.

Weis prueba que si X y X^* cumplen la propiedad de descomposición subsecuencial entonces $\tilde{X}^* = \widetilde{X^*}$ y las normas de estos espacios coinciden [W, Corollary 2.7]. Por lo tanto los elementos de $\tilde{X}^*$ se pueden expresar como $\tilde{x}^* = [x_n^*]$ para $x_n^* \in X^*$ y (x_n^*) una sucesión acotada.

La medida $\tilde{x}^*\tilde{\nu}$ es absolutamente continua respecto de $\tilde{\lambda}$ puesto que lo es $\tilde{\nu}$. Luego tiene una derivada de Radon–Nikodym respecto de $\tilde{\lambda}$, $h_{\tilde{x}^*}$ en $L^1(\tilde{\lambda})$. Para $\tilde{A} = (A_n) \in \tilde{\Sigma}$ se cumple

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{x}^*, \tilde{\nu}(\tilde{A})\rangle &= \langle [x_n^*], [\nu(A_n)]\rangle \\
&= \lim_{\mathcal{U}} \langle x_n^*, \nu(A_n)\rangle \\
&= \lim_{\mathcal{U}} \int_{A_n} dx_n^*\nu \\
&= \lim_{\mathcal{U}} \int_{A_n} h_{x_n^*}\, d\lambda \\
&= \int_{\tilde{A}} \tilde{h}\, d\tilde{\lambda},
\end{aligned}$$

donde $\tilde{h} = [h_{x_n^*}]$, siendo $h_{x_n^*}$ la derivada de Radon–Nikodym de la medida $x_n^*\nu$ respecto de λ.

Sea $\tilde{F} = [f_n] \in \tilde{L}^1(\nu)$. Su norma en este espacio es $\|\tilde{F}\|_{\mathcal{U}} = \lim_{\mathcal{U}} \|f_n\|_\nu$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned}
\int |\tilde{F}|\, d|\tilde{x}^*\tilde{\nu}| &= \int |\tilde{F}||\tilde{h}|\, d\tilde{\lambda} \\
&= \lim_{\mathcal{U}} \int |f_n||h_{x_n^*}|\, d\lambda \\
&\leq \lim_{\mathcal{U}} \|f_n\|_\nu \cdot \|x_n^*\| \\
&= \|\tilde{F}\|_{\mathcal{U}} \cdot \|\tilde{x}^*\|_{\mathcal{U}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\tilde{F}$ es integrable respecto de $\tilde{x}^*\tilde{\nu}$. Se deduce que $\tilde{F}$ es integrable respecto de $\tilde{\nu}$ y

$$\|\tilde{F}\|_{L^1(\tilde{\nu})} \leq \|\tilde{F}\|_{\mathcal{U}}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, utilizando la norma equivalente $|||\cdot|||_\nu$ en $L^1(\nu)$, se puede hallar para cada n un conjunto medible A_n tal que

$$\|\int_{A_n} f_n \, d\nu\| \geq 1/2 \cdot (1-\varepsilon)\|f_n\|_\nu \, .$$

Sea $\tilde{A} = (A_n)$ en $\tilde{\Sigma}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|\tilde{F}\|_{L^1(\tilde{\nu})} &\geq \|\int_{\tilde{A}} \tilde{F} d\tilde{\nu}\| \\
&= \lim_{\mathcal{U}} \|\int_{A_n} f_n d\nu\| \\
&\geq 1/2 \cdot (1-\varepsilon) \lim_{\mathcal{U}} \|f_n\|_\nu \\
&= 1/2 \cdot (1-\varepsilon)\|\tilde{F}\|_{\mathcal{U}}
\end{aligned}$$

Luego ambas normas son equivalentes y por tanto $L^1(\nu)$ es orden isomorfo a un subespacio de $L^1(\tilde{\nu})$. Esto completa la prueba. Q.E.D.

CAPÍTULO 3: ¿ Cuándo es $L^1(\nu)$ un AL–espacio ?

El Teorema 1.15 afirma que todo retículo de Banach con norma continua respecto del orden y con unidad débil se obtiene como L^1 de una determinada medida vectorial. Por tanto hay entre los espacios de funciones obtenidos como L^1 de una medida vectorial espacios reflexivos, incluso espacios de Hilbert. Estos espacios son por sus propiedades muy distintos de los espacios clásicos $L^1(S, \sigma, \mu)$ donde μ es una medida positiva y finita. Surge por tanto una pregunta natural: ¿Bajo qué condiciones, sobre la medida vectorial o sobre el espacio de Banach en que la medida toma sus valores, el espacio $L^1(\nu)$ es de la forma $L^1(S, \sigma, \mu)$? Y en caso de que esto ocurra, ¿Cuál es la relación entre el espacio de medida (S, σ, μ) y la medida vectorial ν?

Mayor flexibilidad se obtiene si nos limitamos a requerir que $L^1(\nu)$ sea *orden isomorfo* a un espacio de la forma $L^1(S, \sigma, \mu)$. Más aún, podemos limitarnos a exigir que exista una constante positiva C tal para todo par de funciones f y g de $L^1(\nu)$ con soporte disjunto, se tenga:

$$C \cdot (\|f\|_\nu + \|g\|_\nu) \leq \|f + g\|_\nu \leq \|f\|_\nu + \|g\|_\nu ,$$

puesto que, en este caso, $L^1(\nu)$ sería orden isomorfo a un AL–espacio, es decir un retículo de Banach en que la norma es aditiva para elementos disjuntos. En virtud de un teorema de Kakutani [L–T II, Theorem 1.b.2] todo AL–espacio es orden isomorfo a un espacio $L^1(S, \sigma, \mu)$ para cierto espacio de medida (S, σ, μ), siendo μ una medida positiva que es finita si el espacio tiene una unidad débil.

Esta pregunta se puede reformular por tanto de la siguiente forma:

¿Cuándo puede ser $L^1(\nu)$ equivalentemente renormado de forma que con la nueva norma y con el mismo orden sea un retículo de Banach en el cual la norma sea aditiva para funciones disjuntas?

Lewis probó que la identidad formal es una inclusión continua del espacio $L^1(|\nu|)$ en $L^1(\nu)$ y que los elementos f de $L^1(|\nu|)$ se caracterizan entre los de $L^1(\nu)$ por ser de variación acotada la medida de densidad f respecto de ν, Teorema 1.12. El espacio $L^1(|\nu|)$ juega en este problema que estudiamos un papel más importante del que a primera vista puede suponerse, como muestra la siguiente proposición. La definición de $\mathcal{L}_1$–espacios se debe a Lindenstrauss y Pelczynski [L–P, Definition 3.1].

Proposicion 3.1. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) $L^1(\nu)$ es un $\mathcal{L}_1$–espacio.

b) $L^1(\nu)$ es isomorfo a un AL–espacio.

c) $L^1(\nu)$ es orden isomorfo a un AL–espacio.

d) En $L^1(\nu)$ toda sucesión positiva sumable es absolutamente sumable.

e) El operador integración transforma sucesiones positivas sumables en sucesiones absolutamente sumables.

f) El traspuesto del operador integración transforma conjuntos acotados en norma en conjunto acotados en el orden.

g) La inclusión natural de $L^1(|\nu|)$ en $L^1(\nu)$ es un isomorfismo (que respeta el orden).

En estas condiciones se cumple que la medida ν tiene variación acotada.

DEMOSTRACIÓN. Como $L^1(\nu)$ es un retículo de Banach orden continuo, la equivalencia de a), b) y c) se deduce de los teoremas de Abramovich y Wojtaszczyk sobre unicidad del orden [A–W, p. 781]. La equivalencia de c) y d) es un resultado clásico de la teoría de retículos [S, Theorem IV.2.7].

Los operadores que cumplen la condición e) son llamados *reticularmente sumantes* ("cone absolutely summing"en la literatura inglesa), ver [S IV.3]. Veamos que las condiciones d) y e) son equivalentes. La condición e) se sigue de d) por la continuidad del operador integración. Sea (f_n) una sucesión en $L^1(\nu)$ positiva y sumable. Utilizando la norma equivalente $|||\cdot|||_\nu$ en $L^1(\nu)$ hallemos, para cada n, un conjunto medible A_n tal que

$$\|f_n\|_\nu \leq 4 \cdot \| \int_{A_n} f_n \, d\nu \| = 4 \cdot \|\nu(f_n \chi_{A_n})\|.$$

La sucesión $(f_n \chi_{A_n})$ es positiva y sumable. De la condición e) se sigue entonces que la sucesión $(\nu(f_n \chi_{A_n})$ es absolutamente sumable. De la desigualdad anterior se deduce que (f_n) es absolutamente sumable en $L^1(\nu)$, luego se cumple d).

La condición f) se sigue de c) puesto que si se cumple c) $L^1(\nu)^*$ es un AM–espacio con unidad y por tanto su bola unidad está orden acotada. Es trivial la implicación de a) por g). Luego sólo queda probar por tanto la implicación de g) por f).

Sea λ una medida de control de Rybakov, para ν. Consideremos $L^1(\nu)^*$ en $L^1(\lambda)$. La norma en $L^1(\nu)$ se puede escribir como:

$$\|f\|_\nu = \sup\left\{ \int |f||h_{x^*}| \, d\lambda : x^* \in X^* \right\},$$

donde h_{x^*} es la derivada de Radon–Nikodym de la medida escalar $x^*\nu$ respecto de λ. Sea $\nu^*: X^* \longrightarrow L^1(\nu)^*$ el traspuesto del operador integración. En términos del operador ν^* se tiene:

$$\int f \, dx^*\nu = \langle x^*, \nu(f) \rangle = \langle \nu^*(x^*), f \rangle.$$

Luego se tiene que $\nu^*(x^*) = h_{x^*}$ para todo $x^* \in X^*$. Consideremos el conjunto $\nu^*(B_{X^*})$. Por f) es orden acotado en $L^1(\nu)^*$. Al ser éste un retículo dual, es orden completo, luego existe h en $L^1(\nu)^*$ que es el supremo de $\nu^*(B_{X^*})$. Por lo tanto se tiene:

$$\|f\|_\nu \leq \int |f| h \, d\lambda = \|f\|_{L^1(\mu)} \tag{1}$$

donde μ es la medida de densidad h respecto de λ. Por otra parte

$$\|f\|_{L^1(\mu)} = \int |f| h \, d\lambda \leq \langle |f|, h \rangle \leq \|f\|_\nu \cdot \|h\|_{L^1(\nu)^*}. \tag{2}$$

Se deduce que $L^1(\nu)$ es (orden) isomorfo a $L^1(\mu)$.

Sea A un conjunto medible, consideremos la función χ_A. Se tiene de la desigualdad (1):

$$\|\nu(A)\| \leq \|\nu\|(A) = \|\chi_A\|_\nu \leq \mu(A).$$

Esta desigualdad implica que μ es una medida positiva que domina a la medida vectorial ν, por tanto se tiene que también domina a su variación

$$|\nu|(A) \leq \mu(A) \text{ para todo conjunto medible } A. \tag{3}$$

Por lo tanto la variación de ν es acotada.

Sea g una función simple. Se sigue de la desigualdad (2) y de (3) que

$$\|g\|_{L^1(|\nu|)} \leq \|g\|_{L^1(\mu)} \leq \|g\|_\nu \cdot \|h\|_{L^1(\nu)^*}.$$

Como las funciones simples son densas en $L^1(|\nu|)$, se deduce que la desigualdad anterior se tiene para toda f en $L^1(|\nu|)$ y por tanto la inclusión natural de $L^1(|\nu|)$ en $L^1(\nu)$ es continua, cerrada y tiene imagen densa. Luego ambos espacios son isomorfos. Q.E.D.

Consecuencias 3.2. De la proposición anterior se deducen dos consecuencias importantes. En primer lugar se identifica el espacio de medida aludido al comienzo del capítulo, que sería $(\Omega, \Sigma, |\nu|)$. Esto nos permite reducir, sin pérdida de generalidad, nuestro problema al estudio de cuándo $L^1(\nu)$ coincide con $L^1(|\nu|)$.

En segundo lugar se obtiene como condición necesaria para que $L^1(\nu)$ sea un AL–espacio la siguiente:

$$\text{existe } C > 0 \text{ tal que } |\nu|(A) \leq C \cdot \|\nu\|(A) \text{ para todo } A \in \Sigma, \tag{L 1}$$

es decir *la dominación de la variación por la semivariación.* Esto se deduce del isomorfismo entre $L^1(|\nu|)$ y $L^1(\nu)$, pues para $A \in \Sigma$ se tiene $\|\chi_A\|_\nu = \|\nu\|(A)$.

De la proposición anterior se sigue que tener variación acotada es una condición necesaria. Por tanto asumiremos a partir de este momento y a lo largo del presente capítulo que la medida ν tiene variación acotada.

La condición (L 1) es restrictiva como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3. *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces existe una medida ν con valores en X y con variación acotada tal que no existe ninguna constante $C > 0$ verificando*

$$|\nu|(A) \leq C \cdot \|\nu\|(A) \quad \textit{para todo } A \in \Sigma.$$

DEMOSTRACIÓN. En virtud del Teorema de Dvoretsky–Rogers existe una sucesión (x_n) en X tal que la serie $\sum x_n$ converge incondicionalmente pero no absolutamente. Supongamos que existe una sucesión de escalares (α_n) tal que se cumplan los siguientes requisitos:

(a) $0 \leq \alpha_n \leq 1$ para todo n,

(b) $\sum_1^\infty \alpha_n \|x_n\| < +\infty$,

(c) $\left(\sum_{i\geq n} \alpha_i \|x_i\|\right) \cdot \left(\sup\left\{\sum_{i\geq n} |x^* x_i| : x^* \in B_{X^*}\right\}\right)^{-1} \to +\infty.$

Consideremos la medida definida por

$$A \in \mathcal{P}(\mathbf{N}) \longmapsto \nu(A) = \sum_{n\in A} \alpha_n x_n \in X\,.$$

Como está definida a través de una serie incondicional, está bien definida y es numerablemente aditiva. Su variación y semivariación vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$|\nu|(A) = \sum_{n\in A} \alpha_n \|x_n\|$$

$$\|\nu\|(A) = \sup\left\{\sum_{n\in A} \alpha_n |x^* x_n| : x^* \in B_{X^*}\right\}.$$

La condición (b) implica que la variación total de la medida ν es finita. De la condición (a) se deduce que la semivariación está acotada por

$$\|\nu\|(A) \leq \sup\left\{\sum_{n\in A} |x^* x_n| : x^* \in B_{X^*}\right\}$$

Sea $A_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$. Entonces se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{|\nu|(A_n)}{\|\nu\|(A_n)} &= \left(\sum_{i\geq n} \alpha_i \|x_i\|\right) \cdot \left(\sup\left\{\sum_{i\geq n} \alpha_i |x^* x_i| : x^* \in B_{X^*}\right\}\right)^{-1} \\ &\geq \left(\sum_{i\geq n} \alpha_i \|x_i\|\right) \cdot \left(\sup\left\{\sum_{i\geq n} |x^* x_i| : x^* \in B_{X^*}\right\}\right)^{-1}\end{aligned}$$

que tiende a infinito con n por la condición (c). El resultado estaría probado.

La existencia de una sucesión (α_n) en las condiciones anteriores se deriva del siguiente lema.

Lema 3.4. *Sean (γ_n) una sucesión decreciente a cero de términos no nulos y (β_n) una sucesión positiva tal que $\sum \beta_n = +\infty$. Entonces existe una sucesión (a_n) decreciente a cero tal que:*

$$1)\ \beta_n \geq a_n - a_{n+1},$$
$$2)\ \frac{a_n}{\gamma_n} \ \textit{tiende a} \ +\infty.$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos que en un proceso inductivo se pueden construir dos sucesiones crecientes de enteros no negativos (n_k) y (m_k) tales que, si denotamos $J_k = \{m_k, m_k+1, \ldots, m_{k+1}-1\}$, se tiene que $\cup J_k = \mathbf{N}$ y

$$i)\ \sum_{n\in J_k} \beta_n \geq \frac{1}{2^k}$$
$$ii)\ \frac{1}{2^{n_k}} \geq \sqrt{\gamma_n} > \frac{1}{2^{n_{k+1}}} \quad \text{para } n \in J_k.$$

La sucesión $(\sqrt{\gamma_n})$ es decreciente a cero. Dividiendo entre $\sup_n \sqrt{\gamma_n}$ si es necesario, podemos suponer que $\sqrt{\gamma_n} \leq 1$. Sea $m_1 = 1$ y $n_1 = 0$. Supongamos definidos n_{k-1} y m_{k-1}. Como la serie $\sum \beta_n$ es divergente, existe m'_k el primer entero para el cual

$$\sum_{n=m_{k-1}}^{m'_k-1} \beta_n \geq \frac{1}{2^{k-1}}. \tag{4}$$

Sea n_k el primer entero para el cual

$$\sqrt{\gamma_n} > \frac{1}{2^{n_k}} \quad \text{para todo } m_{k-1} \leq n < m'_k. \tag{5}$$

Sea m_k el mayor entero $m'_k \leq m_k$ para el cual se cumple (5). Se sigue cumpliendo (4) con m_k en lugar de m'_k. Además se deduce que

$$\frac{1}{2^{n_k}} \geq \sqrt{\gamma_n} \quad \text{para todo } n \geq m_k.$$

Pasemos a definir la sucesión buscada (a_n). Sea $A_k = \sum_{n \in J_k} \beta_n$. Entonces definimos:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_{n+1} &= a_n - \frac{\beta_n}{2^k A_k} \quad \text{para } m_k < n < m_{k+1}. \end{aligned}$$

La sucesión (a_n) es estrictamente decreciente pues β_n y A_k son positivos. De la condición i) se deduce que $A_k 2^k \geq 1$, luego

$$a_n - a_{n+1} = \frac{\beta_n}{2^k A_k} \leq \beta_n.$$

Se tiene por tanto 1). Veamos que (a_n) es positiva y convergente a cero. Por una parte

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{n \in J_k}(a_n - a_{n+1})\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{n \in J_k} \frac{\beta_n}{2^k A_k}\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &= 1. \end{aligned}$$

La serie es telescópica, se sigue que

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i+1}) = a_1 - a_{n+1} = 1 - a_{n+1}.$$

Luego $a_n \geq 0$ para todo n. Veamos finalmente que se cumple la condición 2).

Dado $n \in \mathbf{N}$ sea k_0 tal que $n \in J_{k_0}$. Entonces, por ii), se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{\gamma_n} &= (\sum_{i=n}^{\infty}(a_i - a_{i+1}))\gamma_n^{-1} \\
&\geq (\sum_{k=k_0+1}^{\infty}(\sum_{i\in J_k}\frac{\beta_i}{2^k A_k}))\gamma_n^{-1} \\
&= (\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^k})\gamma_n^{-1} \\
&= \frac{1}{2^{k_0}\gamma_n} \\
&\geq \frac{1}{2^{n_{k_0}}\gamma_n} \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{\gamma_n}},
\end{aligned}$$

que tiende a infinito pues $(\sqrt{\gamma_n})$ decrece a cero. Q.E.D.

Apliquemos el Lema anterior a las sucesiones siguientes $\beta_n = \|x_n\|$ y $\gamma_n = \sup\{\sum_{i\geq n}|x^*x_i| : x^* \in B_{X^*}\}$. Sea (a_n) la sucesión dada por el Lema. Definamos la sucesión $\alpha_n = (a_n - a_{n+1})/\beta_n$. Entonces $0 \leq \alpha_n \leq 1$ por la condición 1). Por otra parte

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\|x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1 < +\infty$$

luego se deduce (b). Veamos que se cumple (c):

$$\begin{aligned}
(\sum_{i\geq n}\alpha_i\|x_i\|)\cdot(\sup\{\sum_{i\geq 1}|x^*x_i| : x^* \in B_{X^*}\})^{-1} &= (\sum_{i\geq n}\alpha_i\beta_i)\cdot(\gamma_n)^{-1} \\
&= (\sum_{i\geq n}(a_i - a_{i+1}))\cdot(\gamma_n)^{-1} \\
&= a_n\cdot\gamma_n^{-1}
\end{aligned}$$

que tiende a infinito por 2). Q.E.D.

Las condiciones para que $L^1(\nu)$ sea un AL–espacio pueden imponerse, en principio, tanto en el espacio de Banach X como en la medida ν. El siguiente ejemplo muestra que no es suficiente imponerlas exclusivamente sobre el espacio de Banach. Asimismo muestra que la condición (L 1), a pesar de ser necesaria, no es suficiente.

Ejemplo 3.5. *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces existe una medida ν con valores en X, cumpliendo la condición (L 1), tal que $L^1(\nu)$ no es orden isomorfo a un AL–espacio.*

DEMOSTRACIÓN. Sea (x_n) una sucesión en X dada por el Teorema de Dvoretsky–Rogers, es decir $\sum x_n$ converge incondicionalmente, pero no absolutamente. Consideremos la siguiente medida:

$$A \in \mathcal{P}(\mathbf{N}) \longmapsto \nu(A) = \sum_{n\in A} \frac{x_n}{2^n \cdot \|x_n\|} \in X\,.$$

Está bien definida y es numerablemente aditiva por la convergencia incondicional de la serie que la define. La convergencia absoluta de dicha serie prueba que la medida tiene variación acotada, pues

$$|\nu|(A) = \sum_{n\in A} \frac{1}{2^n}.$$

Luego la variación total es 1. Los espacios $L^1(\nu)$ y $L^1(|\nu|)$ son espacios de sucesiones dados por

$$L^1(\nu) \;=\; \left\{ (b_n) : \sum \frac{b_n x_n}{2^n \cdot \|x_n\|} \text{ converge incondicionalmente en } X \right\}$$

$$L^1(|\nu|) \;=\; \left\{ (b_n) : \sum \frac{b_n}{2^n} \text{ es absolutamente sumable } \right\}.$$

Por lo tanto $(2^n \cdot \|x_n\|)$ es un elemento de $L^1(\nu)$ pero no de $L^1(|\nu|)$. Se deduce de la Proposición 3.1 que $L^1(\nu)$ no es orden isomorfo a un AL–espacio.

Veamos que se cumple la condición (L 1). Sea A un subconjunto de $\mathbf{N}$. Sea $n_0 = \min\{n : n \in A\}$. Entonces

$$|\nu|(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{2^n} \leq \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{2^n} = \frac{2}{2^{n_0}}.$$

Por otra parte se tiene

$$\|\nu\|(A) \geq \sup\{\|\nu(B)\| : B \subset A\} \geq \|\nu(\{n_0\})\| = \frac{1}{2^{n_0}}.$$

Es decir que para cualquier medible A se tiene

$$|\nu|(A) \leq 2 \cdot \|\nu\|(A). \qquad \text{Q.E.D.}$$

Para medidas valoradas en determinados tipos de espacios se puede obtener sencillas condiciones suficientes, incluso caracterizaciones.

Consideremos medidas valoradas en AL–espacios. Recordemos que un ope-ra-dor entre retículos de Banach se dice *regular* si es diferencia de dos operadores lineales, continuos y positivos. Se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.6. *Sea ν una medida con valores en un AL–espacio. Son equivalentes:*

a) $L^1(\nu)$ es orden isomorfo a un AL–espacio.

b) El operador integración es regular.

DEMOSTRACIÓN. a) $\Rightarrow$ b) Se deduce del hecho de que todo operador definido sobre un AL–espacio y con valores en un retículo de Banach, con la propiedad este último de estar complementado a traves de una proyección positiva en su bidual, es regular [S, Theorem IV.1.5].

b) $\Rightarrow$ a) Sea $\nu\colon \Sigma \longrightarrow L$, donde L es un AL–espacio. Supongamos que $\nu\colon L^1(\nu) \longrightarrow L$ es regular. Se sigue que el operador traspuesto $\nu^*\colon L^* \longrightarrow L^1(\nu)^*$ es también regular. Por lo tanto transforma conjuntos acotados respecto del orden en L^* en conjuntos acotados respecto del orden en $L^1(\nu)^*$. Ahora bien el espacio L^* es un AM–espacio con unidad al ser el dual de un AL–espacio. Por lo tanto tiene bola unidad acotada respecto del orden. Se deduce que ν^* transforma conjuntos acotados en norma en conjuntos acotados en el orden y por tanto por la Proposición 3.1 se deduce que $L^1(\nu)$ es un AL–espacio. Q.E.D.

De la Proposición anterior se deduce la siguiente condición suficiente.

Corolario 3.7. *Sea ν una medida valorada en un AL–espacio. Entonces $L^1(\nu)$ es un AL–espacio si ν tiene una descomposición de Hahn, es decir existe un conjunto medible A tal que $\nu(B) \geq 0$ si $B \subset A$ y $\nu(B) \leq 0$ si $B \subset \Omega \setminus A$.*

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente probar el resultado para medidas positivas puesto que en el caso general la medida ν es la suma directa de las medidas ν_1 y ν_2, restricción de ν a A y $\Omega \setminus A$ respectivamente, y por tanto $L^1(\nu)$ es orden isomorfo al espacio $L^1(\nu_1) \oplus L^1(\nu_2)$, ver 1.13. Para medidas positivas el operador integración es positivo y el resultado se sigue de la proposición anterior. Q.E.D.

En virtud de un resultado de Diestel y Faires [D–F, Theorem 2.1], para una medida valorada en un AL–espacio es equivalente tener variación acotada y ser regular, es decir, poder expresarse como diferencia de dos medidas positivas. Esta no es la situación del Corolario anterior. La razón es que al no estar las dos medidas positivas disjuntamente soportadas no se puede asegurar que el operador integración sea regular. Como contraejemplo basta considerar el dado por el Ejemplo 3.5 cuando el espacio de Banach X es un AL–espacio.

Consideremos ahora medidas con valores en espacios $C(K)$ de funciones continuas sobre un espacio topológico compacto Hausdorff K. Este caso incluye a los AM–espacios puesto que, en virtud de un teorema de Kakutani [L–T II, Theorem 1.b.6], estos espacios son reticularmente isométricos a un subretículo de un espacio $C(K)$.

Consideremos en las condiciones anteriores medidas puramente atómicas. Se pueden considerar definidas sobre el σ–álgebra $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ de partes de $\mathbf{N}$. Se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.8. *Sea $\nu\colon \mathcal{P}(\mathbf{N}) \longrightarrow C(K)$ donde K es un compacto Hausdorff. Sea $f_n = \nu(\{n\})$ y sea $|f_n|$ el módulo de f_n en $C(K)$. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

a) *$L^1(\nu)$ es orden isomorfo a un AL–espacio.*

b) *La medida ν cumple la condición*

$$0 \notin \overline{co}\left\{ \frac{|f_n|}{\|f_n\|} : n \in \mathbf{N} \right\}. \qquad \text{(L 2)}$$

DEMOSTRACIÓN. La Proposición 3.1 muestra que a) es equivalente a que $L^1(\nu)$ sea isomorfo a $L^1(|\nu|)$. La medida $|\nu|$ es la siguiente

$$A \in \mathcal{P}(\mathbf{N}) \longmapsto |\nu|(A) = \sum_{n \in A} \|f_n\| \in \mathbf{R}.$$

La inclusión natural del espacio $L^1(|\nu|)$ en el espacio $L^1(\nu)$ es siempre continua e inyectiva. En este caso la medida ν tiene variación acotada luego, por densidad de las funciones simples, la inclusión tiene imagen densa. Por lo tanto es equivalente probar que la inclusión es abierta. Es decir, que existe una constante $C > 0$ tal que para toda F de $L^1(|\nu|)$ se tiene

$$\|F\|_1 \leq C \cdot \|F\|_\nu .$$

De nuevo por densidad de las funciones simples en $L^1(|\nu|)$ basta probar lo anterior para funciones simples. Más aún, es suficiente verlo para funciones simples con soporte (en $\mathbf{N}$) finito, puesto que un argumento de aproximación extiende el resultado. Finalmente observemos que es suficiente considerar funciones positivas, puesto que una función y su módulo tienen la misma norma en ambos espacios.

La argumentación anterior muestra que $L^1(\nu)$ es un AL–espacio si y sólo si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $N \in \mathbf{N}$ y para cualesquiera escalares positivos $a_1, \ldots, a_N$ se tiene

$$C \cdot \left\| \sum_1^N a_n \chi_{\{n\}} \right\|_1 \leq \left\| \sum_1^N a_n \chi_{\{n\}} \right\|_\nu .$$

Considerando en $L^1(\nu)$ la norma equivalente vista en 1.5

$$|||F|||_\nu = \sup \left\{ \| \int_B F \, d\nu \| : B \subset \mathbf{N} \right\},$$

se tiene

$$C \cdot \sum_1^N a_n \|f_n\| \leq \sup \left\{ \left\| \sum_{n \in B} a_n f_n \right\| : B \subset \{1, \ldots, N\} \right\}.$$

En la expresión anterior dividamos ambos miembros por $\sum_1^N a_n \|f_n\|$. Se obtiene

$$C \leq \sup \left\{ \left\| \sum_{n \in B} \frac{a_n \|f_n\|}{\sum_1^N a_n \|f_n\|} \cdot \frac{f_n}{\|f_n\|} \right\| : B \subset \{1, \ldots, N\} \right\}.$$

Denotemos $g_n = f_n / \|f_n\|$. Entonces $L^1(\nu)$ es un AL–espacio si y sólo si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $N \in \mathbf{N}$ y para todo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

positivos con $\sum_1^N \alpha_n = 1$, se tiene que

$$C \leq \sup \left\{ \left\| \sum_{n \in B} \alpha_n g_n \right\| : B \subset \{1, \ldots, N\} \right\}.$$

Estudiemos el supremo que aparece en la expresión anterior. Por una parte dado B en $\{1, \ldots, N\}$

$$\left\| \sum_{n \in B} \alpha_n g_n \right\| \leq \left\| \sum_1^N \alpha_n |g_n| \right\|.$$

Luego esta última expresión acota a dicho supremo. Por otra parte existe un punto $t_0 \in K$ donde la función $\sum_1^N \alpha_n |g_n|$ alcanza su norma, luego

$$\left\| \sum_1^N \alpha_n |g_n| \right\| = \sum_1^N \alpha_n |g_n(t_0)| = \sum_{B_1} \alpha_n g_n(t_0) + \sum_{B_2} \alpha_n g_n(t_0),$$

siendo $B_1 = \{n, g_n(t_0) \geq 0, 1 \leq n \leq N\}$ y B_2 el complemento de B_1 en $\{1, \ldots, N\}$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \left\| \sum_1^N \alpha_n |g_n| \right\| &\leq \left\| \sum_{B_1} \alpha_n g_n \right\| + \left\| \sum_{B_2} \alpha_n g_n \right\| \\ &\leq 2 \cdot \sup \left\{ \left\| \sum_{n \in B} \alpha_n g_n \right\| : B \subset \{1, \ldots, N\} \right\}. \end{aligned}$$

Luego ambas expresiones son equivalentes y por tanto que $L^1(\nu)$ sea un AL–espacio es equivalente a que exista una constante $C > 0$ tal que para todo $N \in \mathbf{N}$ y para todo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ positivos con $\sum_1^N \alpha_n = 1$, se tenga que

$$C \leq \left\| \sum_1^N \alpha_n \frac{|f_n|}{\|f_n\|} \right\|.$$

Esta es precisamente la condición (L 2). Q.E.D.

Comenzamos ahora el estudio del caso general para una medida valorada en un espacio de Banach X. El Ejemplo 3.5 muestra que las condiciones a priori deben imponerse en la medida vectorial. Hemos visto que el que la variación de la medida ν sea acotada es una condición necesaria. Esto implica que la inclusión natural

$$L^1(|\nu|) \longrightarrow L^1(\nu)$$

tiene rango denso, puesto que las funciones simples son densas en $L^1(\nu)$. Por lo tanto, la aplicación traspuesta es inyectiva, luego $L^1(\nu)^*$ puede ser identificado con un subespacio vectorial de $L_\infty(|\nu|)$, espacio dual de $L^1(|\nu|)$. De hecho se tiene la siguiente proposición.

Proposición 3.9. *Sea ν una medida con variación acotada. Entonces $L^1(\nu)^*$ se puede identificar con un ideal reticular en $L_\infty(|\nu|)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea λ una medida de control de Rybakov para ν. Se ha visto en 1.14 que $L^1(\nu)^*$ se puede identificar con un ideal reticular en $L^1(\lambda)$. Debemos probar que si g es una función de $L_\infty(|\nu|)$ que está en $L^1(\nu)^*$, y se tiene h en $L_\infty(|\nu|)$ tal que $|h| \leq |g|$ salvo en un conjunto de $|\nu|$–medida cero, entonces h está en $L^1(\nu)^*$. Como λ y $|\nu|$ tienen los mismos conjuntos de medida nula, se deduce que, por una parte $|h| \leq |g|$ salvo en un conjunto de λ–medida cero, y por otra se tienen, en este caso de variación acotada, las siguientes inyecciones

$$L^1(\nu)^* \longrightarrow L_\infty(|\nu|) \longrightarrow L^1(\lambda).$$

Por lo tanto h está en $L^1(\nu)^*$. Q.E.D.

En $L_\infty(|\nu|)$ los ideales algebraicos y los reticulares coinciden, luego de la proposición anterior se sigue que $L^1(\nu)^*$ es un ideal algebraico en $L_\infty(|\nu|)$.

Por la Proposición 3.1 sabemos que el que $L^1(\nu)$ sea un AL–espacio es equivalente a que la inclusión natural de $L^1(|\nu|)$ en $L^1(\nu)$ sea sobreyectiva y por tanto equivale a que su dual se pueda identificar, de la forma antes expuesta, con $L_\infty(|\nu|)$. Ésto ocurre cuando y sólo cuando $L^1(\nu)^*$ es cerrado en $L_\infty(|\nu|)$. Ahora bien, al ser, en virtud de la Proposición anterior, $L^1(\nu)^*$ un ideal reticular en $L_\infty(|\nu|)$, coincidirá con todo el espacio si y sólo si existe algún elemento de $L^1(\nu)^*$ que *domine a una función constante.* Esta idea es la que se formaliza en la discusión que sigue a continuación.

Sea μ una medida finita sobre (Ω, Σ). $L_\infty(\mu)$ es un álgebra de Banach. Sea Δ el conjunto de los funcionales lineales y multiplicativos (caracteres) sobre $L_\infty(\mu)$. Dotado de la topología inducida $\sigma(L_\infty, L^1)$ es un espacio topológico compacto Hausdorff. Consideremos la transformada de Gelfand definida de la siguiente forma:

$$f \in L_\infty(\mu) \longmapsto f^\wedge \in C(\Delta)$$

definida por

$$s \in \Delta \longmapsto f^\wedge(s) = s(f) \in \mathbf{R}\,.$$

Del Teorema de Gelfand se que deduce la aplicación anterior es un isomorfismo de álgebras que respeta el orden y conserva la norma.

El siguiente Lema describe la acción de un carácter sobre una función. A pesar de ser conocido se incluye la demostración al no haberse encontrado ninguna referencia precisa. Sea $\mu^{-1}(0)$ la familia de los conjuntos medibles con medida cero. Consideremos la σ–álgebra cociente $\Sigma/\mu^{-1}(0)$.

Lema 3.10. *Sea s un carácter sobre $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$, entonces existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en $\Sigma/\mu^{-1}(0)$ tal que*

$$s(f) = \lim_{A \in \mathcal{U}} \frac{\int_A f\, d\mu}{\mu(A)}$$

para toda $f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$. Recíprocamente, para todo ultrafiltro en $\Sigma/\mu^{-1}(0)$ la expresión anterior define un carácter sobre $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en $\Sigma/\mu^{-1}(0)$. Para simplicar notaciones identificaremos conjuntos medibles con su clase de equivalencia en la σ–álgebra cociente. Sea la aplicación s definida en el enunciado. Sea f en $L^1(\nu)$. Como

$$\left| \int_A f \, d\mu \right| \leq \|f\|_\infty \cdot \mu(A)$$

se tiene que la red $\left(\mu(A)^{-1} \cdot \int_A f \, d\mu\right)_{A \in \mathcal{U}}$ está acotada y por tanto existe el límite según el ultrafiltro $\mathcal{U}$. Luego s está bien definida. La linealidad de la integración y del límite garantizan la linealidad de s. La acotación anterior prueba asimismo que s es un funcional acotado en $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$. Veamos que es multiplicativo. Sea $B \in \mathcal{U}$. Entonces

$$s(\chi_B) = \lim_{A \in \mathcal{U}} \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)} = \lim_{A \in \mathcal{U}, A \subset B} \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)} = 1$$

De forma análoga se obtiene que si $B \notin \mathcal{U}$ entonces $s(\chi_B) = 0$. Sea ahora $f \in L^1(\nu)$. Se tiene, para $B \in \mathcal{U}$,

$$\begin{aligned} s(f \cdot \chi_B) &= \lim_{A \in \mathcal{U}} \frac{\int_A f \cdot \chi_B \, d\mu}{\mu(A)} \\ &= \lim_{A \in \mathcal{U}, A \subset B} \frac{\int_A f \cdot \chi_B \, d\mu}{\mu(A)} \\ &= \lim_{A \in \mathcal{U}, A \subset B} \frac{\int_A f \, d\mu}{\mu(A)} \\ &= \lim_{A \in \mathcal{U}} \frac{\int_A f \, d\mu}{\mu(A)} \\ &= s(f) \cdot 1 \\ &= s(f) \cdot s(\chi_B) \end{aligned}$$

Análogamente, para $B \notin \mathcal{U}$ se obtiene $s(f \cdot \chi_B) = 0 = s(f) \cdot s(\chi_B)$. Gracias a la linealidad de s se deduce que es multiplicativa sobre las funciones simples. Al ser densas las funciones simples, se deduce que s es multiplicativa.

Recíprocamente, sea s un carácter. Sea la familia $\mathcal{U} = \{A \in \Sigma/\mu^{-1}(0) : s(\chi_A) = 1\}$. Está bien definida puesto que $s(0) = 0$. Como para todo medible

A se tiene que $s(\chi_A) = 0$ ó 1, se sigue que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro. Este ultrafiltro define, como hemos probado, un carácter, que coincide con s sobre las funciones características luego sobre las simples y por tanto coincide con s. Q.E.D.

Consideremos ahora el espacio de medida $(\Omega, \Sigma, |\nu|)$. Definimos los siguientes conjuntos en el espacio Δ de caracteres sobre $L_\infty(|\nu|)$.

Definición 3.11. *Sea H el conjunto de caracteres que se anulan sobre $L^1(\nu)^*$. Es decir, el conjunto de ceros de la imagen en $C(\Delta)$, por la transformada de Gelfand, del ideal $L^1(\nu)^*$.*

Dado x^* en X^* sea g_{x^*} la derivada de Radon–Nikodym, respecto de $|\nu|$, de la medida escalar $x^*\nu$. Como se tiene que $|x^*\nu|(A) \leq \|x^*\| \cdot |\nu|(A)$ para todo medible A, se deduce que g_{x^*} está en $L_\infty(|\nu|)$. Por otra parte la aplicación:

$$f \in L^1(\nu) \longmapsto \int f\, dx^*\nu = \int f g_{x^*} d|\nu| \in \mathbf{R}$$

define un funcional lineal y continuo. Por tanto g_{x^*} está en $L^1(\nu)^*$.

Definición 3.12. *Sea $\mathcal{I}$ el ideal reticular generado por el conjunto $\{g_{x^*} : x^* \in X^*\}$ en $L^1(\nu)^*$.*

Existe una correspondencia biyectiva entre el ideal $\mathcal{I}$ ahora definido y el que aparece en el Teorema 1.23, puesto que las medidas λ y $|\nu|$ tienen los mismos conjuntos de medida nula.

Definición 3.13. *Sea H^* el conjunto de caracteres que se anulan sobre $\mathcal{I}$. Es decir, el conjunto de ceros de la imagen en $C(\Delta)$, por la transformada de Gelfand, del ideal $\mathcal{I}$.*

La utilidad de las definiciones previas respecto del problema que estamos estudiando queda de manifiesto en las proposiciones siguientes. Obviamente se tiene $H \subseteq H^*$.

Proposición 3.14. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *$L^1(\nu)$ es orden isomorfo a un AL–espacio.*

b) *El conjunto H es vacío.*

DEMOSTRACIÓN. Si $L^1(\nu)$ es orden isomorfo a un AL–espacio entonces de la Proposición 3.1 se sigue que $L^1(\nu)$ es orden isomorfo a $L^1(|\nu|)$ luego $L^1(\nu)^*$ es orden isomorfo a $L_\infty(|\nu|)$ y por tanto H es vacío. Recíprocamente, si H es vacío, se deduce que $L^1(\nu)^*$ es denso en $L_\infty(|\nu|)$. Ahora bien $L^1(\nu)^*$ es un ideal (algebraico), luego su clausura en $L_\infty(|\nu|)$ es también un ideal. Como un ideal es propio si y sólo si lo es su clausura, de ser $L^1(\nu)^*$ denso en $L_\infty(|\nu|)$ se sigue que $L^1(\nu)^*$ es un ideal no propio, luego $L^1(\nu)^*$ coincide con $L_\infty(|\nu|)$. Por tanto $L^1(\nu)$ es orden isomorfo a $L^1(|\nu|)$. Q.E.D.

Proposición 3.15. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *Existe una partición finita $(A_i)_1^n$ y existen elementos $x_1^*, \ldots, x_n^*$ en X^* tales que la aplicación identidad es un isomorfismo (que respeta el orden) entre $L^1(\nu)$ y el espacio $L^1(\mu)$ donde $\mu = \sum_1^n \mu_i$ y cada medida μ_i es la restricción de la medida $|x_i^*\nu|$ a la traza de Σ sobre el conjunto A_i.*

b) *El conjunto H^* es vacío.*

DEMOSTRACIÓN. a) $\Rightarrow$ b) De la Proposición 3.1 se sigue que $L^1(|\nu|)$ es orden isomorfo a través de la identidad a $L^1(\mu)$. Por lo tanto existe una constante $C > 0$ tal que se tiene la desigualdad

$$|\nu|(A) \leq C \cdot \sum_1^n |x_i^*\nu|(A \cap A_i) \quad \text{para todo } A \in \Sigma, \tag{6}$$

de donde se deduce por integración respecto de $|\nu|$ que

$$\chi_\Omega \leq C \cdot \sum_1^n |g_{x_i^*}| \cdot \chi_{A_i} \quad \text{e.c.t. } |\nu|.$$

Luego la unidad de $L_\infty(|\nu|)$ está en el ideal $\mathcal{I}$ y H^* es vacío.

b) $\Rightarrow$ a) Si H^* es vacío tambien lo es H, luego $L^1(\nu)$ es un AL–espacio y por la Proposición 3.1 es isomorfo a $L^1(|\nu|)$. Por otra parte el ideal $\mathcal{I}$ es denso en $L_\infty(|\nu|)$ y por tanto, como se ha visto en la Proposición anterior, $\mathcal{I}$ coincide con $L_\infty(|\nu|)$. Es decir $L_\infty(|\nu|)$ es el ideal reticular generado por el conjunto $\{g_{x^*} : x^* \in X^*\}$. Luego existen $x_1^*, \ldots, x_n^*$ en X^* tales que

$$\chi_\Omega \leq \sum_1^n |g_{x_i^*}| \quad \text{e.c.t. } |\nu|$$

Veamos que existen conjuntos medibles disjuntos $(A_i)_1^n$ con $|\nu|(\cup A_i) = |\nu|(\Omega)$ y una constante $C > 0$ tales que

$$\chi_\Omega \leq C \cdot \sum_1^n |g_{x_i^*}| \cdot \chi_{A_i} \quad \text{e.c.t. } |\nu|.$$

Sea $B_i = [|g_{x_i^*}| < 1/n]$ para $1 \leq i \leq n$. Entonces se tiene $\cap_i B_i$ tiene $|\nu|$–medida nula. Luego sus complementos cubren todo Ω, salvo quizás, un conjunto de medida nula. Sean $A_1 = B_1$ y $A_i = B_i \setminus \cup_1^{i-1} B_j$ si $i > 1$ y sea $C = n$. Integrando respecto de $|\nu|$ en la desigualdad anterior se obtiene la desigualdad (6). Como siempre se tiene la desigualdad

$$\sum_1^n |x_i^* \nu|(A \cap A_i) \leq \max_i \|x_i^*\| \cdot |\nu|(A) \quad \text{para todo } A \in \Sigma,$$

se sigue que la identidad es un isomorfismo (que respeta el orden) de $L^1(\nu)$ en $L^1(\mu)$, para la medida μ de b). Q.E.D.

Se deduce por tanto que, en este caso, $L^1(\nu)$ es orden isomorfo al espacio $\left[\bigoplus_1^n L^1(|x_i^* \nu|, \Sigma_{A_i})\right]_1$.

La proposición anterior permite dar una respuesta parcial al problema que estamos estudiando. Para ello considérese la siguiente condición sobre la medida vectorial $\nu\colon \Sigma \longrightarrow X$:

$$0 \notin \overline{co}\left\{ \frac{\nu(A)}{|\nu|(A)} : |\nu|(A) \neq 0, A \in \Sigma \right\}. \tag{L 3}$$

Se tiene entonces el siguiente resultado:

Teorema 3.16. *Las condiciones siguientes son equivalentes:*

a) *$L^1(\nu)$ es orden isomorfo a través de la identidad a $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ donde la medida μ es como en la Proposición 3.15.*

b) *Existe una partición finita del espacio de medida $(B_j)_1^k$ tal que la restricción de la medida ν a cada conjunto B_j cumple la condición (L 3).*

DEMOSTRACIÓN. a) $\Rightarrow$ b) Por hipótesis y usando las notaciones de la Proposición 3.15, existe una constante $C > 0$ tal que

$$|\nu|(A) \leq C \cdot \sum_1^n |x_i^* \nu|(A \cap A_i) \quad \text{para todo } A \in \Sigma.$$

Consideremos la descomposición de Hahn de la medida $x_i^* \nu$ restringida al conjunto A_i. Existen medibles disjuntos A_i^1 y A_i^2 cuya unión es A_i tales que $x_i^* \nu(B) \geq 0$ para todo medible $B \subset A_i^1$, y $x_i^* \nu(B) \leq 0$ para todo medible $B \subset A_i^2$. Entonces se tiene

$$\left| \frac{x_i^* \nu(A)}{|\nu|(A)} \right| \geq \frac{1}{C} \quad \text{para todo medible } A \subset A_i^k,$$

para $1 \leq i \leq n$ y $k = 1, 2$. Luego la restricción de la medida ν a cada conjunto A_i^k cumple la condición (L 3). Como los conjuntos A_i son disjuntos, también lo son los conjuntos A_i^k.

b) $\Rightarrow$ a) Sea ν_j, $1 \leq j \leq k$, la restricción de la medida ν a B_j. Como las medidas ν_j tienen soportes disjuntos, se tiene

$$\|f\|_\nu \leq \sum_1^k \|f\|_{\nu_j} \leq k \cdot \|f\|_\nu .$$

Luego el espacio $L^1(\nu)$ es orden isomorfo al espacio $(\bigoplus_1^k L^1(\nu_j))_1$. Es suficiente probar el resultado para cada espacio $L^1(\nu_j)$, luego podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que es la propia medida ν la que verifica la condición (L 3). En virtud de la Proposición 3.15 es suficiente probar que H^* es vacío. Supongamos que no; existiría entonces un carácter $s \in \Delta$ tal que $s(g_{x^*}) = 0$ para todo $x^* \in X^*$. Por el Lema 3.10 existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en $\Sigma/|\nu|^{-1}(0)$ tal que, para cada $x^* \in X^*$

$$0 = \lim_{A \in \mathcal{U}} \frac{\int_A g_{x^*} \, d|\nu|}{|\nu|(A)} = \lim_{A \in \mathcal{U}} \frac{x^*\nu(A)}{|\nu|(A)}.$$

Es decir, la red $\{\nu(A)/|\nu|(A) : A \in \mathcal{U}\}$ tiende débilmente a cero, lo que contradice nuestras hipótesis. Q.E.D.

El teorema anterior no resuelve completamente el problema. Es decir existen medidas para las cuales $L^1(\nu)$ es un AL–espacio, luego tendríamos H vacío, pero tales que $L^1(\nu)$ no viene dado por una cantidad finita de espacios de la forma $L^1(|x^*\nu|)$, es decir H^* no es vacío. Esto se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3.17. Supongamos que existe una sucesión (f_n) en el espacio $C[0,1]$ cumpliendo las siguientes condiciones:

a) $\|f_n\| = 1$ para todo n,

b) 0 pertenece a la clausura débil de $\{f_n : n \in \mathbf{N}\}$,

c) existen $\varepsilon > 0, \mu \in C[0,1]^*, \|\mu\| = 1$ tales que $\mu(|f_n|) \geq \varepsilon$ para todo n.

Consideremos entonces la siguiente medida

$$A \in \mathcal{P}(\mathbf{N}) \longmapsto \nu(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{2^n} f_n \in C[0\,1], .$$

Al estar definida por una serie absolutamente convergente, es numerablemente aditiva y tiene variación acotada. Veamos que $L^1(\nu)$ es orden isomorfo a un AL–espacio. En virtud del Teorema 3.8 es suficiente comprobar que se cumple la condición (L 2). Consideremos una combinación convexa de las funciones $|f_n| = |\nu(n)|/\|\nu(n)\|$, entonces

$$\left\|\sum \alpha_n |f_n|\right\|_\infty \geq \mu(\sum \alpha_n |f_n|) \geq \varepsilon.$$

Luego $L^1(\nu)$ es un AL–espacio. Por otra parte, sea $(B_j)_1^k$ una partición de $\mathbf{N}$. Se tiene

$$0 \in \overline{\{f_n : n \in \mathbf{N}\}}^{\text{débil}} \subset \bigcup_{j=1}^{k} \overline{co}\left\{\frac{\nu(A)}{|\nu|(A)} : A \subset B_j\right\},$$

luego no se puede cumplir la condición b) del Teorema 3.16, y por tanto $L^1(\nu)$ no viene dado por una cantidad finita de espacios de la forma $L^1(|x^*\nu|)$.

La existencia de una sucesión de funciones continuas en el intervalo [0,1] cumpliendo las condiciones requeridas se sigue del siguiente resultado, que, si bien debe ser conocido, probamos a continuación, al no haberse hallado ninguna referencia concreta.

Lemma 3.18. *Consideremos el espacio de funciones continuas sobre el intervalo* $[0,1]$ *dotado de la norma del supremo. La aplicación que a cada función le asocia su módulo*

$$f \in C[0,1] \longmapsto |f| \in C[0,1]$$

no es débil a débil continua en el origen.

DEMOSTRACIÓN. Probaremos que existe un entorno débil del origen $\mathcal{W}$ tal que, para todo entorno básico del origen $\mathcal{O}$, existe una función f en $\mathcal{O}$ cuyo módulo no está en $\mathcal{W}$. Sea m la medida de Lebesgue en el intervalo [0,1] y sea $\mathcal{W} = \{g \in C[0,1] : |\int g\, dm| < 1/2\}$, es un entorno débil del origen.

Consideremos un entorno básico arbitrario del origen

$$\mathcal{O} = \left\{ g \in C[0,1] : \left| \int g \, d\mu_i \right| < \varepsilon, 1 \leq i \leq k \right\},$$

donde $\mu_1, \ldots, \mu_k$ están en $C[0,1]^*$ y $0 < \varepsilon < 1$. Cada medida μ_i es una medida de Radon sobre $\mathcal{M}[0,1]$, σ–álgebra de los medibles Lebesgue en [0,1], luego se puede expresar de la forma

$$\mu_i = \tau_i + \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \delta_{x_{ij}},$$

donde τ_i es no atómica y (x_{ij}) son puntos del intervalo [0,1] donde la medida toma el valor a_{ij}. Sea $B = \cup_{i,j} \{x_{ij}\}$, al ser numerable se tiene $m(B) = 0$. Consideremos la medida

$$A \in \mathcal{M}[0,1] \longmapsto \tau(A) = (\tau_1(A), \ldots, \tau_k(A)) \in \mathbf{R}^k.$$

Al ser una medida no atómica valorada en un espacio de dimensión finita, por el Teorema de Liapunov se deduce que su rango es convexo. Existe por tanto un medible $A \in \mathcal{M}[0,1]$ tal que

$$\tau(A) = \frac{1}{2} \cdot \tau([0,1]).$$

Se sigue que $\tau_i(A) = \tau_i(A_i^c)$ para todo $1 \leq i \leq k$. Sea la función $f = (\chi_A - \chi_{A^c}) \cdot \chi_{B^c}$. Se tiene $\int f \, d\mu_i = 0$ para todo i.

Sea la medida $\mu = m + |\mu_1| + \cdots + |\mu_k|$. Como f es medible existe, por el Teorema de Lusin, un compacto K en [0,1] tal que la restricción de f a K es continua y $\mu(K^c) < \varepsilon/2$. Sea g una función continua en [0,1] que coincida con f en K y de módulo menor o igual que uno. Entonces, para cada $1 \leq i \leq k$ se tiene

$$\begin{aligned}
\left| \int g \, d\mu_i \right| &= \left| \int (g - f) \, d\mu_i \right| \\
&\leq \int_{K^c} |f - g| \, d|\mu_i| \\
&\leq 2 \cdot \mu(K^c) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Luego g pertenece al entorno $\mathcal{O}$. Por otra parte

$$\int |g|\, dm \geq \int_K |g|\, dm = \int_K |f|\, dm = 1 - m(K^c) > 1 - \varepsilon/2 > 1/2.$$

Luego $|g|$ no está en $\mathcal{W}$. Q.E.D.

El Lema anterior muestra que el cero es débilmente adherente al conjunto de funciones de $C[0,1]$ de norma uno y para las cuales $\int |f|\, dm \geq 1/2$. Como $C[0,1]$ es separable, es también separable para la topología débil, luego existe una sucesión (f_n) débilmente densa en dicho conjunto, que es la sucesión buscada. Q.E.D.

Es de resaltar que la aplicación $f \in C[0,1] \longmapsto |f| \in C[0,1]$ es débil a débil secuencialmente continua, por lo que el ejemplo anterior no se puede construir a partir de una sucesión débilmente nula en $C[0,1]$.

Completamos el capítulo viendo que la coincidencia de los conjuntos H y H^* está relacionada con la caracterización de la convergencia débil en $L^1(\nu)$ vista en el Teorema 1.23.

Proposición 3.19. *Sean las siguientes condiciones:*

a) *En $L^1(\nu)$ la convergencia débil de redes acotadas está caracterizada por la convergencia débil (en X) de las integrales sobre conjuntos arbitrarios, es decir, si $\sup_\alpha \|f_\alpha\|_\nu < +\infty$ entonces*

$$f_\alpha \xrightarrow{w} f \text{ en } L^1(\nu) \iff \int_A f_\alpha\, d\nu \xrightarrow{w} \int_A f\, d\nu \text{ en } X \text{ para cada } A \in \Sigma.$$

b) *Los conjuntos H y H^* coinciden.*

Entonces a) implica b).

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que probar que $H^* \subset H$. Sea s en H^*. Está dado por un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en $\Sigma/|\nu|^{-1}(0)$. Consideremos la red $\{f_A = \chi_A/|\nu|(A) : A \in \mathcal{U}\}$. Está acotada puesto que $\|f_A\|_\nu = \|\nu\|(A)/|\nu|(A) \leq 1$.

Sea $B \in \mathcal{U}$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{A\in\mathcal{U}} \int_B f_A \, dx^*\nu &= \lim_{A\in\mathcal{U}} \frac{\int_{A\cap B} h_{x^*} \, d|\nu|}{|\nu|(A)} \\
&= \lim_{A\in\mathcal{U}, A\subset B} \frac{\int_A h_{x^*} \, d|\nu|}{|\nu|(A)} \\
&= \lim_{A\in\mathcal{U}} \frac{\int_A h_{x^*} \, d|\nu|}{|\nu|(A)} \\
&= s(h_{x^*}) = 0,
\end{aligned}$$

puesto que $s \in H^*$. Para $B \notin \mathcal{U}$ se obtiene también que la integral tiende a cero puesto que a partir de un cierto índice la red es nula. Luego la red $(f_A)_\mathcal{U}$ tiene la propiedad de que las integrales sobre conjuntos arbitrarios tienden débilmente a cero. Por a) se deduce que (f_A) es débilmente nula. Luego para cada h en $L^1(\nu)^*$ se tiene

$$s(h) = \lim_{A\in\mathcal{U}} \frac{\int_A h \, d|\nu|}{|\nu|(A)} = \lim_{A\in\mathcal{U}} \langle h, f_A \rangle = 0.$$

Luego $s(h) = 0$, y por tanto s está en H. Q.E.D.

El siguiente ejemplo exhibe la situación en que $L^1(\nu)$ no es un AL–espacio y el ideal $\mathcal{I}$ no es denso en $L^1(\nu)^*$, ver Teorema 1.23. Es decir, se cumple $\emptyset \neq H$ y $H \neq H^*$.

Ejemplo 3.20. Sea ν la medida del Ejemplo 3.17. Entonces $L^1(\nu)$ es un AL–espacio, pero $H^* \neq \emptyset$. Sea $1 < p < +\infty$ y sea (a_n) una sucesión positiva y sumable. Consideremos la medida

$$A \in \mathcal{P}(\mathbf{N}) \longmapsto \mu(A) = \sum_{n\in A} a_n e_n \in \ell^p ,$$

donde (e_n) es la base canónica de ℓ^p. Tiene variación acotada. De la Proposición 1.22 se sigue que $L^1(\mu) = \ell^p$ y que el operador integración es la identidad. Luego para esta medida $H \neq \emptyset$ y $H = H^*$. La medida obtenida como suma directa de las medidas ν y μ, ver 1.13, genera un espacio para el cual $\emptyset \neq H \neq H^*$.

CAPÍTULO 4: Operadores con valores en $L^1(\nu)$.

Estudiamos en este capítulo los operadores lineales y continuos definidos en un espacio de Banach arbitrario y con valores en el espacio $L^1(\nu)$. El estudio se realizará a través de una técnica ya clásica, que se remonta al estudio, por Bartle, Dunford y Schwartz, de los operadores definidos sobre espacios de funciones continuas [B–D–S]. La idea es asociar a cada operador, en las condiciones anteriores, una medida vectorial y estudiar las propiedades del operador a través de las propiedades de la medida asociada.

Sea $\nu\colon \Sigma \longrightarrow X$ una medida vectorial y sea $L^1(\nu)$ el espacio de funciones integrables respecto de ν. Sea Y un espacio de Banach. Denotaremos por $\mathcal{L}(Y,X)$ el espacio de los operadores lineales y continuos definidos en Y y con valores en X. Consideremos un operador lineal y continuo:

$$T\colon Y \longrightarrow L^1(\nu)\ .$$

A continuación definimos la medida asociada a T.

Definición 4.1. *Sea $T\colon Y \longrightarrow L^1(\nu)$ un operador lineal y continuo. Sea $\widetilde{T}$ la siguiente función de conjuntos asociada al operador T:*

$$A \in \Sigma \longmapsto \widetilde{T}(A) \in \mathcal{L}(Y,X)\,,$$

donde se define $\widetilde{T}(A)$ de la siguiente forma

$$y \in Y \longmapsto \widetilde{T}(A)y = \int_A Ty\, d\nu \in X\,.$$

Proposición 4.2. *$\widetilde{T}$ es una medida vectorial acotada finitamente aditiva, que es numerablemente aditiva cuando se considera en $\mathcal{L}(Y, X)$ la topología fuerte de operadores.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $A \in \Sigma$. $\widetilde{T}(A)$ es un operador de Y en X. Como el operador T es lineal y también lo es la integración respecto de ν, se deduce que $\widetilde{T}(A)$ es lineal. Veamos que es acotado:

$$\|\widetilde{T}(A)y\| = \| \int_A Ty\, d\nu \| \leq \|Ty\|_\nu \leq \|T\| \cdot \|y\|.$$

Luego $\widetilde{T}(A)$ es acotado y por tanto $\widetilde{T}$ está bien definida. $\widetilde{T}$ es finitamente aditiva al serlo la integración respecto de ν. De la ecuación anterior se deduce que

$$\|\widetilde{T}(A)\| \leq \|T\| \text{ para todo } A \in \Sigma.$$

Luego $\widetilde{T}$ es acotada. Sea $(A_i)_1^\infty$ una partición y sea $y \in Y$ fijo. Consideremos la medida con densidad $Ty \in L^1(\nu)$ respecto de ν. Es numerablemente aditiva. Entonces

$$\widetilde{T}(\bigcup_i A_i)y = \int_{\cup_i A_i} Ty\, d\nu = \sum_i \int_{A_i} Ty\, d\nu = \sum_i \widetilde{T}(A_i)y.$$

Por lo tanto $\widetilde{T}$ es numerablemente aditiva respecto de la topología fuerte de operadores. Q.E.D.

El siguiente ejemplo sencillo muestra que la aditividad de la medida $\widetilde{T}$ no puede ser mejorada, es decir, no es cierto, en general, que la medida $\widetilde{T}$ sea numerablemente aditiva cuando se considera la topología uniforme en $\mathcal{L}(Y, X)$.

Ejemplo 4.3. Consideremos la medida (vectorial) de Lebesgue restringida al intervalo [0,1], $m: \mathcal{M}[0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$. El espacio de funciones integrables respecto de m en el sentido de la Definición 1.1 coincide con el espacio $L^1[0,1]$. Sea el espacio $Y = L^1[0,1]$ y sea el operador identidad

$$f \in L^1[0,1] \longmapsto Tf = f \in L^1[0,1].$$

La medida $\widetilde{T}$ toma valores en el espacio $L_\infty[0,1]$ y está definida de la siguiente forma, para cada $A \in \Sigma$

$$\widetilde{T}(A)f = \int_A f\, dm = \langle f, \chi_A \rangle$$

para cada $f \in L^1[0,1]$. Luego $\widetilde{T}(A)$ se puede identificar con $\chi_A \in L_\infty[0,1]$. Por tanto la medida $\widetilde{T}$ no es numerablemente aditiva en la topología uniforme, puesto que $\|\chi_A\|_\infty = 1$ para todo $A \in \Sigma$ con $m(A) > 0$.

Nota 4.4. Será de utilidad posterior la siguiente expresión equivalente de la semivariación de la medida $\widetilde{T}$:

$$1/2 \cdot \sup_{y \in B_Y} \|Ty \cdot \chi_A\|_\nu \leq \|\widetilde{T}\|(A) \leq 2 \cdot \sup_{y \in B_Y} \|Ty \cdot \chi_A\|_\nu .$$

Para probar esta expresión basta considerar las expresiones equivalentes para la semivariación, $|||\cdot|||$, y para la norma en $L^1(\nu)$, $|||\cdot|||_\nu$, ver 1.5. Sólo probaremos una de las desigualdades

$$\begin{aligned} \|\widetilde{T}\|(A) \leq& 2 \cdot \sup\{\|\widetilde{T}(B)\| : B \subset A\} = 2 \cdot \sup_{B \subset A} \sup_{y \in B_Y} \|\int_B Ty\, d\nu\| \\ =& 2 \cdot \sup_{y \in B_Y} \sup_{B \in \Sigma} \|\int_B Ty \cdot \chi_A\, d\nu\| \leq 2 \cdot \sup_{y \in B_Y} \|Ty \cdot \chi_A\|_\nu . \end{aligned}$$

Buscamos una caracterización de los operadores cuya medida asociada es numerablemente aditiva en la topología uniforme de operadores. Ver Preliminares para la definición de conjunto L–débilmente compacto.

Teorema 4.5. *Sea $T: Y \longrightarrow L^1(\nu)$ un operador y sea $\widetilde{T}: \Sigma \longrightarrow \mathcal{L}(Y, X)$ la medida asociada. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) El operador T es L–débilmente compacto.

b) La medida $\widetilde{T}$ es numerablemente aditiva en la topología uniforme de operadores.

c) La medida $\widetilde{T}$ es fuertemente aditiva en la topología uniforme de operadores.

DEMOSTRACIÓN. a) $\Rightarrow$ b) Sabemos que en $L^1(\nu)$, al ser un retículo de Banach orden continuo, los conjuntos L–débilmente compactos coinciden con los conjuntos equi–integrables. Luego $T(B_Y)$ es equi–integrable. Sea λ una medida de control de Rybakov de ν. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $A \in \Sigma$ y $\lambda(A) < \delta$ se tiene $\|Ty \cdot \chi_A\|_\nu < \varepsilon$ para todo $y \in B_Y$. Como $\|\widetilde{T}(A)y\| \leq \|Ty \cdot \chi_A\|_\nu$ se sigue que si $\lambda(A) < \delta$ entonces $\|\widetilde{T}(A)\| \leq \varepsilon$ y se deduce, por tanto, b) al ser λ numerablemente aditiva.

b) $\Leftrightarrow$ c) Es un hecho general, ya que la medida es numerablemente aditiva en la topología fuerte de operadores que es una topología de Hausdorff menos fina.

c) $\Rightarrow$ a) Supongamos que T no es L–débilmente compacto. Entonces existe una sucesión (g_n) en $L^1(\nu)$ de funciones positivas disjuntas dos a dos y tales que para cada n existe $y_n \in B_Y$ tal que $0 \leq g_n \leq |Ty_n|$, pero (g_n) no converge a cero en $L^1(\nu)$. Podemos suponer por tanto que $\|g_n\|_\nu \geq \varepsilon > 0$ para todo n y cierto $\varepsilon > 0$. Sea $A_n = \{\omega \in \Omega : g_n(\omega) > 0\}$. Son conjuntos medibles que podemos suponer disjuntos dos a dos. Entonces, usando la expresión equivalente dada para la semivariación de la medida $\widetilde{T}$

$$2 \cdot \|\widetilde{T}\|(A_n) \geq \|Ty_n \cdot \chi_{A_n}\|_\nu \geq \|g_n\|_\nu \geq \varepsilon,$$

para todo n. Luego $\widetilde{T}$ no es fuertemente aditiva (ver [D–U, Corollary I.1.18]). Q.E.D.

Para caracterizar los operadores cuya medida asociada tiene variación acotada hay que considerar una clase más restrictiva de operadores. Recordamos que un operador definido en un espacio de Banach y con valores en un retículo de Banach se dice *orden acotado* si transforma conjuntos acotados en norma en conjuntos acotados respecto del orden.

A partir de este momento se utilizará la condición de σ–finitud de la variación. A pesar de ser una restricción, recordamos que es equivalente a que $|\nu|$ sea localizable, 1.13.

Teorema 4.6. *Sea ν una medida con variación σ–finita. Sea $T: Y \longrightarrow L^1(\nu)$ un operador y $\widetilde{T}: \Sigma \longrightarrow \mathcal{L}(Y, X)$ la medida asociada. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *La medida $\widetilde{T}$ tiene variación acotada.*

b) *El operador T se puede factorizar de la forma siguiente: $T = i \circ S$ donde $i: L^1(|\nu|) \longrightarrow L^1(\nu)$ es la inclusión natural y $S: Y \longrightarrow L^1(|\nu|)$ es un operador orden acotado.*

En estas condiciones, además, el operador T es integral.

DEMOSTRACIÓN. a) $\Rightarrow$ b) La medida $\widetilde{T}$ tiene variación acotada luego es fuertemente aditiva. Del teorema anterior se sigue que es numerablemente aditiva en la topología uniforme de operadores Sea $y \in Y$, consideremos la medida de densidad Ty respecto de ν. Sea (A_i) una partición de un conjunto $A \in \Sigma$. Entonces

$$\sum_i \| \int_{A_i} Ty \, d\nu \| = \sum_i \|\widetilde{T}(A_i)y\| \leq \sum_i \|\widetilde{T}(A_i)\| \cdot \|y\| \leq |\widetilde{T}|(A) \cdot \|y\|. \quad (1)$$

Se deduce que la medida con densidad Ty respecto de ν tiene variación acotada y por tanto del Teorema 1.12 se deduce que Ty está en $L^1(|\nu|)$. Luego $T(Y)$ está en $L^1(|\nu|)$. De la desigualdad (1) y del Teorema 1.12 se deduce también que, para todo $A \in \Sigma$, se tiene

$$\int_A |Ty|\, d|\nu| \leq |\widetilde{T}|(A) \cdot \|y\|. \tag{2}$$

Consideremos $A = \Omega$. Entonces de (2) se sigue que

$$\|Ty\|_{L^1(|\nu|)} \leq |\widetilde{T}|(\Omega) \cdot \|y\|,$$

Luego el operador T factoriza a través de $L^1(|\nu|)$.

La medida $\widetilde{T}$ tiene variación acotada luego es fuertemente aditiva y por tanto es numerablemente aditiva. Al ser absolutamente continua respecto de $|\nu|$, que es σ–finita, se sigue del Teorema de Radon–Nikodym que existe una función $g \in L^1(|\nu|)$ tal que

$$|\widetilde{T}|(A) = \int_A g\, d|\nu| \qquad \text{para todo } A \in \Sigma. \tag{3}$$

Sea $y \in B_Y$, se deduce de la desigualdad (2) y de la igualdad (3) que

$$\int_A |Ty|\, d|\nu| \leq |\widetilde{T}|(A) = \int_A g\, d|\nu| \qquad \text{para todo } A \in \Sigma.$$

Luego $|Ty| \leq g$ en casi todo respecto de $|\nu|$ y para todo $y \in B_Y$.

Por lo tanto, el operador $S\colon Y \longrightarrow L^1(|\nu|)$ definido por $Sy = Ty$ está bien definido, es lineal, continuo y orden acotado.

b) $\Rightarrow$ a) Como $S(B_Y)$ es orden acotado en $L^1(|\nu|)$, existe una función $g \in L^1(|\nu|)$ tal que $|Sy| \leq g$ para todo $y \in B_Y$. Luego, para $y \in B_Y$ y $A \in \Sigma$ se tiene

$$\|\widetilde{T}(A)y\| = \|\int_A Ty\, d\nu\| \leq \int_A |Ty|\, d|\nu| = \int_A |Sy|\, d|\nu| \leq \int_A g\, d|\nu|.$$

Tomando supremo en $y \in B_Y$ se sigue que $\|\widetilde{T}(A)\| \leq \int_A g\, d|\nu|$. Luego la medida $\widetilde{T}$ tiene variación acotada.

Un teorema de Grothendieck caracteriza los operadores integrales $T: Y \longrightarrow L^1(\mu)$, para μ una medida positiva, como aquéllos que son orden acotados (ver [D–U, p. 258]). Por lo tanto la condición b) implica que S es integral y, al formar los operadores integrales un ideal de operadores, se sigue que T es integral. Q.E.D.

¿Bajo qué condiciones todo operador integral tendrá medida asociada con variación acotada? La Proposición siguiente muestra que el hecho de que todo operador de rango unidimensional (luego integral) factorice a través de $L^1(|\nu|)$ caracteriza a los AL–espacios (ver Proposición 3.1).

Proposición 4.7. *Sea ν una medida con variación σ–finita. Supongamos que existe un espacio de Banach $Y \neq \{0\}$ tal que todo operador de rango unidimensional $T: Y \longrightarrow L^1(\nu)$ factoriza a través de $L^1(|\nu|)$. Entonces $L^1(\nu)$ es orden isomorfo a $L^1(|\nu|)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in L^1(\nu)$ e $y^* \in Y^*$, no nulo. Consideremos el operador $T: Y \longrightarrow L^1(\nu)$, de rango unidimensional, definido por $Ty = y^*(y) \cdot f$. Entonces por hipótesis T factoriza a través de $L^1(|\nu|)$. Luego $f \in L^1(|\nu|)$. Se sigue que la inclusión natural de $L^1(|\nu|)$ en $L^1(\nu)$ es sobreyectiva y por tanto es un isomorfismo que conserva el orden. Q.E.D.

Consideramos ahora el problema de hallar condiciones que garanticen que la medida $\widetilde{T}: \Sigma \longrightarrow \mathcal{L}(Y, X)$, asociada a un operador $T: Y \longrightarrow L^1(\nu)$, tiene una derivada de Radon–Nikodym respecto de la medida $|\nu|$. Es decir, existe una función $F: \Omega \longrightarrow \mathcal{L}(Y, X)$ Bochner integrable respecto de $|\nu|$ tal que $\widetilde{T}(A) = \int_A F(\omega)\, d|\nu|(\omega)$ para todo $A \in \Sigma$.

Teorema 4.8. *Sea ν una medida con variación σ–finita. Sea $T: Y \longrightarrow L^1(\nu)$ un operador y $\widetilde{T}: \Sigma \longrightarrow \mathcal{L}(Y, X)$ la medida asociada. Consideremos las siguientes condiciones:*

a) La medida $\widetilde{T}$ tiene derivada Bochner integrable respecto de su variación.

b) El operador T se puede factorizar de la forma siguiente: $T = i \circ S$ donde $i: L^1(|\nu|) \longrightarrow L^1(\nu)$ es la inclusión natural y $S: Y \longrightarrow L^1(|\nu|)$ es un operador nuclear.

c) El operador T es nuclear.

Entonces a) implica b) y b) implica c).

DEMOSTRACIÓN. a) $\Rightarrow$ b) Sea $F: \Omega \longrightarrow \mathcal{L}(Y, X)$ una función integrable Bochner respecto de $|\nu|$ tal que $\widetilde{T}(A) = \int_A F(\omega)\, d|\nu|(\omega)$ para todo $A \in \Sigma$. La medida $\widetilde{T}$ tiene variación acotada y por lo tanto, por el Teorema 4.6, el operador T factoriza a través del espacio $L^1(|\nu|)$ de la forma $T = i \circ S$ donde $S: Y \longrightarrow L^1(|\nu|)$ es un operador orden acotado. Un teorema de Grothendieck caracteriza los operadores nucleares con valores en $L^1(\mu)$, para una medida positiva μ, como aquéllos que son orden acotados y para los cuales la imagen de la bola unidad es equimedible (ver [D–U, p. 258]). Un conjunto K en $L^1(\mu)$ es *equimedible* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto A con $\mu(A) < \varepsilon$ tal que $\{f \cdot \chi_{\Omega \setminus A} : f \in K\}$ es relativamente compacto en $L_\infty(\mu)$. Tenemos que probar esto último para $S(B_Y)$.

Sea $x^* \in B_{X^*}$ tal que la medida $\lambda = |x^*\nu|$ sea una medida de control para ν. Sea $y \in B_Y$ y $A \in \Sigma$. Por una parte

$$\langle x^*, \widetilde{T}(A)y\rangle = \left\langle x^*, \int_A F(\omega)y\, d|\nu|(\omega)\right\rangle = \int_A \langle x^*, F(\omega)y\rangle\, d|\nu|(\omega),$$

y por otra

$$\langle x^*, \widetilde{T}(A)y\rangle = \left\langle x^*, \int_A Sy\, d\nu\right\rangle = \int_A Sy(\omega)\, dx^*\nu(\omega).$$

Se sigue que

$$\int_A Sy(\omega)\, dx^*\nu(\omega) = \int_A \langle x^*, F(\omega)y\rangle\, d|\nu|(\omega)$$

Como la medida $|\nu|$ es σ–finita y absolutamente continua respecto de λ existe una función h localmente integrable respecto de λ tal que $|\nu|(A) = \int_A h\, d\lambda$ (ambos miembros infinitos en caso de serlo uno de ellos). Entonces se tiene

$$\int_A Sy(\omega)\, dx^*\nu(\omega) = \int_A \langle x^*, F(\omega)y\rangle h(\omega)\, d\lambda(\omega). \tag{4}$$

Considerando la descomposición de Hahn de la medida $x^*\nu$, podemos hallar una función g medible y con $|g| = 1$ tal que la ecuación (4) se puede expresar

$$\int_A Sy(\omega)\, d\lambda(\omega) = \int_A \langle x^*, F(\omega)y\rangle h(\omega) g(\omega)\, d\lambda(\omega).$$

Sea la función $F' = h \cdot g \cdot F$. Se tiene entonces que $F' \in L^1(\lambda, \mathcal{L}(Y, X))$ y

$$\int_A Sy(\omega)\, d\lambda(\omega) = \int_A \langle x^*, F'(\omega)y\rangle\, d\lambda(\omega).$$

Como lo anterior se cumple para todo $A \in \Sigma$ se deduce que $Sy(\omega) = \langle x^*, F'(\omega)y\rangle$ en casi todo respecto de λ, para cada $y \in B_Y$.

Supongamos que F' es una función simple, es decir $F'(\omega) = \sum_1^n T_i \cdot \chi_{A_i}(\omega)$, para $T_i \in \mathcal{L}(Y, X)$. Entonces $Sy(\omega) = \sum_1^n \langle x^*, T_i y\rangle \cdot \chi_{A_i}(\omega)$ para cada $y \in B_Y$. Por lo tanto el conjunto $\{Sy : y \in B_Y\}$ está incluido dentro del conjunto de combinaciones lineales de las funciones $\{\chi_{A_i} : 1 \leq i \leq n\}$ con coeficientes acotados $|\langle x^*, T_i y\rangle| \leq \|T_i\|$ (pues $\|y\| \leq 1$ y $\|x^*\| \leq 1$). Luego $S(B_Y)$ es un compacto en $L_\infty(\lambda)$.

En el caso general, sea G_n una sucesión de funciones simples que converge en casi todo respecto de λ a F'. Por el Teorema de Egoroff dado $\varepsilon > 0$ podemos hallar $A \in \Sigma$ con $\lambda(A) < \varepsilon$ tal que en $\Omega \setminus A$ la convergencia es uniforme. Por lo tanto dado $\delta > 0$ podemos hallar n tal que $\|F'(\omega) - G_n(\omega)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} < \delta$ para todo $\omega \in \Omega \setminus A$. Como $\|x^*\| \leq 1$, para cada $y \in B_Y$ se tiene

$$|\langle x^*, F'(\omega)y\rangle - \langle x^*, G_n(\omega)y\rangle| < \delta \qquad \text{para todo } \omega \in \Omega \setminus A.$$

Ahora bien, se ha visto que $Sy(\omega) = \langle x^*, F'(\omega)y\rangle$ en casi todo respecto de λ, para cada $y \in B_Y$. Se deduce entonces que

$$|Sy(\omega) - \langle x^*, G_n(\omega)y\rangle| < \delta \qquad \text{para casi todo } \omega \in \Omega \setminus A.$$

Luego $\|Sy \cdot \chi_{\Omega\setminus A} - \langle x^*, G_n y\rangle \cdot \chi_{\Omega\setminus A}\|_\infty < \delta$ para cada $y \in B_Y$.

Sea $S_n y = \langle x^*, G_n y\rangle \cdot \chi_{\Omega\setminus A}$ para cada $y \in Y$. Como G_n es una función simple, según se ha visto para F' simple, el conjunto $S_n(B_Y) = \{\langle x^*, G_n y\rangle \cdot \chi_{\Omega\setminus A} : y \in B_Y\}$ es compacto en $L_\infty(\lambda)$. Luego para todo $\delta > 0$ existe un compacto que dista menos de δ del conjunto $\{Sy \cdot \chi_{\Omega\setminus A} : y \in B_Y\}$. Se sigue que este último es relativamente compacto en $L_\infty(\lambda)$.

Este procedimiento se puede realizar para todo $\varepsilon > 0$, luego $S(B_Y)$ es equimedible en $L^1(\lambda)$. Como las medidas λ y $|\nu|$ tienen los mismos conjuntos de medida nula, se sigue que $S(B_Y)$ es equimedible en $L^1(|\nu|)$ y por tanto el operador S es nuclear.

b) $\Rightarrow$ c) Se sigue al formar los operadores nucleares un ideal de operadores. Q.E.D.

La Proposición 4.7 muestra que una condición menos restrictiva que el que se cumpla c) $\Rightarrow$ b) en el Teorema anterior para todo operador con valores en $L^1(\nu)$, implica que el espacio $L^1(\nu)$ es un AL–espacio.

La posibilidad de que se cumpla la implicación recíproca restante en el Teorema 4.8 está asociada a la existencia de una derivada fuertemente medible (limite puntual en casi todo respecto de $|\nu|$ de una sucesión de funciones simples) y Pettis integrable de la medida ν respecto de su variación, como muestra el teorema siguiente.

Teorema 4.9. *Sea ν una medida con variación σ–finita. Se cumple:*

1. *Si la medida ν tiene una densidad fuertemente medible y Pettis integrable respecto de su variación, entonces todo operador $T: Y \longrightarrow L^1(\nu)$ que cumpla la condición b) del Teorema 4.8, cumple la condición a).*

2. *Si existe un espacio de Banach $Y \neq \{0\}$ tal que todo operador $T: Y \longrightarrow L^1(\nu)$ que cumpla la condición b) del Teorema 4.8 cumple también la condición a), entonces la medida ν tiene una densidad fuertemente medible y Pettis integrable respecto de su variación.*

DEMOSTRACIÓN. 1. Sea $G: \Omega \longrightarrow X$ una función fuertemente medible y Pettis integrable respecto de $|\nu|$ tal que $\nu(A) = \int_A G(\omega)\, d|\nu|$ para todo $A \in \Sigma$. Claramente $\|G(\omega)\| = 1$ en casi todo respecto de $|\nu|$. Para $f \in L^1(\nu)$ y $A \in \Sigma$, se tiene

$$\int_A f(\omega)\, d\nu(\omega) = \int_A f(\omega) G(\omega)\, d|\nu|(\omega).$$

Sea $T: Y \longrightarrow L^1(\nu)$ un operador que se puede factorizar de la forma $T = i \circ S$ donde $S: Y \longrightarrow L^1(|\nu|)$ es nuclear. El operador S se puede expresar de la forma $S = \sum y_n^* \otimes f_n$ donde $y_n^* \in Y^*$, $f_n \in L^1(|\nu|)$ y $\sum \|y_n^*\| \cdot \|f_n\|_1$ es finita. Sea $y \in Y$. Como la serie $\sum y_n^*(y) f_n$ converge en $L^1(\nu)$, se tiene

$$\widetilde{T}(A)y = \int_A Sy\, d\nu = \int_A (\sum y_n^*(y) f_n)\, d\nu = \sum y_n^*(y) \int_A f_n\, d\nu.$$

Luego se deduce que $\widetilde{T}(A) = \sum y_n^* \otimes \int_A f_n\, d\nu$, para todo $A \in \Sigma$, siendo la convergencia de la serie absoluta puesto que

$$\sum \|y_n^* \otimes \int_A f_n\, d\nu\| \leq \sum \|y_n^*\| \cdot \|f_n\|_\nu \leq \sum \|y_n^*\| \cdot \|f_n\|_1.$$

Consideremos la siguiente función

$$\omega \in \Omega \longmapsto F_n = y_n^* \otimes f_n(\omega) \cdot G(\omega) \in \mathcal{L}(Y, X)\,.$$

Como f_n es medible y G es fuertemente medible se sigue que F_n es fuertemente medible. Es integrable respecto de $|\nu|$ pues

$$\begin{aligned}
\int \|F_n(\omega)\|\, d|\nu|(\omega) &= \int \|y_n^* \otimes f_n(\omega) \cdot G(\omega)\|\, d|\nu|(\omega) \\
&= \int \|y_n^*\| \cdot |f_n(\omega)| \cdot \|G(\omega)\|\, d|\nu|(\omega) \\
&= \|y_n^*\| \int |f_n|\, d|\nu| \\
&= \|y_n^*\| \cdot \|f_n\|_1.
\end{aligned}$$

Definamos la función $\omega \in \Omega \longmapsto F(\omega) = \sum F_n(\omega) \in \mathcal{L}(Y, X)$. Está bien definida y es fuertemente medible. Además es integrable respecto de $|\nu|$ puesto que

$$\int \|F(\omega)\|\, d|\nu|(\omega) \leq \sum \int \|F_n(\omega)\|\, |\nu|(\omega) = \sum \|y_n^*\| \cdot \|f_n\|_1 < +\infty.$$

Sea $A \in \Sigma$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_A F(\omega)\, d|\nu|(\omega) &= \sum \int_A y_n^* \otimes f_n(\omega) \cdot G(\omega)\, d|\nu|(\omega) \\
&= \sum y_n^* \otimes \int_A f_n(\omega) \cdot G(\omega)\, d|\nu|(\omega) \\
&= \sum y_n^* \otimes \int_A f_n\, d\nu \\
&= \widetilde{T}(A).
\end{aligned}$$

Luego F es Bochner integrable y es la derivada de Radon–Nikodym de la medida $\widetilde{T}$ respecto de $|\nu|$.

2. Como $|\nu|$ es σ–finita, existe una partición (B_n) de Ω tal que $|\nu|(B_n) < +\infty$ para todo n. Consideremos $y_0 \in Y$ de norma uno y un funcional $y^* \in B_{Y^*}$ tal

que $y^*(y_0) = 1$. Sea el operador $y \in Y \longmapsto T_n(y) = y^*(y)\chi_{B_n} \in L^1(\nu)$, es decir $T_n = y^* \otimes \chi_{B_n}$. Se puede factorizar a través de $L^1(|\nu|)$ puesto que

$$\int |T_n(y)|\, d|\nu| = |y^*(y)| \cdot |\nu|(B_n) \leq |\nu|(B_n) \cdot \|y\|.$$

Definamos $S_n y = T_n y \in L^1(|\nu|)$. Entonces $S_n\colon Y \longrightarrow L^1(|\nu|)$ es nuclear y se tiene la factorización $T_n = i \circ S_n$. Luego por hipótesis la medida asociada $\widetilde{T}_n$ tiene una densidad Bochner integrable respecto de $|\nu|$. Esto es, existe una función $F_n \in L^1(|\nu|, \mathcal{L}(Y, X))$ tal que

$$\widetilde{T}_n(A) = \int_A F_n(\omega)\, d|\nu|(\omega) \qquad \text{para todo} \qquad A \in \Sigma.$$

Fijemos $A \in \Sigma$. Entonces, por una parte se tiene la igualdad

$$\widetilde{T}_n(A)y_0 = \int_A F_n(\omega)y_0\, d|\nu|(\omega).$$

Por otra parte, de la definición de T_n se sigue que

$$\widetilde{T}_n(A)y_0 = \int_A T_n y_0\, d\nu = \int_A y^*(y_0) \cdot \chi_{B_n}\, d\nu = \nu(A \cap B_n).$$

Se deduce por tanto que la medida ν cumple

$$\nu(A \cap B_n) = \int_A F_n(\omega)y_0\, d|\nu|(\omega)$$

donde la función $F_n y_0$ está en $L^1(|\nu|, X)$ y es nula fuera de B_n.

Sea $x^* \in X^*$. Se tiene

$$|x^*\nu|(\Omega) = \sum |x^*\nu|(B_n) = \sum \int |\langle x^*, F_n(\omega)y_0\rangle|\, d|\nu|(\omega).$$

Luego la serie $\sum \langle x^*, F_n y_0\rangle$ converge absolutamente en $L^1(|\nu|)$ y por tanto la función $\sum \langle x^*, F_n y_0\rangle$ está en $L^1(|\nu|)$. Ésto ocurre para cada $x^* \in X^*$, por lo tanto la función fuertemente medible $\sum F_n y_0$ es escalarmente integrable.

Sea $A \in \Sigma$ y $x^* \in X^*$, entonces

$$\begin{aligned}\left\langle x^*, \int_A (\textstyle\sum F_n(\omega)y_0)\, d|\nu|(\omega)\right\rangle &= \int_A \langle x^*, \textstyle\sum F_n(\omega)y_0\rangle\, d|\nu|(\omega) \\ &= \int_A \left(\textstyle\sum \langle x^*, F_n(\omega)y_0\rangle\right)\, d|\nu|(\omega) \\ &= \sum \int_A \langle x^*, F_n(\omega)y_0\rangle\, d|\nu|(\omega) \\ &= \sum \left\langle x^*, \int_A F_n(\omega)y_0\, d|\nu|(\omega)\right\rangle \\ &= \sum x^*\nu(A \cap B_n) \\ &= x^*\nu(A),\end{aligned}$$

Luego se sigue que $\int_A (\sum F_n(\omega)y_0)\, d|\nu|(\omega) = \nu(A) \in X$. Se deduce que la función $\sum F_n y_0$ es Pettis integrable. Por lo tanto ν tiene una densidad que es fuertemente medible y Pettis integrable respecto de su variación. Q.E.D.

Veamos algunas aplicaciones de los resultados anteriores. El problema de relacionar la existencia de un subespacio isomorfo a ℓ_∞ en el espacio $\mathcal{L}(Y, X)$ con la coincidencia de $\mathcal{L}(Y, X)$ con algún ideal de operadores de $\mathcal{L}(Y, X)$ ha sido considerado por diversos autores (véase por ejemplo [K], [To]).

Teorema 4.10. *Sea E un retículo de Banach orden continuo y con unidad débil y sea Y un espacio de Banach. Si $\mathcal{L}(Y, X)$ no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ_∞, entonces todo operador de Y en E es L–débilmente compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Como E es un retículo de Banach orden continuo con unidad débil, por el Teorema 1.15 sabemos que existe una medida vectorial ν con valores en E tal que $E \equiv L^1(\nu)$. Sea $T: Y \longrightarrow E \equiv L^1(\nu)$ un operador lineal y continuo. La medida asociada $\widetilde{T}$ es acotada y toma valores en $\mathcal{L}(Y, E)$. Como este espacio no contiene un subespacio isomorfo a ℓ_∞, se deduce de un Teorema de Diestel y Faires [D–U, Theorem I.4.2] que la medida $\widetilde{T}$ es fuertemente aditiva, y por tanto del Teorema 4.5 se sigue que el operador T es L–débilmente compacto. Q.E.D.

El recíproco del resultado anterior no es cierto como muestra el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.11. Sea $E = L^1[0,1]$ e $Y = \ell^2$. Todo operador de ℓ^2 en $L^1[0,1]$ es débilmente compacto. En $L^1[0,1]$ los conjuntos relativamente débilmente compactos y los L–débil compactos coinciden, gracias al Teorema de Dunford–Pettis. Luego todo operador de ℓ^2 en $L^1[0,1]$ es L–débilmente compacto. Por otra parte el espacio $L^1[0,1]$ contiene un subespacio isomorfo a ℓ^2, luego el espacio $\mathcal{L}(\ell^2, L^1[0,1])$ contiene un subespacio isomorfo al espacio $\mathcal{L}(\ell^2, \ell^2)$ y éste contiene a su vez un subespacio isomorfo a ℓ_∞.

En [K, Theorem 6] se prueba, entre otros resultados, que la equivalencia entre las condiciones "todo operador de E en F es compacto"y "$\mathcal{L}(E,F)$ no contiene una copia de ℓ_∞"se da cuando F es un espacio de Banach arbitrario y E es un espacio de Banach con una descomposición incondicional y finitodimensional de la identidad. Nosotros probamos un resultado similar sin restricciones en el espacio de partida y cuando el espacio de llegada es un retículo de Banach orden continuo y atómico, ver Preliminares.

Teorema 4.12. *Sea F un retículo de Banach orden continuo atómico y sea Y un espacio de Banach. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

a) *Todo operador de Y en F es compacto.*

b) *$\mathcal{L}(Y,F)$ no contiene un subespacio isomorfo a ℓ_∞.*

DEMOSTRACIÓN. a) $\Rightarrow$ b) Es un hecho general, independiente de los espacios

Y y F, que está probado, aunque no explícitamente formulado, en [K, Theorem 6].

b) $\Rightarrow$ a) Consideremos en primer lugar el caso de que el retículo de Banach F tenga unidad débil. En este caso por el Teorema 4.10 todo operador $T: Y \longrightarrow F$ es L–débilmente compacto. Sabemos que en los retículos de Banach atómicos los conjuntos L–débilmente compactos y los relativamente compactos coinciden, ver Preliminares. Se deduce que los operadores L–débilmente compactos coinciden con los operadores compactos. Luego todo operador es compacto.

En el caso general, supongamos que existe un operador $T: Y \longrightarrow F$ que no es compacto. Existe entonces una sucesión (x_n) en $T(B_Y)$ y existe un $\varepsilon > 0$ tales que $\|x_n - x_m\| > \varepsilon$ para $n \neq m$.

Sea (z_α) la familia de átomos de F y denotemos por P_{z_α} la proyección asociada a z_α (ver [L–T II, p. 8]). Como F es orden continuo, cada elemento x de F es disjunto de los átomos de F salvo a lo más de una cantidad numerable. Ésto se sigue del hecho de que para cada $\varepsilon > 0$ existe a lo más una cantidad finita de átomos z_α tales que $\|P_{z_\alpha}(x)\| \geq \varepsilon$. Supongamos que no. Existe entonces $\varepsilon > 0$ y una sucesión infinita de átomos (z_i) tales que $\|P_{z_i}(x)\| \geq \varepsilon$. Sea la sucesión $h_k = P_{\sup\{z_1,\ldots,z_k\}}(x)$. Es creciente, acotada respecto del orden por $|x|$ pero no es convergente puesto que $\|h_k - h_{k-1}\| = \|P_{z_k}(x)\| \geq \varepsilon$. Ésto contradice la orden continuidad de F.

Luego existe una familia numerable de átomos tal que todo x_n es disjunto de los átomos fuera de dicha familia. Sea Z el espacio generado en F por esta familia de átomos. Al ser Z una banda en el retículo de Banach F, está complementado a través de una proyección de norma uno $P: F \longrightarrow Z$, cumpliéndose $\|P(x_n) - P(x_m)\| = \|x_n - x_m\| \geq \varepsilon$ para todo $n \neq m$. Entonces el operador $P \circ T$ es un operador no compacto de Y en Z.

Como $\mathcal{L}(Y, Z)$ está isométricamente sumergido en $\mathcal{L}(Y, F)$, por hipótesis se deduce que $\mathcal{L}(Y, Z)$ no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ_∞. Ahora bien, Z es un retículo de Banach orden continuo, atómico y con unidad débil (al ser separable). Se sigue, como se ha visto anteriormente, que todo operador de Y en Z es compacto. Esta contradicción prueba el resultado. Q.E.D.

Referencias.

[A–W] Abramovich, Y. A. y Wojtaszczyk, P., *The uniqueness of order in the spaces $L_p[0,1]$ and ℓ_p.*, Math. Notes. (1975), 775–781.

[A–B] Aliprantis, C. y Burkinshaw, O., "Positive operators," Academic Press, New York, 1985.

[A–S] Arendt, W. y Schwarz, H. U., *Ideale regulärer Operatoren und Kompaktheit positiver Operatoren zwischen Banachverbänden*, Math. Nachr. (1987), 7–18.

[B] Bartle, R. G., *A general bilinear vector integral*, Studia Math. **15** (1956), 337–352.

[B–D–S] Bartle, R. G., Dunford, N. y Schwartz, J., *Weak compactness and vector measures*, Canad. J. Math. **7** (1955), 289–305.

[B–P] Bessaga, C. y Pelczynski, A., *On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces*, Studia Math. **17** (1958), 151–164.

[Br] Brooks, J. K., *On the existence of a control measure for strongly bounded vector measures*, Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), 999–1001.

[B–D] Brooks, J. K. y Dinculeanu, N., *Lebesgue-type spaces for vector integration, linear operators, weak completeness and weak compactness*, J. Math. Anal. Appl. **54** (1976), 348–389.

[B–V–L] Bukhvalov, A. V., Veksler, A. I. y Lozanovskii, G. Ya., *Banach lattices–some Banach space aspects of their theory*, Russian Math. Surveys **34** (1979), 159–212.

[D–K 1] Dacunha–Castelle, D. y Krivine, J. L., *Applications des ultraproduits á l'étude des espaces et des algébres de Banach*, Studia Math. **41** (1972), 315–334.

[D–K 2] Dacunha–Castelle, D. y Krivine, J. L., *Sous–espaces de* L^1, Israel J. Math. **26** (1977), 320–351.

[D] Debiéve, C., *Intégration de fonctions acalaires par rapport á une mesure vectorielle*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. **24** (1979), 531–544.

[D–F] Diestel, J. y B. Faires, B., *On vector measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **198** (1974), 253–271.

[D–U] Diestel, J. y Uhl Jr., J.J., "Vector Measures," Amer. Math. Soc. Surveys 15, Providence, R. I., 1977.

[Do 1] Dobrakov, I., *On integration in Banach spaces I*, Czech. Math. J. **20** (1970), 511–536.

[Do 2] Dobrakov, I., *On integration in Banach spaces II*, Czech. Math. J. **20** (1970), 681–695.

[Dr] Drewnowski, L., *Almost basically scattered vector measures*, Math. Nachr. **120** (1985), 313–326.

[D–S] Dunford, N. y Schwartz, J., "Linear operators I," Interscience, New York, N. Y., 1958.

[E] Egghe, L., *The dual of $L^1(\mu)$ with μ a vector measure*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **29** (1984), 467–471.

[G–S] Ghoussoub, N. y Saab, E., *On the range of a basically scattered vector measure*, Indiana Univ. Math. J. **31** (1982), 247–253.

[G–R] Graves, W. H. y Ruess, W., *Compactness and weak compactness in spaces of compact–range vector measures*, Can. J. Math. **36** (1984), 1000–1020.

[H] Heinrich, S., *Ultraproducts in Banach space theory*, J. Reine Angew. Math. **313** (1980), 72–104.

[K–P] Kadec, M. I. y Pelczynski, A., *Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in L_p*, Studia Math. **21** (1962), 161–176.

[K] Kalton, N., *Spaces of compact operators*, Math. Ann. **208** (1974), 267–278.

[K–T–U] Kalton, N. J., Turret, B. y Uhl Jr., J. J., *Basically scattered vector measures*, Indiana Univ. Math J. **28** (1979), 803–815.

[K–K] Kluvánek, I. y Knowles, G., "Vector measures and control systems," North–Holland, Amsterdam, 1975.

[L 1] Lewis, D. R., *Integration with respect to vector measures*, Pac. J. Math. **33** (1970), 157–165.

[L 2] Lewis, D. R., *On integration and summability in vector spaces*, Illinois J. Math. **16** (1972), 294–307.

[L 3] Lewis, D. R., *Conditional weak compactness in certain inductive tensor products*, Math. Ann. **201** (1973), 201–209.

[L–P] Lindenstrauss, J. y Pelczynski, A., *Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$–spaces and their applications*, Studia Math. **29** (1968), 275–326.

[L–T] Lindenstrauss, J. y Tzafriri, L., "Classical Banach Spaces," Springer-Verlag, Berlin, New–York, 1979.

[M–N 1] Masani, P. R. y Niemi, H., *The integration theory of Banach space valued measures and the Tonelli–Fubini theorems. I. Scalar–valued measures on δ–rings*, Adv. Math. **73** (1989), 204–241.

[M–N 2] Masani, P. R. y Niemi, H., *The integration theory of Banach space valued measures and the Tonelli–Fubini theorems. II. Pettis integration*, Adv. Math. **75** (1989), 121–167.

[M 1] Meyer-Nieberg, P., *Zur schwachen Kompaktheit in Banachverbänden*, Math. Z. **134** (1973), 303–315.

[M 2] Meyer-Nieberg, P., *Über Klassen schwach kompakter Operatoren in Banachverbänden*, Math. Z. **138** (1974), 145–159.

[M 3] Meyer-Nieberg, P., "Banach lattices," Springer-Verlag, Berlin, New–York, 1991.

[O] Okada, S., *The dual space of $\mathcal{L}^1(\mu)$ for a vector measure μ*, por aparecer en J. Math. Anal. and Appl..

[P] Pisier, G., "Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces," Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1986.

[Sa] Sánchez Henríquez, J. A., "Operadores en retículos de Banach," Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid, 1985.

[S] Schaefer, H. H., "Banach lattices and positive operators," Springer Verlag, Berlin, New–York, 1974.

[T] Thomas, E. G. H., *L'intégration par rapport á une mesure de Radon vectorielle*, Ann. Inst. Fourier **20** (1970), 55–191.

[To] Tong, A. E., *On the existence of non–compact bounded linear operators between certain Banach spaces*, Israel J. Math. **10** (1971), 451–456.

[Tz] Tzafriri, L., *Reflexivity in Banach lattices and their subspaces*, J. Funct. Anal. **10** (1972), 1–18.

[W] Weis, L., *Banach lattices with the subsequence splitting property*, Proc. Amer. Math. Soc. **105** (1989), 87–96.

[Z] Zaanen, A. C., "Riesz spaces II," North–Holland, Amsterdam, 1983.

Guillermo Curbera Costello

El espacio de funciones integrables respecto de una medida vectorial

apto cum laude

8 septiembre 92