Desigualdades de Morse generalizadas sobre grafos [1]

R. Ayala, L.M. Fernández y J.A. Vilches[2]

Resumen

En este trabajo presentamos una generalización para grafos localmente finitos de las desigualdades de Morse para funciones de Morse discretas, que ya fueron deducidas por R. Forman para el caso finito.

1 Introducción

En [1], R. Forman define el concepto de función de Morse discreta f definida sobre un *cw*-complejo finito M y a partir de éste, surge la noción de célula crítica de f en M. En ese mismo trabajo, establece unas desigualdades e igualdades análogas a las que se verifican para las funciones de Morse en el caso diferenciable [3], que relacionan el número de p-células críticas de una función de Morse f definida sobre una variedad diferenciable M y el p-ésimo número de Betti de M.

Definición 1.1. *Una función de Morse discreta definida sobre un complejo simplicial M es una función $f : M \longrightarrow \mathbf{R}$ tal que para todo p-símplice σ de M verifica que:*

(m1) $card\{\tau^{(p+1)} > \sigma / f(\tau) \leq f(\sigma)\} \leq 1$

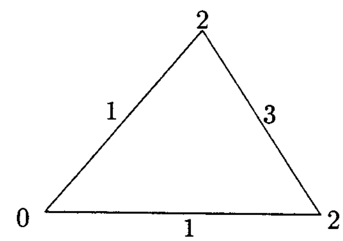
(m2) $card\{v^{(p-1)} < \sigma / f(v) \geq f(\sigma)\} \leq 1$

Se dirá que un p-símplice $\sigma \in M$ es un símplice crítico de f en M si se verifican las siguientes condiciones:

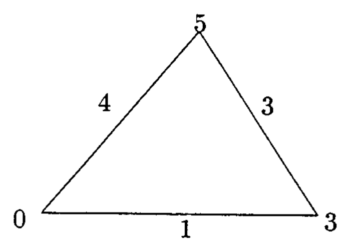
(c1) $card\{\tau^{(p+1)} > \sigma / f(\tau) \leq f(\sigma)\} = 0$

(c2) $card\{v^{(p-1)} < \sigma / f(v) \geq f(\sigma)\} = 0$

Ejemplos. Los siguientes ejemplos ilustran la definición anterior:



(i)



(ii)

El primero muestra una función de Morse discreta f definida sobre un ciclo, que tiene dos símplices críticos: $f^{-1}(0)$ es un vértice crítico y $f^{-1}(3)$ es un arista crítica. El segundo ejemplo muestra una función discreta definida sobre el mismo grafo que no es de Morse por doble motivo: Por un lado, en los vértices $f^{-1}(5)$ y $f^{-1}(3)$ se verifica que f es mayor ó igual en ellos que en las dos aristas incidentes en cada uno y por tanto, se contradice la condición (m1). Por otro lado, la arista $f^{-1}(3)$ verifica que f es menor o igual sobre ella que sobre sus dos vértices extremos, lo que va en contradicción con la condición (m2).

Esta definición de función de Morse discreta presentada por Forman está motivada por un resultado conocido para el caso diferenciable ([2], [3]) y que afirma que dado un punto crítico x de índice 1 de una función de Morse f definida sobre una variedad diferenciable de dimensión n, se tiene que existe un sistema de coordenadas $(t_1, \dots, t_n)$ centrado en x tal que:

[1] Trabajo parcialmente subvencionado por la Junta de Andalucía.

[2] Dpto. de Geometría y Topología. Universidad de Sevilla. E-mail: {lmfer,vilches}@us.es

$$f(t_1,\ldots,t_n) = f(x) - t_1^2 + \sum_{i=2}^{n} t_i^2$$

Es decir, partiendo de x, f decrece a ambos lados en la dirección t_1 y crece para todas las demás direcciones coordenadas.

En [1], Forman establece unas desigualdades e igualdades análogas a las que se verifican para las funciones de Morse en el caso diferenciable [3], en las que se relacionan el cardinal del conjunto de puntos críticos de dimensión p de una función de Morse f definida sobre una variedad diferenciable M y el p-ésimo número de Betti de dicha variedad. Esencialmente, estas desigualdades relacionan la cantidad de puntos críticas de una función de Morse con la topología de la variedad sobre la que dicha función está definida. En concreto, Forman demuestra el siguiente Teorema:

Teorema 1.1. [1] *Sea f una función de Morse discreta definida sobre un complejo M y sea b_p con $0 \leq p \leq n$ el p-ésimo número de Betti de M con coeficientes en el cuerpo F, es decir, $b_p = dim H_p(M,F)$. Se verifican las siguientes relaciones:*

$$m_p - m_{p-1} + \cdots \pm m_0 \geq b_p - b_{p-1} + \cdots \pm b_0, \quad (1.1)$$

$$m_p \geq b_p, \quad (1.2)$$

$$m_0 - m_1 + m_2 - \cdots \pm m_{dim(M)} =$$
$$= b_0 - b_1 + b_2 - \cdots \pm b_{dim(M)}, \quad (1.3)$$

con $p = 0,\ldots,dim(M)$ y donde m_p denota el número de p-símplices críticos de f en M, llamado número de Morse de f de índice p.

Estas relaciones son la versión discreta de las relaciones análogas ya conocidas en el caso diferenciable. La ventaja de este nuevo enfoque es que se llega a los mismos resultados en un marco más sencillo y, sobre todo, que muchas de las dificultades técnicas de las demostraciones en el caso diferenciable se reducen o simplemente no existen bajo el punto de vista combinatorio. En este trabajo nos centraremos en generalizar este último resultado para un tipo especial de complejos: los complejos simpliciales infinitos de dimensión 1 y localmente finitos, es decir, los grafos infinitos localmente finitos.

Para un uso posterior, recordemos aquí los siguientes resultados referentes a las restricciones de funciones de Morse discretas a subcomplejos:

Proposición 1.1. *Sean M y N dos complejos simpliciales tales que $N \subseteq M$ y sea $f : M \longrightarrow R$ una función de Morse discreta definida sobre M. Se tiene que la restricción de f a N es una función de Morse discreta sobre N.*

Proposición 1.2. *Sean $N \subseteq M$ dos complejos (finitos ó infinitos) y sea $f : M \longrightarrow \mathbf{R}$ una función de Morse discreta definida sobre M. Se tiene que si σ^p es un p-símplice crítico de f en M tal que $\sigma \subseteq N$, entonces σ es p-símplice crítico de f en N.*

Evidentemente no se verifica el recíproco de la proposición anterior, es decir, bajo las hipótesis de la proposición anterior, dado un símplice crítico de f en N, éste no tiene que ser un símplice crítico de M. Por ello, el número de puntos críticos de un subcomplejo $N \subseteq M$ de un complejo M es mayor o igual que el número de puntos críticos del complejo M. En particular, para el caso de grafos se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.3. *Sea G un grafo y $S \subseteq G$ un subgrafo. Sea $f : M \longrightarrow R$ una función de Morse discreta. Se verifican las siguientes relaciones entre los números de símplices críticos de f en G y los de f en S:*

$$m_1 = \widehat{m}_1 \quad y \quad m_0 \leq \widehat{m}_0$$

donde m_i denota el número de i-símplices críticos de f en G y análogamente $\widehat{m}_i$ denota el número de i-símplices críticos de S.

2 Funciones de Morse discretas sobre grafos infinitos localmente finitos

Se pueden caracterizar los puntos críticos de una función de Morse f definida sobre un grafo G como extremos locales de f.

Proposición 2.1. *Sea G un grafo infinito y sea $f : G \longrightarrow \mathbf{R}$ una función de Morse discreta. Se verifica que todo vértice crítico de f en G es un mínimo de f y toda arista crítica de G es un máximo de f.*

Para demostrar esta proposición, basta con considerar la definición de símplice crítico de una función de Morse discreta en un grafo para los casos particulares de vértice y arista.

Veamos el recíproco del resultado anterior, aunque bajo hipótesis más restrictivas.

Proposición 2.2. *Sea G un grafo infinito tal que $\partial G = \emptyset$ y sea $f : G \longrightarrow \mathbf{R}$ una función de Morse discreta. Se verifica que todo mínimo de f se alcanza sobre un vértice crítico de f en G y todo máximo de f se alcanza sobre una arista crítica de f en G.*

En esencia, para poder probar el recíproco, excluimos la posibilidad de que existan vértices de valencia 1, ya que sobre éstos una función de Morse discreta puede alcanzar un máximo.

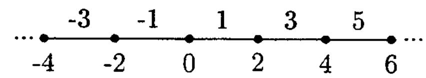
Como resumen de ambos resultados se tiene el siguiente corolario:

Corolario 2.1. *Sea G un grafo infinito tal que $\partial G = \emptyset$ y sea $f : G \longrightarrow \mathbf{R}$ una función de Morse discreta. Se verifica que todo extremo de f se alcanza sobre un símplice crítico de f en G y recíprocamente, todo símplice crítico de f en G es un extremo de f.*

3 Generalización de las desigualdades de Morse discretas.

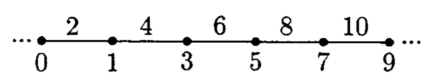
En primer lugar, vamos a dar una serie de ejemplos que justifican que las desigualdades de Morse para el caso finito no son válidas en el caso infinito.

Ejemplo 3.1. Función de Morse sin puntos críticos:



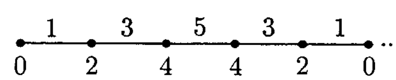
En este caso $m_0 = 0$, $m_1 = 0$, $b_0 = 1$ y $b_1 = 0$. No se cumple la desigualdad de Morse (1.2) para $p = 0$ ya que $0 = m_0$ no es mayor o igual que $b_0 = 1$. Además, tampoco se tiene (1.3), ya que $m_0 - m_1 = 0 \neq b_0 - b_1 = 1$.

Ejemplo 3.2. Función de Morse con una cantidad infinita de puntos críticos:



En este caso $m_0 = \infty$, $m_1 = \infty$. Ahora no tienen sentido ninguna de las desigualdades o igualdades (1.1), (1.2) ó (1.3).

Ejemplo 3.3. Función de Morse con una cantidad finita de puntos críticos:



Tenemos que $m_0 = 1$ y $m_1 = 1$. Por tanto (1.3) no se verifica ya que $m_0 - m_1 = 0 \neq 1 = b_0 - b_1$.

Las dos primeras situaciones no pueden darse en el caso finito. La primera es imposible ya que en un grafo finito, toda función de Morse discreta tiene al menos un vértice crítico: el mínimo global de dicha función sobre el grafo. La segunda es inviable de manera evidente para grafos finitos.

Motivado por los ejemplos anteriores, se comprueba que a diferencia del caso finito, existen 1-complejos infinitos sin símplices críticos. Es interesante constatar cómo la ausencia o existencia de símplices críticos de una función de Morse f condiciona la topología del 1-complejo infinito sobre el que está definida. En este sentido probaremos que la ausencia de puntos críticos únicamente puede darse para un tipo muy especial de 1-complejos: los árboles. A continuación caracterizaremos esta situación especial mediante un comportamiento "monótono" en los rayos.

Proposición 3.1. *Sea G un grafo conexo infinito y sea $f : G \longrightarrow \mathbf{R}$ una función de Morse discreta tal que no existen puntos críticos de f en G. Entonces, G es un árbol infinito.*

La prueba del resultado anterior consiste en razonar por reducción al absurdo suponiendo que G no es un árbol, es decir, contiene al menos un ciclo. Ello implica que cualquier función de Morse discreta definida sobre G tiene al menos una arista crítica en dicho ciclo, y por tanto, tiene al menos un punto crítico.

Definición 3.1. *Sea G un grafo conexo infinito. Un rayo en G es un subgrafo de G no acotado, tal que todos sus vértices son de valencia 2 excepto uno, al que se denomina vértice inicial, que tiene valencia 1. Es decir, un rayo es un camino infinito homeomorfo a un intervalo de real del tipo $[a, +\infty)$.*
Dados dos rayos en un mismo grafo, se dirá que son equivalentes si se diferencian en un subgrafo finito. Las clases de equivalencia definidas por la relación anterior se denominan finales del grafo G.

En lo sucesivo veremos que existe un tipo muy especial de rayos, determinado por el comportamiento "monótono" de f sobre ellos. Son los llamados rayos crecientes ó decrecientes que pasamos a definir:

Definición 3.2. *Sea G un grafo infinito y $f : G \longrightarrow R$ una función de Morse discreta. Fijado un rayo r en G, cuyos vértices estaran denotados por v_i y sus aristas por σ_i, donde $\partial\sigma_i = v_{i+1} - v_i$, con v_0 como vértice inicial, se dirá que f es débilmente monótona en r si se verifica una y solo una de las siguientes condiciones:*

$$f(v_0) < f(\sigma_0) \leq f(v_1) < f(\sigma_1) \leq f(v_2) < f(\sigma_2) \leq \dots$$

En este caso se dirá que f es débilmente creciente en r.

$$f(v_0) \geq f(\sigma_0) > f(v_1) \geq f(\sigma_1) > f(v_2) \geq f(\sigma_2) > \dots$$

En este caso se dirá que f es débilmente decreciente en r.

En uno u otro caso, si todas las desigualdades son estrictas, se dirá que f es estrictamente monótona, creciente o decreciente según el caso.

Notas.

a) De un modo intuitivo, la idea de función monótona creciente (decreciente) en un rayo consiste en que, fijado el sentido de recorrido en el rayo desde el vértice hacia el final, f crezca (decrezca) a medida que seguimos dicho sentido de recorrido.

b) La definición anterior equivale a cualquiera de las afirmaciones siguientes:

- Para toda arista σ_i del rayo, tal que $\partial\sigma_i = v_{i+1} - v_i$, se tiene que o siempre $f(v_i) < f(\sigma_i) \leq f(v_{i+1})$, para el caso creciente ó siempre $f(v_i) \geq f(\sigma_i) > f(v_{i+1})$, para el caso decreciente.
- Para todo vértice v_i del rayo, tal que las aristas a las que pertenece son σ_{i-1} y σ_i, se tiene que ó siempre $f(\sigma_{i-1}) \leq f(v_i) < f(\sigma_i)$, para el caso creciente ó siempre $f(\sigma_{i-1}) > f(v_i) \geq f(\sigma_i)$, para el caso decreciente.

c) En virtud de las Proposiciones 2.1 y 2.2 y el Corolario 2.1 y bajo las hipótesis anteriores, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

- f es monótona decreciente en el rayo.
- f no tiene símplices críticos en el rayo.
- f no alcanza extremos en el rayo.

Las funciones de Morse discretas sin puntos críticos definidas sobre 1-complejos infinitos jugarán un papel esencial ya que son el ejemplo fundamental que diferencia el caso finito del infinito. Por ello, el siguiente resultado justifica la existencia de las mismas, y su demostración proporciona un método de construción de este tipo especial de funciones de Morse discretas.

Proposición 3.3. *Sea G un árbol infinito. Existen una funciones de Morse discretas $f : G \longrightarrow R$ que no tienen puntos críticos.*

La demostración del resultado anterior se basa en la siguiente idea: Se trata de elegir un vértice v_0 cualquiera de G. De entre los rayos que tienen a v_0 como vértice inicial (al menos existe uno), fijamos uno sobre el que se define f de forma decreciente. En el resto de 1-caminos (finitos o rayos) partiendo de v_0, se define f de manara creciente.

El siguiente resultado nos muestra como la construcción de la función de Morse de la proposición anterior está determinada de manera única sobre un rayo fijado. Esto concuerda con la intuición de que al pasar del caso finito al infinito, es posible "eliminar" vértices críticos (mínimos), al conectar éstos a un rayo decreciente. Con ello, dicho vértice pierde la propiedad de ser mínimo y por tanto deja de ser crítico.

Proposición 3.3. *Sea G un grafo infinito y $f : G \longrightarrow R$ una función de Morse discreta tal que no tiene puntos críticos sobre G. Se verifica que, dado un vértice cualquiera v_0 de G, existe un único final de M tal que f es débilmente decreciente restringida al rayo que tiene a v_0 como vértice inicial y se dirige al final citado.*

Teorema 3.1. *Sea G un grafo infinito tal que $H_1(G)$ está finitamente generado. Sea $f : G \longrightarrow R$ una función de Morse discreta con un número finito de vértices y aristas críticos. Se tiene que:*

(1) $m_0 + d_0 \geq b_0$ y $m_1 \geq b_1$, donde d_0 es el número de rayos decrecientes no equivalentes de G, $b_i = dim(H_i(G))$ y m_i es el número de i-símplices críticos de f en G.

(2) $b_0 - b_1 = m_0 + d_0 - m_1$.

La Demostración de este resultado consiste en encontrar un subgrafo finito S de G en el que están todos los puntos críticos de f en G, y sobre el que sabemos que las desigualdades del caso finito se verifican. A continuación se compararan los números de Morse de f en G y S, m_i y $\overline{m}_i$. Como consecuencia de la Proposición 1.3, se tiene que $\overline{m}_0 \geq m_0$ y $\overline{m}_1 = m_1$. Ahora queda plantear los diferentes casos que surgen al comparar además los números de Betti de G y S, b_i y $\overline{b}_i$:

- $\overline{m}_0 = m_0$ y $\overline{b}_0 = b_0$.
- $\overline{m}_0 = m_0$ y $\overline{b}_0 < b_0$.
- $\overline{m}_0 > m_0$ y $\overline{b}_0 = b_0$.
- $\overline{m}_0 > m_0$ y $\overline{b}_0 < b_0$.

De manera análoga a lo que ocurre con las desigualdades de Morse para el caso finito, las desigualdades generalizadas establecen cotas inferiores para las cantidades de vértices, aristas y rayos críticos que f tiene sobre el grafo infinito G, en función de invariantes topológicos de G. De esta forma, y teniendo en cuenta la interpretración que se ha dado de los elementos críticos de f en un grafo G como extremos de f sobre G, verifica que:

i) $m_0 + d_0 \geq b_0$ es equivalente a afirmar que f alcanza al menos tantos mínimos en G como componentes conexas tiene G.

ii) $m_1 \geq b_1$ es equivalente a afirmar que f tiene al menos tantas aristas críticas (máximos sobre símplices de dimensión uno) sobre G como ciclos independientes tiene G.

Referencias

[1] R. Forman. *Morse Theory for Cell Complexes.* Advances in Mathematics. vol.134 pp.90-145. 1998.

[2] R. Forman. *Combinatorial Differential Topology and Geometry.* New Perspectives in Geometric Combinatorics. MSRI Publications. vol.38. pp.177-205. 1999.

[3] J. Milnor. *Morse Theory.* Annals of Mathematics Study 51, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1962.