Introducción de penalizaciones en los giros en el Problema de Rutas por Arcos con Capacidades

E. Martínez, D. Soler, J. Albiach y J.C. Micó

Dpto. de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica de Valencia
e-mail: {eumarti,dsoler,jmico}@mat.upv.es, josealbiach@navegalia.com

Resumen

En este trabajo tratamos un problema que generaliza el Problema de Rutas por Arcos con Capacidades definido sobre grafos mixtos, asociando una penalización no negativa a cada giro, así como considerando la existencia de giros prohibidos, de forma que algunos problemas reales de rutas de vehículos pueden ser abordados de forma más eficaz.

Presentamos aquí una transformación polinomial de este nuevo problema en el Problema de Rutas de Vehículos con Capacidades sobre grafos dirigidos, la cual permite resolverlo tanto de forma exacta como heurística, con algoritmos existentes para este último problema.

1 Introducción

Un Problema de Rutas por Arcos (PRA) consiste básicamente en encontrar un conjunto de rutas a coste mínimo que, con ciertas condiciones, atraviese un subconjunto de los arcos y/o aristas del grafo. Existen muchas aplicaciones reales que pueden ser modelizadas como un PRA: recogida o reparto de productos, en particular recogida de basuras y reparto de correo, recorrido de máquinas quitanieves, inspección de redes de conducción, rutas de autobuses escolares, etc. Por este motivo los problemas de rutas por arcos han sido extensamente estudiados en las últimas décadas. El excelente libro editado por Droor (2000) recopila lo hecho hasta la fecha y aplicaciones reales de estos problemas.

Uno de los más generales y estudiados PRA es el Problema de Rutas por Arcos con Capacidades (*PRAC*) que en un grafo mixto puede ser definido como sigue:

Sea $G = (V, E \cup A)$ un grafo mixto fuertemente conexo donde cada $(i,j) \in E \cup A$ tiene asociado un coste $c_{ij} \geq 0$, uno de sus vértices, sea u_1, representa un depósito donde hay k vehículos con idéntica capacidad $W > 0$ y hay un subconjunto $R \subset E \cup A$ de arcos y/o aristas requeridas tal que cada $(i,j) \in R$ tiene asociado una demanda positiva $q_{ij} \leq W$ con $\sum_{(i,j)\in R} q_{ij} \leq kW$. Encontrar k tours en G, uno para cada vehículo, de forma que: cada tour pase por el depósito, las demandas en R sean satisfechas, cada demanda sea asumida por un solo vehículo, las demandas servidas por cada vehículo no excedan la capacidad del vehículo W y la suma de los costes de los k tours sea mínima.

En el caso particular del *PRAC* en que $k = 1$, tenemos el también extensamente estu-

[1]Trabajo subvencionado por la Universidad Politécnica de Valencia (Proyecto de Investigación 20010945).

diado problema conocido como el *Problema del Cartero Rural Mixto* (*PCRM*).

Cuando un problema real se modeliza como un *PRA*, se asume que todos los giros son permitidos y que no consumen tiempo (o coste). Sin embargo, sobre todo si las rutas se realizan dentro de una ciudad y más aún si son realizadas por camiones, algunos giros pueden ser considerados más "caros" y/o peligrosos que otros. Más aún, al menos en grandes ciudades, muchos giros en U y algunos giros a izquierda son prohibidos. Por lo tanto, para este tipo de problemas, una solución del PRA asociado podría ser imposible si se deben respetar las señales de tráfico. Incluso considerando un tour a pie (el de un cartero por ejemplo), cuando se alcanza la encrucijada v desde la acera a (ver Figura 1), es evidente que no consume el mismo tiempo continuar por la acera b (giro a izquierda) que continuar recto por la acera e, para lo cual puede ser incluso necesario cruzar hasta dos semáforos.

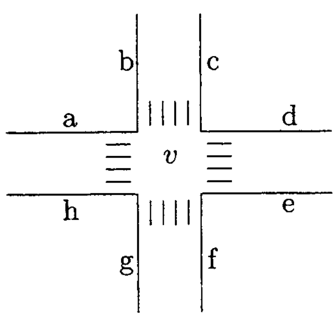

Figura 1. Encrucijada v: no todas las alternativas de continuar cuando un cartero llega a v por la acera a tienen el mismo coste de tiempo.

Algunos tipos de penalizaciones de giro han sido tenidos en cuenta de cara a resolver heurísticamente algunos problemas reales particulares, como en los artículos Bodin, Fagin, Welebny y Greenberg (1989) y Roy y Rousseau (1989). Más recientemente, generalizaciones del *PCRM* o de casos particulares de él, que tienen en cuenta penalizaciones de giro y giros prohibidos, han sido estudiados, incluso desde un punto de vista teórico, obteniendo resoluciones exactas a estas generalizaciones; véanse los artículos de Benavent y Soler (1999), Clossey, Laporte y Soriano (2001) o el muy reciente de Corberán, Martí, Martínez y Soler (2002). De cara a extender algunos de esos últimos resultados al caso multivehículo, en este trabajo tratamos un nuevo problema que generaliza el *PRAC* definido sobre grafos mixtos, asociando penalizaciones no negativas a cada giro, así como considerando la existencia de giros prohibidos. Si en el último artículo citado, el *PCRM* con giros penalizados y giros prohibidos es resuelto transformándolo en un *Problema del Agente Viajero (PAV) sobre grafos dirigidos*, presentamos aquí una transformación polinomial de este nuevo problema, el cual hemos llamado *Problema de Rutas por Arcos con Capacidades y Giros Penalizados* ($PRAC - GP$), en el *Problema de Rutas de Vehículos con Capacidades sobre grafos dirigidos (PRVCD)*, una generalización del *PAV* en grafos dirigidos al caso multivehículo, que puede ser definido como sigue:

Sea $G = (V, A)$ un grafo dirigido completo donde: cada arco $(i, j) \in A$ tiene asociado un coste $c_{ij} \geq 0$, uno de sus vértices, sea el vértice 1, representa un depósito donde hay k vehículos con idéntica capacidad W cada vértice $i \in V$ tiene asociada una demanda positiva $q_i \leq W$, excepto q_1 que vale cero, y la suma de las demandas no es mayor que kW. Encontrar k ciclos en G tal que cada ciclo pase por el depósito, cada vértice diferente del depósito esté en exactamente un ciclo, la suma de las demandas pertenecientes a los vértices de un mismo ciclo no exceda W y la suma de los costes de los k ciclos sea mínima.

Esta transformación nos permite resolver el $PRAC - GP$ tanto óptimamente como heurísticamente con eficientes algoritmos existentes para el $PRVCD$, como el algoritmo exacto de Fischetti Toth y Vigo (1994) y el algoritmo heurístico de Vigo (1996).

Tras introducir notación y algunas definiciones en la Sección 2, formalmente definiremos el $PRAC-GP$ y en la Sección 3 realizaremos la transformación del $PRAC-GP$ en un $PRVCD$ con la ayuda de un grafo auxiliar.

2 Algunas definiciones y notación

Dado un grafo mixto $G=(V,E\cup A)$, de cara a simplificar notación, un elemento de $E\cup A$ será llamado **enlace**. Entonces, cada par de enlaces $a=(u,v), b=(v,w)\in E\cup A$ tiene asociado un giro en v: el realizado yendo de a a b, el cual denotamos por $[ab]$. Además, si $a,b\in E$, este par tiene otro giro asociado en v: el realizado al ir de b a a, denotado por $[ba]$. Cada arista e incidente con v tiene un giro en U asociado en v que, si es necesario, denotaremos por $[eve]$. De la misma forma, si $e,e'\in E$ representan dos aristas en paralelo entre los mismos vértices u y v, de cara a distinguir los giros en u y en v, los denotamos por $[eue']$ y $[eve']$ respectivamente. Cada enlace $a\in E\cup A$ tiene asociado un coste $c_a\geq 0$ y cada giro $[ab]$ en G tiene asociado una penalización $p_{[ab]}\geq 0$ ($p_{[ab]}=+\infty$ sii $[ab]$ es un giro prohibido).

Dados $a=(u,v), b=(s,t)\in E\cup A$, una $v-s$ **cadena posible de** a **a** b es una secuencia alternada de enlaces y giros $C=\{a_1,[a_1a_2],a_2,\ldots,[a_{r-1}a_r],a_r,[a_rb]\}$, donde $a_1=a$, satisfaciendo que $\{a_1,\ldots,a_r,b\}$ es una cadena en G, el giro $[a_rb]$ es permitido en G y, si $r>1$, $[a_ia_{i+1}]$ $i=1,\ldots,r-1$ son giros permitidos en G. Notar que, por conveniencia, una cadena posible empieza en un enlace y termina en un giro y que, incluso si todos los enlaces de C son aristas, esta cadena posible debe ser atravesada sólo en la dirección especificada. El coste de una cadena posible C es definido como $c(C)=\sum_{i=1}^{r}(c_{a_i}+p_{[a_ia_{i+1}]})$, donde $a_{r+1}=b$.

Dados $a=(u,v), b=(s,t)\in E\cup A$, una $v-s$ **cadena posible más corta de** a **a** b es una $v-s$ cadena posible C de a a b de coste mínimo $c(C)$. Esta cadena posible será denotada por $cpmc(v^a,s^b)$. Decimos cadena posible más corta (cpmc) en vez de camino posible más corto, porque una cpmc puede pasar por el mismo vértice más de una vez en G. Una $v-s$ cadena posible de a a b es **cerrada** si $a=b$ y $s\neq v$ ($b=(s,v)$).

El problema de encontrar una cadena posible más corta se reduce al problema de encontrar el camino más corto (sin tener en cuenta penalizaciones de giro) en un grafo auxiliar. Este procedimiento es expuesto con detalle en el artículo de Corberán, Martí, Martínez y Soler (2002).

Con esta terminología, en el artículo anteriormente citado es definido el Problema del Cartero Rural Mixto con Giros Penalizados ($PCRM-GP$) como sigue:

Sea $G=(V,E\cup A)$ un grafo mixto con costes asociados a los enlaces y penalizaciones de giro como se ha definido anteriormente. Dado un subconjunto no vacío R de $E\cup A$, encontrar una cadena posible cerrada de mínimo coste en G conteniendo cada enlace de R al menos una vez.

Como ya hemos comentado en la sección anterior, en dicho artículo los autores muestran un algoritmo exacto para resolver el $PCRM-GP$ transformando el problema en un PAV sobre un grafo dirigido.

Una generalizacion del $PCRM-GP$ al caso capacitado lo constituye el problema que hemos llamado *Problemas de Rutas por Arcos con Capacidades y Giros Prohibidos* ($PRAC-GP$) ya que es también una generalización del $PRAC$ en el caso mixto, que fue definido en la

Sección 1, introduciendo los giros prohibidos.

Definimos el $PRAC-GP$ como sigue:

Sea $G = (V, E \cup A)$ un grafo mixto fuertemente conexo donde cada enlace $(i,j) \in E \cup A$ tiene asociado un coste $c_{ij} \geq 0$ y cada giro $[ab]$ tiene asociada una penalización $p_{[ab]} \geq 0$ con $p_{[ab]} = +\infty$ si el giro $[ab]$ es prohibido. Uno de los vértices, sea u_1, representa un depósito donde hay k vehículos de idéntica capacidad $W > 0$ y en él todos los giros son permitidos con penalización nula. Dado $R \subset E \cup A$, un conjunto de enlaces requeridos, cada $(i,j) \in R$ tiene asociada una demanda positiva $q_{ij} \leq W$ con $\sum_{(i,j) \in R} q_{ij} \leq kW$. Encontrar k cadenas posibles cerradas en G, una para cada vehículo, de forma que: cada cadena pasa por el depósito, las demandas de R se satisfacen, cada demanda es asumida por un solo vehículo, las demandas servidas por cada vehículo no exceden la capacidad W del vehículo y la suma de los costes de las k cadenas posibles cerradas sea mínima.

A partir de ahora, denotaremos por A_R y E_R el conjunto de arcos requeridos y aristas requeridas ($R = E_R \cup A_R$) respectivamente y como es ususal en problemas de rutas con capacidades (como el $PRAC$ y el $PRVCD$), supondremos que k es el mínimo número de vehículos necesario para atender todas las demandas.

Notar que la consideración de que todos los giros son permitidos y con penalización nula en el depósito, es debida al hecho de que en problemas reales, el depósito representa un gran almacén o fábrica desde donde los vehículos empiezan la jornada y a donde vuelven una vez ésta ha concluido. No tiene sentido considerar que desde el almacen no está permitida la salida según por dónde haya vuelto el vehículo o que es necesario realizar dentro del almacen giros cuyo coste dependa simultáneamente de por dónde ha llegado el vehículo y de hacia dónde saldrá. Más aún, estos almacenes están situados normalmente fuera de las ciudades, con buenas comunicaciones y fáciles accesos.

3 Transformación del *PRAC-GP* en un *PRVCD*

Para poder resolver tanto óptima como heurísticamente el $PRAC-GP$ presentamos aquí una transformación polinomial de él en el $PRVCD$, que ya fue definido en la Sección 1. Dado que en el $PRVCD$ debemos visitar todos los vértices, transformaremos el grafo $G = (V, E \cup A)$ en el cual hemos definido el $PRAC-GP$ en un grafo dirigido completo $G^* = (V^*, A^*)$ de forma que los arcos y aristas requeridas de G están relacionadas con los vértices de G^*. El depósito también será considerado como un vértice de este grafo. Cada arco entre dos de estos vértices tendrá asociado el coste de la cadena posible más corta entre los correspondientes enlaces en G. Por consiguiente, necesitamos definir una cadena posible desde el depósito a un enlace requerido, pero como las cadenas posibles sólo están definidas entre enlaces, realizaremos la siguiente transformación intermedia:

A partir del grafo G definimos un grafo auxiliar $G' = (V', A' \cup E')$ tal que si u_1 representa el depósito, $V' = V \cup \left\{u_1'\right\}$, $E' = E$, $A' = A \cup \{d, d'\}$ donde: $d = (u_1', u_1)$ y $d' = (u_1, u_1')$, ambos con coste nulo, todos los giros dentro de u_1 o u_1' son permitidos con penalización nula, el arco d es considerado requerido con capacidad $q_d = 0$ y el resto de costes, penalizaciones, enlaces requeridos y demandas en G' son las mismas que en G.

Es evidente que resolver el $PRAC-GP$ en G es equivalente a *encontrar k cadenas posibles cerrada en G', una para cada vehículo, de forma que: cada cadena atraviese el arco d, las demandas en R sean satisfechas, cada demanda sea asumida por un único vehículo, las* *demandas servidas por cada vehículo no excedan la capacidad W del vehículo y la suma de los costes de las k cadenas posibles cerradas sea mínima.* Esto es: pasar por el depósito en G es equivalente a atravesar el arco d en G'. De hecho, las soluciones en ambos grafos son las mismas excepto cambiar cada giro $[(u, u_1)(u_1, v)]$ hecho por las cadenas cerradas en G por la sección en G' $[(u, u_1)d'] d'[d'd]d[d(u_1, v)]$ con el mismo coste (cero). Por simplicidad, el problema en G' equivalente al $PRAC - GP$ en G será denotado como $PRAC - GP_d$.

Dado el grafo G' construimos el grafo dirigido completo $G^* = (V^*, A^*)$ como sigue:

El conjunto de vértices V^* consiste en:

- Por cada arco $a = (i, j) \in A_R \cup \{d\}$ un vértice u_a con demanda q_a. De cara a distinguirlo del resto, a veces denotaremos D al vértice u_d que recordemos tiene demanda nula q_d.

- Por cada arista $e = (i, j) \in E_R$ (siempre supondremos $i < j$ en las aristas), dos vértices u_e y v_e cada uno con demanda $q_e/2$ (lo importante es que la suma de las dos demandas sea q_e, luego cualquier otra distribución, de cara por ejemplo a mantener integridad, puede ser dada).

A^* consta de los siguientes arcos con sus respectivos costes:

- Por cada arista $e = (i, j) \in E_R$, dos arcos (u_e, v_e) y (v_e, u_e), ambos con coste $-M$, siendo M un entero positivo muy grande.

- Por cada par de arcos diferentes $a = (i, j)$, $b = (k, l) \in A_R \cup \{d\}$, dos arcos (u_a, u_b) y (u_b, u_a), con costes los del $j - k$ $cpmc(a, b)$ y del $l - i$ $cpmc(b, a)$ respectivamente.

- Por cada par de aristas diferentes $a = (i, j)$, $b = (k, l) \in E_R$, ocho arcos:
  - (u_a, u_b) con el coste del $i - k$ $cpmc(a, b)$.
  - (u_a, v_b) con el coste del $i - l$ $cpmc(a, b)$.
  - (u_b, u_a) con el coste del $k - i$ $cpmc(b, a)$.
  - (u_b, v_a) con el coste del $k - j$ $cpmc(b, a)$.
  - (v_a, u_b) con el coste del $j - k$ $cpmc(a, b)$.
  - (v_a, v_b) con el coste del $j - l$ $cpmc(a, b)$.
  - (v_b, u_a) con el coste del $l - i$ $cpmc(b, a)$.
  - (v_b, v_a) con el coste del $l - j$ $cpmc(b, a)$.

- Por cada par formado por un arco $a = (i, j) \in A_R \cup \{d\}$ y una arista $e = (k, l) \in E_R$, cuatro arcos:
  - (u_a, u_e) con el coste del $j - k$ $cpmc(a, e)$.
  - (u_a, v_e) con el coste del $j - l$ $cpmc(a, e)$.
  - (u_e, u_a) con el coste del $k - i$ $cpmc(e, a)$.
  - (v_e, u_a) con el coste del $l - i$ $cpmc(e, a)$.

Una vez hemos definido el grafo auxiliar G^* estamos en condiciones de exponer una transformación polinomial del $PRAC - GP$ en el $PRVCD$:

Teorema 1 *El $PRAC - GP$ definido sobre el grafo G puede ser transformado en tiempo polinomial en un $PRVCD$ en G^*.*

Demostración:

Como el $PRAC - GP$ en G es equivalente al $PRAC - GP_d$ en G', probaremos que el $PRAC - GP_d$ en G' puede ser transformado en tiempo polinomial en un $PRVCD$ en G^*.

Sea entonces $S = \{T_i\}_{i=1}^k$ el conjunto de las k cadenas posibles cerradas en G' correspondientes a la solución del $PRAC - GP_d$. Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, a partir de T_i construimos un ciclo C_i en G^* en la forma siguiente:

Supongamos que T_i satisface, y en este orden, las demandas $q_d, q_{j_1}, q_{j_2}, \ldots, q_{j_{m_i}}$. C_i es entonces un ciclo en G^* que visita, y en este orden, los conjuntos de vértices $V_{j_0}, V_{j_1}, V_{j_2}, \ldots, V_{j_{m_i}}, V_{j_{m_i}+1}$, donde $V_{j_0} =$

$V_{j_{m_i}+1} = \{D\}$ (el depósito) y para todo $s \in \{1, \ldots, m_i\}$, V_{j_s} es:

- $\{u_a\}$ si q_{j_s} es la demanda del arco requerido a.

- $\{u_e, v_e\}$ visitados en este orden, si q_{j_s} es la demanda de la arista requerida $e = (r, j)$, la cual ha sido atravesada de r a j cuando T_i satisface su demanda.

- $\{v_e, u_e\}$ visitados en este orden, si q_{j_s} es la demanda de la arista requerida $e = (r, j)$, la cual ha sido atravesada de j a r cuanto T_i satisface su demanda.

Es evidente que el conjunto de ciclos $L_S = \{C_i\}_{i=1}^k$ es una solución al $PRVCD$ en G^* siendo su coste $c^*(L_S)$ menor o igual que $c(S) - |E_R|M$, esto último debido al hecho de que un segmento de ruta en G' correspondiente a un cadena posible entre dos elementos requeridos servidos consecutivamente es reemplazado en G^* por un arco con coste el de la cadena posible más corta desde el primer elemento requerido al segundo.

Por otro lado, sea $L = \{C_i\}_{i=1}^k$ el conjunto de ciclos correspondiente a una solución al $PRVCD$ in G^*, verificando que por cada arista requerida $e = (i, j)$, o bien el arco (u_e, v_e) o bien el arco (v_e, u_e) pertenece a un C_i, $i = 1, \ldots, k$, esto es, la demanda asociada a una arista requerida, que en G^* fue dividida entre dos vértices, es servida por un solo vehículo, el cual visita los dos vértices de forma consecutiva. Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, a partir de C_i construimos la cadena posible cerrada T_i en G' en la forma siguiente:

Sea (r, p) un arco genérico de C_i. Este arco será sustituido en G' por:

- El $j - l$ *cpmc*(a, b) si $r = u_a$ y $p = u_b$, con $a = (i, j)$, $b = (l, s) \in A_R \cup \{d\}$.

  El $j{-}l$ *cpmc*(a, e) si $r = u_a$ y $p = u_e$, con $a = (i, j) \in A_R \cup \{d\}$, $e = (l, s) \in E_R$.

  El $j{-}s$ *cpmc*(a, e) si $r = u_a$ y $p = v_e$, con $a = (i, j) \in A_R \cup \{d\}$, $e = (l, s) \in E_R$.

  El $j{-}s$ *cpmc*(e, a) si $r = v_e$ y $p = u_a$, con $e = (i, j) \in E_R$ y $a = (s, l) \in A_R \cup \{d\}$.

  El $i{-}s$ *cpmc*(e, a) si $r = u_e$ y $p = u_a$, con $e = (i, j) \in E_R$ y $a = (s, l) \in A_R \cup \{d\}$.

  El $j - s$ *cpmc*(e, f) si $r = v_e$ y $p = u_f$, con $e = (i, j), f = (s, l) \in E_R$.

  El $i - s$ *cpmc*(e, f) si $r = u_e$ y $p = u_f$, con $e = (i, j)$, $f = (s, l) \in E_R$.

  El $j - l$ *cpmc*(e, f) si $r = v_e$ y $p = v_f$, con $e = (i, j)$, $f = (s, l) \in E_R$.

  El $i - l$ *cpmc*(e, f) si $r = u_e$ y $p = v_f$, con $e = (i, j)$, $f = (s, l) \in E_R$.

  Nada si $(r, p) = (u_e, v_e)$ o $(r, p) = (v_e, u_e)$ para algún $e \in E_R$.

Es evidente que tras sustituir cada arco de C_i por la correspondiente sección en G', obtenemos una cadena posible cerrada T_i en G' que atraviesa el arco d (es decir, que empieza y acaba en el depósito en el grafo original G), y que el conjunto de cadenas $S_L = \{T_i\}_{i=1}^k$ es una solución al $PRAC - GP_d$ en G' siendo su coste $c(S_L) = c^*(L) + |E_R|M$.

Además, cada solución óptima al $PRVCD$ en G^* es de este tipo (para cada arista $e \in E_R$, o bien el arco (u_e, v_e) o bien el arco (v_e, u_e) pertenece a un ciclo C_i en la solución), ya que en caso contrario, dada una solución S al $PRAC - GP_d$ en G' con coste $c(S)$, esta solución proporciona una solución L_S al $PRVCD$ con coste $c^*(L_S) \leq c(S) - |E_R|M$, y si L^0 es una solución óptima al $PRVCD$ en G^* no de este tipo, tendrá como mucho $|E_R| - 1$ arcos de coste $-M$, entonces, como M es un número positivo muy grande, tendremos que: $c^*(L^0) \geq -(|E_R| - 1)M > -|E_R|M + c(S) \geq c^*(L_S)$. Por consiguiente, L^0 no es una solución óptima, lo que es una contradicción.

Finalmente veamos que una solución óptima al $PRVCD$ en G^* da lugar a una solución óptima al $PRAC - GP_d$ en G'. Sea L^0 una solución óptima al $PRVCD$ en G^* y sea S

una solución posible al $PRAC-GP_d$ en G', tenemos que: $c(S) \geq c^*(L_S)+|E_R|M \geq c^*(L^0)+|E_R|M = c(S_{L^0})$

Por lo tanto, S_{L^0} es una solución óptima al $PRAC-GP$ en G'. ∎

Referencias

[1] E. Benavent and D., Soler., *The Directed Rural Postman with Turn Penalties.* Transportation Science, vol. 33,4, pp. 408-418. 1999.

[2] L. Bodin, G. Fagin, R Welebny and J. Greenberg., *The Design of a Computerized Sanitation Vehicle Routing and Scheduling for the Town of Oyster Bay, New York.* Computers & Operations Research, vol. 16,1, pp. 45-54. 1989.

[3] J. Clossey, G. Laporte and P. Soriano. *Solving Arc Routing Problems with Turn Penalties.* Journal of the Operational Research Society, vol. 52, 4, pp. 433-439. 2001.

[4] A. Corberán, R. Martí, E. Martínez and D. Soler. *The Rural Postman Problem on Mixed Graphs with Turn penalties.* Computers & Operations Research, vol. 29, pp. 887-903. 2002.

[5] M. Dror, editor. *Arc Routing Problems: Theory, Solutions and Applications.* Boston: Kluwer Academic, 2000.

[6] M. Fischetti, P. Toth and D. Vigo. *A Branch and Bound Algorithm for the Capacitated Vehicle Routing Problem on Directed Graphs.* Operations Research, vol. 42, pp. 846-859. 1994.

[7] S. Roy and J.M. Rousseau. *The Capacitated Canadian Postman Problem.* INFORM, vol. 27, 1, pp. 58-73. 1989.

[8] D. Vigo. *A Heuristic Algorithm for the Asymmetric Capacitated Vehicle Routing Problem.* European Journal of Operational Research, vol. 89, pp. 108-126. 1996.