

# Algunas aplicaciones de teselaciones periódicas planas y tridimensionales<sup>1</sup>

F. Aguiló Gost<sup>2</sup>, M.A. Fiol y M.L. Fiol

## Resumen

En este trabajo se presentan algunos resultados conocidos en los que se han utilizado teselaciones del plano o del espacio como herramientas de trabajo. Por una parte, dentro de la Teoría de Grafos, se presenta un estudio sobre la minimización del diámetro de digrafos de doble y triple paso. Por otra, en el marco de la Geometría Computacional, se presentan algunas equidescomposiciones en dos y tres dimensiones.

**Palabras clave:** Diámetro, redes de doble lazo, familias óptimas, L-forma plana, forma normal de Smith, digrafo de Cayley, equidescomposición, diseción, teselación, retículo.

## 1 Introducción

Sean  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  vectores linealmente independientes de  $\mathbb{R}^n$ , el retículo generado por  $V$  es  $\mathcal{R} = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}\}$ . Decimos que una baldosa (o tesela)  $T$  tesela periódicamente el espacio  $\mathbb{R}^n$  si existe algún retículo  $\mathcal{R}$  tal que  $T + \mathcal{R} = \{T + u; u \in \mathcal{R}\}$  forma una partición de  $\mathbb{R}^n$  (permitimos que las fronteras de los trasladados de  $T$  por  $\mathcal{R}$  se solapen).

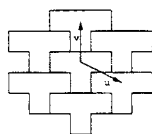


Figura 1: Teselación generada por baldosas en forma de T

<sup>1</sup>Este trabajo ha recibido ayuda del Ministerio de Ciencia y Tecnología y del European Regional Development Fund (ERDF) bajo el proyecto TIC-2001-2171 y del Consejo Catalán de Investigación bajo el proyecto 2000SGR-00079.

<sup>2</sup>Dept. de Matemàtica Aplicada IV. Universitat Politècnica de Catalunya. E-mail: matfag@mat.upc.es

En tal caso, diremos que  $T + \mathcal{R}$  (o simplemente  $T$ ) forma una teselación de  $\mathbb{R}^n$ . Notemos que estamos hablando de teselaciones periódicas con un sólo tipo de baldosa  $T$ . En el ejemplo de la Figura 1 se muestra una teselación generada por baldosas en forma de  $T$  mediante el retículo  $\mathcal{R} = \{u, v\}$ .

En las secciones siguientes, vamos a dar algunas aplicaciones en las que usamos teselaciones en el plano y en el espacio como herramientas de trabajo.

## 2 Aplicaciones a la Teoría de Grafos

Un grafo,  $G(V, A)$ , es un objeto matemático discreto formado por el conjunto de vértices  $V$  y el conjunto de adyacencias  $A = \{(u, v); u, v \in V\}$ . Cuando  $A$  está formado por pares ordenados, decimos que el grafo es dirigido (llamado a veces digrafo).

El digrafo de Cayley del grupo  $G$ , respecto del conjunto de generadores  $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ ,  $\text{Cay}(G, S)$ , tiene el conjunto de vértices  $V = G$  y las adyacencias vienen dadas por  $A = \{(g, g * s_i); g \in G, i = 1, \dots, k\}$ , donde  $*$  es la operación en  $G$ .

Los digrafos de doble y triple paso son digrafos  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_N, \{s_1, \dots, s_k\})$ ,  $\text{mcd}(N, s_1, \dots, s_k) = 1$ , con  $k = 2$  y  $k = 3$  respectivamente. Estos digrafos modelan las llamadas redes locales de doble y triple lazo. Entre otros parámetros, el diámetro es importante para obtener poco retardo en la transmisión de mensajes por estas redes. Por tanto, interesa tener digrafos con diámetro pequeño. Vamos a denotar por  $D(N; s_1, s_2)$  el diámetro del digrafo  $G(N; s_1, s_2)$  y  $D(N) = \min_{s_1, s_2} D(N; s_1, s_2)$ . Denotaremos de forma análoga los diámetros en el caso de triple paso. Para no tener que diferenciar entre doble y triple paso continuamente, denote-

mos por  $G(N; S)$  un digrafo de doble o triple paso, según sea el conjunto de generadores  $S$  de dos o tres elementos; también  $D(N; S)$  denotará su diámetro. Hay varios problemas clásicos relacionados con este aspecto:

- (i) Fijado  $N$ , hallar  $S$  (y  $D(N)$ ) tal que  $D(N; S) = D(N)$ .
- (ii) Hallar familias infinitas de digrafos con diámetro óptimo (o, al menos, "pequeño").

El problema (i) es de tipo numérico y puede prestarse a exploraciones numéricas por ordenador. Una solución del problema (ii) suele presentarse parametrizada, lo que suele implicar un tratamiento simbólico con un manipulador algebraico. En estos momentos, la palabra "pequeño" quiere decir óptimo en doble paso (porque se tiene bastante información), en cambio en triple paso significa del mismo orden o menor que lo que se conoce en la bibliografía.

### 2.1 Digrafos de doble paso

Wong y Coppersmith en [11] hallaron una cota inferior fina para  $D(N)$ , denotada por  $lb(N)$ ,

$$D(N) \geq \lceil \sqrt{3N} \rceil - 2 = lb(N),$$

aunque con la condición  $s_1 = 1$ . Fiol et al. en [7] probaron que la cota sigue siendo válida para cualquier par de pasos, sin la condición  $s_1 = 1$ . El tratamiento métrico, mediante teselaciones, de  $G(N; s_1, s_2)$  es el siguiente:

- (a) Se considera el plano cuadrículado. Se elige un cuadrado cualquiera y se etiqueta con 0.
- (b) Se etiquetan los otros cuadrados con los resultados de sumar  $s_1$  módulo  $N$  hacia la derecha y  $s_2$  módulo  $N$  hacia arriba. Véase el dibujo izquierdo de la Figura 2.
- (c) Márquese un cuadrado cualquiera etiquetado con 0. Márquense los cuadrados a distancia 1, 2 y así sucesivamente, dejando sin marcar los cuadrados que tienen una etiqueta que ya ha sido marcada.
- (d) Cuando todos los vértices han sido marcados, tenemos marcada la baldosa asociada a

$G(N; s_1, s_2)$ . Esta baldosa contiene toda la información métrica del digrafo. Véase el dibujo derecho de la Figura 2, donde se muestra la teselación asociada al digrafo  $G(7; 2, 3)$ .

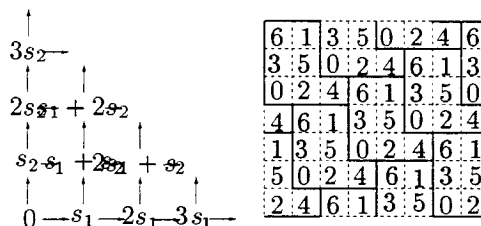


Figura 2: Reglas de interconexión en un digrafo genérico  $G(N; s_1, s_2)$  y la baldosa asociada a  $G(7; 2, 3)$

Estas teselaciones, que se ha probado que tienen siempre baldosas en forma de L o de rectángulos (Ls degeneradas), nos permiten recuperar el digrafo asociado (o uno isomorfo). Esta recuperación se hace a partir de las dimensiones de la baldosa L, que denotaremos de forma genérica por  $(l, h, w, y)$ , como en la Figura 3. Nótese que el diámetro del digrafo asociado puede calcularse mediante  $D_L = \max\{l + h - w - 2, l + h - y - 2\}$ .

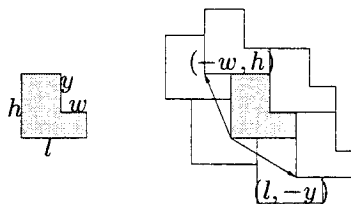


Figura 3: Dimensiones genéricas de una baldosa L y su retículo asociado

Dadas las dimensiones  $L = (l, h, w, y)$ , asociadas a una L de área  $N = lh - wy$ , consideremos la matriz entera  $M = \begin{pmatrix} l & -w \\ -y & h \end{pmatrix}$ , cuyas entradas son los vectores (columna)  $u = (l, -y)^T$  y  $v = (-w, h)^T$  que forman el retículo de la teselación. En el caso que  $\text{mcd}(l, h, w, y) = 1$ , tenemos que la forma normal de Smith de  $M$  es  $S(M) = \text{diag}(1, N)$ , con las matrices unimodulares asociadas  $U$  y  $V$  tales que  $S(M) = UMV$ . Entonces, los pasos del digrafo asociado son los elementos de la segunda fila de la matriz  $U$ :  $s_1 \equiv U_{2,1} \pmod{N}$ ,  $s_2 \equiv U_{2,2} \pmod{N}$ .

Decimos que  $G(N; s_1, s_2)$  es  $k$ -tight si  $D(N; s_1, s_2) = \text{lb}(N) + k$  y denotamos por  $\kappa(N)$  al valor que cumple  $D(N) = \text{lb}(N) + \kappa(N)$ . En [5] se clasifican las  $L$ s 0-tight y, como consecuencia, se obtiene una clasificación de los digrafos 0-tight. En [1] se clasifican las  $L$ s  $k$ -tight y, a partir de esta clasificación, se obtiene un algoritmo de orden  $O(N^{\frac{3}{2}} \log N)$  (en el peor caso) para resolver el problema (i): dado  $N$ , hallar  $D(N)$  y  $\alpha, \beta$  tales que  $D(N; \alpha, \beta) = D(N)$ .

### 2.2 Digrafos de triple paso

Con los digrafos de triple paso, podemos proceder de forma análoga que en el caso de doble paso. No obstante, ahora no disponemos de una descripción genérica de las baldosas asociadas. Por esta razón, no podemos proceder a caracterizarlas. Además tampoco se conoce una cota inferior fina de  $D(N)$ .

Los resultados que podemos encontrar en la bibliografía al respecto son del tipo: dar una familia infinita de digrafos con un buen ratio asintótico  $N$ - $D$ . Se hablan de familias *asintóticamente densas*. Por ejemplo, en las familias

- Hsu & Jia [9]

$$N(D) = \frac{1}{16}D^3 + O(D^2) \approx 0.062D^3 + O(D^2), \tag{1}$$

- Aguiló, Fiol & Garcia [2]

$$N(D) = \frac{2}{27}D^3 + O(D^2) \approx 0.074D^3 + O(D^2), \tag{2}$$

- Chen & Gu [3]

$$N(D) = \frac{5}{64}D^3 + O(D^2) \approx 0.078D^3 + O(D^2), \tag{3}$$

se habla de densidades 0.062, 0.074 y 0.078, respectivamente. La obtención de estas familias se ha hecho por caminos distintos, usando desde bases aditivas en [3] hasta teselaciones del espacio en [2].

La técnica usada con las teselaciones es la siguiente: hallar un digrafo con buen diámetro por ordenador, generalizar de alguna manera su baldosa y demostrar que esa generalización continúa tesselando el espacio. De esta manera obtenemos una

familia de baldosas, con una familia de retículos asociados. A partir de estos retículos, también tenemos una familia de matrices enteras  $3 \times 3$  que nos permiten recuperar los digrafos buscados a partir de su forma normal de Smith. Además, esas baldosas también nos dan los correspondientes diámetros de la familia de digrafos.

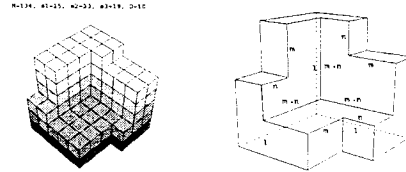


Figura 4: Baldosa asociada a  $G(134; 15, 33, 19)$  y su posterior generalización

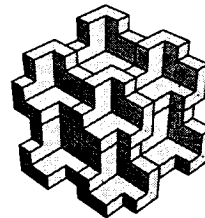


Figura 5: Teselación del espacio asociada a la baldosa anterior

Este proceso puede verse en las Figura 4 y su teselación asociada se muestra en la Figura 5. Esta baldosa se utilizó en [2] con  $l > m + n, m \geq n \geq 0, N = l^3 - m^3 - n^3 - 3lmn$  y  $D = 3l - 2n - m - 3$ , para una elección adecuada de  $l, m, n$ . En este caso el retículo viene definido por los vectores  $(l, -n, -m), (-m, l, -n)$  y  $(-n, -m, l)$ .

### 3 Aplicaciones a las equidescomposiciones

Dados dos polígonos  $P_1$  y  $P_2$  de igual área, o dos poliedros de igual volumen, una *equidescomposición* suya es una *disección* (o troceado) de  $P_1$  en un número finito de trozos con los que podemos recomponer  $P_2$ , o viceversa.

La técnica consiste en tomar dos teselaciones periódicas con baldosas asociadas  $P_1$  y  $P_2$ , respectivamente, que también tengan asociado el mismo

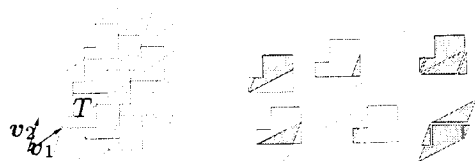


Figura 6:  $T$  y su retículo asociado junto con el proceso de corte

retículo (llamadas *teselaciones congruentes*). A continuación, fijamos una teselación y la "cortamos" con la otra. Como los cortes se van a repetir siguiendo el mismo retículo, tenemos que podemos recomponer  $P_1$  y  $P_2$  con los mismos trozos. Al final, hemos obtenido una equidescomposición de  $P_1$  y  $P_2$ . Pueden verse los detalles de este proceso en [4].

En la Figura 6 podemos ver este proceso de forma esquemática. Tomemos  $P_1$  como  $T$  y  $P_2$  como el rombo formado por los vectores del retículo de la teselación generada por  $T$ .

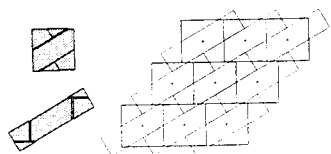


Figura 7: Equidecomposición de rectángulos

En la Figura 7 podemos ver una equidescomposición de un cuadrado y un rectángulo (o dos paralelogramos equiáreos). Puede apreciarse cómo se utiliza una teselación para cortar a la otra.

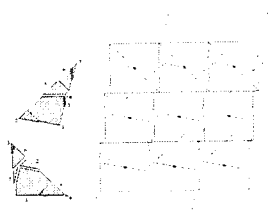


Figura 8: Equidecomposición de triángulos

Dados dos triángulos de la misma área, podemos obtener dos paralelogramos (también de la misma área) doblándolos. Aplicamos el proceso anterior y cortamos con la diagonal de cada paralelo

gramo para obtener las piezas de la equidescomposición de los triángulos originales. También podemos equidescomponer un cuadrado y un triángulo por este mismo proceso de doblarlos en sendos paralelogramos de igual área.

En este punto, podemos equidescomponer dos triángulos de la misma área. Sabemos que una región poligonal puede triangularizarse. Por tanto, podemos equidescomponer dos regiones poligonales de la misma área.

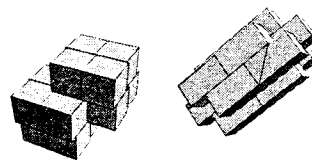


Figura 9: Teselaciones congruentes formadas por un cubo y un prisma rectangular

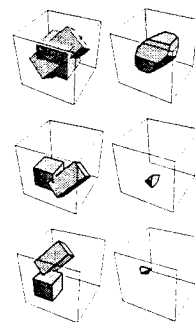


Figura 10: Obtención de tres piezas de la equidescomposición

En el caso tridimensional, no podemos actuar por analogía. Parece lógico que el papel del triángulo lo tome el tetraedro y el del cuadrado, el cubo. No obstante, se sabe que un cubo y un tetraedro del mismo volumen no pueden equidescomponerse, a diferencia de lo que pasa con un cuadrado y un triángulo equiáreos.

Sin embargo, sí podemos aprovechar la misma idea del plano para hacer algunas equidescomposiciones. Por ejemplo, con dos paraleloto pos del mismo volumen: un cubo y un prisma rectangular.

La Figura 9 muestra sus teselaciones congruentes y la Figura 10 nos enseña varios cortes con los que se obtienen algunas de las piezas que for-

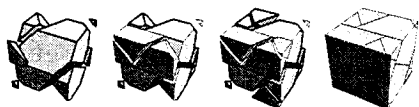


Figura 11: Recomposición del cubo

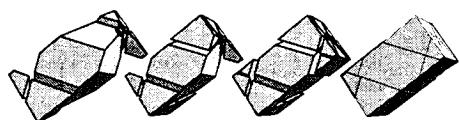


Figura 12: Recomposición del prisma

marán la equidescomposición final. Hay 15 en total. La Figura 11 nos muestra cómo se recompone el cubo a medida que vamos añadiendo las piezas obtenidas. La Figura 12 nos muestra la recomposición del prisma.

## Referencias

- [1] F. Aguiló and M.A. Fiol. An efficient algorithm to find optimal double loop networks. *Discrete Math.* **138** 15-29 (1995).
- [2] F. Aguiló, M.A. Fiol and C. Garcia. Triple loop networks with small transmission delay. *Discrete Math.* **167/168** (1997) 3-16.
- [3] S. Chen and W. Gu, Exact order of subsets of asymptotic bases. *J. Number Theory* **41** (1992) 15-21.
- [4] F. Aguiló, M.A. Fiol and M.L. Fiol. Periodic Tilings as a Dissection Method. *The American Mathematical Monthly*. vol. **107** no. 4 341-352, April 2000.
- [5] P. Esqué, F. Aguiló and M.A. Fiol. Double commutative-step digraphs with minimum diameters. *Discrete Math.* **114** (1993) 147-157
- [6] C.M. Fiduccia, R.W. Forcade and J.S. Zito. Geometry and diameters bounds of directed Cayley graphs of Abelian groups. *Siam J. Discrete Math.* Vol. **11** No. 1 (1998) 157-167
- [7] M.A. Fiol, J.L.A. Yebra, I. Alegre and M. Valero. A discrete optimization problem in local networks and data alignment. *IEEE Trans. Comput.* **C-36** (1987) 702-713
- [8] F.K. Hwang. A survey on double loop networks. *DIMACS Ser. in Discrete Math. and Theor. Comput. Sci.* **5** (1991) 143-151
- [9] D.F. Hsu and X. Jia. Extremal problems in the construction of distributed loop networks. *SIAM J. Discrete Math.* **7** (1994) 57-71
- [10] F.K. Hwang and Y.H. Xu. Double loop networks with minimum delay. *Discrete Math.* **66** (1987) 109-118.
- [11] C.K. Wong and D. Coppersmith. A combinatorial problem related to multimode memory organizations. *J. Ass. Comput. Mach.* **21** (1974) 392-402