

# Análisis multirresolución de métodos iterativos para la deconvolución de imágenes bidimensionales

A. Márquez, A. F. Pérez-Rendón y R. Robles <sup>1</sup>

## Resumen

El problema de la deconvolución de imágenes bidimensionales es un problema inverso muy mal condicionado. Algunas técnicas de regularización se basan en métodos iterativos con o sin preconditionamiento. Proponemos un nuevo método basado en un algoritmo escalonado que trabajando en distintos niveles de resolución consigue recuperar la información válida contenida en la imagen de forma más rápida y eficiente que los métodos existentes. Se muestra un ejemplo numérico para el caso de un núcleo de convolución con variables separadas.

## 1 Introducción

Uno de los problemas más importantes que aparece en el Tratamiento de Imágenes [1] es la recuperación de una imagen a partir de una observación degradada de ella. Sin tener en cuenta la presencia de ruido aditivo inherente a todo proceso de medición empírica, la imagen observada  $g(x, y)$  puede estimarse como la convolución bidimensional de la imagen verdadera  $f(x, y)$  con un filtro invariante espacial  $K(x, y)$ , denominado PSF del sistema:

$$g(x, y) = \iint_{R^2} f(u, v) K(x - u, y - v) du dv \quad (1)$$

El proceso de invertir esta ecuación integral de Fredholm de primera especie y recuperar  $f(x, y)$  a partir del conocimiento tanto de  $g(x, y)$  como del filtro  $K(x, y)$  se denomina deconvolución. Empleando alguna técnica de discretización, la ecuación (1) se escribe en forma matricial como  $KX = Y$ . La deconvolución implica por tanto la

resolución de un sistema de ecuaciones lineales muy grande y muy mal condicionado, por lo que su solución directa, en presencia de ruido, proporciona una reconstrucción que no se parece en nada a la solución real. Es entonces necesario utilizar los denominados métodos de regularización [9, 15] para obtener una reconstrucción suficientemente próxima a la imagen real.

Uno de los métodos más empleados para regularizar un sistema mal condicionado es el de Tikhonov, que emplea un parámetro que controla el grado de regularización. Un primer problema que se plantea es la elección del valor óptimo de este parámetro. La elección a priori de dicho valor es un tema en el que se está trabajando actualmente [2, 14, 16, 4] y sobre el que aún no hay resultados concluyentes.

Otro de los métodos más empleados es el del gradiente conjugado [11, 5], una de cuyas implementaciones más eficientes se denomina algoritmo CGLS. Este algoritmo converge siempre pero la velocidad de convergencia depende del número de condición del sistema, por lo que para sistemas muy mal condicionados como el que nos ocupa es necesario un número prohibitivo de iteraciones. Para acelerar la velocidad de convergencia del algoritmo CGLS se emplean las denominadas técnicas de preconditionamiento; recientemente, se ha definido un preconditionamiento de dos niveles [8, 7]. Sin embargo, los experimentos numéricos han mostrado que en el caso de elegir un valor del parámetro distinto del óptimo, dichas técnicas no son eficientes y la mejor elección es aplicar el algoritmo CGLS sin preconditionar [6, 12] regularizando según el número de iteraciones realizadas.

En este trabajo presentamos una alternativa al preconditionamiento para acelerar la velocidad de convergencia del algoritmo CGLS. En la mayor

<sup>1</sup>Dpto. de Matemática Aplicada 1. Universidad de Sevilla. E-mail: {almar,afpr,rafarob}@us.es

parte de las ocasiones, el filtro  $h(x, y)$  produce una pérdida de información de altas frecuencias espaciales, bien porque la transformada de Fourier del filtro se anula para frecuencias para las cuales la transformada de Fourier de la imagen no es nula, o bien porque la presencia de ruido aleatorio enmascara las altas frecuencias de la imagen. Por consiguiente, es suficiente reconstruir una versión de la imagen con menor resolución.

El análisis multirresolución que proporciona la transformada wavelet discreta [3, 13] es una potente herramienta para analizar imágenes en distintos niveles de resolución. En este trabajo presentamos cómo se desglosa la convolución en cada nivel de resolución y definimos un algoritmo escalonado que permite recuperar la mejor imagen posible, con la información disponible, con mucho menor coste computacional que con el algoritmo CGLS clásico.

## 2 Análisis multirresolución de la deconvolución

En este trabajo consideraremos un problema de deconvolución donde el filtro es de variables separadas, es decir,  $K(x, y) = K_1(x)K_2(y)$ . Este tipo de filtros tiene la ventaja de que permiten resolver problemas más grandes con el mismo tiempo computacional que con filtros más generales.

La versión discreta de la ecuación (1) es una ecuación matricial [10]:

$$G = K_1 F K_2^t \quad (2)$$

donde todas las matrices son cuadradas y del mismo orden  $n$ .

Empleando el producto de Kronecker de matrices, la ecuación (2) puede escribirse como:

$$(K_2 \otimes K_1) \text{vec}(F) = \text{vec}(G) \quad (3)$$

donde  $\text{vec}(A)$  es la matriz columna que se obtiene al yuxtaponer las columnas de la matriz  $A$ , que constituye el sistema que hemos de resolver para reconstruir la imagen  $F$ .

Para analizar el sistema (3) en distintos niveles de resolución emplearemos por simplicidad la transformada bidimensional de Haar usando la descomposición no estándar y suponiendo  $n = 2^L$ ; seguiremos la notación usada en [17] pero introduciremos otra normalización y nuevos subespacios en el análisis multirresolución allí definidos.

Dada la función de escala de Haar  $\phi\phi(x, y) = \chi_{[0,1]}(x)\chi_{[0,1]}(y)$ , definimos sus traslaciones y dilataciones para  $j = 0, \dots, L-1$  como:

$$\begin{cases} \phi\phi_{ik}^j(x, y) = 2^{j-1/4} \phi\phi(2^j x - i, 2^j y - k) \\ \phi\phi_{ik}^{j+1/2}(x, y) = 2^{j+1/4} \phi\phi(2^{j+1} x - i, 2^j y - k) \end{cases} \quad (4)$$

donde  $i, k = 0, \dots, 2^j - 1$  en el nivel  $j$  y  $k = 0, \dots, 2^j - 1$  e  $i = 0, \dots, 2^{j+1} - 1$  en el nivel  $j+1/2$ .

Para cada nivel de resolución  $j$  fijo, el conjunto  $\{\phi\phi_{ik}^j(x, y)\}$  es un sistema ortogonal de vectores que genera un subespacio que denotaremos por  $V^j$ , mientras que el conjunto  $\{\phi\phi_{ik}^{j+1/2}(x, y)\}$  es un sistema ortogonal de vectores que genera otro subespacio que denotaremos por  $V^{j+1/2}$  (la ortogonalidad es una consecuencia inmediata del hecho de que los dominios de definición de las citadas funciones son disjuntos). Por otra parte, aunque no son bases ortonormales, todos los vectores de la base tienen la misma norma ( $2^{-1/4}$ , como se comprueba fácilmente), por lo que la proyección de una función  $f(x, y)$  sobre el espacio  $V^j$  o  $V^{j+1/2}$ , definidas como:

$$\begin{cases} f^j(x, y) = \sum_{i,k=0}^{2^j-1} s_{ik}^j \phi\phi_{ik}^j(x, y) \\ f^{j+1/2}(x, y) = \sum_{i=0}^{2^{j+1}-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} s_{ik}^{j+1/2} \phi\phi_{ik}^{j+1/2}(x, y) \end{cases} \quad (5)$$

constituyen las mejores aproximaciones, en el sentido de la norma  $L^2$ , de la función dada  $f(x, y)$  en los citados subespacios. Los coeficientes  $s_{ik}^j$  y  $s_{ik}^{j+1/2}$  se denominan coeficientes de escala de  $f(x, y)$  en los niveles  $j$  y  $j+1/2$ , respectivamente. Es posible encontrar un algoritmo piramidal que permite obtener de forma recursiva todos los coeficientes de escala de una función dada  $f(x, y)$  de la cual conocemos sus coeficientes de escala a máxima resolución  $L$ ,  $s_{ik}^L = f_{ik}$ . Para  $j = 0, \dots, L-1$  se verifican las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} s_{ik}^{j+1/2} = s_{i,2k}^{j+1} + s_{i,2k+1}^{j+1} \\ s_{ik}^j = s_{2i,k}^{j+1/2} + s_{2i+1,k}^{j+1/2} \end{cases} \quad (6)$$

Por analogía, definiremos los coeficientes de detalle en los niveles  $j$  y  $j+1/2$  como:

$$\begin{cases} w_{ik}^{j+1/2} = s_{i,2k}^{j+1} - s_{i,2k+1}^{j+1} \\ w_{ik}^j = w_{2i,k}^{j+1/2} + w_{2i+1,k}^{j+1/2} \end{cases} \quad (7)$$

Hemos de tener en cuenta que los coeficientes  $w_{ik}^j$  son parte de los coeficientes de wavelet que constituyen la transformada wavelet discreta de la función  $f(x, y)$ , y que a partir de las ecuaciones anteriores se deriva de forma sencilla el algoritmo piramidal para la transformada inversa (véase [17]).

Dada una discretización de los filtros unidimensionales  $K_1(x)$  y  $K_2(x)$ , sean  $N_1$  y  $N_2$  las frecuencias espaciales máximas de sus transformadas discretas de Fourier, y sean  $M_1$  y  $M_2$  las respectivas frecuencias de corte, a partir de las cuales dichas transformadas se anulan o son prácticamente nulas. Entonces, los cocientes  $R_i = N_i/M_i$  representan la resolución máxima de las respectivas imágenes; es decir, si convolucionamos una imagen formada por dos funciones  $\delta$  de Dirac con el filtro  $K_1(x) K_2(y)$ , no podremos resolverlas en la imagen convolucionada salvo que su distancia en horizontal sea mayor que  $R_1$  y su distancia en vertical sea mayor que  $R_2$ . Por consiguiente, en lugar de tratar de reconstruir la imagen real a máxima resolución  $L$ , vamos a reconstruirla en un nivel  $j_0$  en el cual el filtro  $K(x, y)$  no haya producido ninguna pérdida de resolución; ello se consigue tomando como  $p$  el número entero más grande posible para el cual  $p \leq L - \log_2(R)$ , siendo  $R = \max\{R_1, R_2\}$ , y seleccionando el nivel  $j_0 = p$  si  $p+1 > L - \log_2(R_2)$  o el nivel  $j_0 = p+1/2$  si  $p+1 \leq L - \log_2(R_2)$ .

## 2.1 Deconvolución en promedios

En esta sección vamos a describir un método para aproximar los coeficientes de escala de la imagen real en un nivel de resolución  $j$  o  $j+1/2$  dado (en lo que sigue,  $j$  siempre representa un número entero). Llamaremos matriz de promedios de la imagen  $F$  en el nivel de resolución  $j$  a la matriz  $S_F^j$  de orden  $2^j \times 2^j$  cuyos elementos vienen dados por  $\{S_F^j\}_{ik} = s_{i-1, k-1}^j$ . De forma análoga se define la matriz de promedios  $S_F^{j+1/2}$ .

El objetivo es, por lo tanto, aproximar la matriz  $S_F^j$  o  $S_F^{j+1/2}$  en lugar de la propia matriz  $F$ . La aproximación a  $F$  se obtiene multiplicando los elementos de la matriz  $S_F^j$  por las correspondientes funciones de escala  $\phi_{i-1, k-1}^j(x, y)$ . La versión discreta viene dada por:

$$\begin{cases} F^j = S_F^j \otimes [2^{j-1/4} \Xi(2^{L-j}, 2^{L-j})] \\ F^{j+1/2} = S_F^j \otimes [2^{j+1/4} \Xi(2^{L-j-1}, 2^{L-j})] \end{cases} \quad (8)$$

donde  $\Xi(m, n)$  representa la matriz de orden  $m \times n$  cuyos elementos son todos iguales a la unidad. Las matrices  $F^j$  y  $F^{j+1/2}$  representan aproximaciones a la imagen real en sus respectivos niveles  $j$  y  $j+1/2$ . Los resultados de las simulaciones numéricas muestran que constituyen una aproximación suficientemente buena. Por lo tanto, para aproximar la matriz  $S_F^j$  o  $S_F^{j+1/2}$  hemos de encontrar la matriz de promedios que al sustituirla en (8) genere el menor error de convolución posible. Llamaremos residuo  $R(S^j)$  de una matriz  $S^j$  de orden  $2^j \times 2^j$  a la diferencia entre la imagen convolucionada  $G$  y la convolución entre la matriz  $F^j$  que resulta de aplicar (8) y el filtro conocido; de forma análoga se define el residuo  $R(S^{j+1/2})$ . Es decir:

$$\begin{cases} R(S^j) = G - K_1 F^j K_2^t \\ R(S^{j+1/2}) = G - K_1 F^{j+1/2} K_2^t \end{cases} \quad (9)$$

Por consiguiente, la matriz de promedios de la imagen real en cada nivel de resolución viene aproximada por la solución de un problema de minimización:

$$\begin{cases} S_F^j = \min_{S^j} \{ \|R(S^j)\| \} \\ S_F^{j+1/2} = \min_{S^{j+1/2}} \{ \|R(S^{j+1/2})\| \} \end{cases} \quad (10)$$

Dichos mínimos vienen dados por las soluciones de mínimos cuadrados de los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} K_1 F^j K_2^t = G \text{ en el nivel } j \\ K_1 F^{j+1/2} K_2^t = G \text{ en el nivel } j+1/2 \end{cases} \quad (11)$$

las cuales pueden obtenerse aplicando el algoritmo CGLS a las respectivas ecuaciones normales. El inconveniente es que aunque estemos en un nivel de resolución  $j < L$ , todas las matrices son de orden  $2^L \times 2^L$  y el número de condición sigue siendo el mismo. Hemos, pues, de simplificar la complejidad de estos sistemas.

Si  $I^j$  representa la matriz identidad de orden  $2^j$ , llamaremos  $\Phi^{j+1/2}$  a la matriz de orden  $2^{j+1} \times 2^j$  definida como  $\Phi^{j+1/2} = I^j \otimes (1 \ 1)^t$ , y  $\Phi_j^L$  a la matriz de orden  $2^L \times 2^j$  definida como  $\Phi_j^L = \Phi^{L-1/2} \cdot \Phi^{L-3/2} \dots \Phi^{j+3/2} \cdot \Phi^{j+1/2}$ . Dada la matriz  $F$  de la imagen, sus matrices de promedio en los niveles  $j$  y  $j+1/2$ , para  $j = 0, \dots, L-1$ , vienen dadas por:

$$\begin{cases} S_F^j = [\Phi_j^L]^t F \Phi_j^L \\ S_F^{j+1/2} = [\Phi_{j+1}^L]^t F \Phi_j^L \end{cases} \quad (12)$$

**Teorema 1** Fijado un nivel de resolución  $j$ , los residuos de las matrices  $S^j$  y  $S^{j+1/2}$  vienen dados por:

$$\begin{cases} R(S^j) = G - 2^{j-1/4} (K_1 \Phi_j^L) S^j (K_2 \Phi_j^L)^t \\ R(S^{j+1/2}) = G \\ \quad - 2^{j+1/4} (K_1 \Phi_{j+1}^L) S^{j+1/2} (K_2 \Phi_j^L)^t \end{cases} \quad (13)$$

Este teorema nos permite realizar un importante ahorro computacional, pero seguimos calculando los residuos en el nivel  $L$  de máxima resolución. Sin embargo, toda la información de alta resolución presente no puede deberse a la imagen, pues de ella sólo disponemos de su matriz de promedios a nivel  $j$  o  $j+1/2$ . Dicha información por lo tanto no es relevante a la hora de minimizar dicho residuo, por lo que no es necesario considerarla. La solución consiste en bajar de nivel de resolución en el teorema anterior y redefinir el residuo para no considerar niveles más finos que el actual.

Así, dada una matriz de promedios  $S^j$  de orden  $2^j \times 2^j$ , llamaremos residuo reducido  $R^*(S^j)$  a la matriz de promedios en el nivel  $j$  del residuo  $R(S^j)$ . De forma análoga se define el residuo reducido  $R^*(S^{j+1/2})$ . Es decir:

$$\begin{cases} R^*(S^j) = [\Phi_j^L]^t R(S^j) \Phi_j^L \\ R^*(S^{j+1/2}) = [\Phi_{j+1}^L]^t R(S^{j+1/2}) \Phi_j^L \end{cases} \quad (14)$$

**Teorema 2** Fijado un nivel de resolución  $j$ , los residuos reducidos de las matrices de promedios  $S^j$  y  $S^{j+1/2}$  vienen dados por:

$$\begin{cases} R^*(S^j) = S_G^j - 2^{j-1/4} S_{K_1}^j S^j [S_{K_2}^j]^t \\ R^*(S^{j+1/2}) = S_G^{j+1/2} \\ \quad - 2^{j+1/4} S_{K_1}^{j+1} S^{j+1/2} [S_{K_2}^j]^t \end{cases} \quad (15)$$

Recordando que las matrices de promedios de la imagen real en los niveles  $j$  y  $j+1/2$ ,  $S_F^j$  y  $S_F^{j+1/2}$ , que son nuestras incógnitas, son las matrices que minimizan los respectivos residuos reducidos, dichas matrices incógnita vienen dadas por la solución de mínimos cuadrados de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} S_G^j = 2^{j-1/4} S_{K_1}^j S_F^j [S_{K_2}^j]^t \\ S_G^{j+1/2} = 2^{j+1/4} S_{K_1}^{j+1} S_F^{j+1/2} [S_{K_2}^j]^t \end{cases} \quad (16)$$

Además del fuerte ahorro computacional que representa el anterior teorema, los experimentos numéricos muestran que el número de condición de los sistemas (16) es mucho menor conforme disminuye el nivel de resolución considerado, situación que favorece la aplicación del algoritmo CGLS para resolver los citados sistemas.

Finalmente, hemos de considerar que si queremos comparar los resultados del algoritmo en promedios descrito en esta sección y del algoritmo CGLS clásico, hemos de extender nuestra solución  $S_F^j$  o  $S_F^{j+1/2}$  hasta el nivel de resolución máximo. La simple extensión por duplicación que se muestra en (8) produce un efecto de cuadrícula en la reconstrucción que empeora el error de imagen; para suavizar ese efecto es necesario aplicar un filtro de suavizado, el cual mejora sensiblemente el error de imagen. En este trabajo hemos empleado un filtro gaussiano de desviación estándar tal que el alcance del filtro coincida con el número de píxeles duplicados que aparecen en la reconstrucción final en el nivel  $L$ .

## 2.2 Deconvolución en detalles

Si aplicamos el algoritmo en promedios descrito en la sección anterior en un nivel  $j_0$  que corresponde a un valor  $p < L - \log_2(R)$ , hay cierta información del nivel siguiente  $j_0 + 1$  que no estamos considerando. Dicha información puede recuperarse si trabajamos con los coeficientes de detalle en el nivel  $j_0$ . En esta sección vamos a describir un método que permite, dada la matriz de promedios  $S^j$  o  $S^{j+1/2}$  y empleando los correspondientes coeficientes de detalle, reconstruir la matriz de promedios siguiente  $S^{j+1/2}$  o  $S^{j+1}$ , respectivamente.

Llamaremos matriz de detalles de la imagen  $F$  en el nivel de resolución  $j$  a la matriz  $D_F^j$  de orden  $2^j \times 2^j$  cuyos elementos vienen dados por  $\{D_F^j\}_{ik} = w_{i-1, k-1}^j$ . De forma análoga se define la matriz de detalles  $D_F^{j+1/2}$  en el nivel  $j+1/2$ .

Por otra parte, si llamamos  $\Psi^{j+1/2}$  a la matriz de orden  $2^{j+1} \times 2^j$  definida como  $\Psi^{j+1/2} = I^j \otimes (1 \ -1)^t$ , un paso del algoritmo piramidal de la transformada inversa de Haar bidimensional puede

expresarse en forma matricial como:

$$\begin{cases} S^{j+1/2} = \frac{1}{2} \{ \Phi^{j+1/2} S^j + \Psi^{j+1/2} D^j \} \\ S^{j+1} = \frac{1}{2} \{ S^{j+1/2} [\Phi^{j+1/2}]^t \\ + D^{j+1/2} [\Psi^{j+1/2}]^t \} \end{cases} \quad (17)$$

Dada una matriz de promedios  $S^j$ , llamaremos residuo reducido  $R^*(D^j)$  de una matriz de detalles  $D^j$  de orden  $2^j \times 2^j$  al residuo reducido de la matriz de promedios  $S^{j+1/2}$  que se obtiene al aplicar (17). De forma análoga se define el residuo reducido  $R^*(D^{j+1/2})$  de una matriz de detalles de orden  $2^{j+1} \times 2^j$ . El objetivo es, por tanto, resolver el problema de minimización:

$$\begin{cases} D_F^j = \min_{D^j} \{ \|R^*(D^j)\| \} \\ D_F^{j+1/2} = \min_{D^{j+1/2}} \{ \|R^*(D^{j+1/2})\| \} \end{cases} \quad (18)$$

**Teorema 3** *Fijado un nivel de resolución  $j$ , las matrices de detalles  $D^j$  y  $D^{j+1/2}$  que minimizan (18) son las soluciones de mínimos cuadrados de los sistemas:*

$$\begin{cases} S_G^{j+1/2} - 2^{j-3/4} S_{K_1}^{j+1/2} S_F^j [S_{K_2}^j]^t = \\ 2^{j-3/4} (S_{K_1}^{j+1} \Psi^{j+1/2}) D_F^j [S_{K_2}^j]^t \\ S_G^{j+1} - 2^{j-1/4} S_{K_1}^{j+1} S_F^{j+1/2} [S_{K_2}^{j+1/2}]^t = \\ 2^{j-1/4} S_{K_1}^{j+1} D_F^{j+1/2} [S_{K_2}^{j+1} \Psi^{j+1/2}]^t \end{cases} \quad (19)$$

Si comparamos estos sistemas de ecuaciones con los correspondientes del algoritmo de promedios, vemos una diferencia sustancial en los respectivos términos independientes. En el algoritmo en detalles éstos son la diferencia entre dos matrices de promedio; esta diferencia contiene algo de información pero también algo de ruido, y éste se introduce pronto en la solución de los sistemas. Es por ello por lo que es importante considerar el algoritmo en detalles como un refinamiento de la matriz de promedios obtenida con el algoritmo de la sección precedente, de forma que sólo hay que realizar unas pocas iteraciones del algoritmo CGLS. El ruido puede reducirse aplicando un filtro de suavizado a cada columna de  $S^{j+1/2}$  o a cada fila de  $S^{j+1}$ .

### 2.3 Algoritmo escalonado

Presentamos finalmente un algoritmo escalonado para la deconvolución de imágenes bidimensiona-

les que usa los algoritmos de deconvolución en promedios y en detalles descritos en las secciones precedentes. Dicho algoritmo puede resumirse en los siguientes pasos:

- a) Se obtiene el nivel de resolución de partida  $j$  a partir de las transformadas de Fourier del filtro y de la imagen convolucionada.
- b) Se aplica el algoritmo en promedios en dicho nivel de partida para aproximar la matriz de promedios  $S_F^j$ , realizando  $N$  iteraciones del algoritmo CGLS.
- c) Se aplica el algoritmo en detalles en el nivel  $j$  para aproximar la matriz de promedios  $S_F^{j+1/2}$ , realizando  $\alpha N$  iteraciones del algoritmo CGLS ( $\alpha < 1$ ).
- d) Se aplica el filtro de suavizado por columnas para eliminar ruido en  $S_F^{j+1/2}$ .
- e) Se aplica el algoritmo en promedios en el nivel  $j + 1/2$ , realizando  $\alpha N$  iteraciones del algoritmo CGLS, para refinar la matriz  $S_F^{j+1/2}$  (este paso es preciso realizarlo dado que en el paso anterior se puede haber perdido algo de información además del ruido).
- f) Se aplica el algoritmo en detalles en el nivel  $j + 1/2$  para reconstruir la matriz de promedios  $S_F^{j+1}$ , realizando  $\alpha N$  iteraciones del algoritmo CGLS.
- g) Se aplica el filtro de suavizado por filas para eliminar ruido en  $S_F^{j+1}$ .
- h) Se aplica el algoritmo en promedios en el nivel  $j + 1$ , realizando  $\alpha N$  iteraciones del algoritmo CGLS, para refinar la matriz  $S_F^{j+1}$ .
- i) Se obtiene la imagen reconstruida  $F$  duplicando píxeles en  $S_F^{j+1}$  y aplicando el suavizado descrito en la sección 2.2.

## 3 Resultados numéricos

Para comprobar la aplicabilidad del algoritmo escalonado propuesto en este trabajo a un problema real de deconvolución hemos elegido el caso de la observación de una fuente astronómica en presencia de turbulencia atmosférica. El

núcleo de convolución se modela como una función gaussiana  $K(x, y) = K_1(x)K_1(y)$  con  $K_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2\right\}$ , donde la constante  $\sigma$  caracteriza la magnitud de la distorsión; en este trabajo hemos tomado  $\sigma = 5$ , para el cual el filtro se puede discretizar en 37 valores significativos correspondientes a  $x \in [-18, 18]$ . La fuente astronómica es una imagen del planeta Júpiter obtenida con el telescopio espacial Hubble que se encuentra disponible al público en [www.stsci.edu/ftp/software/tables/testdata/restore/data/jupiter](http://www.stsci.edu/ftp/software/tables/testdata/restore/data/jupiter). La Figura 1 (a) muestra la imagen original de tamaño  $128 \times 128$  junto con el resultado de aplicarle el filtro gaussiano, recortada hasta las mismas dimensiones. No se ha añadido ruido aleatorio a esta convolución, pero se ha discretizado en 256 niveles de intensidad redondeando al entero más próximo, lo que añade un pequeño ruido de forma implícita.

La transformada de Fourier (en una ventana de 128 píxeles) del filtro gaussiano se muestra en la Figura 1 (b) (sólo se muestran las frecuencias positivas por ser una función real y simétrica); en dicha figura vemos que los valores significativos de la transformada del filtro alcanzan sólo los primeros 18 píxeles, aproximadamente. Por lo tanto,  $R = \frac{64}{18} \approx 3.5$  y  $p = L - 2 = 5$ ; es decir, el nivel de resolución de partida es  $j_0 = 5$ , que corresponde a una matriz de promedios  $S_F^5$  de orden  $32 \times 32$ .

En la Figura 2 (b) se muestra la velocidad de convergencia del algoritmo escalonado (línea continua) y del algoritmo CGLS clásico aplicado en  $128 \times 128$  (línea discontinua); para evitar problemas de escala se ha suprimido la primera iteración. En el eje de ordenadas se representa el error relativo de imagen, definido como  $\frac{\|F_n - F\|}{\|F\|}$ ; en el eje de abscisas se representa el tiempo relativo, que se define como el cociente entre el tiempo total de computación y el tiempo de computación de una iteración del algoritmo CGLS en el nivel superior  $128 \times 128$ . Por otra parte, mientras la gráfica del algoritmo CGLS en  $128 \times 128$  representa un proceso continuo, la gráfica del algoritmo escalonado muestra los resultados a medida que aumenta el número  $N$  de iteraciones en la fase inicial de tamaño  $32 \times 32$ , tomando incrementos de 10 en 10 iteraciones y para  $\alpha = \frac{1}{5}$ .

Como resultado, el algoritmo escalonado pro-

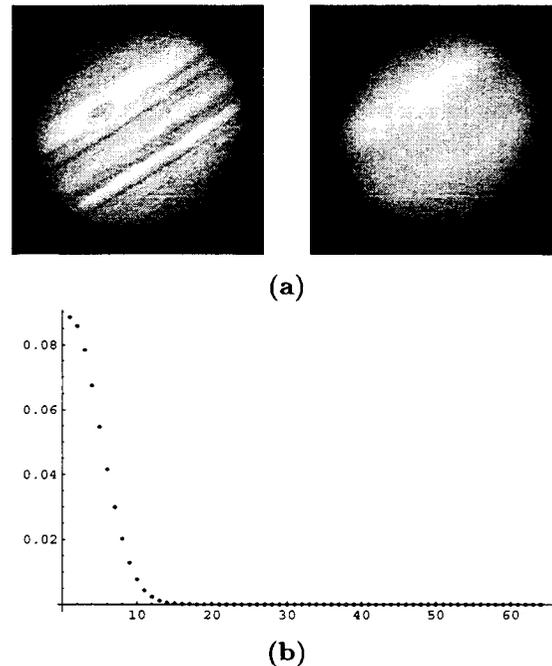


Figura 1: (a) Imagen original de Júpiter e imagen convolucionada con un filtro gaussiano. (b) Transformada de Fourier del filtro de convolución.

puesto en este trabajo encuentra una solución con menor error de imagen que el algoritmo CGLS clásico en aproximadamente la sexta parte de tiempo de computación. Finalmente, la Figura 2 (a) muestra las reconstrucciones obtenidas con sendos algoritmos sin que se noten diferencias apreciables a simple vista.

## Referencias

- [1] ed. A. K. Katsaggelos. *Digital Image Restoration*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [2] D. Calvetti, L. Reichel, F. Sgallari, and G. Spaletta. A regularizing lanczos iteration method for undetermined linear systems. *J. Comp. Appl. Math.*, 115:101–120, 2000.
- [3] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM Publ., CMBS–NSF Series in Appl. Math., vol. 61, Philadelphia, 1992.

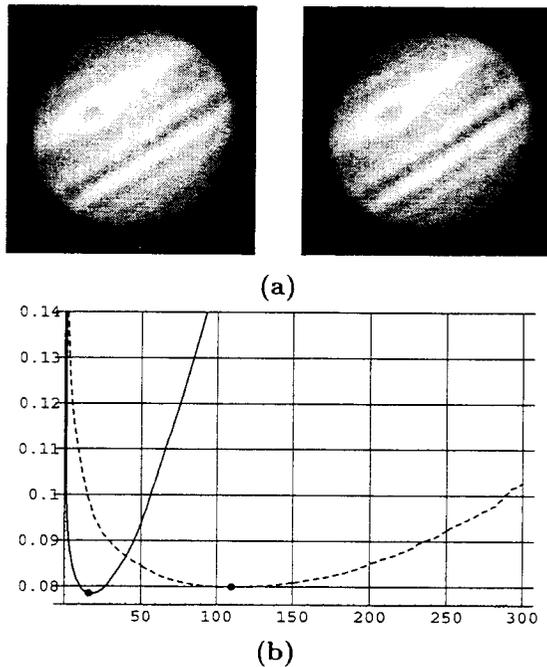


Figura 2: (a) Reconstrucciones óptimas encontradas por el algoritmo escalonado (izquierda) y por el algoritmo CGLS. (b) Gráfica del error relativo de imagen frente al tiempo relativo, para el algoritmo escalonado (línea continua) y el algoritmo CGLS.

- [4] Yan fei Wang and Ting yan Xiao. Fast realization algorithms for determining regularization parameters in linear inverse problems. *Inverse Problems*, 17:281–292, 2001.
- [5] M. Hanke. *Conjugate Gradient Type Methods for Ill-Posed Problems*. Pitman Research Notes in Mathematical Series, Longman Group Limited, Harlow, England, 1995.
- [6] M. Hanke. Iterative regularization techniques in image reconstruction. In D. Colton et al., editor, *Surveys on Solution Methods for Inverse Problems*, Springer-Verlag, Wien, 2000.
- [7] M. Hanke and C. R. Vogel. Two-level preconditioners for regularized inverse problems i: implementation and numerical results. submitted to *SIAM J. Sci. Comput.*
- [8] M. Hanke and C. R. Vogel. Two-level preconditioners for regularized inverse problems i: theory. *Numer. Math.*, 83:385–402, 1999.
- [9] P. C. Hansen. *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems*. SIAM, Philadelphia, 1998.
- [10] P. C. Hansen. Deconvolution and regularization with toeplitz matrices. *Numer. Algorithms*, 29:323–378, 2002.
- [11] M. R. Hestenes and E. Stiefel. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 49:409–436, 1952.
- [12] M. Jacobsen. Two-grid iterative methods for ill-posed problems. Technical report, Technical University of Denmark, 2000. Master Thesis, IMM-EKS-2000-27.
- [13] G. Kaiser. *A Friendly Guide to Wavelets*. Birkhauser, Boston, 1994.
- [14] M. E. Kilmer and D. P. O’Leary. Choosing regularization parameters in iterative methods for ill-posed problems. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 22:1204–1221, 2001.
- [15] A. Neumaier. Solving ill-conditions and singular linear systems: a tutorial on regularization. *SIAM Rev.*, 40:636–666, 1998.
- [16] D. P. O’Leary. Near-optimal parameters for tikhonov and other regularization methods. *SIAM J. Sci. Comput.*, 23:1161–1171, 2001.
- [17] E. J. Stollnitz, T. D. DeRose, and D. H. Salesin. Wavelets for computer graphics: a primer, part i. *IEEE Comput. Graph. Appl.*, 15:76–84, 1995.