Permutaciones alternantes y caminos de Dyck

J. L. Arregui

Dpto. de Matemáticas
Universidad de Zaragoza.
e-mail: arregui@posta.unizar.es

Resumen

Un resultado clásico de André establece que el número de permutaciones alternantes de n elementos ordenados viene dado por la derivada en cero de orden n de la secante o la tangente, según sea n respectivamente par o impar. En este trabajo presentamos una nueva demostración, que resulta al relacionar los caminos de Dyck con las permutaciones alternantes por un lado y con los algoritmos clásicos de Knuth y Buckholtz (para el cálculo de numeros de la tangente y de la secante) por otro.

1 Permutaciones y caminos

Sea S_n el grupo de permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Se dice que $\sigma \in S_n$ es una *permutación alternante* si empieza bajando y alternativamente sube y baja, es decir si

$$\sigma(1) > \sigma(2) < \sigma(3) > \sigma(4) < \cdots .$$

Llamaremos $\mathcal{A}_n$ al conjunto de tales permutaciones para cada n. El Teorema de André (1881, [1]) nos dice cuántos elementos tiene $\mathcal{A}_n$:

$$\#\mathcal{A}_n = (\tan + \sec)^{(n)}(0) .$$

Las funciones secante y tangente son respectivamente par e impar; se sigue que, para cada natural n, $(\tan + \sec)^{(2n)}(0) = \sec^{(2n)}(0)$ (los *números de la secante*) y $(\tan + \sec)^{(2n-1)}(0) = \tan^{(2n-1)}(0)$ (los *números de la tangente*).

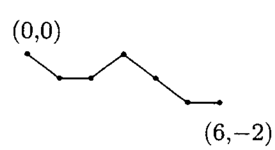
Comprobemos el resultado para $n = 5$: $\tan^{(5)}(0) = 16$, y

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_5 = \{&(5\,1\,4\,2\,3), (5\,1\,3\,2\,4), (5\,2\,4\,1\,3), (5\,2\,3\,1\,4),\\ &(5\,3\,4\,1\,2), (4\,1\,5\,2\,3), (4\,1\,3\,2\,5), (4\,2\,5\,1\,3),\\ &(4\,2\,3\,1\,5), (4\,3\,5\,1\,2), (3\,1\,5\,2\,4), (3\,1\,4\,2\,5),\\ &(3\,2\,5\,1\,4), (3\,2\,4\,1\,5), (2\,1\,5\,3\,4), (2\,1\,4\,3\,5)\}.\end{aligned}$$

El teorema de André no ha sido nunca universalmente conocido, pese a lo elemental de su enunciado y de algunas demostraciones ([1, 3, 4]). De hecho fue redescubierto y publicado como un resultado nuevo al menos una vez, en 1966, por R. Entringer([3]).

La demostración que presentamos en este trabajo resalta su naturaleza combinatoria, en comparación con otras basadas en las series de Taylor.

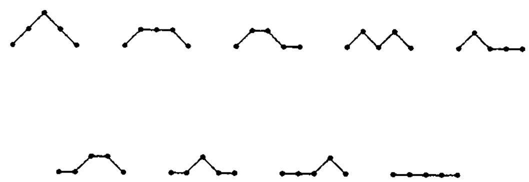
En lo que sigue, un *camino* de n pasos será cualquier $\bar{\lambda} \in \{-1, 0, 1\}^n$. Se visualiza uniendo $(0, 0)$ con (n, s) en el retículo $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ en n pasos, sumando en cada uno el vector $(1, \lambda_j)$, con $s = \sum_j \lambda_j$. También podemos considerar que el mismo camino une (a, b) con $(a + n, b + s)$.



$\bar{\lambda} = (-1, 0, 1, -1, -1, 0)$

La *lista vacía*, por definición, es el único camino de 0 pasos.

Un camino $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ es un *camino de Motzkin* si $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 0$ y $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \geq 0$ para cada $1 \leq k \leq n$. El conjunto de caminos de Motzkin de n pasos es $\mathcal{M}_n$. Son exactamente los caminos que unen $(0, 0)$ con $(n, 0)$ dentro del semiplano superior $\{(x, y) : y \geq 0\}$. Por ejemplo, los nueve caminos de Motzkin en $\mathcal{M}_4$ se visualizan como sigue:



La lista vacía es el único camino de $\mathcal{M}_0$.

Dos caminos $\bar\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n_1})$ y $\bar\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_{n_2})$ se pueden encadenar, formando $(\bar\lambda, \bar\mu) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n_1}, \mu_1, \ldots, \mu_{n_2})$. Uno o los dos entre $\bar\mu$ y $\bar\lambda$ podría ser la lista vacía, y entonces $(\bar\lambda, \bar\mu) = \bar\lambda$ ó $\bar\mu$ ó vacío. También podríamos encadenar tres o más caminos, con la notación análoga.

En particular, dado $k \in \mathbf{N}$ escribiremos $-1_k = (\underbrace{-1, \ldots, -1}_{k \text{ veces}})$, así que $(\bar\lambda, -1_k) = (\bar\lambda, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{k \text{ veces}})$. También puede ser $k = 0$, definiendo -1_0 como la lista vacía.

Si $\bar\lambda$ es un camino tal que $\lambda_j \neq -1$, entonces $\bar\lambda - e_j$ es el camino $\bar\mu$ dado por $\mu_i = \lambda_i$ para $i \neq j$ y $\mu_j = \lambda_j - 1$. Análogamente definimos $\bar\lambda + e_j$ si $\lambda_j \neq 1$.

El *lema de reducción* es gráficamente evidente y dice que, para cualquier $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $(\bar\lambda, \bar\mu) \in \mathcal{M}_n$ si y sólo si $(\bar\lambda, 0, \bar\mu) \in \mathcal{M}_{n+1}$, si y sólo si $(\bar\lambda, 1, -1, \bar\mu) \in \mathcal{M}_{n+2}$. En otras palabras, al suprimir o añadir un paso plano (0) o una cúspide $(1, -1)$ transformamos un camino de Motzkin en otro camino de Motzkin.

(0, 1, 0, 1, −1, −1)   (0, 1, 0, −1)   (0, 1, −1)   (0)

Un *camino de Dyck* de n pasos es un camino de Motzkin de n pasos sin pasos planos, es decir un camino en $\mathcal{M}_n \cap \{-1, 1\}^n$. Todo camino de Motzkin tiene el mismo número de 1's y −1's, por lo que el número de pasos de un camino de Dyck debe ser par. El conjunto de caminos de Dyck de $2n$ pasos se denota $\mathcal{D}_{2n}$. Si suprimimos una cúspide en un camino de Dyck obtenemos otro camino de Dyck, y si reiteramos llegaremos a $(-1, 1) \in \mathcal{D}_2$.

Definición 1 Sea

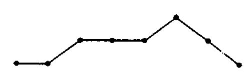
$$\Phi \colon \coprod_{n=1}^{\infty} S_{n+1} \longrightarrow \coprod_{n=1}^{\infty} \{-1, 0, 1\}^n$$

definida como sigue: para cada $n \in \mathbf{N}$ y $\sigma \in S_{n+1}$, $\Phi(\sigma)$ es el camino $\bar\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tal que, en la lista

$$\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n), \sigma(n+1)$$

$\lambda_j + 1$ es el número de vecinos de j que son mayores que j.

Sea por ejemplo $\sigma = (8, 2, 4, 6, 5, 7, 3, 1) \in S_8$. El único vecino de 1 (necesariamente mayor que 1) es 3, así que si $\Phi(\sigma) = \bar\lambda$ tendremos $\lambda_1 + 1 = 1$ y $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 + 1 = 2$ porque 2 está entre 8 y 4, ambos mayores que 2; análogamente $\lambda_5 = 1$, mientras que $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ y $\lambda_6 = \lambda_7 = -1$; $\bar\lambda$ es en definitiva el camino de Motzkin



$(0, 1, 0, 0, 1, -1, -1)$.

Es claro que para cada $\bar\lambda = \Phi(\sigma)$, $\lambda_1 \geq 0$ y $\lambda_n \leq 0$, como en los caminos de Motzkin.

Definición 2 Dado un camino $\bar\lambda$, $\nu(\bar\lambda)$ es el número de permutaciones σ tales que $\Phi(\sigma) = \bar\lambda$.

Obviamente $\nu(\bar\lambda) > 0$ si y sólo si $\bar\lambda$ está en la imagen de Φ.

Lema 3 *Sea $\bar\lambda$ un camino cualquiera. Entonces*

(i) $\nu(\bar\lambda, 0) = 2\nu(\bar\lambda)$, *y*

(ii) $\nu(\bar\lambda, -1) = 2 \sum_{\lambda_j = 0} \nu(\bar\lambda - e_j) + \sum_{\lambda_j = 1} \nu(\bar\lambda - e_j)$.

Demostración: Un ejercicio; sólo hay que comparar, para $\sigma \in S_{n+1}$, $\Phi(\sigma)$ con $\Phi(\tilde\sigma)$, donde $\tilde\sigma \in S_n$ es lo que queda en la lista de σ cuando suprimimos $n + 1$. ∎

Proposición 4 *Para cada camino $\bar\lambda$:*

(i) $\nu(\bar\lambda, 0, -1_k) = 2(k+1)\nu(\bar\lambda, -1_k)$ *para cada* $k \geq 0$, *y*

(ii) $\nu(\bar{\lambda}, 1, -1_k) = k(k+1)\nu(\bar{\lambda}, -1_{k-1})$ *para cada* $k \geq 1$.

Demostración: Se sigue por inducción sobre k. Si $k = 0$ entonces (i) es la primera parte del lema 3 y, una vez probado (i) para todo k, (ii) se sigue inductivamente de (i) y el lema. ■

Teorema 5 $\Phi(S_{n+1}) = \mathcal{M}_n$.

Demostración: Por la proposición 4 y el lema de reducción, sólo necesitamos comprobar los casos $n = 1$ y $n = 2$. Notemos que siempre podremos suprimir un último paso plano o cúspide en $\bar{\lambda} = \Phi(\sigma)$, ya que $\bar{\lambda}$ empieza con 0 ó 1 y termina con 0 ó -1. ■

Observemos ahora que $\Phi(\sigma)$ es un camino de Dyck en $\mathcal{D}_{2n}$ si y sólo si $\sigma \in \mathcal{A}_{2n+1}$. Tenemos por tanto:

Teorema 6 $\Phi(\mathcal{A}_{2n+1}) = \mathcal{D}_{2n}$, *y*

$$\#\mathcal{A}_{2n+1} = \sum_{\bar{\lambda} \in \mathcal{D}_{2n}} \nu(\bar{\lambda}) .$$

También queremos contar los elementos de $\mathcal{A}_{2n}$. Si $\sigma \in S_{n+1}$, sea $(\sigma, n+1) \in S_{n+1}$ la permutación dada por $(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n), n+1)$.

Definición 7 Para cada camino $\bar{\lambda}$, sea $\eta(\bar{\lambda})$ el número de las $\sigma \in S_n$ tales que $\Phi(\sigma, n+1) = \bar{\lambda}$, donde n es el número de pasos de $\bar{\lambda}$.

Notemos que $\eta(\bar{\lambda}) = 0$ si $\bar{\lambda}$ no es un camino de Motzkin, y

$$\Phi(\sigma, n+1) = \begin{cases} (\Phi(\sigma), 0) & \text{si } n = \sigma(n) , \\ (\Phi(\sigma) + e_{\sigma(n)}, -1) & \text{si } n \neq \sigma(n) . \end{cases}$$

Este hecho implica, análogamente al lema 3, lo que sigue:

Lema 8 *Para cada camino* $\bar{\lambda}$,

(i) $\eta(\bar{\lambda}, 0) = \eta(\bar{\lambda})$, *y*

(ii) $\eta(\bar{\lambda}, -1) = 2 \sum_{\lambda_j = 0} \eta(\bar{\lambda} - e_j) + \sum_{\lambda_j = 1} \eta(\bar{\lambda} - e_j)$.

Proposición 9 *Para cada camino* $\bar{\lambda}$,

(i) $\eta(\bar{\lambda}, 0, -1_k) = (2k+1)\eta(\bar{\lambda}, -1_k)$ *para cada* $k \geq 0$, *y*

(ii) $\eta(\bar{\lambda}, 1, -1_k) = k^2 \eta(\bar{\lambda}, -1_{k-1})$ *par cada* $k \geq 1$.

Demostración: Se prueba por inducción a partir del lema anterior, igual que la proposición 4 se sigue del lema 3. ■

Teorema 10 *Para todo* $n \in \mathbf{N}$

$$\#\mathcal{A}_{2n} = \sum_{\bar{\lambda} \in \mathcal{D}_{2n}} \eta(\bar{\lambda}) .$$

Demostración: Es claro que $(\sigma, 2n+1) \in \mathcal{A}_{2n+1}$ si y sólo si $\sigma \in \mathcal{A}_{2n}$. ■

2 Los números de la tangente

Siguiendo a Knuth y Buckholtz ([5]), escribimos los números de la tangente

$$T_n = \tan^{(n)}(0) .$$

Como $\tan' = 1 + \tan^2$, es fácil ver que

$$\tan^{(n)} z = P_n(\tan z) ,$$

con

$$P_0(x) = x , \; P_{n+1}(x) = (1 + x^2) P_n'(x) .$$

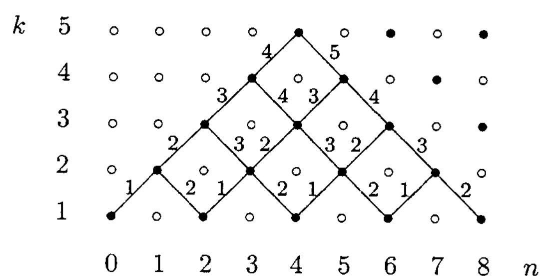
Cada P_n es un polinomio de grado $n+1$, par si n es impar y viceversa. La recurrencia dada antes muestra que, de hecho, si escribimos $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} T_{n,k} \, x^k$ tenemos

$$T_{0,k} = \delta_{1,k} , \; T_{n+1,k} = (k-1)T_{n,k-1} + (k+1)T_{n,k+1} . \tag{1}$$

Así obtenemos la sucesión de los números de la tangente, ya que

$$T_{n,0} = P_n(0) = \tan^{(n)}(0) = T_n .$$

Podemos interpretar los valores $T_{n,k}$ como sigue: consideremos el retículo $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ de puntos (n, k) (sólo nos interesan si $n \geq 0$ y $k \geq 1$), y señalemos aquellos para los que $T_{n,k} > 0$, comenzando con $(0, 1)$. Contamos entonces el número de maneras que nos permiten llegar desde $(0, 1)$ hasta cualquier otro punto señalado siguiendo algún camino, sabiendo que en cada paso podemos acceder desde (n, k) solamente a $(n+1, k+1)$ y a $(n+1, k-1)$, y podemos hacerlo de k maneras distintas. En el dibujo, el número contiguo a cada paso especifica de cuántas maneras podemos efectuarlo.



Se sigue directamente de (1) que el número de maneras de llegar a (n,k) es precisamente $T_{n,k}$.

Sea $\nu_0(\bar\lambda)$ el número de maneras en que podemos seguir un camino $\bar\lambda$ como hemos dicho. Por supuesto, es el producto de los números para cada uno de los pasos que forman $\bar\lambda$. Notemos que $T_{2n,1} = T_{2n+1,0} = T_{2n+1}$ por (1). Para llegar desde $(0,1)$ hasta $(2n,1)$ podemos seguir uno cualquiera de todos los caminos de Dyck de $2n$ pasos (en el dibujo aparecen simultáneamente los del caso $n=4$). Tenemos por tanto

$$T_{2n+1} = \sum_{\bar\lambda\in\mathcal{D}_{2n}} \nu_0(\bar\lambda).$$

Para cada camino de Dyck $(\bar\lambda, 1, -1_k)$, el valor de ν_0 es $\nu_0(\bar\lambda)$ multiplicado por el número de formas de dar el último tramo descendente (es decir, por $(k+1)!$) y por las k maneras de hacer el último paso ascendente. Para el camino de Dyck $(\bar\lambda, -1_{k-1})$ es análogo, y

$$\begin{aligned}\nu_0(\bar\lambda,1,-1_k) &= (k+1)!\,k\,\nu_0(\bar\lambda)\\ &= (k+1)\,k\,k!\,\nu_0(\bar\lambda)\\ &= (k+1)\,k\,\nu_0(\bar\lambda,-1_{k-1}),\end{aligned}$$

la misma recurrencia que en la Proposición 4. Como $\nu_0(1,-1) = \nu(1,-1) = 2$ concluimos que $\nu_0 = \nu$ para los caminos de Dyck (no para el resto, donde $\nu = 0 \neq \nu_0$). Teniendo en cuenta el teorema 6, concluimos que en efecto

$$T_{2n+1} = \sum_{\bar\lambda\in\mathcal{D}_{2n}} \nu(\bar\lambda) = \#\mathcal{A}_{2n+1}.$$

3 Los números de la secante

Otra vez como en [5], escribimos los números de la secante $E_n = \sec^{(n)}(0)$.

Ahora $\sec' z = \sec z \, \tan z$, y entonces

$$\sec^{(n)} z = (\sec z)\, Q_n(\tan z),$$

con

$$Q_0 = 1,\ Q_{n+1}(x) = xQ_n(x) + (1+x^2)Q_n'(x).$$

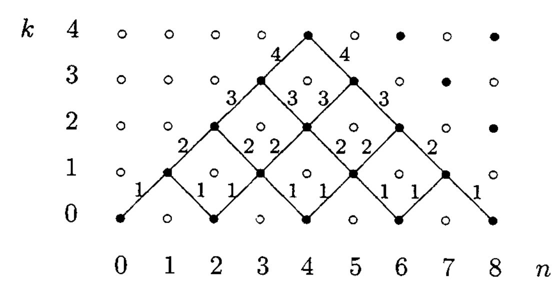
Cada Q_n es un polinomio de grado n, par o impar según lo sea n. De hecho, si $Q_n(x) = \sum_{k=0}^n E_{n,k}\, x^k$ tenemos

$$E_{0,k} = \delta_{0,k}\,,\ E_{n+1,k} = kE_{n,k-1} + (k+1)E_{n,k+1}. \tag{2}$$

Esto da los números de la secante, ya que

$$E_{n,0} = Q_n(0) = \sec^{(n)}(0) = E_n.$$

Visualizamos los números $E_{n,k}$ mediante (2) al igual que en el caso de la tangente, sólo que ahora comenzamos en el punto $(0,0)$, dando el paso de (n,k) a $(n+1,k+1)$ de $k+1$ maneras posibles y de (n,k) a $(n+1,k-1)$ de k formas posibles.



$E_{2n,0} = E_{2n}$, así que si escribimos $\eta_0(\bar\lambda)$ para el número de maneras en que podemos seguir el camino $\bar\lambda$ tenemos

$$E_{2n} = \sum_{\bar\lambda\in\mathcal{D}_{2n}} \eta_0(\bar\lambda).$$

En este caso resulta que, para caminos de Dyck,

$$\begin{aligned}\eta_0(\bar\lambda,1,-1_k) &= k!\,k\,\eta_0(\bar\lambda)\\ &= k^2\,(k-1)!\,\eta_0(\bar\lambda)\\ &= k^2\,\eta_0(\bar\lambda,-1_{k-1}),\end{aligned}$$

y $\eta_0(1,-1) = 1$. Como también $\eta(1,-1) = 1$ y la recurrencia es la de la proposición 9, concluimos que η_0 coincide con η en los caminos de Dyck, y por el teorema 10

$$E_{2n} = \sum_{\bar{\lambda} \in \mathcal{D}_{2n}} \eta(\bar{\lambda}) = \#\mathcal{A}_{2n}\,.$$

Notas. Las recurrencias (ii) en las proposiciones 4 y 9 se pueden obtener directamente sin hacer mención de los caminos de Motzkin, considerando sólo caminos con pasos en $\{-1, 1\}$ y la aplicación Φ definida sobre el conjunto de permutaciones alternantes $\mathcal{A}_{2n+1}$ (en otras palabras, restringiéndonos a caminos de Dyck desde el principio). La demostración del teorema sería de esta manera más corta, pero más complicada.

Además, nos parece interesante la conexión mostrada entre todas las permutaciones y los caminos de Motzkin, via Φ. Esta aplicación Φ surge de forma natural al tratar de obtener algoritmos para el cálculo de $\zeta(2n)$, como puede verse en [2]).

Referencias

[1] D. André.
Memoire sur le permutations alternées.
Journal of Mathematics.
vol. 7 pp.167–184. 1881.

[2] J. L. Arregui.
Tangent and Bernoulli numbers related to Motzkin and Catalan numbers by means of numerical triangles.
http://arXiv:math.NT/0109108.

[3] R. C. Entringer.
A combinatorial interpretation of the Euler and Bernoulli numbers.
Nieuw Arch. Wisk. 3.
vol. 14 pp.241–246. 1966.

[4] R. Honsberger.
Mathematical Gems III.
Math. Assoc. Amer., Washington, DC.
1985.

[5] D. E. Knuth y T. J. Buckholtz.
Computation of tangent, Euler and Bernoulli numbers.
Math. Comp.
vol. 21 pp.663–688. 1967.