Máximas aristas de un grafo sin subgrafos menores completos

M. Cera, A. Diánez, P. García–Vázquez[1]y J.C. Valenzuela[2]

Resumen

En este trabajo analizamos la estructura de un grafo con el máximo número de aristas posible, sin contener un subgrafo contractible a un grafo completo. Bajo ciertas hipótesis sobre los órdenes del grafo y del grafo completo, resolveremos este problema, tanto en el sentido de encontrar el valor exacto del número máximo de aristas, como en el de caracterizar los grafos extremales.

1 Introducción

Uno de los problemas extremales más conocidos dentro de la Teoría de Grafos consiste en la búsqueda del valor exacto de la función $ex(n; F)$, es decir, el máximo número de aristas de un grafo con n vértices sin contener a F como subgrafo, siendo F un grafo cualquiera. El resultado más relevante en este área fue demostrado por P. Turán [1] en 1941, y responde a la cuestión antes planteada cuando F es un grafo completo. El valor exacto de la función $ex(n; K^p)$ viene dado por el número de aristas del único grafo $(p-1)$−partito completo cuyos vértices están repartidos entre sus clases del modo más igualitario posible. Además, dicho grafo, conocido como *Grafo de Turán*, es también el único grafo de ese tamaño que no contiene a K^p como subgrafo.

Este problema supuso, sin duda, el inicio de la Teoría Extremal de Grafos, con la aparición de numerosos problemas extremales que relacionan diversos invariantes de un grafo, como el número de aristas, la valencia media o el número cromático, con la propiedad de contener a cierto grafo F como subgrafo. Dos de esos problemas, consisten en la búsqueda del valor exacto de : (1) la función $ex(n; TK^p)$, esto es, el máximo número de aristas de un grafo de orden n sin contener un subgrafo homeomorfo a un grafo completo de orden p, y (2) la función $ex(MK^p)$, es decir, el máximo número de aristas de un grafo de orden n sin contener un subgrafo contractible a un grafo completo de orden p.

En lo referente al segundo de estos problemas, en el cual nos centraremos en este trabajo, sólo se conocen valores exactos de la función para $p \leq 8$ (ver [2],[3]) aunque existen muchos otros trabajos en los que se aportan cotas para la función. En todos estos trabajos se estudia el problema de manera asintótica, es decir, para valores fijos de p y suponiendo n suficientemente grande.

En este trabajo, aprovechando valores conocidos para la función $ex(n; TK^p)$ daremos el valor exacto de la función $ex(n; MK^p)$ para n y p relacionados entre sí, y caracterizaremos la familia $EX(n; MK^p)$ de grafos de orden n con $ex(n; MK^p)$ aristas que no contienen un subgrafo contractible a K^p. Curiosamente, veremos como las soluciones obtenidas pueden ser expresadas en términos del Grafo de Turán.

2 Principales resultados

Es evidente que los dos problemas a los que hemos hecho referencia están relacionados entre sí, como pone de manifiesto el siguiente resultado.

Proposición 1 *Si un grafo G contiene un subgrafo homeomorfo a K^p entonces contiene un subgrafo contractible a K^p.*

Por un lado, y como consecuencia de este resultado, podemos deducir una relación existente entre los valores de las respectivas funciones extremales.

[1] Dpto. de Matemática Aplicada I. Universidad de Sevilla. E-mail: {mcera,anadianez,pgvazquez}@us.es

[2] Dpto. de Matemáticas. Universidad de Cádiz. E-mail: jcarlos.valenzuela@uca.es

Corolario 2 *a)* $ex(n; MK^p) \leq ex(n; TK^p)$

b) Si $ex(n; MK^p) = ex(n; TK^p)$, *entonces* $EX(n; MK^p) \subseteq EX(n; TK^p)$

Debemos pues dedicarnos a comprobar que, imponiendo ciertas restricciones a n y p, también es cierta la otra desigualdad. Para ello, tengamos en cuenta que en [5] se relaciona al grafo de Turán con el problema que estamos tratando.

Teorema 3 *(ver [5]) Si* $p \leq n \leq 2p-3$, *entonces el grafo de Turán* $T_{2p-n-1}(n)$ *no es contractible a* K^p.

De lo que se desprende, por definición de la función extremal, que el número de Turán t_{2p-n-1} es una cota inferior de dicha función, imponiendo las restricciones oportunas a los valores de n y p.

Proposición 4 *Si* $p \leq n \leq 2p-3$ *entonces* $ex(n; MK^p) \geq t_{2p-n-1}(n)$.

Finalmente, teniendo en cuenta que el valor exacto para la función $ex(n; TK^p)$, probado en [4], coincide con el número de Turán antes citado, es posible deducir el resultado central de este trabajo.

Teorema 5 *Si* $\left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil \leq p \leq n$, *entonces* $ex(n; MK^p) = t_{2p-n-1}(n)$

Por último, para caracterizar la familia $EX(n; MK^p)$ formada por aquellos grafos de orden n con $ex(n; MK^p)$ aristas que no contienen ningún subgrafo contractible a K^p, haremos uso del Corolario 2 y de la caracterización de la familia extremal para el caso topológico dada por el siguiente teorema.

Teorema 6 *(ver [4]) Sean n y p dos naturales tales que* $\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p \leq n-2$. *Entonces se tiene que*

$$EX(n; TK^p) = \{T_{2p-n-1}\}$$

Teniendo en cuenta el Teorema 3, se obtiene la otra contención. Con lo que podemos caracterizar la familia extremal del modo siguiente.

Teorema 7 *Sean n y p dos naturales tales que* $\left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \leq p \leq n-2$. *Entonces se tiene que*

$$EX(n; MK^p) = EX(n; TK^p) = \{T_{2p-n-1}\}$$

Referencias

[1] P. Turán *Eine extremalaufgabe aus der graphentheorie.* Mat. Fiz. Lapok vol.48 pp.436-452. 1941.

[2] Leif K. Jorgensen *Contractions to* K^8. Journal of Graph Theory. vol.18, n5 pp.431-448. 1994.

[3] W. Mader *3n-5 edges do force a subdivision of* K^5. Combinatorica. vol.18,n4 pp.569-595. 1998.

[4] M.Cera, A.Dianez and P.Garcia-Vazquez. *Turán's Graphs used to advance in a topological extremal problem.* Preprint.

[5] M.Cera, A.Dianez and P.Garcia-Vazquez. *Minor extremal problems using Turán's Graphs.* Preprint.