Digrafos endo-circulantes: un resumen[1]

J.M. Brunat y M. Maureso[2]

Resumen

Se han utilizado numerosas familias de digrafos para modelar redes de interconexión. Los digrafos endo-circulantes son un marco general en el que tienen cabida la mayoría de estos modelos. En este resumen se hace una revisión de los resultados que se tienen acerca de los digrafos endo-circulantes.

1 Introducción

Dado un grupo abeliano A, un subconjunto Δ de A y un endomorfismo ϕ de A, el *digrafo endo-circulante* $G_A(\phi, \Delta)$ tiene como conjunto de vértices A y cada vértice x es adyacente a $\phi(x)+a$, para todo $a \in \Delta$. A los elementos de Δ los llamaremos *colores* o *pasos*.

La definición proviene del intento de dar una definición genérica en la que enmarcar familias utilizadas en contextos diferentes, principalmente en la modelización de redes de interconexión. Veamos algunos ejemplos.

Los digrafos de de Bruijn $B(d,k)$, analizados inicialmente en el contexto de registros de desplazamiento, constituyen una familia de digrafos estudiados como modelo de redes de interconexión y de sistemas multiprocesadores, pues tienen diámetro pequeño y disponen de un protocolo simple de comunicación [9]. Un *digrafo de de Bruijn* $B(d,k)$ tiene como vértices las secuencias $x_1x_2\dots x_k$, con $x_i \in \{0,1,\dots,d-1\}$, y cada vértice $x_1x_2\dots x_k$ es adyacente hacia los vértices $x_2\dots x_kx$, para todo $x \in \{0,1,\dots,d-1\}$. Un digrafo $B(d,k)$ es un digrafo endo-circulante $G_A(\phi,\Delta)$, siendo $A = \mathbb{Z}_d^k$, el endomorfismo ϕ el *shift* hacia la izquierda $\phi(x_1x_2\dots x_k) = x_2\dots x_kx_1$, y $\Delta = \{(0,\dots,0,x) \in \mathbb{Z}_d^k\}$.

Otra familia de digrafos propuesta como modelo de redes de interconexión es la de los digrafos c-circulantes, introducidos y estudiados por Fiol, Mora y Serra [18, 19, 22, 5], que se definen como sigue: dados un entero positivo N, un subconjunto $\Delta \subseteq \mathbb{Z}_N$, y $c \in \mathbb{Z}_N$, el *digrafo c-circulante* $G_N(c,\Delta)$ tiene como conjunto de vértices $\mathbb{Z}_N$ y como arcos los pares $(x, cx+a)$, para todo $a \in \Delta$. Si tomamos $A = \mathbb{Z}_N$ y el endomorfismo ϕ definido por $\phi(x) = cx$, el digrafo c-circulante $G_N(c,\Delta)$ es el digrafo endo-circulante $G_A(\phi,\Delta)$. Cuando el conjunto de pasos es $\Delta = \{e, e+h, \cdots, e+(d-1)h\} = e + [0, d-1]h$, con $e, h \in \mathbb{Z}_N$ y el orden de h en $\mathbb{Z}_N$ mayor que d, tenemos los *digrafos consecutivos* introducidos en [2]; si $h = 1$ se obtienen los *digrafos d-consecutivos* presentados por Du, Hsu, Hwang et al., de los cuales han estudiando, por ejemplo, la conectividad y la hamiltonicidad, [11, 12, 13].

Los digrafos de Cayley son buenos modelos de redes de interconexión de arquitecturas paralelas, pues el hecho que sean vértice-transitivos permite disponer de estrategias de encaminamiento y esquemas de comunicación comunes para todos los vértices. Dado un grupo A y un subconjunto S de A, el *digrafo de Cayley* $\mathrm{Cay}(A,S)$ tiene por conjunto de vértices A y por arcos los pares ordenados (x, sx), para todo $s \in S$. Cuando A es un grupo abeliano finito el digrafo $\mathrm{Cay}(A,S)$ es un digrafo endo-circulante $G_A(I,S)$, siendo I el endomorfismo identidad. Si $A = \mathbb{Z}_N$, al digrafo se le llama *circulante*.

Los *ciclos generalizados completos* $C(d,n) = \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_d, \{(1,x) : x \in \mathbb{Z}_d\})$ y sus línea iterados $C(d,n,k) = L^{k-1}C(d,n)$ constituyen otro ejemplo de digrafos endo-circulantes: tomando $A = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_d^k$, $\Delta = \{(1,0,\dots,0,x); x \in \mathbb{Z}_d\}$ y $\phi(i,x_1,x_2,\dots,x_k) = (i,x_2,\dots,x_k,x_1)$, se tiene que $G_A(\phi,\Delta) \simeq C(d,n,k)$. Estos digrafos han sido estudiados en diversos contextos. Fiol et al. a [15] los

[1]Trabajo parcialmente subvencionado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología con el proyecto BFM2001-2340, y por dicho ministerio conjuntamente con el Fondo Europeo de Desarrollo Regional con el proyecto TIC-2001-2171

[2]Departamento Matemàtica Aplicada II, UPC. E-mail: {brunat,maureso}@ma2.upc.es

introducen como modelos de memorias dinámicas vectoriales con ciertas coloraciones, Preager en [20] analiza la arco-transitividad, y Brunat et al. en [1] estudian su carácter Cayley y su relación con los códigos cíclicos.

Otros digrafos que han merecido especial atención son los digrafos mariposa, en este caso por su alta transitividad y por la facilidad con la que se pueden adaptar algoritmos FFT (Fast Fourier Transfom) a su topología [9]. Un *digrafo mariposa* $WDB(d,n)$ (Wrapped Directed Butterfly) tiene por vértices los elementos de $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_d^n$ y cada vértice $(i, x_0, \ldots, x_{n-1})$ es adyacente hacia los vértices $(i+1, x_0, \ldots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1})$, para todo $z \in \mathbb{Z}_d$. El digrafo mariposa $WDB(d,n)$ es isomorfo al digrafo $C(d,n,n)$, por lo tanto es también un digrafo endo-circulante.

El presente resumen se organiza como sigue. En la segunda sección se presenta la caracterización del la conexión fuerte de los digrafos endo-circulantes, cuyas referencias son [6, 17]. A continuación se estudia la estructura en relación a las componentes conexas y la caracterización de los digrafos que son ciclos generalizados, [6, 17]. La cuarta sección se dedica a la simetría de estos digrafos, particularizando en el carácter Cayley de los de grado dos y en los automorfismos cromáticos de los digrafos consecutivos, [2, 5, 6, 4, 17]. En la quinta sección se da la caracterización de los digrafos línea, así como una construcción de digrafos línea iterados endo-circulantes, [4, 17]. En la sección de hamiltonicidad presentamos condiciones suficientes para que un digrafo endo-circulante sea hamiltoniano, usando tres técnicas distintas: la del digrafo línea, la de enlazar ciclos, y la del *factor grup lemma*, [4, 17].

2 Conexión

Normalmente, la primera condición para que un digrafo sea un buen modelo de algún tipo de red es que sea fuertemente conexo. La caracterización de los digrafos endo-circulantes que son fuertemente conexos se ha realizado estudiando previamente esta propiedad para los digrafos con endomorfismo nilpotente y para los que tienen endomorfismo biyectivo. Con la aplicación del lema de Fitting, se obtiene la caracterización de la conexión fuerte en general.

Recordemos que, dado un grupo abeliano finito A y un endomorfismo ϕ de éste, el lema de Fitting asegura la existencia de un entero positivo $r = r(\phi)$ tal que el endomorfismo $\phi_{|\mathrm{Ker}\,\phi^r}$ es nilpotente, el endomorfismo $\phi_{|\mathrm{Im}\,\phi^r}$ es biyectivo y A es la suma directa de los dos subgrupos $\mathrm{Ker}\,\phi^r$ y $\mathrm{Im}\,\phi^r$. Con esto, la conexión fuerte de $G_A(\phi,\Delta)$ es equivalente a la conexión fuerte de los dos digrafos $G' = G_{\mathrm{Ker}\,\phi^r}(\phi,\Delta')$ y $G'' = G_{\mathrm{Im}\,\phi^r}(\phi,\Delta'')$, donde Δ' y Δ'' son los conjuntos de las proyecciones de los elementos de Δ sobre $\mathrm{Ker}\,\phi^r$ y $\mathrm{Im}\,\phi^r$, respectivamente. La condición (i) del Teorema 1 es equivalente a la conexión fuerte de G' y la condición (ii) es equivalente a la de G''.

Utilizaremos la siguiente notación. El *subgrupo de las diferencias* de $G_A(\phi,\Delta)$ es el subgrupo $\mathcal{D}$ de A generado por el conjunto $\{\phi^k(a-b) : a,b \in \Delta,\ k \geq 0\}$. Se definen los endomorfismos $s_i(\phi)$ de la siguiente manera:

$$s_0(\phi) = 0,\ s_i(\phi) = I + \phi + \phi^2 + \cdots + \phi^{i-1},\ i \geq 1,$$

donde I el automorfismo identidad.

Teorema 1 *Sea $G = G_A(\phi,\Delta)$ un digrafo endo-circulante, $r = r(\phi)$ y m el índice de $\phi^r(\mathcal{D})$ en $\phi^r(A)$. Entonces, G es fuertemente conexo si, y sólo si,*

(i) *el conjunto Δ contiene un sistema de representantes de $A/\phi(A)$; y*

(ii) *el conjunto $\{s_i(\phi)(\phi^r(a)) : 0 \leq i \leq m-1\}$ es un sistema de representantes de $\phi^r(A)/\phi^r(\mathcal{D})$.*

En el caso de digrafos c-circulantes, estas condiciones traducidas a términos aritméticos, son las que anteriormente habían obtenido Mora et al. [19].

3 Estructura

Componentes conexas La caracterización de la conexión fuerte en función de la conexión fuerte de los dos digrafos G' i G'' sugiere el estudio de los digrafos endo-circulantes con endomorfismo nilpotente por una parte y con endomorfismo biyectivo por otra. Los digrafos endo-circulantes con endomorfismo nilpotente resultan ser siempre débilmente conexos; en cambio, si el endomorfismo es biyectivo, el digrafo puede tener componentes conexas que serán, a su vez, digrafos fuertemente conexos. Se obtiene entonces que un digrafo endo-circulante $G = G_A(\phi, \Delta)$ tendrá tantas componentes conexas como G'', y éstas serán fuertemente conexas si, y sólo si, G' es fuertemente conexo.

Se ha particularizado el estudio para los digrafos funcionales, es decir, los digrafos endo-circulantes $G_A(\phi, \{0\})$. En el caso de endomorfismo nilpotente los digrafos son arborescencias con un lazo en el vértice desagüe, y para el caso de automorfismo los digrafos son reuniones de ciclos disjuntos. Esto da la estructura de un digrafo endo-circulante arbitrario de un paso. Además, se han determinado los vértices que hay en cada nivel de la arborescencia G' y el número de ciclos de G', cuando el grupo A es cíclico.

Ciclos generalizados Un digrafo es un *m-ciclo generalizado* si existe una m-partición $V_0, \dots, V_{m-1}$ del conjunto de los vértices tal que, si (x, y) es un arco y $x \in V_i$, entonces $y \in V_{i+1}$ (los subíndices se toman módulo m). A los conjuntos V_i se les llama *conjuntos estables* del digrafo. Un digrafo se llama *ciclo generalizado* si es un m-ciclo generalizado para alguna $m > 1$. Un digrafo es *equialcanzable* si existe un entero $\ell > 0$ tal que para todo par de vértices x, y existe un x-y recorrido de longitud ℓ. Fiol et al. [14] demostraron que todo digrafo fuertemente conexo es un ciclo generalizado o bien un digrafo equialcanzable. En el teorema siguiente se determinan los digrafos endo-circulantes que son ciclos generalizados y sus conjuntos estables.

Teorema 2 *Sea $G = G_A(\phi, \Delta)$ un digrafo endo-circulante conexo, $r = r(\phi)$ y m el índice de $\phi^r(\mathcal{D})$ en $\phi^r(A)$.*

(i) *El digrafo G es un m-ciclo generalizado de conjuntos estables*

$$V_i = s_i(\phi)(\phi^r(a)) + \mathcal{D} + \operatorname{Ker}\phi^r,$$

$0 \le i \le m-1, \quad a \in \Delta.$

(ii) *El digrafo G es un k-ciclo generalizado si, y sólo si, k divide a m.*

La estructura de un digrafo endo-circulante como ciclo generalizado se utiliza en el estudio de la simetria i en el estudio de la hamiltonicidad.

4 Simetría

Carácter Cayley Ya hemos comentado en la introducción la ventaja que supone la vértice transitividad, una propiedad que tienen los grafos de Cayley. El Teorema 3 da una condición suficiente para que un digrafo endo-circulante sea de Cayley.

Teorema 3 *Sean $G = G_A(\phi,)$ un digrafo endo-circulante fuertemente conexo y m el índice del subgrupo $\mathcal{D}$ en A. Si $\phi^m = I$, entonces G es isomorfo a un digrafo de Cayley.*

Digrafos de grado 2 En [3] se dan las condiciones necesarias y suficientes para que, fijados un digrafo endo-circulante y un digrafo de Cayley, ambos de grado 2, sean isomorfos. A partir de ese resultado, se caracterizan los digrafos endo-circulantes de grado dos que son circulantes:

Teorema 4 *Sea $G = G_A(\phi, \{a_1, a_2\})$ un digrafo endo-circulante fuertemente conexo con $\phi \neq I$ y $r = r(\phi)$. Sean $\delta = |\mathcal{D}|$ y m el índice de $\mathcal{D}$ en A. Sea γ el entero tal que $s_m(\phi)(a_1) = \gamma(a_1 - a_2)$, $0 \le \gamma \le \delta - 1$. Entonces, el digrafo G es circulante si, y sólo si, se da una de las siguientes condiciones:*

(i) $m > 1$ *y* $\delta = 2$;

(ii) $m > 1$, $\delta > 2$, $(\phi - I)(a_1 - a_2) = 0$, $\operatorname{mcd}(\gamma, \delta, m) = 1$ *y ϕ es un automorfismo;*

(iii) $m > 1$, $\delta > 2$, $(\phi + I)(a_1 - a_2) = 0$, *$m$ es par,* $\operatorname{mcd}(-\gamma + m/2, \delta, m) = 1$ *y ϕ es un automorfismo.*

Si se da el caso (i), *entonces $G \simeq G_N(1, \{1, m+1\})$, donde $N = |A|$. Si se da uno de los dos últimos casos, se asigna $N = |A|$, $\gamma^* = \gamma$ en el caso* (ii) *y $\gamma^* = -\gamma + m/2$ en el caso* (iii). *Los pasos del digrafo $G_N(1, \{b_1, b_2\})$ isomorfo a G son:*

$$b_1 = \operatorname{mcd}(\gamma^*, \delta) \quad i \quad b_2 = b_1 - mt \pmod N,$$

donde (t, z) es una solución de la identidad de Bezout $b_1 = z\delta + t\gamma^*$ tal que $\operatorname{mcd}(t, \delta) = 1$.

Automorfismos conservadores de colores Una *arco-coloración* de un digrafo d-regular $G = (V, E)$ es una aplicación que asigna a cada arco $(x, y) \in E$ un elemento, llamado el *color del arco*, de un conjunto Δ de cardinal d, y de forma que para todo $x \in V$ los d arcos con vértice inicial x tienen color diferente, así como los d arcos con vértice final x. Si ϕ es biyectivo, un digrafo endo-circulante $G = G_A(\phi, \Delta)$ admite una coloración natural asignando a cada arco $(x, \phi(x) + a)$ el color $a \in \Delta$. Los automorfismos f de G tales que existe una permutación σ_f de Δ tal que si el arco (x, y) tiene color a entonces $(f(x), f(y))$ tiene color $\sigma_f(a)$ forman el grupo $\mathrm{Aut}^*(G, \Delta)$ de los automorfismos permutadores de colores. Los automorfismos f tales que σ_f es la identidad se llaman conservadores de colores y forman también un grupo denotado por $\mathrm{Aut}(G, \Delta)$. En [2] se obtiene información acerca de estos subgrupos de $\mathrm{Aut}(G)$, pero para digrafos consecutivos puede darse su estructura completa.

Teorema 5 *Sea $G = G_N(c, \Delta)$ un digrafo consecutivo, con $\mathrm{mcd}(N, c) = \mathrm{mcd}(N, h) = 1$ y conjunto de colores $\Delta = e + [0, d-1]h$. Sea $g = \mathrm{mcd}(N, 1-c)$, definimos $g_1 = ((1-c)/g)^{-1} \bmod N/g$ si $c \neq 1$ y $g_1 = 0$ si $c = 1$.*

(i) *Si $d \neq N - 1$ y g no divide $2e + (d-1)h$, entonces $\mathrm{Aut}^*(G, \Delta) \cong \mathbb{Z}_g$. Los automorfismos permutadores de colores son $x \mapsto x + \lambda N/g$, $0 \leq \lambda \leq g - 1$.*

(ii) *Si $d \neq N - 1$ y g divide $2e + (d-1)h$, entonces $\mathrm{Aut}^*(G, \Delta) \cong \{1, -1\} \ltimes \mathbb{Z}_g$. Los automorfismos permutadores de colores son $x \mapsto x + \lambda \frac{N}{g}$, y $x \mapsto -x + \frac{2e+(d-1)h}{g} g_1 + \lambda \frac{N}{g}$, $0 \leq \lambda \leq g - 1$.*

(iii) *Si $d = N - 1$, sea $e_1 = \mathrm{mcd}(g, h-e)$. Entonces $\mathrm{Aut}^*(G) \cong \left(\mathbb{Z}_N^* \cap \left(1 + \frac{g}{e_1} \mathbb{Z}_N\right)\right) \ltimes \mathbb{Z}_g$. Los automorfismos permutadores de colores son $x \mapsto \rho x + \frac{(\rho-1)(h-e)}{g} g_1 + \lambda \frac{N}{g}$, $0 \leq \lambda \leq g - 1$ y $\rho \in \mathbb{Z}_N^* \cap (1 + (g/e_1)\mathbb{Z}_N)$.*

Teorema 6 *Sea $G = G_N(c, \Delta)$ un digrafo consecutivo, con $\mathrm{mcd}(N, c) = \mathrm{mcd}(N, h) = 1$ y conjunto de colores $\Delta = e + [0, d-1]h$. Sea $g = \mathrm{mcd}(N, 1-c)$. Entonces, $\mathrm{Aut}(G, \Delta) \cong \mathbb{Z}_g$ y los automorfismos conservadores de colores son $x \mapsto x + \lambda N/g$, $0 \leq \lambda \leq g - 1$.*

Hemos estudiado la acción de los grupos permutadores de colores sobre los vértices. En relación al primer caso del Teorema 5, el grupo $\mathrm{Aut}^*(G, \Delta)$ no es transitivo. En cuanto al segundo caso, resultan ser equivalentes (i) $\mathrm{Aut}^*(G, \Delta)$ es regular; (ii) $\mathrm{Aut}^*(G, \Delta)$ es transitivo; (iii) $g = N/2$ i $(2e + (d-1)H)/G$ es impar. Para el tercer caso del teorema, se tiene la caracterización de la transitividad y regularidad sólo cuando el orden del digrafo es una potencia de un número primo. Nótese que la obtención de un subgrupo de automorfismos que actúa regularmente sobre los vértices implica, por el teorema de Sabidussi [21], que el digrafo en cuestión es de Cayley.

5 Digrafo línea

El *digrafo línea* de un multidigrafo $M = (V, E)$ es un digrafo LM cuyos vértices son los arcos de D, y cada vértice (x, y) es adyacente a los vértices de la forma (y, z). Un digrafo es línea si $G = LM$, para algún multidigrafo M. Entre otras buenas propiedades, la técnica del digrafo línea iterado permite multiplicar por el grado el número de vértices de un digrafo y, en cambio, aumentar en sólo una unidad el diámetro. Hay varias caracterizaciones de digrafos línea, ver Proposición 8.4 en [16], una de las cuales es la siguiente: sea $\Gamma^+(x)$ el conjunto de vértices del digrafo adyacentes desde x; entonces, *un digrafo G es un digrafo línea si, y sólo si, $\Gamma^+(x) \cap \Gamma^+(y) = \emptyset$ o $\Gamma^+(x) = \Gamma^+(y)$ para todos los vértices x, y de G.* El siguiente teorema expresa esta condición de forma más algebraica para digrafos endo-circulantes.

Dado un digrafo endo-circulante $G = G_A(\phi, \Delta)$, se define $\theta(G) = \{x \in A : \Gamma^+(x) = \Delta\}$, que es un subgrupo de A.

Teorema 7 *Sea $G = G_A(\phi, \Delta)$ un digrafo endo-circulante. Entonces, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(a) *G es un digrafo línea;*

(b) *$a + \phi(\theta(G)) = \Delta \cap (a + \phi(A))$, para todo $a \in \Delta$;*

(c) *existe un subgrupo K de $\phi(A)$ tal que $a + K = \Delta \cap (a + \phi(A))$, para todo $a \in \Delta$.*

Se tienen algunas condiciones suficientes que permiten construir digrafos endo-circulantes línea de forma fácil: si Δ es un sistema de representantes de $A/\phi(A)$, o bien Δ es un subgrupo de A, entonces el digrafo $G_A(\phi, \Delta)$ es línea. En el caso en que ϕ sea un automorfismo, el digrafo es línea si, y sólo si, Δ es una clase lateral de un subgrupo de A.

Mora, Serra y Fiol [19] caracterizaron los digrafos c-circulantes $G = G_N(c, \Delta)$ que son línea en los siguientes términos. Sea $g = \mathrm{mcd}(c, N)$, y para $k \in [0, g-1]$, se define $\Delta_k = \{a \in \Delta : a \equiv k (\bmod g)\}$. Entonces, G es un digrafo línea si, y sólo si, existe un divisor p de N tal que

(i) $|\Delta_k|$ es 0 o N/p, para todo k, $0 \leq k \leq g-1$, y

(ii) si $|\Delta_k| \neq 0$, entonces $\Delta_k = \{b_k + \lambda p : \lambda \in [0, |\Delta_k| - 1]\}$.

Para los digrafos consecutivos hemos obtenido la siguiente caracterización.

Teorema 8 *Sea $G = G_N(c, \Delta)$ un digrafo consecutivo con $\Delta = e + [d-1]h$, y sea $g = \mathrm{mcd}(N, c)$. Entonces, G es un digrafo línea si, y sólo si, $d \leq g/\mathrm{mcd}(g, h)$ o $d = N/\mathrm{mcd}(N, h)$.*

Bajo ciertas restricciones, los digrafos endo-circulantes son línea de otros digrafos endo-circulantes. Dado un digrafo endo-circulante $G = G_A(\phi, \Delta)$ y un subgrupo B de A tal que $\phi(B) \leq B$, se define de forma natural el digrafo endo-circulante

$$G/B = G_{A/B}(\bar{\phi}, \bar{\Delta})$$

donde $\bar{\Delta} = \{\bar{a} \in A/B : a \in \Delta\}$ y el endomorfismo $\bar{\phi}$ se define como $\bar{\phi}(\bar{x}) = \overline{\phi(x)}$, para todo $\bar{x} \in A/B$.

Teorema 9 *Sea $G = G_A(\phi, \Delta)$ un digrafo endo-circulante que es línea. Supongamos que los elementos de Δ pertenecen a diferentes clases módulo $\theta(G)$. Si G no tiene vértices fuente y $\phi(\theta(G)) \leq \theta(G)$, entonces $G = L(G/\theta(G))$.*

Corolario 10 *Sea $G = G_A(\phi, \Delta)$ un digrafo endo-circulante que es línea. Si G no tiene vértices fuente, $\phi(\theta(G)) \leq \theta(G)$ y $|\phi(\Delta)| = \Delta$, entonces $G = L(G_{\phi(A)}(\phi, \phi(\Delta)))$.*

En un grupo cíclico $\mathbb{Z}_N$ todo subgrupo es invariante para cualquier morfismo del grupo, y cada cociente es un grupo cíclico. Por lo tanto, si un digrafo c-circulante G es un digrafo línea lo es de otro digrafo c-circulante (con o sin arcos múltiples), conclusión a la que llegaron Mora et al. en [19].

Acabamos la sección exponiendo una manera de construir familias de digrafos línea iterados que a su vez también son endo-circulantes.

Teorema 11 *Sea $G = G_A(\phi, \Delta)$ un digrafo endo-circulante con Δ un subgrupo de A. Entonces, $L^k G$ es un digrafo endo-circulante, para todo $k \geq 1$.*

6 Hamiltonicidad

Técnica del digrafo línea Una manera de garantizar que un digrafo G és hamiltoniano es obteniendo un subdigrafo $\tilde{G}$ generador, regular y fuertemente conexo, tal que sea línea de algún multidigrafo M. Así, puesto que $\tilde{G}$ es regular y fuertemente conexo, M es euleriano, y por tanto $\tilde{G} = LM$ es hamiltoniano y G también. Con este método Du et al. [11] prueban que los digrafos d-consecutivos $G_N(c, \Delta)$ con $\Delta = e + [0, d-1]$, $\mathrm{mcd}(N, c) > 1$ y fuertemente conexos, son hamiltonianos. En general:

Proposición 12 *Sea $G = G_A(\phi, \Delta)$ un digrafo endo-circulante. Si existe un subconjunto $\tilde{\Delta} \subseteq \Delta$ tal que $\tilde{G} = G_A(\phi, \tilde{\Delta})$ es un digrafo línea fuertemente conexo, entonces G es hamiltoniano.*

En particular, si $|\Delta| = 2$ y ϕ no es un automorfismo, G es hamiltoniano. En el caso de los digrafos consecutivos con morfismo no biyectivo, se tiene

Teorema 13 *Sea $G = G_N(c, \Delta)$ un digrafo consecutivo fuertemente conexo, con $\Delta = e + [0, d-1]h$ y $\mathrm{mcd}(c, N) > 1$, entonces G es hamiltoniano.*

Este resultado no se puede generalizar para los digrafos c-circulantes. Por ejemplo, el digrafo $G_{30}(2, \{7, 10, 12\})$ es fuertemente conexo y $\mathrm{mcd}(30, 2) = 2 > 1$, pero no es hamiltoniano.

Enlazar ciclos Una técnica clásica para obtener ciclos hamiltonianos de un digrafo G es tomar un 1-factor F de G e ir uniendo los ciclos de F usando arcos de G seleccionados siguiendo ciertas estrategias. Esta técnica es la que usaron Chang et al. [7] para probar que los digrafos d-consecutivos $G_N(c, \Delta)$ de grado mayor o igual a 4 y $\mathrm{mcd}(N, c) = 1$ son hamiltonianos. Siguiendo las ideas presentadas en [11] y [7] para enlazar ciclos, y teniendo en cuenta la caracterización de ciclos generalizados de los digrafos endo-circulantes (Proposición 2), hemos obtenido condiciones suficientes para la hamiltonicidad de ciertos digrafos endo-circulantes con morfismo biyectivo.

Teorema 14 *Sea $G = G_A(\phi, \Delta)$ un digrafo endo-circulante fuertemente conexo, $\mathcal{D}$ el subgrupo de las diferencias de G y $m = |A : \mathcal{D}|$. Supongamos que ϕ*

es biyectivo, $\mathcal{D}$ es cíclico generado por un elemento h, y que Δ contiene un conjunto de la forma $e + [0, d-1]h$.

(i) *Si $d \geq 5$, entonces G es hamiltoniano.*

(ii) *Si $d = 4$ y $m = 1$, entonces G es hamiltoniano.*

(iii) *Si $d = 4$, $m > 1$ y $G_A(\phi, \{e+h\})$ tiene como mucho un ciclo de longitud m, entonces G es hamiltoniano.*

(iv) *Si $d = 3$ y el número de ciclos $G_A(\phi, \{e+h\})$ es $\leq m+1$, entonces G es hamiltoniano.*

Como consecuencia se obtiene que los digrafos consecutivos de grado 5 o más son hamiltonianos.

Factor group lemma Los resultados que vienen a continuación se han obtenido usando técnicas utilizadas en el contexto de los digrafos de Cayley [8, 23, 24]. La idea consiste en, dado un digrafo endo-circulante $G = G_A(\phi, \Delta)$, considerar un subgrupo B de A de forma que el digrafo cociente G/B (definido en la sección 5) sea hamiltoniano, y de tal forma que si un ciclo hamiltoniano de G/B cumple cierta condición, entonces G es hamiltoniano.

Sea $G = G_A(\phi, \Delta)$ un digrafo endo-circulante. Si $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \Delta$, la secuencia $a_1 a_2 \cdots a_m$ denota el camino que empieza en el vértice 0 y prosigue siguiendo los arcos de colores $a_1, a_2, \ldots, a_m$, en este orden. Si n es un entero positivo, $n * a_1 \cdots a_m$ denota la concatenación de n copias de $a_1 \cdots a_m$.

Teorema 15 (Factor Group Lemma) *Sea $G = G_A(\phi, \Delta)$ un digrafo endo-circulante con ϕ un automorfismo, y $B \leq A$ de orden n e índice m tal que $\phi(B) \leq B$. Supongamos que $\bar{a}_1 \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_m$, con $a_1, \ldots, a_m \in \Delta$, es un ciclo hamiltoniano en G/B y que el elemento $h_0 = \sum_{i=1}^{m} \phi^{m-i}(a_i)$ de B satisface*

$$B = \{s_k(\phi^m)(h_0) : k \in [0, n-1]\}.$$

Entonces, $n * a_1 a_2 \cdots a_m$ es un ciclo hamiltoniano de G.

Un subgrupo paradigmático en la aplicación de este teorema es el subgrupo de las diferencias $\mathcal{D}$, pues $G/\mathcal{D}$ es un ciclo, si G es fuertemente conexo.

El *arc-forcing subgroup* o *subgrupo de Rankin* de $G = G_A(\phi, \Delta)$ es el subgrupo $\mathcal{R}$ de $\mathcal{D}$ generado por los elementos $\phi^{-1}(a_1 - a_2)$, donde $a_1, a_2 \in \Delta$. Por definición, $\mathcal{D}$ es el subgrupo más pequeño de A que contiene a $\phi(\mathcal{D})$ y a $\mathcal{R}$. Por lo tanto, si $\mathcal{D}$ es cíclico, $\mathcal{R} = \mathcal{D}$. En particular, si $|\Delta| = 2$, se comprueba fácilmente que todo subdigrafo de G 1-regular y generador, los arcos incidentes desde los vértices de una misma clase módulo $\mathcal{R}$ tienen el mismo color. Así, obtenemos la siguiente proposición:

Proposición 16 (Arc-forcing subgroup) *Sea $G = G_A(\phi, \{b_1, b_2\})$ un digrafo endo-circulante con ϕ un automorfismo de A. Supongamos que $\mathcal{D}$ es cíclico de orden n e índice m. Entonces, G es hamiltoniano si, y sólo si, existe una secuencia $a_1, a_2, \ldots, a_m$, $a_i \in \{b_1, b_2\}$,tal que el elemento $h_0 = \sum_{i=1}^{m} \phi^{m-i}(a_i)$ satisface*

$$\mathcal{D} = \{s_k(\phi^m)(h_0) : k \in [0, n-1]\}.$$

Si se tiene $m = 1$ en la Proposición 16, entonces $A = \mathcal{D}$ es cíclico y el digrafo G es un digrafo c-circulante. Serra et al. ya dieron la caracterización de la hamiltonicidad para estos digrafos [22] y, más particularmente, Du y Hsu la de los digrafos d-consecutivos [10].

Referencias

[1] J. M. Brunat, M. Espona, M. A. Fiol, and O. Serra. Cayley digraphs from complete generalized cycles. *Europ. J. Combin.*, 20:337–349, 1999.

[2] J. M. Brunat, M. A. Fiol, and M. Maureso. Chromatic automorphisms of consecutivedigraphs. To appear in *Graphs and Combinatorics.*

[3] J. M. Brunat and M. Maureso. Endo-circulant digraphs of degree two and Cayley digraphs on abelian groups. *Discrete Math.*, 211:203–208, 2000.

[4] J. M. Brunat and M. Maureso. On hamiltonicity of endo-circulant digraphs. Technical Report MA2-IR-02-0002, Dept. Matemàtica Aplicada II, UPC, 2002. *Submitted*

[5] J. M. Brunat, M. Maureso, and M. Mora. Characterization of c-circulant digraphs of degree two which are circulant. *Discrete Math.*, 165/166:125–137, 1997.

[6] J. M. Brunat, M. Maureso, and M. Mora. Endo-circulant digraphs: connectivity and generalized cycles. *Discrete Math.*, 197/198:157–167, 1999.

[7] G. J. Chang, F. K. Hwang, and L-D Tong. The consecutive-4 digraphs are hamiltonian. *J. Graph Theory*, 31(1):1–6, 1999.

[8] S. J. Curran and J. A. Gallian. Hamiltonian cycles and paths in Cayley graphs and digraphs – A survey. *Discrete Math.*, 156:1–18, 1996.

[9] J. de Rumeur. *Communications dans les réseaux de processeurs.* Études et recherche en informatique. Masson, Paris, 1994.

[10] D. Z. Du and D. F. Hsu. On hamiltonian consecutive-d digraphs. *Combinatorics and Graph Theory, Banach Center Publications*, 25:47–55, 1989.

[11] D. Z. Du, D. F. Hsu, and F. K. Hwang. The hamiltonian property of consecutive-d digraphs. *Math. Comput. Modelling*, 17(11):61–63, 1993.

[12] D. Z. Du, D. F. Hsu, F. K. Hwang, and X. M. Zang. The hamiltonian property of generalized de Bruijn digraphs. *J. Comb. Theory, Series B*, 52:1–8, 1991.

[13] D. Z. Du, D. F. Hsu, and G. W. Peck. Connectivity of consecutive-d digraphs. *Discrete Appl. Math.*, 37/38:169–177, 1992.

[14] M. A. Fiol, I. Alegre, J. L. A. Yebra, and J. Fàbrega. Digraphs with walks of equal length between vertices. *Graph Theory and its Applications to Algorithms and Computer Science*, pages 313–322, 1985.

[15] M. A. Fiol, J. Fàbrega, O. Serra, and J. L. A. Yebra. A unified approach to the design and control of dynamic memory networks. *Parallel Processing Letters*, 3(4):445–456, 1993.

[16] R. L. Hemminger and W. B. Beineke. Line graphs and line digraphs. In L. W. Beineke and R. J. Wilson, editors, *Selected Topics in Graph Theory*, pages 12–23. Academic Press, 1978.

[17] M. Maureso. *Digrafs sobre grups abelians finits: anàlisi dels digrafs endo-circulants.* PhD thesis, Dept. Matemàtica Aplicada II, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 2000.

[18] M. Mora. *Digrafs c-circulants com a models de xarxes d'interconnexió.* PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 1988.

[19] M. Mora, O. Serra, and M. A. Fiol. General properties of c-circulant digraphs. *Ars Combinatorica*, 25C:241–252, 1988.

[20] C. E. Praeger. Highly arc transitive digraphs. *Europ. J. Combin.*, 10:281–292, 1989.

[21] G. Sabidussi. On a class of fixed-point-free graphs. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 9:800–804, 1958.

[22] O. Serra, M. Mora, and M. A. Fiol. On c-circulant digraphs. In *Combinatorics' 88 (Ravello, 1988)*, volume 2, pages 421–437, Rende, 1991. Mediterranean.

[23] D. Witte. On hamiltonian circuits in Cayley diagrams. *Discrete Math.*, 38:99–108, 1982.

[24] D. Witte and J. A. Gallian. A survey: Hamiltonian cycles in Cayley graphs. *Discrete Math.*, 51:293–303, 1984.