Posición euclídea en superficies de órbitas euclídeas[1]

C. Cortés, A. Márquez[2] y J. Valenzuela[3]

Resumen

Intuitivamente, un conjunto de puntos sobre una superficie está en posición euclídea si los puntos están lo suficientemente cerca unos de otros como para que puedan adaptarse fácilmente los algoritmos desarrollados en el plano para solucionar problemas clásicos de la Geometría Computacional. En este trabajo se formaliza una definición del término "posición euclídea" para una importante clase de espacios métricos, aquellos que pueden obtenerse como cocientes del plano bajo la acción de ciertos grupos de movimientos; las superficies de órbitas (2-orbifolds) euclídeas, al tiempo que se exponen métodos para determinar cuando un conjunto de puntos cumple con esta propiedad. También se estudia la relación entre la envolvente convexa de un conjunto de puntos en posición euclídea en una superficies de órbitas euclídea y la envolvente convexa plana de la antiimagen (vía la aplicación cociente) del conjunto.

1 Introducción

Existen muchas aplicaciones de la Geometría Computacional donde las entradas o salidas se disponen sobre una superficie distinta del plano. Generalmente se asume que, en estas situaciones, si un conjunto está contenido en una pequeña porción de la superficie, es suficiente con realizar adaptaciones simples de algoritmos planos (para obtener, por ejemplo, la envolvente convexa, el diagrama de Voronoi o una triangulación con buenas propiedades). Sin embargo, no hay un acuerdo en aproximarse al problema de decidir qué condiciones deben cumplir los datos para que los algoritmos planos sigan siendo válidos. Los únicos pasos en esta dirección fueron dados en [1], donde se introduce un nuevo concepto, el de posición euclídea, aunque limitado a algunas superficies concretas como el cilindro, el toro, el cono o la esfera. El objetivo de este trabajo es generalizar el concepto a una clase más amplia espacios, como son las superficies de órbitas euclídeas (SOE). Intuitivamente, si un conjunto está en posición euclídea, todos los métodos de la Geometría Computacional para el plano serán también válidos en dicho conjunto.

Se dice que un grupo Γ de movimientos en el plano es *uniformemente discontinuo* si existe un número real positivo d tal que si F es un movimiento de Γ y Q un punto del plano tal que $F(Q) \neq Q$, entonces la distancia entre Q y $F(Q)$ es mayor o igual que d. Existen veinticuatro grupos uniformemente discontinuos de movimientos en el plano, que dan lugar a cada una de las diferentes SOE al considerar los cocientes R^2/Γ. Entre estas se encuentran superficies tan conocidas como las localmente euclídeas (cilindro, cilindro retorcido, toro y botella de Klein), la banda de Möebius o el plano proyectivo. Un estudio más detallado de estas superficies puede encontrarse en [2].

Si consideramos la aplicación cociente

$$\varphi : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2/\Gamma \simeq S.$$

a cada punto de la superficie le corresponden una serie de puntos del plano que forman su clase de equivalencia asociada u *órbita*. La órbita de un punto Q del plano puede expresarse como $\Gamma Q = \{R \in \mathbf{R}^2 : R = gQ \quad g \in \Gamma\}$. La antiimagen mediante la aplicación cociente de un objeto sobre la superficie está formada por las órbitas asociadas a cada uno de sus puntos (Figura 1).

Sobre las SOE se define una métrica de manera que la distancia entre dos puntos sobre la superficie corresponde con la distancia entre sus órbitas en el plano. Las geodésicas uniendo dos puntos P y Q con la métrica cociente se corresponden con los segmentos de recta uniendo un elemento de la

[1]Trabajo parcialmente subvencionado por MCyT proyecto BFM2001-2474.

[2]Dpto. de Matemática Aplicada I. Universidad de Sevilla. E-mail: {ccortes,almar}@us.es

[3]Dpto. de Matemáticas. Universidad de Extremadura. E-mail: jesusv@unex.es

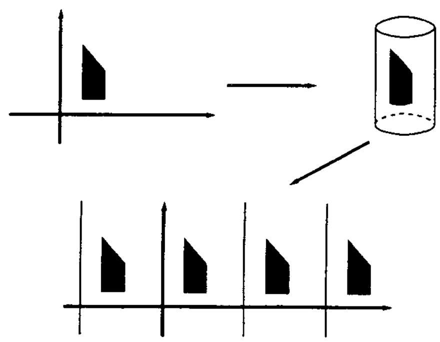

Figura 1: La imagen de un polígono plano mediante la aplicación cociente da lugar a un nuevo polígono sobre el cilindro. Si tomamos la antiimagen del polígono del cilindro obtendremos una colección infinita de "copias" de dicho polígono en el plano, formada a partir de las órbitas correspondientes a cada punto del polígono.

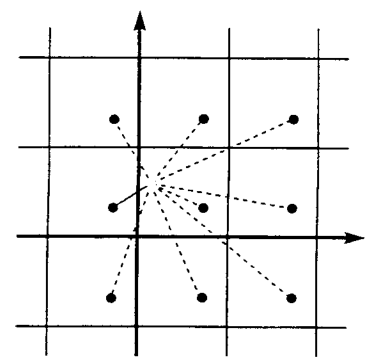

Figura 2: Representación en el plano de los arcos de geodésica uniendo dos puntos del toro plano. Está resaltado el segmento que los une.

órbita de P con cada uno de los elementos de la órbita de Q. De entre todos los posibles, llamaremos *segmento* uniendo P y Q al que tenga menor longitud, que es también el que nos da la distancia entre ambos puntos sobre la superficie. (Figura 2).

Diremos que un conjunto de puntos P sobre el cilindro, toro, cono o esfera, está en *posición euclídea local* si se ajusta a las condiciones dadas en [1], que son

a) estar contenido entre dos generatrices diametralmente opuestas del cilindro o el cono;

b) estar contenido en un cuadrante (la región comprendida entre dos paralelos y dos meridianos diametralmente opuestos) del toro;

c) estar contenido en una semiesfera en la esfera.

En este trabajo generalizaremos el concepto "posición euclídea" a SOE de tal forma que coincida con el de "posición euclídea local" dada para las anteriores superficies. Además, esta definición será consistente con el objetivo buscado: si un conjunto de puntos sobre una SOE está en posición euclídea, probaremos que su envolvente convexa tiene exactamente la misma forma que la envolvente convexa plana obtenida a partir de una copia plana del conjunto. Esto proporciona un buen método para comprobar si un conjunto está en posición euclídea a partir del estudio de la envolvente convexa.

2 Posición euclídea

Una herramienta muy útil a la hora de obtener una representación sencilla de las SOE es el *dominio fundamental*: una región del plano cerrada conteniendo un único elemento de cada órbita salvo para ciertos puntos de su frontera (puntos dobles). Si eliminamos todos los puntos dobles de un dominio fundamental y tomamos su imagen por la aplicación cociente, obtenemos lo que llamamos un *desarrollo fundamental*. De este modo, diremos que un conjunto P sobre una SOE está en *posición euclídea* si existe un desarrollo fundamental tal que todos los segmentos uniendo puntos de P estén contenidos en dicho desarrollo fundamental.

Podemos ver un ejemplo en la Figura 3. Los dominios fundamentales habituales sobre el cilindro son bandas verticales infinitas, siendo puntos dobles todos los de su frontera. Así, un desarrollo fundamental consistirá en toda la superficie salvo una generatriz, que es la imagen por la aplicación cociente de dichos puntos dobles. En el cilindro de la izquierda podemos apreciar tres puntos en posición no euclídea: los segmentos que los unen cortan a cualquier generatriz. En cambio, los puntos sobre el cilindro de la derecha están en posición euclídea, y el dibujo resultante de unirlos mediante segmentos es el mismo que se daría de considerarlos sobre el plano.

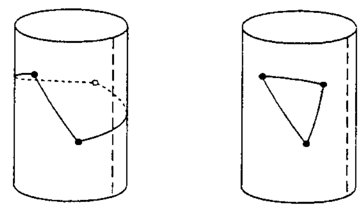

Figura 3: Los puntos del ejemplo de la derecha están en posición euclídea; podemos encontrar desarrollos fundamentales que contengan a los segmentos que los unen.

Esta definición de posición euclídea generaliza el concepto de posición euclídea local considerado previamente para el cilindro o el toro, tal y como puede verse en el siguiente teorema:

Teorema 1 *a) Si P es un conjunto en posición euclídea sobre el cilindro, entonces está contenido entre dos generatrices diametralmente opuestas del cilindro.*

b) Si P es un conjunto en posición euclídea sobre el toro, entonces está contenido en un cuadrante del toro.

Desde luego, en este contexto, conocer si un punto está o no en posición euclídea es de gran importancia. Para ello haremos uso de los *dominios de Dirichlet*; dominios fundamentales formados por la región de Voronoi de un punto Q con respecto a su órbita:

$$\{R \in \mathbf{R}^2 : d(R,Q) \leq d(R,gQ) \quad \forall g \in \Gamma\}.$$

Teorema 2 *Dado un conjunto P sobre una SOE S, P está en posición euclídea si y sólo si existe una copia plana de P contenida en la intersección de los dominios de Dirichlet de sus puntos.*

De acuerdo con el Teorema 2, el método para determinar si un conjunto de puntos está en posición euclídea va a depender de la forma que presenten los dominios de Dirichlet asociados a los diferentes movimientos que formen el grupo de la superficie. Según esto se obtiene

Teorema 3 *Dado un conjunto P de N puntos sobre una SOE S, se puede determinar si P está en posición euclídea en tiempo*

a) $O(N)$ si no hay ninguna simetría con deslizamiento en el grupo de S.

b) $O(N \log N)$ en otro caso.

El especial comportamiento de las superficies cuyo grupo contiene una simetría con deslizamiento se debe a que, a diferencia del resto de movimientos, la forma de sus dominios de Dirichlet depende de la posición en que se encuentre el punto que los genere, tal y como puede verse en la Figura 4.

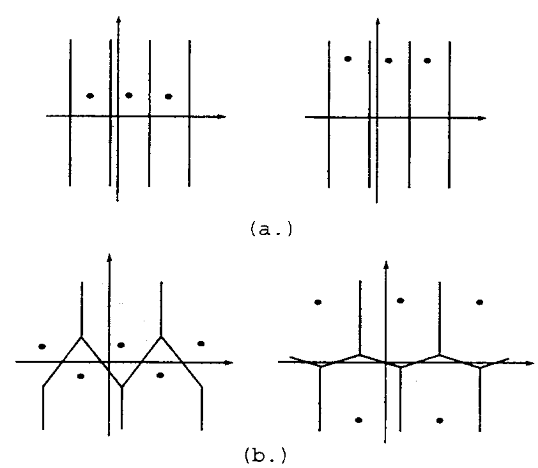

Figura 4: La forma del dominio de Dirichlet para grupos generados por una traslación (a.) no depende de la posición del punto; esto no es así cuando consideramos grupos generados a partir de una simetría con deslizamiento (b.).

3 Posición euclídea y envolvente convexa

El concepto de convexidad en el plano puede extenderse a otras superficies definiendo un conjunto C como *métricamente convexo* si todo segmento uniendo dos puntos de C está contenido en el conjunto. A partir de ahí podemos definir, por extensión, la *envolvente métricamente convexa* (en adelante *envolvente convexa*) de un conjunto de puntos P sobre una superficie S como el menor de los conjuntos métricamente convexos que contenga a P, que denotaremos por $CH_S(P)$. Puede probarse fácilmente como, al igual que ocurre en el plano, la envolvente convexa $CH_S(P)$ puede obtenerse mediante la intersección de todos los conjuntos convexos que contengan a P.

Los siguientes resultados conducen al teorema principal de esta sección, que establece la relación entre la envolvente convexa de un conjunto de puntos P en posición euclídea sobre S y la envolvente convexa plana de la antiimagen de P por la aplicación cociente.

Si P está en posición euclídea, por definición deberá de existir al menos un desarrollo fundamental que contenga a todo segmento uniendo puntos de P, que denotaremos a partir de ahora como $df(P)$.

Lema 4 *Si un conjunto de puntos P sobre S está en posición euclídea para un cierto desarrollo fundamental $df(P)$, entonces también lo estará $CH_S(P)$ para el mismo desarrollo fundamental.*

Proposición 5 *Sea C un conjunto conexo en el plano, entonces se cumplen las siguientes propiedades*

a) $\varphi(C)$ está en posición euclídea si y sólo si φ restringida a C, $\varphi|_C$, es una isometría.

b) Si $\varphi(C)$ está en posición euclídea, entonces $\varphi(C)$es convexo si y sólo si C es convexo.

Obsérvese que no es posible reescribir la segunda parte de la proposición anterior simplemente considerando un conjunto conexo C de S en posición euclídea y enunciando que C es convexo si y sólo si todas las componentes conexas de su antiimagen por la aplicación cociente son convexas, ya que pueden encontrarse fácilmente contraejemplos a esta afirmación, tal y como puede verse en la Figura 5.

A partir de los resultados anteriores podemos enunciar el siguiente teorema, cuya idea puede apreciarse en la Figura 6.

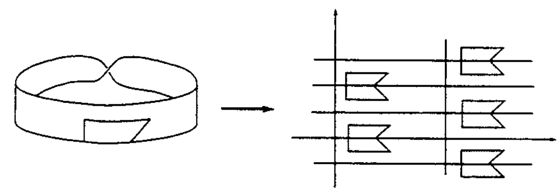

Figura 5: Las componentes conexas en el plano de la antiimagen de un conjunto convexo en la banda de Möebius no tienen por qué ser convexas.

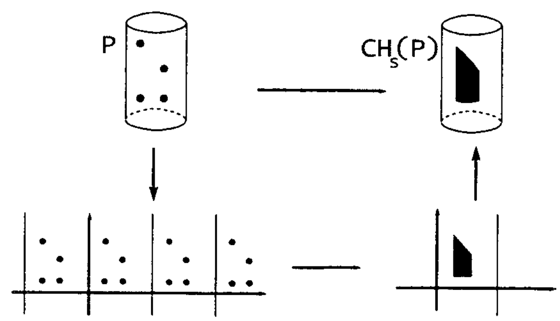

Figura 6: La construcción de la envolvente convexa de un conjunto de puntos en posición euclídea sobre el cilindro puede hacerse a partir de la envolvente de una de sus copias planas.

Teorema 6 *Sea P un conjunto de puntos en posición euclídea sobre una SOE S, $df(P)$ un desarrollo fundamental conteniendo a P y D un dominio fundamental del plano tal que $df(P)$ puede obtenerse a partir de él. Entonces,*

$$CH_S(P) = \varphi(CH_{R^2}(\varphi^{-1}(P) \cap D)).$$

Referencias

[1] C. I. Grima, A. Márquez. *Computational Geometry on Surfaces.* Kluwer Academic Publisher. 2001.

[2] V. V. Nikulin, I. R. Shafarevich. *Geometries and Group.* Springer Series in Soviet Mathematics. Springer. Berlin. 1987.