

ANÁLISIS MEDIANTE ELEMENTOS DE CONTORNO DE PROBLEMAS AXISIMÉTRICOS CON CIERRE DE GRIETAS

E. Graciani, V. Mantic, F. París.

Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales.

Dpto. de Mecánica de Medios Continuos, Teoría de Estructuras e Ingeniería del Terreno.
E.S.I. de Sevilla, Avda. de los Descubrimientos s/n, 41092 SEVILLA.

Resumen. En el presente artículo se presenta una herramienta numérica de cálculo basada en el método de los elementos de contorno (MEC) para la solución del problema elástico con presencia de contacto entre sólidos en condiciones de simetría axial. Las condiciones de contacto entre los sólidos se imponen de forma débil mediante un algoritmo que permite la posibilidad de usar discretizaciones no conformes. Como ejemplo de aplicación del algoritmo se ha realizado un estudio del estado tensional en el entorno de una grieta circular en la interfase de dos materiales no homogéneos, la precisión del método permite observar claramente cómo existe una zona de contacto de tipo Comninou en el vértice de la grieta, a pesar de que las dimensiones de la misma sean microscópicas.

Abstract. In this paper a numerical tool for solving contact axi-symmetrical elastic problems, based on the application of the boundary element method, is presented. Contact boundary conditions are imposed in a weak manner allowing the use of non-conforming discretizations. In order to prove the validity of the algorithm, an analysis of the stress singularities appearing at the tip of a penny-shape crack at the interface of two non-homogeneous materials have been carried out, showing the presence of a Comninou contact zone in the vicinity of the crack tip, this contact zone being of micromechanical level.

1. INTRODUCCIÓN

En los ensayos micromecánicos de caracterización de las propiedades de la interfase fibra-matriz en materiales compuestos, tales como el "pull-out", "push-out" o el ensayo de fragmentación, el mecanismo de fallo de las probetas viene controlado por la aparición de una grieta de geometría cuasi-axisimétrica que se propaga a lo largo de la matriz o de la interfase.

Cuando la grieta se genera en la interfase, debido a la gran diferencia entre las propiedades elásticas de la fibra y la matriz es de esperar la aparición de grandes desplazamientos relativos en el entorno del vértice de la grieta y será por tanto recomendable en estos casos la utilización de un algoritmo de contacto no conforme con aplicación débil de las condiciones de contacto en la zona de cierre de la grieta para el cálculo del estado tensional en el entorno de la fisura. Un estudio análogo fue realizado por París et al. [1] para el caso de una grieta circular en deformación plana.

En este artículo se presenta una herramienta de cálculo basada en el MEC que nos permite resolver problemas de elasticidad axisimétrica con presencia de contacto entre varios cuerpos. Para comprobar la bondad del algoritmo utilizado se ha realizado un estudio del estado

tensional en una grieta circular en la interfase de dos materiales no homogéneos.

2. APLICACIÓN DEL MEC A PROBLEMAS AXISIMÉTRICOS

En ausencia de fuerzas de volumen, la representación integral de contorno en forma incremental de los desplazamientos Δu_{β}^K ($\beta=r,z$) de un punto 'y' de coordenadas (r,z), perteneciente a un sólido D_K , tiene la forma:

$$C_{\alpha\beta}(y)\Delta u_{\beta}^K(y) + \int_{\partial D_K} T_{\alpha\beta}^*(y,\eta)\Delta u_{\beta}^K(\eta)ds = \int_{\partial D_K} U_{\alpha\beta}^*(y,\eta)\Delta t_{\beta}^K(\eta)ds \quad (1)$$

siendo ∂D_K el contorno del sólido D_K , $\eta \in \partial D_K$. Los núcleos $T_{\alpha\beta}(y,\eta)$ y $U_{\alpha\beta}(y,\eta)$ y el término libre $C_{\alpha\beta}(y)$ pueden obtenerse por dos caminos, bien integrando las ecuaciones tridimensionales en la coordenada θ , o bien obteniéndolos directamente a partir de un planteamiento axisimétrico del problema elástico de forma análoga a como se obtuvieron en el caso tridimensional [2]-[3].

Para obtener la solución numérica de un problema determinado, es necesario realizar una discretización del contorno de cada sólido. Mediante el uso de unas determinadas funciones de forma los desplazamientos Δu_{β}^K y las tensiones Δt_{β}^K en cada elemento pueden ser expresados en función de las variables nodales:

$$\Delta u_{\beta}^{\partial D_K^k}(\xi) = N^{kK}(\xi)\Delta u^{kK} \quad (2)$$

$$\Delta t_{\beta}^{\partial D_K^k}(\xi) = N^{kK}(\xi)\Delta t^{kK}$$

donde $\Delta u_{\beta}^{\partial D_K^k}(\xi)$ y $\Delta t_{\beta}^{\partial D_K^k}(\xi)$ son los desplazamientos y el vector tensión a lo largo del elemento ∂D_K^k , expresados en función de la coordenada local ξ . $N^{kK}(\xi)$ es una matriz que contiene las funciones de forma definidas en el elemento y Δu^{kK} y Δt^{kK} son vectores que contienen los desplazamientos y las tensiones de los nodos del elemento ∂D_K^k .

Introduciendo (2) en (1) y colocando ésta expresión integral en tantos puntos como sea necesario, se obtiene un sistema de ecuaciones de la forma:

$$H^K \Delta u^K = G^K \Delta t^K \quad (3)$$

donde las matrices H y G contienen las integrales de los productos de los núcleos y las funciones de forma a lo largo de los elementos de la discretización. Una explicación detallada de cómo imponer en estas ecuaciones las condiciones de contorno directas en las zonas del contorno de los sólidos que no son de contacto puede encontrarse en [4].

3. APLICACIÓN DE LAS CONDICIONES DE CONTACTO

Para imponer las condiciones de contacto en la superficie de contacto entre dos sólidos se ha seguido un procedimiento análogo al descrito en [5]-[6] para tensión y deformación plana.

Para aplicar las relaciones de compatibilidad se definen dos campos de desplazamientos sobre el sólido A:

$$\Delta u_{\beta}^A(x) \rightarrow \forall x \in D_A \quad (4)$$

$$\Delta u_{\beta}^{\partial A}(y) \rightarrow \begin{cases} \Delta u_{\beta}^A(y) & \forall y \in \partial D_{AI} \\ -\Delta u_{\beta}^B(y) + \delta_{\beta}(y) & \forall y \in \partial D_{Ac} \end{cases} \quad (5)$$

siendo Δu_{β}^A y Δu_{β}^B la solución de los desplazamientos en los sólidos A y B, δ_{β} son los desplazamientos

relativos de los puntos de la zona de contacto y ∂D_{AI} y ∂D_{Ac} son la zona libre y de contacto, respectivamente, del contorno del sólido A.

Aplicando el principio de los trabajos virtuales se llega a la ecuación:

$$\int_{\partial D_{Ac}} t_{\beta}^{A\Psi}(\eta) (\Delta u_{\beta}^A(\eta) + \Delta u_{\beta}^B(\eta) - \delta_{\beta}(\eta)) ds = 0 \quad (6)$$

que debe cumplirse para cualquier campo de tensiones $t_{\beta}^{A\Psi}$ en equilibrio. Discretizando (6) se obtienen las ecuaciones:

$$H_c^{kA} \Delta u_{\beta}^{kA} + H_c^{kB} \Delta u_{\beta}^{kB} - H_c^{k\delta} \delta_{\beta}^k = 0 \quad (7)$$

donde las matrices H_c^{kA} , H_c^{kB} y $H_c^{k\delta}$ se obtienen mediante integración de los productos de las funciones de forma [6].

Para aplicar las relaciones de equilibrio se definen dos campos de tensiones sobre el sólido B:

$$\Delta t_{\beta}^B(x, n) \rightarrow \forall x \in D_B \quad (8)$$

$$\Delta t_{\beta}^{\partial B}(y, n) \rightarrow \begin{cases} \Delta t_{\beta}^B(y, n^B) & \forall y \in \partial D_{BI} \\ \Delta t_{\beta}^A(y, n^A) & \forall y \in \partial D_{Bc} \end{cases} \quad (9)$$

siendo Δt_{β}^A y Δt_{β}^B el campo de tensiones solución de los sólidos A y B, n un vector unitario cualquiera y n^K el vector normal unitario exterior al contorno del sólido K y ∂D_{BI} y ∂D_{Bc} son la zona libre y de contacto, respectivamente, del contorno del sólido B.

Aplicando el principio de los desplazamientos virtuales se llega a la ecuación:

$$\int_{\partial D_{Bc}} (\Delta t_{\beta}^B(\eta) - \Delta t_{\beta}^A(\eta)) u_{\beta}^{B\Psi} ds = 0 \quad (10)$$

que debe cumplirse para cualquier campo de desplazamientos $u_{\beta}^{B\Psi}$. Discretizando (10) se obtienen las ecuaciones:

$$G_c^{kB} \Delta t_{\beta}^{kB} - G_c^{kA} \Delta t_{\beta}^{kA} = 0 \quad (11)$$

donde las matrices G_c^{kA} y G_c^{kB} se obtienen nuevamente mediante integración de los productos de las funciones de forma [6].

Las condiciones de fricción se aplican, siguiendo el modelo de Coulomb, sobre los nodos del sólido A.

Según este modelo, la zona de contacto se puede dividir en tres subzonas: zona libre, zona de adhesión y zona de deslizamiento. Para una exposición más detallada sobre las ecuaciones a imponer en cada una de estas situaciones véase [6].

4. ALGORITMO DE SOLUCIÓN

Debido a la existencia de condiciones de contacto entre los sólidos, se precisa de un algoritmo incremental para la resolución del sistema de ecuaciones. Partiendo de una primera suposición sobre las subzonas libre, de adhesión y de deslizamiento en el contorno del sólido A, se resuelve el sistema formado por (3), una vez impuestas las condiciones de contorno directas, (7), (11) y las condiciones de fricción.

En general, la solución obtenida no cumplirá las condiciones de contacto supuestas durante todo el incremento de carga. El límite de aplicación de las condiciones supuestas vendrá dado por la mínima fracción del incremento que suponga el incumplimiento de una de las condiciones de contacto. Cambiando las condiciones de contorno violadas se obtiene una nueva estimación de las subzonas que se utiliza como punto de partida para la aplicación del resto de la carga.

Este proceso se repetirá tantas veces como sea necesario hasta que se aplique completamente la carga. Es posible que en alguno de los intervalos se violen varias condiciones de contorno simultáneamente, siendo necesario un proceso iterativo hasta encontrar una estimación válida de las subzonas de contacto.

5. APLICACIÓN

El problema a estudiar es el mostrado en la figura 1, consistente en una grieta circular, situada en la interfase de dos semiespacios con diferentes propiedades elásticas, sometida a una tensión perpendicular al plano de la grieta aplicada en el infinito.

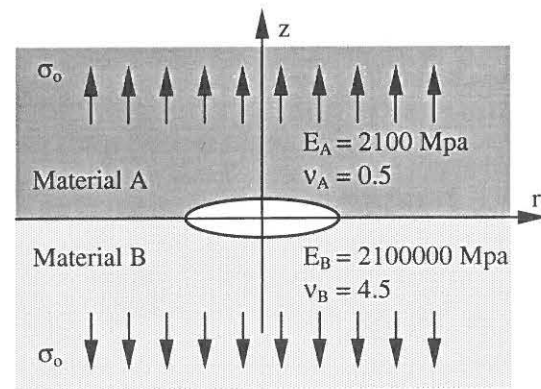


Fig. 1. Grieta circular en la interfase de dos materiales.

El problema de las grietas de interfase ha sido estudiado históricamente por diferentes autores y existen diversas expresiones que nos permiten conocer el estado tensional en el entorno del vértice de la grieta dependiendo de las hipótesis que se consideren sobre las condiciones de contorno en los labios de la grieta.

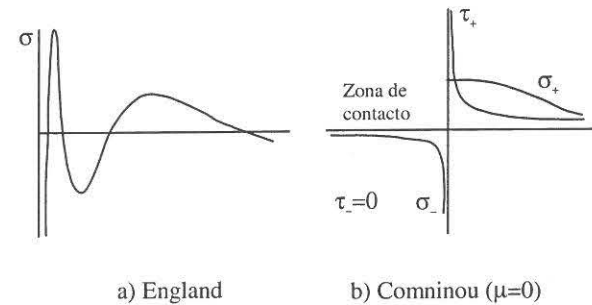


Fig. 2. Estado tensional en el entorno del vértice de la grieta.

Si se considera que los labios de la grieta están libres de tensiones, England [7], las componentes del tensor de tensiones en el fondo de grieta tienen un comportamiento singular oscilante como el mostrado en la figura 2.a y la solución de los desplazamientos en el vértice de la grieta provoca interpenetraciones entre sus labios superior e inferior.

Comninou eliminó la inconsistencia de la solución de los desplazamientos considerando el posible contacto entre los labios de la grieta. En este caso, la solución obtenida no presenta incompatibilidades y tiene un comportamiento como el mostrado en la figura 2.b.

Si se considera contacto sin fricción, [8], la tensión tangencial en el fondo de la grieta (τ_+) y la tensión de compresión en la zona de contacto (σ_-) tienen un comportamiento singular (de orden 0.5), mientras que la tensión normal en el fondo de la grieta (σ_+) permanece acotada.

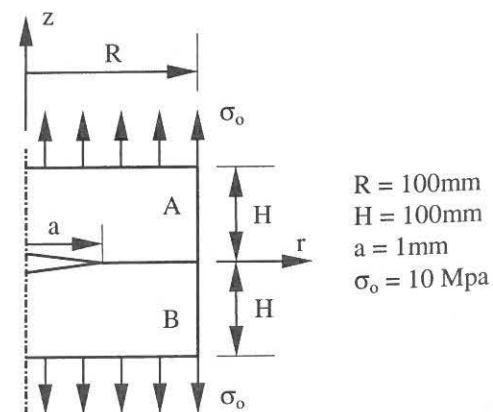


Fig. 3. Problema resuelto.

Para el estudio numérico se ha considerado una grieta circular en la interfase de dos cilindros concéntricos con la misma, con las dimensiones mostradas en la figura 3.

Para los materiales considerados, la zona en la que se producen interpenetraciones según la solución de England y la zona de cierre de grieta ofrecida por la solución de Comninou es del orden de 10^{-5} mm [9].

En la figura 4 se presenta la solución de las tensiones en el fondo de grieta obtenida con una discretización tal que la longitud de los elementos en el entorno del vértice de la grieta son del orden de 10^{-4} mm.

Como la discretización no es lo suficientemente fina como para permitir apreciar la presencia de la zona de cierre de grieta, se obtiene una solución clásica de grieta trabajando en modo mixto, donde las componentes normal y tangencial de las tensiones son nulas en los labios de la grieta y singulares en el fondo de grieta.

Nótese que al haberse utilizado solamente elementos lineales, la solución en los nodos contiguos al vértice de la grieta está incorrectamente evaluada y, por tanto, estos puntos no están reflejados en la figura, como se pone de manifiesto claramente en el detalle.

Para poder modelar correctamente la zona de cierre de grieta se realizó una nueva discretización del problema utilizando una malla tal que la longitud de los elementos en el entorno del vértice de la grieta tiene una dimensión

del orden de 10^{-8} mm. La solución obtenida en este caso se puede observar en las figuras 5, 6 y 7.

En la figura 5 se muestra la posición deformada de la grieta con un detalle del entorno del vértice de la grieta, donde se puede observar con claridad la presencia de una zona de contacto en el borde de la grieta, comprobándose que tiene un tamaño dentro del orden de magnitud que predice la teoría.

En el fondo de grieta, figura 6, se observa como efectivamente la tensión tangencial (τ_+) es singular, mientras que la tensión normal (σ_+) es acotada.

Por otra parte, en la figura 7 se observa la singularidad de compresión que se produce en la tensión normal de contacto (σ_-). Al haberse considerado el contacto sin fricción las tensiones tangenciales en los labios de la grieta (τ_-) son nulas.

En la figura 8 se muestran las dos tensiones singulares en escala log-log en el entorno del vértice de la grieta. Puede comprobarse como efectivamente el orden de singularidad obtenido es del orden de 0.5.

En las figuras 6, 7 y 8 están excluidos nuevamente los nodos contiguos al vértice de la grieta. El uso de elementos con funciones de forma específicas para la representación de tensiones singulares [4] nos permitiría obtener una solución válida también en estos elementos.

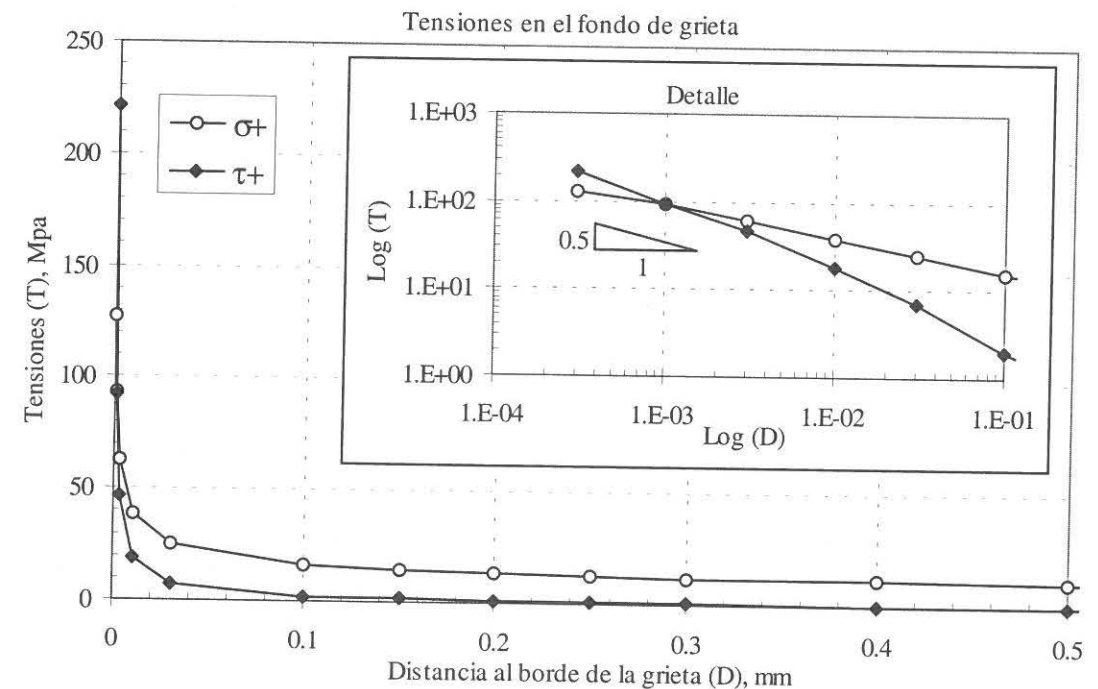


Fig. 4. Tensiones en el fondo de grieta sin presencia de contacto y ampliación en escala log-log de las tensiones en el entorno del vértice de la grieta.

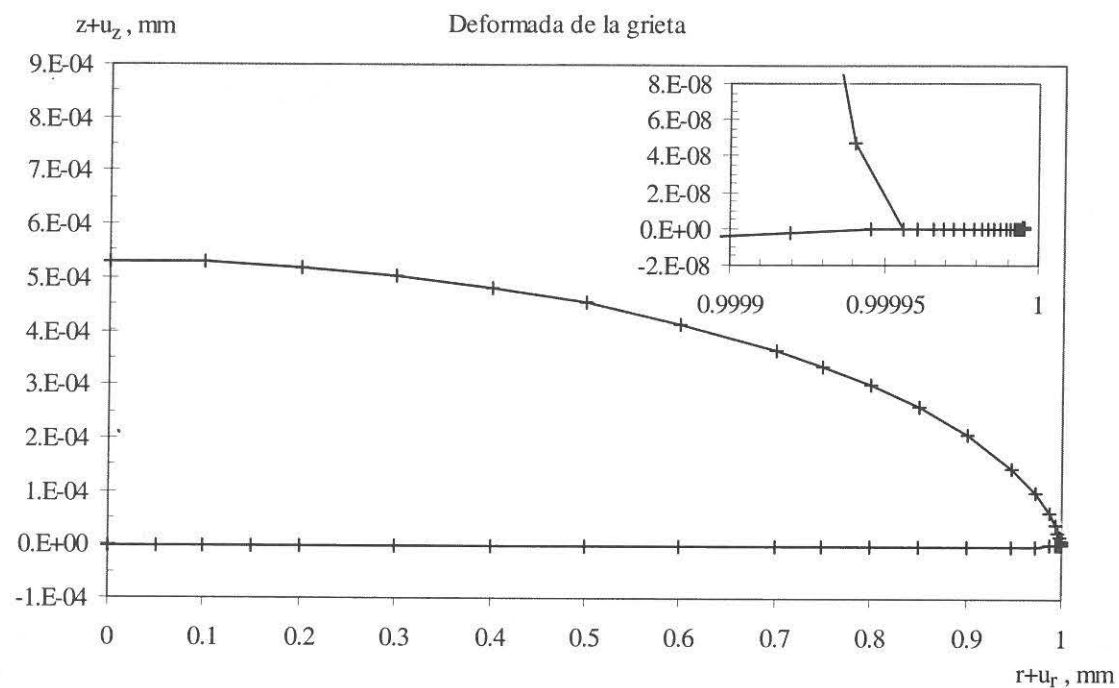


Fig. 5. Apertura de la grieta y detalle de la zona de contacto.

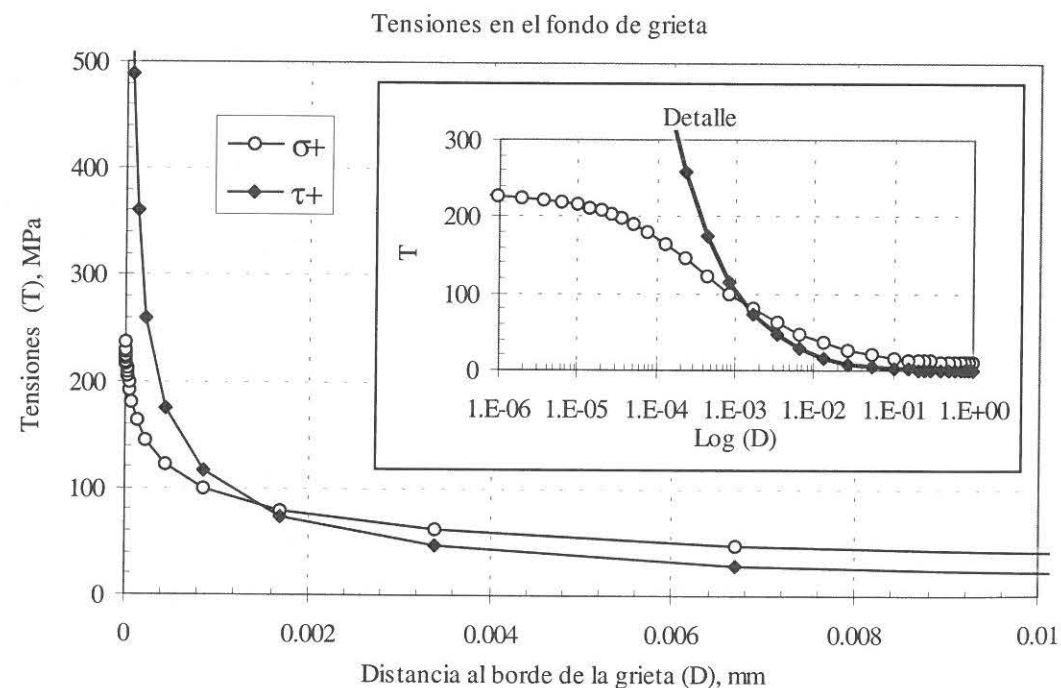


Fig. 6. Tensiones en el fondo de grieta cuando hay zona de contacto. Comportamiento singular de las tensiones tangenciales y acotado de las tensiones normales.

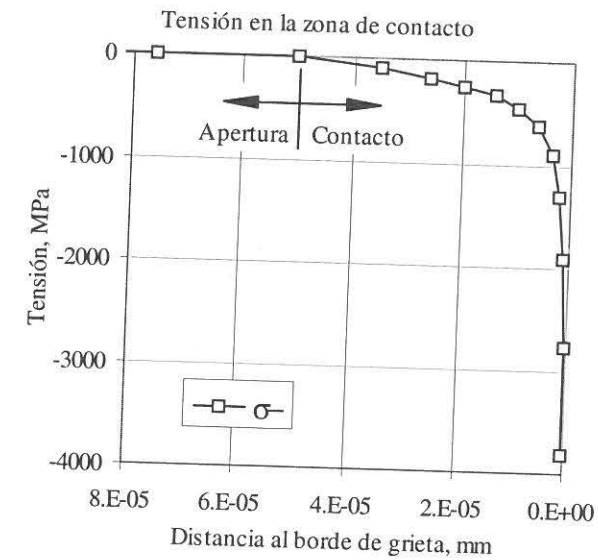


Fig. 7. Compresiones en la zona de contacto.

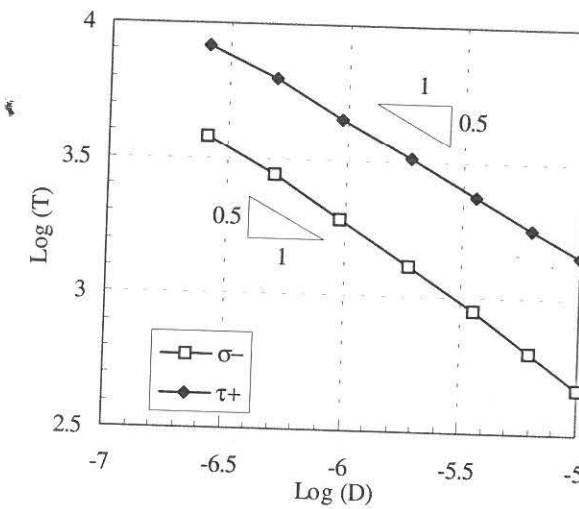


Fig. 8. Tensiones (escala log-log) a ambos lados del fondo de grieta cuando hay zona de contacto.

Para calcular los factores de intensificación de tensiones pueden utilizarse las expresiones, [10]:

$$K_I = - \lim_{r \rightarrow a^-} \frac{\sigma_-}{\sigma_0} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow a^+} \frac{\tau_+}{\sigma_0} \sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1}$$

(12)

debiendo cumplirse:

$$K_{II} = \frac{K_I}{\beta}$$

(13)

donde β es el segundo parámetro de Dundurs (para los materiales que estamos utilizando $\beta=0.47$).

Calculando los límites de (12) con la solución numérica de (τ_+) y (σ_-) se obtiene: $K_I = 0.28$ y $K_{II} = 0.62$. Estos valores satisfacen: $K_I/K_{II} = 0.45$ que se ajusta con bastante exactitud a lo predicho en (13).

6. CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un algoritmo de contacto para tratar problemas axisimétricos con grietas mediante el método de los elementos de contorno. La aplicación del algoritmo a un problema con zona de contacto submicroscópica ha puesto de manifiesto el elevado nivel de precisión del método y del algoritmo.

En la actualidad la herramienta desarrollada es adecuada para tratar los ensayos de fragmentación para el caso de fibra y matriz isotropa. El tratamiento de la fibra de carbono, de comportamiento ortótropo, en el plano de modelización requerirá disponer de la solución fundamental en medios ortótropos axisimétricos, siendo de validez el algoritmo de contacto desarrollado.

7. BIBLIOGRAFÍA

[1] París F., del Caño J.C. y Varna J. "The fiber-matrix interface crack - A numerical analysis using Boundary Elements", *Int. J. of Fracture*, 82, 11-29 (1996).
 [2] Bakr A. A. "The boundary integral equation method in axisymmetric stress analysis problems", Ed. Springer-Verlag (1986).
 [3] Balas J., Sládek J. y Sládek V. "Stress analysis by boundary element methods", Ed. Elsevier (1989).
 [4] París F. y Cañas J. "Boundary element method. Fundamentals and applications", Ed. Oxford University Press (1997).
 [5] París F., Blázquez A. y Cañas J. "Contact problems with non-conforming discretizations using boundary element method", *Comput. & Struct.* 57, 829-839 (1995).
 [6] Blázquez A., París F. y Mantic V. "BEM solution of two-dimensional contact problems by weak application of contact conditions with non-conforming discretizations", *Int. J. of Solids & Struct.* 35-24, 3259-3278 (1998).
 [7] England A. H. "A crack between dissimilar media", *J. of Appl. Mech.*, 32, 400-402 (1965).
 [8] Comninou M. "The interface crack", *J. of Appl. Mech.*, 44, 631-636 (1977).
 [9] Comninou M. "An overview of interface cracks", *Eng. Fract. Mech.*, 37-1, 197-208 (1990).
 [10] Martin-Moran C.J., Barber J.R. y Comninou M. "The penny shaped interface crack with heat flow. Part I: perfect contact", *J. of Appl. Mech.*, 50, 29-36 (1983).