

ANÁLISIS DEL CAMPO SINGULAR DE TENSIONES EN ESQUINAS DE MATERIALES ORTÓTROPAS

Mantič V.¹, París F., Cañas J.

Dpto. Mecánica de Medios Continuos, E.S.I., Sevilla

Avda. Reina Mercedes s/n. 41012 Sevilla Tfno: 95-4557001 Fax: 95-4239888

Resumen: Se presenta un método simple para el cálculo del orden de la singularidad de tensiones en esquinas bidimensionales ortótropas con diversas combinaciones de condiciones de contorno homogéneas. Se presentan resultados numéricos para algunas configuraciones típicas de esquinas ortótropas que aparecen en la práctica ingenieril con materiales compuestos.

Abstract: A simple approach for computation of singularity order of stresses in twodimensional orthotropic corners with various combinations of homogeneous boundary conditions is introduced. A few numerical results for some typical configurations of orthotropic corners occurring in engineering practice with composite materials are presented.

1.-INTRODUCCIÓN.

Las tensiones, como soluciones de las ecuaciones de la Elasticidad lineal, pueden tener valores no acotados en puntos del contorno donde éste no es suave y/o condiciones de contorno cambian bruscamente. Cuando esto sucede, a estas configuraciones locales de problemas elásticos las llamaremos genéricamente *esquinas* y diremos que *las tensiones son singulares en el vértice de la esquina*. El carácter singular de las tensiones puede estar en el origen de la iniciación de grietas y por consiguiente del fallo de la estructura. Por ello el conocimiento de los parámetros asociados a este carácter (orden y peso de la singularidad) es importante para la formulación de los criterios de fallo imprescindibles en un proceso de diseño.

El análisis de tensiones singulares en esquinas elásticas isotropas bidimensionales se realiza normalmente siguiendo el procedimiento de Williams (1952). Ting y Chou (1981) extendieron este procedimiento para el caso de esquinas anisótropas y derivaron posibles formas de tensiones singulares en ellas, pero no presentan resultados numéricos. Su teoría fue recientemente aplicada por Wu y Chang (1993) a un caso particular de esquinas ortótropas con los bordes libres.

El objeto de este artículo es desarrollar el procedimiento, para materiales ortótropos, que permita calcular el orden de la singularidad asociada a una esquina con cualquier

¹ De licencia posdoctoral de la Universidad Técnica de Košice, Letná 9, Košice, 04187 Eslovaquia.

tipo de condiciones de contorno homogéneas y cualquier orientación de los ejes de ortotropía con respecto a la esquina.

2.-TEORÍA DE LEKHNITSKII.

La ley de Hooke, considerando sólo deformaciones planas y en ejes principales de ortotropía del material, adopta la forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & 0 \\ \beta_{12} & \beta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Las raíces conjugadas μ_α y $\bar{\mu}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$) de la ecuación característica de Lekhnitskii (1950):

$$\beta_{11}\mu^4 + (2\beta_{12} + \beta_{66})\mu^2 + \beta_{22} = 0 \quad (2)$$

quedan definidas por:

$$\mu_\alpha = \frac{\pm\beta_- + i\beta_+}{\sqrt{2\beta_{11}}}, \quad \beta_\pm = \sqrt{\sqrt{\beta_{11}\beta_{22}} \pm (\beta_{12} + \gamma)}, \quad \gamma = \frac{\beta_{66}}{2} \quad (3)$$

donde i es la unidad imaginaria. Para la mayoría de los materiales ortótropos utilizados en ingeniería, $\beta_- \neq 0$, lo que se va a suponer de ahora en adelante.

Las representaciones de los vectores de desplazamientos $u_i(\mathbf{x})$, de tensiones en el contorno $t_i(\mathbf{x})$ y del tensor de tensiones $\sigma_{ki}(\mathbf{x})$ introducidas por Lekhnitskii (1950) en términos de potenciales complejos $\Phi_\alpha(z_\alpha(\mathbf{x}))$ funciones analíticas de variables complejas $z_\alpha(\mathbf{x}) = x_1 + \mu_\alpha x_2 \in C$, tienen la forma.:

$$u_i(\mathbf{x}) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\alpha=1}^2 P_{i\alpha} \Phi_\alpha(z_\alpha(\mathbf{x})) \right\}, \quad t_i(\mathbf{x}) = -\operatorname{Re} \left\{ \sum_{\alpha=1}^2 Q_{i\alpha} \partial_s \Phi_\alpha(z_\alpha(\mathbf{x})) \right\} \quad (4)$$

$$\sigma_{ki}(\mathbf{x}) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\alpha=1}^2 Q_{k\alpha} Q_{i\alpha} d\Phi_\alpha/dz_\alpha(z_\alpha(\mathbf{x})) \right\} \quad (5)$$

donde ∂_s significa la derivada tangencial con respecto al contorno. Mantičy París (1995) han introducido las siguientes expresiones de las matrices de Lekhnitskii \mathbf{P} y \mathbf{Q} y de sus coeficientes de normalización κ_α^2 :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\gamma + i\beta_- \beta_+ & -\gamma - i\beta_- \beta_+ \\ -\mu_1(\gamma + i\beta_- \beta_+) & -\mu_2(\gamma - i\beta_- \beta_+) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\mu_1 & -\mu_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\kappa_\alpha^2 = 2 \sum_{k=1}^2 P_{k\alpha} Q_{k\alpha} = (-1)^\alpha 4i\beta_- \beta_+ \mu_{\alpha} \neq 0 \quad (7)$$

3.-GEOMETRÍA Y CONDICIONES DE CONTORNO.

Sea Ω una esquina bidimensional definida en coordenadas polares por los ángulos θ_a ($a = 0, 1$) de sus bordes:

$$\Omega = \{(r, \theta) \mid 0 < r < \infty, \theta_0 < \theta < \theta_1 \leq \theta_0 + 2\pi\}, \quad \theta_i = \theta_1 - \theta_0 \quad (8)$$

Condiciones de contorno homogéneas para los desplazamientos y las tensiones en los bordes de la esquina pueden ser expresadas formalmente mediante las matrices $\mathbf{D}_u(\theta_a), \mathbf{D}_t(\theta_a) \in R^{2 \times 2}$:

$$\mathbf{D}_u(\theta_a)\mathbf{u}(r, \theta_a) + \mathbf{D}_t(\theta_a)\mathbf{t}(r, \theta_a) = \mathbf{0}, \quad r > 0 \tag{9}$$

siendo el rango de $[\mathbf{D}_u(\theta_a), \mathbf{D}_t(\theta_a)]$ igual a 2. En la Tabla 1 se definen estas matrices para cuatro tipos básicos de condiciones de contorno. \mathbf{I} es la matriz identidad, los vectores normales y tangenciales a los bordes de la esquina se definen como $\mathbf{n}(\theta_a) = [\sin \theta_a, -\cos \theta_a]^T$ y $\mathbf{s}(\theta_a) = [\cos \theta_a, \sin \theta_a]^T$, respectivamente y f es el coeficiente de fricción. Para estas condiciones de contorno, con la, excepción del caso de deslizamiento con fricción, se cumple:

$$\mathbf{D}_u(\theta_a)\mathbf{D}_t^T(\theta_a) = \mathbf{0} \tag{10}$$

| condición de contorno | definición de matrices | |
|-----------------------|---|---|
| libre | $\mathbf{D}_u(\theta_a) = \mathbf{0}$ | $\mathbf{D}_t(\theta_a) = \mathbf{I}$ |
| empotrado | $\mathbf{D}_u(\theta_a) = \mathbf{I}$ | $\mathbf{D}_t(\theta_a) = \mathbf{0}$ |
| deslizamiento | $\mathbf{D}_u(\theta_a) = [\mathbf{n}(\theta_a), \mathbf{0}]^T$ | $\mathbf{D}_t(\theta_a) = [\mathbf{0}, \mathbf{s}(\theta_a) - f\mathbf{n}(\theta_a)]^T$ |
| antisimétrica | $\mathbf{D}_u(\theta_a) = [\mathbf{s}(\theta_a), \mathbf{0}]^T$ | $\mathbf{D}_t(\theta_a) = [\mathbf{0}, \mathbf{n}(\theta_a)]^T$ |

Tabla 1: Matrices de las condiciones de contorno.

4.-ANÁLISIS DEL ORDEN DE LA SINGULARIDAD DE TENSIONES.

Según Ting y Chou (1981) los potenciales complejos asociados a las tensiones singulares tienen la forma general:

$$\Phi_\alpha(z_\alpha(\mathbf{x})) = z_\alpha^\lambda(\mathbf{x})a_\alpha + z_\alpha^{\bar{\lambda}}(\mathbf{x})b_\alpha, \quad \lambda, a_\alpha, b_\alpha \in C, \quad 0 < \text{Re}\lambda < 1 \tag{11}$$

Llamaremos λ al *exponente* y $1-\lambda$ al *orden de la singularidad de tensiones*, las cuales, de acuerdo con (5), adoptan la forma.:

$$\sigma_{ki}(r, \theta) \approx r^{\text{Re}\lambda-1}(\cos(\text{Im}\lambda \ln r)f_{ki}(\lambda, \theta) + \sin(\text{Im}\lambda \ln r)g_{ki}(\lambda, \theta)) \tag{12}$$

donde f_{ki} y g_{ki} son funciones reales y suaves de θ . Supongamos ahora que la relación (10) se cumple para θ_0 . Entonces para obtener una ecuación simple de los autovalores es apropiado definir el vector de potenciales complejos de Lekhnitskii $\Phi(\mathbf{x}) = [\Phi_1(z_1(\mathbf{x})), \Phi_2(z_2(\mathbf{x}))]^T$ generalizando la idea de Wu y Chang (1993), como:

$$\Phi(\mathbf{x}) = r^\lambda \Lambda(\theta, \theta_0, \lambda)\mathbf{q} + r^{-\lambda} \Lambda(\theta, \theta_0, \bar{\lambda})\bar{\mathbf{q}} \tag{13}$$

donde \mathbf{q} es un vector complejo incógnita,

$$\Lambda(\theta, \theta_0, \lambda) = \mathbf{Z}(\theta, \theta_0, \lambda) \left(\mathbf{P}^T \mathbf{D}_u^T(\theta_0) + \mathbf{Q}^T \mathbf{D}_t^T(\theta_0) \right) \tag{14}$$

y donde $\mathbf{Z}(\theta, \theta_0, \lambda)$ es una matriz compleja diagonal con elementos que son funciones continuas de θ en el intervalo $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$:

$$\mathbf{Z}(\theta, \theta_0, \lambda) = \text{diag} \left[\frac{1}{\kappa_1^2} \left(\frac{z_1(\theta)}{z_1(\theta_0)} \right)^\lambda, \frac{1}{\kappa_2^2} \left(\frac{z_2(\theta)}{z_2(\theta_0)} \right)^\lambda \right], \quad z_\alpha(\theta) = \cos \theta + \mu_\alpha \sin \theta \tag{15}$$

$$\mathbf{Z}(\theta_0 + m\pi, \theta_0, \lambda) = \exp(m\pi i \lambda) \text{diag} [\kappa_1^{-2}, \kappa_2^{-2}], \quad m = 0, 1, 2 \quad (16)$$

Partiendo de las representaciones (4) y de la definición (13) se demuestra en Mantič et al. (1995) que:

$$\mathbf{D}_u(\theta_0) \mathbf{u}(\theta_0) = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \mathbf{D}_t(\theta_0) \mathbf{t}(\theta_0) = \mathbf{0} \quad (17)$$

El cumplimiento de las condiciones de contorno para el ángulo θ_1 es equivalente a que el sistema homogéneo de ecuaciones lineales:

$$\mathbf{B}(\lambda) \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q} \neq \mathbf{0} \quad (18)$$

tenga una solución \mathbf{q} no trivial, es decir sea equivalente a que:

$$\det \mathbf{B}(\lambda) = 0 \quad (19)$$

donde la matriz $\mathbf{B}(\lambda)$ es definida (Mantič et al. 1995) como:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\lambda) = & \mathbf{D}_u(\theta_1) \left(\mathbf{PZ}(\theta_1, \theta_0, \lambda) \mathbf{P}^T + \overline{\mathbf{PZ}(\theta_1, \theta_0, \lambda)} \overline{\mathbf{P}^T} \right) \mathbf{D}_u^T(\theta_0) + \\ & \mathbf{D}_u(\theta_1) \left(\mathbf{PZ}(\theta_1, \theta_0, \lambda) \mathbf{Q}^T + \overline{\mathbf{PZ}(\theta_1, \theta_0, \lambda)} \overline{\mathbf{Q}^T} \right) \mathbf{D}_t^T(\theta_0) + \\ & \mathbf{D}_t(\theta_1) \left(\mathbf{QZ}(\theta_1, \theta_0, \lambda) \mathbf{P}^T + \overline{\mathbf{QZ}(\theta_1, \theta_0, \lambda)} \overline{\mathbf{P}^T} \right) \mathbf{D}_u^T(\theta_0) + \\ & \mathbf{D}_t(\theta_1) \left(\mathbf{QZ}(\theta_1, \theta_0, \lambda) \mathbf{Q}^T + \overline{\mathbf{QZ}(\theta_1, \theta_0, \lambda)} \overline{\mathbf{Q}^T} \right) \mathbf{D}_t^T(\theta_0) \end{aligned} \quad (20)$$

La ecuación (19) es la ecuación de autovalores para el exponente de singularidad λ . Es útil reconocer que $\mathbf{B}(\bar{\lambda}) = \overline{\mathbf{B}(\lambda)}$ y especialmente $\mathbf{B}(\lambda) \in R^{2 \times 2}$ para $\lambda \in R$. Una vez encontrada la raíz λ de la ecuación (19), se puede resolver el sistema lineal (18) para el vector \mathbf{q} y después utilizando representaciones (13), (5) y (4) se obtienen los campos de tensiones singulares en la esquina y sus desplazamientos asociados.

La forma de la matriz $\mathbf{B}(\lambda)$ permite en algunos casos especiales obtener analíticamente varios resultados interesantes (Mantič et al. 1995).

5.-EJEMPLOS NUMÉRICOS.

Se ha realizado un análisis para un material compuesto de grafito-epoxy con propiedades $E_{11} = 151.15 \text{ GPa}$, $E_{22} = 13.67 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0.343$ y $G_{12} = 5.5 \text{ GPa}$, en el cuál se ha estudiado numéricamente la variación del valor mínimo de λ entre 0 y 1 en función de la orientación de los bordes de la esquina con respecto a la orientación de la fibra (eje x_1).

En la Figura 1 se muestran los resultados del análisis de una esquina saliente de 90° con el borde del ángulo θ_0 libre y el borde del ángulo θ_1 bien empotrado o bien en deslizamiento con fricción. Se ve que un mayor coeficiente de fricción implica un mayor orden de la singularidad de tensiones usualmente definido como $1 - \lambda$. París et al. (1995) comparan estos valores de λ para el caso libre-empotrado con los resultados obtenidos con el MEC a partir de la evolución de las tensiones normales y tangenciales en el borde empotrado.

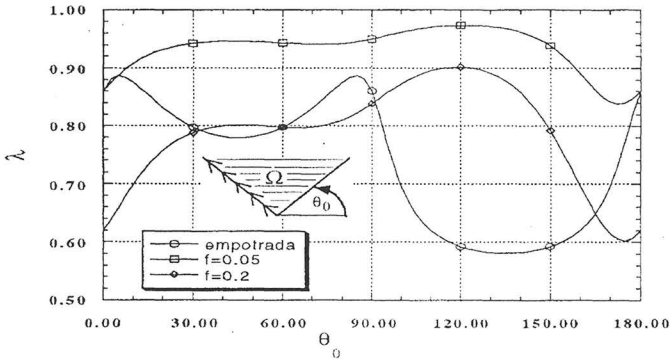


Figura 1: Valores de λ para una esquina de 90° , libre-empotrada/deslizamiento.

En la Figura 2 se muestran los valores de λ para una esquina de 180° (semiplano) con el borde del ángulo θ_0 libre y el borde del ángulo θ_1 en deslizamiento con fricción. Se observa cierta simetría de los valores de λ para coeficientes de fricción con signos diferentes con respecto a $\lambda = 1/2$ que es el caso de deslizamiento sin fricción, y también que un mayor coeficiente de fricción implica un mayor orden posible de la singularidad de tensiones.

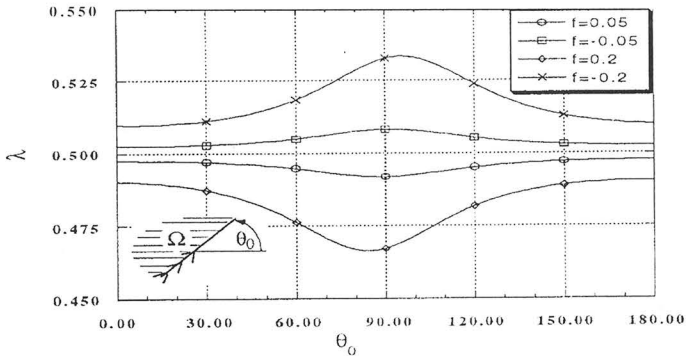


Figura 2: Valores de λ para semiplano, libre-deslizamiento.

La evolución de λ con respecto al ángulo de la bisectriz exterior de la esquina $\vartheta = (\theta_0 + \theta_1)/2 - \pi$ para esquinas reentrantes con los bordes libres y con diferentes ángulos interiores θ_i es mostrada en la Figura 3. El orden de la singularidad de tensiones aumenta al aumentar el ángulo θ_i y se acerca a $1/2$ cuando θ_i se acerca a 2π , de acuerdo con los resultados de Williams (1952) para esquinas isótropas. Se puede observar una clara tendencia del mayor orden de la singularidad de las tensiones cuando la bisectriz de la esquina es perpendicular a la fibra.

6.- CONCLUSIONES.

En este artículo se ha desarrollado un nuevo método para formar la ecuación de

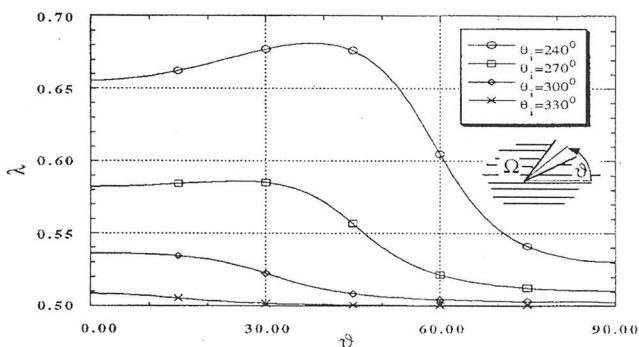


Figura 3: Valores de λ para esquinas reentrantes, libre-libre.

autovalores para el estudio del orden de la singularidad de tensiones en esquinas bidimensionales ortótropas. Este nuevo enfoque es más apropiado tanto para el estudio analítico como para la solución computacional. La utilidad de este método para el análisis tensional de materiales compuestos se ha puesto de manifiesto mediante un estudio numérico de la variación del exponente de la singularidad con la variación de la orientación de la fibra con respecto a los lados de la esquina para diversas geometrías y combinaciones de condiciones de contorno. Los casos analizados se corresponden con situaciones típicas a las que pueden verse sometidos elementos de material compuesto como el aquí considerado. Así, la primera situación analizada se puede presentar en el ensayo off-axis, la segunda en el ensayo Iosipescu y la tercera corresponde al caso general de entallas que por ejemplo se dan en este último ensayo.

Agradecimientos: Esta investigación ha sido financiada por el CICYT dentro del proyecto MAT-94-0480. La estancia de V.M. en la Universidad de Sevilla fue financiada por la beca del CICYT No. SB93-A00474386.

7.-REFERENCIAS.

- 1.- Lekhnitskii, S. G., *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Ed. Mir Publishers, Moscow, 1981 (1st Russian edition published in 1950).
- 2.- Mantič V. & París, F., *Explicit Formulas of the Integral Kernels and C-matrix in the 2D Somigliana Identity for Orthotropic Materials*, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **15**, pp 283-288, 1995.
- 3.- Mantič, V., París, F. & Cañas J., *Stress Singularities in 2D Orthotropic Corners* (en preparación), 1995.
- 4.- París, F., Blázquez, A., Cañas, J. & Mantič, V., *Analysis of Singularities in Composite Materials by BEM*, (Eds. C.A. Brebbia, S. Kim & T. Osswald), BEM 17, Madison, USA, Ed. CMP, Southampton, 1995.
- 5.- Ting, T. C. T. & Chou, S. C., *Edge Singularities in Anisotropic Composites*, *Int. J. of Solids and Structures*, **17**, pp 1057-106, 1981.
- 6.- Williams, M. L., *Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension*, *J. of Applied Mechanics*, **19**, pp 526-528, 1952.
- 7.- Wu, K. C. & Chang, F.-T., *Near-tip Fields in a Notched Body with Dislocations and Body Forces*, *J. of Applied Mechanics*, **60**, pp. 936-941, 1993.