

## EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO A MATERIALES COMPUESTOS DE COMPORTAMIENTO ORTÓTROPO. UNA NUEVA FORMULACIÓN EN VARIABLE COMPLEJA.

Avila R.; Mantič V.<sup>1</sup>; París F.

Dpto. Mecánica de Medios Continuos, E.T.S. Ingenieros Industriales de Sevilla  
Avda. Reina Mercedes s/n. 41012 Sevilla. Tfno: 95-4557001, Fax: 95-4239888

**Resumen:** Una gran cantidad de los materiales compuestos empleados en ingeniería presentan una ley de comportamiento ortótropa (laminados unidireccionales, combinaciones de láminas  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $\pm 45^\circ$ ). El Método de los Elementos de Contorno (MEC) se muestra como una herramienta eficiente para el análisis numérico de problemas de elasticidad bidimensional ortótropa. Se presenta en este artículo una formulación en variable compleja que permite una sencilla implementación del método. Esta formulación puede extenderse, con ligeras modificaciones, a laminados con comportamiento monoclinico. Se incluye, como ejemplo, un estudio del estado tensional de la probeta del ensayo off-axis para la determinación de  $G_{12}$ .

**Abstract:** Many composite materials used in engineering applications behave according to an orthotropic constitutive law (i.e., unidirectional laminates,  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $\pm 45^\circ$  ply stacking sequences). Boundary Element Method has become a powerful tool for numerical analysis of bidimensional elastic problems. A new formulation in complex variable, leading to a simple implementation of this method, is introduced in this paper. This formulation can be extended, with some changes, to monoclinic laminates. The stress state of the off-axis tension test specimen is studied as an application example.

### 1.- INTRODUCCIÓN.

La teoría del laminado permite representar un conjunto de láminas ortótropas por una lámina equivalente, cuyo comportamiento depende de la secuencia de apilado. Si la configuración de geometría y carga es tal que el laminado está sometido a un estado de tensión o deformación plana, puede ser estudiado desde el punto de vista de la elasticidad bidimensional ortótropa. Para el tratamiento numérico de este tipo de problemas el MEC se ha mostrado de gran eficacia. De ahí el especial interés en desarrollar formulaciones del mismo que conduzcan a una implementación sencilla y eficiente. A continuación se presenta una completa formulación en variable compleja que incluye la representación integral del tensor de tensiones tanto en el interior del dominio como en el contorno, estando el estudio restringido a materiales ortótropos.

<sup>1</sup> De licencia posdoctoral de la Universidad Técnica de Košice, Letná 9, Košice, 04187 Eslovaquia.

## 2.- EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO A LA ELASTICIDAD BIDIMENSIONAL ORTÓTropa.

### 2.1.- Ecuación característica y notación.

La ley de comportamiento de un material ortótropo, expresada en ejes paralelos a los ejes principales de ortotropía del material, toma la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & 0 \\ \beta_{12} & \beta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Introduciendo el concepto de función de tensión y vía ley de comportamiento, la ecuación de compatibilidad en deformaciones puede ponerse como:

$$\beta_{11}\mu^4 + (2\beta_{12} + \beta_{66})\mu^2 + \beta_{22} = 0 \quad (2)$$

que tiene como raíces los números complejos conjugados  $\mu_\alpha$  y  $\bar{\mu}_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ):

$$\mu_\alpha = \frac{\pm\beta_- + i\beta_+}{\sqrt{2\beta_{11}}} \quad \text{con} \quad \beta_\pm = \sqrt{\beta_{11}\beta_{22} \pm (\beta_{12} + \gamma)} \quad ; \quad \gamma = \frac{\beta_{66}}{2} \quad (3)$$

La práctica totalidad de los materiales compuestos ortótropos empleados en la ingeniería corresponden al caso de raíces complejas diferentes, por lo que es el único que aquí se desarrolla.

Si  $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$  es el vector director del punto  $y$  respecto al punto fuente  $x$  se definen los siguientes números complejos, transformados de  $\mathbf{r}$  mediante la aplicación lineal:

$$z_\alpha = r_1 + \mu_\alpha r_2 \quad (\alpha = 1, 2) \quad (4)$$

### 2.2.- Planteamiento integral del problema.

El análisis tensional mediante el MEC de un cuerpo ortótropo bidimensional  $D$ , limitado por un contorno  $\partial D$ , comienza por la solución numérica de la identidad de Somigliana:

$$C_{ji}(x)u_i(x) + \int_{\partial D} T_{ji}^\psi(x, y)u_i(y)ds(y) = \int_{\partial D} \psi_{ji}(x, y)t_i(y)ds(y) \quad (5)$$

donde  $x \in \partial D$ .  $T_{ji}^\psi$  y  $\psi_{ji}$  son los núcleos integrales que corresponden a la solución fundamental de la ecuación de equilibrio en desplazamientos. Tradicionalmente se han venido utilizando en implementaciones del MEC las representaciones reales derivadas de los desarrollos de Tomlin y Butterfield (1974). Mediante el método de los potenciales complejos de Lekhnitskii (1963) y empleando la teoría de Stroh (1958), Mantič y París (1995) obtuvieron las siguientes representaciones complejas de los núcleos integrales, que pueden ser manejadas más fácilmente que las representaciones reales:

$$\psi_{ji}(x, y) = Re \left\{ \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{k_\alpha^2 \pi i} P_{j\alpha} P_{i\alpha} \log z_\alpha(x, y) \right\} \quad (6)$$

$$T_{ji}^\psi(x, y) = -Re \left\{ \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{k_\alpha^2 \pi i} P_{j\alpha} Q_{i\alpha} (\mu_\alpha n_1 - n_2) \frac{1}{z_\alpha(x, y)} \right\} \quad (7)$$

donde  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$  es la normal exterior al contorno en  $y$ , con:

$$k_\alpha^2 = \mp 4i\beta_- \beta_+ \mu_\alpha \quad (8)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\gamma + i\beta_-\beta_+ & -\gamma - i\beta_-\beta_+ \\ -\mu_1(\gamma + i\beta_-\beta_+) & -\mu_2(\gamma - i\beta_-\beta_+) \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\mu_1 & -\mu_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Del mismo modo se obtiene una representación compleja de la matriz del término libre  $C_{ji}(x)$  cuando  $x$  corresponde a una esquina, Mantič y París (1995):

$$C_{ji}(x) = \text{Re} \left\{ \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{k_\alpha^2 \pi i} P_{j\alpha} Q_{i\alpha} \log_{\frac{z_\alpha^{(1)}}{z_\alpha^{(2)}}} \right\} \tag{11}$$

donde  $z_\alpha^{(1)}$  y  $z_\alpha^{(2)}$  son los números complejos transformados de los vectores unitarios tangentes al contorno a ambos lados del punto  $x$ . Cuando  $x$  es un punto sobre un contorno suave se tiene que  $C_{ji}(x) = \delta_{ij}/2$ .

Usualmente las implementaciones del MEC evitan la evaluación del término libre y del valor principal de Cauchy en (5) calculando su suma mediante la aplicación de un movimiento como sólido rígido, acumulando por tanto los errores cometidos en la evaluación, por lo general numérica, del resto de las integrales. Con las representaciones anteriores, todas las integrales, tanto las regulares como las singulares, pueden calcularse analíticamente sin excesiva dificultad, y posteriormente programarse las expresiones resultantes, eliminando con ello una importante fuente de errores numéricos. No obstante, la opción más conveniente, a efectos computacionales, es la integración numérica (más rápida) de las integrales tales que la relación tamaño de elemento sobre el que se integra frente a la distancia desde el punto de colocación a dicho elemento sea pequeña, y la integración analítica del resto de ellas (incluyendo las singulares), evaluándose el término libre mediante la expresión (11).

La utilización de las representaciones complejas de los núcleos integrales permite asimismo flexibilizar la discretización, en el sentido de poder emplear elementos adyacentes de longitudes muy diferentes y elementos pequeños de tamaños inalcanzables por las formulaciones anteriores.

La discretización de la ecuación integral (5) da lugar a un sistema de ecuaciones algebraico del tipo  $\mathbf{Hu} = \mathbf{Gt}$  que, tras la aplicación de las condiciones de contorno es reordenado y resuelto para obtener las incógnitas en el contorno. La aplicación de las condiciones de contorno requiere un tratamiento especial, similar al planteado por París y Cañas (e.p.) para el caso de materiales isótropos, cuando el punto es una esquina con sobreabundancia de incógnitas, o cuando el tensor de tensiones no está definido, que se resuelve mediante el empleo de puntos de colocación adicionales en el contorno o fuera del dominio  $D$ .

Una vez resuelto el sistema algebraico de ecuaciones a que da lugar la discretización de la ecuación integral (5), pueden obtenerse los desplazamientos en puntos del interior del dominio:

$$u_j(x) = \int_{\partial D} \psi_{ji}(x,y)t_i(y)ds(y) - \int_{\partial D} T_{ji}^w(x,y)u_i(y)ds(y) \tag{12}$$

El tensor de tensiones  $\sigma_{ij}$  se evalúa mediante la aplicación de la siguiente ecuación integral:

$$c(x)\sigma_{ij}(x) = \int_{\partial D} D_{kij}^w(x,y)t_k(y)ds(y) - \int_{\partial D} S_{kij}^w(x,y)u_k(y)ds(y) \tag{13}$$

donde  $c(x) = 1$  si se trata de un punto interior del dominio, y  $c(x) = 1/2$  si  $x$  pertenece a un contorno suave  $\partial D$ . Los núcleos  $D_{kij}^{\psi}$  y  $S_{kij}^{\psi}$  admiten también una representación en variable compleja que facilita su integración analítica:

$$D_{kij}^{\psi}(x, y) = -\text{Re} \left\{ \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{k_{\alpha}^2 \pi i} Q_{i\alpha} Q_{j\alpha} P_{k\alpha} \frac{1}{z_{\alpha}(x, y)} \right\} \quad (14)$$

$$S_{kij}^{\psi}(x, y) = -\text{Re} \left\{ \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{k_{\alpha}^2 \pi i} Q_{i\alpha} Q_{j\alpha} Q_{k\alpha} \frac{1}{z_{\alpha}^2(x, y)} \right\} \quad (15)$$

Cuando el punto  $x$  pertenece al contorno los núcleos  $D_{kij}^{\psi}$  y  $S_{kij}^{\psi}$  son singulares y las integrales de (13) han de ser evaluadas en el sentido de valor principal de Cauchy y parte finita de Hadamard, respectivamente.

### 3.- EJEMPLO DE APLICACIÓN.

Se ha realizado un estudio del estado tensional de la probeta del ensayo off-axis, empleado en la determinación del módulo de cortadura  $G_{12}$ . Las propiedades del material corresponden a un compuesto de grafito-epoxy, y son las siguientes:

$$E_{11} = 151.15 \text{ GPa}; E_{22} = 13.67 \text{ GPa}; \nu_{12} = 0.343; G_{12} = 5.5 \text{ GPa}.$$

La dirección de las fibras está orientada  $10^{\circ}$  respecto al eje  $x$ . La configuración del ensayo se representa en la Figura 1. Un extremo de la probeta se encuentra empotrado y al otro se le somete a un desplazamiento según el eje  $x$  de valor  $\delta = 0.00758 \text{ cm}$ .

Se ha empleado una discretización con 238 elementos lineales continuos. La malla se refina en las esquinas hasta un elemento de tamaño  $10^{-9} \text{ cm}$ , con idea de obtener una buena solución que recoja la influencia de las singularidades asociadas a dichos puntos.

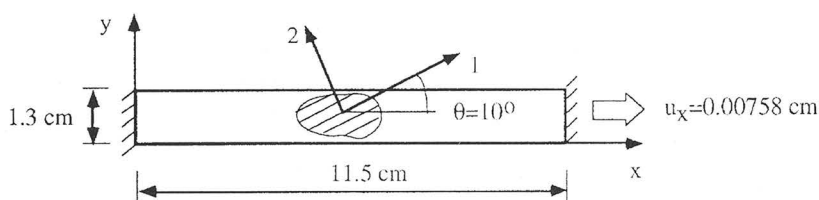


Figura 1. Definición del problema.

En la Figura 2 se muestra la deformada (magnificada) de la probeta, en la que se aprecia el efecto de las condiciones de contorno. La probeta tendería a deformarse naturalmente alargando más la diagonal más flexible (la más próxima a la perpendicular a la orientación de las fibras) que la diagonal más rígida. Las mordazas que simulan los empotramientos impiden tal deformación introduciendo un momento flector que provoca la deformada que aparece en la figura.

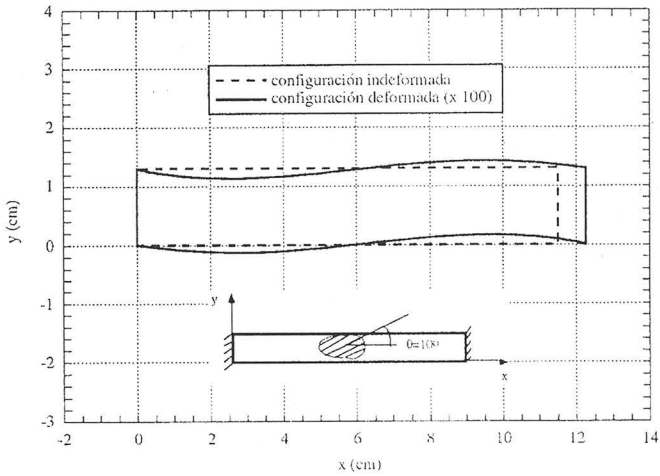


Figura 2. Deformada de la probeta off-axis.

En la Figura 3 se muestra la evolución, como superficie, de la tensión longitudinal  $\sigma_{xx}$  a lo largo de media probeta, toda vez que dicha evolución es simétrica respecto al centro de la misma. Puede apreciarse claramente el efecto de las singularidades que las mordazas originan en las esquinas, y cómo su efecto (el de las mordazas), es tal que la tensión no llega a regularizarse totalmente en la zona central de la probeta.

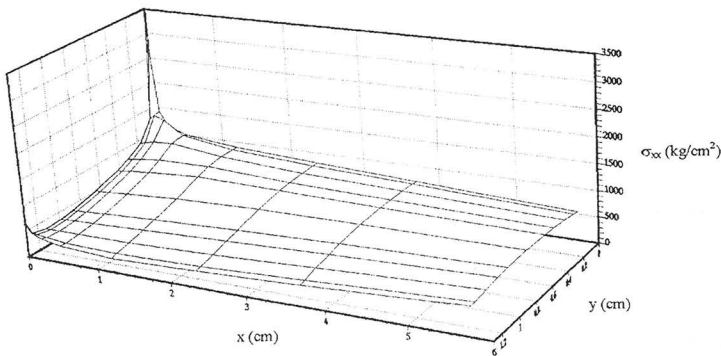


Figura 3. Evolución de  $\sigma_{xx}$  a lo largo de media probeta.

La figura 4 recoge la evolución de  $\sigma_{xx}$  a lo largo del ancho de la probeta para diferentes secciones transversales. Se observa que la tensión varía en la sección central entre 540 y 660  $\text{kg}/\text{cm}^2$ .

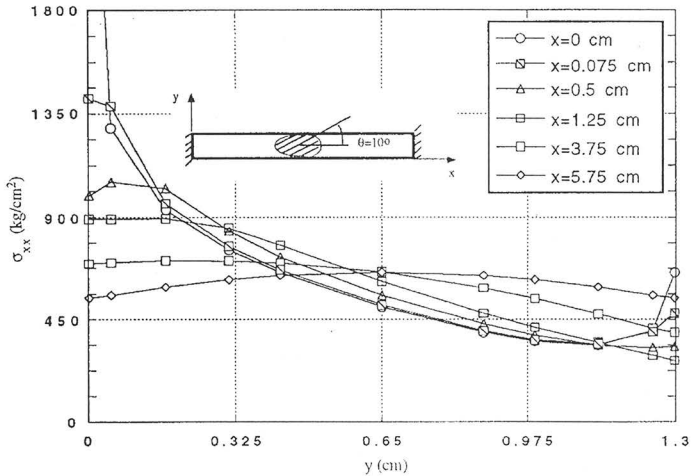


Figura 4. Evolución de  $\sigma_{xx}$  a lo largo del ancho de la probeta.

#### 4.- CONCLUSIONES.

Se ha presentado en este artículo una representación de los núcleos integrales, en variable compleja, alternativa a las tradicionales en variable real, que permite el cálculo analítico, para una posterior implementación, de las integrales que aparecen en la formulación del MEC para problemas de elasticidad bidimensional ortótropa, con la consiguiente disminución de los errores numéricos propios de otras implementaciones clásicas. Asimismo se ha mostrado una representación integral del tensor de tensiones aplicable tanto para el interior del dominio como para el contorno. Por último se ha demostrado la eficacia del método, mediante los resultados obtenidos tras su aplicación al problema del ensayo off-axis.

**Agradecimientos:** Esta investigación ha sido financiada por CICYT dentro del Proyecto MAT-94-0480. La estancia de V.M. en la Universidad de Sevilla fue financiada por la beca de CICYT No. SB94-A00474386.

#### 5.- REFERENCIAS.

- 1.- Tomlin, G.R. y Butterfield, R. *Elastic analysis of zoned orthotropic continua*, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, EM3, pp. 511-529, 1974.
- 2.- Lekhnitskii, S.G. *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Holden Day, San Francisco, 1963.
- 3.- Stroh, A.N. *Dislocations and cracks in anisotropic elasticity*, *Philosophical Magazine*, 7, pp. 625-646, 1958.
- 4.- Mantič, V. y París, F. *Explicit formulas of the integral kernels and C-matrix in the 2D Somigliana identity for orthotropic materials*, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 15, pp. 283-288, 1995.
- 5.- París, F. y Cañas, J. *Boundary Element Method, Fundamentals and Applications*, Oxford University Press, en prensa.