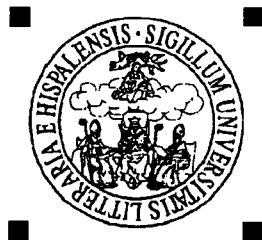


UNIVERSIDAD DE SEVILLA



Departamento de Matemática Aplicada II

LOCALIZACIÓN EN REDES

CON EL CRITERIO

VARIANZA

María Cruz López de los Mozos Martín

Sevilla, Noviembre de 1997

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA II
83
164 del libro
11 NOV. 1997
El Jefe del Negociado de Teoría,
Alfonso Caffarelli

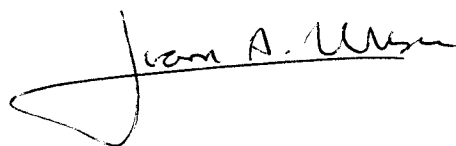
T. 159

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Departamento de Matemática Aplicada II

LOCALIZACIÓN EN REDES
CON EL CRITERIO
VARIANZA

Memoria presentada por
María Cruz López de los Mozos Martín
para optar al grado de
Doctora en Matemáticas
por la Universidad de Sevilla

Vº Bº
del Director:



Fdo. Dr. D. Juan Antonio Mesa López-Colmenar
Catedrático de Universidad
del Departamento de
Matemática Aplicada II
de la Universidad de Sevilla

Sevilla, Noviembre de 1997

En memoria de Javier

Agradecimientos

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento hacia el profesor Dr. D. Juan Antonio Mesa López-Colmenar, por su sabia dirección y ayuda incondicional.

Quisiera también hacer constar mi gratitud hacia mis compañeros del Departamento de Matemática Aplicada I, y en especial al profesor Dr. D. Francisco A. Ortega Riejos por sus acertados consejos sobre los aspectos algorítmicos de la memoria.

A mi familia, por la comprensión y el apoyo recibidos.

A todos, Muchas Gracias.

Introducción

Un problema de Localización es, básicamente, un problema de asignación espacial de recursos, cuyo objetivo fundamental es determinar la posición de uno o más servidores para satisfacer la demanda de un conjunto de usuarios de forma que se optimice alguna medida de la calidad del servicio.

Los modelos de localización en redes surgen cuando la interacción entre los servicios y la demanda se canaliza a través de una red de comunicaciones o de transporte, en cuyo caso el problema se puede modelizar utilizando un espacio *ambiente* tipo grafo donde el conjunto de demanda, si es discreto, se sitúa en los vértices o nodos y, si es continuo, se distribuye a lo largo de las aristas de la red.

La calidad del servicio se expresa en términos de alguna(s) función(es) objetivo o de coste que depende(n), al menos en parte, de las distancias entre los puntos de la red. La distancia entre cualesquiera dos puntos se medirá sobre la ruta más corta entre ambos y, en ausencia de saturación, cada demanda será atendida por el servicio más próximo.

Los problemas de localización en redes se plantean a partir de situaciones que involucran intereses a menudo contrapuestos. Su formulación, y por tanto la elección del criterio o función de coste que lo modeliza, supone tomar una decisión en donde unos usuarios estarán mejor situados que otros (o más beneficiados en sus intereses), respecto del servicio que reciben.

El enfoque de los modelos inicialmente planteados fue la resolución de problemas en el sector privado (relativos sobre todo a minimización de costes). En este sentido, se utilizó la función *mediana*, que evalúa el coste total de servir a todos los usuarios, y cuya minimización persigue la *eficiencia* en la prestación del servicio.

La mediana es un medida global del sistema cuya aplicación no contempla la situación de cada uno de los puntos de demanda respecto del servicio, pudiendo resultar unos usuarios muy desfavorecidos respecto de otros. Sin embargo, la distribución de distancias de los usuarios es un aspecto importante en la localización de servicios públicos, donde el nivel de satisfacción de la población es un objetivo deseable.

Este aspecto del problema se aborda desarrollando medidas cuyo objetivo sea obtener una situación más equilibrada de todos los usuarios respecto al servicio. Con este enfoque surge el criterio *centro*, cuyo objetivo es minimizar la máxima distancia

recorrida en el sistema. Al minimizar la peor situación posible, se persigue la *efectividad* en la prestación del servicio.

En esta línea de equilibrio se sitúan también los modelos de *cobertura*, que localizan el mínimo número de servicios en la red tal que la distribución de distancias no rebase una determinada cota superior. Otros trabajos han combinado la “equidad” del modelo centro con la eficiencia de la mediana en los modelos *centro-mediana*, bien considerando formulaciones restringidas (donde se optimiza una medida con una restricción de cota superior sobre la otra), bien mediante la función *cent-dian*, introducida por Halpern [18] como combinación lineal convexa de las anteriores.

La considerable literatura existente sobre todos estos modelos revela que la equidad, el equilibrio, es un objetivo cada vez más importante en la elección del criterio. Sin embargo, resulta escaso un tratamiento formal del mismo en Teoría de Localización.

La equidad, como concepto abstracto que implica justicia, imparcialidad, es un concepto central en política, ciencias sociales, economía, pero resulta difícil de cuantificar. Los modelos de localización trabajan sobre una distribución espacial de los usuarios y servicios y por tanto, suponiendo que todos los usuarios tienen la misma función de utilidad, la equidad se cuantificará mediante el nivel de igualdad de dicha distribución de distancias. En este sentido, se hablará de criterios de *igualdad* en localización ya que, como señala Erkut [10], la igualdad es sólo un aspecto de la equidad.

El trabajo de Marsh y Schilling [40] explora y formula una amplia lista de objetivos de igualdad en Localización, la mayoría de ellos provenientes de otras disciplinas. Como señalan Eiselt y Laporte [9], estos objetivos se pueden clasificar en dos categorías: la primera incluye aquellas medidas que minimizan la “diseminación” de la distribución de distancias (los objetivos minimax y otros como la minimización del rango pueden considerarse dentro de esta clase), mientras que la segunda minimiza la desviación de dicha distribución respecto de un punto central.

Los objetivos de la primera categoría se muestran en general poco satisfactorios, al concentrarse exclusivamente en valores extremos e ignorar los demás. Por ello la mayor atención se ha dirigido hacia todas aquellas medidas incluidas en la segunda categoría. En este caso la medida es alguna función de la desviación de las distancias que cuantifica la *desigualdad* de la distribución, y el objetivo es minimizar dicha desigualdad. Las únicas medidas de este segundo apartado que han sido estudiadas desde el punto de vista formal y algorítmico son la desviación absoluta media, el criterio varianza y el criterio de Lorenz.

De todas las medidas de igualdad descritas por Marsh y Schilling [40], la *varianza* de la distribución de distancias es una de las más interesantes y prometedores por sus aplicaciones potenciales. En esta memoria se investiga el uso y aplicación de esta medida en los modelos de localización en redes, tanto desde el punto de vista teórico como algorítmico. Con ello se persigue no sólo un conocimiento del comportamiento y propiedades de la medida, sino también estudiar procedimientos para resolver los distintos problemas de localización que se puedan plantear.

El estudio de problemas de localización con el criterio varianza ha sido muy escaso hasta la fecha. Dicho criterio es introducido por Halpern y Maimon [21], que efectúan un análisis comparativo de las medidas varianza y de Lorenz junto con las correspondientes al centro y mediana en una red árbol. Posteriormente, el problema de localizar un servicio que minimice la varianza es resuelto por Maimon [39] en una red árbol, y por Hansen y Zheng [23] en una red cíclica. Otras extensiones estudian el problema en redes 3-cactus (vease Kincaid y Maimon [32, 33]). Por último Berman [2] formula y resuelve un conjunto de problemas denominados *mediana-varianza*, que incorporan ambas medidas.

En esta revisión se observan aspectos no estudiados, como los relativos a los problemas mediana-varianza, así como un amplio abanico de problemas formulables con este criterio y que aún no se han explorado.

- En primer lugar, los problemas mediana-varianza sólo se han tratado desde un punto de vista algorítmico. Sin embargo, si se observa el tratamiento recibido por otro tipo de problemas de parecida estructura como son los problemas centro-mediana (parecida en cuanto que incorporan dos medidas distintas), se verá que en éste caso se ha estudiado la relación existente entre problemas duales, así como el comportamiento paramétrico de los problemas centro-mediana restringido y el problema cent-dian.

Todo esto pone de manifiesto la necesidad de un estudio similar en el caso de los problemas mediana-varianza, así como un análisis paramétrico del comportamiento de los conjuntos solución de dichos problemas.

- Por otra parte sólo se ha estudiado el criterio varianza al objeto de localizar un único servicio puntual, y esto en situación de demanda discreta. Sin embargo la introducción de modificaciones en el número de servicios a localizar, en el tipo de demanda, o en la estructura del servicio da lugar a nuevos modelos de localización con este criterio, como son:
 - a) Problemas de localización múltiple con demanda discreta, donde se localizan

simultáneamente p servicios, con $p > 1$.

- b) Problemas de localizar un servicio cuando la demanda se distribuye continuamente a lo largo de todos los puntos de la red (no sólo en los nodos).
- c) Problemas donde el servicio que se localiza no tiene una estructura puntual sino una estructura *extensa*, como puede ser un camino, árbol o subred.
- d) Otros problemas obtenidos combinando varias de las modificaciones anteriores e introduciendo restricciones sobre alguno de los elementos del problema.

En esta memoria se efectúa una indagación acerca de algunos de los problemas reseñados, tanto desde el punto de vista de la formulación del problema como de su resolución algorítmica. Dado que no se puede abarcar todos los posibles modelos formulables a partir de las modificaciones antes descritas, se ha optado por seleccionar los que se han entendido más significativos de cada caso. Esta selección se ha guiado por la atención y el interés que, en Localización, han recibido problemas de estructura similar con otros criterios. En este sentido:

En el **capítulo 1** se resumen algunos conceptos fundamentales sobre la función distancia en redes, se introduce el problema de localización de un servicio con el criterio varianza, y se describen algoritmos para su resolución en redes árbol y redes cíclicas.

Los **capítulos 2 y 3** están dedicados a los problemas mediana-varianza. En el **capítulo 2** se estudia la relación de dualidad entre las formulaciones restringidas y se efectúa un análisis paramétrico del comportamiento de las soluciones a partir de las curvas mediana-varianza características de cada uno de los problemas. En el **capítulo 3** se introduce una nueva formulación mediana-varianza parametrizando la función varianza, que incluye como caso particular al problema de la mediana-cuadrática. Sobre redes árbol se obtendrá una cota superior del rango de valores del parámetro.

El **capítulo 4** se dedica al problema de la p -varianza, esto es, la localización simultánea de p servicios ($p > 1$) en situación de demanda discreta. Una vez formulado el problema, se analiza su complejidad, y se desarrolla un algoritmo exacto de resolución y dos heurísticos en redes árbol. Sobre redes cíclicas se efectúa un estudio empírico de la eficacia de tres algoritmos heurísticos mediante el análisis comparativo de las soluciones que dichos algoritmos producen sobre un conjunto de redes generadas aleatoriamente.

El problema de localizar un servicio con el criterio varianza cuando la demanda se distribuye continuamente sobre los arcos de la red se aborda en el **capítulo 5**, y

se resuelve mediante un algoritmo que mejora la complejidad del procedimiento de búsqueda exhaustiva.

Por último en el **capítulo 6** se introduce el problema de localizar un camino con el criterio varianza. Se verá que el problema es NP-duro sobre redes generales. Para las redes tipo árbol se describirá un procedimiento lineal para obtener una solución aproximada del problema.

Contenido

Agradecimientos	i
Introducción	iii
1 Preliminares: Problemas de localización 1-varianza	1
1.1 Introducción	1
1.2 Función distancia en redes	1
1.3 Formulación del problema general	6
1.4 Formulación del problema 1-varianza	8
1.5 Varianza en una red árbol	11
1.5.1 Algoritmo	16
1.6 Varianza en una red cíclica	19
1.6.1 Algoritmo	24
1.7 Otras extensiones	27
2 Problemas Mediana-Varianza I: Análisis de las soluciones	29
2.1 Problemas Mediana-Varianza	31
2.2 Dualidad en los problemas restringidos	35

2.3	Curvas mediana-varianza en los problemas restringidos	42
2.3.1	Curvas eficientes	46
2.3.2	Curva mediana-varianza	49
2.4	Curva mediana-varianza del problema no restringido	55
3	Problemas Mediana-Varianza II: Parametrización de la Varianza	61
3.1	Formulación del problema	62
3.1.1	Problema de la Mediana Cuadrática	65
3.1.2	Algoritmo	67
3.2	Acotación del parámetro	69
3.2.1	Ejemplos	72
4	Problemas p-varianza	77
4.1	Formulación del problema y complejidad	78
4.2	Problemas p -varianza en redes árbol	86
4.2.1	Conjuntos de Asignación	87
4.2.2	Número máximo de asignaciones	92
4.2.3	Regiones factibles	96
4.2.4	p -varianza relativa a una Asignación	99
4.2.5	Algoritmo para la p -varianza	106
4.3	Algoritmos heurísticos para una red árbol	115
4.3.1	Algoritmo heurístico $H_1(T)$	116
4.3.2	Algoritmo heurístico $H_2(T)$	124

4.4	Problemas p -varianza en redes generales	131
4.4.1	Algoritmos heurísticos	132
4.4.2	Experiencia computacional	141
5	Problema 1-varianza con demanda continuamente distribuida	145
5.1	Introducción	145
5.2	La función varianza continua	147
5.2.1	Varianza continua en una región primaria.	150
5.3	Propiedades	157
5.4	Algoritmos en una red general	162
5.4.1	Relaciones básicas sobre regiones primarias	164
5.4.2	Algoritmo	169
5.4.3	Experiencia computacional	174
5.5	Algoritmos en una red árbol	176
5.5.1	Varianza continua en una red árbol	178
5.5.2	Algoritmo	181
6	Caminos de mínima varianza	185
6.1	Formulación del problema y complejidad	188
6.2	Una aproximación lineal al problema sobre una red árbol	193
6.2.1	Algoritmo	200
6.2.2	Ejemplo	202
6.2.3	Análisis de la complejidad	204

6.2.4	Experiencia computacional	205
6.2.5	Discusión	205
	Referencias	209

Capítulo 1

Preliminares: Problemas de localización 1-varianza

1.1 Introducción

En este capítulo se expondrán conceptos básicos sobre la función distancia en redes, que estarán presentes en toda la memoria. Asimismo se formulan los primeros problemas de localización en redes árbol y en redes cíclicas con el criterio varianza, se exponen los resultados principales y los algoritmos para su resolución.

Los problemas de localización con el criterio varianza se caracterizan porque la función de costo es no lineal y convexa a trozos en las distancias, y carecen de Conjunto Dominante Finito (conjunto finito de puntos conteniendo alguna solución óptima), y para resolverlos se requieren métodos de optimización global. La validez de estos métodos se basa en la estructura de la red, junto con la función distancia definida en ella, que la caracteriza como espacio métrico compacto, lo que permitirá aplicar las técnicas de optimización convexa usuales en \mathbb{R}^n .

1.2 Función distancia en redes

A continuación se establecen una serie de conceptos básicos (Harary [24]).

Un grafo finito no dirigido $G(V, E)$ consiste en un conjunto no vacío $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ de n vértices junto con un conjunto $E \subseteq V \times V$ de m elementos, cada uno de los cuales es un par no ordenado de vértices distintos de V .

Cada par $e_{ij} = (v_i, v_j) \in E$ es una arista conectando los vértices adyacentes v_i, v_j , con $v_i \neq v_j$ (no hay lazos). La arista e_{ij} se dice incidente con cada uno de sus dos vértices extremos v_i y v_j . La notación e y u, v representará, respectivamente, arista y vértices genéricos de G .

El grado de $v \in V$, denotado por $gr(v)$, es el número de aristas incidentes con v . Un vértice v es vértice punta si $gr(v) = 1$.

Un subgrafo de G es un grafo $G_s(V_s, E_s)$ tal que $V_s \subseteq V$, y $E_s \subseteq E$.

La eliminación de un vértice v_s de un grafo G origina un subgrafo $G_s = G - v_s$, con $V_s = V - v_s$, y $E_s = \{e \in E / e \text{ no es incidente con } v_s\}$.

Dados dos vértices $v_i, v_j \in G$, un camino $P(v_i, v_j)$ desde el nodo v_i al nodo v_j es una secuencia ordenada de vértices $\{v_i, u_1, \dots, u_k, v_j\}$ con la condición de que cada vértice sea adyacente al anterior y al posterior.

Un camino se dice simple si no contiene vértices repetidos. Es fácil comprobar que si existe un camino uniendo los vértices v_i, v_j , existe también un camino simple que los une. Por ello, y dado que sólo se utilizará la distancia del camino más corto, el término camino identificará a un camino simple.

Un ciclo es un camino que comienza y termina en un mismo vértice, diciéndose que es simple si dicho vértice es el único que se repite. Igual que antes, el término ciclo identificará a un ciclo simple.

Un grafo es conexo si para cada par de vértices existe al menos un camino que los une.

Un grafo árbol es un grafo conexo y sin ciclos. Como consecuencia, en un grafo árbol cada par de vértices está conectado por un único camino.

Una componente de un grafo es un subgrafo maximal conexo. Por tanto, si un grafo consta de una única componente, es conexo. Caso contrario, desconexo.

Un vértice corte (una arista puente) de un grafo es un vértice (una arista)

cuya eliminación incrementa el número de componentes. En este sentido, un grafo se dice no separable si es conexo, no trivial y sin vértices corte.

Definición 1.2.1 Una red no dirigida y conexa \mathcal{N} consta de un grafo no dirigido y conexo $G(V, E)$ junto con una función de coste: $l : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida sobre cada arista e_{ij} tal que $l(e_{ij}) = l(v_i, v_j) = l_{ij} > 0$.

A lo largo de esta memoria, los vértices de N se denominarán también nodos, y las aristas de E con el coste asociado se denominarán aristas o ejes. Para cada arista e_{ij} el coste l_{ij} puede representar la longitud de la arista, el tiempo de viaje entre v_i y v_j , el coste de transportar una unidad de una determinada mercancía a lo largo de dicha arista, etc.

Definición 1.2.2 Una red \mathcal{N} se dice ponderada si asociado a cada nodo $v_i \in V$ existe un valor w_i o $w(v_i)$, llamado peso, tal que $w_i > 0$, $\forall i = 1, \dots, n$.

El peso w_i asociado a cada v_i puede representar el número de usuarios localizados en v_i , o el nivel de demanda que surge en v_i . El sistema de pesos se dirá normalizado si

$$w(V) = \sum_{v_i \in V} w_i = 1$$

en tal caso w_i será la fracción de la demanda surgida en v_i , o bien una distribución de probabilidad de la demanda. En lo que sigue se considerará la red ponderada, con sistema de pesos normalizado a 1.

Supuesto que cada arista de \mathcal{N} es rectificable, la construcción del espacio métrico asociado se realiza sobre una inmersión de \mathcal{N} , o empotramiento geométrico, en algún espacio euclídeo \mathcal{S} (usualmente, $\mathcal{S} = \mathbb{R}^d$, con $d = 2, 3$), como sigue:

Para cada arista $e_{ij} = (v_i, v_j) \in E$ de longitud l_{ij} se considera una aplicación continua $\Theta_{ij} : [0, l_{ij}] \rightarrow \mathcal{S}$, tal que $\Theta_{ij}(0) = v_i$, $\Theta_{ij}(l_{ij}) = v_j$, y si $x, x' \in [0, l_{ij}]$, tal que $x \neq x'$, entonces $\Theta(x) \neq \Theta(x')$.

Sea $[v_i, v_j] \subset \mathcal{S}$ la inmersión de la arista (v_i, v_j) , correspondiente a la imagen por Θ_{ij} del intervalo $[0, l_{ij}]$, esto es: $[v_i, v_j] = \Theta_{ij}[0, l_{ij}]$. De la definición de Θ_{ij} se sigue que $[v_i, v_j]$ es compacto. Por otra parte, por ser la red no dirigida, $[v_i, v_j] = [v_j, v_i]$.

Definición 1.2.3 La inmersión de la red \mathcal{N} en el espacio \mathcal{S} es un subconjunto $N \subseteq \mathcal{S}$, definido

$$N = \bigcup \{[v_i, v_j] : (v_i, v_j) \in E\}$$

tal que la intersección de dos aristas de N (inmersiones en \mathcal{S} de aristas de E) contenga como máximo un vértice común.

Si la red de partida es una red árbol, se denotará por T a la correspondiente inmersión en \mathcal{S} .

Sea $\Theta_{ij}^{-1} : [v_i, v_j] \rightarrow [0, l_{ij}]$ la inversa de Θ_{ij} , también continua e inyectiva. A cada punto $x \in [v_i, v_j] \subset N$ (pudiendo ser un vértice o interior a una arista), le corresponde un único valor $\Theta_{ij}^{-1}(x) \in [0, l_{ij}]$. Para $x_1, x_2 \in [v_i, v_j]$ sea $[x_1, x_2]$ la subarista conteniendo a los extremos x_1, x_2 . La longitud de la misma vendrá dada por: $|\Theta_{ij}^{-1}(x_1) - \Theta_{ij}^{-1}(x_2)|$. Para cada arista e_{ij} , la aplicación Θ_{ij} induce una orientación en el recorrido de la arista en el que uno de los dos vértices, v_i , se ha seleccionado como inicial, identificándose los demás puntos de la arista por su distancia a dicho vértice. Por tanto para cada $x \in [v_i, v_j]$ la longitud de la subarista $[v_i, x]$ viene dada por $\Theta_{ij}^{-1}(x)$.

La noción de camino entre dos nodos de la red se extiende a camino entre cualesquiera dos puntos x_1, x_2 de la red, y se denotará por $P(x_1, x_2)$. La longitud del camino $P(x_1, x_2)$ es la suma de las longitudes de todas las aristas y subaristas que lo forman.

Definición 1.2.4 La distancia entre cada par de puntos de N es una aplicación $d : N \times N \rightarrow \mathbb{R}^+$, tal que para $x_1, x_2 \in N$, $d(x_1, x_2)$ es la longitud común de todos los caminos más cortos entre x_1, x_2 .

Es inmediato comprobar que (N, d) es un espacio métrico compacto. Por simplicidad, en lo que sigue se adoptará la notación $N(V, E)$ como descriptora de dicho espacio métrico, y sus aristas se denotarán por $e_{ij} = [v_i, v_j] \in E$ (o $e = [u, v]$ si no hay confusión), entendiéndose que corresponden a inmersiones en \mathcal{S} . Por la misma razón de simplicidad, si v_i es el vértice inicial en la orientación inducida por Θ_{ij} , la notación $x \in [v_i, v_j]$ representará tanto al punto x sobre la arista como al valor $\Theta_{ij}^{-1}(x)$, y por lo expuesto anteriormente se tendrá

$$x = d(v_i, x)$$

y por consiguiente, $d(x, v_j) = l_{ij} - x$. El siguiente resultado establece la convexidad de la función distancia sobre redes árbol.

Proposición 1.2.5 (Dearing, Francis y Lowe [8]) *Sean $T(V, E)$ una red árbol no dirigida, y tres puntos cualesquiera $x_1, x_2, y \in T$. Si $x \in P(x_1, x_2)$, entonces la función $d(y, x)$ es continua y cóncava en $x \in [0, d(x_1, x_2)]$.*

Sin embargo sobre una red la distancia entre un punto dado de la red y un punto variable a lo largo de una arista es una función cóncava.

Proposición 1.2.6 (Labbé et al. [35]) *Sean $N(V, E)$ red conexa no dirigida, e $y \in N$ un punto cualquiera de la red. Para cada $e_{ij} \in E$ la función $d(y, x)$ es continua y cóncava en $x \in [0, l_{ij}]$. Además es lineal y creciente de pendiente +1 en $[0, \xi(y)]$ y lineal y decreciente de pendiente -1 en $[\xi(y), l_{ij}]$, donde*

$$\xi(y) = \frac{d(y, v_j) + l_{ij} - d(y, v_i)}{2}$$

Definición 1.2.7 Un punto \bar{x}_t interior a la arista $[v_i, v_j]$ se denomina punto de embotellamiento si existe al menos un vértice $v_t \in V$ tal que

$$\bar{x}_t = \frac{d(v_t, v_j) + l_{ij} - d(v_t, v_i)}{2}$$

La notación $B(v_i, v_j)$ y B representará el conjunto de puntos de embotellamiento de la arista $[v_i, v_j]$ y de la red, respectivamente. Puesto que cada vértice genera a lo más un punto de embotellamiento en cada arista, se tiene $|B(v_i, v_j)| \sim O(n)$, y por tanto $|B| \sim O(nm)$, con $m = |E|$. En el caso de una red árbol T , es $|B(v_i, v_j)| = 0$, $\forall e_{ij} \in E$ y por tanto $|B| = 0$.

La caracterización de N como espacio métrico compacto proporciona un marco natural para la formulación de un problema de optimización en redes como un problema de optimización matemático. Si el problema de optimización es convexo, un óptimo local será global. La fundamentación teórica de la convexidad de la distancia en redes árbol se debe al trabajo de Dearing, Francis y Lowe [8], cuyos resultados fundamentales se exponen a continuación.

Sea N^p el producto cartesiano de N consigo mismo p veces, (T^p si es una red árbol), con $N^1 = N$. Dados $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_p)$, con

$x_i, y_i \in N$, $i \in \{1, \dots, p\}$, se define la distancia entre ambos

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^p d(x_i, y_i)$$

Es inmediato comprobar que esta distancia es una métrica.

Teorema 1.2.8 (Dearing, Francis y Lowe [8]) *La métrica del camino más corto definida en N es convexa si y sólo si N es una red árbol.*

Por tanto (T, d) es un espacio métrico convexo, así como también T^p con la distancia antes definida.

Sea D subconjunto de algún espacio \mathcal{S} . El problema de optimización

$$\min_{x \in D} z(x)$$

es convexo si D es convexo, y $z : D \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa. Si $\mathcal{S} = \mathbb{R}^n$, es conocido que un óptimo local del problema es también óptimo global. Caso de ser $\mathcal{S} = N^p$ se tiene

Teorema 1.2.9 (Dearing, Francis y Lowe [8]) *Sea $D \subseteq N^p$. Si el problema*

$$\min_{\mathbf{x} \in D} z(\mathbf{x})$$

es convexo, entonces un mínimo local de z es un mínimo global.

Sean $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ un subconjunto de p índices. El conjunto $D = \prod_{i \in I} [u_i, v_i]$, donde cada $[u_i, v_i]$ es una arista de T , es convexo. Por tanto, para cualquier función convexa en D se cumple el teorema anterior. Este resultado fundamentará los algoritmos relativos a problemas de localización correspondientes a medidas convexas en redes árbol.

1.3 Formulación del problema general

Si bien cada problema tiene su formulación específica, el modelo discreto de localización puntual en redes se puede formular, en forma general, como sigue:

Dada una red $N(V, E)$ conexa, no dirigida, sea $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p) \in N^p$ un vector de localizaciones para p servicios ($p \geq 1$), y $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ el vector de demanda, situada en los nodos de N . El modelo general de localización puntual no restringida se formula como

$$(PGL) \quad \min_{\mathbf{x} \in N^p} z(\mathbf{x}) = f(d(\mathbf{x}, v_1), \dots, d(\mathbf{x}, v_n))$$

donde

- $z : N \rightarrow \mathbb{R}$ es la función objetivo de valores reales.
- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la función de costo.
- $d(\mathbf{x}, v_i)$ es la distancia entre v_i y el punto más cercano en el vector \mathbf{x} , $i = 1, \dots, n$.

Esta formulación corresponde al modelo no interactivo (vease Hooker, Garfinkel y Chen [27]), en los cuales cada nodo es atendido por el servicio más próximo.

Definición 1.3.1 Se denomina Conjunto Dominante Finito (CDF) del problema general de localización PGL a un conjunto finito de puntos de N que contiene a todas las componentes de alguna solución óptima \mathbf{x}^* de PGL.

Dicho conjunto se dirá estrictamente dominante si incluye todas las soluciones óptimas.

La existencia de un CDF es fundamental en la resolución de un problema de localización, ya que permite que éste sea discretizado de la forma

$$\min_{\mathbf{x} \in N^p} z(\mathbf{x}) \quad \sim \quad \min_{\mathbf{x} \in (CDF)^p} z(\mathbf{x})$$

En el trabajo de Hooker, Garfinkel y Chen [27] se identifican los CDF de un amplio número de problemas de localización, y se establecen dos condiciones (independientes entre si) para que un problema de localización tenga CDF:

- (i) O bien que la función de costo sea cóncava y no decreciente en sus argumentos.
- (ii) O bien que se verifique la propiedad de la 1-dominancia: un CDF para el problema simple ($p = 1$) sea también un CDF para el problema general.

1.4 Formulación del problema 1-varianza

Los problemas de localización en redes con el criterio varianza se inician con el problema de minimización simple en una red árbol, resuelto por Maimon [39], y en una red general, resuelto por Hansen y Zheng [23], extendiéndose posteriormente el estudio a redes 3-cactus (Kincaid y Maimon [32, 33]). Por último Berman [2] analiza los problemas mediana-varianza en redes, tanto los restringidos que se formulan minimizando una medida con una restricción de cota superior sobre la otra, como los obtenidos mediante una combinación de ambas funciones.

A continuación se establece la formulación del problema 1-varianza, particularizando el caso general (PLG) cuando $p = 1$ y la función de costo f es la varianza de la distribución de las distancias sobre la red.

Sea $N(V, E)$ una red conexa, no dirigida, con pesos estrictamente positivos y normalizados a 1.

Definición 1.4.1 Dado $x \in N$, y $V' \subseteq V$ la función mediana de x sobre V' es la función $z_m : N \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$z_m(x, V') = \sum_{v_i \in V'} w_i d(v_i, x)$$

Cuando $V' = V$ la función mediana será denotada $z_m(x)$.

Definición 1.4.2 La función varianza sobre la red es la función $z_s : N \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que para cada $x \in N$,

$$z_s(x) = \sum_{v_i \in V} w_i [d(v_i, x) - z_m(x)]^2$$

El siguiente resultado es consecuencia de la continuidad de la función distancia $d(v_i, x)$ sobre cada arista de N .

Proposición 1.4.3 $z_s(x)$ es continua sobre cada arista $[u, v]$ de N .

Proposición 1.4.4 Sea la función mediana cuadrática $z_m^{(2)} : N \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$\forall x \in N, z_m^{(2)}(x) = \sum_{v_i \in V} w_i d(v_i, x)^2.$$

Entonces, para cada $x \in N$, $z_s(x) = z_m^{(2)}(x) - (z_m(x))^2$.

Demostración: Desarrollando el cuadrado en la expresión de $z_s(x)$, se obtiene

$$z_s(x) = \sum_{v_i \in V} w_i d(v_i, x)^2 + w(V)z_m(x)^2 - 2z_m(x) \underbrace{\sum_{v_i \in V} w_i d(v_i, x)}_{z_m(x)}$$

lo que concluye la demostración, ya que $w(V) = \sum_{v_i \in V} w_i = 1$. □

El objetivo del problema de localización simple 1-varianza es localizar el punto de la red que minimice la varianza de la distribución de las distancias, esto es

Problema de Localización 1-varianza:

$$(1/\text{VAR}/N) \quad \min_{x \in N} z_s(x)$$

Definición 1.4.5 Un punto $x_s^* \in N$ se denomina punto 1-varianza de N si $z_s(x_s^*) \leq z_s(x)$, $\forall x \in N$.

La solución de (1/VAR/N) no tiene por qué ser única: véase la red árbol de la Figura 1.1, donde todas las aristas tienen igual longitud 1 y todos los vértices igual peso $w_i = 1/20$. La mínima varianza se alcanza en los puntos $x_s^* \in [v_1, v_2] \cup [v_1, v_3]$ tales que $d(x_s^*, v_1) = 0.233333$, y el valor del mínimo es $z_s(x_s^*) = 1.58667$.

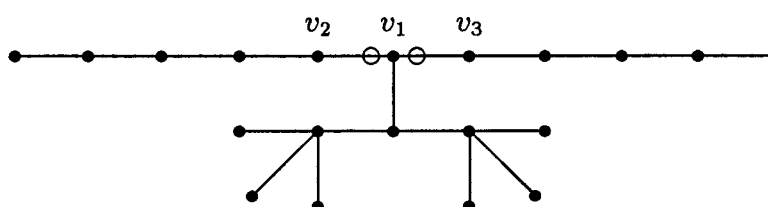


Figura 1.1

Definición 1.4.6 Un vértice $v_m^* \in V$ es una 1-mediana si $z_m(v_m^*) \leq z_m(v)$, para todo $v \in V$.

Definición 1.4.7 Un punto $x_m^* \in N$ es una 1-mediana absoluta si

$$z_m(x_m^*) \leq z_m(x), \quad \forall x \in N$$

Por la proposición 1.2.6, para cada $v_i \in V$ la función $d(v_i, x)$ es cóncava en cada arista $e_{ij} = [v_i, v_j]$ con a lo más un punto de cambio de pendiente, por tanto $z_m(x)$ es también cóncava en cada $e_{ij} \in E$, con $|V| = n$ puntos de cambio de pendiente como máximo. Consecuentemente

Proposición 1.4.8 (Hakimi [15]) *El CDF para el problema de la 1-mediana absoluta $\min_{x \in N} z_m(x)$ es el conjunto de vértices de la red.*

Este resultado, conocido como propiedad de optimalidad del vértice mediana, es válido también para el problema de la p -mediana, y en general se extiende a todos los problemas cuyas funciones de coste sean cóncavas y no decrecientes en las distancias. En el caso de que la red sea un árbol, se tiene:

Teorema 1.4.9 *Sea $T(V, E)$ una red árbol. El conjunto de puntos 1-mediana absoluta es, o bien $\{v_i\}$ para algún vértice $v_i \in V$, o bien el conjunto de puntos de la arista $[v_i, v_j]$, para alguna arista $e_{ij} \in E$.*

Estos resultados convierten el problema de la mediana absoluta en el problema del vértice mediana. Una vez obtenida la matriz de distancias entre todos los pares de vértices de N , el conjunto de vértices 1-mediana V_m^* se puede evaluar en $O(n^2)$ operaciones. En un árbol T , el conjunto de medianas absolutas se puede calcular en $O(n)$ operaciones mediante el algoritmo de Goldman [13].

En el caso de los problemas de localización que no sean NP-duros, el conocimiento del CDF es clave en la obtención de algoritmos polinomiales de resolución. Si la función de coste no es cóncava, no se verifica la propiedad de optimalidad de los vértices, aunque pueda poseer otro CDF (caso del problema centro). En todo caso se requiere un estudio previo del comportamiento de la función objetivo.

A continuación se hace un análisis de los resultados obtenidos para el problema simple de localización 1-varianza en redes tipo árbol (Maimon [39]) y en redes generales (Hansen y Zheng [23]).

1.5 Varianza en una red árbol

Dentro de los problemas de localización en redes, la estructura de la red árbol se ha utilizado como modelo en numerosas ocasiones. Como expresan Francis, McGinnis y White [11] y Tansel, Francis y Lowe [59], las razones surgen no sólo de considerar modelos que en la realidad presentan esta estructura, sino principalmente porque la convexidad de la función distancia en árboles provoca que los problemas de localización sean mucho más tratables que en redes cíclicas, en el sentido de obtener algoritmos de resolución de menor complejidad.

Sea $T(V, E)$ una red árbol no dirigida, con sistema de pesos normalizado a 1. Seleccionando un vértice cualquiera del árbol: v_r como raíz, se puede establecer un recorrido en postorden en T que impone una estructura jerárquica entre sus nodos, tal que la información se transmite recursivamente de *hijos a padres*.

Definición 1.5.1 (Aho [1]) Sean v_1, \dots, v_k , ($k \geq 0$) hijos de v_r , esto es, existe una arista $[v_i, v_r] \in E$. Un recorrido en postorden en T se define recursivamente como sigue:

1. Visitar en postorden los subárboles con raíces v_1, \dots, v_k , en este orden.
2. Visitar la raíz v_r .

Para cada aristas $[u, v] \in E$ en postorden, v es padre de u , y u hijo de v . A su vez, el postorden establece la siguiente secuencia en el recorrido de las aristas de T :

$$[u_1, v_{i(1)}], [u_2, v_{i(2)}], \dots, [u_{n-1}, v_r]$$

En la figura 1.2 las etiquetas bajo los vértices denotan su ordenación en postorden e identificarán de ahora en adelante al vértice, esto es: la visita i -ésima corresponderá al vértice v_i . El conjunto de aristas recorrido en postorden es: $\{[1, 2], [2, 4], [3, 4], [4, 8], [5, 6], [6, 7], [7, 8]\}$.

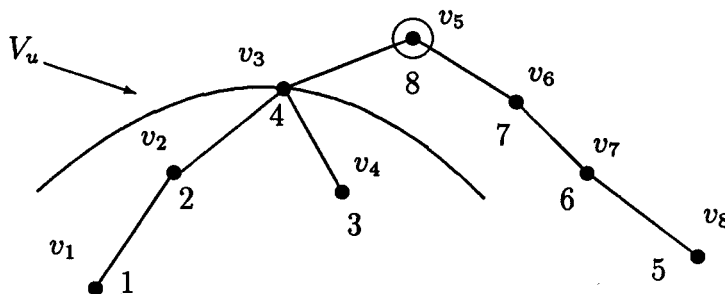


Figura 1.2 : Postorden en T .

Supuesto un postorden en T , para cada arista genérica $e = [u, v]$, de longitud $l(e) = l_{uv} > 0$, V_u denotará al conjunto de vértices del subárbol enraizado en u , incluyendo a u , y $\overline{V}_u = V \setminus V_u = \{v_i \in V : v_i \notin V_u\}$ (v_3 en la figura 1.2). El postorden induce una orientación en el recorrido de la arista $[u, v]$, donde u se selecciona como vértice inicial, y tal que los puntos de la arista se pueden identificar por su distancia a u de forma que la notación

$$x \in [u, v]$$

representa al punto tal que $d(u, x) = x$. Puesto que $\{V_u, \overline{V}_u\}$ constituye una partición de V , para cada $x \in [u, v]$ se tiene

$$d(v_i, x) = \begin{cases} d(v_i, u) + x, & \text{si } v_i \in V_u \\ d(v_i, u) - x, & \text{si } v_i \in \overline{V}_u \end{cases} \quad \forall v_i \in V \quad (1.1)$$

De la proposición 1.2.5 se deduce el siguiente resultado:

Proposición 1.5.2 *La función varianza $z_s(x)$ es continua a lo largo de cualquier camino de T .*

A continuación se expresará la medida varianza en función de la localización del servicio sobre la arista. Si bien los resultados fundamentales se deben a Maimon [39] se han introducido modificaciones en la caracterización de la varianza y en la obtención de sus propiedades, que permitirán un tratamiento más simple del problema.

Si u es el vértice inicial en la orientación inducida en el recorrido de $[u, v]$, el problema de la 1-varianza restringido a la arista $[u, v]$: $\min\{z_s(x) : x \in [u, v]\}$ es equivalente al problema

$$\min\{z_s(x) : x \in [0, l_{uv}]\}.$$

Proposición 1.5.3 Para $x \in [u, v]$, se verifica que $z_m(x) = g_u x + z_m(u)$, donde

$$g_u = w(V_u) - w(\overline{V}_u) = \sum_{v_i \in V_u} w_i - \sum_{v_i \in \overline{V}_u} w_i$$

Demostración: Sea $x \in [u, v]$. Por (1.1), se tiene

$$z_m(x) = \sum_{v_i \in V_u} w_i(d(v_i, u) + x) + \sum_{v_i \in \overline{V}_u} w_i(d(v_i, u) - x)$$

que desarrollando, resulta

$$z_m(x) = z_m(u, V_u) + z_m(u, \overline{V}_u) + x(w(V_u) - w(\overline{V}_u)) = z_m(u) + g_u x$$

lo que finaliza la demostración. \square

Proposición 1.5.4 Para cada $x \in [u, v]$ la función varianza se expresa

$$z_s(x) = Ax^2 + 2Bx + C$$

donde $A = 1 - g_u^2$, $B = 2z_m(u, V_u) - (1 + g_u)z_m(u)$, y $C = z_m^{(2)}(u) - (z_m(u))^2$.

Demostración: Aplicando (1.1) al desarrollo de $z_m^{(2)}(x)$ resulta

$$\begin{aligned} z_m^{(2)}(x) &= \sum_{v_i \in V_u} w_i[d(v_i, u) + x]^2 + \sum_{v_i \in \overline{V}_u} w_i[d(v_i, u) - x]^2 \\ &= \sum_{v_i \in V_u} w_i d(v_i, u)^2 + \sum_{v_i \in \overline{V}_u} w_i d(v_i, u)^2 + (w(V_u) + w(\overline{V}_u))x^2 \\ &\quad + 2x(z_m(u, V_u) - z_m(u, \overline{V}_u)) \\ &= x^2 + 2x(2z_m(u, V_u) - z_m(u)) + z_m^{(2)}(u) \end{aligned}$$

ya que $w(V_u) + w(\overline{V}_u) = 1$, y $z_m(u, \overline{V}_u) = z_m(u) - z_m(u, V_u)$. Análogamente, elevando al cuadrado $z_m(x)$, resulta

$$z_m(x)^2 = g_u^2 x^2 + 2g_u z_m(u)x + z_m(u)^2.$$

Aplicando ambos desarrollos a la proposición 1.4.4 se obtiene

$$z_s(x) = \underbrace{(1 - g_u^2)}_A x^2 + 2 \underbrace{[2z_m(u, V_u) - z_m(u) - g_u z_m(u)]}_B x + \underbrace{z_m^{(2)}(u) - (z_m(u))^2}_C$$

q.e.d. □

Proposición 1.5.5 (Maimon [39]) $z_s(x)$ es estrictamente convexa sobre cada arista $[u, v]$.

Por tanto, un mínimo local para el problema restringido es mínimo global. Por otra parte, para cada camino $P(v_i, v_j) \subseteq T$ el conjunto $\{(x, z_s(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, d(v_i, v_j)]\}$ será la gráfica de la 1-varianza en \mathbb{R}^2 , la cual está constituida por un conjunto de arcos de parábola unidos entre sí en los puntos correspondientes a los vértices del camino. Esto se ilustra en el ejemplo que sigue:

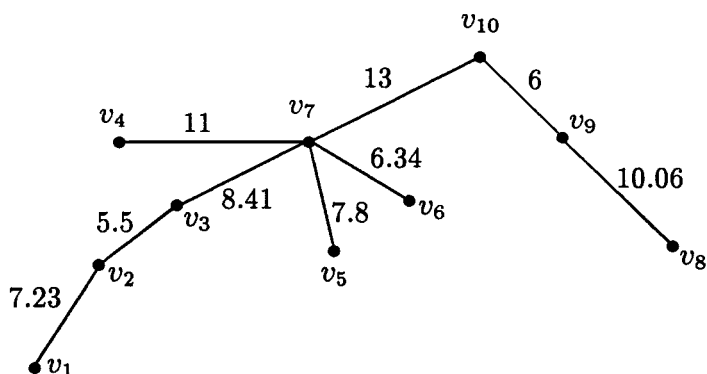


Figura 1.3

El árbol está descrito en postorden. Los números sobre las aristas corresponden a las longitudes. Los pesos de los vértices, normalizados a 1, son: 0.0280374, 0.046729, 0.158879, 0.11215, 0.0841121, 0.0934579, 0.0654206, 0.130841, 0.17757, 0.102804.

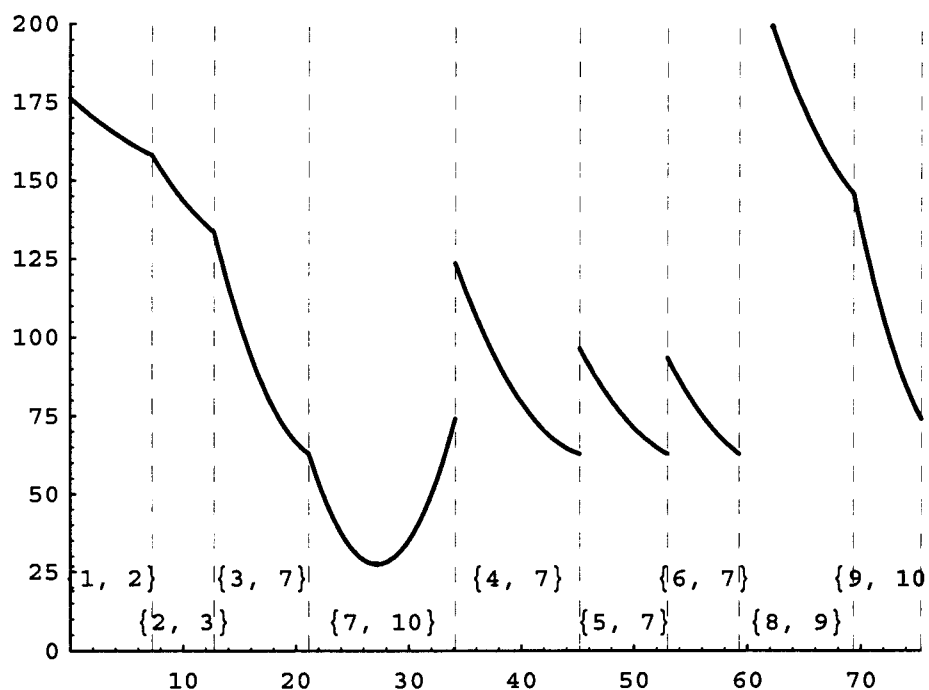


Figura 1.4: Gráfico de la 1-varianza sobre T

La Figura 1.4 muestra la gráfica de la función 1-varianza correspondiente al árbol descrito en la Figura 1.3. Las líneas verticales punteadas delimitan las aristas de T , marcadas en la base por la pareja de números entre llaves. Nótese como, a lo largo del camino $P(v_1, v_{10})$, z_s es continua, pero no diferenciable en los puntos correspondientes a los vértices del camino. El punto más bajo de la gráfica corresponde a la mínima varianza, alcanzándose en la arista $[v_7, v_{10}]$.

Teorema 1.5.6 Sea $x_{[u,v]}^*$ la solución del problema 1-varianza restringido a la arista $[u, v]$, y sea

$$x_0 = \frac{(1 + g_u)z_m(u) - 2z_m(u, V_u)}{1 - g_u^2}$$

Entonces se verifica

$$x_{[u,v]}^* = \begin{cases} x_0, & \text{si } 0 < x_0 < l_{uv} \\ 0, & \text{si } x_0 \leq 0 \\ l_{uv}, & \text{si } x_0 \geq l_{uv} \end{cases}$$

Demostración: El valor x_0 es la solución de $z'_s(x) = 0$, y viene dado por $x_0 = -B/A$. Por la convexidad estricta de z_s en cada arista, el mínimo de $z_s(x)$ en

$x \in [0, l_{uv}]$ se alcanza en el punto crítico x_0 , si éste es interior al intervalo, o en los extremos del mismo, en caso contrario. \square

Sea $X_{loc}^{(1)} = \{x_{[u,v]}^* : [u, v] \in E\}$ el conjunto de mínimos locales de z_s sobre cada arista $[u, v]$ de T . Obviamente el punto 1-varianza $x_s^* \in X_{loc}^{(1)}$, por tanto, para cada problema concreto, $X_{loc}^{(1)}$ es un conjunto dominante finito. Sin embargo los elementos de $X_{loc}^{(1)}$ cambian con cada problema, de forma que no se puede caracterizar un conjunto dominante finito válido para todas las instancias del problema. Por tanto

Corolario 1.5.7 *No existe CDF para el problema de la 1-varianza.*

1.5.1 Algoritmo

El algoritmo 1/VAR/ T que se describe a continuación para el problema de la 1-varianza procede aplicando el teorema 1.5.6 para calcular el conjunto $X_{loc}^{(1)}$, y seleccionando entre sus elementos el óptimo, que se va actualizando en cada etapa. Este algoritmo difiere del propuesto por Maimon [39] en que aquel se basa en el cálculo de las derivadas laterales de la función 1-varianza en cada uno de los vértices de cada arista. Si el producto de ambas derivadas era negativo, se calculaba el punto x_0 interior a la arista; caso contrario se seleccionaba como óptimo de la arista el vértice inicial (derivada lateral no negativa) o el final (derivada lateral no positiva). Si bien ambos algoritmos tienen la misma complejidad, el algoritmo 1/VAR/ T es más simple de ejecución.

Puesto que $w(V_u) + w(\overline{V}_u) = 1$, se tiene $g_u = 2w(V_u) - 1$ y por tanto $1 + g_u = 2w(V_u)$, y $A = 1 - g_u^2 = 4w(V_u)(1 - w(V_u))$. Sustituyendo en x_0 resulta

$$x_0 = \frac{w(V_u)z_m(u) - z_m(u, V_u)}{2w(V_u)(1 - w(V_u))}$$

Con lo que la obtención de x_0 en cada $[u, v]$ y el cálculo de $z_s(x_{[u,v]}^*)$ requiere de un conjunto de valores auxiliares asociados a cada vértice inferior u de cada arista $[u, v]$. Estos valores auxiliares son:

$$w(V_u), z_m(u, V_u), z_m(u), \text{ y } z_m^{(2)}(u)$$

y se calculan previamente al algoritmo 1/VAR/ T efectuando dos pasadas sobre los vértices de T : hacia la raíz y en sentido contrario. En ambos casos el cálculo se hace recursivamente como sigue:

Sea H_v el conjunto de vértices hijos del vértice v , y $w(V_{v_i})$ el peso del subárbol enraizado en v_i . Entonces si $v_i \in H_v$ y $v_t \in V_{v_i}$ se tiene $d(v_t, v) = d(v_t, v_i) + l_{v_i, v}$, donde $l_{v_i, v}$ es la longitud de la arista $[v_i, v]$. Aplicando esta relación se obtiene:

- Paso hacia la raíz

$$w(V_v) = \sum_{v_i \in H_v} w(V_{v_i}) + w(v) \quad (1.2)$$

$$z_m(v, V_v) = \sum_{v_i \in H_v} (z_m(v_i, V_{v_i}) + l_{v_i, v} w(V_{v_i})) \quad (1.3)$$

$$z_m^{(2)}(v, V_v) = \sum_{v_i \in H_v} [z_m^{(2)}(v_i, V_{v_i}) + l_{v_i, v} (2z_m(v_i, V_{v_i}) + l_{v_i, v} w(V_{v_i}))] \quad (1.4)$$

- Paso hacia fuera

Utilizando las relaciones anteriores, al llegar a la raíz v_r se obtendrán: $w(V) = 1$; $z_m(v_r)$, $z_m^{(2)}(v_r)$, ya que $V_{v_r} = V$. En el paso hacia fuera se completa el cálculo de $z_m(u)$, $z_m^{(2)}(u)$ para todos los demás vértices como sigue: Para cada $v_i \in H_v$

$$z_m(v_i) = z_m(v) + l_{v_i, v} (1 - 2w(V_{v_i})) \quad (1.5)$$

$$z_m^{(2)}(v_i) = z_m^{(2)}(v) + 2l_{v_i, v} [z_m(v) - 2z_m(v_i, V_{v_i})] + l_{v_i, v}^2 [1 - 4w(V_{v_i})] \quad (1.6)$$

Este proceso se ejecuta en el siguiente algoritmo, al final del cual se obtienen todos los valores auxiliares asociados a cada vértice:

ALGORITMO AUX /V(T)

Paso 0.

Hacer $H_u = \emptyset$ para cada $u \in V$, $Lista \leftarrow V$.

Sea $u \leftarrow 1$ (primer vértice en el postorden).

Paso 1.

Si $gr(u) = 1$, **hacer** $w(V_u) = w(u)$; $z_m(u, V_u) = 0$; $z_m^{(2)}(u, V_u) = 0$.

Sea $v = \text{padre}(u)$ en el postorden. **Hacer** $H_v \leftarrow H_v \cup \{u\}$.

Calcular $w(V_v)$, $z_m(v, V_v)$ y $z_m^{(2)}(v, V_v)$ utilizando (1.2), (1.3) y (1.4).

Paso 2.

Si v es el vértice raíz:

* **hacer** $z_m(v) = z_m(v, V_v)$, $z_m^{(2)}(v) = z_m^{(2)}(v, V_v)$.

* **Ir** al Paso 3.

En caso contrario, $u \leftarrow u + 1$. **Ir** al Paso 1.

Paso 3.

Para cada $u \in H_v$, **calcular** $z_m(u)$ y $z_m^{(2)}(u)$ aplicando (1.5) y (1.6).

Eliminar de *Lista* v y los vértices de H_v de grado 1.

Paso 4.

Si *Lista* $\neq \emptyset$:

* **Sea** v el vértice de *Lista* más elevado en el postorden.

* **Ir** al Paso 3.

En caso contrario, parar.

La complejidad de este algoritmo es $O(n)$, ya que en cada una de las dos pasadas que efectúa el algoritmo sobre los vértices de T cada vértice es examinado una sola vez.

A continuación se desarrolla el algoritmo 1/VAR/T. Previamente, se ha de ejecutar el algoritmo AUX /V(T) para calcular todos los valores auxiliares asociados a cada vértice de T .

ALGORITMO 1/VAR/T

Paso 0.

Sean $x_s^* = 0$, $e = [0, 0]$, Z suficientemente grande, $[u, v]$ primera arista en postorden .

Paso 1.

Calcular $x_{[u,v]}^*$ aplicando el teorema 1.5.6.

Calcular $z_s(x_{[u,v]}^*)$ aplicando la proposición 1.5.4.

Si $z_s(x_{[u,v]}^*) < Z$, **hacer** $x_s^* = x_{[u,v]}^*$, $e = [u, v]$, $z_s(x_s^*) = Z$.

Paso 2.

Si quedan aristas de E sin examinar:

* Sea $[u, v]$ la siguiente arista en postorden. Ir al Paso 1.

En caso contrario, parar. Los valores de x_s^* , $e = [u, v]$ y Z constituyen la solución.

COMPLEJIDAD

Puesto que cada arista es examinada una sola vez, la complejidad de $1/\text{VAR}/T$ es $O(n)$, que también es la del algoritmo previo. Por tanto, el problema de la 1-varianza en un árbol T se resuelve en tiempo $O(n)$.

1.6 Varianza en una red cíclica

Si la red $N(V, E)$ contiene algún ciclo, la solución del problema 1-varianza: $\min\{z_s(x) : x \in N\}$ pertenece también al conjunto de mínimos locales $X_{loc}^{(1)}$ de z_s sobre las aristas de E , por tanto se ha de estudiar el problema restringido $\min\{z_s(x) : x \in [0, l_{uv}]\}$.

Considerando en cada arista $[u, v]$ una orientación bien definida de vértice inicial u , se adoptará la notación ya indicada, donde $x \in [u, v]$ denotará tanto al punto como al valor de $[0, l_{uv}]$ tal que $d(u, x) = x$.

Definición 1.6.1 Sea $B(u, v) = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$ el conjunto de puntos de embotellamiento de la arista $[u, v]$ ordenados en sentido creciente. Para cada $j = 1, \dots, k+1$ se denomina región primaria de la arista $[u, v]$ a la subarista $[\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]$, donde $\bar{x}_0 = 0$ y $\bar{x}_{k+1} = l_{uv}$.

Definición 1.6.2 Para cada $j = 1, \dots, k$, el conjunto de vértices relativos al punto de embotellamiento \bar{x}_j se define como

$$B(\bar{x}_j) = \{v_t \in V : d(v_t, u) + \bar{x}_j = d(v_t, v) + l_{uv} - \bar{x}_j\}$$

De la definición se sigue que \bar{x}_j es punto de embotellamiento si y sólo si $B(\bar{x}_j) \neq \emptyset$. Por otra parte, si $v_t \in B(\bar{x}_j)$, entonces

$$\bar{x}_j = \frac{d(v_t, v) + l_{uv} - d(v_t, u)}{2}$$

Otra consecuencia inmediata de esta definición es

Proposición 1.6.3 (Hansen y Zheng [23])

- (i) Para todo $\bar{x}_i, \bar{x}_j \in B(u, v)$, si $\bar{x}_i \neq \bar{x}_j$, entonces $B(\bar{x}_i) \cap B(\bar{x}_j) = \emptyset$.
- (ii) Se verifica $\sum_{j=1}^k |B(\bar{x}_j)| \leq n$

Cada $x \in [u, v]$ induce una partición: $\{V_u(x), V_v(x)\}$ en la demanda nodal, donde

$$V_u(x) = \{v_i \in V : d(v_i, u) + x \leq d(v_i, v) + l_{uv} - x\}$$

$$\text{y } V_v(x) = V \setminus V_u(x).$$

Los resultados que siguen a continuación son fundamentales tanto para el algoritmo de Hansen y Zheng [23] como para la resolución del problema de la 1-varianza con demanda continuamente distribuida tratado en el capítulo 5 de la presente memoria. Por ello se han desarrollado las demostraciones no incluidas en la referencia [23].

Proposición 1.6.4 Para $j = 1, \dots, k+1$ sean los intervalos $S_j = (\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]$, con $S_0 = [\bar{x}_0, \bar{x}_0]$. Entonces $V_u(x)$ no varía en $x \in S_j$, $\forall j = 1, \dots, k+1$.

Demostración: Por la proposición 1.2.6 se tiene que para cada $v_i \in V$ la función

$$d(v_i, x) = \min\{d(v_i, u) + x, d(v_i, v) + l_{uv} - x\}$$

es lineal a trozos y cóncava en $[0, l_{uv}]$, presentando el máximo en el punto de embotellamiento \bar{x}_t tal que $v_i \in B(\bar{x}_t)$, por tanto es monótona en cada región primaria $[\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]$, $j = 1, \dots, k+1$. Sea

$$V_u(S_j) = \{v_t \in V : d(v_t, x) \text{ es creciente en } (\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]\}$$

Entonces $v_i \in V_u(S_j)$ si y sólo si $\forall x \in (\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]$, $d(v_i, x) = d(v_i, u) + x$. Sea $x \in S_j$. Si $v_i \in V_u(x)$ entonces $d(v_i, u) + x \leq d(v_i, v) + l_{uv} - x$, lo que implica $d(v_i, x) = d(v_i, u) + x$, o equivalentemente, $v_i \in V_u(S_j)$, resultando $V_u(x) \subseteq V_u(S_j)$.

Recíprocamente, Si $v_i \in V_u(S_j)$ resulta $d(v_i, x) = d(v_i, u) + x$, lo que implica $v_i \in V_u(x)$, y por tanto $V_u(S_j) \subseteq V_u(x)$. De ambas inclusiones resulta $V_u(x) = V_u(S_j)$, $\forall x \in S_j = (\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]$, q. e. d. \square

Consecuentemente, para cada $x \in S_j$ se adoptará la notación $V_u(S_j)$, $V_v(S_j)$, en lugar de $V_u(x)$, $V_v(x)$, e igualmente $z_m(x; S_j)$, $z_m^{(2)}(x; S_j)$, $z_s(x; S_j)$ en lugar de $z_m(x)$, $z_m^{(2)}(x)$ y $z_s(x)$, $j = 1, \dots, k+1$. Además, puesto que $B(\bar{x}_j) \subset V_u(\bar{x}_j) = V_u(S_j)$, resulta

$$B(\bar{x}_j) \subset V_u(S_j) \quad \forall j = 1, \dots, k+1$$

Proposición 1.6.5 *Para cada $j = 1, \dots, k+1$, la función 1-varianza $z_s(x)$ sobre cada región primaria $[\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]$ viene dada por*

$$z_s(x; S_j) = x^2 + 2b(S_j)x + c(S_j) - (a(S_j) + g(S_j))x^2$$

donde

$$a(S_j) = z_m(u, V_u(S_j)) + z_m(v, V_v(S_j)) + l_{uv}w(V_v(S_j))$$

$$g(S_j) = w(V_u(S_j)) - w(V_v(S_j))$$

$$b(S_j) = z_m(u, V_u(S_j)) - z_m(v, V_v(S_j)) - l_{uv}w(V_v(S_j))$$

$$c(S_j) = z_m^{(2)}(u, V_u(S_j)) + \sum_{v_i \in V_v(S_j)} w_i(d(v_i, u) + l_{uv})^2$$

Demostración: Se hará calculando $z_s(x; S_j)$ y extendiendo el resultado a toda la región primaria por continuidad. Para cada $j = 1, \dots, k+1$, la partición de V en $\{V_u(S_j), V_v(S_j)\}$ y la definición de ambos conjuntos permite expresar

$$\begin{aligned} z_m(x; S_j) &= \sum_{v_i \in V_u(S_j)} w_i[d(v_i, u) + x] + \sum_{v_i \in V_v(S_j)} w_i[d(v_i, v) + l_{uv} - x] \\ &= \sum_{v_i \in V_u(S_j)} w_i d(v_i, u) + \sum_{v_i \in V_v(S_j)} w_i d(v_i, v) + l_{uv} \sum_{v_i \in V_v(S_j)} w_i \\ &\quad + x \left[\sum_{v_i \in V_u(S_j)} w_i - \sum_{v_i \in V_v(S_j)} w_i \right] \end{aligned}$$

obteniéndose para $z_m(x; S_j)$:

$$z_m(x; S_j) = a(S_j) + g(S_j)x$$

Procediendo igualmente para $z_m^{(2)}(x; S_j)$ se tiene

$$z_m^{(2)}(x; S_j) = \sum_{v_i \in V_u(S_j)} [d(v_i, u) + x]^2 + \sum_{v_i \in V_v(S_j)} w_i[d(v_i, v) + l_{uv} - x]^2$$

y efectuando el desarrollo de los cuadrados, y agrupando resulta

$$\begin{aligned} z_m^{(2)}(x; S_j) &= \sum_{v_i \in V_u(S_j)} w_i d(v_i, u)^2 + \sum_{v_i \in V_v(S_j)} w_i [d(v_i, v) + l_{uv}]^2 \\ &+ 2x [z_m(u, V_u(S_j)) - z_m(v, V_v(S_j) - l_{uv} w(V_v(S_j)))] \\ &+ [w(V_u(S_j)) + w(V_v(S_j))] x^2 \end{aligned}$$

Aplicando la proposición 1.4.4 se concluye la demostración, sin más que observar que $w(V_u(S_j)) + w(V_v(S_j)) = 1$. \square

Teorema 1.6.6 (Hansen y Zheng [23]) *La función 1-varianza $z_s(x)$ es convexa sobre cada región primaria de cada arista $[u, v]$ de E .*

Como consecuencia, el mínimo local de $z_s(x)$ en cada región primaria es mínimo global, y éste se alcanza en un punto interior a la región primaria o en uno de los extremos de la misma, como se enuncia en el siguiente corolario.

Corolario 1.6.7 *Para cada región primaria $[\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]$ de cada arista $[u, v]$ tal que $|g(S_j)| < 1$, sea el punto*

$$x_0 = \frac{a(S_j)g(S_j) - b(S_j)}{1 - g(S_j)^2}$$

Entonces el mínimo de $z_s(x)$ en dicha región primaria se alcanza en el punto $x_{[u,v]}^(S_j)$ tal que: (a) $x_{[u,v]}^*(S_j) = x_0$, si $\bar{x}_{j-1} < x_0 < \bar{x}_j$, (b) $x_{[u,v]}^*(S_j) = \bar{x}_{j-1}$, si $x_0 \leq \bar{x}_{j-1}$, (c) $x_{[u,v]}^*(S_j) = \bar{x}_j$, si $x_0 \geq \bar{x}_j$.*

Lema 1.6.8 *$z_s(x; S_j)$ es constante sobre la región primaria $[\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]$ tal que $|g(S_j)| = 1$.*

Demostración: Por la proposición 1.6.5, la función $z_s(x; S_j)$ se expresa

$$z_s(x; S_j) = (1 - g(S_j)^2)x^2 + 2(b(S_j) - g(S_j)a(S_j))x + c(S_j) - a(S_j)^2$$

Si $|g(S_j)| = 1$, es $g(S_j) \pm 1$, lo que equivale a $V_u(S_j) = V, V_v(S_j) = \emptyset$, o bien $V_u(S_j) = \emptyset, V_v(S_j) = V$.

Caso de ser $g(S_j) = 1$, resulta $a(S_j) = b(S_j) = z_m(u, V_u(S_j))$, y si $g(S_j) = -1$, es $a(S_j) = -b(S_j)$. En ambos casos se obtiene para la función 1-varianza: $z_s(x; S_j) = c(S_j) - a(S_j)^2$. Por tanto es constante en la región primaria, q.e.d. \square

Esto implica que todos los puntos de $[\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]$ son solución al problema de la 1-varianza sobre dicha región primaria. El valor del mínimo se puede computar en uno cualquiera de los puntos, por ejemplo, en \bar{x}_j .

Este lema se ilustra en el siguiente ejemplo, correspondiente a la red de la figura 1.5.

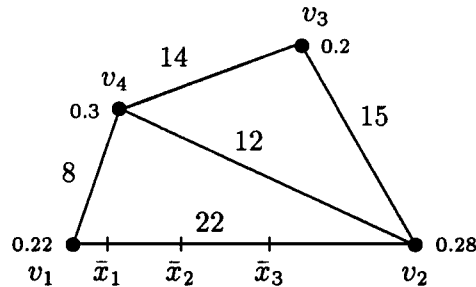


Figura 1.5

Los puntos de embotellamiento de la arista $[v_1, v_2]$ junto con sus vértices respectivos son:

$\bar{x}_1 = 1$, $B(\bar{x}_1) = \{v_2\}$; $\bar{x}_2 = 7.5$, $B(\bar{x}_2) = \{v_3\}$; $\bar{x}_3 = 13$, y $B(\bar{x}_3) = \{v_4\}$.

Sobre la primera región primaria $[\bar{x}_0, \bar{x}_1] = [0, 1]$ de la arista $[v_1, v_2]$ se obtiene que $V_u(S_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, y $V_v(S_1) = \emptyset$, resultando $g(S_1) = 1$. Por tanto, la función 1-varianza sobre esta región primaria es constante, como se puede observar en la figura 1.6. Ello es debido a que, sobre el subgrafo relativo a los vértices $\{v_1, v_2, v_4\}$ las longitudes de las aristas no cumplen la propiedad triangular.

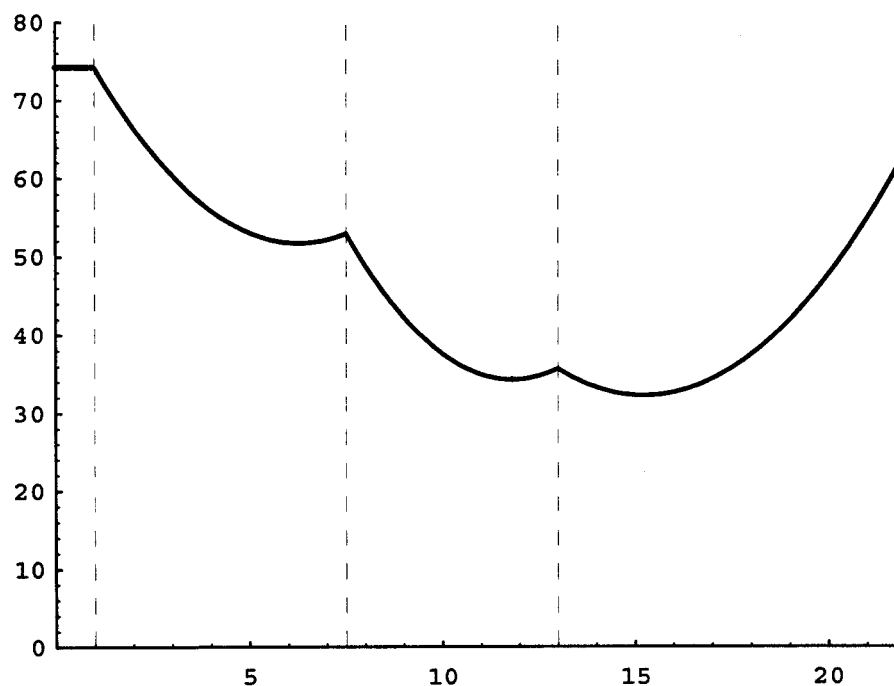


Figura 1.6: Gráfico de la 1-varianza sobre $[v_1, v_2]$

Supuesta calculada la matriz de distancias, y todos los puntos de embotellamiento en cada arista, el esfuerzo computacional para calcular cada $x_{[u,v]}^*(S_j)$ es $O(n)$, ya que la obtención de los coeficientes de $z_s(x; S_j)$ requiere una pasada por todos los vértices de N . Cada arista $[u, v]$ contiene, a lo más n regiones primarias, entre cuyos óptimos se selecciona el mínimo $x_{[u,v]}^*$ sobre la arista, su obtención tiene por tanto una complejidad de $O(n^2)$. Como $|E| = m$, la complejidad de resolver el problema de la 1-varianza sobre una red por este procedimiento es $O(mn^2)$.

1.6.1 Algoritmo

Esta complejidad es reducida por el algoritmo de Hansen y Zheng [23] a $O(mn \log n)$. Se basa en calcular sobre cada arista los valores asociados a cada S_j recursivamente en función de los correspondientes a S_{j-1} .

Proposición 1.6.9 Para cada $j = 1, \dots, k + 1$ se verifica:

$$V_u(S_j) = V_u(S_{j-1}) \setminus B(\bar{x}_{j-1}).$$

Demostración: Para cada $v_s \in V_u(S_j)$ la función $d(v_s, x)$ es creciente en $(\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]$, luego el máximo de $d(v_s, x)$ en la arista se alcanza en $\bar{x}_t \geq \bar{x}_j$, con $v_s \in B(\bar{x}_t)$. Esto supone que $d(v_s, x)$ es creciente en $[0, \bar{x}_j] \supset [0, \bar{x}_{j-1}]$, lo que implica $v_s \in V_u(S_{j-1})$. Por tanto, $V_u(S_j) \subset V_u(S_{j-1})$. Por otra parte $B(\bar{x}_{j-1}) \cap V_u(S_j) = \emptyset$ (ya que si fuera $v_s \in B(\bar{x}_{j-1})$, $d(v_s, x)$ sería decreciente en $[\bar{x}_{j-1}, l_{uv}]$, resultando $v_s \notin V_u(S_j)$). Entonces $V_u(S_j) \subseteq V_u(S_{j-1}) \setminus B(\bar{x}_{j-1})$.

Recíprocamente, sea $v_i \in V_u(S_{j-1}) \setminus B(\bar{x}_{j-1})$. Entonces $d(v_i, x)$ es creciente en $(\bar{x}_{j-2}, \bar{x}_{j-1}]$ alcanzándose su máximo en algún $\bar{x}_i \in B(u, v)$ tal que $\bar{x}_i > \bar{x}_{j-1}$ lo que implica $\bar{x}_i \geq \bar{x}_j$, por tanto $d(v_i, x)$ es creciente en $[0, \bar{x}_j]$, por lo que $v_i \in V_u(S_j)$. Consecuentemente, $V_u(S_{j-1}) \setminus B(\bar{x}_{j-1}) \subseteq V_u(S_j)$. De ambas inclusiones, se sigue el resultado. \square

Consecuencia de estas propiedades las relaciones:

$$V_u(S_j) = V_u(S_{j-1}) \cup B(\bar{x}_{j-1})$$

$$V_u(S_0) \supset V_u(S_1) \supset \dots \supset V_u(S_{k+1})$$

Por la proposición anterior se tiene

$$z_m(u, V_u(S_j)) = z_m(u, V_u(S_{j-1})) - z_m(u, B(\bar{x}_{j-1}))$$

y análogamente, $w(V_u(S_j)) = w(V_u(S_{j-1})) - w(B(\bar{x}_{j-1}))$, $\forall j = 1, \dots, k + 1$, lo que implica

$$a(S_j) = a(S_{j-1}) + z_m(v, B(\bar{x}_{j-1})) - z_m(u, B(\bar{x}_{j-1})) + l_{uv}w(B(\bar{x}_{j-1})) \quad (1.7)$$

$$g(S_j) = g(S_{j-1}) - 2w(B(\bar{x}_{j-1})) \quad (1.8)$$

$$b(S_j) = b(S_{j-1}) - (z_m(u, B(\bar{x}_{j-1})) + z_m(v, B(\bar{x}_{j-1})) + l_{uv}w(B(\bar{x}_{j-1}))) \quad (1.9)$$

$$c(S_j) = c(S_{j-1}) + \sum_{v_i \in B(\bar{x}_{j-1})} w_i [d(v_i, v) + l_{uv}]^2 - \sum_{v_i \in B(\bar{x}_{j-1})} w_i d(v_i, u)^2 \quad (1.10)$$

Utilizando estas expresiones, el algoritmo para la 1-varianza propuesto por Hansen y Zheng [23] queda como sigue:

ALGORITMO 1/VAR/N*Paso 0.***Calcular** la matriz de distancias $D(d(u, v))$.*Paso 1.***Para cada** arista $[u, v]$ **calcular** todos los puntos de embotellamiento, ordenarlos en sentido creciente, y **obtener** los conjuntos $B(\bar{x}_i)$, $i = 1, \dots, k$.*Paso 2.***Sea** Z suficientemente grande. **Hacer** $x_s^* = 0$, $[u^*, v^*] = \emptyset$.**Seleccionar** una arista $[u, v]$ de E que no haya sido examinada.*Paso 3.***Calcular** $V_u(S_1)$, $V_v(S_1)$, $z_m(u, V_u(S_1))$, $z_m(v, V_v(S_1))$, $a(S_1)$, $g(S_1)$, $b(S_1)$, $c(S_1)$.**Calcular** $x_{[u,v]}^*(S_1)$.**Si** $z_s(x_{[u,v]}^*(S_1)) < Z$, entonces **hacer** $Z = z_s(x_{[u,v]}^*(S_1))$, $x_s^* = x_{[u,v]}^*(S_1)$ y $[u^*, v^*] = [u, v]$ (actualizar).*Paso 4.***Repetir** para $j = 2, \dots, k + 1$,* **Calcular** $a(S_j)$, $g(S_j)$, $b(S_j)$ y $c(S_j)$ aplicando (1.7) a (1.10).* **Calcular** $x_{[u,v]}^*(S_j)$.* **Si** $z_s(x_{[u,v]}^*(S_j)) < Z$ entonces actualizar Z , x_s^* y $[u^*, v^*]$.*Paso 5.***Si** quedan aristas de E sin examinar* **seleccionar** la siguiente arista $[u, v]$.* **Ir** al Paso 3.**En caso contrario** parar: los valores actuales de Z , x_s^* y $[u^*, v^*]$ constituyen la solución.**COMPLEJIDAD**

El cálculo de la matriz de distancias (Paso 0) se puede obtener en un tiempo de $O(mn \log n)$. En efecto, si $m \in O(n^2 / \log n)$, o bien la red es poco densa como sucede en las redes planares donde $m \leq 3n - 6$ (véase [49]), se puede

utilizar n veces el algoritmo de Dijkstra representando la red mediante una tabla de n listas, lo cual permite calcular la distancia de cada vértice a todos los demás mediante dicho algoritmo en $O(m \log n)$ (véase Aho [1]).

En el Paso 1 se calculan los puntos de embotellamiento para cada arista ($O(n)$ en el peor de los casos), y se ordenan en sentido creciente, lo cual puede hacerse mediante un algoritmo de tipo *heapsort* (Aho [1]) cuya complejidad en el peor de los casos es $O(n \log n)$. Puesto que hay m aristas, la complejidad de este paso es $O(mn \log n)$.

El Paso 3 efectúa una pasada sobre todos los vértices de N para obtener los resultados correspondientes a la primera región primaria. Su complejidad es $O(n)$. La complejidad del Paso 4 es $O(n)$. En efecto, en él se resuelve el problema para las restantes regiones primarias de la arista seleccionado a partir de los cálculos de las precedentes, sin más que añadir los sumandos relativos a los conjuntos $B(\bar{x}_j)$, $j = 1, \dots, k$, lo cual requiere una pasada sobre cada uno de ellos. Por la proposición 1.6.3 el número de vértices visitados a lo largo de toda la arista es, a lo más, n . Puesto que los Pasos 3 y 4 se ejecutan m veces, su complejidad es $O(mn)$.

Por tanto la complejidad del algoritmo es la de la fase preliminar (Pasos 0 y 1), y es $O(mn \log n)$.

1.7 Otras extensiones

Surgen bien de restringir el conjunto de posibles localizaciones óptimas a los vértices de la red (problema del vértice 1-varianza) o bien de considerar redes con una estructura especial: redes cactus.

Definición 1.7.1 Un vértice $v_s^* \in V$ es un vértice 1-varianza de N si

$$z_s(v_s^*) \leq z_s(v), \quad \forall v \in V$$

Sea $V_s^* \subset V$ el conjunto de vértices 1-varianza solución de $\min\{z_s(v) : v \in V\}$. Suponiendo calculada la matriz de distancias entre todos los pares de vértices de N , el algoritmo para obtener V_s^* es similar al de V_m^* , y se desarrolla a continuación:

ALGORITMO 1/VAR/V

Paso 1.

Sea Z suficientemente grande, $V_s^* = \emptyset$.

Paso 2.

Repetir para cada $i = 1, \dots, n$:

* **Calcular** $z_s(v_i) = z_m^{(2)}(v_i) - (z_m(v_i))^2$.

* **Si** $z_s(v_i) < Z$, **hacer** $Z = z_s(v_i)$ y $V_s^* \leftarrow \{v_i\}$.

* **Si** $z_s(v_i) = Z$, **hacer** $V_s^* \leftarrow V_s^* \cup \{v_i\}$.

Complejidad

$O(n^2)$, ya que se ejecutan n ciclos y cada uno de ellos requiere una pasada sobre todos los vértices.

Si la red es un árbol T , la complejidad de obtener V_s^* es $O(n)$, sin más que sustituir el Paso 1 del algoritmo precedente por:

Para cada $v_i \in V$, **calcular** $z_m(v_i)$, $z_m^{(2)}(v_i)$ mediante el algoritmo AUX/V(T).
Sea Z suficientemente grande, $V_s^* = \emptyset$.

La última extensión del problema 1-varianza es la efectuada por Kincaid y Maimon [32, 33] a las redes cactus.

Una red conexa se dice del tipo cactus si cualquier bloque con tres o más vértices es un ciclo. Una red 3-cactus es una red cactus cuyos bloques cíclicos contienen sólo tres vértices. Una red 3-cactus se dice triangular si, en cada bloque cíclico, las longitudes de sus aristas verifican la propiedad triangular. Por tanto, las redes triangulares son un tipo especial de redes tres-cactus.

Los autores antes citados desarrollan algoritmos de tiempo lineal para localizar tanto el punto de mínima varianza en redes triangulares como el vértice de mínima varianza en redes 3-cactus. En ambos casos el algoritmo se basa efectuar una la transformación de la red en un árbol de forma que se preserven las distancias entre los vértices.

Capítulo 2

Problemas Mediana-Varianza I: Análisis de las soluciones

La localización de un servicio con un único criterio de equidad, como la varianza, puede producir soluciones poco deseables o insatisfactorias. Este hecho ya fue señalado por Maimon [39], objetando que el punto de mínima varianza puede localizar un servicio de forma que “los usuarios sean más iguales, pero la mayoría estén peor situados”. Un ejemplo de tal consecuencia se muestra a continuación:

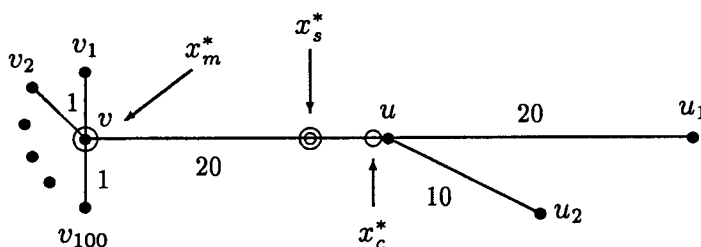


Figura 2.1

En la figura 2.1 se muestra una red equiponderada, donde el nivel de demanda que surge en cada uno de los nodos es el mismo. Se puede observar que casi la totalidad de la demanda se acumula en torno al nodo v , en donde se localiza la mediana x_m^* . La localización que minimiza la varianza x_s^* se sitúa en la arista $[v, u]$, a distancia 14.479697 del nodo v , y el centro absoluto x_c^* está a distancia 19.5 de v . Claramente, la solución dada por x_s^* no es satisfactoria para

toda la demanda situada alrededor de v , que se verá penalizada con un aumento del coste en el acceso al servicio respecto de la localización x_m^* , (la localización x_c^* empeora más la situación).

La corrección de este tipo de situaciones se puede efectuar en el marco de la optimización multicriterio, bien introduciendo restricciones sobre el planteamiento del problema, de manera que se acote o se limite el efecto no deseado, o bien definiendo una nueva función que incorpore a ambas medidas.

Inicialmente Maimon [39] sugirió limitar la localización del punto 1-varianza a un conjunto de puntos X_b próximos a la mediana, definido

$$X_b = \{x \in N : \frac{z_m(x_m^*)}{z_m(x)} > b\} \quad b \in (0, 1)$$

Esto supone considerar una cota superior sobre los valores de la mediana, ya que $\forall x \in X_b$ es $z_m(x) < z_m(x_m^*)/b$, lo que da lugar a un planteamiento mediana-varianza restringido. Igualmente se puede plantear el problema simétrico, donde se minimiza la mediana con una restricción de cota superior sobre los valores de la varianza. De esta manera, y de forma análoga a los problemas restringidos centro-mediana, Berman [2] formula y estudia los problemas *mediana-varianza restringidos*:

$$\min_{x \in N} \{z_s(x) : z_m(x) \leq \beta\} \quad \text{y} \quad \min_{x \in N} \{z_m(x) : z_s(x) \leq \alpha\}$$

La segunda posibilidad apuntada combina ambos criterios introduciendo una nueva función objetivo. Este planteamiento ha sido usado en los problemas centro-mediana mediante la función cent-dian, definida por Halpern [18, 19] como una combinación lineal convexa de las medidas centro y mediana, dada por

$$f(\alpha, x) = \alpha z_c(x) + (1 - \alpha) z_m(x), \quad \text{con } \alpha \in [0, 1]$$

(siendo $z_c(x) = \max_{v_i \in V} d(v_i, x)$ la medida centro). En el caso de los criterios mediana y varianza, es nuevamente Berman [2] el que establece la combinación de ambos, formulando el siguiente problema *mediana-varianza no restringido*:

$$\min_{x \in N} \{z_m(x) + \mu z_s(x)\}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

El estudio que efectúa Berman de estos tres problemas mediana-varianza sólo se refiere a la caracterización de las soluciones y al desarrollo de algoritmos polinomiales para su resolución. Sin embargo, existen varios aspectos no contemplados todavía, y que son objeto de estudio en este capítulo:

- El primero hace referencia a la relación existente entre las soluciones de los problemas restringidos mediana-varianza. Si para cada problema restringido mediana-varianza se formula su correspondiente problema simétrico asociado (o problema dual), cabe indagar como se traslada esta relación entre los problemas a las correspondientes soluciones, y caracterizar las condiciones bajo las cuales estas últimas coinciden.

En el caso de los problemas restringidos centro-mediana la relación entre las soluciones de estos problemas, denominada “de dualidad”, fue estudiada por Halpern [20], que estableció las condiciones bajo las cuales problemas duales tienen las mismas soluciones. La siguiente cuestión planteada es si dichas condiciones siguen siendo válidas para los problemas restringidos mediana-varianza, y más concretamente, qué modificaciones introduce en la relación de dualidad la sustitución de la función centro por la función varianza.

- El segundo aspecto es estudiar si existe alguna relación entre los problemas restringidos mediana-varianza y el problema no restringido $P(\mu)$. En un estudio análogo efectuado sobre los problemas centro-mediana, Halpern [20] estableció que el planteamiento no restringido dado por la combinación convexa de las funciones centro y mediana (problema cent-dian: $\min_{\alpha \in N} f(\alpha), \alpha \in [0, 1]$), es un caso especial de los problemas restringidos centro-mediana, ya que las curvas cent-dian, (curvas correspondientes a los conjuntos solución de dichos problemas), coinciden sobre una red árbol.

Un procedimiento similar se aplicará a los problemas mediana-varianza: en primer lugar se caracterizarán, formal y gráficamente, las curvas mediana-varianza representativas de cada uno de los problemas, para posteriormente analizar la relación entre dichos problemas a partir del comportamiento de sus respectivas curvas.

2.1 Problemas Mediana-Varianza

Sea $N(V, E)$ red conexa no dirigida de sistema de pesos normalizado, con $|V| = n$, y $|E| = m$. Se denominan problemas mediana-varianza restringidos a los

problemas $P(\alpha)$, $P(\beta)$, dados por

$$P(\alpha) \equiv \begin{cases} \min_{x \in N} z_m(x) \\ \text{s. a } z_s(x) \leq \alpha \end{cases} \quad P(\beta) \equiv \begin{cases} \min_{x \in N} z_s(x) \\ \text{s. a } z_m(x) \leq \beta \end{cases}$$

Sea F_α el conjunto de puntos de la red factibles para el problema $P(\alpha)$, (F_β para $P(\beta)$). El objetivo en cada uno de los problemas restringidos es minimizar una única función sobre el correspondiente conjunto factible, y en este sentido se define el conjunto $\text{Op}(\alpha)$ de soluciones (localizaciones óptimas) para $P(\alpha)$:

$$\text{Op}(\alpha) = \{x^* \in F_\alpha : z_m(x^*) \leq z_m(x), \forall x \in F_\alpha\}$$

(análogamente se define $\text{Op}(\beta)$). En el caso de que el óptimo no sea único, el concepto de solución eficiente (Pareto-óptima, no dominada o admisible) establece una relación natural de preferencia entre las soluciones.

Definición 2.1.1 Sea el problema de optimización $\min_{x \in X} (f_1(x), \dots, f_t(x))$, donde $\{f_1, \dots, f_t\}$ es una familia de funciones definidas sobre un conjunto X . Una localización factible x^* del problema se denomina solución eficiente si y sólo si no existe $y \in X$ tal que $f_i(y) \leq f_i(x^*)$, $\forall i = 1, \dots, t$, y $f_k(y) < f_k(x^*)$, para algún k .

La relación de preferencia establecida por esta definición es un orden parcial en el conjunto de localizaciones factibles del problema: dos localizaciones pueden no ser comparables al no estar ninguna de ellas dominada por la otra. Sea X_{ef} el conjunto de soluciones eficientes del problema $\min_{x \in N} (z_m(x), z_s(x))$. Según la definición, $x^* \in X_{ef}$ si y sólo si x^* es factible y no existe $y \in N$ tal que o bien $z_m(y) \leq z_m(x^*)$ y $z_s(y) < z_s(x^*)$, o bien $z_m(y) < z_m(x^*)$ y $z_s(y) \leq z_s(x^*)$

Sea $\bigcup_{\alpha} \text{Op}(\alpha)$ el conjunto de todas las localizaciones óptimas obtenidas al variar α (respectivamente, $\bigcup_{\beta} \text{Op}(\beta)$ al variar β).

Proposición 2.1.2 Se verifica que $X_{ef} \subseteq \bigcup_{\alpha} \text{Op}(\alpha)$ (respectivamente, $X_{ef} \subseteq \bigcup_{\beta} \text{Op}(\beta)$).

Demostración: Sea $x \in X_{ef}$, tal que $z_s(x) = \alpha$. El enunciado se probará demostrando que $x \in \text{Op}(\alpha)$.

Claramente, $x \in F_\alpha$. La suposición $x \notin \text{Op}(\alpha)$ implicaría que $\forall x^* \in \text{Op}(\alpha)$, es $z_m(x^*) < z_m(x)$, y $z_s(x^*) \leq \alpha = z_s(x)$ lo que contradice que $x \in X_{ef}$. Por tanto se concluye que $x \in \text{Op}(\alpha)$ (la demostración para β es totalmente análoga). \square

Definición 2.1.3 Un punto $x^*(\alpha) \in N$ es una solución óptima eficiente del problema $P(\alpha)$ si y sólo si

$$x^*(\alpha) \in \text{Op}(\alpha) \cap X_{ef}$$

(Igualmente se define $x^*(\beta)$ como solución óptima eficiente de $P(\beta)$). Claramente $x^*(\alpha)$ es una localización óptima para el problema, no dominada por ninguna otra, por tanto, $\forall x \in F_\alpha$, o bien $z_m(x) > z_m(x^*(\alpha))$, o bien si existe $x \in F_\alpha$ tal que $z_m(x) = z_m(x^*(\alpha))$ entonces $z_s(x) \geq z_s(x^*(\alpha))$. Asimismo, si $x_1^*(\alpha)$ es otra solución óptima eficiente se verifica $z_m(x^*(\alpha)) = z_m(x_1^*(\alpha))$, y $z_s(x^*(\alpha)) = z_s(x_1^*(\alpha))$. Por esta razón y mientras no haya confusión, la notación $x^*(\alpha)$, $x^*(\beta)$ indicará tanto a una solución óptima eficiente como al conjunto de dichas soluciones, y se denominarán abreviadamente solución o conjunto solución del problema.

La formulación del problema mediana-varianza no restringido es

$$P(\mu) \equiv \min_{x \in N} z_\mu(x) = z_m(x) + \mu z_s(x)$$

y está basada en ciertos modelos media-varianza utilizados en inversiones financieras, en donde el signo del parámetro μ revela la actitud del inversor hacia el riesgo, según que manifieste aversión (positivo), indiferencia (cero) o atracción al riesgo (negativo).

Una formulación equivalente del problema $P(\mu)$ es

$$\max_{x \in N} \{-z_m(x) - \mu z_s(x)\}$$

observándose que para valores de $\mu < 0$ este problema se optimiza aumentando la varianza:

Teorema 2.1.4 (Berman [2]) *Cuando $\mu \rightarrow -\infty$, la solución del problema $\min \{z_\mu(x) : x \in N\}$ tiende al punto que maximiza la varianza sobre la red.*

Por tanto, para valores negativos de μ el problema de localización $P(\mu)$ responde a un modelo de desequilibrio o desigualdad: la localización óptima maximizará la

varianza de la distribución de las distancias respecto del servicio, lo que supone minimizar la igualdad de los usuarios respecto de su localización.

En consecuencia, para el objetivo de equidad en localización se considerará el problema mediana-varianza no restringido

$$P(\mu) \equiv \min_{x \in N} z_\mu(x) = z_m(x) + \mu z_s(x), \quad \mu \geq 0$$

Para $\mu = 0$ se obtiene el problema 1-mediana, y para valores suficientemente grandes de μ se obtiene un problema 1-varianza:

Proposición 2.1.5 (Berman [2]) *Cuando $\mu \rightarrow \infty$, la solución del problema $P(\mu)$ tiende al punto que minimiza la varianza sobre la red.*

Para cada $\mu > 0$, sea $\text{Op}(\mu) = \{x^* \in N : z_\mu(x^*) \leq z_\mu(x), \forall x \in N\}$ el conjunto de soluciones óptimas del problema $P(\mu)$, y para $\mu = 0$ considérese el conjunto $\text{Op}(\mu = 0) = \{x^* \in N : z_m(x^*) \leq z_m(x), \forall x \in N\} \cap X_{ef}$. La siguiente proposición establece la relación entre el conjunto $\bigcup_{\mu \geq 0} \text{Op}(\mu)$ y el de localizaciones eficientes X_{ef} , y rectifica un resultado erróneo obtenido por Berman [2], que estableció la igualdad de ambos.

Proposición 2.1.6

$$\bigcup_{\mu \geq 0} \text{Op}(\mu) \subseteq X_{ef}$$

Demostración: Obviamente, $\text{Op}(\mu = 0) \subseteq X_{ef}$. Sea $x^* \in \bigcup_{\mu > 0} \text{Op}(\mu)$, entonces $x^* \in \text{Op}(\mu)$, para algún $\mu > 0$, por tanto, $z_\mu(x^*) \leq z_\mu(x), \forall x \in N$. Si fuera $x^* \notin X_{ef}$, entonces $\exists y \in N$ tal que o bien $z_m(y) \leq z_m(x^*)$ y $z_s(y) < z_s(x^*)$, o bien $z_m(y) < z_m(x^*)$ y $z_s(y) \leq z_s(x^*)$. En ambos casos se tiene $z_\mu(y) < z_\mu(x^*)$, que contradice $x^* \in \text{Op}(\mu)$. Por tanto, $x^* \in X_{ef}$, lo que concluye la demostración. \square

Esta relación de inclusión puede ser estricta, incluso sobre redes árbol. En efecto, según el corolario 2.4.5, la curva \mathcal{H} correspondiente al problema no restringido es la envoltura convexa del conjunto de puntos $\{(z_m(x^*), z_s(x^*)) : x^* \in \bigcup_{\mu \geq 0} \text{Op}(\mu)\}$, pudiendo existir localizaciones eficientes que no pertenezcan a dicha envoltura, (véase la página 57), tanto en una red cíclica como en una red árbol.

Por tanto, para cada $\mu \geq 0$ el conjunto $\text{Op}(\mu)$ se denominará “solución” de $P(\mu)$, y contiene a todas las soluciones óptimas eficientes del problema. La notación $x^*(\mu)$ indicará una de tales soluciones, o, si no hay confusión, a la “solución” del problema.

Berman [2] propone sendos algoritmos para resolver los tres problemas en una red general. Dichos algoritmos trabajan resolviendo cada uno de los subproblemas obtenidos sobre cada región primaria y, caso de resultar mejor solución que la ocupante, ésta se actualiza. Cada subproblema se resuelve en tiempo $O(n)$, ya que la obtención de las funciones mediana y varianza sobre cada región primaria requiere una pasada sobre todos los vértices de N . Puesto que en el peor de los casos se resuelven $O(mn)$ subproblemas, la complejidad de dichos algoritmos es $O(mn^2)$, ($O(n^3)$ si la red es planar, o bien $m \in O(n)$).

En este último caso la complejidad de los algoritmos puede reducirse a $O(mn \log n)$ aplicando el procedimiento recursivo del algoritmo 1/VAR/N sobre cada arista de la red, de forma que la resolución de todos los subproblemas sobre dicha arista se pueda obtener en tiempo $O(n)$. La complejidad resultante es por tanto la misma que la de 1/VAR/N.

2.2 Dualidad en los problemas restringidos

Sean $x^*(\alpha)$, $x^*(\beta)$ las respectivas soluciones de los problemas $P(\alpha)$, $P(\beta)$ sobre una red $N(V, E)$, y $z_m(x^*(\alpha))$ ($z_s(x^*(\beta))$) los correspondientes valores de la función objetivo. El problema $P(z_m(x^*(\alpha))) \equiv \begin{cases} \min_{x \in N} z_s(x) \\ \text{s.a. } z_m(x) \leq z_m(x^*(\alpha)) \end{cases}$ se denominará dual de $P(\alpha)$, y el problema $P(z_s(x^*(\beta))) \equiv \begin{cases} \min_{x \in N} z_m(x) \\ \text{s.a. } z_s(x) \leq z_s(x^*(\beta)) \end{cases}$ dual de $P(\beta)$.

A continuación se estudian los conjuntos de valores de α y β en los que se producen todas las soluciones, y se caracterizan las condiciones bajo las cuales un problema y su dual tienen las mismas soluciones, tanto sobre una red cíclica como en el caso especial de una red árbol.

Para $\alpha \rightarrow \infty$, (o $\beta \rightarrow \infty$), se obtienen los problemas 1-mediana:

$\min\{z_m(x), x \in N\}$, (o 1-varianza: $\min\{z_s(x), x \in N\}$), cuyos respectivos conjuntos solución se denotarán por X_m^* para el problema 1-mediana, (X_s^* para el problema 1-varianza). En cada uno de tales conjuntos se seleccionan los puntos $x_m^* \in X_m^*$ y $x_s^* \in X_s^*$, tales que $z_s(x_m^*) \leq z_s(x), \forall x \in X_m^*$, y $z_m(x_s^*) \leq z_m(x), \forall x \in X_s^*$.

Sean los siguientes intervalos de \mathbb{R} :

$$J_m = [z_m(x_m^*), z_m(x_s^*)], \quad \text{y} \quad J_s = [z_s(x_s^*), z_s(x_m^*)]$$

Lema 2.2.1 *El conjunto de puntos solución del problema $P(\alpha)$, ($P(\beta)$), se obtiene respectivamente para $\alpha \in J_s$, ($\beta \in J_m$).*

Demostración:

$$\text{Sea el problema} \quad P(\alpha) \equiv \begin{cases} \min_{x \in N} z_m(x) \\ \text{s. a } z_s(x) \leq \alpha \end{cases}$$

Si $\alpha < z_s(x_s^*)$, no existe solución factible de $P(\alpha)$. Por otra parte, si $\alpha > z_s(x_m^*)$, la solución de $P(\alpha)$ será x_m^* . Por tanto las soluciones de $P(\alpha)$ se obtendrán en $\alpha \in J_s = [z_s(x_s^*), z_s(x_m^*)]$.

Análogamente, para el problema $P(\beta) \equiv \begin{cases} \min_{x \in N} z_s(x) \\ \text{s. a } z_m(x) \leq \beta \end{cases}$ las soluciones se obtendrán en $\beta \in J_m = [z_m(x_m^*), z_m(x_s^*)]$, pues si $\beta < z_m(x_m^*)$, no existen soluciones factibles; y si $\beta > z_m(x_s^*)$ se obtiene x_s^* como solución. \square

Por otra parte, los conjuntos J_m, J_s , actúan respectivamente como dominio y rango (intercambiando los papeles), para las funciones: $z_m(x^*(\cdot)) : J_s \rightarrow J_m$ y $z_s(x^*(\cdot)) : J_m \rightarrow J_s$, según se enuncia a continuación.

Lema 2.2.2 *Para cada $\alpha \in J_s$, ($\beta \in J_m$), se verifica $z_m(x^*(\alpha)) \in J_m$, ($z_s(x^*(\beta)) \in J_s$).*

Demostración: Sea $\alpha \in J_s$, y $x^*(\alpha)$ la solución del correspondiente problema $P(\alpha)$. Para x_m^* se verifica: $z_m(x_m^*) \leq z_m(x^*(\alpha))$. Además, por ser $x^*(\alpha)$ solución de $P(\alpha)$, es $z_s(x^*(\alpha)) \leq \alpha$, de donde se sigue que $z_m(x^*(\alpha)) \leq z_m(x_s^*)$, pues si

fuese $z_m(x^*(\alpha)) > z_m(x_s^*)$, como además $z_s(x_s^*) \leq z_s(x^*(\alpha))$, resultaría $x^*(\alpha) \notin X_{ef}$, lo que es contradicción. Queda demostrado entonces que $z_m(x^*(\alpha)) \in J_m$.

Análogamente, dado $\beta \in J_m$, es $z_s(x_s^*) \leq z_s(x^*(\beta))$. Y también $z_s(x^*(\beta)) \leq z_s(x_m^*)$, ya que lo contrario supondría, $x^*(\beta) \notin X_{ef}$ llegándose a contradicción. De todo lo anterior, se concluye $z_s(x^*(\beta)) \in J_s$. \square

Las funciones $z_s(x^*(\cdot)) : J_m \rightarrow J_s$ y $z_m(x^*(\cdot)) : J_s \rightarrow J_m$ no son en general sobreyectivas sobre una red, (la última ni siquiera en el caso de una red árbol, a diferencia de lo que sucede en los problemas restringidos centro-mediana), como se observará en la siguiente sección. Sean

$$\text{Im}(z_m(x^*(J_s))) \subseteq J_m \quad \text{y} \quad \text{Im}(z_s(x^*(J_m))) \subseteq J_s$$

los rangos de las respectivas funciones sobre sus conjuntos imagen.

Teorema 2.2.3 *Se verifica:*

- (i) *Para cada $\beta \in \text{Im}(z_m(x^*(J_s)))$, el problema bidual de $P(\beta)$ es $P(\beta)$.*
- (ii) *Para cada $\alpha \in \text{Im}(z_s(x^*(J_m)))$, el problema bidual de $P(\alpha)$ es $P(\alpha)$.*

Demostración: Sea $\beta \in \text{Im}(z_m(x^*(J_s)))$, entonces $\beta = z_m(x^*(\alpha))$, para algún $\alpha \in J_s$. El problema dual de $P(\beta)$ es $P(z_s(x^*(\beta)))$, y el dual de éste último, y por tanto bidual de $P(\beta)$ es $P(z_m(x^*(z_s(x^*(\beta)))))$. Por tanto probar el apartado (i) equivale a demostrar que

$$z_m(x^*(z_s(x^*(\beta)))) = \beta$$

Asimismo demostrar el apartado (ii) equivale a probar que si $\alpha \in \text{Im}(z_s(x^*(J_m)))$, entonces $z_s(x^*(z_m(x^*(\alpha)))) = \alpha$. Dado que la demostración de ambos apartados es análoga, sólo se demostrará el primero.

Sea $\beta = z_m(x^*(\alpha))$, para algún $\alpha \in J_s$. Entonces, $x^*(\alpha)$ es solución factible de $P(\beta)$, cuya solución es $x^*(\beta)$, verificándose:

$$z_s(x^*(\beta)) \leq z_s(x^*(\alpha)) \leq \alpha \tag{2.1}$$

resultando la última desigualdad de ser $x^*(\alpha)$ solución de $P(\alpha)$. Además

$$z_m(x^*(\beta)) \leq \beta = z_m(x^*(\alpha))$$

De (2.1), $x^*(\beta)$ es factible para $P(\alpha)$, obteniéndose:

$$z_m(x^*(\alpha)) \leq z_m(x^*(\beta))$$

De estas dos últimas desigualdades se sigue que

$$z_m(x^*(\alpha)) = \beta = z_m(x^*(\beta)) \quad (2.2)$$

Sea $\alpha' = z_s(x^*(\beta)) \leq \alpha$, (por (2.1)); y $x^*(\alpha')$ solución de $P(\alpha')$. Entonces, $x^*(\beta)$ es factible para $P(\alpha')$, resultando: $z_m(x^*(\alpha')) \leq z_m(x^*(\beta)) = \beta$. Sustituyendo aquí α' por $z_s(x^*(\beta))$ se tiene:

$$z_m(x^*(z_s(x^*(\beta)))) \leq \beta$$

La desigualdad contraria resulta de ser $x^*(\alpha')$ solución factible de $P(\alpha)$, ya que $z_s(x^*(\alpha')) \leq \alpha' \leq \alpha$. Entonces

$$\beta = z_m(x^*(\alpha)) \leq z_m(x^*(\alpha'))$$

y nuevamente, sustituyendo α' se obtiene:

$$\beta \leq z_m(x^*(z_s(x^*(\beta))))$$

que con la desigualdad anterior implica $\beta = z_m(x^*(z_s(x^*(\beta))))$, lo que completa la demostración del primer apartado. \square

El siguiente corolario caracteriza las condiciones bajo las cuales un problema y su dual tienen las mismas soluciones.

Corolario 2.2.4 *Se verifica*

- (i) *Si $\beta \in \text{Im}(z_m(x^*(J_s)))$, entonces los problemas $P(\beta)$ y $P(z_s(x^*(\beta)))$ tienen las mismas soluciones.*
- (ii) *Si $\alpha \in \text{Im}(z_s(x^*(J_m)))$, entonces los problemas $P(\alpha)$ y $P(z_m(x^*(\alpha)))$ tienen las mismas soluciones.*

Demostración: Se demostrará sólo el primer apartado, ya que el razonamiento en ambos es análogo.

Si $\beta \in \text{Im}(z_m(x^*(J_s)))$, y para la solución $x^*(\beta)$ de $P(\beta)$ es $z_s(x^*(\beta)) = \alpha$, entonces la solución $x^*(\alpha)$ de $P(\alpha)$ verifica $z_m(x^*(\alpha)) = \beta$, ya que $P(\alpha)$ es dual de $P(\beta)$, y $P(z_m(x^*(\alpha)))$ es dual de $P(\alpha)$ y por tanto bidual de $P(\beta)$. De aquí se deduce que $z_m(x^*(\beta)) = \beta = z_m(x^*(\alpha))$ (ya que la hipótesis $z_m(x^*(\beta)) < \beta$ contradice que $x^*(\alpha)$ sea solución de $P(\alpha)$), y análogamente $z_s(x^*(\alpha)) = \alpha = z_s(x^*(\beta))$, lo que implica que las soluciones (conjuntos solución) de ambos problemas verifican $x^*(\alpha) = x^*(\beta)$, q.e.d. \square

Este corolario se puede interpretar gráficamente mediante las curvas mediana-varianza \mathcal{L} representativas de los problemas mediana-varianza restringidos (estudiadas en la siguiente sección). Los valores β, α para los que se verifica el corolario corresponden a puntos (β, α) situados sobre arcos convexos de \mathcal{L} . Los problemas correspondientes a dichos puntos son duales entre sí, pudiéndose obtener la solución resolviendo uno de los problemas: $P(\beta)$ o $P(\alpha)$.

Este resultado es análogo al que se produce en los problemas restringidos centro-mediana, sin embargo difiere sobre redes árbol. En el caso especial de una red árbol, las condiciones del anterior corolario se pueden extender a todos los pares de valores de los parámetros en los problemas centro-mediana, al ser las funciones centro y mediana sobreyectivas sobre sus respectivos conjuntos imagen. Sin embargo no se puede hacer una extensión similar en los problemas mediana-varianza, ya que la función mediana no es sobreyectiva en este caso. Este aspecto se estudia a continuación.

Proposición 2.2.5 *Dado un árbol $T(V, E)$, sea $P(m^*, y)$ el camino enlazando un punto $y \notin X_m^*$, con $m^* \in X_m^*$, tal que m^* sea la mediana más próxima a y . Entonces la aplicación: $z_m(\cdot) : P(m^*, y) \rightarrow [z_m(m^*), z_m(y)]$, es biyectiva.*

Demostración: Como $z_m(\cdot)$ es continua y lineal a trozos a lo largo de cualquier camino de T , bastará ver que $z_m(\cdot) : [0, d(m^*, y)] \rightarrow \mathbb{R}$, donde por simplicidad la notación $x \in [0, d(m^*, y)]$ representará al punto de $P(m^*, y)$ tal que su distancia a m^* es x , es estrictamente creciente respecto de las distancias de los puntos del camino $P(m^*, y)$ a m^* .

Dados $x_1, x_2 \in [0, d(m^*, y)]$, tal que $x_1 < x_2$ se probará que $z_m(x_1) < z_m(x_2)$. Sea v_r cualquier vértice de T tal que

$$d(v_r, P(m^*, y)) = d(v_r, y)$$

(pudiendo suceder $v_r = y$, caso de que y fuera un vértice), y considérese el postorden trasversal obtenido al enraizar el árbol en v_r . Sin pérdida de generalidad se supondrá que x_1, x_2 están en una misma arista $[u, v]$ de E , (ya que caso de pertenecer a aristas distintas bastará aplicar recurrentemente la argumentación). Entonces, $z_m(x_i) = z_m(u) + d(u, x_i)g_u$, $i = 1, 2$. Puesto que $d(u, x_1) < d(u, x_2)$, bastará comprobar que $g_u > 0$.

Por hipótesis, m^* debe ser un vértice mediana, y es el punto del camino $P(m^*, y)$ más distante de la raíz v_r . Puesto que $[u, v]$ es una arista del camino, se sigue que $V_{m^*} \subseteq V_u$, (la igualdad se daría si $m^* = u$), y por tanto $\overline{V_{m^*}} \supseteq \overline{V_u}$. Por ser m^* vértice mediana, es centroide, y si $T_1, \dots, T_{gr(m^*)}$ son las componentes conexas obtenidas al eliminar m^* se T , se verifica que el peso de rama de m^* , denotado por $bw(m^*)$, cumple

$$bw(m^*) = \max \{w(T_i), i = 1, \dots, gr(m^*)\} \leq 1/2$$

(la igualdad ocurre si existen dos vértices mediana m_1^*, m_2^* , y por tanto una arista de medianas absolutas). Puesto que en $\overline{V_{m^*}}$ no existe otro vértice mediana, y $\overline{V_{m^*}} \subseteq V(T_j)$, para algún $j = 1, \dots, gr(m^*)$ se verifica $w(\overline{V_{m^*}}) < 1/2$. Entonces $w(\overline{V_u}) \leq w(\overline{V_{m^*}}) < 1/2 < w(V_{m^*}) \leq w(V_u)$, y por tanto $g_u = w(V_u) - w(\overline{V_u}) \geq w(V_{m^*}) - w(\overline{V_{m^*}}) > 0$ lo que finaliza la demostración. \square

En el caso particular de tomar $y = x_s^*$ resulta

Corolario 2.2.6 Si $x_s^* \notin X_m^*$, la aplicación $z_m(\cdot) : P(m^*, x_s^*) \rightarrow [z_m(m^*), z_m(x_s^*)]$, es monótona estrictamente creciente.

Teorema 2.2.7 Sobre una red árbol $T(V, E)$, la función $z_s(x^*(\cdot)) : J_m \rightarrow J_s$ es sobreyectiva.

Demostración: Se tratará de probar que para cada $\alpha \in J_s$, existe algún $\beta \in J_m$ tal que $z_s(x^*(\beta)) = \alpha$. Dado $\alpha \in J_s$ sea $x^*(\alpha)$ la solución óptima eficiente de

$P(\alpha) \equiv \begin{cases} \min_{x \in T} z_m(x) \\ \text{s.a. } z_s(x) \leq \alpha \end{cases}$ tal que el valor óptimo de z_m se denota por β , por tanto $z_m(x^*(\alpha)) = \beta \in J_m$.

- Si $\beta = z_m(x_m^*)$ entonces $x^*(\alpha) \in X_m^*$, y por ser solución óptima eficiente, $z_s(x^*(\alpha)) = z_s(x_m^*) \leq z_s(x)$, $\forall x \in X_m^*$. Por otra parte, el conjunto 1-mediana X_m^* es el conjunto factible para $P(\beta) \equiv \begin{cases} \min_{x \in T} z_s(x) \\ \text{s.a. } z_m(x) \leq \beta \end{cases}$ cuya solución óptima eficiente $x^*(\beta) \in X_m^*$ verificará: $z_s(x^*(\beta)) = z_s(x_m^*) \leq z_s(x)$, $\forall x \in X_m^*$. Entonces

$$z_s(x^*(\beta)) = z_s(x_m^*) = z_s(x^*(\alpha)) \leq \alpha$$

y puesto que $z_s(x_m^*) < \alpha$ contradice que $\alpha \in J_s = [z_s(x_s^*), z_s(x_m^*)]$, se concluye $z_s(x^*(\beta)) = z_s(x_m^*) = \alpha$.

- Si $\beta > z_m(x_m^*)$, entonces $x^*(\alpha) \notin X_m^*$. Sean $P(x_m^*, v_i)$, $i = 1, \dots, s$ los caminos que enlazan x_m^* con algún vértice punta de T . Por la proposición anterior, la función $z_m(\cdot)$ es monótona estrictamente creciente sobre estos caminos si x_m^* es el único vértice mediana de T , (no decreciente si existen dos vértices mediana m_1, m_2 y x_m^* es interior a la arista $[m_1, m_2] = X_m^*$) lo que implica que en cada uno de tales caminos existe a lo más un punto x_β^i tal que $z_m(x_\beta^i) = \beta$. Sea $\{x_\beta^1, \dots, x_\beta^t\}$ (con $t \leq s$) el conjunto de tales puntos, entonces un subconjunto no vacío del mismo serán la solución $x^*(\alpha)$ de $P(\alpha)$.

Sea $I \subseteq \{1, \dots, t\}$ tal que $x^*(\alpha) = x_\beta^j$, $j \in I$. Entonces, $\forall j \in I$, es $z_s(x^*(\alpha)) = z_s(x_\beta^j) \leq \alpha$. Sobre el conjunto de caminos $\{P(x_m^*, x_\beta^j), j \in I\}$ se verifica, por la monotonía de z_m :

$$\forall x \in P(x_m^*, x_\beta^j), x \neq x_\beta^j, z_m(x) < z_m(x_\beta^j), \text{ y } z_s(x_\beta^j) \leq \alpha < z_s(x)$$

en efecto, ya que la igualdad $z_m(x) = \beta$ implica $x_\beta^j \in X_m^*$, que es el caso anterior. Por otra parte si fuera $z_s(x) \leq \alpha$, como $z_m(x) < z_m(x_\beta^j)$, el punto x_β^j no sería solución de $P(\alpha)$, en contra de lo supuesto.

Pero $z_s(\cdot)$ es continua sobre cualquier camino de T , y en particular sobre los caminos $P(x_m^*, x_\beta^j)$, $j \in I$, lo que, junto con la anterior desigualdad, implica que $z_s(x_\beta^j) = \alpha$, $\forall j \in I$. Como los puntos x_β^j , $j \in I$ constituyen la solución $x^*(\alpha)$ de $P(\alpha)$ resulta $z_s(x^*(\alpha)) = \alpha$.

Sea $x^*(\beta)$ solución eficiente del problema dual $P(\beta)$. Por la relación (2.2) obtenida en la demostración del teorema 2.2.3 se tiene que $z_m(x^*(\beta)) = z_m(x^*(\alpha)) = \beta$. Por el razonamiento anterior, $x^*(\beta) \subseteq \{x_\beta^1, \dots, x_\beta^t\}$, siendo solución de $P(\beta)$ los puntos de este conjunto que presenten menor valor de la varianza, lo que como se ha visto sucede en el conjunto $\{x_\beta^j, j \in I\}$, por tanto $x^*(\beta) = x_\beta^j, j \in I$, concluyéndose finalmente

$$z_s(x^*(\beta)) = z_s(x_\beta^j) = \alpha$$

□

Sin embargo, incluso en una red árbol, la aplicación $z_m(x^*(\cdot)) : J_s \rightarrow J_m$ no es en general sobre, pudiendo suceder que $\text{Im}(z_m(x^*(J_s))) \subset J_m$, tal que el rango de $z_m(x^*(\cdot))$ sea un subconjunto propio de J_m (véase la página 48).

Corolario 2.2.8 *En una red árbol $T(V, E)$, para cada $\alpha \in J_s$, los problemas $P(\alpha)$ y $P(z_m(x^*(\alpha)))$ tienen las mismas soluciones.*

Por tanto, sobre una red árbol, para todo par de valores $(\beta, \alpha) \in \text{Im}(z_m(x^*(J_s))) \times J_s$, los problemas $P(\beta)$, $P(\alpha)$ son duales entre sí, y tienen las mismas soluciones. Gráficamente esto se verifica para puntos situados sobre arcos convexos de \mathcal{L} . Si la curva \mathcal{L} de una red árbol es convexa (como sucede en la mayoría de los casos), este resultado se extiende a $J_m \times J_s$.

2.3 Curvas mediana-varianza en los problemas restringidos

A continuación se efectuará un análisis paramétrico del comportamiento de las soluciones en los problemas mediana-varianza mediante las curvas representativas de dichos problemas.

La caracterización de las curvas mediana-varianza permitirá, por un lado, interpretar gráficamente la relación de dualidad entre los problemas mediana-varianza restringidos. Sobre aquellas aristas de la curva en los que ésta sea con-

vexa se situarán los puntos correspondientes a las soluciones “mediana-varianza”, que corresponden a soluciones coincidentes de problemas duales entre sí.

Por otra parte la conexión entre los problemas mediana-varianza restringidos y no restringido se estudiará a partir del comportamiento de sus respectivas curvas. A diferencia de lo que sucede en los problemas centro-mediana, el problema mediana-varianza no restringido $P(\mu)$ no se podrá considerar como un caso especial de los anteriores (entendiéndose “caso especial” en el sentido de que sus respectivas curvas coincidan sobre un cierto tipo de redes, como son las redes árbol), ya que, incluso en estas redes, las correspondientes curvas mediana-varianza diferirán.

Definición 2.3.1 Dada una red $N(V, E)$ conexa, no dirigida de sistema normalizado de pesos, se define la aplicación $F_N : N \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\forall x \in N$, $F_N(x) = (z_m(x), z_s(x)) \in \mathbb{R}^2$.

El conjunto

$$F_N(N) = \{(z_m(x), z_s(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in N\}$$

es una curva en \mathbb{R}^2 y es la representación gráfica de la red bajo la aplicación F_N . Por tanto, dados $(\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^2$, $(\beta, \alpha) \in F_N(N)$ si y sólo si para algún punto $x \in N$, es $z_m(x) = \beta$, $z_s(x) = \alpha$.

Puesto que la red es conexa, y continuas las funciones $z_m(\cdot)$, $z_s(\cdot)$, siendo lineal la primera y convexa la segunda sobre las regiones primarias de la red, el conjunto $F_N(N)$ será un subconjunto conexo de \mathbb{R}^2 , y su curva representativa estará formada por arcos de parábola enlazados entre sí.

En las Figuras 2.2, 2.3, 2.4 y 2.5 se muestran las imágenes bajo la aplicación F_N de varias redes generadas aleatoriamente. Las tres primeras corresponden a redes cíclicas, y la figura 2.5 a una red árbol.

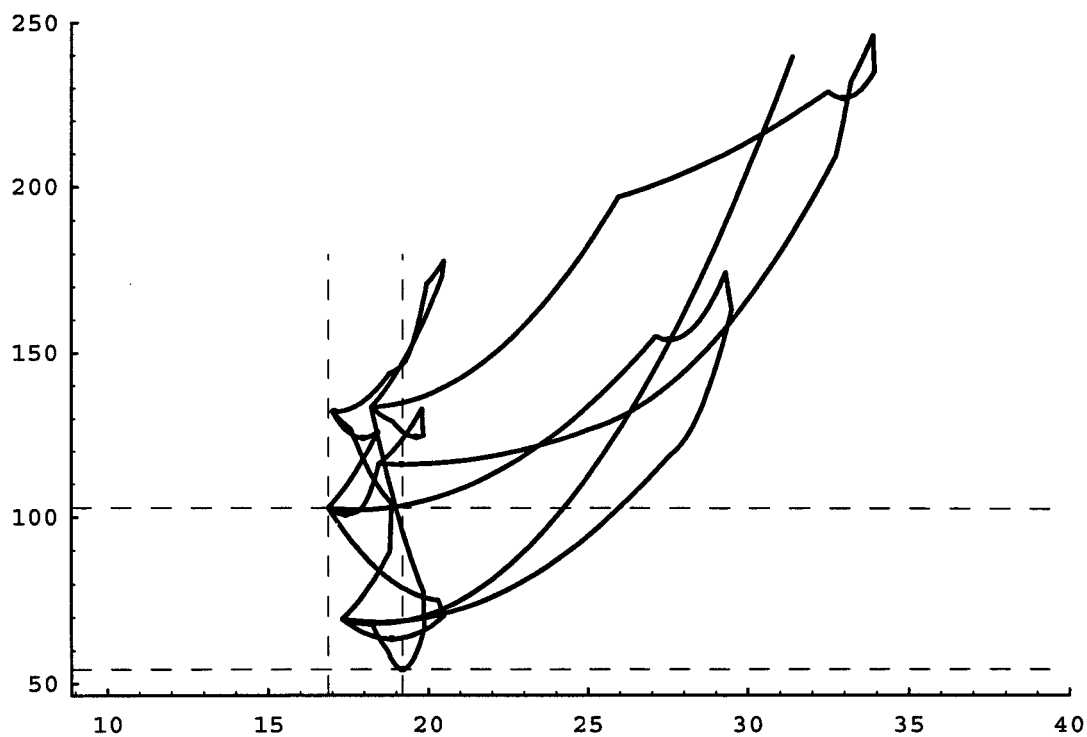


Figura 2.2: Red cíclica

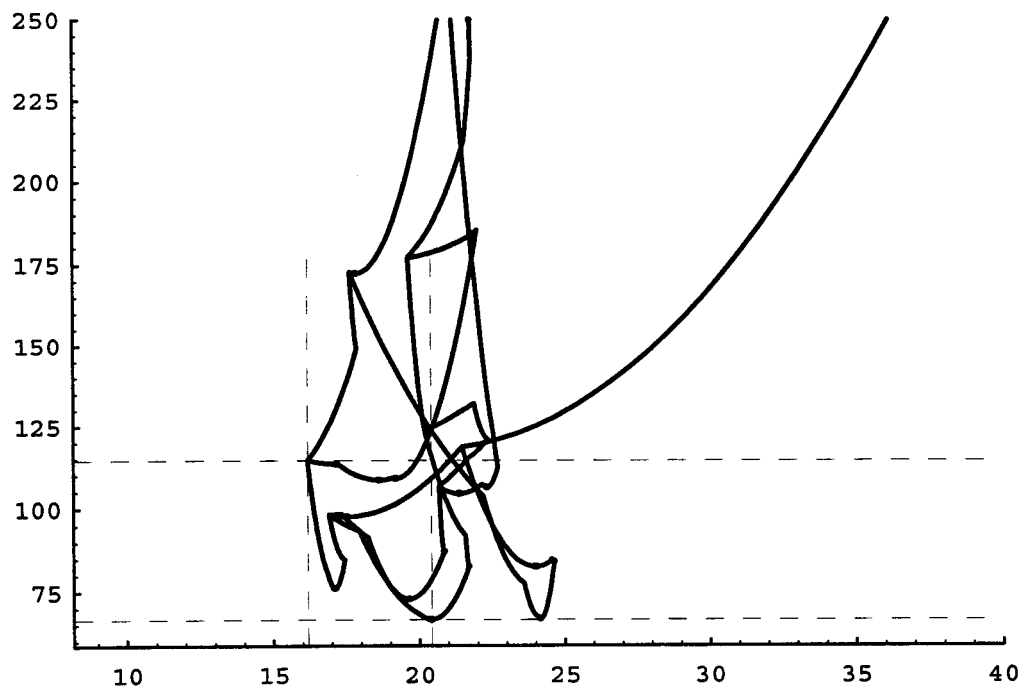


Figura 2.3: Red cíclica

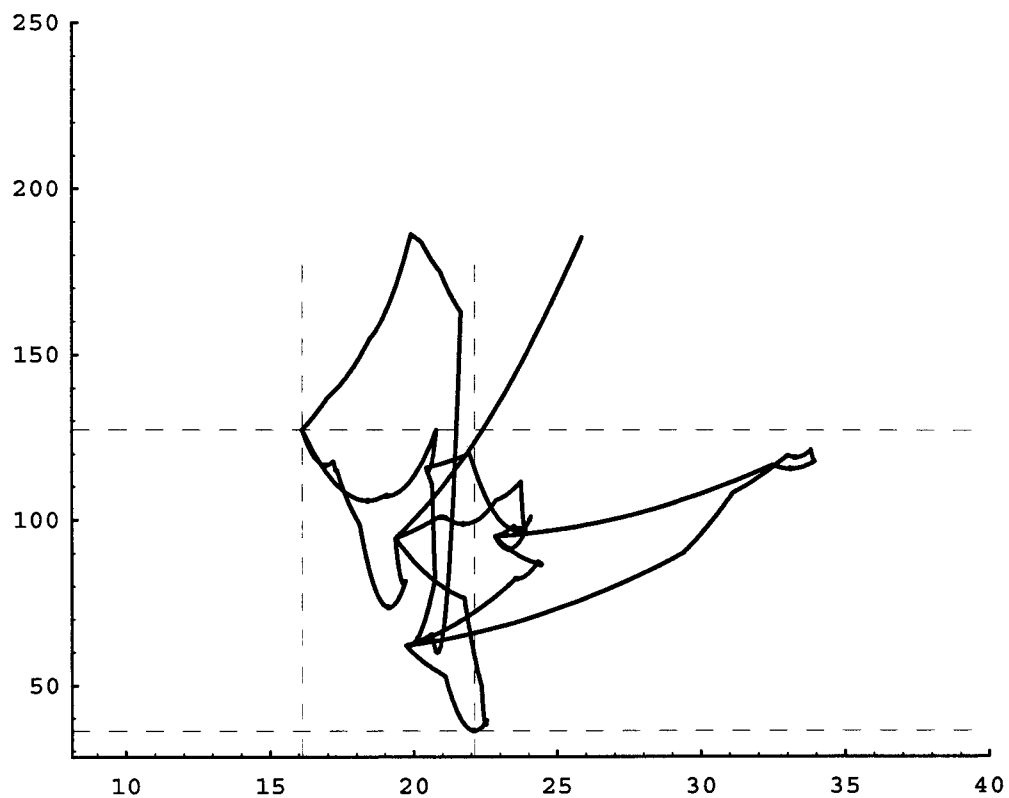


Figura 2.4: Red cíclica

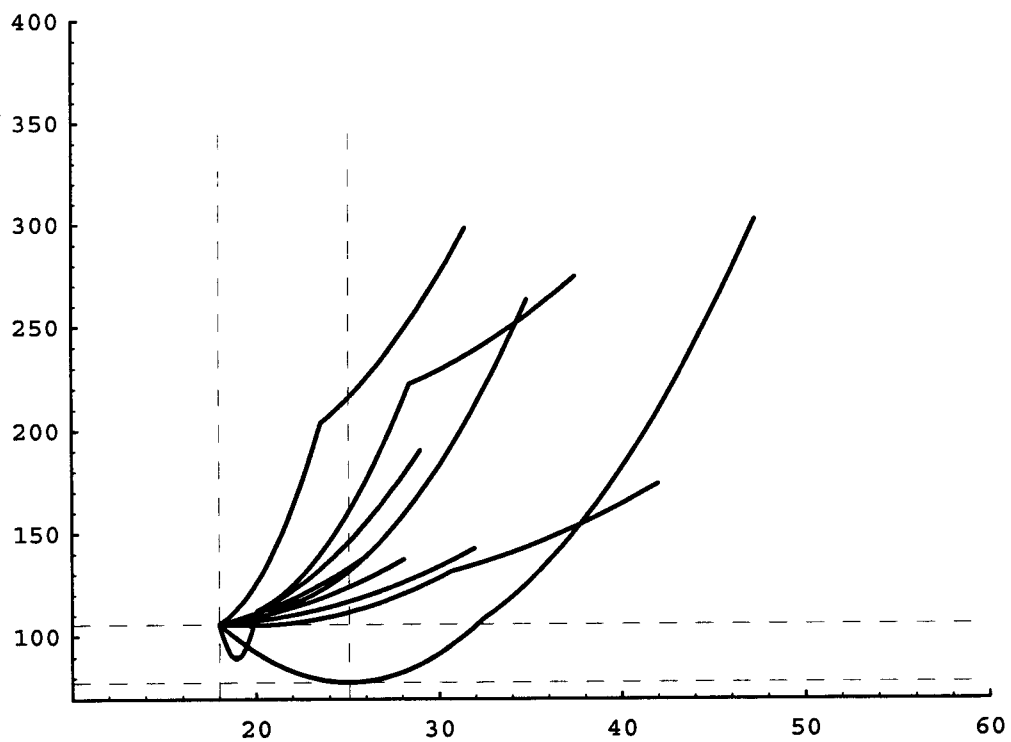


Figura 2.5: Red árbol

En todas las gráficas los valores de $z_m(x)$ se representan sobre el eje horizontal, y los de $z_s(x)$ sobre el eje vertical.

El rectángulo limitado por las líneas punteadas corresponde al producto

$$J_m \times J_s = [z_m(x_m^*), z_m(x_s^*)] \times [z_s(x_s^*), z_s(x_m^*)]$$

Según los resultados de la sección precedente, el estudio paramétrico de los problemas mediana-varianza (restringidos y no restringido) se realizará sobre dicho rectángulo. Por tanto se considerará solo el conjunto $F_N(N) \cap J_m \times J_s$.

2.3.1 Curvas eficientes

Los puntos q_i correspondientes a enlaces de regiones primarias adyacentes (o aristas adyacentes, caso de redes árbol) son puntos angulosos de la curva $F_N(N)$ en los cuales no es diferenciable (véase la Figura 2.6). Sea Q el conjunto de tales puntos contenidos en el rectángulo, esto es: $Q = \{q_1, \dots, q_k\} \subset F_N(N) \cap J_m \times J_s$. Considérense los puntos de $F_N(N) \cap J_m \times J_s$:

$$F_N(x_m^*) = (z_m(x_m^*), z_s(x_m^*)) = E_i, \quad y \quad F_N(x_s^*) = (z_m(x_s^*), z_s(x_s^*)) = E_d$$

que son los extremos superior izquierdo e inferior derecho de $J_m \times J_s$ (Figura 2.6).

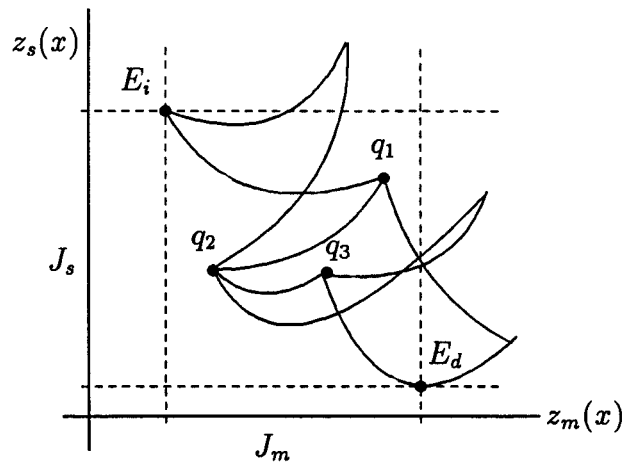


Figura 2.6

Dado $I = [\beta_1, \beta_2] \times [\alpha_1, \alpha_2] \subseteq J_m \times J_s$ sea un arco de curva $g_N(I) \subseteq F_N(N) \cap I$.

Definición 2.3.2 El arco de curva $g_N(I)$ de $F_N(N)$ se denominará eficiente en I si para cada $(\beta, \alpha) \in g_N(I)$, no existe $(\beta', \alpha') \in F_N(N) \cap I$ verificando alguna de las dos relaciones siguientes: o bien $\beta' \leq \beta$ y $\alpha' < \alpha$, o bien $\beta' < \beta$ y $\alpha' \leq \alpha$.

La Figura 2.7 muestra el rectángulo $I = [\beta_1, \beta_2] \times [\alpha_1, \alpha_2]$, y el subconjunto de $F_N(N)$ interceptado por I . Sea $g_N(I)$ el arco de curva enlazando los puntos q_t y A , con $q_t = (z_m(x_t), z_s(x_t)) \in Q$. Considérese el conjunto de puntos del plano:

$$S_{q_t} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq z_m(x_t), \text{ y } x_2 \geq z_s(x_t)\}$$

que corresponde al cuadrante superior derecho delimitado por dos semirrectas paralelas a los ejes con origen común en q_t trazadas en sentido creciente (Figura 2.7) denotadas por s_t^1, s_t^2 .

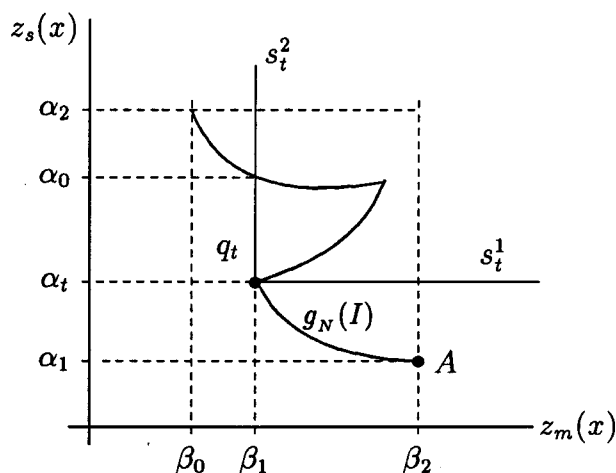


Figura 2.7

Para todo punto $(z_m(x), z_s(x)) = F_N(x) \in F_N(N) \cap S_{q_t}$, con $F_N(x) \neq q_t$, se verifica que $z_s(x) > z_s(x_t)$ y $z_m(x) \geq z_m(x_t)$, o bien $z_s(x) \geq z_s(x_t)$ y $z_m(x) > z_m(x_t)$, lo que implica $x \notin X_{ef}$, ya que x está dominado por x_t . De hecho, todos los puntos de la curva situados en dicho cuadrante están dominados por x_t , luego para cada $(\beta, \alpha) = F_N(x) \in F_N(N) \cap S_{q_t}$, x no puede ser solución de ninguno de los problemas $P(\beta), P(\alpha)$. Puesto que los puntos del arco de curva $g_N(I)$ corresponden a localizaciones eficientes, (esto es, elementos de X_{ef}), las soluciones óptimas eficientes $x^*(\beta), x^*(\alpha)$ de dichos problemas serán puntos cuyas imágenes por $F_N(\cdot)$ se sitúen en $g_N(I)$.

La existencia de arcos de curva eficientes para determinados rectángulos $I \subseteq J_m \times J_s$ implica que las funciones $z_s(x^*(\cdot)) : J_m \rightarrow J_s$ y $z_m(x^*(\cdot)) : J_s \rightarrow J_m$ no son sobreyectivas en una red general. En efecto, en el ejemplo de la Figura 2.7 por ser el arco de curva $g_N(I)$ eficiente para I se tiene que

$$\forall \beta \in [\beta_1, \beta_2], (z_m(x^*(\beta)), z_s(x^*(\beta))) \in g_N(I), \text{ por tanto } z_s(x^*(\beta)) \in [\alpha_1, \alpha_t]$$

e igualmente, $\forall \beta \in [\beta_0, \beta_1)$, es $z_s(x^*(\beta)) \in (\alpha_0, \alpha_2]$, (ya que $z_s(x^*(\beta_1)) = \alpha_t$), resultando

$$\text{Im}(z_s(x^*([\beta_0, \beta_2]))) = [\alpha_1, \alpha_t] \cup (\alpha_0, \alpha_2] \subset [\alpha_1, \alpha_2]$$

Un razonamiento análogo demuestra que $z_m(x^*(\cdot))$ no es sobreyectiva en una red árbol (en donde $z_s(x^*(\cdot))$ si lo es, como enuncia el teorema 2.2.7). Según la gráfica correspondiente a un árbol representada en la figura 2.5, el subconjunto $F_T(T) \cap J_m \times J_s$ adopta la forma básica de la Figura 2.8.

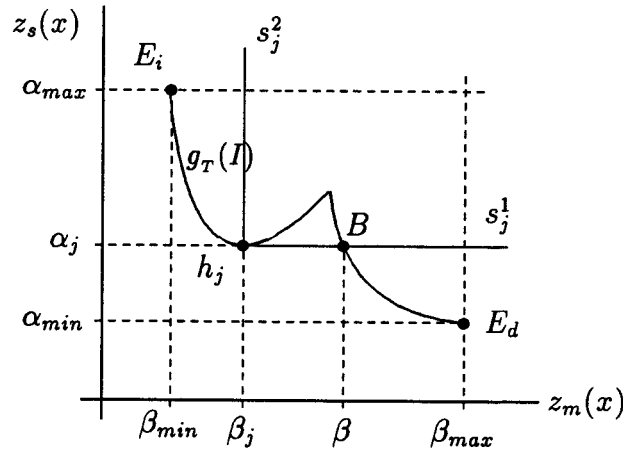


Figura 2.8

Sea $h_j = (z_m(x_j), z_s(x_j)) = (\beta_j, \alpha_j)$ mínimo local de $F_T(T)$ en $J_m \times J_s$. El arco de curva $g_T(I)$ enlazando los puntos E_i con h_j es eficiente para el rectángulo $I = [\beta_{min}, \beta] \times [\alpha_j, \alpha_{max}]$. Obviamente dicho arco de curva es eficiente en $[\beta_{min}, \beta_j] \times [\alpha_j, \alpha_{max}]$, y si

$$S_{h_j} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq z_m(x_j), x_2 \geq z_s(x_j)\}$$

es el cuadrante superior derecho delimitado por las dos semirrectas s_j^1, s_j^2 con origen común en h_j , entonces ningún punto $F_T(x) = (\beta, \alpha) \in S_{h_j} \cap I$ domina a

h_j , ya que o bien $\beta \leq \beta_j$ y $\alpha < \alpha_j$, o bien $\beta < \beta_j$ y $\alpha \leq \alpha_j$, (lo que implica $x \notin X_{ef}$, mientras que $x_j \in X_{ef}$). Por tanto el arco $g_T(I)$ es eficiente en I .

Entonces, $\forall \alpha \in [\alpha_j, \alpha_{max}]$, es $(z_m(x^*(\alpha)), z_s(x^*(\beta))) \in g_T(I)$, y como se puede observar, es $z_m(x^*(\alpha)) \in [\beta_{min}, \beta_j]$. Igualmente, $\forall \alpha \in [\alpha_{min}, \alpha_j]$, es $z_m(x^*(\alpha)) \in (\beta, \beta_{max}]$ (ya que $z_m(x^*(\alpha_j)) = \beta_j$). De ambos resultados se tiene

$$\text{Im}(z_m(x^*([\alpha_{min}, \alpha_{max}]))) = [\beta_{min}, \beta_j] \cup (\beta, \beta_{max}] \subset [\beta_{min}, \beta_{max}]$$

En la construcción de las curvas mediana-varianza intervienen arcos de curva cuasi-eficientes.

Definición 2.3.3 Sea \mathcal{C}_I un conjunto de curvas interceptadas en un rectángulo I de \mathbb{R}^2 . Un arco de curva $g_c(I) \subseteq \mathcal{C}_I$ se denominará cuasi-eficiente en I si para cada $(\beta, \alpha) \in g_c(I)$, no existe $(\beta', \alpha') \in \mathcal{C}_I$ tal que $\beta' < \beta$ y $\alpha' < \alpha$.

Es inmediato comprobar que si un arco de curva es eficiente en I , es cuasi-eficiente en I , no siendo cierta la implicación contraria. En el rectángulo $I = [\beta_{min}, \beta] \times [\alpha_j, \alpha_{max}]$ de la figura 2.8, sea \mathcal{C}_I el conjunto formado por las curvas de $F_N(N)$ junto con los segmentos de las semirrectas s_j^1, s_j^2 interceptados en I . El arco de curva de \mathcal{C}_I resultante de enlazar el arco $g_T(I)$ con el segmento horizontal de extremos h_j, B es cuasi-eficiente en todo el rectángulo I , pero no eficiente, ya que para todo punto (β, α) del segmento $\overline{h_j, B}$ se tiene $\beta_j < \beta$ y $\alpha_j = \alpha$.

2.3.2 Curva mediana-varianza

Definición 2.3.4 Sea $(\beta, \alpha) \in J_m \times J_s$. Si existe un punto $x_{(\beta, \alpha)}^* \in N$ solución de $P(\alpha)$ y $P(\beta)$ y tal que $z_s(x_{(\beta, \alpha)}^*) = \alpha$, $z_m(x_{(\beta, \alpha)}^*) = \beta$, dicho punto se denominará punto mediana-varianza de N para (β, α) .

Este punto corresponde a los problemas $P(\alpha)$, $P(\beta)$ duales entre sí, según el corolario 2.2.4. Puesto que en una red general las funciones $z_m(x^*(\cdot))$ y $z_s(x^*(\cdot))$ no son sobreyectivas, dichos puntos pueden no existir para determinados valores de (β, α) e igualmente sucede en un árbol. Caso de que dicho punto exista, bastará resolver sólo uno de los problemas para obtenerlo.

En una red general, para cada par $(\beta, \alpha) \in J_m \times J_s$, existirá alguna solución $x^*(\cdot)$ de alguno de los problemas restringidos tal que al menos verifica una de las dos condiciones: o bien $z_s(x^*(\beta)) = \alpha$, o bien $z_m(x^*(\alpha)) = \beta$, lo que supone una relajación de la condición anterior.

Definición 2.3.5 Se denominará curva mediana-varianza de una red N a la curva \mathcal{L} tal que

$$\mathcal{L} = \{(\beta, \alpha) \in J_m \times J_s : \text{o } z_s(x^*(\beta)) = \alpha, \text{ o } z_m(x^*(\alpha)) = \beta\}$$

Claramente, $E_i, E_d \in \mathcal{L}$ (véase la figura 2.8). Sea $H = \{h_j, j = 1, \dots, l\}$ el conjunto de puntos mínimos locales de los respectivos arcos de parábola de $F_N(N)$ en $J_m \times J_s$ (pudiendo suceder $H \cap Q \neq \emptyset$, donde Q está definido en la página 46), y sea $Y = H \cup Q$, esto es

$$Y = \{y = (y_1, y_2) \in F_N(N) \cap J_m \times J_s : y \in H \cup Q\}$$

Sea S_{y_j} el cuadrante superior derecho asociado a cada punto $y_j \in Y$.

Definición 2.3.6 Un punto $y_j \in Y$ se dirá no dominado si $y_j \notin S_{y_i}$, para todo $y_i \in Y$ tal que $y_i \neq y_j$.

Sea $Y_D \subseteq Y$ el conjunto de puntos no dominados de Y . La construcción de la curva mediana-varianza se obtiene como sigue: para cada $y_j \in Y_D$ se eliminan los arcos y subarcos de $F_N(N) \cap J_m \times J_s$ contenidos en S_{y_j} . Considérese el conjunto \mathcal{C} formado por la unión de los arcos y subarcos de $F_N(N) \cap J_m \times J_s$ no eliminados y de las semirrectas s_j^1, s_j^2 delimitadoras de los subespacios S_{y_j} correspondientes a los puntos no dominados.

Sean y_0, y_1, \dots, y_{l_D} los puntos no dominados que se supondrán, sin pérdida de generalidad, ordenados en sentido creciente respecto de la abcisa (el razonamiento es análogo respecto de la ordenada), donde $y_0 = E_i, y_{l_D} = E_d$. Cada par de puntos consecutivos $y_{j-1} = (\beta_{j-1}, \alpha_{j-1}), y_j = (\beta_j, \alpha_j)$, verifica que $\beta_{j-1} < \beta_j$, y $\alpha_{j-1} > \alpha_j$ (ya que si fuese $\alpha_{j-1} \leq \alpha_j$ el punto y_j estaría dominado por y_{j-1} , lo que contradice la selección de los puntos de Y_D).

Teorema 2.3.7 Sea el conjunto $\{I_1, \dots, I_{l_D}\}$ donde cada I_j es el rectángulo correspondiente a los puntos consecutivos y_{j-1}, y_j , con $I_j = [\beta_{j-1}, \beta_j] \times [\alpha_j, \alpha_{j-1}]$.

Para cada $j = 1, \dots, l_D$ sea $g_c(I_j)$ el arco de curva de \mathcal{C} cuasi-eficiente en I_j . Entonces la curva mediana-varianza \mathcal{L} verifica:

$$\bigcup_{j=1}^{l_D} g_c(I_j) = \mathcal{L}$$

Demostración: Después de la eliminación, el conjunto \mathcal{C} está formado por arcos de $F_N(N)$ no contenidos en ningún cuadrante S_{y_j} y por las semirrectas horizontales y verticales: s_j^1, s_j^2 delimitadoras de los mismos. Puesto que la ordenación de los puntos no dominados es respecto a la abcisa, para cada rectángulo I_j el arco de curva de \mathcal{C} cuasi-eficiente en I_j puede ser de tres tipos: O un arco de curva eficiente de $F_N(N)$ (Figura 2.9 (a)), o una línea poligonal enlazando segmentos horizontales y verticales pertenecientes respectivamente a las semirrectas s_{j-1}^1 y s_j^2 (curva $g_c(I_j)$ en Figura 2.9 (b)), o una combinación de arcos de curva de $F_N(N)$ con segmentos horizontales o verticales ($g_c(I_j)$ y $g_c(I_{j-1})$ en Figuras 2.10 (a) y (b) respectivamente).

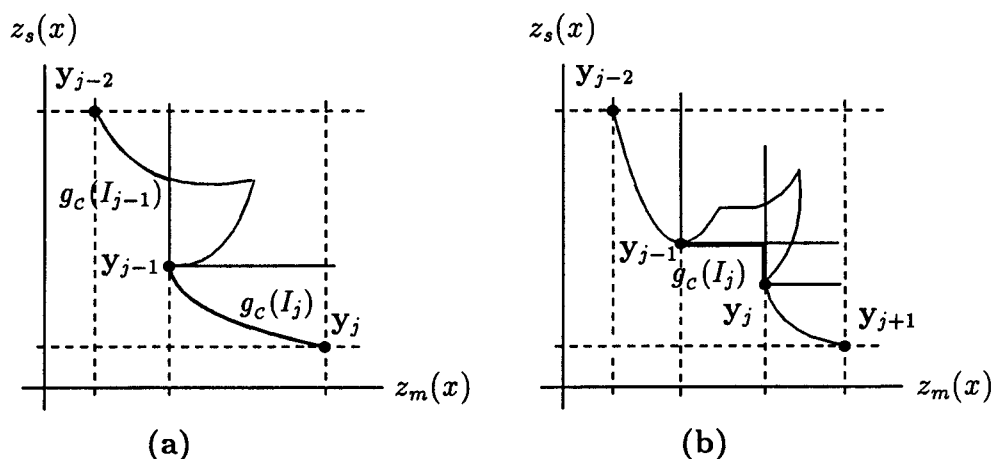


Figura 2.9

En el primer caso, los puntos de dicho arco son puntos mediana-varianza de N . En el segundo, por ser $y_{j-1} = (\beta_{j-1}, \alpha_{j-1})$ eficiente respecto de los puntos de la semirrecta s_{j-1}^1 , se verifica que $\forall \beta \in [\beta_{j-1}, \beta_j]$ es $F_N(x^*(\beta)) = y_{j-1}$, por tanto $z_s(x^*(\beta)) = \alpha_{j-1}$, lo que implica que $(\beta, \alpha_{j-1}) \in \mathcal{L}$. Análogo razonamiento prueba que $\forall \alpha \in [\alpha_j, \alpha_{j-1}]$, $F_N(x^*(\alpha)) = y_j$, consiguientemente $(\beta_j, \alpha) \in \mathcal{L}$ ya que $z_m(x^*(\alpha)) = \beta_j$. El tercer caso se remite a los anteriores.

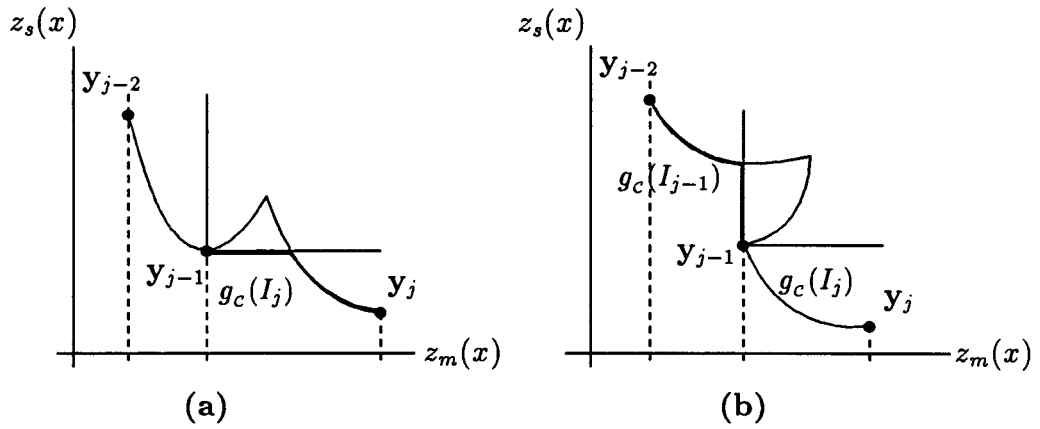
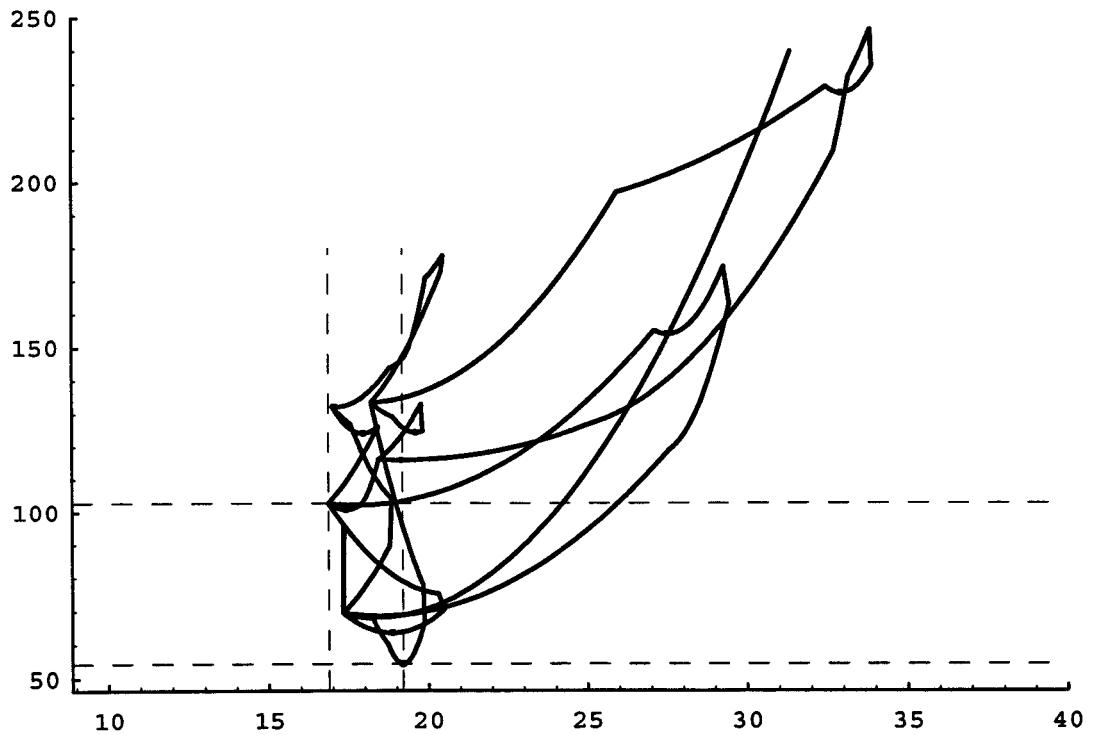


Figura 2.10

□

En las figuras 2.11 y 2.12 se representa la curva \mathcal{L} correspondiente a las gráficas de las figuras 2.2 y 2.5, respectivamente.

Figura 2.11: Curva \mathcal{L} de una red cíclica

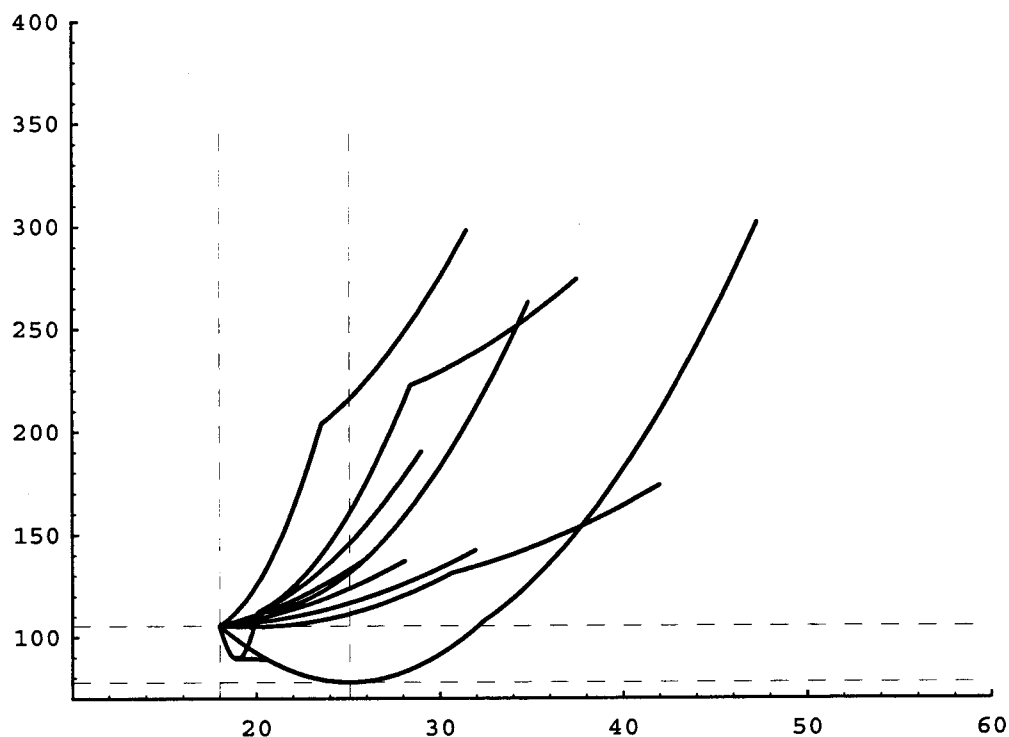


Figura 2.12: Curva \mathcal{L} de un árbol

En la Figura 2.12 se observa que \mathcal{L} no es en general convexa ni siquiera en una red árbol, a diferencia del comportamiento de las curvas centro-mediana, las cuales son convexas sobre redes árbol.

La intersección $F_N(N) \cap \mathcal{L} = F_N(X_{ef})$, ya que esta formada por todos los arcos eficientes (y convexas) de la curva. Por la proposición 2.1.2,

$$F_N(X_{ef}) = F_N\left(\bigcup_{\alpha} (x^*(\alpha))\right) = F_N\left(\bigcup_{\beta} (x^*(\beta))\right)$$

luego todo $(\beta, \alpha) \in F_N(N) \cap \mathcal{L}$ corresponde a un punto mediana-varianza $x_{(\beta, \alpha)}^*$ solución de los problemas duales entre sí $P(\alpha), P(\beta)$.

La curva mediana-varianza \mathcal{L} es convexa si y sólo si $\mathcal{L} \subset F_N(N)$. Si bien esta relación no se verifica ni siquiera sobre redes árbol, la práctica experimen-

tal produjo curvas \mathcal{L} convexas únicamente sobre redes árbol, y en ningún caso sobre redes cíclicas. De hecho en la mayoría de los casos examinados la curva \mathcal{L} correspondiente a un árbol resultó ser convexa, como se expone a continuación.

Sobre un conjunto de árboles de 10, 12, 15, 18 y 20 nodos generados aleatoriamente según el procedimiento descrito en el capítulo 4, (página 141), se representó para cada uno de ellos la gráfica del árbol bajo $F_T(\cdot)$, y se observó la convexidad de la curva \mathcal{L} . De cada tipo de árbol se generaron 50 casos, y se obtuvieron los siguientes resultados:

$ V = n$	$n = 10$	$n = 12$	$n = 15$	$n = 18$	$n = 20$
\mathcal{L} convexa	37	35	32	31	33

La figura 2.13 muestra un ejemplo de convexidad de la curva \mathcal{L} en un árbol.

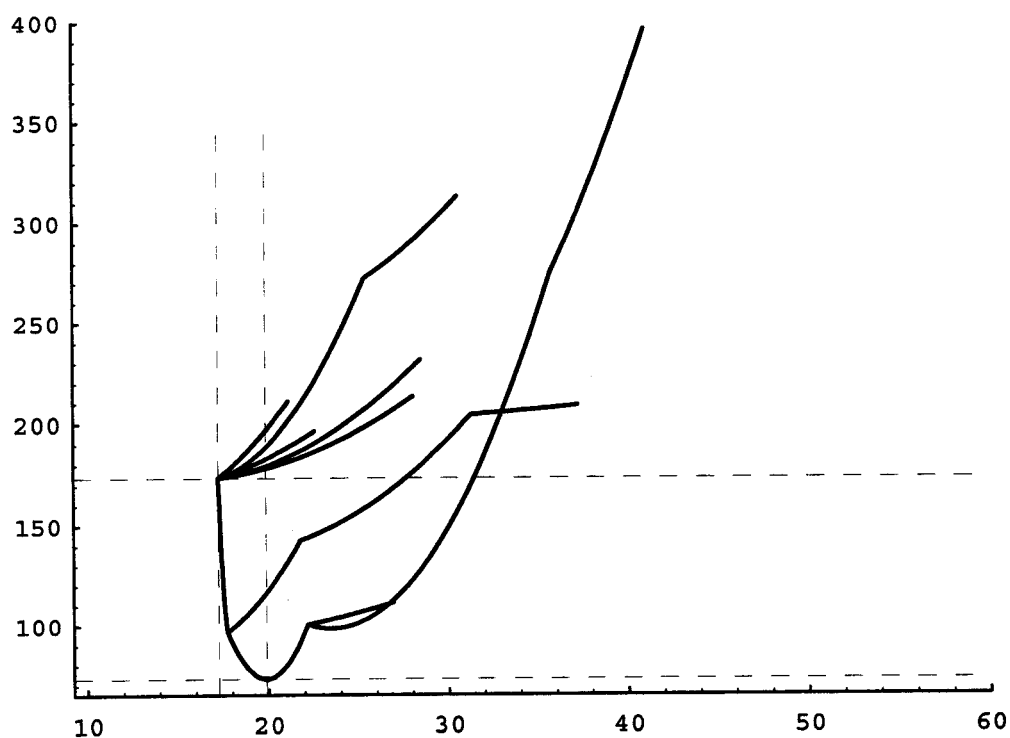


Figura 2.13: Curva \mathcal{L} convexa en un árbol

2.4 Curva mediana-varianza del problema no restringido

Considérese la formulación no restringida del problema mediana-varianza, correspondiente al problema $P(\mu)$:

$$P(\mu) : \min_{x \in N} z_\mu(x) = z_m(x) + \mu z_s(x), \quad \mu \geq 0$$

siendo $x^*(\mu) \in \text{Op}(\mu)$ una solución óptima eficiente. Sea $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ la función que a cada $\mu \geq 0$ asocia el valor de la función objetivo en $x^*(\mu)$, esto es

$$f(\mu) = \min_{x \in N} z_\mu(x) = z_\mu(x^*(\mu)), \quad \forall \mu \geq 0$$

Puesto que $f(0) = z_m(x_m^*)$ y para valores suficientemente grandes de μ es $f(\mu) = z_s(x_s^*)$ se estudiará el comportamiento de $f(\mu)$ en el rectángulo $J_m \times J_s$.

Sea $\mu \geq 0$ tal que $f(\mu) = c_\mu = z_m(x^*(\mu)) + \mu z_s(x^*(\mu))$. El punto $F_N(x^*(\mu)) = (z_m(x^*(\mu)), z_s(x^*(\mu)))$ pertenece al conjunto $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + \mu x_2 = c_\mu\}$, que es una recta en \mathbb{R}^2 . Por tanto dada la familia de rectas paralelas de \mathbb{R}^2 :

$$\mathcal{F}_\mu = \{r_c \equiv x_1 + \mu x_2 = c, c \in \mathbb{R}\}$$

el valor de c_μ corresponderá a la recta $r_{c_\mu} \in \mathcal{F}_\mu \cap J_m \times J_s$ que sea, o bien tangente a $F_N(N)$ o bien secante a $F_N(N)$ en algún punto de Q y tal que no exista $c' < c_\mu$ con la misma propiedad.

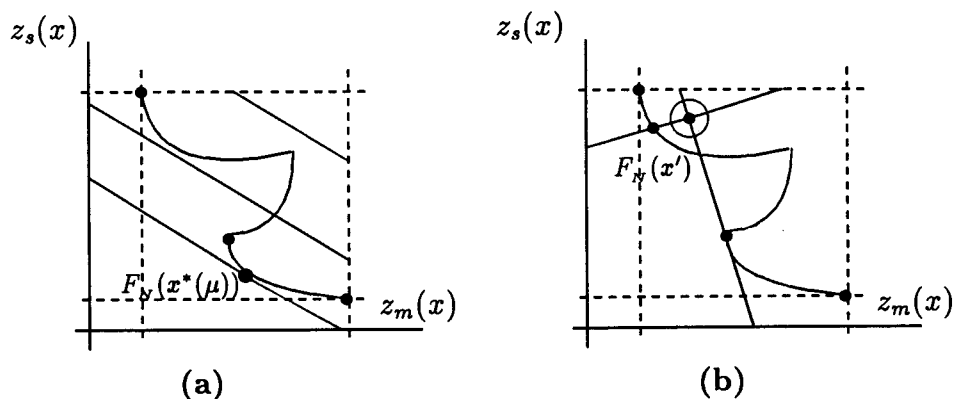


Figura 2.14

En la figura 2.14(a) se observa que la recta donde se alcanza el óptimo c_μ contacta con $F_N(N)$ en un único punto $F_N(x^*(\mu))$. Si el contacto se produjera en más de un punto: $F_N(x), F_N(x')$, debe ser $x, x' \in \text{Op}(\mu)$. Y puesto que para cada $\mu \geq 0$ el valor del óptimo c_μ es único, $\forall x^* \in \text{Op}(\mu), F_N(x^*) \in r_{c_\mu}$, luego todos los puntos del conjunto $F_N(\text{Op}(\mu))$ están alineados.

Definición 2.4.1 Para cada $\mu \geq 0$, sea $r_{c_\mu} \in \mathcal{F}_\mu$ tal que $r_{c_\mu} \cap F_N(N) \neq \emptyset$ y tal que $\forall r_c \in \mathcal{F}_\mu$ con $c < c_\mu$ se verifique $r_c \cap F_N(N) = \emptyset$. Entonces r_{c_μ} se llamará μ -recta, o recta asociada a $P(\mu)$.

Cada μ -recta identifica geoméricamente a los puntos intersección con $F_N(N)$, que corresponden a soluciones de $P(\mu)$, estando fuera de consideración todos los puntos de la curva situados en el semiplano superior delimitado por la μ -recta. Al variar μ se obtiene una curva formada por los segmentos delimitadores de las soluciones, lo que proporciona una interpretación geométrica del comportamiento de $f(\mu)$ sobre $J_m \times J_s$.

Definición 2.4.2 Para cada $\mu \geq 0$, sea \bar{r}_{c_μ} el máximo segmento de la μ -recta interceptado por $F_N(N)$. Se llamará curva mediana-varianza del problema no restringido al conjunto $\mathcal{H} = \bigcup_{\mu \geq 0} \bar{r}_{c_\mu}$.

Claramente, $F_N\left(\bigcup_{\mu \geq 0} \text{Op}(\mu)\right) \subseteq \mathcal{H}$. A continuación se verá que \mathcal{H} es la envoltura convexa del conjunto $F_N\left(\bigcup_{\mu \geq 0} \text{Op}(\mu)\right)$. Siguiendo a Rockafellar [52], se establece la siguiente definición:

Definición 2.4.3 Se llama epigrafo de la curva $F_N(N)$ al subconjunto de \mathbb{R}^2 definido por

$$\text{epi}(F_N(N)) = \{(z_m(x), x_2) : (z_m(x), z_s(x)) \in F_N(N) \text{ y } x_2 \geq z_s(x)\}$$

La misma notación: $\text{epi}(F_N(N))$, se mantendrá para designar a $\text{epi}(F_N(N)) \cap J_m \times J_s$. En general $\text{epi}(F_N(N))$ no es un subconjunto convexo de \mathbb{R}^2 (la convexidad se producirá sólo si la curva $F_N(N)$ es convexa).

Teorema 2.4.4 *Sea $\mu > 0$ y $r_c \in \mathcal{F}_\mu$. Si $r_c \cap \text{int}(\text{epi}(F_N(N))) \neq \emptyset$, entonces $f(\mu) = c_\mu < c$.*

Demostración: Sea $(x_1, x_2) \in r_c \cap \text{int}(\text{epi}(F_N(N)))$. Entonces existirá una bola $B_\epsilon(x_1, x_2)$ centrada en el punto y de radio ϵ tal que $B_\epsilon(x_1, x_2) \subset \text{int}(\text{epi}(F_N(N)))$. Desplazando la recta r_c hacia el origen y en la dirección de un radio perpendicular a r_c hasta que se intercepte un punto de $F_N(N)$ sobre dicha dirección (Figura 2.14 (b)), sea $F_N(x')$ el primer punto interceptado, para el cual la correspondiente recta $r_{c'}$ verifica $x_1 + \mu x_2 = c' < c$, lo que implica $f(\mu) \leq z_m(x') + z_s(x') < c$, que finaliza la demostración. \square

Como consecuencia, para cada $\mu \geq 0$ el valor c_μ se alcanzará en aquella recta de \mathcal{F}_μ que sea tangente o bien a $\text{epi}(F_N(N))$ si es convexo, (lo que supone que el segmento \bar{r}_{c_μ} se reduce a un único punto $F_N(x^*(\mu))$), o a la envoltura convexa de $\text{epi}(F_N(N))$, (y por tanto \bar{r}_{c_μ} enlaza varios puntos de intersección correspondientes a $F_N(\text{Op}(\mu))$), lo que se resume en el siguiente corolario

Corolario 2.4.5 *Sea $C(F_N(N))$ la envoltura convexa del epigrafo de $F_N(N)$ interceptado en $J_m \times J_s$. La curva definida por el conjunto*

$$\{(x_1, x_2) \in C(F_N(N)); x_2 = \inf\{x : (x_1, x) \in C(F_N(N))\}\}$$

es la envoltura convexa de la curva $F_N(N)$ en $J_m \times J_s$ y coincide con la curva mediana-varianza \mathcal{H} del problema no restringido.

La convexidad de la curva \mathcal{H} implica que en general las curvas \mathcal{L} y \mathcal{H} no coinciden. Entonces, $F_N(X_{ef}) = \mathcal{L} \cap F_N(N) \neq \mathcal{H} \cap F_N(N)$, pudiendo haber localizaciones eficientes que no sean óptimas para ningún problema $P(\mu)$, $\mu \geq 0$, (proposición 2.1.6).

Consecuentemente los problemas mediana-varianza restringidos y no restringido se pueden considerar problemas independientes, al no coincidir sus respectivas curvas ni siquiera sobre un tipo especial de redes: las redes árbol. Este resultado también difiere del obtenido para los problemas centro-mediana, ya que en éste caso el problema cent-dian se sitúa como un caso especial de los problemas centro-mediana restringidos (Halpern [20]).

En las figuras 2.15 y 2.16 se muestran las curvas \mathcal{H} correspondientes respectivamente a las gráficas 2.2 y 2.5, pudiéndose observar con claridad la diferencia con las curvas \mathcal{L} de las figuras 2.11 y 2.12.

De la caracterización de las curvas \mathcal{H} y \mathcal{L} se sigue

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} \quad \text{sii} \quad \mathcal{L} \text{ es convexa} \quad \text{sii} \quad \mathcal{L} \subset F_N(N)$$

Esto sucede en la figura 2.13, correspondiente a un árbol, y como se vió en la sección anterior, en la mayoría de las redes árbol.

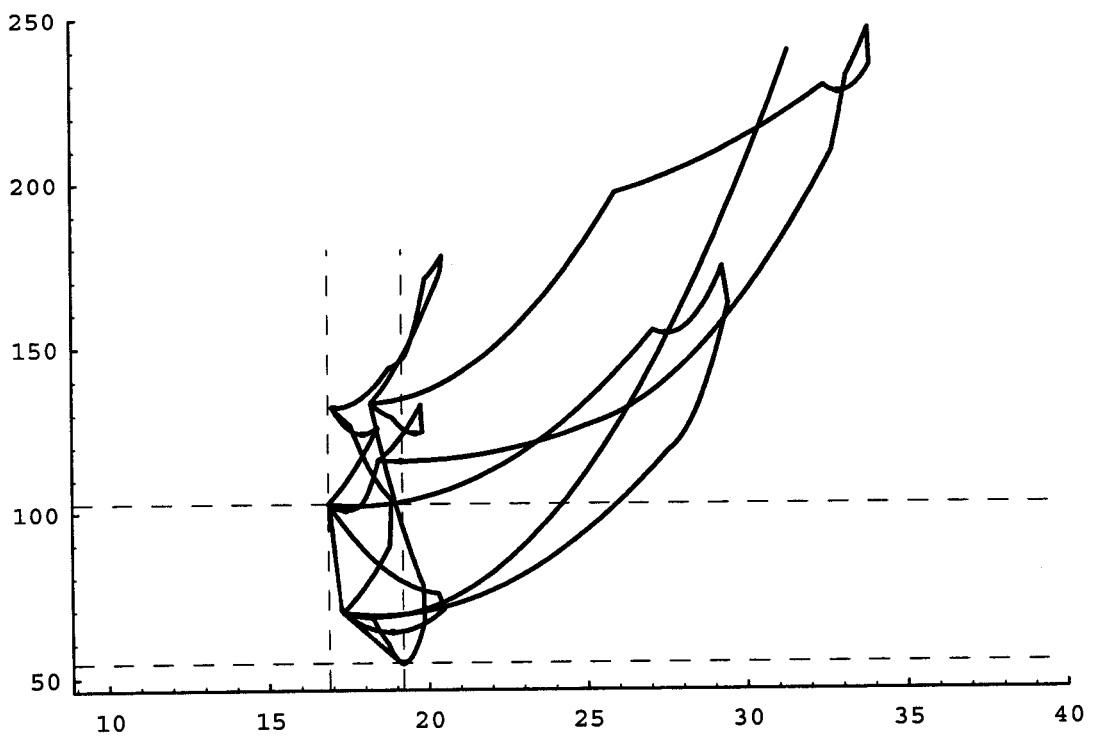


Figura 2.15: Curva \mathcal{H} de una red cíclica

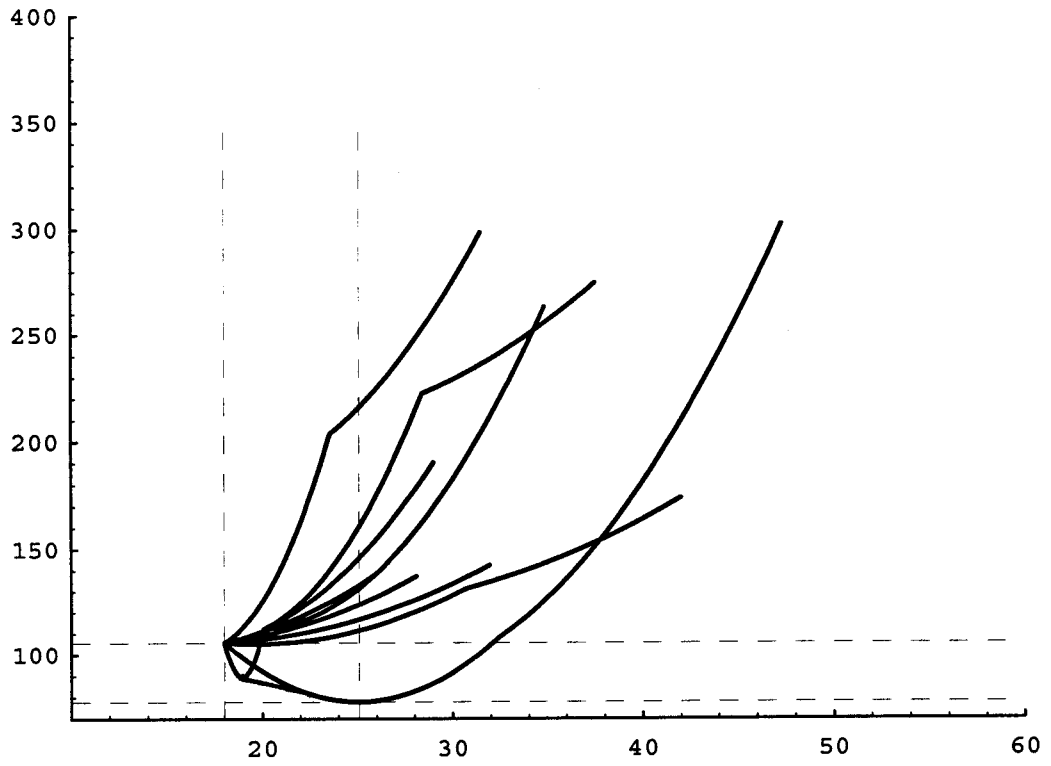


Figura 2.16: Curva \mathcal{H} de una red árbol

Capítulo 3

Problemas Mediana-Varianza II: Parametrización de la Varianza

A continuación se plantea y estudia un nuevo problema mediana-varianza. Teniendo en cuenta que la propia definición de la función varianza incorpora ya a la función mediana, una formulación alternativa mediana-varianza se obtiene parametrizando la función varianza mediante un parámetro que influya en el peso o importancia atribuido a la mediana. Se obtiene así un modelo mediana-varianza que se diferencia de los anteriores por contener, como caso particular, al problema de la mediana cuadrática.

La mediana cuadrática es una medida de especial interés en el marco de los criterios de equidad, ya que el punto que minimiza la mediana cuadrática es el único que en una red árbol verifica los axiomas de Holzman [26]. Estos axiomas, establecidos *a priori*, enuncian unos principios de equidad y consistencia deseables en la formulación del modelo. Su aplicación conduce a la selección de la mediana-cuadrática como una *buena* función objetivo, ya que la solución del correspondiente problema verifica los objetivos conceptuales establecidos axiomáticamente.

Otro aspecto que se estudiará en éste capítulo es la variación del parámetro. En una red árbol se proporcionará una cota superior de esta variación que permita conocer a priori el rango de valores en el cual se obtienen todas las soluciones.

3.1 Formulación del problema

Definición 3.1.1 Dada una red $N(V, E)$ conexa, no dirigida, de sistema de pesos normalizado, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ se define la función λ -varianza:

$$z_s(x, \lambda) = \sum_{v_i \in V} w_i [d(v_i, x) - \lambda z_m(x)]^2$$

El problema paramétrico mediana-varianza $P(\lambda)$ se formula como sigue

$$P(\lambda) : \quad \min_{x \in N} z_s(x, \lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Proposición 3.1.2 Para cada $x \in N$ se verifica

$$z_s(x, \lambda) = z_s(x) + (\lambda - 1)^2 (z_m(x))^2 \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Demostración: Desarrollando el cuadrado en la expresión de $z_s(x, \lambda)$ resulta

$$z_s(x, \lambda) = \sum_{v_i \in V} w_i d(v_i, x)^2 + \lambda^2 z_m(x)^2 \sum_{v_i \in V} w_i - 2\lambda z_m(x) \sum_{v_i \in V} w_i d(v_i, x)$$

y teniendo en cuenta que $w(V) = 1$ y $z_m(x) = \sum_{v_i \in V} w_i d(v_i, x)$ se tiene

$$z_s(x, \lambda) = z_m^{(2)}(x) + \lambda(\lambda - 2)(z_m(x))^2 \quad (3.1)$$

Sumando y restando $z_m(x)^2$, y observando que $z_m^{(2)}(x) - z_m(x)^2 = z_s(x)$, resulta

$$\begin{aligned} z_s(x, \lambda) &= z_m^{(2)}(x) - z_m(x)^2 + z_m(x)^2 + \lambda(\lambda - 2)z_m(x)^2 \\ &= z_s(x) + (1 + \lambda^2 - 2\lambda)z_m(x)^2 = z_s(x) + (\lambda - 1)^2 z_m(x)^2 \end{aligned}$$

c.q.d. □

Puesto que la función $f(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ es simétrica respecto de $\lambda = 1$, se estudiará el problema $P(\lambda)$ para valores de $\lambda \geq 1$. Nótese que para $\lambda = 1$ se obtiene el problema 1-varianza.

Para cada $\lambda > 1$, sea

$$\text{Op}(\lambda) = \{x^* \in N : z_s(x^*, \lambda) \leq z_s(x, \lambda), \forall x \in N\}$$

Proposición 3.1.3 *Se verifica $\bigcup_{\lambda > 1} \text{Op}(\lambda) \subseteq X_{ef}$*

Demostración: Sea $x^* \in \bigcup_{\lambda > 1} \text{Op}(\lambda)$, entonces $x^* \in \text{Op}(\lambda)$, para algún $\lambda > 1$. Si fuera $x^* \notin X_{ef}$, existiría $x \in X_{ef}$ tal que $z_m(x) \leq z_m(x^*)$ y $z_s(x) < z_s(x^*)$, o bien $z_m(x) < z_m(x^*)$ y $z_s(x) \leq z_s(x^*)$. Por la proposición anterior en ambos casos se tendría $z_s(x, \lambda) < z_s(x^*, \lambda)$ lo que contradice que $x^* \in \text{Op}(\lambda)$. Se concluye pues $x^* \in X_{ef}$, lo que demuestra el enunciado. \square

Sin embargo, para $\lambda = 1$, pueden existir x_1^*, x_2^* tales que $z_s(x_1^*) = z_s(x_2^*) \leq z_s(x)$, $\forall x \in N$, y sin embargo $x_2^* \notin X_{ef}$, ya que sea $z_m(x_1^*) < z_m(x_2^*)$. Por ello, si $X_s^* = \{x^* \in N : z_s(x^*) \leq z_s(x), \forall x \in N\}$, se definirá

$$\text{Op}(\lambda = 1) = X_s^* \cap X_{ef}$$

Con este conjunto solución se podrá extender el enunciado de la proposición anterior a $\lambda \geq 1$.

Para cada $\lambda > 1$, $x_s^*(\lambda)$ denotará una solución genérica de $P(\lambda)$, y para $\lambda = 1$, se mantendrá la notación x_s^* . Si para algún $\lambda_m \geq 1$ la solución $x_s^*(\lambda_m)$ de $P(\lambda_m)$ verifica $x_s^*(\lambda_m) \in X_m^* = \{x^* \in N : z_m(x^*) \leq z_m(x), \forall x \in N\}$, puesto que también debe ser $x_s^*(\lambda_m) \in X_{ef}$ resultará $\text{Op}(\lambda_m) = X_m^* \cap X_{ef}$. También en éste caso la solución genérica de $P(\lambda_m)$ se indicará por x_m^* .

Los siguientes resultados establecen que al aumentar el valor de λ las soluciones de $P(\lambda)$ se aproximan a la mediana.

Proposición 3.1.4 *Sea $x_s^*(\lambda)$ la solución de $P(\lambda)$. Dados $\lambda_1, \lambda_2 \geq 1$, si $\lambda_2 > \lambda_1$, entonces $z_m(x_s^*(\lambda_2)) \leq z_m(x_s^*(\lambda_1))$.*

Demostración: Como $\lambda_2 > \lambda_1$, entonces $\lambda_2 - \lambda_1 = k > 0$, con lo cual:

$$\begin{aligned} \lambda_2(\lambda_2 - 2) &= (k + \lambda_1)(k + \lambda_1 - 2) = k(k + \lambda_1 - 2) + \lambda_1(k + \lambda_1 - 2) \\ &= k(\lambda_2 + \lambda_1 - 2) + \lambda_1(\lambda_1 - 2) \end{aligned}$$

Sustituyendo esta última expresión en (3.1) se obtiene:

$$\begin{aligned} z_s(x, \lambda_2) &= z_m^{(2)}(x) + \lambda_1(\lambda_1 - 2)z_m(x)^2 + k(\lambda_2 + \lambda_1 - 2)z_m(x)^2 \\ &= z_s(x, \lambda_1) + k(\lambda_2 + \lambda_1 - 2)z_m(x)^2 \end{aligned}$$

que permite obtener $z_s(x, \lambda_2)$ a partir de $z_s(x, \lambda_1)$ mediante la relación:

$$z_s(x, \lambda_2) = z_s(x, \lambda_1) + k(\lambda_2 + \lambda_1 - 2)z_m(x)^2 \quad (3.2)$$

Puesto que $x_s^*(\lambda_2)$ es la solución del problema $P(\lambda_2)$, se tendrá:

$$z_s(x_s^*(\lambda_2), \lambda_2) \leq z_s(x_s^*(\lambda_1), \lambda_2)$$

utilizando (3.2) en ambos miembros se llega a

$$z_s(x_s^*(\lambda_2), \lambda_1) + k(\lambda_2 + \lambda_1 - 2)z_m(x_s^*(\lambda_2))^2 \leq z_s(x_s^*(\lambda_1), \lambda_1) + k(\lambda_2 + \lambda_1 - 2)z_m(x_s^*(\lambda_1))^2$$

De esto último resulta

$$0 \leq z_s(x_s^*(\lambda_2), \lambda_1) - z_s(x_s^*(\lambda_1), \lambda_1) \leq k(\lambda_2 + \lambda_1 - 2)[z_m(x_s^*(\lambda_1))^2 - z_m(x_s^*(\lambda_2))^2]$$

siendo la primera desigualdad debida a que $x_s^*(\lambda_1)$ resuelve el problema $P(\lambda_1)$.

Por lo tanto,

$$k(\lambda_2 + \lambda_1 - 2)[z_m(x_s^*(\lambda_1))^2 - z_m(x_s^*(\lambda_2))^2] \geq 0$$

pero $k(\lambda_2 + \lambda_1 - 2) > 0$, (puesto que $\lambda_2, \lambda_1 \geq 1$, y $\lambda_2 > \lambda_1$), obteniéndose:

$$z_m(x_s^*(\lambda_1))^2 \geq z_m(x_s^*(\lambda_2))^2, \quad \text{y finalmente} \quad z_m(x_s^*(\lambda_1)) \geq z_m(x_s^*(\lambda_2)). \quad \square$$

Corolario 3.1.5 *Sea $\lambda_m \geq 1$ tal que la solución del problema $P(\lambda_m)$ es la 1-mediana x_m^* . Entonces para todo $\lambda \geq \lambda_m$, x_m^* es la solución de $P(\lambda)$.*

Demostración: Si $\lambda = \lambda_m$ el resultado es obvio. Sea $\lambda > \lambda_m$. Por la proposición anterior la solución $x_s^*(\lambda)$ de $P(\lambda)$ verifica $z_m(x_s^*(\lambda)) \leq z_m(x_m^*)$ lo que implica que $x_s^*(\lambda) \in X_m^*$ ya que x_m^* es 1-mediana de N . Por tanto $\text{Op}(\lambda) \subseteq X_m^*$, y como también es $\text{Op}(\lambda) \subseteq X_{ef}$ resulta $\text{Op}(\lambda) = X_m^* \cap X_{ef}$, concluyéndose que x_m^* es solución de $P(\lambda)$. \square

El siguiente resultado enuncia que la 1-mediana se alcanza para valores suficientemente grandes del parámetro:

Proposición 3.1.6 *Cuando $\lambda \rightarrow +\infty$, la solución del problema $P(\lambda)$ tiende a la 1-mediana x_m^* de la red.*

Demostración: Sea $t = (\lambda - 1)^2$. Cuando $\lambda \rightarrow +\infty$, también $t \rightarrow +\infty$, resultando

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{z_s(x, \lambda)}{(\lambda - 1)^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{z_s(x)}{t} + z_m(x)^2 \right) = z_m(x)^2$$

Por tanto para valores suficientemente grandes de λ , la función $z_s(x)$ resulta insignificante con respecto al sumando $(\lambda - 1)^2 z_m(x)^2$, y minimizar $z_s(x, \lambda)$ equivale a minimizar $z_m(x)^2$. Puesto que $z_m(x) > 0, \forall x \in N$, el mínimo de $z_m(x)^2$ se alcanza en el conjunto X_m^* y por tanto la solución del correspondiente problema $P(\lambda)$ es la 1-mediana x_m^* . \square

El comportamiento de las soluciones conforma la naturaleza mediana-varianza del problema: al variar λ en su rango, el conjunto de soluciones $\{x_s^*(\lambda)\}_{\lambda \geq 1}$ oscila entre la 1-varianza x_s^* y 1-mediana x_m^* de la red. En general éste conjunto no será conexo, ni siquiera en el caso de una red árbol, como se verá en ejemplos posteriores.

3.1.1 Problema de la Mediana Cuadrática

Sustituyendo en la expresión (3.1) el valor $\lambda = 2$ se obtiene el problema de la mediana cuadrática:

$$(PMC) \equiv \min_{x \in N} z_m^{(2)}(x) = \sum_{v_i \in V} w_i d(v_i, x)^2$$

cuya solución es por tanto una localización mediana-varianza. El carácter de equidad y buena función objetivo de la mediana cuadrática fue establecida por Holzman [26] mediante una aproximación axiomática efectuada desde una perspectiva distinta a la habitual.

Mientras que en la mayoría de los problemas de localización tratados la función objetivo, o función de coste, es conocida y de hecho configura el modelo estudiado, Holzman aborda el problema inverso, estudiando en qué localización ubicar un servicio (y por tanto cuál es el criterio a utilizar) de forma que dicha localización satisfaga varios principios deseables en la formulación del modelo. Los principios se formulan axiomáticamente, y por tanto, la función objetivo que se obtenga depende de los axiomas elegidos. Holzman formuló tres axiomas sobre una red árbol, que se describen a continuación.

Sea $P = w(T)$ la población o demanda, tal que $\mathbf{x}^P = (x_1, \dots, x_P) \in T^P$ es el vector que especifica las localizaciones de los clientes en una configuración, y donde el peso w_i indica el número de veces que el vértice v_i está repetido en la configuración. Al variar $\mathbf{x}^P \in T^P$ se obtiene una familia completa de configuraciones o problemas de localización.

Definición 3.1.7 Una solución es una aplicación $l : T^P \rightarrow T$ que asocia a cada configuración de demanda $\mathbf{x}^P \in T^P$ la mejor localización $l(\mathbf{x}^P) = x \in T$ para el servicio.

La función $l(\mathbf{x}^P)$ es un operador minimizador de una función objetivo desconocida que Holzman determina mediante los siguientes axiomas:

Unanimidad : $\forall x \in T, l(x, \dots, x) = x$.

Si todos los clientes están localizados en el mismo sitio, dicha localización es la óptima .

Invarianza : Sean dos configuraciones $\mathbf{x}^P, \mathbf{y}^P$ tales que $x_j = y_j$, para todo $j \neq i$, y $x_i \neq y_i$ satisfacen $d(l(\mathbf{x}^P), x_i) = d(l(\mathbf{y}^P), y_i)$, permaneciendo x_i, y_i en el mismo subárbol de T obtenido después de la eliminación de $l(\mathbf{x}^P)$ y sus ejes incidentes. Entonces, $l(\mathbf{x}^P) = l(\mathbf{y}^P)$.

Es decir, mientras que no se altere la localización de los demás clientes, un cambio en la localización de un cliente que preserve la distancia y la dirección a la solución $l(\mathbf{x}^P)$ no modifica la localización de la solución.

Lipschitz : Sean $\mathbf{x}^P, \mathbf{y}^P$ tales que $x_j = y_j$, para todo $j \neq i$, y $x_i \neq y_i$. Entonces, $d(l(\mathbf{x}^P), l(\mathbf{y}^P)) \leq \frac{d(x_i, y_i)}{P}$.

Esto significa que la localización del servicio es poco sensible respecto a pequeños cambios en las configuraciones de los clientes. El coeficiente $1/P$ expresa que ningún individuo podrá influenciar en el resultado más que su "cuota" o parte proporcional en la demanda.

Teorema 3.1.8 (Holzman [26]) *En un árbol T existe una única solución que satisface los tres axiomas, y esta dada por*

$$l(\mathbf{x}^P) = \operatorname{argmin} \sum_{j=1}^P (d(x_j, x))^2 = \operatorname{argmin} \sum_{i=1}^{|V|} w_i d(v_i, x)^2$$

Por tanto la solución del problema (PMC) es la única localización que verifica los tres axiomas en una red árbol, y en éste sentido la mediana cuadrática es un criterio que garantiza una *buena* localización. Sin embargo no se ha podido extender éste resultado a redes generales (cíclicas), como indican Labbé et al. [35].

Las consecuencias que se pueden extraer en el contexto de los modelos mediana-varianza son varias:

- La mediana cuadrática se sitúa dentro de los modelos mediana-varianza. Por tanto es un criterio de equidad desde el punto de vista de la distribución de las distancias respecto de la localización del servicio.
- En la familia de problemas $\{P(\lambda), \lambda \geq 1\}$, el valor $\lambda = 2$ proporciona una localización mediana-varianza especialmente interesante en redes árbol, ya que verifica la axiomática de Holzman. En redes cíclicas el valor $\lambda = 2$ puede ser una referencia en la selección de valores de λ para ubicar un servicio con un criterio mediana-varianza.
- El problema de la mediana cuadrática (PMC) no ha sido estudiado desde el punto de vista algorítmico en redes generales. Labbé et al. [35] propone un algoritmo de complejidad $O(n^2)$ para resolver el (PMC) en redes árbol, e informa que esta complejidad se ha disminuido a $O(n)$ por Goldman.

Sin embargo el problema (PMC) en redes cíclicas puede ser resuelto en tiempo $O(mn \log n)$ mediante el algoritmo que se desarrolla a continuación. Dicho algoritmo resuelve el problema $P(\lambda)$, para cada $\lambda \geq 1$, por tanto la solución del (PMC) se podrá obtener sin más que aplicar el algoritmo para $\lambda = 2$.

3.1.2 Algoritmo

El algoritmo que se propone consiste en una adaptación del algoritmo 1/VAR/N al problema $P(\lambda)$. Por ello se analizará primero el comportamiento de la función λ -varianza sobre cada región primaria.

Dada la arista $[u, v]$ de N , sea $B(u, v) = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$ el conjunto de puntos de embotellamiento de la arista ordenados en sentido creciente respecto de su distancia al vértice inicial u , y sea $\bar{x}_0 = 0, \bar{x}_{k+1} = l_{uv}$.

La función $z_s(x, \lambda)$ es continua sobre cada arista de N . Aplicando la proposición 3.1.2, para cada $j = 1, \dots, k+1$ se define el subproblema paramétrico sobre la región primaria $[\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]$ de la arista $[u, v]$ como sigue:

$$P(\lambda, S_j) : \min_{x \in [\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]} z_s((x, \lambda); S_j) = z_s(x; S_j) + (\lambda - 1)^2 z_m(x; S_j)^2$$

Para $\lambda = 1$, la función $z_s((x, \lambda); S_j)$ coincide con $z_s(x; S_j)$, que es convexa sobre la región primaria. Para $\lambda > 1$ la convexidad de $z_s((x, \lambda); S_j)$ es estricta, ya que es suma de dos funciones una al menos de las cuales es estrictamente convexa sobre la región primaria.

Proposición 3.1.9 *Sea $x_\lambda^*(S_j)$ la solución del subproblema $P(\lambda, S_j)$. Para $\lambda > 1$ sea el punto*

$$x_\lambda = \frac{\lambda(2 - \lambda)a(S_j)g(S_j) - b(S_j)}{1 + \lambda(\lambda - 2)g(S_j)^2}$$

Entonces la solución $x_\lambda^(S_j)$ de $P(\lambda, S_j)$ viene dada por*

$$x_\lambda^*(S_j) = \begin{cases} x_\lambda, & \text{si } x_\lambda \in [\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j] \\ \bar{x}_{j-1}, & \text{si } x_\lambda < \bar{x}_{j-1} \\ \bar{x}_j, & \text{si } x_\lambda > \bar{x}_j \end{cases}$$

Demostración: Por la proposición 1.6.5 y la expresión (3.1) se tiene

$$\begin{aligned} z_s((x, \lambda); S_j) &= [1 + \lambda(\lambda - 2)g(S_j)^2]x^2 + 2[b(S_j) + \lambda(\lambda - 2)a(S_j)g(S_j)]x \\ &\quad + c(S_j) + \lambda(\lambda - 2)a(S_j)^2 \end{aligned}$$

La convexidad estricta de $z_s((x, \lambda); S_j)$ para $\lambda > 1$ garantiza que el coeficiente de x^2 es positivo. Por tanto la solución del subproblema estará en el punto x_λ solución de $z'_s((x, \lambda); S_j) = 0$, caso de pertenecer al intervalo, o en uno de sus extremos, caso contrario. \square

Para $\lambda = 1$ la solución del subproblema viene dada por el valor $x_{(\lambda=1)}^*(S_j)$ de esta proposición si $|g(S_j)| < 1$, (corolario 1.6.7). En caso de ser $|g(S_j)| = 1$ la solución es \bar{x}_j , si $g(S_j) = -1$, o es \bar{x}_{j-1} , si $g(S_j) = 1$, (lema 1.6.8).

Consecuentemente, para cada $\lambda \geq 1$ el problema $P(\lambda)$ se resuelve mediante el algoritmo 1/VAR/N, sustituyendo el cálculo del mínimo en cada región primaria (pasos 3 y 4 del algoritmo) por el punto $x_\lambda^*(S_j)$ de la proposición anterior. La complejidad no varía.

En una red árbol, para cada $\lambda \geq 1$ la función $z_s(x, \lambda)$ es estrictamente convexa sobre cada arista de T . De la proposición 2.2.4 resulta

$$z_s(x, \lambda) = (1 + \lambda(\lambda - 2)g_u^2)x^2 + 2(2z_m(u, V_u) - z_m(u) + \lambda(\lambda - 2)g_u z_m(u))x + z_m^{(2)}(u) + \lambda(\lambda - 2)z_m(u)^2$$

obteniéndose la siguiente expresión para el punto que anula $z'_s(x, \lambda)$:

$$x_\lambda = \frac{z_m(u)(1 - \lambda(\lambda - 2)g_u) - 2z_m(u, V_u)}{1 + \lambda(\lambda - 2)g_u^2}$$

Corolario 3.1.10 *Para cada $\lambda \geq 1$, la solución $x_{[u,v]}^*(\lambda)$ de $P(\lambda)$ sobre cada arista $[u, v]$ de un árbol T es el punto x_λ , si $x_\lambda \in [0, l_{uv}]$. En caso contrario, es $x_{[u,v]}^*(\lambda) = 0$, si $x_\lambda < 0$ o bien $x_{[u,v]}^*(\lambda) = l_{uv}$, si $x_\lambda > l_{uv}$.*

Por tanto sobre una red árbol el problema $P(\lambda)$ se puede resolver en tiempo $O(n)$ aplicando el algoritmo 1/VAR/T, sin más que reemplazar el cálculo del punto x_0 sobre cada arista $[u, v]$ por el cálculo de x_λ .

3.2 Acotación del parámetro

La utilización del modelo paramétrico mediana-varianza en la localización de un servicio implica, desde el punto de vista del decisor, la elección del valor (o conjunto de valores) del parámetro que resuelva el problema planteado. Sin embargo, la variación de las soluciones se produce en un rango demasiado amplio de valores de λ (para $\lambda \in [1, \infty)$) que no aporta información sobre el intervalo de valores de λ en el cual se produce realmente el conjunto de soluciones, lo cual dificulta la elección más conveniente del parámetro.

Una alternativa a éste problema es efectuar una reducción del rango de valores de λ mediante un *tanteo* previo: seleccionando un conjunto de valores de λ suficientemente amplio y obteniendo las soluciones de los correspondientes problemas, bastará elegir el menor valor de λ cuya solución asociada sea una mediana. Las soluciones mediana-varianza se obtendrán entre $\lambda = 1$ y el valor seleccionado de λ .

Este proceso se simplifica notablemente si se conoce *a priori* una cota superior del rango de valores del parámetro en el cual se producen todas las soluciones. Esto es posible en el caso de una red árbol, como se establece en los resultados que siguen a continuación. En ellos se determina un valor λ_0 tal que todas las soluciones de la familia de problemas $\{P(\lambda)\}_{\lambda \geq 1}$ se obtiene para $\lambda \in [1, \lambda_0]$.

Sea $T(V, E)$ una red árbol no dirigida y con sistema de pesos normalizado. Puesto V es un CDF para el problema de la 1-mediana absoluta, la búsqueda de la cota superior se orienta estableciendo condiciones para que el óptimo sobre cada arista de T se alcance en uno de los vértices del mismo.

Teorema 3.2.1 *Sea $f(x)$ una función definida sobre las aristas de T , tal que el mínimo de f en cada arista $[u, v]$ en postorden se alcanza en u , si $g_u > 0$, o en v , si $g_u < 0$. Entonces el mínimo global de $f(x)$ sobre T es una mediana absoluta de T .*

Demostración: Considerado un *postorden* trasversal en T sea m un vértice mediana de T tal que el subárbol enraizado en m , sea T_m , no contenga otra mediana distinta de m . Por ser m mediana, es centroide, y si T_{h_1}, \dots, T_{h_m} son las componentes conexas obtenidas al eliminar m de T , el peso de rama de m : $bw(m)$, verifica

$$bw(m) = \max\{w(T_{h_i}), i = h_1, \dots, h_m\} \leq 1/2$$

Como $T - T_m = \overline{T_m} = T_{h_j}$, para algún h_j , se tiene $w(\overline{V_m}) = w(T_{h_j}) \leq 1/2$. Entonces para toda arista $[u, v]$ en T_m es $g_u < 0$. En efecto, debe ser $w(V_u) \leq bw(m) \leq 1/2$, ya que el subárbol enraizado en u está contenido en (o es igual a) alguna componente conexa T_{h_i} . Pero si fuera $w(V_u) = 1/2$, sería $w(\overline{V_u}) = 1/2$, y por tanto u sería mediana, lo que contradice la suposición inicial. Luego debe ser $w(V_u) < 1/2$ y por tanto $w(\overline{V_u}) > 1/2$, resultando $g_u = w(V_u) - w(\overline{V_u}) < 0$. Entonces por hipótesis del teorema, el mínimo de f ocurre en el vértice superior v , y esto se verifica para toda arista $[u, v]$ de T_m . Razonando por recurrencia, el mínimo de f en T_m se alcanza en m .

Si m es la única mediana (y es por tanto la única mediana absoluta, ya que $X_m^* = \{m\}$), ya está demostrado.

Si hay dos vértices mediana m_1, m_2 , por lo anterior, el mínimo de f en cada T_{m_i} , (subárbol enraizado en m_i), se alcanza en $m_i, i = 1, 2$. Entonces el mínimo

de f sobre T se alcanza en algún punto de la arista $[m_1, m_2]$, lo que finaliza la demostración, ya que $X_m^* = [m_1, m_2]$ es el conjunto de medianas absolutas de T .
□

Si además f es estrictamente convexa sobre las aristas de T , el mínimo global de f sobre T es un único punto mediana absoluta de T .

Teorema 3.2.2 *Sea $[u, v] \in E$ tal que $g_u \neq 0$. Entonces existe un λ_u tal que para todo $\lambda \geq \lambda_u$ el mínimo de $z_s(x, \lambda)$ en $[u, v]$ ocurre en u , si $g_u > 0$ (en v , si $g_u < 0$).*

El valor λ_u viene dado por: $\lambda_u = 1 + \sqrt{1 + 1/|g_u|}$.

Demostración: Para todo $\lambda \geq 1$ la convexidad estricta de $z_s(x, \lambda)$ sobre cada arista de T supone que el mínimo $x_{[u,v]}^*(\lambda)$ de $z_s(x, \lambda)$ sobre $[u, v]$ se alcanza en u , si $z'_s(u, \lambda) \geq 0$, o en v , si $z'_s(v, \lambda) \leq 0$.

La derivada de $z_s(x, \lambda)$ en $x \in [u, v]$ es

$$(1/2)z'_s(x, \lambda) = (1 + \lambda(\lambda - 2)g_u^2)x + 2z_m(u, V_u) - [1 + \lambda(2 - \lambda)g_u]z_m(u)$$

Sea $g_u > 0$. En el vértice inferior u , es $x = 0$. Sustituyendo éste valor en la expresión anterior, resulta

$$(1/2)z'_s(u, \lambda) = 2z_m(u, V_u) - [1 + \lambda(2 - \lambda)g_u]z_m(u)$$

Si la expresión del corchete es no positiva, se tendrá $z'_s(u, \lambda) \geq 0$. Pero $1 + \lambda(2 - \lambda)g_u \leq 0$ equivale a $\lambda^2 g_u - 2\lambda g_u - 1 \geq 0$.

Dividiendo ambos miembros por $g_u > 0$ resulta $\lambda^2 - 2\lambda - 1/g_u \geq 0$. La solución positiva de esta ecuación es: $1 + \sqrt{1 + 1/g_u}$. Entonces para valores de $\lambda \geq 1 + \sqrt{1 + 1/g_u}$ es $1 + \lambda(2 - \lambda)g_u \leq 0$, y por tanto:

$$(1/2)z'_s(u, \lambda) = 2z_m(u, V_u) - [1 + \lambda(2 - \lambda)g_u]z_m(u) \geq 2z_m(u, V_u) \geq 0$$

lo que implica que el mínimo de $z_s(x, \lambda)$ en $[u, v]$ se alcanza en u .

Si $g_u < 0$, basta calcular la derivada en el vértice superior v sustituyendo $x = l_{uv}$ en la expresión de $z'_s(v, \lambda)$, obteniendo que para $\lambda \geq 1 + \sqrt{1 + 1/(-g_u)}$, es $z'_s(v, \lambda) \leq 0$.

De ambos resultados, se sigue el teorema, sin más que tomar:

$$\lambda \geq \lambda_u = 1 + \sqrt{1 + 1/|g_u|}$$

□

El valor λ_u es específico de cada arista $[u, v]$. Para que en toda arista de T la función alcance su mínimo en un extremo del mismo (siempre que $g_u \neq 0$), bastará elegir un valor de λ común a todas las aristas de T . Para dicho valor el problema $P(\lambda)$ estará en las condiciones del Teorema 3.2.1, y por tanto la solución de dicho problema será un punto de X_m^* .

Esto se cumple eligiendo $\lambda \geq \lambda_0$ con $\lambda_0 = 1 + \sqrt{1 + 1/\rho}$, siendo

$$\rho = \min_{[u,v] \in E} \{|g_u|, g_u \neq 0\}$$

Según éste resultado y el corolario 3.1.5 se tiene

Corolario 3.2.3 *Para todo $\lambda \geq \lambda_0$, la solución de $P(\lambda)$ se alcanza en la 1-mediana x_m^* .*

El cálculo de λ_0 no supone ningún aumento de la complejidad en la resolución del problema, ya que se puede obtener al final de la primera pasada (paso hacia la raíz) en el algoritmo AUX/V(T), aplicando que $g_u = 2w(V_u) - 1$.

El valor de λ_0 es una cota superior del rango de λ , por tanto pueden existir valores de $\lambda < \lambda_0$ para los cuales la solución de $P(\lambda)$ sea x_m^* . Esto se puede observar en los ejemplos que siguen a continuación. En cada uno de ellos se calcula el valor de λ_0 y se muestra el comportamiento de las soluciones al variar λ en su rango.

3.2.1 Ejemplos

EJEMPLO 1

Corresponde a un árbol de 8 vértices cuya distribución espacial, longitudes de las aristas y pesos se muestran en la Figura 3.1

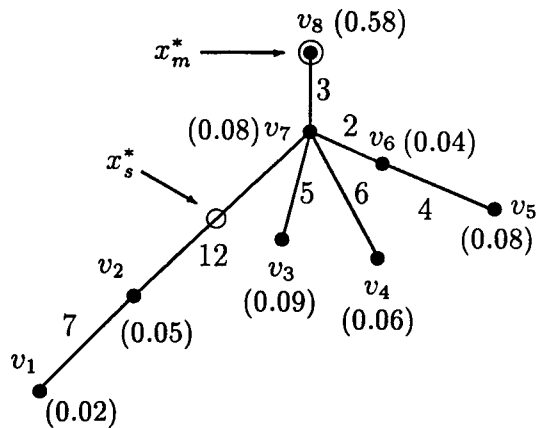


Figura 3.1

El vértice v_8 es la raíz, según el postorden definido en T , destacándose los siguientes elementos:

- 1-mediana x_m^* : se localiza en el vértice v_8 .
- Punto 1-varianza x_s^* : localizado en la arista $[v_2, v_7]$ a una distancia 6.67204 del vértice inferior v_2 , lo que se indicará mediante la notación: $x_s^* = (6.67204, v_2)$
- Valor de λ_0 : se alcanza en la arista $[v_7, v_8]$, para el cual $\rho = |g_7| = 0.16$, resultando

$$\lambda_0 = 1 + \sqrt{1 + 1/\rho} = 3.69258 \dots \approx 3.7$$

Por tanto en el intervalo $\lambda \in [1, 3.7]$ se obtendrán todas las soluciones de la familia $\{P(\lambda)\}_{\lambda \geq 1}$ como se muestra en la tabla 3.1, que recoge los desplazamientos de la solución sobre las aristas $[v_2, v_7]$, y $[v_7, v_8]$. En ambos casos la solución $x_s^*(\lambda)$ se localiza por su distancia al vértice inferior.

Nótese que el vértice v_7 solución al problema de la mediana cuadrática, actúa como un foco de atracción de las soluciones, las cuales permanecen en él para un cierto intervalo de valores de λ . Para este caso el conjunto de soluciones es conexo, y es el camino enlazando los puntos x_s^* y x_m^* .

λ	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$(x_s^*(\lambda), v_2)$	6.67204	6.95054	7.70078	8.72492	9.82272	10.8591
λ	1.6	1.7	1,8	1,9	2	2.1
$(x_s^*(\lambda), v_2)$	11.77	12	12	12	12	12
λ	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7
$(x_s^*(\lambda), v_7)$	12	12	0.0177869	0.20155	0.395086	0.597888
λ	2.8	2.9	3	3.1	3.2	3.3
$(x_s^*(\lambda), v_7)$	0.80944	1.02922	1.25669	1.49132	1.73258	1.97993
λ	3.4	3.5	3.6	3.7	$\lambda > 3.7$	
$(x_s^*(\lambda), v_7)$	2.23286	2.49083	2.75335	3	3	

Tabla 3.1

EJEMPLO 2

Corresponde al árbol de la Figura 3.2, cuyos pesos normalizados en los vértices son :

0.150376, 0.0977444, 0.0526316, 0.0075188, 0.0827068, 0.0451128, 0.0150376, 0.075188, 0.037594, 0.0827068, 0.0676692, 0.0827068, 0.0977444, 0.0526316, 0.0526316.

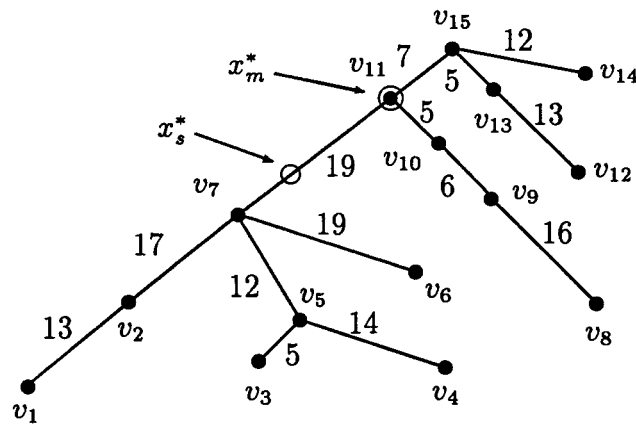


Figura 3.2

Para este árbol se tiene:

- 1-mediana x_m^* : en el vértice v_{11} .
- Punto 1-varianza x_s^* : localizado en la arista $[v_7, v_{11}]$: $x_s^* = (8.95137, v_7)$

- Valor de λ_0 : se alcanza en la arista $[v_7, v_{11}]$, y es: $\lambda_0 = 4.35123$.

Las soluciones obtenidas son:

λ	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
$(x_s^*(\lambda), v_7)$	8.95137	8.97471	9.0447	9.16126	9.32425	9.53349	9.78873
λ	1.7	1.8	1.9	2	2.1	2.2	2.3
$x_s^*(\lambda)$	10.0897	10.436	10.8273	11.2632	11.743	12.2664	12.8327
λ	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3
$x_s^*(\lambda)$	13.4413	14.0915	14.7826	15.5139	16.2846	17.0939	17.9409
λ	3.1	3.2	$\lambda > 3.2$				
$x_s^*(\lambda)$	18.8247	19	19				

Tabla 3.2

El conjunto de soluciones está en el camino enlazando los puntos x_s^* y x_m^* , y se obtiene en el intervalo de valores $\lambda \in [1, 3.2] \subset [1, \lambda_0]$.

EJEMPLO 3

Corresponde al árbol de la Figura 3.3, cuyos pesos de los vértices normalizados son:

0.00862069, 0.0862069, 0.0775862, 0.103448, 0.103448, 0.172414, 0.0603448, 0.12069, 0.0258621, 0.172414, 0.0603448, 0.00862069.

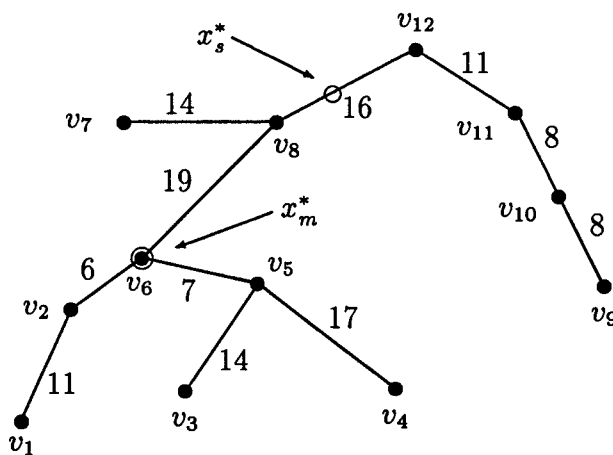


Figura 3.3

Para este árbol, enraizado en v_{12} y en postorden se tiene:

- 1-mediana x_m^* : en el vértice v_6 .
- Punto 1-varianza x_s^* : localizado en la arista $[v_8, v_{12}]$: $x_s^* = (5.1951, v_8)$
- Cota superior $\lambda_0 = 4.26599$.

Las soluciones obtenidas al variar λ se muestran en la siguiente tabla:

λ	1	1.1	1.2			
$(x_s^*(\lambda), v_8)$ $[v_8, v_{12}]$	5.1951	5.0282	4.533			
λ	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
$(x_s^*(\lambda), v_6)$ $[v_6, v_8]$	15.1617	14.9765	14.7388	14.4489	14.1072	13.7141
λ	1.9	2	2.1	2.2	2.3	2.4
$(x_s^*(\lambda), v_6)$	13.2702	12.7759	12.2319	11.6388	10.9976	10.3088
λ	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3
$(x_s^*(\lambda), v_6)$	9.57334	8.79215	7.96615	7.09631	6.18366	5.22926
λ	3.1	3.2	3.3	3.4	$\lambda \geq 3.5$	
$(x_s^*(\lambda), v_6)$	4.23421	3.19962	2.12666	1.01652	0	

Tabla 3.3

En este caso el conjunto de puntos solución no es conexo. En efecto, para $\lambda = 1$, $\lambda = 1.1$, $\lambda = 1.2$ se obtienen las tres primeras soluciones, localizadas en la arista $[v_8, v_{12}]$, produciéndose un cambio de arista en la transición de $\lambda = 1.2$ a $\lambda = 1.3$, cuyas correspondientes soluciones están a distancia 4.533 del vértice v_8 y en $[v_8, v_{12}]$ la primera, y a distancia 15.1617 de v_6 y en la arista $[v_6, v_8]$ de longitud 19 la segunda. A partir de $\lambda = 1.3$ las demás soluciones se desplazan sobre $[v_6, v_8]$ en dirección a la mediana (v_6).

Capítulo 4

Problemas p -varianza

Dentro del modelo con demanda discreta establecido en el (PGL):

$$\min_{\mathbf{x} \in N^p} z(\mathbf{x}) = f(d(\mathbf{x}, v_1), \dots, d(\mathbf{x}, v_n))$$

los problemas tratados hasta ahora son de localización simple, en el sentido de que la demanda es atendida por un único servicio. Una extensión del problema se produce considerando la localización simultánea de un número p de servicios, con $p > 1$. El modelo resultante es un problema de localización múltiple que no sólo se dirige a localizar un número determinado de servicios, sino que también se orienta a atenuar los efectos indeseables que se pueden producir al localizar un único servicio con el criterio varianza, según se expuso en el capítulo 2.

La mayoría de los problemas de localización múltiple estudiados se refieren a los problemas p -centro y p -mediana. Kariv y Hakimi [28, 29] demostraron que ambos problemas son NP-duros en redes generales, y los métodos de resolución se basan en la existencia de un Conjunto Dominante Finito (CDF), que permite discretizar el problema, reduciendo los candidatos a localizaciones óptimas a dicho conjunto.

Cuando las funciones de costo son no lineales (caso del criterio varianza) los problemas de localización múltiple resultantes son intrínsecamente más difíciles que los anteriores, lo que permite suponer que también sean NP-duros los problemas correspondientes de optimización, si bien este aspecto no está demostrado. A esta dificultad se une la ausencia de CDF, siendo necesario el uso de procedimientos heurísticos para la resolución de estos problemas en redes generales.

embargo no se han desarrollado procedimientos específicos para resolver estos problemas, ni siquiera sobre redes árbol.

En este capítulo se estudiarán los problemas de localización de p servicios en redes con el criterio varianza, y su estructuración es como sigue: primero se formularán los problemas y se establecerá su complejidad. Después se desarrollarán métodos de resolución exactos y heurísticos sobre redes árbol, y heurísticos sobre redes cíclicas, analizando en cada caso la complejidad computacional. Por último se efectuará un estudio comparativo de los heurísticos sobre redes cíclicas mediante resultados computacionales obtenidos sobre redes generadas aleatoriamente.

4.1 Formulación del problema y complejidad

Dada una red conexa no dirigida $N(V, E)$, de sistema de pesos normalizado, con $|V| = n$, $|E| = m$ y función de coste l definida sobre cada arista de E , sea $X_p = (x_1, \dots, x_p) \in N^p$ un vector de localizaciones para p servicios ($p \geq 1$), y (v_1, \dots, v_n) el vector de demanda situado en los nodos de N . La función p -varianza, o varianza de X_p se define como

$$z_s(X_p) = \sum_{v_i \in V} w_i (d(v_i, X_p) - z_m(X_p))^2$$

donde la distancia $d(v_i, X_p) = \min \{d(v_i, x_j), j = 1, \dots, p\}$, y $z_m(X_p)$ es la función mediana de X_p definida

$$z_m(X_p) = \sum_{v_i \in V} w_i d(v_i, X_p)$$

La definición de distancia implica que en la función p -varianza es equivalente referirse al punto $(x_1, \dots, x_p) \in N^p$ o al p -conjunto $\{x_1, \dots, x_p\} \subset N$; por simplicidad la misma notación X_p identificará a ambos.

Definición 4.1.1 Un punto $X_p^* \in N^p$ es un punto de mínima p -varianza si

$$z_s(X_p^*) \leq z_s(X_p), \quad \forall X_p \in N^p$$

En tal caso se dirá que el conjunto $X_p^* = \{x_1^*, \dots, x_p^*\} \subset N$ es un conjunto p -varianza de N .

El problema de la p -varianza en N se formulará como

$$\min_{X_p \in N^p} \{z_s(X_p)\}$$

Este problema también se podría llamar *de la p -varianza absoluta*, en analogía a las denominaciones que reciben los problemas p -centro y p -mediana cuando dichas funciones se minimizan sobre N^p . En general (salvo que haya confusión) tal denominación no será utilizada en esta memoria, ya que en la formulación que se ha hecho del problema queda establecida con claridad la minimización de la función $z_s(X_p)$ sobre N^p .

Como consecuencia de este planteamiento, hay que puntualizar

- Debido al carácter nodal de la demanda, sobre cada arista sólo se localizará un servicio. Esto no supone restricción ya que si en una misma arista hay dos servicios, éstos se ubicarán en los vértices de la arista, y en tal caso se considerarán en aristas distintas. Aquí se excluye también la coincidencia de dos servicios sobre un mismo vértice, ya que de suceder se tendrían $p - 1$ servidores, pudiéndose añadir un servicio más de forma que disminuyese el valor de la p -varianza.
- Cada demanda es atendida por (asignada al) servicio más próximo. En caso de igual proximidad ante dos servicios, el punto de demanda podrá ser asignado arbitrariamente a uno u otro.

Si el conjunto de posibles localizaciones se restringe a V , se tiene el problema del conjunto de vértices p -varianza, formulado

$$\min \{z_s(V_p) : V_p \subset V, |V_p| = p\}$$

cuya solución V_p^* se denominará conjunto de vértices p -varianza de N .

A continuación se establecerá que ambos problemas son NP-duros en redes generales, esto es, no pueden ser resueltos por un algoritmo de tiempo $O(f(n, p))$, donde f es un polinomio en n, p , (n, p entradas variables), a menos que $P = NP$. De hecho se demostrará que son NP-duros incluso en la red de más simple estructura.

Previamente, y tomando como referencia el texto de Garey y Johnson [12], se hará una breve introducción a los conceptos fundamentales sobre NP-complejidad.

Un problema es una descripción general de una situación que requiere ser resuelta. Un problema de decisión es aquel que sólo tiene dos posibles soluciones: respuesta positiva (sí), o negativa (no). Formalmente un problema de decisión Π consiste en un conjunto D_Π de ejemplares o casos y un subconjunto $Y_\Pi \subseteq D_\Pi$ de ejemplares-sí: un ejemplar pertenece a D_Π si y sólo si puede obtenerse de un ejemplar genérico sustituyendo sus componentes genéricas por objetos particulares, y un ejemplar pertenece a Y_Π si y sólo si la respuesta a la cuestión planteada, cuando se particulariza sobre dicho ejemplar, es sí.

La clase P de problemas es la clase de problemas de decisión que pueden ser resueltos en tiempo polinomial mediante un algoritmo determinístico. La clase de problemas NP es la clase de todos los problemas de decisión Π tales que, una solución candidato (la cual se conjetura o supone) puede verificarse como una solución-sí en tiempo polinomial mediante un algoritmo no determinístico, (el término no-determinístico hace referencia a que no determina donde sucede el candidato).

Claramente, $P \subseteq NP$, puesto que si un problema puede resolverse en tiempo polinomial, debe poderse verificar en tiempo polinomial que una solución o un ejemplar es un ejemplar-sí.

La cuestión fundamental sobre las clases P y NP, todavía no resuelta de forma definitiva, es la de conocer si la inclusión $P \subseteq NP$ es estricta: en efecto, ya que todos los problemas en P pueden ser resueltos en tiempo polinomial, mientras que los problemas en $NP \setminus P$ son intratables. Las transformaciones polinomiales entre distintos problemas de la clase NP permiten establecer que, si uno de los problemas de la clase NP estuviese en P, entonces $P = NP$.

Dados dos problemas de decisión Π_1, Π_2 , una transformación polinomial del problema Π_1 en el problema Π_2 es una función $t : D_{\Pi_1} \rightarrow D_{\Pi_2}$ que satisface las dos condiciones siguientes: (i) t es computable por un algoritmo en tiempo polinomial, y (ii) para todo $I \in D_{\Pi_1}$, $I \in Y_{\Pi_1}$ si y sólo si $t(I) \in Y_{\Pi_2}$.

Según esta definición, un problema de decisión Π es NP-completo si y sólo si $\Pi \in \text{NP}$, y cualquier otro problema de decisión NP-completo puede ser polinomialmente transformado en Π . Consecuentemente para cualquier problema de decisión Π NP-completo se verifica que $\Pi \in \text{P}$ si y sólo si $\text{P} = \text{NP}$.

El concepto NP-duro se usa para describir las versiones de optimización (de búsqueda) de los problemas de decisión que son NP-completos. Un problema de búsqueda Π consiste en un conjunto D_Π de objetos finitos llamados ejemplares, y para cada ejemplar $I \in D_\Pi$, un conjunto $S_\Pi(I)$ de objetos finitos llamado soluciones para I . Se dice que un algoritmo resuelve un problema de búsqueda Π si, dando como entrada cualquier ejemplar $I \in D_\Pi$, devuelve la respuesta "no" si $S_\Pi(I) = \emptyset$, y en caso contrario, devuelve alguna solución $s \in S_\Pi(I)$.

Todo problema de decisión Π puede formularse como un problema de búsqueda definiendo $S_\Pi(I) = \{\text{si}\}$, si $I \in Y_\Pi$, y $S_\Pi(I) = \emptyset$, si $I \notin Y_\Pi$. El problema de optimización de operador mínimo busca entre todas las estructuras de un cierto tipo aquella de menor coste, mientras que el problema de decisión asociado incluye una cota numérica B como parámetro, y pregunta si existe una estructura del tipo requerido de coste no mayor que B .

Una vez establecidos los problemas de decisión como un tipo especial de problemas de búsqueda, pueden considerarse reducciones polinomiales entre éstos: Un problema de búsqueda Π es NP-duro si existe algún problema NP-completo Π' el cual es polinomialmente reducible al problema de decisión asociado a Π . Por tanto, si un problema de búsqueda es NP-duro, no puede ser resuelto en tiempo polinomial a menos que $\text{P} = \text{NP}$.

Como consecuencia de todo lo anterior, el análisis de la complejidad de los problemas p -varianza planteados en este capítulo se basa en establecer el problema de decisión asociado, para después seleccionar un problema conocido como NP-completo y verificar que ambos son NP-equivalentes, esto es, el problema NP-completo es polinomialmente reducible al problema dado y viceversa. Por tanto se podrá resolver el problema de la p -varianza mediante un algoritmo en tiempo polinomial si y sólo si $\text{P} = \text{NP}$.

Definición 4.1.2 Dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto $V' \subset V$ se dice dominante si para todo $v \in V \setminus V'$, existe $v' \in V'$ tal que el eje $[v, v'] \in E$.

El problema del conjunto dominante se plantea como sigue: Dado un entero positivo $K \leq |V|$, averiguar si existe un conjunto dominante $V' \subseteq V$, de cardinal $|V'| \leq K$. Garey y Johnson [12] demostraron que este problema de decisión es NP-completo incluso si $G = (V, E)$ es un grafo planar tal que el grado máximo de los vértices es 3.

Teorema 4.1.3 *El problema de encontrar un conjunto de vértices p -varianza es NP-duro, incluso cuando la red es un grafo planar tal que todos los vértices tienen igual peso, todos los ejes la misma longitud, y el máximo grado de cada vértice es 3.*

Demostración: Sin pérdida de generalidad se considerará que la longitud común de todos los ejes es 1. Considérese el siguiente problema de decisión:

“Dado un entero p ($1 < p < n$), y un valor real positivo B , ¿existe un subconjunto V_p^* de p vértices de V tal que $z_s(V_p^*) \leq B$?”

A continuación se demostrará que, para un determinado valor de B , tal subconjunto V_p^* existe si y sólo si V_p^* es un conjunto dominante de cardinal p .

En primer lugar se probará que $\forall V_p \subset V$, tal que $|V_p| = p$, entonces $z_s(V_p) \geq \frac{p}{n} \left(\frac{n-p}{n} \right)$.

Sea $V_p \subset V$ tal que $|V_p| = p$. Puesto que todos los vértices son indistinguibles en cuanto a la demanda producida en ellos, la situación más igualitaria se producirá cuando los p servicios atiendan a los $n - p$ vértices de igual manera, esto es: $\forall v_i \in V \setminus V_p, d(v_i, V_p) = d$, lo cual sólo es posible si $d = 1$, ya que todos los ejes son unitarios. Como $w_i = 1/n, \forall v_i \in V$, se tiene

$$z_m(V_p) = \frac{1}{n} \sum_{v_i \in V} d(v_i, V_p) = \frac{1}{n} \sum_{v_i \in V \setminus V_p} d = \frac{(n-p)}{n}$$

y la función p -varianza en V_p es

$$\begin{aligned} z_s(V_p) &= \sum_{v_i \in V} \frac{1}{n} [d(v_i, V_p) - z_m(V_p)]^2 = \frac{1}{n} \sum_{v_i \in V_p} [z_m(V_p)]^2 \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{v_i \in V \setminus V_p} [1 - z_m(V_p)]^2 = \frac{p}{n} z_m(V_p)^2 + \frac{n-p}{n} (1 - z_m(V_p))^2 \end{aligned}$$

sustituyendo $z_m(V_p)$ por su valor y operando resulta

$$z_s(V_p) = \frac{p}{n} \left(\frac{n-p}{n} \right)$$

Cualquier otra distribución de las distancias que aumente la distancia de algún vértice respecto de la distancia común de los demás aumenta el valor de la varianza. En efecto, sea V'_p el conjunto de p vértices obtenido desplazando un vértice de V_p , sea el v_k , a una posición adyacente. Por la especial configuración de la red (3-grafo), puede suceder que para los $n - p$ vértices de demanda restantes se verifique:

- (i) sólo un vértice aumente su distancia respecto de V_p en 1 unidad, permaneciendo los $n - p - 1$ restantes a la misma distancia que antes (Figura 4.1(a)), o bien
- (ii) 2 vértices aumenten su distancia respecto de V_p , manteniéndose invariable la distancia de los $n - p - 2$ restantes (Figura 4.1(b)).



Figura 4.1

En el caso (i), para los $n - p - 1$ vértices que mantienen su distancia, es $d(v_i, V_p) = d(v_i, V'_p) = 1$, y para el restante, es $d(v_k, V'_p) = d(v_k, V_p) + 1 = 2$, por tanto $z_m(V'_p) = z_m(V_p) + 1/n$. Entonces

$$\begin{aligned}
 z_s(V'_p) &= \sum_{v_i \in V} 1/n (d(v_i, V'_p) - z_m(V'_p))^2 = \frac{p}{n} (z_m(V_p) + \frac{1}{n})^2 \\
 &+ \frac{n-p-1}{n} (1 - z_m(V_p) - \frac{1}{n})^2 + \frac{1}{n} (1 - z_m(V_p) + 1 - \frac{1}{n})^2 \\
 &= \frac{p}{n} z_m(V_p)^2 + \frac{p}{n} (\frac{1}{n^2} + \frac{2z_m(V_p)}{n}) + \frac{n-p-1}{n} (1 - z_m(V_p))^2 \\
 &+ \frac{n-p-1}{n} (\frac{1}{n^2} - \frac{2(1-z_m(V_p))}{n}) + \frac{1}{n} (1 - z_m(V_p))^2 \\
 &+ \frac{1}{n} ((1 - \frac{1}{n})^2 + 2(1 - z_m(V_p))(1 - \frac{1}{n}))
 \end{aligned}$$

agrupando términos y teniendo en cuenta la expresión de $z_s(V_p)$ se tiene

$$\begin{aligned}
 z_s(V'_p) &= z_s(V_p) + (\frac{1}{n^2} + \frac{2z_m(V_p)}{n}) (\frac{p}{n} + \frac{n-p-1}{n}) - \frac{2}{n} (\frac{n-p-1}{n}) \\
 &+ \frac{1}{n} (1 - \frac{1}{n}) (3 - \frac{1}{n} - 2z_m(V_p))
 \end{aligned}$$

desarrollando esta expresión y reduciendo términos opuestos resulta

$$z_s(V'_p) = z_s(V_p) - \frac{2}{n} (\frac{n-p-1}{n}) + \frac{3(n-1)}{n^2}$$

y finalmente

$$z_s(V'_p) = z_s(V_p) + \frac{n + 2p - 1}{n^2} > z_s(V_p)$$

ya que $n + 2p > 1$. En el caso (ii) la misma situación se repite para dos vértices, con lo que por un razonamiento similar resultaría $z_s(V'_p) > z_s(V_p)$. Para cualquier otra configuración de V'_p se puede repetir recursivamente el razonamiento, concluyéndose $z_s(V'_p) > z_s(V_p)$.

Entonces para todo conjunto de p vértices V_p se verifica $z_s(V_p) \geq \frac{p}{n} \left(\frac{n-p}{n} \right)$, por tanto si existe un conjunto $V_p^* \subset V$, $|V_p^*| = p$ tal que $z_s(V_p^*) = \frac{p}{n} \left(\frac{n-p}{n} \right)$, V_p^* será un conjunto de vértices p -varianza de N . Pero del razonamiento anterior se sigue que la igualdad $z_s(V_p^*) = \frac{p}{n} \left(\frac{n-p}{n} \right)$ se cumple si y sólo si $d(v, V_p^*) = 1$, $\forall v \in V \setminus V_p^*$, o equivalentemente si y sólo si V_p^* es un conjunto dominante de cardinal p en N .

Consecuentemente, seleccionando $B = \frac{p}{n} \left(\frac{n-p}{n} \right)$, el problema de encontrar un conjunto dominante de cardinal p en N es equivalente al problema de decisión planteado al principio. Por tanto éste problema es NP-completo, lo que implica que el problema de optimización del conjunto de vértices p -varianza es NP-duro. \square

Teorema 4.1.4 *El problema de la p -varianza es NP-duro, incluso cuando la red es un grafo planar tal que todos los vértices tienen igual peso, todos los ejes la misma longitud, y el máximo grado de cada vértice es 3.*

Demostración: Nuevamente se supondrá que la longitud común de todos los ejes es 1. Sea $X_p \in N^p$. Como todos los vértices son indistinguibles, la situación más igualitaria se producirá cuando cada punto de demanda equidiste del servicio más próximo, esto es: $\forall v_i \in V$, $v_i \notin X_p$, $d(v_i, X_p) = d$. Excluyendo el caso trivial $p = n$, será $d > 0$. Sea $S_{(1/2)} \subset N$ el conjunto de puntos medios de las aristas, esto es

$$S_{(1/2)} = \{\tilde{x}_{ij} \in e_{ij} = [v_i, v_j] \in E : d(\tilde{x}_{ij}, v_i) = d(\tilde{x}_{ij}, v_j) = 1/2\}$$

Como la demanda equidista de los servicios se tiene: $X_p \subset S_{(1/2)} \cup V$. Por tanto la distancia común d puede ser $d = 1$ o $d = 1/2$. Pero $d = 1$ implica que $X_p \subset V$, y según el teorema anterior si existe un conjunto con esta configuración es un conjunto de vértices p -varianza, cuyo correspondiente problema de optimización

es NP-duro. Luego se supondrá $d = 1/2$, lo que implica $X_p \cap S_{(1/2)} \neq \emptyset$. Sea $V_{(1/2)} = \{v_i \in V : v_i \notin X_p\}$. Claramente, $d(v_i, X_p) = 1/2, \forall v_i \in V_{(1/2)}$, con lo que

$$z_m(X_p) = \frac{1}{n} \sum_{v_i \in V} d(v_i, X_p) = \frac{1}{n} \sum_{v_i \in V_{(1/2)}} d(v_i, X_p) = \frac{|V_{(1/2)}|}{2n}$$

y el valor de la p -varianza en X_p es

$$z_s(X_p) = \frac{1}{n} \sum_{v_i \in V_{(1/2)}} [d(v_i, X_p) - z_m(X_p)]^2 + \frac{1}{n} \sum_{v_i \in V \setminus V_{(1/2)}} [d(v_i, X_p) - z_m(X_p)]^2$$

operando y teniendo en cuenta que si $v \in V \setminus V_{(1/2)}$ es $d(v, X_p) = 0$, resulta

$$z_s(X_p) = \frac{|V_{(1/2)}|}{4n} \left(1 - \frac{|V_{(1/2)}|}{n}\right)$$

Esta expresión alcanza el mínimo valor cuando $|V_{(1/2)}| = n$, o equivalentemente, $V_{(1/2)} = V$, y $X_p \subset S_{(1/2)}$. Luego si existe $X_p^* \subset S_{(1/2)}$, con $|X_p^*| = p$, tal que $\forall v \in V$, es $d(v, X_p^*) = 1/2$, dicho conjunto es un conjunto p -varianza de N y además, $z_s(X_p^*) = 0$.

Sea el conjunto de pseudovértices $\tilde{V} = S_{(1/2)} \cup V^{(1)}$, donde $V^{(1)} = \{v \in V : gr(v) = 1\}$ es el conjunto de vértices punta de V , y sea el conjunto de pseudoaristas $\tilde{E} = E_{(1/2)} \cup E^{(1)}$, donde $E^{(1)} = \{[v_i, \tilde{x}_{ij}] : v_i \in V^{(1)}, v_j \notin V^{(1)}, \text{ y } [v_i, v_j] \in E\}$ y $E_{(1/2)}$ es el conjunto de aristas enlazando puntos medios de aristas adyacentes de E , esto es

$$E_{(1/2)} = \{[\tilde{x}_{ij}, \tilde{x}_{jk}] : \tilde{x}_{ij}, \tilde{x}_{jk} \in S_{(1/2)}, \text{ y } [v_i, v_j], [v_j, v_k] \in E \text{ son adyacentes}\}$$

Claramente la longitud de todos los aristas de $E_{(1/2)}$ es 1. Considerese la red $\tilde{N} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ de conjunto de vértices \tilde{V} y de aristas \tilde{E} , tal que todos los vértices de \tilde{V} tienen igual peso $1/|\tilde{V}|$, y cuyas aristas tienen longitud 1, lo cual se logra asignando dicha longitud a los aristas de $E^{(1)}$. En las figuras 4.2 (a) y (b) se muestran dos posibles redes \tilde{N} obtenidas a partir de sus respectivas redes iniciales.

Entonces existe un conjunto p -varianza $X_p^* \subset S_{(1/2)}$ en la red inicial N tal que $z_s(X_p^*) = 0$ si y sólo si existe un conjunto de p vértices $\tilde{V}_p^* \subset \tilde{V} \setminus V^{(1)}$ que es un conjunto dominante en la red \tilde{N} . Esta equivalencia implica que el problema de decisión asociado al problema planteado en el enunciado es NP-completo, y por tanto el problema de la p -varianza NP-duro.

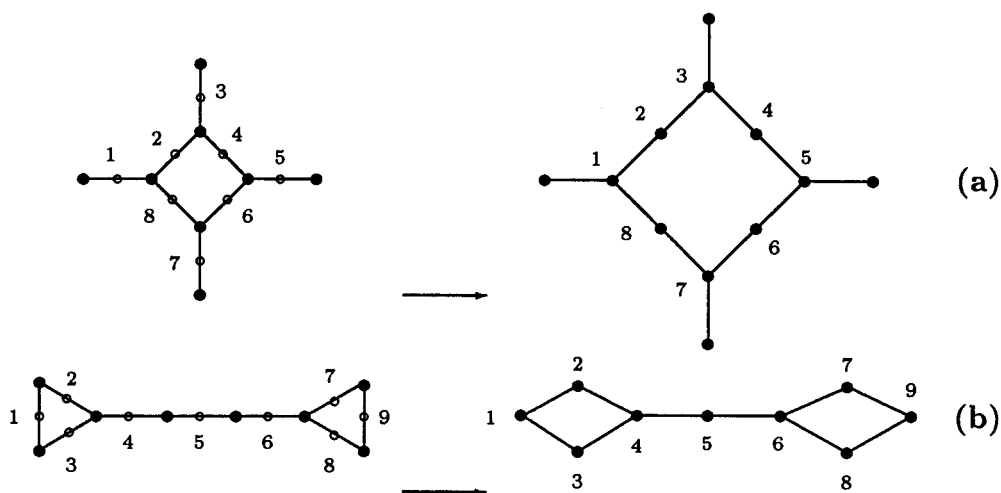


Figura 4.2

Observación: El requerimiento

$$\tilde{V}_p^* \subset \tilde{V} \setminus V^{(1)} = S_{(1/2)}$$

no resta generalidad al razonamiento, ya que si $V^{(1)} = \emptyset$, (Figura 4.2 (b)) claramente es $\tilde{V}_p^* \subset S_{(1/2)}$, y si $V^{(1)} \neq \emptyset$ (Figura 4.2 (a)) y un conjunto de vértices p -varianza \tilde{V}_p^* tiene un vértice $\tilde{v} \in V^{(1)}$, o bien se puede suprimir (si el vértice adyacente pertenece a \tilde{V}_p^*) o bien se puede trasladar al vértice adyacente (que pertenece a $S_{(1/2)}$) sin que varíe el valor de la función objetivo.

□

4.2 Problemas p -varianza en redes árbol

A continuación se estudia el problema de la p -varianza sobre una red árbol $T(V, E)$, analizando el comportamiento de la función p -varianza, y desarrollando un procedimiento exacto de resolución.

El caso particular de $p = 2$ ha sido resuelto de forma exacta por López de los Mozos y Mesa [37] mediante un algoritmo de complejidad $O(n^4)$ utilizando un procedimiento de asignación-localización. Este procedimiento se extenderá a continuación a un número p de servicios y opera como sigue: primeramente se

selecciona un subconjunto de p aristas de E en las cuales se localizarán los servicios. Cada uno de estos servicios atenderá a un conjunto de puntos de demanda en función de su cercanía al mismo, en cuyo caso se dirá que dicha demanda se ha asignado al correspondiente servicio. Este procedimiento induce una partición del conjunto de los puntos de demanda pudiéndose replantear el problema inicial como el de determinar la partición óptima del conjunto de vértices y calcular el p -servicio óptimo para atender a cada miembro de la partición.

Sea $T(V, E)$ una red árbol de sistema normalizado de pesos con un postorden definido en él con raíz v_r tal que se obtiene la siguiente secuencia de aristas al recorrer T en postorden

$$[u_1, v_{t(1)}], [u_2, v_{t(2)}], \dots, [u_{n-1}, v_r]$$

Para $i = 1, \dots, n - 1$, sea $l(e_i)$ la longitud de $e_i = [u_i, v_{t(i)}]$.

Considérese un subconjunto arbitrario de p aristas que por simplicidad se denotará por:

$$e_1 = [u_1, v_{t(1)}], \dots, e_p = [u_p, v_{t(p)}]$$

Sea $\mathcal{E}^p \subset \mathbb{R}^p$ definido

$$\mathcal{E}^p = \prod_{i=1}^p [0, l(e_i)]$$

de forma que si $X_p \in N^p$ es tal que $x_i \in e_i, \forall i = 1, \dots, p$, entonces $X_p = (x_1, \dots, x_p) \in \mathcal{E}^p$. En esta situación, el problema de la p -varianza restringido al p -conjunto $\{e_1, \dots, e_p\}$ se expresa:

$$PR(e_1, \dots, e_p) \equiv \min_{X_p \in \mathcal{E}^p} z_s(X_p)$$

4.2.1 Conjuntos de Asignación

Definición 4.2.1 Dado un punto $X_p \in \mathcal{E}^p$, una asignación $\mathcal{A}(V)$ en T es una partición del conjunto V en p conjuntos $\{V_1^a, \dots, V_p^a\}$ disjuntos y no vacíos tal que

$$\forall j \in J = \{1, \dots, p\}, \quad V_j^a = \{v_i \in V / d(v_i, x_j) \leq d(v_i, x_k), k \in J, k \neq j\}$$

Cada uno de tales conjuntos V_j^a se denomina conjunto de asignación de x_j y constituye el conjunto de vértices de V que son atendidos por el servicio x_j . Igualmente si $v_i \in V_j^a$ se dirá que v_i está asignado al servicio x_j .

La definición de asignación excluye particiones de V en donde algún conjunto $V_i^a = \emptyset$, ya que en este caso la demanda estaría atendida por $p-1$ servicios, con lo que siempre cabe ubicar un nuevo servicio en algún vértice de forma que se disminuya el valor de la p -varianza y todos los conjuntos de asignación sean no vacíos. Por otra parte si en la localización óptima correspondiente a una asignación dos (o más) servicios equidistan de un vértice, éste será atendido por el servicio que el criterio establezca.

Proposición 4.2.2 Sea $v \in V$ tal que, para algún $k \in J = \{1, \dots, p\}$ es

$$\max\{d(v, u_k), d(v, v_{t(k)})\} \leq \min\{d(v, u_j), d(v, v_{t(j)})\}, \quad \forall j \in J, j \neq k$$

Entonces $v \in V_k^a$.

Demostración: Como $\forall k \in J, x_k \in e_k = [u_k, v_{t(k)}]$, se sigue que $\forall j \neq k$:

$$d(v, x_k) \leq \max\{d(v, u_k), d(v, v_{t(k)})\} \leq \min\{d(v, u_j), d(v, v_{t(j)})\} \leq d(v, x_j)$$

y de la definición anterior, $v \in V_k^a$. □

Como consecuencia, los vértices que cumplan esta proposición reciben asignación directa, la cual depende sólo del subconjunto de p aristas elegido, y no de la localización de los servicios sobre sus respectivos aristas.

Sea $\hat{V} \subset V$ el conjunto de vértices de V que no verifican la proposición 4.2.2. Dados $j, k \in J$, sean u'_j, u'_k los vértices de las aristas e_j, e_k más cercanos entre sí, y v'_j, v'_k los más lejanos. El conjunto de aristas vecinas de e_j : $\{e_k\}_{k \in N(e_j)}$ se define mediante el conjunto de subíndices $N(e_j) = \{k \in J / \forall l \in J, e_l \not\subset P(u'_j, u'_k)\}$, (Figura 4.3).

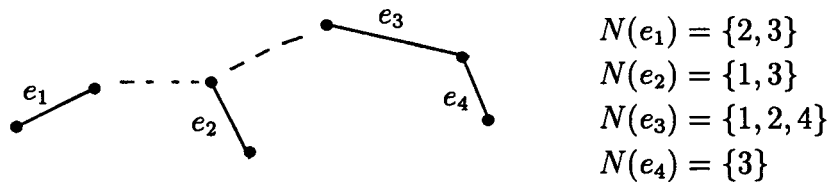


Figura 4.3

Obviamente, la relación de vecindad es recíproca, esto es:

$$k \in N(e_j) \iff j \in N(e_k)$$

Para cada $j \in J$ las aristas vecinas de $e_j = [u_j, v_{t(j)}]$ se pueden dividir entre aquellas que enlazan con e_j mediante el vértice u_j , sea $I_{j_u} \subseteq N(e_j)$ el correspondiente conjunto de subíndices, o mediante el vértice $v_{t(j)}$, de conjunto de subíndices $I_{j_v} \subseteq N(e_j)$. Claramente, $I_{j_u} \cap I_{j_v} = \emptyset$. Además si u'_j, u'_h son los vértices más cercanos entre sí de las aristas e_j, e_h entonces $h \in I_{j_{u'}}$, y $j \in I_{h_{u'}}$, resultando el conjunto común de subíndices $I'_u = I_{j_{u'}} \cup \{j\} = I_{h_{u'}} \cup \{h\}$.

Dado $k \in N(e_j)$, sea $P_{jk} = P(u'_j, u'_k)$ el camino enlazando los vértices más próximos de las aristas vecinas e_k, e_j . Entonces, para cada $j \in J$, el conjunto

$$\{P_{jk}, k \in N(e_j)\}$$

contiene a todos los caminos que enlazan los vértices extremos de e_j con los vértices más próximos de todas sus aristas vecinas.

El siguiente resultado establece que, en caso de que $\hat{V} \neq \emptyset$, bastará asignar sólo aquellos vértices de \hat{V} pertenecientes a caminos $\{P_{jk}, k \in N(e_j)\}_{j \in J}$ enlazando aristas vecinas. Por tratarse de una red árbol, los vértices de dichos caminos se caracterizan por la siguiente relación:

$$\forall v \in V, v \in P_{jk} \iff d(u'_j, u'_k) = d(u'_j, v) + d(v, u'_k)$$

Lema 4.2.3 *Sea $\hat{V} \neq \emptyset$, y sea $v \in \hat{V}$ verificando $v \notin \bigcup_{k \in N(e_j)} P_{jk}, \forall j \in J$, tal que v_c es el vértice perteneciente a algún camino de la familia $\{P_{jk}, k \in N(e_j)\}_{j \in J}$ más cercano a v . Entonces si en una asignación $\mathcal{A}(V)$ es $v_c \in V_k^a$, para algún $k \in J$, también $v \in V_k^a$.*

Demostración: Sea $j \in J, h \in N(e_j)$, tal que $v_c \in P_{jh}$, y supóngase, sin pérdida de generalidad, que $h \in I_{j_{u'}}$. Entonces $v_c \in \bigcup_{h \in I_{j_{u'}}} P_{jh}$. Sea $\mathcal{A}(V)$ una asignación de T en la cual $v_c \in V_k^a$. Entonces debe ser $k \in I'_u$ (Figura 4.4), ya que de ser $v_c \in V_s^a$, con $s \notin I'_u$ entonces existe algún $q \in I'_u$ tal que la arista e_s enlaza mediante el vértice v'_q con la arista e_q , verificándose

$$d(v_c, x_s) = d(v_c, x_q) + d(x_q, x_s) > d(v_c, x_q)$$

ya que $d(x_q, x_s) > 0$, y este resultado contradice que $v_c \in A_s^a$.

Entonces $k \in I'_u$, y puesto que $v_c \in V_k^a$, $d(v_c, x_k) \leq d(v_c, x_h)$, $\forall h \in J$, $h \neq k$. Por el razonamiento anterior, para concluir que $v \in V_k^a$ bastará demostrar que $d(v, x_k) \leq d(v, x_h)$, $\forall h \in I'_u$, $h \neq k$. Pero puesto que v enlaza mediante el vértice v_c con los caminos P_{jk} , $k \in I_{j_u}$, se verifica $d(v, x_h) = d(v, v_c) + d(v_c, x_h)$, de donde

$$d(v, x_k) = d(v, v_c) + d(v_c, x_k) \leq d(v, v_c) + d(v_c, x_h) = d(v, x_h)$$

$\forall h \in I'_u$, $h \neq k$, lo que finaliza la demostración. \square

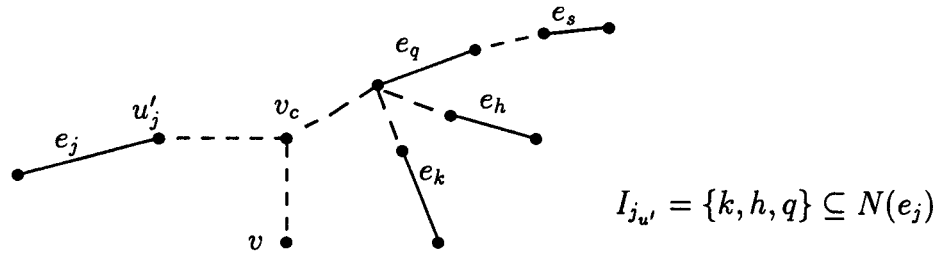


Figura 4.4

Para cada $j \in J$, $k \in N(e_j)$, se define el conjunto

$$\widehat{V}_{jk} = \widehat{V} \cap P_{jk}$$

La definición de los caminos P_{jk} implica que $\widehat{V}_{jk} = \widehat{V}_{kj}$ (pudiendo suceder que para algún $j \in J$, $k \in N(e_j)$, sea $\widehat{V}_{jk} = \emptyset$). Para considerar sólo uno de los dos conjuntos simétricos \widehat{V}_{jk} , \widehat{V}_{kj} bastará seleccionar los conjuntos

$$\widehat{V}_{jk}, k \in N(e_j), k > j, \text{ para } j = 1, \dots, p-1$$

Definición 4.2.4 Si $\widehat{V} \neq \emptyset$, se define el conjunto $\widehat{V}_J \subseteq \widehat{V}$ como sigue

$$\widehat{V}_J = \bigcup_{\substack{j \in J \\ k \in N(e_j)}} \widehat{V}_{jk} = \bigcup_{j=1}^{p-1} \left(\bigcup_{\substack{k \in N(e_j) \\ k > j}} \widehat{V}_{jk} \right)$$

Según el lema 4.2.3, para cada $v \in \widehat{V} \setminus \widehat{V}_J$, la asignación que recibe v es la misma que la del vértice de \widehat{V}_J a cuya rama pertenezca. Este resultado permitirá por tanto definir asignaciones en V a partir de las asignaciones que reciban los vértices de \widehat{V}_J . Otra consecuencia del lema es que $\widehat{V}_J = \emptyset$ implica $\widehat{V} = \emptyset$.

Lema 4.2.5 Sea una asignación $\mathcal{A}(V)$ en la cual para un vértice $v \in \widehat{V}_J$ se verifica que $v \in V_j^a$, con $j \in J$. Entonces si u'_j es el vértice de la arista e_j más próximo a v se verifica $\forall v_c \in P(u'_j, v) \cap \widehat{V}_J$, $v_c \in V_j^a$

Demostración: De las hipótesis del lema se deduce que v estará en algún camino enlazando e_j con alguna arista vecina de subíndice en $I_{j_{u'}}$. Sea $I \subseteq I_{j_{u'}}$ el conjunto maximal de subíndices tal que $\forall h \in I$, es $v \in \widehat{V}_{jh}$ (Figura 4.5).

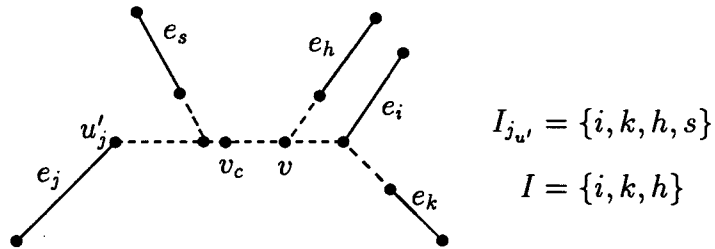


Figura 4.5

Sea $v_c \in P(u'_j, v) \cap \widehat{V}_J$. Bastará demostrar que, $\forall k \in I_{j_{u'}}$, es $d(x_j, v_c) \leq d(x_k, v_c)$. Claramente, $d(x_j, v) = d(x_j, v_c) + d(v_c, v) > d(x_j, v_c)$, ya que $v_c \in P(u'_j, v)$. Y como $v \in V_j^a$, se tiene $d(x_j, v) \leq d(x_k, v)$, $\forall k \in J$.

Sea $k \in I_{j_{u'}}$. Si $k \in I$ puesto que v pertenece al camino $P(u'_j, u'_k)$ que enlaza los vértices más cercanos de las aristas e_j, e_k se tiene: $d(x_k, v_c) = d(x_k, v) + d(v, v_c) > d(x_k, v)$ de donde

$$d(x_j, v_c) < d(x_j, v) \leq d(x_k, v) < d(x_k, v_c).$$

Sea $s \in I_{j_{u'}} \setminus I$ tal que $v \notin P(u'_j, u'_s)$. Si $v_c \in P(u'_s, v)$ se verifica $d(x_s, v) = d(x_s, v_c) + d(v_c, v)$. Pero como también $d(x_j, v) = d(x_j, v_c) + d(v_c, v)$ se sigue $d(x_j, v_c) \leq d(x_s, v_c)$, ya que $d(x_j, v) \leq d(x_s, v)$. Si por el contrario $v_c \notin P(u'_s, v)$, sea v'' el vértice del camino $P(u'_j, v)$ más cercano a e_s . Como consecuencia, $v'' \in P(v_c, v)$ es un vértice de $P(u'_s, v)$, y por el razonamiento anterior, $d(x_j, v'') \leq d(x_s, v'')$. Como u'_j enlaza con v'' mediante el vértice v_c se tiene $d(x_j, v'') = d(x_j, v_c) + d(v_c, v'')$, de donde

$$d(x_s, v_c) = d(x_s, v'') + d(v'', v_c) \geq d(x_j, v'') + d(v'', v_c) > d(x_j, v_c)$$

lo que implica $v_c \in V_j^a$. □

Corolario 4.2.6 *Sea $j \in J$, $k \in N(e_j)$ tal que $\widehat{V}_{jk} \neq \emptyset$. Entonces los vértices de \widehat{V}_{jk} son consecutivos.*

4.2.2 Número máximo de asignaciones

De los anteriores resultados se sigue que para cada p conjunto $\{e_1, \dots, e_p\}$ toda asignación $\mathcal{A}(V)$ de T se obtendrá a partir de particiones de los vértices de \widehat{V}_J que cumplan el lema 4.2.5, denominadas asignaciones de \widehat{V}_J . Entonces el número $N(e_1, \dots, e_p)$ de asignaciones de T correspondientes al p conjunto de aristas es el mismo que el número de asignaciones de \widehat{V}_J .

Proposición 4.2.7 *Sean $e_j, e_k \in \{e_1, \dots, e_p\}$ dos aristas vecinas entre sí tal que $\widehat{V}_{jk} \neq \emptyset$. Entonces el número de asignaciones de los vértices de \widehat{V}_{jk} a los servicios x_j, x_k es $|\widehat{V}_{jk}| + 1$.*

Demostración: Supóngase que $\widehat{V}_{jk} = \{v_1, \dots, v_s\}$ tal que los vértices están ordenados crecientemente respecto de la distancia a u'_j , esto es $d(u'_j, v_1) < d(u'_j, v_2) < \dots < d(u'_j, v_s)$. Sea v_h un vértice cualquiera de \widehat{V}_{jk} . Si $v_h \in V_j^a$, por el lema 4.2.5 también $v_i \in V_j^a$, $\forall i = 1, \dots, h - 1$. Entonces para cada $h = 1, \dots, s$ las asignaciones de los vértices de \widehat{V}_{jk} a los conjuntos V_j^a, V_k^a se obtienen asignando el vértice v_h a V_j^a , quedando los restantes vértices como sigue: $v_i \in V_j^a$, $\forall i = 1, \dots, h - 1$ y $v_i \in V_k^a$, $\forall i = h + 1, \dots, s$. Esto da lugar a $s = |\widehat{V}_{jk}|$ asignaciones, a las que se une la obtenida cuando todos los vértices de \widehat{V}_{jk} se asignan a V_k^a . En total $|\widehat{V}_{jk}| + 1$ asignaciones. \square

Teorema 4.2.8 *En el peor de los casos, $N(e_1, \dots, e_p) \leq (n - 1)^{p-1}$, para $p \geq 2$.*

Demostración: Primero se analizará el peor de los casos que se puede presentar para \widehat{V}_J en situaciones extremas de T , correspondientes a dos tipos de árboles cuya estructura sea: (a) radial, (b) en serie. El caso general se abordará en el apartado (c), considerándolo como una combinación de los anteriores.

(a) Sea una disposición radial de los vértices del árbol T , así como el peor de los casos para \widehat{V}_J , que ocurre cuando los únicos vértices que reciben asignación

directa según la proposición 4.2.2 son los p vértices punta, con lo que $\widehat{V}_J = \widehat{V}$, y $|\widehat{V}| = n - p$. En este caso, $\forall j \in J$, $I_{j_u'} = N(e_j)$, luego $I'_u = N(e_j) \cup \{j\} = J$, de donde para cada arista e_j el vértice u'_j es el más cercano a todos los demás, (Figura 4.6).

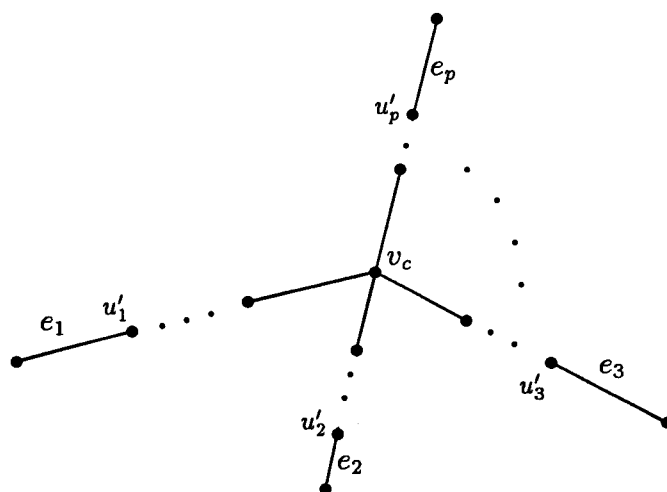


Figura 4.6

Para $i \in J$, sea $P(v_c, u'_i)$ el camino enlazando los vértices v_c y u'_i , y sea $N_i = |V(P(v_c, u'_i))|$ el número de vértices de dicho camino, (incluidos v_c y u'_i). Por tanto

$$1 + \sum_{i=1}^p (N_i - 1) = |\widehat{V}_J| = n - p$$

de donde

$$\sum_{i=1}^p (N_i - 1) = |\widehat{V}_J| - 1 = n - p - 1 \quad (4.1)$$

Supóngase que v_c se asigna a un determinado servicio x_s . Por el lema 4.2.5 los $N_s - 1$ vértices restantes del camino $P(v_c, u'_s)$ también estarán asignados a x_s . Por la proposición anterior si en cada uno de los $p - 1$ caminos restantes $P(v_c, u'_i)$, con $i \neq s$ se excluye el vértice v_c , hay N_i asignaciones de los demás $N_i - 1$ vértices de dicho camino a los servicios x_i, x_s , y por tanto, $\prod_{i=1, i \neq s}^p N_i$ asignaciones para estos vértices. Extendiendo este razonamiento a $s = 1, \dots, p$, se obtiene:

$$N(e_1, \dots, e_p) = \sum_{s=1}^p \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^p N_i \right)$$

El máximo valor de esta expresión se produce cuando todos los factores toman igual valor, esto es: $N_i = N_j, \forall i, j \in J$. Sustituyendo en (4.1) resulta

$$p(N_i - 1) = n - p - 1 \implies N_i = \frac{n - 1}{p}$$

Y el número máximo de asignaciones será

$$N(e_1, \dots, e_p) \leq p \left(\frac{n - 1}{p} \right)^{p-1} \leq (n - 1)^{p-1}$$

puesto que $p \geq 2$, (la igualdad se alcanza para $p = 2$).

(b) Dada una disposición en serie de T , el peor de los casos se presenta cuando sólo reciben asignación directa según la proposición 4.2.2 los dos únicos vértices punta, y por tanto $|\hat{V}| = |\hat{V}_J| = n - 2$, (Figura 4.7).



Figura 4.7

Para $i = 1, \dots, p - 1$, sea P_i el camino que une los vértices más próximos entre sí de las aristas e_i, e_{i+1} , y $N_i = |V(P_i)|$ el número de vértices del mismo. Por tanto

$$\sum_{i=1}^{p-1} N_i = |\hat{V}_J| = n - 2$$

Para cada $i = 1, \dots, p - 1$ hay $N_i + 1$ asignaciones de los vértices de P_i a los servicios x_i, x_{i+1} , obteniéndose como número de asignaciones de los vértices de \hat{V}_J :

$$N(e_1, \dots, e_p) = \prod_{i=1}^{p-1} (N_i + 1)$$

El máximo valor de esta expresión se alcanza para $N_i = N_j, \forall i, j = 1, \dots, p - 1$, resultando

$$N_i = \frac{n - 2}{p - 1}, \quad i = 1, \dots, p - 1$$

Entonces

$$N(e_1, \dots, e_p) \leq \left(\frac{n - 2}{p - 1} + 1 \right)^{p-1} \leq (n - 1)^{p-1}$$

ya que $\frac{n-2}{p-1} \leq n-2$ puesto que $p \geq 2$, (la igualdad se alcanza para $p = 2$).

(c) En el caso general, T será un árbol cualquiera en el cual los p servicios se localizan respectivamente en las p aristas $\{e_1, \dots, e_p\}$. Considerando los subconjuntos de aristas que entre sí adopten disposición radial o en serie, este caso se reducirá a una combinación de los dos anteriores.

En efecto, supóngase (reordenando si es necesario) que las p_1 primeras aristas $\{e_1, \dots, e_{p_1}\}$ adoptan entre sí disposición radial, y que las p_2 aristas $\{e_{p_1}, \dots, e_p\}$ están en disposición serie. Obviamente $p_1 + p_2 = p + 1$. Si $p_1 = 1$, o $p_2 = 1$ resultan respectivamente los casos (b) o (a). Luego sea $p_i \geq 2$, $i = 1, 2$. Sea n_1, n_2 el número de vértices de los subárboles conteniendo a las aristas $\{e_1, \dots, e_{p_1}\}$, y $\{e_{p_1}, \dots, e_p\}$, y $\hat{V}_{J(p_1)}, \hat{V}_{J(p_2)}$ los respectivos conjuntos \hat{V}_J relativos a dichos subárboles. En ambos casos la peor situación sucede cuando los únicos vértices que reciben asignación directa son los vértices extremos de tales aristas, obteniéndose (Figura 4.8) : $n_1 + n_2 = n + 2$, $|\hat{V}_{J(p_1)}| = n_1 - p_1$, y $|\hat{V}_{J(p_2)}| = n_2 - 2$

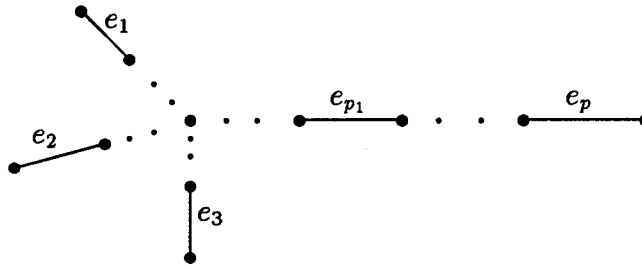


Figura 4.8

Por (a) y (b) el número de asignaciones de $\hat{V}_{J(p_1)}$ y de $\hat{V}_{J(p_2)}$ verifica respectivamente

$$N(e_1, \dots, e_{p_1}) \leq p_1 \left(\frac{n_1 - 1}{p_1} \right)^{p_1 - 1}$$

$$N(e_{p_1}, \dots, e_p) \leq \left(\frac{n_2 - 2}{p_2 - 1} + 1 \right)^{p_2 - 1}$$

Por tanto:

$$N(e_1, \dots, e_p) = N(e_1, \dots, e_{p_1}) N(e_{p_1}, \dots, e_p) \leq p_1 \left(\frac{n_1 - 1}{p_1} \right)^{p_1 - 1} \left(\frac{n_2 - 2}{p_2 - 1} + 1 \right)^{p_2 - 1}$$

Por ser $p_i \geq 2$, $i = 1, 2$, es $p_1^{2-p_1} \leq 1$, y también $\frac{n_2 - 2}{p_2 - 1} \leq n_2 - 2$, resultando

$$N(e_1, \dots, e_p) \leq (n_1 - 1)^{p_1 - 1} (n_2 - 1)^{p_2 - 1} \leq (n - 1)^{p_1 + p_2 - 2} = (n - 1)^{p - 1}$$

puesto que $p_1 + p_2 = p + 1$ y $n_i \leq n$, $i = 1, 2$. □

4.2.3 Regiones factibles

Cada una de las asignaciones $\mathcal{A}(V)$ consideradas en el problema restringido $PR(e_1, \dots, e_p)$ tiene un conjunto de restricciones asociado $\Omega(\mathcal{A}(V))$, definido

$$\Omega(\mathcal{A}(V)) = \{X_p \in \mathbb{R}^p / d(v, x_j) \leq d(v, x_k), \forall v \in V_j^a \cap \widehat{V}_J, \forall j, k \in J, k \neq j\}$$

de forma que el problema se puede formular como

$$PR(e_1, \dots, e_p; \mathcal{A}) \equiv \begin{cases} \min_{X_p \in \mathbb{R}^p} z_s(X_p) \\ \text{s. a. } X_p \in \Omega(\mathcal{A}(V)) \end{cases}$$

$\Omega(\mathcal{A}(V))$ involucra $(p - 1)|\widehat{V}_J|$ restricciones lineales del tipo: $d(v, x_j) \leq d(v, x_k)$. Si $|\widehat{V}_J| \geq 2$ este número puede reducirse sin más que seleccionar en cada conjunto no vacío \widehat{V}_{jk} los vértices principales $v_{jk}(x_j)$, $v_{kj}(x_k)$.

Definición 4.2.9 Dada una asignación $\mathcal{A}(V)$, sea $j \in J$, $k \in N(e_j)$ tal que $\widehat{V}_{jk} \neq \emptyset$. Un vértice $v_{jk}(x_j) \in \widehat{V}_{jk} \cap V_j^a$ se denomina vértice principal para x_j si

$$d(v_{jk}(x_j), x_j) = \max \{d(v, x_j), v \in \widehat{V}_{jk} \cup V_j^a\}$$

Según la definición, el vértice principal $v_{jk}(x_j)$ asociado a x_j es, del conjunto de vértices de \widehat{V}_{jk} asignados al servicio x_j , el más alejado del mismo. Por otra parte en todo conjunto no vacío \widehat{V}_{jk} existe un vértice principal como mínimo y dos como máximo: $v_{jk}(x_j)$, $v_{kj}(x_k)$, ambos vértices consecutivos pertenecientes a los conjuntos V_j^a , V_k^a .

Lema 4.2.10 Para cada asignación factible $\mathcal{A}(V)$ de T , el conjunto de restricciones $\Omega(\mathcal{A}(V))$ es equivalente al conjunto

$$\Omega'(\mathcal{A}(V)) = \{X_p \in \mathbb{R}^p / d(v_{jk}(x_j), x_j) \leq d(v_{jk}(x_j), x_s), \forall j, s \in J, k \in N(e_j)\}$$

el cual contiene un máximo de $2(p - 1)$ restricciones lineales, cada una de las cuales es de la forma $x_j \pm x_s \leq c_{js}$, $c_{js} \in \mathbb{R}$.

Demostración: Es consecuencia de la definición y del lema 4.2.5 ya que, para cada $k \in N(e_j)$, el conjunto de restricciones $\{d(x_j, v) \leq d(x_s, v), \forall v \in \widehat{V}_{jk} \cap V_j^a, s \in J\}$ se puede sustituir por el conjunto $\{d(v_{jk}(x_j), x_j) \leq d(v_{jk}(x_j), x_s), s \in I_{ju} \cup I_{jv}\}$, y por tanto por el conjunto $\{d(v_{jk}(x_j), x_j) \leq d(v_{jk}(x_j), x_s), s \in J\}$.

Para la segunda parte del lema, en el caso no trivial $\widehat{V}_J \neq \emptyset$ se considerarán las tres disposiciones de T analizadas en la demostración del teorema 4.2.8 : Radial, en Serie, y el caso general.

(a) El peor de los casos para la disposición radial implica $\widehat{V}_J = n - p$. En la asignación $\mathcal{A}(V)$ considerada el vértice v_c estará asignado a algún servicio x_s , con $s \in J$. Para cada uno de los $p - 1$ caminos restantes $P(v_c, u'_i)$, $i \neq s$ hay como máximo dos vértices principales $v_{si}(x_s), v_{is}(x_i)$, que dan lugar a dos restricciones como máximo : $d(x_s, v_{si}(x_s)) \leq d(x_i, v_{si}(x_s))$ y $d(x_i, v_{is}(x_i)) \leq d(x_s, v_{is}(x_i))$, lo que implica un máximo de $2(p - 1)$ restricciones para el espacio $\Omega'(\mathcal{A}(V))$.

(b) El peor de los casos para \widehat{V}_J cuando la disposición de T es en serie implica que en cada uno de los $p - 1$ caminos P_i , $i = 1, \dots, p - 1$ hay un máximo de dos vértices principales, concluyéndose asimismo con un máximo de $2(p - 1)$ restricciones para $\Omega'(\mathcal{A}(V))$.

(c) Cualquier otra disposición de T se puede reducir a una combinación de las anteriores. En efecto, en el caso descrito en el apartado (c) del teorema 4.2.8 el número de restricciones que aporta a $\Omega'(\mathcal{A}(V))$ el subárbol conteniendo a los p_1 primeras aristas es como máximo $2(p_1 - 1)$, y el que aporta el subárbol conteniendo a las p_2 aristas en serie es, como máximo, $2(p_2 - 1)$. Por tanto el número de restricciones de $\Omega'(\mathcal{A}(V))$ será, como máximo

$$2(p_1 - 1) + 2(p_2 - 1) = 2(p_1 + p_2 - 2) = 2(p - 1)$$

La última parte del lema se sigue de que para cada $j \in J, k \in N(e_j)$ la distancia $d(v_{jk}(x_j), x_j)$ es igual a $d(v_{jk}(x_j), u'_j) + l(e_j) - x_j$, si $v_{t(j)}$ es hijo de u'_j en el postorden, o bien $d(v_{jk}(x_j), u'_j) + x_j$, en caso contrario, y análogamente sucede para $d(v_{jk}(x_j), x_s)$, $s \in J, s \neq j$, lo que implica que cada restricción de $\Omega'(\mathcal{A}(V))$ es lineal y de la forma $x_j \pm x_k \leq c_{jk}$, con $c_{jk} \in \mathbb{R}$. \square

Por tanto, dada una asignación $\mathcal{A}(V)$ la región factible para el problema restringido $PR(e_1, \dots, e_p)$ se caracteriza como el poliedro convexo

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \mathcal{E}^p \cap \Omega'(\mathcal{A}(V))$$

el cual está determinado por un máximo de $2p + 2(p - 1)$ aristas, de las cuales $2p$ están definidas por las restricciones lineales de $X_p \in \mathcal{E}^p$ y las restantes por $\Omega'(\mathcal{A}(V))$. El problema restringido relativo a la asignación $\mathcal{A}(V)$ se puede formular como

$$PR(e_1, \dots, e_p; \mathcal{A}) \equiv \min \{z_s(X_p; \mathcal{A}) / X_p \in \mathcal{R}(\mathcal{A})\}$$

donde $z_s(X_p; \mathcal{A})$ es la función p -varianza relativa a dicha asignación. Claramente si $\hat{V} = \emptyset$, existe una única asignación $\mathcal{A}(V)$ de T de región factible $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \mathcal{E}^p$.

A continuación se muestra un ejemplo para el caso $p = 2$. Para el par de aristas $\{e_1, e_2\}$ del árbol T (figura 4.9 (a)) se obtiene $\hat{V} = \hat{V}_{12} = \{u_1, v, v'\}$ que da lugar a 4 asignaciones $\mathcal{A}_i(V)$ de T , las cuales se muestran en la siguiente tabla, junto con las restricciones de $\Omega'(\mathcal{A}_i(V))$ (última columna de la tabla):

$\mathcal{A}_1(V)$	$u_1 \in V_2^a$	$d(u_1, x_1) \geq d(u_1, x_2)$	$x_2 - x_1 \geq 1$
$\mathcal{A}_2(V)$	$u_1 \in V_1^a, v \in V_2^a$	$d(u_1, x_1) \leq d(u_1, x_2)$ $d(v, x_1) \geq d(v, x_2)$	$x_2 - x_1 \leq 1$ $x_2 - x_1 \geq -1$
$\mathcal{A}_3(V)$	$v \in V_1^a, v' \in V_2^a$	$d(v, x_1) \leq d(v, x_2)$ $d(v', x_1) \geq d(v', x_2)$	$x_2 - x_1 \leq -1$ $x_2 - x_1 \geq -3$
$\mathcal{A}_4(V)$	$v' \in V_1^a$	$d(v', x_1) \leq d(v', x_2)$	$x_2 - x_1 \leq -3$

Puesto que $\mathcal{E}^2 = [0, 5] \times [0, 3]$ resultan las regiones factibles de la figura 4.9 (b).

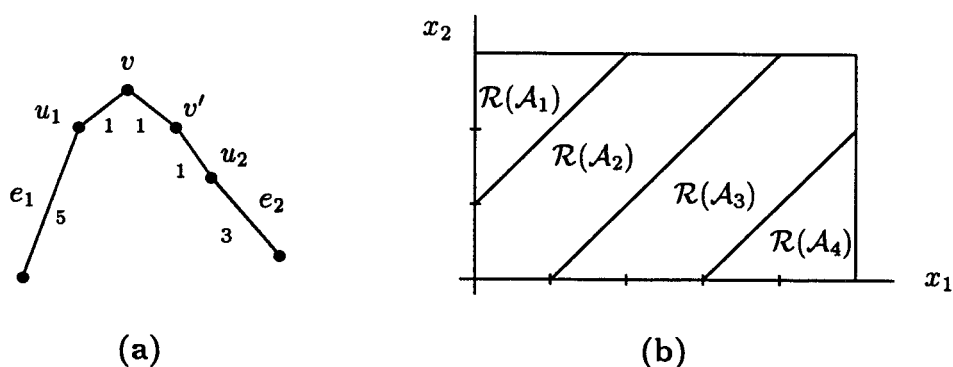


Figura 4.9

4.2.4 p -varianza relativa a una Asignación

Para cada asignación $\mathcal{A}(V)$ considerada en el problema restringido $PR(e_1, \dots, e_p)$ se obtendrá a continuación una expresión de la p -varianza en función de la localización de los servicios sobre sus respectivas aristas.

Definición 4.2.11 Dada una asignación $\mathcal{A}(V)$ en T , para cada vértice $v_i \in V$ se define la p -upla de pesos auxiliares (w_{i1}, \dots, w_{ip}) tal que

$$w_{ij} = \begin{cases} w_i, & \text{si } v_i \in V_j^a \\ 0, & \text{si } v_i \notin V_j^a \end{cases}$$

Por tanto si $v_i \in V_j^a$ la p -upla de pesos auxiliares asociada será: $(0, \dots, \overset{j}{w_i}, \dots, 0)$ ya que la única componente no nula es la j -ésima: $w_{ij} = w_i$, y $w_{ik} = 0, \forall k \neq j$.

Lema 4.2.12 Dada $\mathcal{A}(V)$ en T , se verifica:

$$(i) \forall v_i \in V, \sum_{j=1}^p w_{ij} = w_i$$

$$(ii) \text{ Si } v_i \in V_j^a, d(v_i, X_p) = d(v_i, x_j) \text{ y } w_i d(v_i, X_p) = w_{ij} d(v_i, x_j)$$

Dada una Asignación $\mathcal{A}(V)$ en T , sean $z_s(X_p; \mathcal{A})$ y $z_m(X_p; \mathcal{A})$ las funciones p -varianza y p -mediana relativas a dicha asignación. Del lema anterior se sigue:

$$\begin{aligned} z_m(X_p; \mathcal{A}) &= \sum_{v_i \in V} w_i d(v_i, X_p) = \sum_{v_i \in V} \sum_{j=1}^p w_{ij} d(v_i, X_p) \\ &= \sum_{v_i \in V} \sum_{j=1}^p w_{ij} d(v_i, x_j) = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{v_i \in V} w_{ij} d(v_i, x_j) \right) = \sum_{j=1}^p z_{m_j}(x_j) \end{aligned}$$

donde

$$z_{m_j}(x_j) = \sum_{v_i \in V} w_{ij} d(v_i, x_j), \quad j \in J$$

El peso total del árbol relativo a la componente j -ésima se define

$$w_j(V) = \sum_{v_i \in V} w_{ij}$$

de donde, por el lema 4.2.12 se sigue $w(V) = 1 = \sum_{j=1}^p w_j(V)$ Manteniendo la notación $V_{u_j} \subset V$ para los descendientes de u_j (incluyendo a u_j), y $\overline{V_{u_j}} = V \setminus V_{u_j}$, se tiene

$$w_j(V_{u_j}) = \sum_{v_i \in V_{u_j}} w_{ij}$$

que, según las relaciones anteriores, implica: $w_j(V) = w_j(V_{u_j}) + w_j(\overline{V_{u_j}})$. Sea g_j el peso relativo j -ésimo asociado al vértice u_j , definido: $g_j = w_j(V_{u_j}) - w_j(\overline{V_{u_j}})$.

De lo anterior resulta:

$$g_j = 2w_j(V_{u_j}) - w_j(V)$$

Entonces como $x_j \in e_j = [u_j, v_{i(j)}]$, $z_{m_j}(x_j)$ se puede expresar:

$$z_{m_j}(x_j) = \sum_{v_i \in V} w_{ij} d(v_i, x_j) = \sum_{v_i \in V} w_{ij} [d(v_i, u_j) + \delta_{ij} x_j]$$

donde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i \in V_{u_j} \\ -1, & \text{si } v_i \in \overline{V_{u_j}} \end{cases}$. Desarrollando esta expresión y utilizando las relaciones anteriores, resulta:

$$z_{m_j}(x_j) = z_{m_j}(u_j) + x_j g_j, \quad \forall j \in J$$

Análogamente, sea

$$z_{m_j}(u_j, V_{u_j}) = \sum_{v_i \in V_{u_j}} w_{ij} d(v_i, u_j)$$

Denotando por $z_{m_j}(u_j, \overline{V_{u_j}}) = z_{m_j}(u_j) - z_{m_j}(u_j, V_{u_j})$, se tiene

$$z_{m_j}(u_j, V_{u_j}) - z_{m_j}(u_j, \overline{V_{u_j}}) = 2z_{m_j}(u_j, V_{u_j}) - z_{m_j}(u_j)$$

De igual forma se define para cada $j \in J$

$$z_{m_j}^{(2)} = \sum_{v_i \in V} w_{ij} d(v_i, u_j)^2$$

Aplicando el lema 4.2.12 a la función p -varianza, resulta:

$$\begin{aligned} z_s(X_p; \mathcal{A}) &= \sum_{v_i \in V} w_i [d(v_i, X_p) - z_m(X_p; \mathcal{A})]^2 \\ &= \sum_{v_i \in V} \sum_{j=1}^p w_{ij} [d(v_i, x_j) - z_m(X_p; \mathcal{A})]^2 \\ &= \sum_{j=1}^p \sum_{v_i \in V} w_{ij} [d(v_i, x_j) - z_m(X_p; \mathcal{A})]^2 \\ &= \sum_{j=1}^p \left(\sum_{v_i \in V} w_{ij} [d(v_i, x_j) - z_m(X_p; \mathcal{A})]^2 \right) = \sum_{j=1}^p z_{s_j}(X_p) \end{aligned}$$

donde la componente j -ésima de la p -varianza es

$$z_{s_j}(X_p) = \sum_{v_i \in V} w_{ij} [d(v_i, x_j) - z_m(X_p; \mathcal{A})]^2$$

que con un razonamiento análogo al seguido para la componente j -ésima de la mediana, se puede expresar

$$z_{s_j}(X_p) = \sum_{v_i \in V_{u_j}} w_{ij} [d(v_i, u_j) + x_j - z_m(X_p; \mathcal{A})]^2 + \sum_{v_i \in \overline{V}_{u_j}} w_{ij} [d(v_i, u_j) - x_j - z_m(X_p; \mathcal{A})]^2$$

Desarrollando cada uno de estos dos cuadrados y utilizando las relaciones previas, resulta

$$\begin{aligned} z_{s_j}(X_p) &= z_{m_j}^{(2)}(u_j) + w_j(V)x_j^2 + 2x_j[2z_{m_j}(u_j, V_{u_j}) - z_{m_j}(u_j)] \\ &+ z_m(X_p; \mathcal{A})^2 w_j(V) - 2z_m(X_p; \mathcal{A})[z_{m_j}(u_j) + x_j g_j] \end{aligned}$$

Sumando en $j = 1, \dots, p$, se tiene

$$\begin{aligned} z_s(X_p; \mathcal{A}) &= \sum_{j=1}^p x_j^2 w_j(V) + 2 \sum_{j=1}^p x_j (2z_{m_j}(u_j, V_{u_j}) - z_{m_j}(u_j)) \\ &+ \sum_{j=1}^p z_{m_j}^{(2)}(u_j) - z_m(X_p; \mathcal{A})^2 \end{aligned}$$

El cuadrado de la p -mediana se puede expresar

$$\begin{aligned} z_m(X_p; \mathcal{A})^2 &= \left[\sum_{j=1}^p (z_{m_j}(u_j) + x_j g_j) \right]^2 = \left[\sum_{j=1}^p z_{m_j}(u_j) \right]^2 + \sum_{j=1}^p x_j^2 g_j^2 \\ &+ 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} g_i g_j x_i x_j + 2 \sum_{j=1}^p g_j x_j \left(\sum_{k=1}^p z_{m_k}(u_k) \right) \end{aligned}$$

Incorporando este desarrollo a $z_s(X_p; \mathcal{A})$ y agrupando términos resulta

$$\begin{aligned} z_s(X_p; \mathcal{A}) &= \sum_{j=1}^p (w_j(V) - g_j^2) x_j^2 \\ &+ 2 \sum_{j=1}^p \left[2z_{m_j}(u_j, V_{u_j}) - z_{m_j}(u_j) - g_j \left(\sum_{k=1}^p z_{m_k}(u_k) \right) \right] x_j \\ &- 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} g_i g_j x_i x_j + \sum_{j=1}^p z_{m_j}^{(2)}(u_j) - \left[\sum_{j=1}^p z_{m_j}(u_j) \right]^2 \end{aligned}$$

Para cada $j \in J$, sea:

$$A_j = w_j(V) - g_j^2$$

$$B_j = 2z_{m_j}(u_j, V_{u_j}) - z_{m_j}(u_j) - g_j \left(\sum_{k=1}^p z_{m_k}(u_k) \right)$$

$$C_{ij} = -g_i g_j$$

$$D = \sum_{j=1}^p z_{m_j}^{(2)}(u_j) - \left[\sum_{j=1}^p z_{m_j}(u_j) \right]^2$$

Con lo cual la función p -varianza se expresa

$$z_s(X_p; \mathcal{A}) = \sum_{j=1}^p A_j x_j^2 + 2 \sum_{j=1}^p B_j x_j + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} C_{ij} x_i x_j + D$$

donde los coeficientes A_j, B_j, C_{ij}, D son constantes sobre toda la región factible $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ correspondiente a la asignación considerada.

Teorema 4.2.13 *Para cada asignación $\mathcal{A}(V)$ de T , la función $z_s(X_p; \mathcal{A})$ es estrictamente convexa sobre $\mathcal{R}(\mathcal{A})$.*

Demostración: Cuando $X_p \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ la función $z_s(X_p; \mathcal{A})$ viene dada por la expresión cuadrática anterior. Por tanto la convexidad estricta de $z_s(X_p; \mathcal{A})$ quedará probada verificando que la matriz hessiana es definida positiva (Rockafellar [52])

Para $j \in J$, se tiene:

$$\frac{\partial z_s(X_p; \mathcal{A})}{\partial x_j} = 2A_j x_j + 2B_j + 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p C_{jk} x_k$$

Por tanto

$$\frac{\partial^2 z_s(X_p; \mathcal{A})}{\partial x_j^2} = 2A_j, \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 z_s(X_p; \mathcal{A})}{\partial x_j \partial x_k} = 2C_{jk}, \quad j \neq k$$

obteniéndose la siguiente expresión para el Hessiano :

$$H(z_s(X_p; \mathcal{A})) = \begin{vmatrix} 2A_1 & 2C_{12} & \dots & 2C_{1p} \\ 2C_{21} & 2A_2 & \dots & 2C_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2C_{p1} & 2C_{p2} & \dots & 2A_p \end{vmatrix}$$

Según las expresiones obtenidas para los coeficientes de $z_s(X_p; \mathcal{A})$ el determinante anterior es igual a

$$H(z_s(X_p; \mathcal{A})) = 2^p \Delta_p$$

con $\Delta_1 = w_1(V) - g_1^2$, y para $l = 2, \dots, p$

$$\Delta_l = \begin{vmatrix} w_1(V) - g_1^2 & -g_1g_2 & \dots & -g_1g_l \\ -g_2g_1 & w_2(V) - g_2^2 & \dots & -g_2g_l \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -g_lg_1 & -g_lg_2 & \dots & w_l(V) - g_l^2 \end{vmatrix}$$

Probar el teorema equivale a probar $\Delta_l > 0$, $\forall l = 1, \dots, p$.

Si para algún $j = 1, \dots, p$ es $g_j = 0$, todos los términos de la fila y columna j -ésima son 0 excepto el término de la diagonal, que es $w_j(V) > 0$, resultando que $\Delta_l = w_j(V)\Delta_{l-1}$, con lo que habría que probar $\Delta_{l-1} > 0$ (ya que no todos los $g_j = 0$). Por tanto se supondrá que $g_j \neq 0$, $\forall j = 1, \dots, p$. En este caso, sacando g_j factor común en cada columna j -ésima de Δ_l para $j = 1, \dots, l$, se obtendrá

$$\Delta_j = g_1 \dots g_l \begin{vmatrix} \frac{w_1(V) - g_1^2}{g_1} & -g_1 & \dots & -g_1 \\ -g_2 & \frac{w_2(V) - g_2^2}{g_2} & \dots & -g_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -g_l & -g_l & \dots & \frac{w_l(V) - g_l^2}{g_l} \end{vmatrix}$$

restando a las $l - 1$ columnas la última, y posteriormente sacando factor común $\frac{w_k(V)}{g_k}$ en cada columna, para $k = 1, \dots, l$, resulta

$$\Delta_l = w_1(V) \dots w_l(V) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -\frac{g_1^2}{w_1(V)} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -\frac{g_2^2}{w_2(V)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 1 - \frac{g_l^2}{w_l(V)} \end{vmatrix}$$

sumando a la última fila la suma de las $l - 1$ filas precedentes se obtiene un determinante triangular superior, por tanto

$$\Delta_l = w_1(V) \dots w_l(V) \left[1 - \sum_{k=1}^l \frac{g_k^2}{w_k(V)} \right], \quad l = 1, \dots, p$$

y puesto que

$$\sum_{k=1}^p w_k(V) = 1$$

la anterior expresión se puede expresar

$$\begin{aligned}\Delta_l &= w_1(V) \dots w_l(V) \left[\sum_{k=1}^p w_k(V) - \sum_{k=1}^l \frac{g_k^2}{w_k(V)} \right] \\ &= w_1(V) \dots w_l(V) \left[\sum_{k=1}^l \left(w_k(V) - \frac{g_k^2}{w_k(V)} \right) + \sum_{k=l+1}^p w_k(V) \right]\end{aligned}$$

Pero en cada asignación $\mathcal{A}(V)$, donde $V_k^a \neq \emptyset$, $\forall k = 1, \dots, p$ se verifica $0 < w_k(V) = w_k(V_{u_k}) + w_k(\overline{V_{u_k}}) < 1$, y por tanto $0 < |g_k| < w_k(V) < 1$, $\forall k = 1, \dots, p$, (la igualdad $g_k = w_k(V)$ se daría sólo si u_k fuese la raíz, lo que no sucede en el postorden considerado). Por tanto

$$g_k^2 < w_k(V)^2 < w_k(V), \quad \forall k = 1, \dots, p$$

lo que implica $\Delta_1 = w_1(V) - g_1^2 > 0$. Por otra parte, dividiendo la anterior desigualdad por $w_k(V) > 0$, $k = 2, \dots, p$ se tiene $w_k(V) - \frac{g_k^2}{w_k(V)} > 0$, $\forall k$, de donde se sigue $\Delta_l > 0$, $\forall l = 2, \dots, p$, lo que finaliza la demostración. \square

Como consecuencia, para cada asignación $\mathcal{A}(V)$ de T el problema restringido relativo a dicha asignación

$$PR(e_1, \dots, e_p; \mathcal{A}) \equiv \begin{cases} \min z_s(X_p; \mathcal{A}) \\ \text{s. a. } X_p \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \end{cases}$$

es un problema de programación cuadrática, que puede resolverse de forma exacta por las técnicas correspondientes. Si bien uno de los primeros métodos de programación cuadrática se basa en una extensión del método simplex (Wolfe [60]), las técnicas de resolución más recientes aplican el método del conjunto activo (véase Luenberger [38]). El método del conjunto activo consiste en un método de descenso de mayor pendiente sobre la superficie definida por las restricciones activas. En cada iteración de este método se ha de resolver un problema cuadrático con restricciones de igualdad lo que implica, al plantear las condiciones necesarias de Lagrange para el problema, tener que resolver un sistema que como máximo tiene $p + (2p + 2(p - 1)) = 5p - 2$ ecuaciones lineales. La resolución de éste sistema por métodos de eliminación gaussiana aplicando la descomposición LU se puede efectuar en tiempo $O(p^3)$ (véase Golub y Van Loan [14]). Puesto que el número de iteraciones necesario para llegar al óptimo es de orden $O(p)$, resulta que el esfuerzo computacional requerido para resolver cada uno de los subproblemas de programación cuadrática es de orden $O(p^4)$.

Sea $\{\mathcal{A}_i(V)\}_{i=1,\dots,q}$ el conjunto de asignaciones de T obtenidas para el p -conjunto de aristas $\{e_1, \dots, e_p\}$. El comportamiento de la función p -varianza $z_s(X_p)$ cuando cada $x_j \in e_j$, $j = 1, \dots, p$ es

$$z_s(X_p) = \begin{cases} z_s(X_p; \mathcal{A}_1), & \text{si } X_p \in \mathcal{R}(\mathcal{A}_1) \\ z_s(X_p; \mathcal{A}_2), & \text{si } X_p \in \mathcal{R}(\mathcal{A}_2) \\ \vdots \\ z_s(X_p; \mathcal{A}_q), & \text{si } X_p \in \mathcal{R}(\mathcal{A}_q) \end{cases}$$

Cuando $q > 1$ dos regiones factibles $\mathcal{R}(\mathcal{A}_i)$, $\mathcal{R}(\mathcal{A}_{i+1})$ son adyacentes si $\mathcal{R}(\mathcal{A}_i) \cap \mathcal{R}(\mathcal{A}_{i+1}) \neq \emptyset$. Según lo expuesto, $z_s(X_p)$ es estrictamente convexa en cada región factible, pero no es diferenciable en los puntos intersección de regiones factibles adyacentes.

Para $p = 2$ considérese el problema restringido $PR(e_1, e_2)$ con $e_1 = [v_2, v_3]$ y $e_2 = [v_9, v_{10}]$ sobre el árbol de la figura 4.10. En este caso, $\hat{V}_{12} = \{v_{10}\}$, siendo v_{10} el unico vértice principal, que da lugar a dos asignaciones, según $v_{10} \in V_1^a$ o $v_{10} \in V_2^a$.

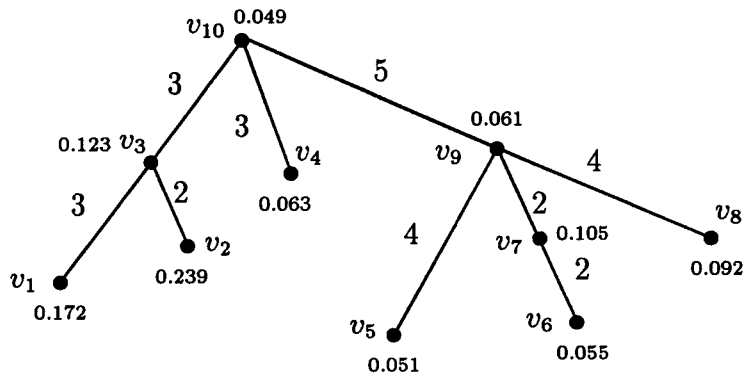


Figura 4.10

Puesto que $\mathcal{E}^2 = [0, 2] \times [0, 5]$ las regiones factibles correspondientes a cada asignación son:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathcal{A}_1) &= \mathcal{E}^2 \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_2 - x_1 \leq 0\} \\ \mathcal{R}(\mathcal{A}_2) &= \mathcal{E}^2 \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_2 - x_1 \geq 0\} \end{aligned}$$

La función 2-varianza $z_s(x_1, x_2)$ queda definida mediante las funciones $z_s((x_1, x_2); \mathcal{A}_1)$, $z_s((x_1, x_2); \mathcal{A}_2)$ en sus respectivas regiones factibles. En la figura

4.11 (a) se representan gráficamente estas dos funciones en \mathcal{E}^2 , y en 4.11 (b) la gráfica de la 2-varianza $z_s(x_1, x_2)$ en \mathcal{E}^2 :

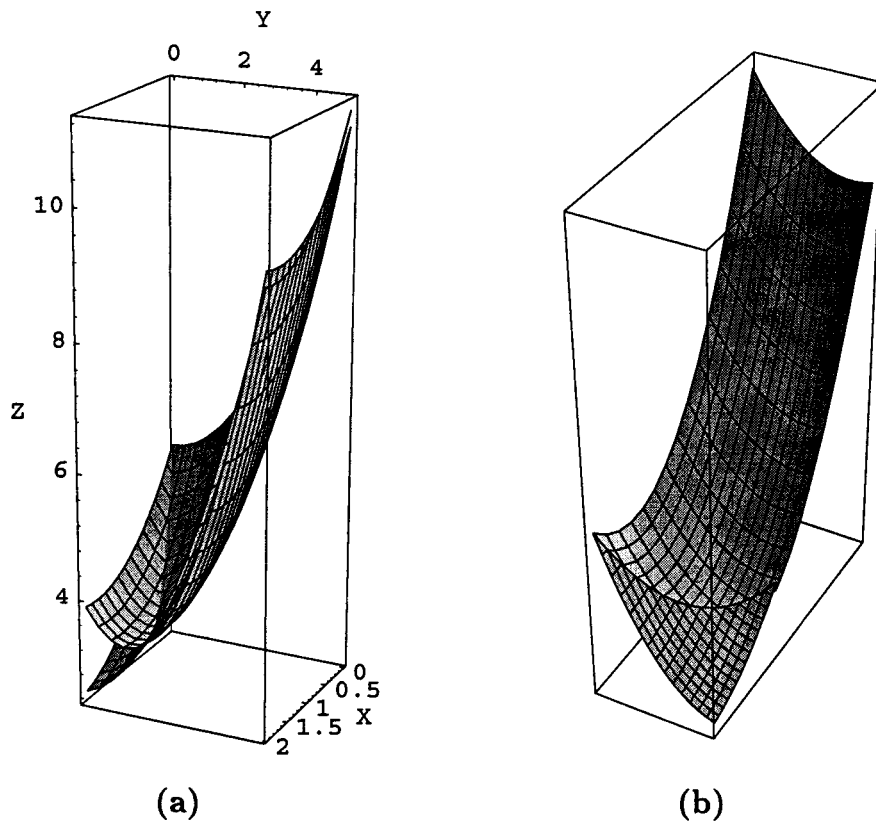


Figura 4.11

4.2.5 Algoritmo para la p -varianza

Según los resultados precedentes, el algoritmo para resolver el problema de la p -varianza sobre un árbol presenta el siguiente esquema básico: para cada p -conjunto $\{e_1, \dots, e_p\}$ de T , resolver el problema restringido $PR(e_1, \dots, e_p)$, para lo cual se resuelve el subproblema $PR(e_1, \dots, e_p : \mathcal{A})$ para cada una de las $N(e_1, \dots, e_p)$ asignaciones correspondientes, y se selecciona como solución la mejor de todas. La solución del problema es aquella para la cual la función objetivo alcanza el menor valor.

Para cada asignación factible $\mathcal{A}(V)$ la resolución de $PR(e_1, \dots, e_p; \mathcal{A})$ requiere la obtención de la función $z_s(X_p; \mathcal{A})$, cuya expresión está en función de

cinco valores auxiliares asociados a cada vértice inferior u_j de la arista $e_j = [u_j, v_{i(j)}]$, $j = 1, \dots, p$ dados por:

$$\text{aux}(j) = (w_j(V), w_j(V_{u_j}), z_{m_j}(u_j), z_{m_j}(u_j, V_{u_j}), z_{m_j}^{(2)}(u_j))$$

Estos valores se calcularán mediante un procedimiento recursivo, basado en una actualización progresiva de los mismos cada vez que un vértice es asignado.

Cálculo de los valores auxiliares

Dada un p-conjunto de aristas $\{e_1, \dots, e_p\}$, $p \geq 2$, todos los valores auxiliares de cada u_j , $j = 1, \dots, p$, toman inicialmente el valor 0, esto es:

INICIALIZACIÓN:

$\forall j \in J = \{1, \dots, p\}$, hacer

$$w_j(V) = 0, w_j(V_{u_j}) = 0, z_{m_j}(u_j) = 0, z_{m_j}(u_j, V_{u_j}) = 0, z_{m_j}^{(2)}(u_j) = 0$$

Sea $j \in J$ tal que el vértice $v_h \in V$ es asignado a V_j^a . La p-upla de pesos auxiliares asociada al vértice v_h será:

$$(w_{h1}, \dots, w_{hp}), \text{ con } w_{hi} = 0, \forall i \neq j, \text{ y } w_{hj} = w_h$$

con lo cual la variación del primer elemento de $\text{aux}(j)$ tras la asignación es

$$w_j(V) = \sum_{v_s \in V} w_{sj} = \sum_{\substack{v_s \in V \\ s \neq h}} w_{sj} + w_{hj}$$

por tanto $w_j(V)$ se actualiza haciendo $w_j(V) \leftarrow w_j(V) + w_h$. Análogamente se procederá con los demás elementos de $\text{aux}(j)$:

ACTUALIZACIÓN:

Sea V_j^a el conjunto de asignación del vértice $v_h \in V$, para algún $j \in J$. Entonces:

- Calcular:

$$w_j(V) \leftarrow w_j(V) + w_h$$

$$z_{m_j}(u_j) \leftarrow z_{m_j}(u_j) + w_h d(v_h, u_j)$$

$$z_{m_j}^{(2)}(u_j) \leftarrow z_{m_j}^{(2)}(u_j) + w_h d(v_h, u_j)^2$$

- Si además $v_h \in V_{u_j}$, calcular:

$$w_j(V_{u_j}) \leftarrow w_j(V_{u_j}) + w_h$$

$$z_{m_j}(u_j, V_{u_j}) \leftarrow z_{m_j}(u_j, V_{u_j}) + w_h d(v_h, u_j)$$

Efectuando una pasada sobre los vértices de T se completará el proceso de actualización, obteniéndose los elementos de la matriz $(\text{aux}(j))_{j=1, \dots, p}$ de valores auxiliares.

ALGORITMO p -VAR(T)

Paso 0

Calcular la matriz de distancias $(D(u, v))$.

Inicializar $X^*(i) = (0, 0)$, para cada $i \in J = \{1, \dots, p\}$.

Sea Z suficientemente grande.

Paso 1

Sea $\{e_1, \dots, e_p\}$ un p -conjunto que no haya sido considerado.

Hacer $V_j^a = \emptyset$, para cada $j = 1, \dots, p$, $\hat{V} = \emptyset$, $\hat{V}_j = \emptyset$.

Para cada $j = 1, \dots, p$, **inicializar** las filas

$$\text{aux}(j) = (w_j(V), w_j(V_{u_j}), z_{m_j}(u_j), z_{m_j}(u_j, V_{u_j}), z_{m_j}^{(2)}(u_j))$$

de la matriz de valores auxiliares.

Paso 2

Repetir para cada $j = 1, \dots, p$:

* **Calcular** $N(e_j)$.

* **Para** cada $k \in N(e_j)$ con $1 \leq j < k \leq p$:

 ** **Obtener** los vértices más próximos entre sí.

 ** **Inicializar** $\hat{V}_{jk} = \emptyset$.

Paso 3

Repetir para cada $v_h \in V$:

* **Si** v_h verifica la proposición 4.2.2 con algún $j \in J$:

 ** **Actualizar** $\text{aux}(j)$, $V_j^a \leftarrow V_j^a \cup \{v_h\}$.

* **En caso contrario**

- * * **Hacer** $\widehat{V} \leftarrow \widehat{V} \cup \{v_h\}$.
- * * **Si** para algún $k \in N(e_j)$ se cumple $v_h \in P_{jk}$, **hacer**
 $\widehat{V}_{jk} \leftarrow \widehat{V}_{jk} \cup \{v_h\}$, $\widehat{V}_J \leftarrow \widehat{V}_J \cup \{v_h\}$.

Paso 4

Si $\widehat{V}_J = \emptyset$, **entonces**:

- * **Si** $V_j^a \neq \emptyset$, para $j = 1, \dots, p$, **entonces**:
 - * * **Calcular** $z_s(X_p)$.
 - * * **Resolver** $PR(e_1, \dots, e_p)$. **Sea** (x_1^*, \dots, x_p^*) la solución.
 - * * **Hacer** $Z_0 = z_s(x_1^*, \dots, x_p^*)$.
 - * * **Ir** al Paso 8.
- * **En caso contrario**, **Ir** al Paso 8.

En caso contrario:

- * **Sea** Z_0 suficientemente grande.
- * **Para** cada $j = 1, \dots, p$, **hacer**
 $\widehat{\text{aux}}(j) \leftarrow \text{aux}(j)$, $\widetilde{V}_j^a \leftarrow V_j^a$.

Paso 5

Seleccionar una asignación \mathcal{A} de \widehat{V}_J que no haya sido considerada.

Para cada $v_h \in \widehat{V}$:

- * **Calcular** $j \in \{1, \dots, p\}$ tal que v_h reciba asignación j -ésima en \mathcal{A} .
- * **Actualizar** $\text{aux}(j)$, V_j^a .

Si $V_j^a = \emptyset$, para algún $j \in \{1, \dots, p\}$, **entonces**

- * **Ir** al Paso 7.

En caso contrario:

- * **Para** cada $j = 1, \dots, p$:
 - * * **Calcular** vértices principales en \widehat{V}_{jk} , para $1 \leq j < k \leq p$.

Paso 6

Calcular $z_s(X_p; \mathcal{A})$.

Resolver $PR(e_1, \dots, e_p; \mathcal{A})$.

Sea (x'_1, \dots, x'_p) la solución, $Z'_0 = z_s((x'_1, \dots, x'_p); \mathcal{A})$.

Si $Z'_0 < Z_0$:

- * **Hacer** $Z_0 \leftarrow Z'_0$, $x_i^* \leftarrow x'_i$, para $i = 1, \dots, p$.

Paso 7

Si quedan asignaciones de \widehat{V}_J sin examinar:

- * **Hacer** $\text{aux}(j) \leftarrow \widehat{\text{aux}}(j)$, $V_j^a \leftarrow \widetilde{V}_j^a$, para $j = 1, \dots, p$.

* Ir al Paso 5.

En caso contrario, Ir al Paso 8.

Paso 8

Si $Z_0 < Z$:

* Hacer $Z \leftarrow Z_0$, $X^*(i) = (x_i^*, u_i)$, para $i = 1, \dots, p$.

Si quedan p -conjuntos de aristas sin examinar:

* Ir al Paso 1.

En caso contrario, parar. Los valores Z , $X^*(i)$, V_i^a , para $i = 1, \dots, p$, constituyen la solución del problema.

Análisis de la Complejidad

En el algoritmo, la resolución del problema restringido, (Pasos 2 a 7) se ejecuta para cada uno de los $\binom{n-1}{p}$ subconjuntos de p aristas de T . Para cada uno de estos casos, se requiere:

- Una pasada sobre los n vértices de V para determinar los conjuntos \hat{V} y \hat{V}_J , efectuando una primera actualización de los valores auxiliares (Paso 3).
- Si ambos conjuntos son vacíos, se resuelve el problema restringido (Paso 4). Si no lo son (Pasos 5 a 7) para cada una de las $N(e_1, \dots, e_p)$ asignaciones factibles se resuelve el correspondiente problema de programación cuadrática en tiempo $O(p^4)$.

En este último caso, una vez seleccionada la asignación, se efectúa una pasada sobre los vértices de \hat{V} actualizando la correspondiente fila de valores auxiliares según la asignación que reciban lo que, en el peor de los casos, supone visitar $p(n-2)$ vértices (Paso 5). Después se resuelve el problema (Paso 6). Como por el teorema 4.2.8 es $N(e_1, \dots, e_p) \leq (n-1)^{p-1}$, la resolución del problema restringido requiere en el peor de los casos

$$p(n-1)^{p-1}(n-2)$$

pasadas sobre los vértices de T . El esfuerzo computacional realizado es de tamaño

$$p^4 \binom{n-1}{p} p(n-1)^{p-1}(n-2)$$

concluyéndose que la complejidad del algoritmo es de $O(p^5 n^{2p})$.

La aplicación del algoritmo p -VAR(T) al caso particular $p = 2$ permite resolver de forma exacta el problema de la 2-varianza en tiempo $O(n^4)$. En [37] se efectúa un estudio específico de éste problema y de su resolución. El interés de este caso viene dado no sólo por motivos prácticos (de hecho la localización de dos servicios ha recibido una atención especial dentro del marco de la localización múltiple), sino también porque uno de los algoritmos heurísticos para el problema de la p -varianza en un árbol se basa en una aplicación reiterada del algoritmo general para $p = 2$.

Ejemplo

Considérese el árbol de $n = 20$ vértices descrito en la figura 4.12. La numeración de los vértices corresponde al postorden trasversal obtenido enraizando el árbol en el vértice v_{20} . Los pesos de los nodos normalizados a 1 se relacionan a continuación ordenados según v_i , $i = 1, \dots, 20$:

0.0870105, 0.0712512, 0.05234, 0.0457498, 0.052531, 0.051958, 0.0179561, 0.0383954, 0.0155683, 0.0586437, 0.0848138, 0.0149952, 0.0219675, 0.0400191, 0.0522445, 0.0637058, 0.0511939, 0.0513849, 0.0503343, 0.077937.

Las tablas que siguen recogen los resultados obtenidos para el problema de la p -varianza mediante el algoritmo P-VAR(T) en los casos $p = 2, 3, 4, 5$, y 6. La primera columna corresponde al p -conjunto de aristas resultante, la segunda columna a los puntos en donde se sitúan los servicios, teniendo en cuenta que el punto x_i^* sobre la arista $e_i = [u_i, v_{i(i)}]$ representa la distancia del mismo al vértice inferior u_i . En la última columna aparecen los correspondientes conjuntos de asignación. Asimismo, en las gráficas que siguen están representados los puntos solución para cada valor de p .

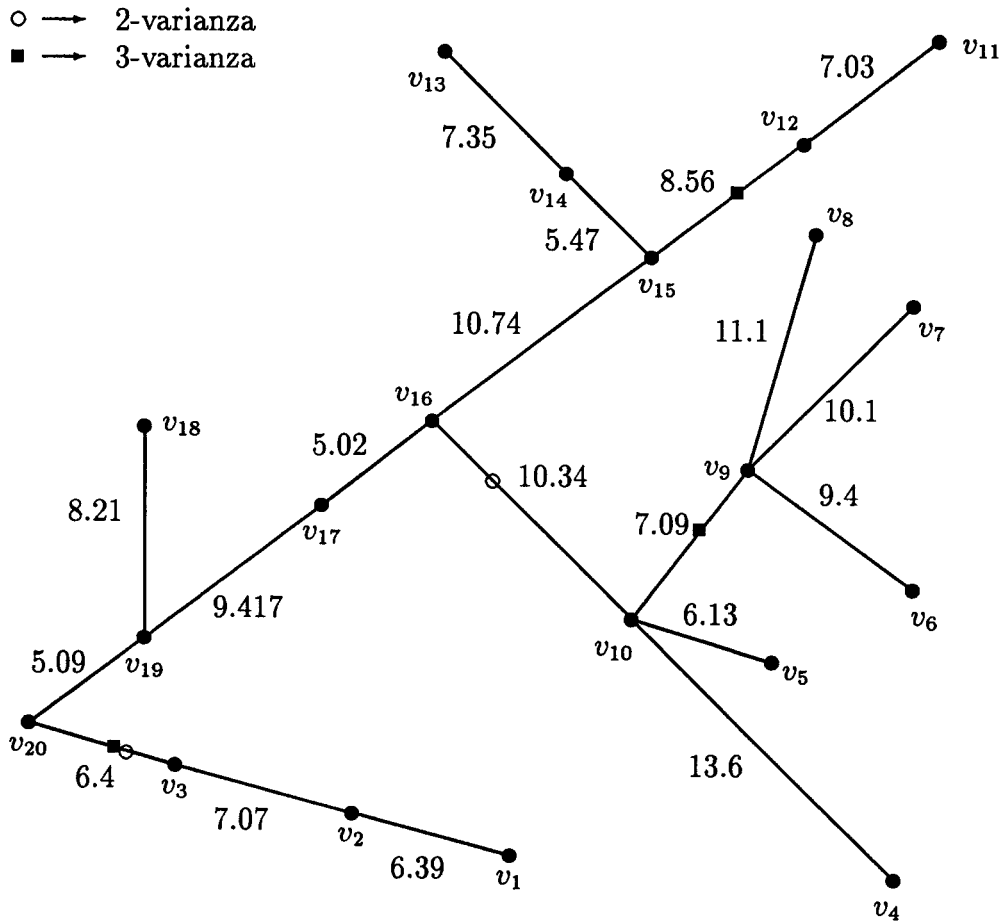


Figura 4.12

$p = 2$

$e_1 = [v_3, v_{20}]$	$x_1^* = 2.197612$	$\{v_1, v_2, v_3, v_{18}, v_{19}, v_{20}\}$
$e_2 = [v_{10}, v_{16}]$	$x_2^* = 7.052813$	$\{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}\}$

$z_s(X_2^*) = 70.20694$

$p = 3$

$e_1 = [v_3, v_{20}]$	$x_1^* = 2.869212$	$\{v_1, v_2, v_3, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}\}$
$e_2 = [v_9, v_{10}]$	$x_2^* = 2.985709$	$\{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{16}\}$
$e_3 = [v_{12}, v_{15}]$	$x_3^* = 3.395094$	$\{v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$

$z_s(X_3^*) = 25.80319$

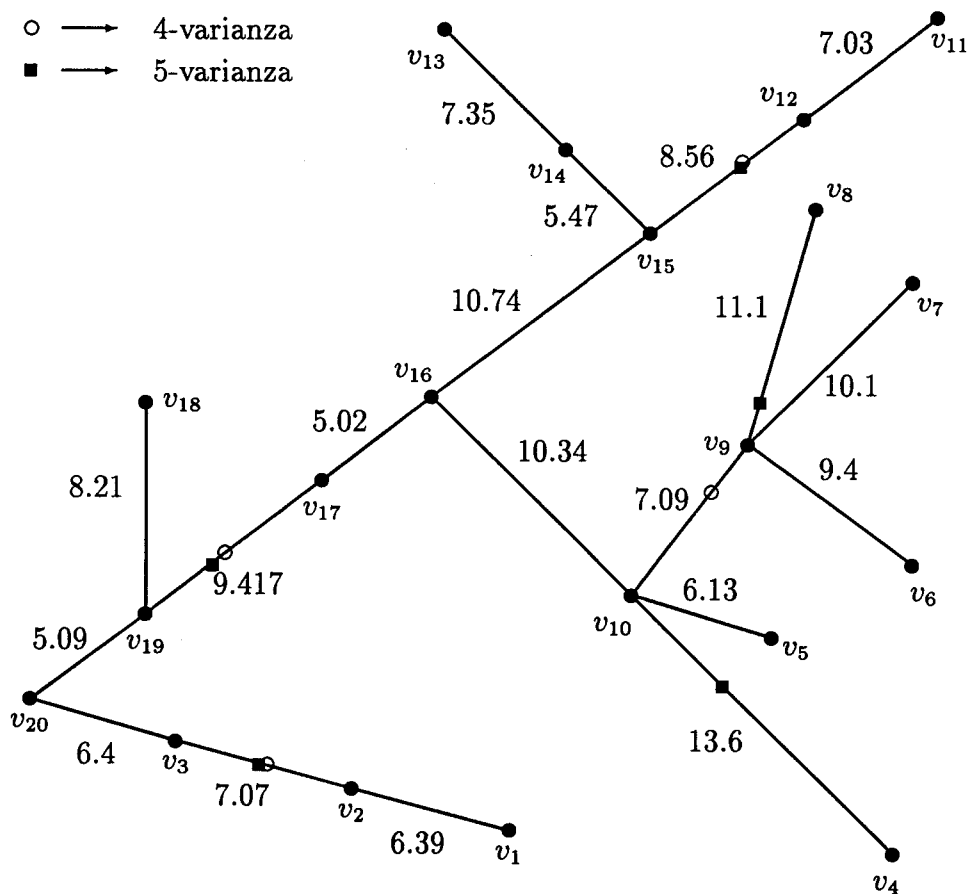


Figura 4.13

p = 4

$e_1 = [v_2, v_3]$	$x_1^* = 3.86229$	$\{v_1, v_2, v_3, v_{20}\}$
$e_2 = [v_9, v_{10}]$	$x_2^* = 2.368114$	$\{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$
$e_3 = [v_{12}, v_{15}]$	$x_3^* = 3.517922$	$\{v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$
$e_4 = [v_{17}, v_{19}]$	$x_4^* = 4.89929$	$\{v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}\}$

$$z_s(X_4^*) = 16.70724$$

p = 5

$e_1 = [v_2, v_3]$	$x_1^* = 3.801386$	$\{v_1, v_2, v_3, v_{20}\}$
$e_2 = [v_4, v_{10}]$	$x_2^* = 8.215996$	$\{v_4, v_5, v_{10}\}$
$e_3 = [v_8, v_9]$	$x_3^* = 9.906876$	$\{v_6, v_7, v_8, v_9\}$
$e_4 = [v_{12}, v_{15}]$	$x_4^* = 3.560234$	$\{v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$
$e_5 = [v_{17}, v_{19}]$	$x_5^* = 5.399768$	$\{v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}\}$

$$z_s(X_5^*) = 11.21909$$

4.3 Algoritmos heurísticos para una red árbol

Si bien para cada valor fijo de p la complejidad del algoritmo de la p -varianza es polinomial en el número n de nodos, para p variable resulta exponencial. En efecto, dado que resolver el problema p varianza para un valor dado de p requiere resolver $\binom{n-1}{p}$ problemas restringidos $PR(e_1, \dots, e_p)$, el tiempo requerido para resolver todos los problemas p -varianza desde $p = 1$ hasta $p = n - 1$ para cualquier valor dado de n es como mínimo:

$$\sum_{p=1}^{n-1} \binom{n-1}{p} = 2^{n-1} - 1 = O(2^n)$$

que es exponencial en n .

Por otra parte el problema p -varianza es un problema de localización continuo, (en el sentido de que los servicios pueden localizarse en un subconjunto infinito de N^p) que carece de CDF. Los 20 problemas de localización estudiados por Hooker, Garfinkel y Chen [27] son también continuos y NP-duros en redes generales, pero presentan todos CDF, el cual puede calcularse a partir de la matriz de distancias y sin que sea necesaria la evaluación de la función objetivo del problema.

Sin embargo el estudio efectuado hasta ahora muestra que para cada p -conjunto $\{e_1, \dots, e_p\}$ el mínimo de la función p -varianza se alcanza en un punto de \mathcal{E}^p cuyo cálculo requiere resolver un conjunto de problemas de programación convexa, y su localización depende no solo de la estructura del árbol considerada, sino también de la función objetivo p -varianza, que varía con las longitudes de las aristas y los pesos de los vértices. No existe por tanto CDF para cada uno de los problemas restringidos, lo que según el trabajo de Hooker, Garfinkel y Chen [27] implica que no existe CDF para el problema de la p -varianza.

Consecuentemente el problema de la p -varianza no puede ser discretizado, y por tanto la resolución exacta del problema es factible o bien para árboles de pequeño tamaño, o bien para valores pequeños de p . Resulta aconsejable disponer de procedimientos heurísticos que proporcionen soluciones aproximadas al problema con menor esfuerzo computacional.

A continuación se describen dos algoritmos heurísticos para el problema

de la p -varianza en un árbol T :

- El primero es un algoritmo secuencial voraz (véase Brandeau y Chiu [3]): En cada etapa se aumenta en uno el número de servidores de forma que las k localizaciones obtenidas al final de la misma son tanto la solución heurística al problema de la k -varianza como el punto de partida para la siguiente adición.
- El segundo algoritmo combina la aproximación del primero con la resolución exacta del problema restringido relativo al conjunto de k aristas correspondiente a los servicios localizados.

4.3.1 Algoritmo heurístico $H_1(T)$

Considérese el p -conjunto $\{e_1, \dots, e_p\}$ y sea $X_p = (x_1, \dots, x_p) \in \mathcal{E}^p$ una localización de p servicios sobre el p -conjunto (no necesariamente la óptima) tal que $\mathcal{A}(V) = \{V_1^a, \dots, V_p^a\}$ es la asignación inducida por tal localización.

Definición 4.3.1 Para cada $i = 1, \dots, p$, se llama subárbol de asignación T_i^a a la componente conexa de T cuyo conjunto de vértices es V_i^a .

Por tanto, cada localización $X_p \in \mathcal{E}^p$ induce un conjunto de árboles de asignación en T : $\{T_1^a, \dots, T_p^a\}$, denominado bosque de asignación, formado por los subárboles correspondientes a los respectivos conjuntos de asignación.

Definición 4.3.2 Sea $\{T_1^a, \dots, T_p^a\}$ el bosque de asignación inducido por una localización $X_p \in \mathcal{E}^p$. Para cada $i = 1, \dots, p$ se denominará varianza relativa de x_i a la expresión

$$\begin{aligned} z_s(x_i, T_i^a)_R &= \frac{1}{w_i(V)} \sum_{v_h \in V} w_{hi} \left[d(v_h, x_i) - \frac{z_{m_i}(x_i)}{w_i(V)} \right]^2 \\ &= \sum_{v_h \in V_i^a} \frac{w_{hi}}{w_i(V)} \left[d(v_h, x_i) - \frac{z_{m_i}(x_i)}{w_i(V)} \right]^2 \end{aligned}$$

donde $z_{m_i}(x_i) = \sum_{v_j \in V} w_{ji} d(v_j, x_i)$.

Puesto que si $v_h \in V_i^a$, $w_{hi} = w_h$, se tiene

$$w_i(V) = \sum_{v_h \in V} w_{hi} = \sum_{v_h \in V_i^a} w_h = w(V_i^a)$$

Para cada $i = 1, \dots, p$ se definen los pesos

$$w_{hi}^N = \frac{w_{hi}}{w(V_i^a)} = \frac{w_h}{w(V_i^a)}, \quad \forall h \in V_i^a$$

entonces para $i = 1, \dots, p$, $\{w_{hi}^N, v_h \in V_i^a\}$ representa el sistema normalizado de pesos de T_i^a , esto es:

$$\sum_{v_h \in V_i^a} w_{hi}^N = 1$$

Sea T_i^N el subárbol de asignación T_i^a de sistema normalizado de pesos y $z_{m_i}^N(x_i)$ la función mediana de x_i en T_i^N . Por las relaciones anteriores dicha mediana se expresa

$$z_{m_i}^N(x_i) = \sum_{v_h \in V_i^a} w_{hi}^N d(v_h, x_i) = \frac{1}{w(V_i^a)} \sum_{v_h \in V} w_{hi} d(v_h, x_i) = \frac{1}{w(V_i^a)} z_{m_i}(x_i)$$

y por tanto la varianza relativa de x_i resulta

$$z_s(x_i, T_i^a)_R = \sum_{v_h \in V_i^a} w_{hi}^N [d(v_h, x_i) - z_{m_i}^N(x_i)]^2 = z_s(x_i, T_i^N)$$

Resultando que la varianza de x_i relativa a su subárbol de asignación T_i^a es la 1-varianza de x_i en el árbol T_i^N .

El algoritmo heurístico $H_1(T)$ que sigue opera de la siguiente forma: suponiendo que ya están localizados k servicios, en la etapa k -ésima se selecciona el subárbol de asignación cuyo servidor aporta la mayor varianza relativa como candidato a recibir un nuevo servicio, sustituyendo el servicio existente por 2 nuevos servidores, que son la solución al problema de la 2-Varianza en dicho subárbol. De este proceso destacan dos aspectos:

- (i) La elección del subárbol que recibe el nuevo servicio, como aquel en donde la nueva localización resulta más eficaz al provocar el máximo decrecimiento en la $(k + 1)$ -Varianza.
- (ii) El servicio que se añade no resulta de una simple adición a los k existentes, sino que supone además una *relocalización* del servicio que atendía al subárbol elegido, al ser éste sustituido por la 2-Varianza en el subárbol. Se contempla, por tanto, la interacción de ambos servicios entre sí.

Por tanto, una descripción esquemática del algoritmo sería:

- Inicialmente, localizar la 2-Varianza (x_1^*, x_2^*) .
- Suponiendo k servicios localizados, repetir hasta que $k = p$:
 - Seleccionar el subárbol T_i^a tal que $z_s(x_i^*, T_i^a)_R = \max_{j=1, \dots, k} z_s(x_j^*, T_j^a)_R$.
 - Sustituir x_i^* por las dos localizaciones obtenidas al resolver el problema de la 2-Varianza en T_i^a .

El paso de k servicios a $k+1$ servicios, realizado en la etapa k -ésima del algoritmo, requiere las cuatro fases siguientes:

1) Selección del subárbol de asignación.

Si el máximo valor de las varianzas relativas se alcanzara en un subconjunto de subárboles $\{T_{j_1}^a, \dots, T_{j_s}^a\}$, se seleccionará de éste conjunto el subárbol que presente máximo valor de $z_{m_j}^N(\cdot)$, y caso de alcanzarse éste máximo en más de un subárbol, la selección será arbitraria.

Las varianzas relativas y demás valores necesarios para la selección se obtienen a partir de los valores auxiliares asociados a los k servicios existentes de la siguiente forma: Sea T_j^a el subárbol de asignación relativo a $x_j^* \in [u_i, v_{t(j)}]$ con el postorden trasversal inducido por el de T , (restricción a T_j^a del postorden de T). Por la proposición 1.5.4 se tiene

$$z_s(x_j^*, T_j^N) = A_j^N x_j^{*2} + 2B_j^N x_j^* + C_j^N$$

Donde A_j^N , B_j^N , C_j^N son los coeficientes de la 1-varianza en T_j^N . Por tanto

$$A_j^N = 1 - (g_j^N(u_j))^2$$

$$B_j^N = 2z_{m_j}^N(u_j, V_{u_j}) - (1 + g_j^N(u_j))z_{m_j}^N(u_j)$$

$$C_j^N = z_{m_j}^{(2)N}(u_j) - [z_{m_j}^N(u_j)]^2$$

Donde $g_j^N(u_j) = 2 \sum_{v_h \in V_{u_j} \cap V_j^a} w_{hj}^N - \sum_{v_h \in V_j^a} w_{hj} = \frac{1}{w(V_j^a)} \left[2 \sum_{v_h \in V_{u_j}} w_{hj} - \sum_{v_h \in V} w_{hj} \right]$
ya que $w_{hj} = 0$, si $v_h \notin V_j^a$, resultando

$$g_j^N(u_j) = \frac{g_j(u_j)}{w(V_j^a)}$$

Análogamente $z_{m_j}^N(u_j, V_{u_j}) = \frac{1}{w(V_j^a)} \sum_{v_h \in V_{u_j}} w_{hj} d(v_h, u_j)$, por lo que

$$z_{m_j}^N(u_j, V_{u_j}) = \frac{1}{w(V_j^a)} z_{m_j}(u_j, V_{u_j})$$

Y también $z_{m_j}^{(2)N}(u_j) = \sum_{v_h \in V_j^a} w_{hj}^N d(v_h, u_j)^2$, obteniéndose

$$z_{m_j}^{(2)N}(u_j) = \frac{1}{w(V_j^a)} z_{m_j}^{(2)}(u_j)$$

Mediante estas relaciones se obtienen de forma inmediata las varianzas relativas a partir de los valores auxiliares asociados a los k servicios ya localizados.

2) Resolución del problema de la 2-Varianza.

Supóngase sin pérdida de generalidad que T_k^a es el subárbol seleccionado en la fase anterior (para lo cual basta una reordenación de los $k - 1$ restantes subíndices de forma que el subárbol seleccionado sea el k -ésimo). Sea $W_k = w(V_k^a)$ con lo cual el sistema de pesos de T_k^N se escribirá

$$w_h^N = \frac{w_h}{W_k}, \quad \forall h \in V_k^a$$

Sea $x'_1 \in [u'_1, v'_{i(1)}]$, $x'_2 \in [u'_2, v'_{i(2)}]$ la solución al problema de la 2-Varianza en T_k^N , y V'_1, V'_2 los respectivos conjuntos de asignación. El algoritmo 2-VAR(T_k^N) produce además los correspondientes valores auxiliares asociados a cada u'_i y a V'_i , que para $i = 1, 2$ son

$$\text{aux}'(i) = \left(w_i^N(V_k^a), w_i^N(V_{u'_i}), z_{m_i}^N(u'_i), z_{m_i}^N(u'_i, V_{u'_i}), z_{m_i}^{(2)N}(u'_i) \right) \quad (4.2)$$

3) Sustitución de x_k^* por el punto 2-varianza.

En este caso, hacer

$$\begin{array}{ll} x_k^* \longleftarrow x'_1 & x_{k+1}^* \longleftarrow x'_2 \\ u_k \longleftarrow u'_1 & u_{k+1} \longleftarrow u'_2 \\ V_k^a \longleftarrow V'_1 & V_{k+1}^a \longleftarrow V'_2 \end{array}$$

y los correspondientes valores auxiliares $\text{aux}(k)$, $\text{aux}(k+1)$ asociados a estas dos nuevas localizaciones se calculan sin más que multiplicar los obtenidos en (4.2) por W_k .

4) **Actualización de los valores auxiliares.**

En esta fase se actualizan los conjuntos de asignación y los valores auxiliares asociados a los $k+1$ servicios, ya que la sustitución del servicio existente por los dos nuevos servicios puede alterar la distribución de los vértices sobre los conjuntos de asignación. Para ello se opera como sigue:

Para $i = 1, \dots, k-1$, examinar cada vértice $v_h \in V_i^a$. Si $d(v_h, x_i^*) > d(v_h, x_j^*)$, para algún $j = k, k+1$, asignar $v_h \in V_j^a$, y actualizar los valores auxiliares asociados a x_i^* , x_j^* , definiendo $\delta_q = \begin{cases} -1, & \text{si } q = i \\ 1, & \text{si } q = j \end{cases}$. Entonces para $q = i, j$ calcular

$$w(V_q^a) = w(V_q^a) + \delta_q w_h$$

$$z_{m_q}(u_q) = z_{m_q}(u_q) + \delta_q w_h d(v_h, u_q)$$

$$z_{m_q}^{(2)}(u_q) = z_{m_q}^{(2)}(u_q) + \delta_q w_h d(v_h, u_q)^2$$

Si además $v_h \in V_{u_q}$, hacer

$$w_q(V_{u_q}) = w_q(V_{u_q}) + \delta_q w_h$$

$$z_{m_q}(u_q, V_{u_q}) = z_{m_q}(u_q, V_{u_q}) + \delta_q w_h d(v_h, u_q)$$

ALGORITMO H₁(T)

Paso 0

Calcular la matriz de distancias $(D(u, v))$.

Sea $k \leftarrow 1, T_k^a \leftarrow T$.

Para cada $i = 1, 2$, **inicializar** $\text{aux}(i)$.

Paso 1

Resolver el problema 2-varianza en T_k^a .

Obtener la solución $X^*(j) = (x_j^*, u_j), V_j^a, \text{aux}(j)$, para $j = 1, 2$ mediante el algoritmo 2-VAR(T_k^a).

Hacer $k \leftarrow k + 1$.

Paso 2

Para cada $j = 1, \dots, k$ **calcular** $z_s(x_j^*, T_j^a)_R, z_{m_j}^N(x_j^*)$.

Calcular $I_{max} = \{j_1, \dots, j_h\} \subseteq \{1, \dots, k\}$ tal que para todo $i \in I_{max}$ se verifique

$$z_s(x_i^*, T_i^a)_R = \max\{z_s(x_j^*, T_j^a)_R, j = 1, \dots, k\}$$

Si $|I_{max}| = 1$, seleccionar $T_i^a, i \in I_{max}$.

En caso contrario:

* Calcular $I' \subseteq I_{max}$ tal que para todo $i \in I'$ se verifique

$$z_{m_i}^N(x_i^*) = \max\{z_{m_j}^N(x_j^*), j \in I_{max}\}$$

* Si $|I'| = 1$, seleccionar $T_i^a, i \in I'$.

* En caso contrario, seleccionar arbitrariamente $T_i^a, i \in I'$.

Paso 3

Si $i \neq k$, reordenar subíndices.

Sea T_k^a el árbol seleccionado.

Hacer $W_k \leftarrow w(V_k^a)$.

Calcular pesos normalizados de T_k^a .

Paso 4

Resolver el problema 2-varianza en T_k^N .

Obtener la solución: $X'(i) = (x'_i, u'_i), V'_i, \text{aux}'(i), i = 1, 2$, mediante el algoritmo 2-VAR(T_k^N).

Paso 5

Para cada $i = 1, 2$;

* Hacer $x_{(k+i-1)}^* \leftarrow x'_i, X^*(k+i-1) \leftarrow X'(i), V_{(k+i-1)}^a \leftarrow V'_i, u_{(k+i-1)} \leftarrow u'_i$.

* Actualizar $\text{aux}(k+i-1) \leftarrow W_k \text{aux}'(i)$.

(Fase 3 de sustitución).

Paso 6

Repetir para cada $i = 1, \dots, k-1$:

* Para cada $v_h \in V_i^a$

* * Si $d(h, x_i^*) > d(h, x_j^*)$, para algún $j = k, k+1$, entonces:
actualizar $\text{aux}(i), \text{aux}(j)$ (fase 4).

Paso 7

Hacer $k \leftarrow k+1$.

Calcular $z_s(X_k^*)$.

Si $k < p$, entonces ir al Paso 2.

En caso contrario parar. Los valores $z_s(X_p^*)$, $X^*(i)$, V_i^a , $i = 1, \dots, p$ constituyen la solución aproximada del problema.

Análisis de la Complejidad

El algoritmo para la 2-Varianza sobre T , de complejidad $O(n^4)$, se ejecuta por primera vez en el Paso 1.

Los pasos 2 a 5 constituyen la etapa k -ésima del algoritmo: paso de k a $k + 1$ servicios. El esfuerzo computacional de esta etapa es nuevamente el requerido para el algoritmo de la 2-Varianza: $O(n^4)$, ya que tanto el cálculo de las varianzas relativas como la selección del subárbol de asignación (paso 2) se efectúa en tiempo $O(p)$. Además la actualización de los valores auxiliares es lineal. En efecto, dicha actualización (paso 6) es de orden $O(n)$, ya que se examinan todos los vértices de los conjuntos $V_i^a, i = 1, \dots, k - 1$.

Finalmente, puesto que para p servicios el algoritmo de la 2-Varianza se ejecuta $p - 1$ veces, el esfuerzo computacional requerido es $(p - 1)O(n^4)$. La complejidad del algoritmo es polinomial en n : $O(pn^4)$.

Ejemplo

Considérese el árbol descrito en el ejemplo anterior (Figura 4.12). En las siguientes tablas se muestran las sucesivas etapas obtenidas al aplicar el algoritmo $H_1(T)$ para $p = 6$. Al final de cada etapa la solución obtenida es a su vez la aproximación heurística para el número de servicios calculados en dicha etapa.

Inicio: 2-Var(T)

p = 2

		$z_s(x_i^*, T_i^a)_R$	
$e_1 = [v_3, v_{20}]$	$x_1^* = 2.197612$	$\{v_1, v_2, v_3, v_{18}, v_{19}, v_{20}\}$	29.55497
$e_2 = [v_{10}, v_{16}]$	$x_2^* = 7.052813$	$\{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}$ $\{v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}\}$	79.97488

$z_s(X_2^*) = 70.20694$

$$k = 2 \rightarrow k = 3$$

$$V_2^a = \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}\}$$

2-VAR(T_2^N)		
$e'_1 = [v_9, v_{10}]$	$x'_1 = 3.93459$	$V'_1 = \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{16}, v_{17}\}$
$e'_2 = [v_{12}, v_{15}]$	$x'_2 = 3.363536$	$V'_2 = \{v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$

$$p = 3$$

$$z_s(x_i^*, T_i^a)_R$$

$e_1 = [v_3, v_{20}]$	$x_1^* = 2.197612$	$\{v_1, v_2, v_3, v_{18}, v_{19}, v_{20}\}$	29.43143
$e_2 = [v_9, v_{10}]$	$x_2^* = 3.93459$	$\{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{16}, v_{17}\}$	25.07414
$e_3 = [v_{12}, v_{15}]$	$x_3^* = 3.363536$	$\{v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$	15.17227

$$z_s(X_3^*) = 26.09793$$

$$k = 3 \rightarrow k = 4$$

$$V_3^a = \{v_1, v_2, v_3, v_{18}, v_{19}, v_{20}\}$$

2-VAR(T_3^N)		
$e'_1 = [v_1, v_2]$	$x'_1 = 4.622384$	$V'_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$
$e'_2 = [v_{18}, v_{19}]$	$x'_2 = 5.890223$	$V'_2 = \{v_{18}, v_{19}, v_{20}\}$

$$p = 4$$

$$z_s(x_i^*, T_i^a)_R$$

$e_1 = [v_9, v_{10}]$	$x_1^* = 3.93459$	$\{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{16}\}$	21.7732
$e_2 = [v_{12}, v_{15}]$	$x_2^* = 3.363536$	$\{v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$	15.17227
$e_3 = [v_1, v_2]$	$x_3^* = 4.622384$	$\{v_1, v_2, v_3\}$	7.16639
$e_4 = [v_{18}, v_{19}]$	$x_4^* = 5.890223$	$\{v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}\}$	10.07637

$$z_s(X_4^*) = 21.03601$$

En este caso, en la fase de actualización se ha efectuado un reajuste de los conjuntos de asignación: el vértice v_{17} , que antes del algoritmo 2-VAR(T_3^N) pertenecía al conjunto V_1^a , (V_2^a antes de la reordenación), es posteriormente asignado a V_4^a , ya que $d(v_{17}, x_1^*) > d(v_{17}, x_4^*)$.

$$\mathbf{k} = 4 \rightarrow \mathbf{k} = 5$$

$$V_4^a = \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{16}\}$$

2-VAR(T_4^N)		
$e'_1 = [v_4, v_{10}]$	$x'_1 = 9.637732$	$V'_1 = \{v_4, v_5, v_{10}, v_{16}\}$
$e'_2 = [v_8, v_9]$	$x'_2 = 9.437569$	$V'_2 = \{v_6, v_7, v_8, v_9\}$

$$\mathbf{p} = 5$$

$$z_s(x_i^*, T_i^a)_R$$

$e_1 = [v_{12}, v_{15}]$	$x_1^* = 3.363536$	$\{v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$	15.17227
$e_2 = [v_1, v_2]$	$x_2^* = 4.622384$	$\{v_1, v_2, v_3\}$	7.166386
$e_3 = [v_{18}, v_{19}]$	$x_3^* = 5.890223$	$\{v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}\}$	10.07637
$e_4 = [v_4, v_{10}]$	$x_4^* = 9.637732$	$\{v_4, v_5, v_{10}, v_{16}\}$	14.89047
$e_5 = [v_8, v_9]$	$x_5^* = 9.437569$	$\{v_6, v_7, v_8, v_9\}$	9.373413

$$z_s(X_5^*) = 15.363236$$

$$\mathbf{k} = 5 \rightarrow \mathbf{k} = 6$$

$$V_5^a = \{v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$$

2-VAR(T_5^N)		
$e'_1 = [v_{11}, v_{12}]$	$x'_1 = 4.210671$	$V'_1 = \{v_{11}, v_{12}\}$
$e'_2 = [v_{13}, v_{14}]$	$x'_2 = 5.663213$	$V'_2 = \{v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$

$$\mathbf{p} = 6$$

$$z_s(x_i^*, T_i^a)_R$$

$e_1 = [v_1, v_2]$	$x_1^* = 4.622384$	$\{v_1, v_2, v_3\}$	7.166386
$e_2 = [v_{18}, v_{19}]$	$x_2^* = 5.890223$	$\{v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}\}$	10.07637
$e_3 = [v_4, v_{10}]$	$x_3^* = 9.637732$	$\{v_4, v_5, v_{10}, v_{16}\}$	14.89047
$e_4 = [v_8, v_9]$	$x_4^* = 9.437569$	$\{v_6, v_7, v_8, v_9\}$	9.373413
$e_5 = [v_{11}, v_{12}]$	$x_5^* = 4.210671$	$\{v_{11}, v_{12}\}$	0.2471409
$e_6 = [v_{13}, v_{14}]$	$x_6^* = 5.663213$	$\{v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$	6.055662

$$z_s(X_6^*) = 13.69938$$

4.3.2 Algoritmo heurístico $H_2(T)$

Modifica el algoritmo anterior resolviendo de forma exacta el problema restringido relativo a las aristas obtenidas. Concretamente, el algoritmo $H_2(T)$ opera como

sigue: suponiendo ya localizados k servicios, en la etapa k -ésima se localizará un nuevo servicio según el procedimiento descrito en $H_1(T)$ para, sobre las $k + 1$ aristas resultantes, obtener la localización óptima sobre las mismas. La solución obtenida es una aproximación heurística mejor que la que proporciona $H_1(T)$.

Una descripción esquemática del algoritmo sería:

- Inicialmente, localizar la 2-Varianza (x_1^*, x_2^*) en sus aristas correspondientes $\{e_1, e_2\}$.
- Suponiendo ya localizados k servicios (x_1^*, \dots, x_k^*) respectivamente en las aristas $\{e_1, \dots, e_k\}$, repetir hasta que $k = p$:
 - Seleccionar (mediante el criterio descrito en $H_1(T)$) un subárbol T_i^a .
 - Resolver el problema de la 2-Varianza en T_i^a , y sustituir la arista e_i por las dos aristas correspondientes a las dos localizaciones obtenidas, resultando el $(k + 1)$ -conjunto $\{e_1, \dots, e_{k+1}\}$.
 - Hacer $k = k + 1$ y resolver el problema restringido $PR(e_1, \dots, e_k)$.

El paso de k a $k + 1$ servicios se efectúa en la etapa k -ésima del algoritmo y consta de 4 fases, de las cuales las dos primeras son iguales a las correspondientes del algoritmo $H_1(T)$, y las dos siguientes son como sigue: Supóngase sin pérdida de generalidad que el subárbol seleccionado en las fases precedentes es T_k^a , (en caso contrario se reordenan los subíndices), y sean $x'_1 \in e'_1 = [u'_1, v'_{i(1)}]$, $x'_2 \in e'_2 = [u'_2, v'_{i(2)}]$ la solución 2-varianza obtenida aplicando el algoritmo 2-Var(T_k^N).

- 3) **Sustitución** de la arista e_k por las dos aristas obtenidas haciendo $e_k \leftarrow e'_1$ y $e_{k+1} \leftarrow e'_2$.
- 4) **Resolución** del problema restringido $PR(e_1, \dots, e_{k+1})$, (pasos 2 a 7 del algoritmo p-Var(T) para $p = k + 1$). Para ello se resuelve el problema $PR(e_1, \dots, e_{k+1}; \mathcal{A})$ para cada una de las $N(e_1, \dots, e_{k+1})$ asignaciones existentes.

ALGORITMO $H_2(T)$ *Pasos 0, 1, 2, 3***Igual** que los Pasos 0, 1, 2, 3 del algoritmo $H_1(T)$.*Paso 4***Resolver** el problema 2-varianza en T_k^N .**Obtener** la solución: $X'(i) = (x'_i, u'_i)$, $i = 1, 2$, mediante el algoritmo 2-VAR(T_k^N).*Paso 5***Hacer** $e_k \leftarrow e'_1 = [u'_1, v'_{i(1)}]$, $e_{k+1} \leftarrow e'_2 = [u'_2, v'_{i(2)}]$.**Hacer** $\hat{V} = \emptyset$, $\hat{V}_j = \emptyset$, $V_j^a = \emptyset$, para $j = 1, \dots, k+1$.**Inicializar** a cero las filas $\text{aux}(j)$, $j = 1, \dots, k+1$ de la matriz de valores auxiliares.*Paso 6***Resolver** el problema restringido $PR(e_1, \dots, e_{k+1})$ (pasos 2-7 del algoritmo p -Var(T), con $p = k+1$).**Obtener** la solución $X_k^* = (x_1^*, \dots, x_{k+1}^*)$, V_j^a , $\text{aux}(j)$, para $j = 1, \dots, k+1$.*Paso 7***Hacer** $k \leftarrow k+1$, $z_s(X_k^*) \leftarrow Z_0$, $X^*(i) = (x_i^*, u_i)$, para $i = 1, \dots, k$.**Si** $k < p$, **entonces*** **Ir** al paso 2.**En caso contrario** parar. Los valores $z_s(X_p^*)$, $X^*(i)$, V_i^a , para $i = 1, \dots, p$ constituyen la solución aproximada del problema.**Análisis de la Complejidad**Al igual que en $H_1(T)$ la complejidad de los pasos 0 a 3 es $O(n^4)$.

Los pasos 4 a 7 constituyen la etapa k -ésima del algoritmo (paso de k a $k+1$ servicios). El paso 4 se ejecuta en tiempo $O(n^4)$. La complejidad de los pasos 5 a 7 viene dada por el paso 6 donde se resuelve el problema restringido $PR(e_1, \dots, e_{k+1})$. La obtención y resolución de cada uno de los $N(e_1, \dots, e_{k+1})$ subproblemas de programación cuadrática tiene una complejidad de $O(p^5(n -$

2)) (con $p = k + 1$). Como por el teorema 4.2.8 en el peor de los casos es $N(e_1, \dots, e_{k+1}) \leq (n-1)^k$, la complejidad del paso 6 resulta $O((k+1)^5(n-2)(n-1)^k)$. Por tanto, la etapa k -ésima se ejecuta en tiempo $O(n^4) + O((k+1)^5n^{k+1})$.

Dicha etapa se repite $p - 2$ veces, hasta que $k + 1 = p$, resultando que la complejidad del algoritmo es

$$O(n^4) + (p - 2)[O(n^4) + O(p^5n^p)]$$

y por tanto de orden $O(p^6n^p)$.

Para valores pequeños de p : $p = 3, 4$, el algoritmo $H_2(T)$ proporciona mejores soluciones que el algoritmo $H_1(T)$ prácticamente con el mismo esfuerzo computacional. Esta mejora persiste para valores superiores de p , aunque la complejidad de $H_2(T)$ aumenta considerablemente respecto a la del algoritmo $H_1(T)$. Para valores bajos de p es preferible por tanto $H_2(T)$, y para valores más elevados la elección del algoritmo dependerá de factores de decisión complementarios, (mejora de la aproximación frente a aumento de complejidad).

Ejemplo

El algoritmo $H_2(T)$ aplicado al árbol de los ejemplos precedentes proporciona los siguientes resultados:

$$k = 2 \rightarrow k = 3$$

$$V_2^a = \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}\}$$

2-VAR(T_2^N)	
$e'_1 = [v_9, v_{10}]$	$x'_1 = 3.93459$
$e'_2 = [v_{12}, v_{15}]$	$x'_2 = 3.363536$

$$\text{Aristas: } \{[v_3, v_{20}], [v_9, v_{10}], [v_{12}, v_{15}]\}$$

$$p = 3$$

$$z_s(x_i^*, T_i^a)_R$$

$e_1 = [v_3, v_{20}]$	$x_1^* = 2.869212$	$\{v_1, v_2, v_3, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}\}$	33.78128
$e_2 = [v_9, v_{10}]$	$x_2^* = 2.985709$	$\{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{16}\}$	20.53897
$e_3 = [v_{12}, v_{15}]$	$x_3^* = 3.395094$	$\{v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$	15.1675

$$z_s(X_3^*) = 25.80319$$

$$k = 3 \longrightarrow k = 4$$

$$V_3^a = \{v_1, v_2, v_3, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}\}$$

2-VAR(T_3^N)	
$e'_1 = [v_2, v_3]$	$x'_1 = 2.207472$
$e'_2 = [v_{17}, v_{19}]$	$x'_2 = 7.455261$

$$\text{Aristas: } \{[v_9, v_{10}], [v_{12}, v_{15}], [v_2, v_3], [v_{17}, v_{19}]\}$$

$$p = 4$$

$$z_s(x_i^*, T_i^a)_R$$

$e_1 = [v_9, v_{10}]$	$x_1^* = 2.376945$	$\{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$	22.18245
$e_2 = [v_{12}, v_{15}]$	$x_2^* = 3.522978$	$\{v_1, v_2, v_3, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}\}$	15.15936
$e_3 = [v_2, v_3]$	$x_3^* = 3.582458$	$\{v_1, v_2, v_3\}$	10.02628
$e_4 = [v_{17}, v_{19}]$	$x_4^* = 5.485034$	$\{v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}\}$	8.391546

$$z_s(X_4^*) = 16.90957$$

$$k = 4 \longrightarrow k = 5$$

$$V_4^a = \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$$

2-VAR(T_4^N)	
$e'_1 = [v_4, v_{10}]$	$x'_1 = 8.019595$
$e'_2 = [v_8, v_9]$	$x'_2 = 9.722553$

$$\text{Aristas: } \{[v_{12}, v_{15}], [v_2, v_3], [v_{17}, v_{19}], [v_4, v_{10}], [v_8, v_9]\}$$

$$p = 5$$

$$z_s(x_i^*, T_i^a)_R$$

$e_1 = [v_{12}, v_{15}]$	$x_1^* = 3.560234$	$\{v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$	15.16363
$e_2 = [v_2, v_3]$	$x_2^* = 3.801386$	$\{v_1, v_2, v_3, v_{20}\}$	10.00013
$e_3 = [v_{17}, v_{19}]$	$x_3^* = 5.96115$	$\{v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}\}$	10.08291
$e_4 = [v_4, v_{10}]$	$x_4^* = 8.215996$	$\{v_4, v_5, v_{10}\}$	6.636193
$e_5 = [v_8, v_9]$	$x_5^* = 9.906876$	$\{v_6, v_7, v_8, v_9\}$	9.534378

$$z_s(X_5^*) = 11.2873$$

$$k = 5 \rightarrow k = 6$$

$$V_5^a = \{v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$$

2-VAR(T_5^N)	
$e'_1 = [v_{11}, v_{12}]$	$x'_1 = 4.210671$
$e'_2 = [v_{13}, v_{14}]$	$x'_2 = 5.663213$

Aristas: $\{[v_2, v_3], [v_{17}, v_{19}], [v_4, v_{10}], [v_8, v_9], [v_{11}, v_{12}], [v_{13}, v_{14}]\}$

p = 6	$z_s(x_i^*, T_i^a)_R$	
$e_1 = [v_2, v_3]$	$x_1^* = 2.231105$	$\{v_1, v_2, v_3\}$
$e_2 = [v_{17}, v_{19}]$	$x_2^* = 7.429067$	$\{v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}\}$
$e_3 = [v_4, v_{10}]$	$x_3^* = 9.105681$	$\{v_4, v_5, v_{10}\}$
$e_4 = [v_8, v_9]$	$x_4^* = 10.71666$	$\{v_6, v_7, v_8, v_9\}$
$e_5 = [v_{11}, v_{12}]$	$x_5^* = 5.38736$	$\{v_{11}, v_{12}\}$
$e_6 = [v_{13}, v_{14}]$	$x_6^* = 4.628053$	$\{v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$

$$z_s(X_6^*) = 11.02435$$

En las siguientes tablas se comparan los resultados proporcionados por los dos heurísticos con los del algoritmo P-VAR(T) para cada uno de los casos considerados, (salvo para $p = 2$ ya que obviamente son los mismos). Cuando el resultado sea el mismo se representará con un guión: “ — ”.

p = 3

P-VAR(T)		$H_2(T)$		$H_1(T)$	
e_i	x_i^*	e_i	x_i^*	e_i	x_i^*
$[v_3, v_{20}]$	2.869212	—	—	—	2.197612
$[v_9, v_{10}]$	2.985709	—	—	—	3.93459
$[v_{12}, v_{15}]$	3.395094	—	—	—	3.363536
$z_s(X_3^*) = 25.80319$		—		$z_s^* = 26.09793$	

p = 4

P-VAR(T)		$H_2(T)$		$H_1(T)$	
e_i	x_i^*	e_i	x_i^*	e_i	x_i^*
$[v_2, v_3]$	3.582458	—	—	$[v_1, v_2]$	4.622384
$[v_9, v_{10}]$	2.376945	—	—	—	3.93459
$[v_{12}, v_{15}]$	3.522978	—	—	—	3.363536
$[v_{17}, v_{19}]$	5.485034	—	—	$[v_{18}, v_{19}]$	5.890223
$z_s(X_4^*) = 16.90957$		—		$z_s^* = 21.03601$	

p = 5

P-VAR(T)		$H_2(T)$		$H_1(T)$	
e_i	x_i^*	e_i	x_i^*	e_i	x_i^*
$[v_2, v_3]$	3.801386	—	—	$[v_1, v_2]$	4.622384
$[v_4, v_{10}]$	8.215996	—	—	—	9.637732
$[v_8, v_9]$	9.906876	—	—	—	9.637732
$[v_{12}, v_{15}]$	3.560234	—	—	—	3.363536
$[v_{17}, v_{19}]$	5.96115	—	—	$[v_{18}, v_{19}]$	5.890223
$z_s(X_5^*) = 11.2873$		—		$z_s^* = 15.363236$	

p = 6

P-VAR(T)		$H_2(T)$		$H_1(T)$	
e_i	x_i^*	e_i	x_i^*	e_i	x_i^*
$[v_2, v_3]$	2.681717	—	2.231105	$[v_1, v_2]$	4.622384
$[v_4, v_{10}]$	8.732145	—	9.105681	—	9.637732
$[v_8, v_9]$	10.37667	—	10.71666	—	9.437569
$[v_{11}, v_{12}]$	6.01409	—	5.38736	—	4.210671
$[v_{15}, v_{16}]$	3.044754	$[v_{13}, v_{14}]$	4.628053	$[v_{13}, v_{14}]$	5.663213
$[v_{17}, v_{19}]$	6.930499	—	7.429067	$[v_{18}, v_{19}]$	5.890223
$z_s(X_6^*) = 10.1433$		$z_s^* = 11.02435$		$z_s^* = 13.69938$	

En este ejemplo se observa cómo las soluciones proporcionadas por $H_2(T)$ son siempre mejores que las de $H_1(T)$. Además la solución exacta es alcanzada por $H_2(T)$ en los casos $p = 3, 4, 5$ comenzando a desviarse en $p = 6$. En este último caso el porcentaje de aumento que sobre la función objetivo proporciona $H_2(T)$ respecto del óptimo es inferior al 10% (un 8.68%). En todos los valores estudiados de p las soluciones producidas por $H_1(T)$ se desvían del óptimo, y a partir de $p = 4$ están situadas en otras aristas. El aumento porcentual de la solución producida por $H_1(T)$ respecto del valor óptimo está en torno a un 30% (35.05% en el caso $p = 6$).

4.4 Problemas p -varianza en redes generales

Sobre redes generales el problema de la p -varianza es NP-duro, por tanto se han de utilizar procedimientos heurísticos para obtener soluciones aproximadas del problema. Otros problemas NP-duros en redes generales, como los clásicos del p -centro y la p -mediana, han sido tratados mediante una gran variedad de algoritmos heurísticos, no sólo porque permiten abordar problemas de gran tamaño, sino porque proporcionan buenas soluciones iniciales para los algoritmos exactos, los cuales convergen más rápidamente. Los algoritmos heurísticos diseñados para estos problemas trabajan sobre un CDF que contiene alguna solución óptima: el conjunto V de vértices para la p -mediana (Hakimi [16]), y el conjunto de $|E|/|V|^2$ centros locales para el p -centro (Kariv y Hakimi [28]). Por esta razón no es de extrañar que la aproximación obtenida coincida con la solución óptima en más de una ocasión.

Sin embargo, el problema de la p -varianza no presenta CDF, por ello no se dispone de un conjunto finito de puntos de la red del cual seleccionar alguna aproximación a la solución. Una forma de abordarlo consiste en sustituir el problema de la p -varianza por uno aproximado, como es el problema del conjunto de vértices p -varianza (también NP-duro), y sobre este último aplicar algoritmos heurísticos que trabajen sobre los vértices de la red. La solución obtenida actuará como solución aproximada del problema inicial.

La cuestión que plantea esta iniciativa es la de su eficacia. Es decir, surge la pregunta de si el uso de algoritmos heurísticos que operen sobre todo el conjunto

de puntos de la red puede producir mejores aproximaciones que las obtenidas trabajando sobre el conjunto de vértices. La respuesta a esta pregunta dependerá en gran medida del algoritmo utilizado, y en este sentido se pueden diseñar distintos algoritmos para comparar sus resultados.

En esta línea de trabajo se sitúa el estudio que sigue a continuación, en el cual se pretende efectuar una primera indagación en este amplio problema. Para ello se proponen tres procedimientos heurísticos para resolver el problema en una red N . El primero consiste en aplicar sobre los vértices de la red una estrategia ya utilizada en el problema p -mediana, y considerar como solución aproximada del problema al conjunto de p -vértices obtenido. Los otros dos algoritmos heurísticos trabajan sobre todos los puntos de la red (no necesariamente vértices). El propósito será efectuar un estudio del comportamiento de estos dos últimos algoritmos frente al que opera sobre los vértices, y comparar su eficacia en términos de los valores que toma la función objetivo en las aproximaciones obtenidas.

4.4.1 Algoritmos heurísticos

Los procedimientos heurísticos clásicos que se describen a continuación: generación, eliminación e intercambio (véase Moreno [47]) se aplicarán sobre el conjunto V al modelo varianza para obtener un conjunto de vértices p -varianza solución aproximada al problema.

En todos los algoritmos que siguen se supone calculada la matriz de distancias entre todos los pares de vértices de N .

Heurística de generación (Greedy)

Sea un subconjunto de vértices $X_v \subset V$, con un valor asociado de la función varianza dado por $z_s(X_v) = \sum_{v_i \in V} w_i [d(v_i, X_v) - z_m(X_v)]^2$. Para cada $v_t \in V \setminus X_v$ el decremento que sufre el valor de la función varianza cuando se añade el vértice v_t al conjunto X_v viene dado por

$$\delta(X_v, v_t) = z_s(X_v) - z_s(X_v \cup \{v_t\})$$

El algoritmo funciona como sigue: partiendo del conjunto inicial formado por el vértice 1-varianza: $X_v = \{v^*\}$, en cada etapa se añade a X_v el vértice que mayor decremento produzca en el valor de la función objetivo, hasta que $|X_v| = p$.

ALGORITMO $H_1/V(N)$.

Paso 0

Calcular un vértice 1-varianza v^* mediante el algoritmo 1/VAR/V.

Sea $X_v \leftarrow \{v^*\}$, $Z = z_s(v^*)$.

Paso 1

Repetir hasta que $|X_v| = p$:

* **Seleccionar** $v_t \in V \setminus X_v$ tal que

$$\delta(X_v, v_t) = \max \{ \delta(X_v, v_j), v_j \in V \setminus X_v \}$$

* **Hacer** $X_v \leftarrow X_v \cup \{v_t\}$, $Z \leftarrow z_s(X_v \cup \{v_t\})$.

Paso 2

Parar: X_v , Z constituyen la solución aproximada.

Complejidad

El paso 0 se ejecuta en tiempo $O(n^2)$. Cada etapa del algoritmo supone repetir el algoritmo 1/VAR/V sobre el conjunto $V \setminus X_v$ para seleccionar el vértice que entra. La complejidad es pues $O(pn^2)$, ya que hay $p - 1$ etapas.

Heurística de eliminación

Dado $X_v \subseteq V$, para cada $v_t \in X_v$ el *ahorro* que sobre el valor de la varianza de X_v supone la eliminación de v_t viene dado por

$$\beta(X_v, v_t) = z_s(X_v \setminus \{v_t\}) - z_s(X_v)$$

Con lo cual partiendo del conjunto inicial $X_v = V$ en cada etapa del algoritmo se elimina el vértice que menos ahorro produzca en el valor de la función objetivo.

ALGORITMO $H_2/V(N)$.

Paso 0

Hacer $X_v \leftarrow V$, $Z = 0$, $z_s(X_v) = 0$.

Paso 1

Repetir hasta que $|X_v| = p$:* **Seleccionar** $v_t \in X_v$ tal que

$$\beta(X_v, v_t) = \min \{ \beta(X_v, v_j), v_j \in X_v \}$$

* **Hacer** $X_v \leftarrow X_v \setminus \{v_t\}$, $Z \leftarrow z_s(X_v \setminus \{v_t\})$.

Paso 2

Parar: X_v , Z constituyen la solución aproximada.**Complejidad**

En cada iteración del algoritmo la selección del vértice que sale requiere $O(n^2)$ operaciones. La complejidad es $O((n-p)n^2)$ puesto que se han de eliminar $n-p$ vértices.

Heurística de intercambio

Sea $X_v \subset V$. Dados los vértices $v_t \in X_v$, $v_k \in V \setminus X_v$, la variación en el valor de la función objetivo cuando el servicio localizado en el vértice v_t es trasladado al vértice v_k sin alterarse la localización de los demás servicios viene dada por

$$\alpha(X_v, v_t, v_k) = z_s(X_v) - z_s((X_v \setminus \{v_t\}) \cup \{v_k\})$$

Para cada $v_t \in X_v$ se selecciona el vértice $v_j \in V \setminus X_v$ que produzca el máximo valor de α . Si $\alpha(X_v, v_t, v_j) > 0$ se efectúa el cambio. El algoritmo finaliza cuando ningún cambio mejora la función objetivo.

La eficacia del algoritmo depende en gran medida de la elección de un buen conjunto inicial. En este caso se utilizará como conjunto inicial cualquiera de los proporcionados por los algoritmos precedentes, (elección que produce buenos resultados en el caso de la p -mediana, Labbé [35]).

ALGORITMO $H_3/V(N)$.*Paso 0*

Sea X_v la solución obtenida mediante $H_1/V(N)$ (o $H_2/V(N)$).

Hacer $i \leftarrow 1$, $v_t \leftarrow v_{l_i}$ (primer elemento de la lista X_v).

Paso 1

Calcular $v_j \in V \setminus X_v$ tal que

$$\alpha(X_v, v_t, v_j) = \max \{ \alpha(X_v, v_t, v_k), v_k \in V \setminus X_v \}$$

Paso 2

Si $\alpha(X_v, v_t, v_j) > 0$, entonces

* Hacer $X_v \leftarrow (X_v \setminus \{v_t\}) \cup \{v_j\}$

* Hacer $i \leftarrow 1$, $v_t \leftarrow v_j$.

* Ir al Paso 1.

En caso contrario:

* Si v_t es el último elemento de X_v entonces

* * Ir al Paso 3.

* En caso contrario:

* * Hacer $i \leftarrow i + 1$.

* * Seleccionar $v_t \leftarrow v_{l_i}$.

* * Ir al Paso 1.

Paso 3

Parar: X_v es la solución aproximada.

Complejidad

Para cada $v_t \in X_v$ la operación de intercambio se efectúa en tiempo $O(n(n-p))$. La complejidad del algoritmo dependerá del número de intercambios efectuados. Al objeto de limitar éste número se ha introducido una modificación en el Paso 2 del algoritmo: el vértice v_j que entra se sitúa en el lugar l_i que tiene el vértice v_t que sale, y el proceso de intercambio continúa a partir de este lugar. De esta forma cada lugar de la lista es visitado una sola vez. Como en un mismo lugar se pueden efectuar a lo más $n-p$ intercambios, la complejidad resultante es $O(pn(n-p)^2)$.

Heurísticos sobre la red

Dada una red $N(V, E)$, sea $\{V_1^a, \dots, V_k^a\}$ una partición del conjunto V tal que $V_i^a \neq \emptyset, \forall i = 1, \dots, k$. Para cada $i = 1, \dots, k$ la red inducida por V_i^a es la subred $N_i = (V_i^a, E_i)$ tal que $e_{kj} = [v_k, v_j] \in E_i$ si y sólo si $v_k, v_j \in V_i^a$ y $e_{kj} \in E$.

La notación N_i^N indicará la red N_i de sistema normalizado de pesos, tal que $\forall v_j \in V_i^a$,

$$w_j^N = \frac{w_j}{w(V_i^a)} = \frac{w_j}{\sum_{v_k \in V_i^a} w_k}$$

Dado un punto $x \in N_i$ la varianza de x relativa a la subred N_i es la varianza de x en la red N_i^N , dada por

$$z_s(x, N_i^N) = \sum_{v_k \in V_i^a} w_k^N [d(v_k, x) - z_m(x, N_i^N)]^2$$

donde $z_m(x, N_i^N) = \sum_{v_k \in V_i^a} w_k^N d(v_k, x)$ es la función mediana de x sobre N_i^N .

El heurístico que a continuación se describe opera como sigue: partiendo de la solución $X_v \subset V$ proporcionada por el heurístico de intercambio, se calcula el punto de mínima varianza sobre cada una de las subredes inducidas por la partición que sobre el conjunto de vértices produce la solución de partida.

Si la solución inicial es $X_v = \{v_1^*, \dots, v_p^*\}$ la partición de V se define mediante los conjuntos

$$V_i^a = \{v_k \in V / d(v_k, v_i^*) \leq d(v_k, v_j^*), \forall v_j^* \in X_v, v_j^* \neq v_i^*\}$$

donde $V_i^a \neq \emptyset, i = 1, \dots, p$ ya que $v_i^* \in V_i^a$. En caso de existir algún v_k equidistante, se asigna arbitrariamente.

ALGORITMO H_4/N .

Paso 0

Sea X_v la solución obtenida mediante el algoritmo $H_3/V(N)$.

Calcular la partición asociada $\{V_1^a, \dots, V_p^a\}$.

Paso 1

Repetir para $i = 1, \dots, p$:

- * **Calcular** la matriz de distancias de N_i .
- * **Calcular** pesos normalizados de N_i .
- * **Obtener** el punto de mínima varianza x_i^* de N_i mediante $1/\text{VAR}/N_i^N$.

Paso 2

Calcular $z_s(x_1^*, \dots, x_p^*)$.

Parar: $X_p^* = (x_1^*, \dots, x_p^*)$, $z_s(X_p^*)$ constituyen la solución aproximada.

Complejidad

La partición de V requiere una pasada sobre todos los vértices, (tiempo $O(n)$). El cálculo de la matriz de distancias sobre cada subred y la aplicación del algoritmo 1-varianza se efectúa en tiempo $O(mn \log n)$ si la red es planar o bien $m \in O(n^2/\log n)$. Por tanto la complejidad del algoritmo es $O(pmn \log n)$.

El siguiente heurístico es una adaptación a una red cíclica del procedimiento descrito en el algoritmo $H_1(T)$, y opera como sigue: suponiendo localizados k servicios x_1^*, \dots, x_k^* , sea $\{V_1^a, \dots, V_k^a\}$ la partición de V inducida por tal localización, y $\{N_1^N, \dots, N_k^N\}$ el correspondiente conjunto de subredes asociadas.

La etapa k -ésima (paso de k a $k+1$ puntos) se repite hasta que $k = p$. En ella se selecciona la red N_t^N cuyo servidor x_t^* aporte la mayor varianza relativa. Si $|V_t^a| \geq 2$ y $x_t^* \notin V_t^a$, la partición $\{V_{t_1}^a, V_{t_2}^a\}$ que el servicio $x_t^* \in [u, v] \in E_t$ induce en la demanda nodal de N_t^N viene definida por

$$V_{t_1}^a = \{v_k \in V_t^a : d(v_k, u) + d(u, x_t^*) \leq d(v_k, v) + d(v, x_t^*)\}$$

y $V_{t_2}^a = V_t^a \setminus V_{t_1}^a$. Caso de ser $x_t^* \in V_t^a$ o bien $V_{t_i}^a = \emptyset$ para algún $i = 1, 2$ se calcula la partición asociada al conjunto de vértices 2-varianza obtenido por el algoritmo de generación aplicado a V_t^a .

En cada una de las subredes asociadas $N_{t_i} = (V_{t_i}, E_{t_i})$, $i = 1, 2$ y previa normalización del sistema de pesos se calcula el punto de mínima varianza $x_{t_i}^*$, $i = 1, 2$. Finalmente el punto x_t^* se elimina de la actual solución y es sustituido por los dos servicios $x_{t_1}^*, x_{t_2}^*$.

Este proceso se describe a continuación:

ALGORITMO H_5/N .*Paso 0*

Calcular el punto de mínima varianza x_s^* de N mediante el algoritmo $1/\text{VAR}/N$.

Hacer $k \leftarrow 1$, $X_k \leftarrow \{x_s^*\}$.

Paso 1

Calcular la partición $\{V_1^a, \dots, V_k^a\}$ asociada a X_k .

Si $V_j^a = \emptyset$, para algún $j \in \{1, \dots, k\}$, entonces:

* Hacer $k \leftarrow k - 1$, $X_k \leftarrow X_k \setminus \{x_j^*\}$.

Repetir para cada $j = 1, \dots, k$:

* Calcular la matriz de distancias de N_j y normalizar pesos.

* Calcular $z_s(x_j^*, N_j^N)$, $z_m(x_j^*, N_j^N)$.

Paso 2

Calcular $I_{max} \subseteq \{1, \dots, k\}$ tal que para $i \in I_{max}$ se verifique

$$z_s(x_i^*, N_i^N) = \max_{|V_j^a| \geq 2} \{z_s(x_j^*, N_j^N), j = 1, \dots, k\}$$

Si $|I_{max}| = 1$, seleccionar $t \in I_{max}$.

En caso contrario:

* Calcular $I' \subseteq I_{max}$ tal que para $i \in I'$ se verifique

$$z_m(x_i^*, N_i^N) = \max_{|V_j^a| \geq 2} \{z_m(x_j^*, N_j^N), j \in I_{max}\}$$

* Si $|I'| = 1$, seleccionar $t \in I'$.

* En caso contrario seleccionar arbitrariamente $t \in I'$.

Paso 3

Si $x_t^* \notin V_t^a$, entonces:

* Calcular la partición $\{V_{t_1}^a, V_{t_2}^a\}$ inducida por x_t^* en V_t^a .

* Si $V_{t_i}^a = \emptyset$, para algún $i = 1, 2$, entonces:

** Calcular $v_{t_1}^*, v_{t_2}^*$ mediante el algoritmo H_1 (Greedy) sobre V_t^a .

** Calcular la partición $\{V_{t_1}^a, V_{t_2}^a\}$ asociada.

En caso contrario ($x_t^* \in V_t^a$):

* Hacer $v_{t_1}^* \leftarrow x_t^*$.

* Calcular $v_{t_2}^*$ mediante el algoritmo H_1 (Greedy) sobre V_t^a .

* Calcular la partición $\{V_{t_1}^a, V_{t_2}^a\}$ asociada.

Paso 4

Repetir para $i = 1, 2$:

- * **Calcular** la matriz de distancias de N_{t_i} y normalizar pesos.
- * **Calcular** el punto de mínima varianza $x_{t_i}^*$ de $N_{t_i}^N$ mediante el algoritmo $1/\text{VAR}/N_{t_i}^N$.

Paso 5

Sustituir x_t^* por $x_{t_1}^*, x_{t_2}^*$ en X_k .

Hacer $k \leftarrow k + 1$.

Si $k < p$, entonces Ir al Paso 1.

En caso contrario

- * **Calcular** $z_s(X_k)$.
- * **Parar:** $X_p, z_s(X_p)$ constituyen la solución aproximada.

Complejidad

El paso 0 se ejecuta en $O(mn \log n)$. En el paso 1 se reajustan en tiempo $O(n)$ los conjuntos de asignación de la actual solución (ya que puede haber variaciones en la asignación de la demanda nodal al pasar de k a $k + 1$ servicios). Después se calculan las matrices de distancias sobre cada una de las subredes (tiempo $O(kmn \log n)$) para obtener todas las varianzas relativas (tiempo $O(kn)$ y después seleccionar la subred N_t^N sobre la que efectuar la partición ($O(k)$). La complejidad de este paso es pues $O(kmn \log n)$.

El paso 2 se ejecuta en $O(p)$, y el paso 3 en $O(n^2)$ en el peor de los casos (lo que sucede si algún $V_{t_i}^a = \emptyset$). El paso 4 se ejecuta en tiempo $O(mn \log n)$, ya que se aplica dos veces el algoritmo 1-varianza. El cálculo de la varianza de la solución final (paso 5) se efectúa en tiempo $O(n)$ mediante una pasada sobre V . La complejidad la etapa k -ésima del algoritmo es por tanto

$$O(kmn \log n) + O(mn \log n)$$

resultando que la complejidad del algoritmo es $O(p^2 mn \log n)$ ya que se ejecutan $p - 1$ iteraciones.

En cada iteración la mayor complejidad la aporta el paso 1 debido al cálculo de las matrices de distancias sobre todos los *clusters* al objeto de obtener todas las varianzas relativas. Introduciendo una modificación sobre este proceso se puede rebajar la complejidad de este paso, y del algoritmo, a $O(pmn \log n)$.

Para ello asociado a cada conjunto parcial de soluciones $X_k = \{x_1^*, \dots, x_k^*\}$ se considera el conjunto de varianzas relativas

$$Z_s^k = \{z_s(x_1^*, N_1^N), \dots, z_s(x_k^*, N_k^N)\}$$

y el conjunto de medianas asociado $Z_m^k = \{z_m(x_1^*, N_1^N), \dots, z_m(x_k^*, N_k^N)\}$. Cada uno de los elementos de éstos conjuntos no requiere cálculo adicional ya que se obtiene directamente al aplicar el algoritmo 1-varianza en la subred correspondiente. El algoritmo modificado es como sigue

ALGORITMO H₅/N (modificado)

Paso 0

Hacer $k \leftarrow 1$, $V_k^a \leftarrow V$, $N_k^N \leftarrow N$.

Calcular el punto de mínima varianza x_k^* de N_k^N mediante el algoritmo 1/VAR/ N_k^N .

Hacer $X_k \leftarrow \{x_1^*\}$, $Z_s^k \leftarrow \{z_s(x_1^*, N_1^N)\}$, $Z_m^k \leftarrow \{z_m(x_1^*, N_1^N)\}$.

Paso 1

Seleccionar $t \in \{1, \dots, k\}$ según Paso 2 del algoritmo anterior.

Paso 2

Calcular la partición $\{V_{t_1}^a, V_{t_2}^a\}$ según Paso 3 del algoritmo anterior.

Paso 3

Calcular $x_{t_1}^*$, $x_{t_2}^*$ según Paso 4 del algoritmo anterior.

Paso 4

Sustituir V_t^a por $V_{t_1}^a$, $V_{t_2}^a$ en partición de V .

Sustituir x_t^* por $x_{t_1}^*$, $x_{t_2}^*$ en X_k .

Sustituir $z_s(x_t^*, N_t^N)$ por $z_s(x_{t_i}^*, N_{t_i}^N)$, $i = 1, 2$ en Z_s^k .

Sustituir $z_m(x_t^*, N_t^N)$ por $z_m(x_{t_i}^*, N_{t_i}^N)$, $i = 1, 2$ en Z_m^k .

Hacer $k \leftarrow k + 1$.

Paso 5

Si $k < p$, entonces Ir al Paso 1.

En caso contrario:

* **Calcular** $z_s(X_k)$.

* **Parar:** X_k , $z_s(X_k)$ constituye la solución aproximada.

4.4.2 Experiencia computacional

A continuación se presentan los resultados obtenidos al ejecutar sobre un conjunto de redes aleatoriamente generadas los algoritmos $H_3/V(N)$, H_4/N y H_5/N modificado, (que abreviadamente se denotarán por H_3 , H_4 y H_5).

Se han considerado redes de $n = 20$ vértices y un número m variable de aristas, que inicialmente es $m = 30$ y va aumentando de 10 en 10 hasta llegar a 60. En las tablas que siguen cada red se identifica mediante estos valores como $N(n, m)$.

La generación de las redes se efectuó a partir de un árbol inicial, obtenido generando aleatoriamente aristas como enlaces entre pares de puntos seleccionados al azar de una lista de n elementos de forma que no hubiera ciclos, y aumentando posteriormente el número de enlaces aleatorios hasta conseguir el número deseado de aristas. Los pesos de los vértices y las longitudes de las aristas se generaron según distribuciones uniformes en $[1, 20]$ y $[5, 40]$, respectivamente. A continuación se describe el algoritmo para obtener el árbol generador inicial:

ALGORITMO ARBOL

Paso 0

Hacer $V_{\text{IN}} = V$, $V_{\text{FIN}} = \emptyset$, $E = \emptyset$.

Seleccionar aleatoriamente $v \in V_{\text{IN}}$.

Hacer $V_{\text{IN}} \leftarrow V_{\text{IN}} \setminus \{v\}$, $V_{\text{FIN}} \leftarrow V_{\text{FIN}} \cup \{v\}$.

Paso 1

Repetir hasta que $V_{\text{IN}} = \emptyset$:

* **Seleccionar** aleatoriamente $v \in V_{\text{IN}}$, $w \in V_{\text{FIN}}$.

* **Hacer** $E \leftarrow E \cup \{[v, w]\}$, $V_{\text{IN}} \leftarrow V_{\text{IN}} \setminus \{v\}$, $V_{\text{FIN}} \leftarrow V_{\text{FIN}} \cup \{v\}$.

Las tablas que se muestran a continuación reflejan los resultados experimentales obtenidos al aplicar los algoritmos H_i , $i = 3, 4, 5$ a cada una de las redes aleatoriamente generadas. Cada uno de los tipos de red $N(n, m)$ considerado se ejecutó 50 veces para el número de servicios p indicado, y las columnas marcadas con “ >> H_i ”, $i = 3, 4, 5$ reflejan el porcentaje de veces que H_i produjo la mejor solución. La columna indicada por “ % ” muestra la disminución porcentual media en el valor de la función varianza producida por la mejor solución respecto de la peor.

$N(20, 30)$	$\gg H_5$	%	$\gg H_4$	%	$\gg H_3$
$p = 4$	66%	32.5	34%	24.38	0
$p = 5$	52%	27.3	44%	35.07	4%
$p = 6$	52%	28.9	48%	44.04	0
$p = 8$	54%	40.02	46%	33.86	0
$p = 10$	42%	34.6	58%	23.2	0
$p = 12$	42%	41.3	52%	21.4	6%
$p = 15$	26%	38.1	46%	28.7	28%

$N(20, 40)$	$\gg H_5$	%	$\gg H_4$	%	$\gg H_3$
$p = 4$	46%	39.8	50%	43.28	4%
$p = 5$	38%	32.9	48%	30.2	4%
$p = 6$	44%	26.34	50%	28.56	6%
$p = 8$	42%	28.9	48%	36.21	10%
$p = 10$	36%	37.19	56%	41.5	8%
$p = 12$	30%	41.7	54%	36.4	16%
$p = 15$	22%	38.4	54%	40.3	24%

$N(20, 50)$	$\gg H_5$	%	$\gg H_4$	%	$\gg H_3$
$p = 4$	38%	36.9	42%	41.3	20%
$p = 5$	32%	34.39	54%	47.8	14%
$p = 6$	36%	39.6	46%	40.27	18%
$p = 8$	32%	41.8	44%	33.7	24%
$p = 10$	32%	38.4	46%	38.2	22%
$p = 12$	26%	40.12	48%	38.6	26%
$p = 15$	20%	39.47	52%	41.15	28%

$N(20, 60)$	$\gg H_5$	%	$\gg H_4$	%	$\gg H_3$
$p = 4$	38%	37.5	46%	32.6	16%
$p = 5$	30%	36.7	50%	30.5	20%
$p = 6$	32%	35.62	50%	39.18	18%
$p = 8$	28%	40.3	52%	38.2	20%
$p = 10$	22%	36.8	50%	35.2	28%
$p = 12$	20%	38.9	52%	36.4	28%
$p = 15$	16%	38.7	54%	37.5	30%

Del análisis de éstos resultados se puede observar que:

- El uso de heurísticos sobre las redes (H_4 o H_5) resulta globalmente mucho más eficaz que la aproximación nodal producida por H_3 . Para redes poco densas, donde el número de aristas no es muy superior al de vértices, y un número reducido de servicios ($p = 4, 5, 6$), los resultados proporcionados por H_4 y H_5 se muestran respectivamente superiores sobre los producidos sobre los vértices por H_3 en más de un 50% de las ocasiones, con porcentajes de disminución en el valor de la función objetivo en torno a un 30%.
- El heurístico H_5 (en cuya ejecución no se precisa ningún conjunto inicial de vértices) proporcionó los mejores resultados en el tipo $N(20, 30)$ y para $p = 4, 5, 6$. En general este heurístico fue superior al heurístico sobre los vértices H_3 , si bien el aumento del número de aristas, y sobre todo del número de servicios nivela su eficacia con H_3 (como sucede para $p = 10, 12$ y 15 en los tipos $N(20, 50)$ y $N(20, 60)$). En éste hecho el elevado número de servicios parece ser más influyente que el de la densidad de la red, sin embargo sería necesario un estudio más amplio para un resultado más concluyente sobre este punto.
- Por otra parte la eficacia del heurístico H_4 respecto de los demás se mantiene estable (produjo mejores soluciones en torno a un 50% de los casos). Este heurístico produjo mejores aproximaciones que H_3 en más del 75% de los casos en todos los tipos de redes y para $p = 4, \dots, 10$ servicios, (porcentaje que disminuyó ligeramente para $p=10, 12$ y 15 en $N(20, 60)$).

De éste análisis se deduce que las soluciones obtenidas sobre los puntos de la red son, en su mayor parte, más eficaces que las soluciones sobre los vértices. En éste sentido queda abierto el problema de estudiar las mejoras que el uso de heurísticas alternativas sobre los vértices puedan producir tanto sobre la solución nodal como en la solución obtenida a partir de ésta por H_4 , y comparar sus resultados frente a los de H_5 .

Un camino interesante puede ser la aplicación de estrategias metaheurísticas sobre el conjunto de vértices (como búsquedas tabú, procedimiento de Recristalización Simulada o algoritmos genéticos), utilizando la solución obtenida como punto de partida para el algoritmo H_4 , y analizar la eficacia que este tipo

de procedimientos introduce en la solución. También es conveniente desarrollar nuevas heurísticas sobre la red que operen independientemente de las soluciones nodales y que se muestren poco sensibles al aumento del número de servicios y de la densidad de la red.

Capítulo 5

Problema 1-varianza con demanda continuamente distribuida

5.1 Introducción

Una de las componentes consideradas en los problemas planteados en los capítulos precedentes es el carácter discreto de la demanda, al originarse ésta en los nodos de la red. De hecho el origen nodal de la demanda es asumido por la mayoría de las investigaciones sobre localización en redes desarrolladas en las pasadas tres décadas (véanse las revisiones hechas en [35], [3]). Sin embargo, como algunos autores apuntan ([7], [36], [5], [4]), esta restricción nodal sobre la demanda no es real en los casos en los que la demanda ocurre en el interior de las aristas. Aunque sea posible aproximar internodalmente esta demanda por algún número de nodos artificiales, este proceso puede dar lugar a un problema intratable.

El primer trabajo en que se consideran, de forma implícita, demandas sobre los puntos de las aristas es debido a Minieka [44]. En él se define la *mediana general absoluta* de una red como el punto de la red que minimiza la suma (no ponderada) de las distancias desde tal punto al punto más distante en cada arista. Posteriormente, Handler y Mirchandani [22] plantean un problema de localización *minisum* en una red donde la demanda se produce continuamente a lo largo de las

aristas con una probabilidad de función de densidad arbitraria, así como discretamente sobre los nodos. La solución se obtiene de forma aproximada mediante una discretización del problema, reemplazando la demanda continua producida en cada arista por un punto de concentración de la demanda. Sin embargo no se caracteriza el comportamiento de la función objetivo en función de la localización del servicio.

El primer trabajo que aborda este último aspecto es debido a Chiu [7]. Considerando que la demanda se produce tanto sobre los nodos de la red como de forma continua sobre las aristas, define la función *mediana continua* como la función coste esperado en atender la demanda de la red, caracteriza dicha función y propone dos algoritmos: uno exacto para localizar el punto que minimiza dicha función sobre una red árbol, y otro heurístico para obtener una solución aproximada del problema sobre una red general.

Posteriormente, en [50] se aborda la localización de un servicio en situación de demanda continua, donde fundamentalmente se prueba la concavidad de la función objetivo sobre cualquier arista contenida en un ciclo, cuando la densidad de la demanda es uniforme. Otras extensiones se dirigen a localizar p servicios ($p = 2$ ó $p > 2$). Entre ellas están el trabajo de Cavalier y Sherali [5] en el que, suponiendo la demanda uniformemente distribuida sobre todas las aristas de la red, resuelven el problema de la p -mediana continua sobre un grafo-cadena (grafo cíclico) y también extienden los resultados de [45] a la 2-mediana continua sobre una red árbol. Este último problema es resuelto por Brandeau et al. [4] considerando funciones de densidad cualesquiera. El problema de la 1-mediana continua es revisado por Labbé [36], dando un algoritmo lineal muy simple (extensión al caso continuo del algoritmo de Goldman [13]) para resolver el problema sobre una red árbol.

Otro tipo de extensiones se refieren a problemas p -mediana con saturación de servicios (esto es, capacidad limitada para absorber la demanda) en grafos cíclicos (véase [53], [55]), o bien problemas multiperiodo de localización-asignación, ([6], [54]), donde se consideran p estados o periodos tal que la demanda aumenta dinámicamente de un periodo a otro, y en donde se localiza secuencialmente un servicio adicional en cada periodo, determinándose entonces la consiguiente reasignación de usuarios a todos los servicios localizados hasta el momento.

En todas estas variaciones del problema el objetivo es la minimización del coste total esperado, y por tanto el criterio involucrado es el *minisum*. Sin embargo, hasta la fecha no se ha desarrollado ningún trabajo que aborde la localización de servicios, en situación de demanda continua, con criterios de igualdad.

No obstante, el uso de alguno de estos criterios puede ser aconsejable en determinadas aplicaciones reales, sobre todo en las relativas a la prestación de servicios públicos, como pueden ser los servicios de reparaciones de vías de comunicación y transporte, o la localización de servicios de emergencia y/o asistencia en carretera (ambulancias, servicios médicos ó de reparaciones), donde la demanda del servicio (por ejemplo, en caso de accidente) puede surgir en cualquier punto de la red.

En este sentido se enfoca el trabajo desarrollado en este capítulo. Bajo la hipótesis de una demanda que se produce no sólo en los nodos de la red, sino también de forma continua sobre las aristas de la misma según una determinada función de densidad, se abordará el problema de localizar un servicio en la red tal que minimice la varianza de la distancia recorrida por todos los usuarios al servicio, problema que se denominará 1-varianza continua.

5.2 La función varianza continua

Sea $N(V, E)$ una red no dirigida de n vértices y m aristas. A cada vértice $v_i \in V$, y a cada arista $e \in E$, se les asocia un peso positivo $w_i > 0$, y $p_e > 0$, (p_{kj} referido a la arista $e_{kj} = [v_k, v_j]$), que representa la fracción de la demanda originada en cada vértice y en cada arista, respectivamente. Sean $V' \subset V$ y $E' \subset E$. Entonces el peso de ambos subconjuntos es:

$$w_V(V') = \sum_{v_i \in V'} w_i, \quad \text{y} \quad w_E(E') = \sum_{e \in E'} p_e$$

Denotando $w_V = w_V(V)$ y $w_E = w_E(E)$, el peso total de la red es

$$w(N) = w_V + w_E$$

La normalización del sistema total de pesos de la red supone que $w(N) = 1$.

La demanda producida sobre cada arista $e_{kj} = [v_k, v_j] \in E$ se distribuye según una función de densidad $f_{kj}(y)$, (f_e referida a la arista e), continua y no

negativa sobre $y \in [0, l_{kj}]$, verificándose

$$\int_{y \in e_{kj}} f_{kj}(y) dy = \int_0^{l_{kj}} f_{kj}(y) dy = 1$$

Sea $F_{kj}(x)$ la correspondiente función de distribución, ($F_e(x)$ referida a la arista e), con

$$F_{kj}(x) = \int_0^x f_{kj}(y) dy \quad \text{para } x \in [0, l_{kj}]$$

Sin pérdida de generalidad se supondrá ausencia de impulsos en la función de densidad, (esto es, puntos de probabilidad no nula), ya que siempre se puede introducir un nodo ficticio en dichos puntos. Por tanto, $F_e(x)$ es continua en $x \in e$, $\forall e \in E$. Asociados con cada distribución de la demanda están los momentos centrales:

$$\mu_{kj} = \int_0^{l_{kj}} y f_{kj}(y) dy, \quad \mu_{kj}^{(2)} = \int_0^{l_{kj}} y^2 f_{kj}(y) dy$$

Para cada $x \in [0, l_{kj}]$, la notación $\mu_{kj}(x)$ y $\mu_{kj}^{(2)}(x)$ designa a las funciones

$$\mu_{kj}(x) = \int_0^x y f_{kj}(y) dy, \quad \mu_{kj}^{(2)}(x) = \int_0^x y^2 f_{kj}(y) dy$$

Definición 5.2.1 (Chiu [7]) Para cada $x \in N$, la función mediana continua $z_D(x)$ es la distancia esperada de todos los puntos de demanda a x , y su expresión es

$$z_D(x) = \sum_{v_i \in V} w_i d(v_i, x) + \sum_{e_{kj}=[v_k, v_j] \in E} p_{kj} \int_0^{l_{kj}} d(y, x) f_{kj}(y) dy$$

Definición 5.2.2 Para cada $x \in N$, se definirá la función varianza continua $z_\nu(x)$ mediante la expresión

$$z_\nu(x) = \sum_{v_i \in V} w_i [d(v_i, x) - z_D(x)]^2 + \sum_{e_{kj}=[v_k, v_j] \in E} p_{kj} \int_0^{l_{kj}} [d(y, x) - z_D(x)]^2 f_{kj}(y) dy$$

Un punto $x_\nu^* \in N$ es un punto *1-varianza continua* si

$$z_\nu(x_\nu^*) \leq z_\nu(x), \quad \forall x \in N$$

El siguiente resultado proporciona una expresión para $z_\nu(x)$ habitual en el contexto de la varianza.

Proposición 5.2.3 $\forall x \in N$ se verifica

$$z_\nu(x) = \sum_{v_i \in V} w_i d(v_i, x)^2 + \sum_{e_{kj} = [v_k, v_j] \in E} p_{kj} \int_0^{l_{kj}} d(y, x)^2 f_{kj}(y) dy - z_D(x)^2$$

Demostración: Desarrollando el cuadrado en el sumando de $z_\nu(x)$ relativo a la demanda nodal se obtiene

$$\sum_{v_i \in V} w_i d(v_i, x)^2 + w_\nu z_D(x)^2 - 2z_D(x) \sum_{v_i \in V} w_i d(v_i, x)$$

De forma análoga, desarrollando el sumando relativo a la demanda sobre las aristas, y puesto que $F_{kj}(l_{kj}) = 1$, resulta

$$\sum_{e_{kj} \in E} p_{kj} \int_0^{l_{kj}} d(y, x)^2 f_{kj}(y) dy + w_E z_D(x)^2 - 2z_D(x) \int_0^{l_{kj}} d(y, x) f_{kj}(y) dy$$

la conclusión es inmediata sin más que sumar ambas expresiones, y utilizando que $w(N) = 1$. \square

Sea $e_0 = [u, v] \in E$, y $x \in e_0$, con una orientación inducida de vértice inicial u , mediante la cual cada $x \in [u, v]$ denota el valor de $[0, l_{uv}]$ tal que $d(u, x) = x$, y $d(v, x) = l_{uv} - x$. Según se introdujo en el capítulo 1, cada $x \in e_0 = [u, v]$ induce una partición $\{V_u(x), V_v(x)\}$ sobre el conjunto de vértices tal que $V_u(x) = \{v_i \in V / d(v_i, u) + d(u, x) \leq d(v_i, v) + d(v, x)\}$, y $V_v(x) = V \setminus V_u(x)$. Asimismo se origina una partición $\{E_u(x), E_v(x), E_{[u,v]}(x), e_0\}$ sobre el conjunto de aristas, definida como sigue:

$$E_u(x) = \{e_{kj} = [v_k, v_j] \in E \setminus \{e_0\} / v_k, v_j \in V_u(x)\}$$

$$E_v(x) = \{e_{kj} = [v_k, v_j] \in E \setminus \{e_0\} / v_k, v_j \in V_v(x)\}$$

$$E_{[u,v]}(x) = \{e_{kj} = [v_k, v_j] \in E \setminus \{e_0\} / v_k \in V_u(x) \text{ y } v_j \in V_v(x)\}$$

Sean $\bar{x}_1 < \dots < \bar{x}_k$ los puntos de embotellamiento de la arista $e_0 = [u, v]$ ordenados en sentido creciente, y sea $\bar{x}_0 = 0$, $\bar{x}_{k+1} = l_{uv}$. Según la proposición 1.2.6, para cada $y \in N$ la función $d(y, x)$ es continua en $x \in [0, l_{uv}]$, lo que implica la continuidad de las funciones $z_D(x)$ y de $z_\nu(x)$ en $x \in [0, l_{uv}]$.

Por la proposición 1.6.4 la partición $\{V_u(x), V_v(x)\}$ es constante sobre $S_j = (\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]$, por tanto también será constante en S_j la partición sobre las aristas $\{E_u(x), E_v(x), E_{[u,v]}(x), e_0\}$, $\forall j = 1, \dots, k+1$. Por ello se adoptará la notación $V_u(S_j)$, $V_v(S_j)$, $E_u(S_j)$, $E_v(S_j)$, $E_{[u,v]}(S_j)$ para designar a los correspondientes conjuntos $V_u(x)$, $V_v(x)$, $E_u(x)$, $E_v(x)$ y $E_{[u,v]}(x)$ cuando $x \in S_j$.

5.2.1 Varianza continua en una región primaria.

Sea el intervalo $S_j \subset e_0 = [u, v]$, para un determinado $j \in \{1, \dots, k+1\}$.

Definición 5.2.4 Para cada $e_{ht} = [v_h, v_t] \in E$, se definen las siguientes funciones sobre el intervalo S_j :

$$D_{e_{ht}}(x) = p_{ht} \int_0^{l_{ht}} d(y, x) f_{ht}(y) dy, \quad \forall x \in S_j$$

$$D_{e_{ht}}^{(2)}(x) = p_{ht} \int_0^{l_{ht}} d(y, x)^2 f_{ht}(y) dy, \quad \forall x \in S_j$$

La función $D_{e_{ht}}(x)$ representa la aportación de la arista e_{ht} a la mediana continua $z_D(x)$. Análogamente $D_{e_{ht}}^{(2)}(x)$ es la aportación de dicha arista respecto del cuadrado de la distancia esperada, (o mediana cuadrática continua, extendiendo la denominación al caso continuo de la función mediana cuadrática).

La expresión de éstas funciones variará según que $e_{ht} = e_0$, $e_{ht} \in E_u(S_j)$, $e_{ht} \in E_v(S_j)$ ó $e_{ht} \in E_{[u,v]}(S_j)$. Si $e_{ht} = e_0$ ambas funciones se denotarán, respectivamente, por $D_{e_0}(x)$ y $D_{e_0}^{(2)}(x)$, $\forall x \in S_j$.

Proposición 5.2.5 Para cada $j = 1, \dots, k+1$, la función 1-varianza continua $z_\nu(x)$ sobre la región primaria $[\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]$ viene dada por

$$\begin{aligned} z_\nu(x; S_j) &= \sum_{v_i \in V_u(S_j)} w_i d(v_i, x)^2 + \sum_{v_i \in V_v(S_j)} w_i d(v_i, x)^2 + \sum_{e_{ht} \in E_u(S_j)} D_{e_{ht}}^{(2)}(x) \\ &+ \sum_{e_{ht} \in E_v(S_j)} D_{e_{ht}}^{(2)}(x) + \sum_{e_{ht} \in E_{[u,v]}(S_j)} D_{e_{ht}}^{(2)}(x) \\ &+ D_{e_0}^{(2)}(x) - z_D(x; S_j)^2, \quad \forall x \in [\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j] \end{aligned}$$

donde $\forall x \in [\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]$ es

$$\begin{aligned} z_D(x; S_j) &= \sum_{v_i \in V_u(S_j)} w_i d(v_i, x) + \sum_{v_i \in V_v(S_j)} w_i d(v_i, x) + \sum_{e_{ht} \in E_u(S_j)} D_{e_{ht}}(x) \\ &+ \sum_{e_{ht} \in E_v(S_j)} D_{e_{ht}}(x) + \sum_{e_{ht} \in E_{[u,v]}(S_j)} D_{e_{ht}}(x) + D_{e_0}(x) \end{aligned}$$

Demostración: Según las definiciones de las funciones $z_D(x)$ y $z_\nu(x)$ la proposición se verifica para todo $x \in S_j$ sin más que utilizar las particiones sobre V y sobre E correspondientes a S_j . El resultado se extiende a toda la región primaria $[\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]$ por la continuidad de ambas funciones sobre toda la arista. \square

A continuación se desarrollarán los sumandos de $z_\nu(x; S_j)$ y de $z_D(x; S_j)$ relativos a la demanda nodal y a la demanda sobre las aristas.

- **Demanda nodal**

Sea $x \in S_j$. Los sumandos relativos a la demanda sobre los vértices son $z_m(x; S_j)$ y $z_m^{(2)}(x; S_j)$ cuya expresión viene dada en la proposición 1.6.5, obteniéndose en este caso:

$$z_m(x; S_j) = a_D(S_j) + xg_D(S_j)$$

$$z_m^{(2)}(x; S_j) = a_\nu(S_j) + 2b_\nu(S_j)x + w_\nu x^2$$

donde los correspondientes coeficientes son los descritos en la demostración de dicha proposición, sin más que sustituir los pesos $w(\cdot)$ por los actuales $w_\nu(\cdot)$, resultando

$$g_D(S_j) = w_\nu(V_u(S_j)) - w_\nu(V_v(S_j))$$

$$a_D(S_j) = z_m(u, V_u(S_j)) + z_m(v, V_v(S_j)) + w_\nu(V_v(S_j))l_{uv}$$

$$a_\nu(S_j) = \sum_{v_i \in V_u(S_j)} w_i d(v_i, u)^2 + \sum_{v_i \in V_v(S_j)} w_i [d(v_i, v) + l_{uv}]^2$$

$$b_\nu(S_j) = z_m(u, V_u(S_j)) - z_m(u, V_v(S_j)) - l_{uv}w_\nu(V_v(S_j))$$

Si $p_e = 0$, $\forall e \in E$ se obtiene la expresión lineal para $z_D(x; S_j)$ y parabólica para $z_\nu(x; S_j)$ en cada región primaria, coincidentes respectivamente con las expresiones de $z_m(x; S_j)$ y de $z_s(x; S_j)$ correspondientes al problema 1-varianza con demanda discreta.

- **Demanda sobre las aristas**

Sea $e_{ht} = [v_h, v_t] \in E$. A continuación se obtendrán las respectivas expresiones de $D_{e_{ht}}(x)$ y $D_{e_{ht}}^{(2)}(x)$, según que $e_{ht} \in E_u(S_j)$, $e_{ht} \in E_v(S_j)$, $e_{ht} \in E_{[u,v]}(S_j)$ ó $e_{ht} = e_0 = [u, v]$. Suponiendo a v_h como vértice inicial en la orientación inducida en la arista, los puntos de la misma se localizan por su distancia a v_h de forma que

$$\forall y \in e_{ht} \quad d(v_h, y) = y, \quad y \quad d(v_t, y) = l_{ht} - y \quad (5.1)$$

(i) $e_{ht} = [v_h, v_t] \in E_u(S_j)$.

En este caso $\forall y \in e_{ht}$, $d(y, x) = d(y, u) + x$. Sea $\xi_{ht} \in [v_h, v_t]$ el punto de embotellamiento de la arista e_{ht} relativo al vértice u , (Figura 5.1).

Entonces

$$\xi_{ht} = \frac{d(u, v_t) + l_{ht} - d(u, v_h)}{2}$$

siendo el valor de ξ_{ht} independiente del punto $x \in S_j$.

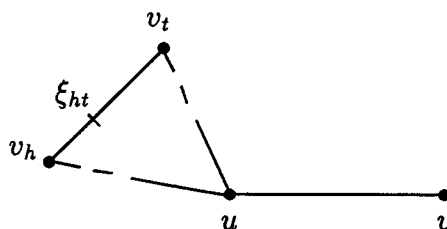


Figura 5.1

Utilizando (5.1) en la expresión de $d(y, x)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} D_{e_{ht}}(x) &= p_{ht} \left[\int_0^{\xi_{ht}} [y + d(v_h, u) + x] f_{ht}(y) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{\xi_{ht}}^{l_{ht}} [l_{ht} - y + d(v_t, u) + x] f_{ht}(y) dy \right] \\ &= p_{ht} [x + d(v_t, u) + l_{ht} - 2\xi_{ht} F_{ht}(\xi_{ht}) + 2\mu_{ht}(\xi_{ht}) - \mu_{ht}] \end{aligned}$$

sin más que desarrollar ambas integrales y aplicar las definiciones y propiedades asociadas a la distribución considerada. Esta expresión es lineal en x , y se puede expresar

$$D_{e_{ht}}(x) = p_{ht}x + p_{ht}H_D(u, e_{ht}) \quad (5.2)$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} D_{e_{ht}}^{(2)}(x) &= p_{ht} \int_0^{\xi_{ht}} [y + d(v_h, u) + x]^2 f_{ht}(y) dy \\ &\quad + p_{ht} \int_{\xi_{ht}}^{l_{ht}} [l_{ht} - y + d(v_t, u) + x]^2 f_{ht}(y) dy \end{aligned}$$

Desarrollando y efectuando el primer sumando, resulta:

$$p_{ht} [\mu_{ht}^{(2)}(\xi_{ht}) + (d(v_h, u)^2 + x^2 + 2xd(v_h, u)) F_{ht}(\xi_{ht}) + 2(d(v_h, u) + x)\mu_{ht}(\xi_{ht})]$$

Procediendo de igual forma con el segundo sumando:

$$p_{ht} \left[\left((l_{ht} + d(v_t, u))^2 + x^2 + 2x(l_{ht} + d(v_t, u)) \right) (1 - F_{ht}(\xi_{ht})) + \mu_{ht}^{(2)} - \mu_{ht}^{(2)}(\xi_{ht}) - 2(l_{ht} + d(v_t, u) + x)(\mu_{ht} - \mu_{ht}(\xi_{ht})) \right]$$

Efectuando la suma de ambas expresiones, agrupando términos, y utilizando que $2\xi_{ht} = d(v_t, u) + l_{ht} - d(v_h, u)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} D_{ht}^{(2)}(x) &= p_{ht} \left[x^2 + 2x(2\mu_{ht}(\xi_{ht}) - \mu_{ht} + l_{ht} + d(v_t, u)) \right. \\ &\quad - 2\xi_{ht}F_{ht}(\xi_{ht}) + d(v_h, u)^2 F_{ht}(\xi_{ht}) \\ &\quad + (l_{ht} + d(v_t, u))^2 (1 - F_{ht}(\xi_{ht})) + 4(d(v_h, u) + \xi_{ht})\mu_{ht}(\xi_{ht}) \\ &\quad \left. - 2(l_{ht} + d(v_t, u))\mu_{ht} + \mu_{ht}^{(2)} \right] \end{aligned}$$

La expresión del corchete es cuadrática, y los coeficientes que intervienen son constantes e independientes del valor de $x \in S_j$, pudiéndose resumir como sigue

$$D_{ht}^{(2)}(x) = p_{ht}x^2 + 2p_{ht}H_\nu(u, e_{ht})x + p_{ht}R_\nu(u, e_{ht}) \quad (5.3)$$

(ii) $e_{ht} = [v_h, v_t] \in E_v(S_j)$.

En este caso, simétrico del anterior, $\forall y \in e_{ht}$, $d(y, x) = d(y, v) + l_{uv} - x$. Sea $\xi_{ht} \in [v_h, v_t]$ el punto de embotellamiento de la arista e_{ht} respecto de v , esto es (Figura 5.2), con $\xi_{ht} = (d(v, v_t) + l_{ht} - d(v, v_h))/2$

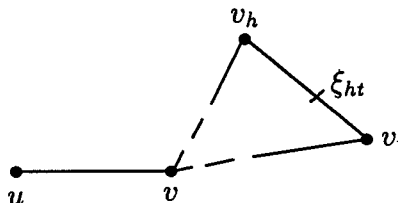


Figura 5.2

Nuevamente ξ_{ht} es independiente del valor de x . Utilizando (5.1) en $d(y, x)$ se obtiene la siguiente expresión lineal para $D_{e_{ht}}(x)$:

$$\begin{aligned} D_{e_{ht}}(x) &= p_{ht} \left[\int_0^{\xi_{ht}} [d(v_h, v) + l_{uv} + y - x] f_{ht}(y) dy \right. \\ &\quad + \int_{\xi_{ht}}^{l_{ht}} [l_{ht} + d(v_t, v) + l_{uv} - y - x] f_{ht}(y) dy \left. \right] \\ &= p_{ht} [-x + d(v_t, v) + l_{ht} + l_{uv} - 2\xi_{ht}F_{ht}(\xi_{ht}) + 2\mu_{ht}(\xi_{ht}) \\ &\quad - \mu_{ht}] \end{aligned}$$

que se resume

$$D_{e_{ht}}(x) = -p_{ht}x + p_{ht}H_D(v, e_{ht}) \quad (5.4)$$

La función $D_{e_{ht}}^{(2)}(x)$ resulta:

$$D_{e_{ht}}^{(2)}(x) = p_{ht} \left[\int_0^{\xi_{ht}} [d(v_h, v) + l_{uv} + y - x]^2 f_{ht}(y) dy + \int_{\xi_{ht}}^{l_{ht}} [l_{ht} + d(v_t, v) + l_{uv} - y - x]^2 f_{ht}(y) dy \right]$$

efectuando el primer sumando:

$$p_{ht} \left[\mu_{ht}^{(2)}(\xi_{ht}) + ((d(v_h, v) + l_{uv})^2 + x^2 - 2x(d(v_h, v) + l_{uv})) F_{ht}(\xi_{ht}) + 2(d(v_h, v) + l_{uv} - x)\mu_{ht}(\xi_{ht}) \right].$$

Y el segundo sumando:

$$p_{ht} \left[([l_{ht} + l_{uv} + d(v_t, v)]^2 + x^2 - 2x[l_{ht} + l_{uv} + d(v_t, v)])(1 - F_{ht}(\xi_{ht})) + \mu_{ht}^{(2)} - \mu_{ht}^{(2)}(\xi_{ht}) - 2(l_{ht} + l_{uv} + d(v_t, v))(\mu_{ht} - \mu_{ht}(\xi_{ht})) + 2x(\mu_{ht} - \mu_{ht}(\xi_{ht})) \right]$$

Sumando ambas expresiones y utilizando que $2\xi_{ht} = d(v_t, v) + l_{ht} - d(v_h, v)$ resulta:

$$D_{ht}^{(2)}(x) = p_{ht} \left[x^2 - 2x(2\mu_{ht}(\xi_{ht}) - \mu_{ht} + l_{ht} + l_{uv} + d(v_t, v) - 2\xi_{ht}F_{ht}(\xi_{ht})) + (d(v_h, v) + l_{uv})^2 F_{ht}(\xi_{ht}) + (l_{ht} + l_{uv} + d(v_t, v))^2 (1 - F_{ht}(\xi_{ht})) + 4(\xi_{ht} + d(v_h, v) + l_{uv})\mu_{ht}(\xi_{ht}) - 2(l_{ht} + l_{uv} + d(v_t, v))\mu_{ht} + \mu_{ht}^{(2)} \right]$$

Al igual que en el apartado anterior, se ha obtenido una expresión cuadrática cuyos coeficientes son constantes $\forall x \in S_j$, y que se resume como

$$D_{ht}^{(2)}(x) = p_{ht}x^2 - 2p_{ht}H_\nu(v, e_{ht})x + p_{ht}R_\nu(v, e_{ht}) \quad (5.5)$$

(iii) $e_{ht} = [v_h, v_t] \in E_{[u,v]}(S_j)$.

Por la proposición 1.2.6, $\forall y \in e_{ht}$ se tiene

$$d(y, x) = \begin{cases} d(y, u) + x, & \text{si } 0 \leq y \leq \xi_{ht}(x) \\ d(y, v) + l_{uv} - x, & \text{si } \xi_{ht}(x) < y \leq l_{ht} \end{cases}$$

lo que, junto con (5.1) implica

$$d(y, x) = \begin{cases} d(v_h, u) + y + x, & \text{si } 0 \leq y \leq \xi_{ht}(x) \\ d(v_t, v) + l_{ht} + l_{uv} - y - x, & \text{si } \xi_{ht}(x) < y \leq l_{ht} \end{cases}$$

El punto $\xi_{ht}(x) \in [v_h, v_t]$ está dado por $\xi_{ht}(x) = 1/2(d(v_t, x) + l_{ht} - d(v_h, x))$, y representa el papel de “punto de embotellamiento” respecto a x , variando sobre e_{ht} al variar $x \in S_j$, (Figura 5.3).

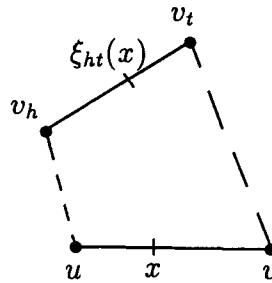


Figura 5.3

Puesto que $v_h \in V_u(S_j)$ y $v_t \in V_v(S_j)$, se tiene $d(v_h, x) = d(v_h, u) + x$, y $d(v_t, x) = d(v_t, v) + l_{uv} - x$, resultando la siguiente expresión para $\xi_{ht}(x)$

$$\xi_{ht}(x) = \frac{d(v_t, v) + l_{uv} + l_{ht} - d(v_h, u) - 2x}{2} \quad (5.6)$$

Lema 5.2.6 La función $\xi_{ht}(x)$ es lineal y monótona decreciente en x , con pendiente -1 . Además, cuando $x \in [\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]$, es $\xi_{ht}(x) \in [0, l_{ht}]$.

Demostración: La primera parte es inmediata a partir de (5.6). Para la segunda, como $v_h \in V_u(S_j)$, resulta $d(v_h, u) + x \leq d(v_t, v) + l_{ht} + l_{uv} - x$ de donde: $d(v_t, v) - d(v_h, u) + l_{uv} - 2x \geq -l_{ht}$. Sustituyendo en (5.6) se obtiene $\xi_{ht}(x) \geq 0$.

Análogamente como $v_t \in V_v(S_j)$, se tiene $d(v_t, v) + l_{uv} - x \leq l_{ht} + d(v_h, u) + x$, lo que implica $d(v_t, v) + l_{uv} - d(v_h, u) - 2x \leq l_{ht}$, y procediendo como antes se tiene $\xi_{ht}(x) \leq l_{ht}$, lo que concluye la demostración.

□

La dependencia de $\xi_{ht}(x)$ respecto de x introduce la no linealidad en $D_{e_{ht}}(x)$. En efecto:

$$D_{e_{ht}}(x) = p_{ht} \left[\int_0^{\xi_{ht}(x)} [d(v_h, u) + y + x] f_{ht}(y) dy + \int_{\xi_{ht}(x)}^{l_{ht}} [d(v_t, v) + l_{ht} + l_{uv} - y - x] f_{ht}(y) dy \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= p_{ht} [x(2F_{ht}(\xi_{ht}(x)) - 1) + d(v_h, u)F_{ht}(\xi_{ht}(x)) \\
 &+ (d(v_t, v) + l_{ht} + l_{uv})(1 - F_{ht}(\xi_{ht}(x))) + 2\mu_{ht}(\xi_{ht}(x)) \\
 &- \mu_{ht}]
 \end{aligned}$$

Por la misma razón la función $D_{e_{ht}}^{(2)}(x)$ no será lineal en S_j . En efecto:

$$\begin{aligned}
 D_{e_{ht}}^{(2)}(x) &= p_{ht} \left[\int_0^{\xi_{ht}(x)} [d(v_h, u) + y + x]^2 f_{ht}(y) dy \right. \\
 &\left. + \int_{\xi_{ht}(x)}^{l_{ht}} [d(v_t, v) + l_{ht} + l_{uv} - y - x]^2 f_{ht}(y) dy \right]
 \end{aligned}$$

Efectuando ambas integrales y agrupando términos semejantes resulta:

$$\begin{aligned}
 D_{e_{ht}}^{(2)}(x) &= p_{ht} [x^2 + F_{ht}(\xi_{ht}(x))(d(v_h, u)^2 + 2xd(v_h, u)) \\
 &+ (1 - F_{ht}(\xi_{ht}(x)))((d(v_t, v) + l_{ht} + l_{uv})^2 \\
 &- 2x(d(v_t, v) + l_{ht} + l_{uv})) + 2\mu_{ht}(\xi_{ht}(x))(d(v_h, u) + d(v_t, v) \\
 &+ l_{ht} + l_{uv} + 2x) - 2\mu_{ht}(d(v_t, v) + l_{ht} + l_{uv} - x) + \mu_{ht}^{(2)}]
 \end{aligned}$$

(iv) $e_0 = [u, v]$.

Según la orientación supuesta para la arista $[u, v]$, $\forall y \in [u, v]$ se tiene:

$$d(y, x) = |y - x| = \begin{cases} x - y, & \text{si } 0 \leq y \leq x \\ y - x, & \text{si } x < y \leq l_{uv} \end{cases}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
 D_{e_0}(x) &= p_0 \left[\int_0^x (x - y)f_0(y) dy + \int_x^{l_{uv}} (y - x)f_0(y) dy \right] \\
 &= p_0 [2xF_0(x) - x + \mu_0 - 2\mu_0(x)]
 \end{aligned}$$

Puesto que $d(y, x)^2 = (y - x)^2$, se sigue

$$D_{e_0}^{(2)}(x) = p_0 \int_0^{l_{uv}} (y^2 + x^2 - 2xy)f_0(y) dy = p_0 [x^2 - 2x\mu_0 + \mu_0^{(2)}]$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas en cada caso de $D_{e_{ht}}(x)$ y $D_{e_{ht}}^{(2)}(x)$ en las funciones $z_\nu(x; S_j)$ y $z_D(x; S_j)$ dadas por la proposición 5.2.5 se caracteriza su comportamiento sobre cada región primaria, expresado en función de la

localización del servicio sobre la misma. Entonces

$$\begin{aligned}
z_D(x; S_j) &= a_D(S_j) + g_D(S_j)x + (w_E(E_u(S_j)) - w_E(E_v(S_j)))x \\
&+ \sum_{e_{ht} \in E_u(S_j)} p_{ht} H_D(u, e_{ht}) + \sum_{e_{ht} \in E_v(S_j)} p_{ht} H_D(v, e_{ht}) + \\
&+ \sum_{e_{ht} \in E_{[u,v]}(S_j)} D_{e_{ht}}(x) + p_0 [2xF_0(x) - x + \mu_0 - 2\mu_0(x)] \quad (5.7)
\end{aligned}$$

Análogamente se tiene

$$\begin{aligned}
z_\nu(x; S_j) &= (w_\nu + w_E(E_u(S_j)) + w_E(E_v(S_j)) + p_0)x^2 + 2b_\nu(S_j)x \\
&+ 2x \left(\sum_{e_{ht} \in E_u(S_j)} p_{ht} H_\nu(u, e_{ht}) - \sum_{e_{ht} \in E_v(S_j)} p_{ht} H_\nu(v, e_{ht}) - p_0\mu_0 \right) \\
&+ \sum_{e_{ht} \in E_{[u,v]}(S_j)} D_{e_{ht}}^{(2)}(x) + a_\nu(S_j) + p_0\mu_0^{(2)} \\
&+ \sum_{e_{ht} \in E_u(S_j)} p_{ht} R_\nu(u, e_{ht}) + \sum_{e_{ht} \in E_v(S_j)} p_{ht} R_\nu(v, e_{ht}) \\
&- (z_D(x; S_j))^2 \quad (5.8)
\end{aligned}$$

5.3 Propiedades

A continuación se estudiarán las propiedades de $z_\nu(x; S_j)$ y de $z_D(x; S_j)$ sobre cada región primaria, así como sus consecuencias en términos algorítmicos.

Teorema 5.3.1 (Chiu [7])

La función 1-mediana continua $z_D(x)$ no es ni cóncava ni convexa sobre cada región primaria de una red general no dirigida $N(V, E)$.

Esta indeterminación en el comportamiento de la curvatura de $z_D(x)$ sobre cada región primaria se transmite a la 1-varianza continua.

Teorema 5.3.2 *La función varianza continua $z_\nu(x)$ no es ni cóncava ni convexa sobre cada región primaria de una red general no dirigida $N(V, E)$.*

Demostración: Sobre la región primaria $[\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]$ de la arista $e_0 = [u, v]$ se verifica $z_\nu(x) = z_\nu(x; S_j)$, (proposición 5.2.5). Por otra parte, los sumandos de $z_\nu(x; S_j)$

relativos a la demanda nodal así como a la demanda producida en las aristas $e_{ht} \in E_u(S_j)$, $e_{ht} \in E_v(S_j)$ y e_0 son funciones cuadráticas. Entonces, por (5.8) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}(z_\nu(x; S_j)) &= 2[w_\nu + w_E(E_u(S_j)) + w_E(E_v(S_j)) + p_0 \\ &+ 1/2 \sum_{e_{ht} \in E_{[u,v]}(S_j)} \frac{d^2}{dx^2}(D_{e_{ht}}^{(2)}(x)) \\ &- \left(\frac{d}{dx}(z_D(x; S_j)) \right)^2 - z_D(x; S_j) \frac{d^2}{dx^2}(z_D(x; S_j)) \end{aligned}$$

por el teorema anterior, el signo de $\frac{d^2}{dx^2}(z_D(x; S_j))$ es indeterminado sobre la región primaria. También lo es para la demanda relativa a las aristas $e_{ht} \in E_{[u,v]}(S_j)$ ya que

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}(D_{e_{ht}}^{(2)}(x)) &= 2p_{ht} [1 - d(v_h, u) f_{ht}(\xi_{ht}(x)) - 6\xi_{ht}(x) f_{ht}(x) \\ &+ 2x\xi_{ht}(x) f'_{ht}(\xi_{ht}(x))] \end{aligned}$$

lo que implica que cuando $e_{ht} \in E_{[u,v]}(S_j)$, la función $D_{e_{ht}}^{(2)}(x)$ tampoco es cóncava ni convexa. Por tanto la curvatura de $z_\nu(x; S_j)$ es indeterminada en cada región primaria, de donde se concluye el teorema. \square

Sin embargo el comportamiento de ambas funciones no es el mismo si la arista $e_0 = [u, v]$ considerada es una arista puente. En tal caso, se tiene $|B(u, v)| = 0$, $E_{[u,v]}(x) = \emptyset$, y por tanto la única región primaria existente en $[u, v]$ es la propia arista.

Lema 5.3.3 *Si $e_0 = [u, v]$ es una arista puente de la red, se verifica:*

- (i) $z_D(x)$ es cóncava sobre $x \in [u, v]$.
- (ii) $z_\nu(x)$ no es ni cóncava ni convexa sobre $x \in [u, v]$.

Demostración: Puesto que $E_{[u,v]}(x) = \emptyset$, el único término no lineal en la expresión de $z_D(x; S_j)$ dada por (5.7) es el relativo a la demanda sobre e_0 , de donde

$$\frac{d^2}{dx^2}(z_D(x)) = 2p_0 f_0(x) \geq 0$$

y por tanto $z_D(x)$ es convexa en toda la arista $[u, v]$.

Análogamente, por el teorema 5.3.2, es

$$\frac{d^2}{dx^2}(z_\nu(x)) = 2\left[1 - \left(\frac{d}{dx}(z_D(x))^2 + 2z_D(x)p_0f_0(x)\right)\right]$$

ya que $w_\nu + w_E(E_u(S_j)) + w_E(E_\nu(S_j)) + p_0 = 1$. Puesto que $2z_D(x)p_0f_0(x) \geq 0$ y no está determinado el signo de $\frac{d}{dx}(z_D(x))^2$, se tiene que el signo de $\frac{d^2}{dx^2}(z_\nu(x))$ puede cambiar a lo largo de $[u, v]$, por tanto $z_\nu(x)$ no es, en general, cóncava ni convexa en dicha arista. \square

Dado que en una red árbol todas las aristas son aristas-puente, se tiene

Corolario 5.3.4 *Si la red considerada es un árbol $T(V, E)$, entonces*

- (i) $z_D(x)$ es convexa sobre las aristas de T .
- (ii) $z_\nu(x)$ no es ni cóncava ni convexa sobre las aristas de T .

A continuación se muestran las gráficas de la función varianza continua en distintos árboles, considerando funciones de densidad no uniformes (Ejemplo 1), y uniformes (Ejemplo 2).

EJEMPLO 1

Corresponde al árbol de la figura 5.4, enraizado en el vértice v_3 . Sobre las aristas figuran las longitudes, y los correspondientes pesos están entre paréntesis. Las funciones de densidad consideradas son: uniforme en $e_1 = [v_1, v_2]$, y normal de media 3 y desviación típica 1 en $e_2 = [v_2, v_3]$.

En la figura 5.5 se representa la gráfica de $z_\nu(x)$ en e_1 y e_2 . Visualmente se observa que sobre la arista e_2 la curva de $z_\nu(x)$ no es ni cóncava ni convexa.

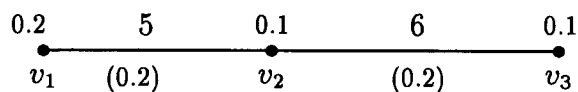


Figura 5.4

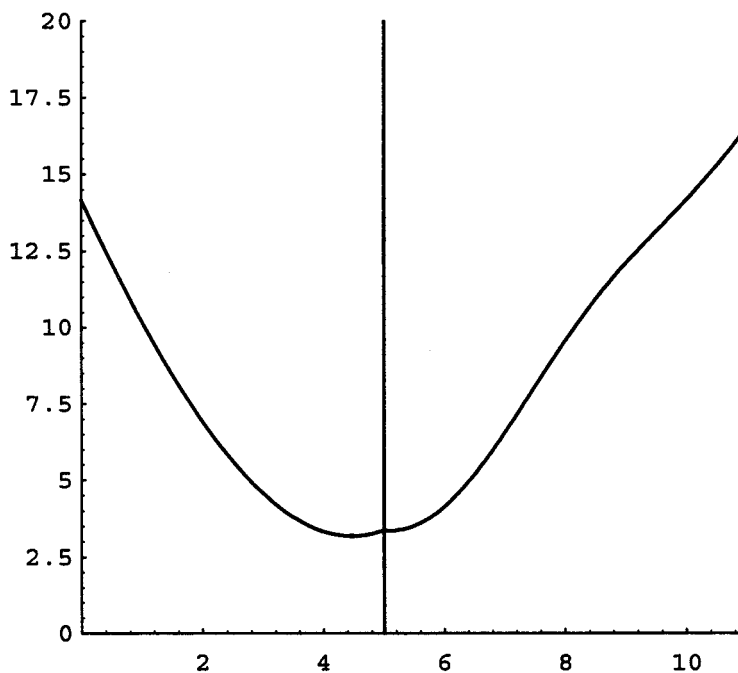


Figura 5.5 varianza continua

La expresión obtenida para $z_\nu(x)$ es:

$$z_\nu(x) = \begin{cases} x^2 - 10.6x + 42.26 - (0.04x^2 - 0.6x + 5.3)^2, & \text{si } x \in e_1 \\ x^2 - 0.2x + 14.26 - \left(\frac{0.8x}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-1/2(y-3)^2} dy - \frac{0.8}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x ye^{-1/2(y-3)^2} dy + 3.3 \right)^2, & \text{si } x \in e_2 \end{cases}$$

EJEMPLO 2

Corresponde al árbol de la figura 5.6, enraizado en v_5 y donde se han considerado funciones de densidad uniformes en todas las aristas

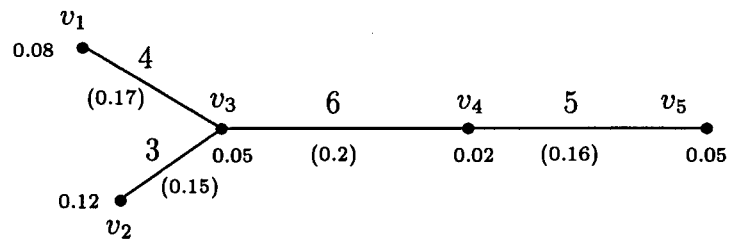


Figura 5.6

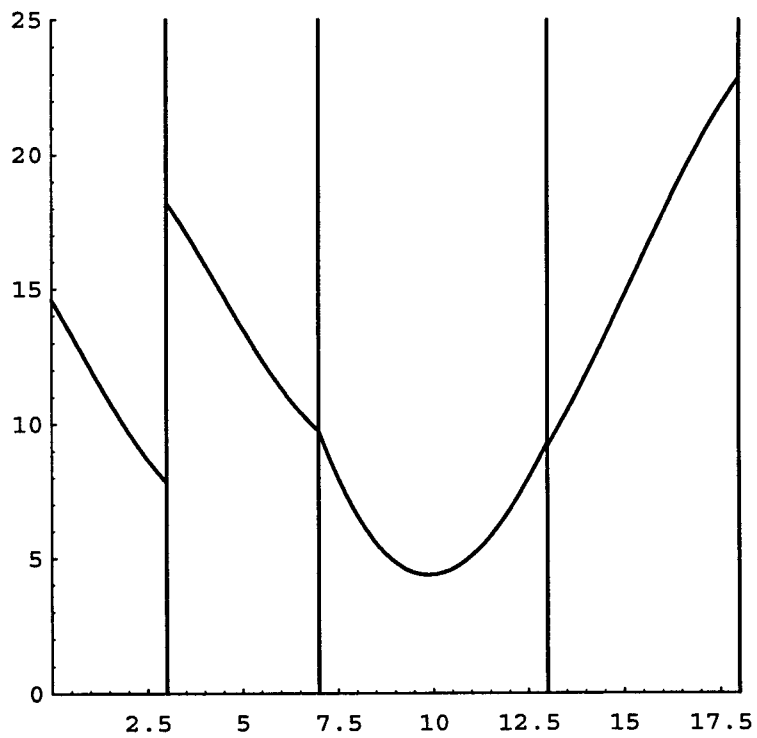


Figura 5.7 varianza continua

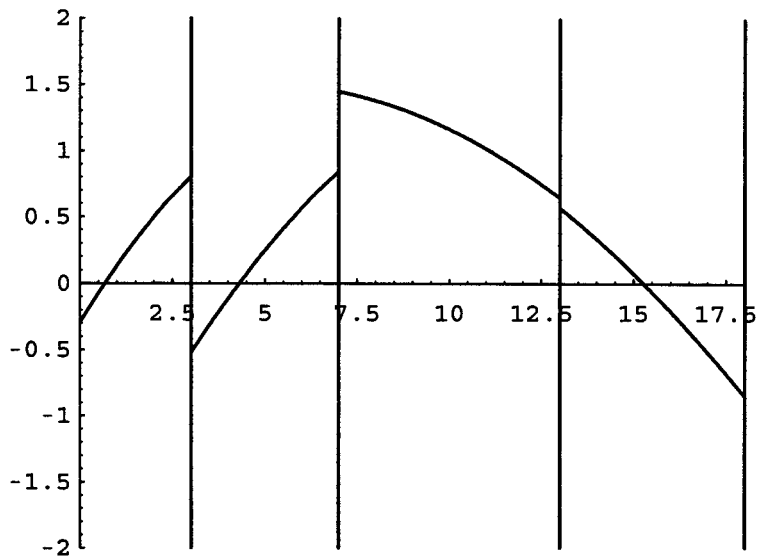


Figura 5.8 Derivadas segundas

En la figura 5.7 se representa la gráfica de $z_\nu(x)$ en las aristas $e_1 = [v_1, v_3]$, $e_2 = [v_2, v_3]$, $e_3 = [v_3, v_4]$ y $e_4 = [v_4, v_5]$. En la figura 5.8 se muestra la gráfica de las respectivas funciones $\frac{d^2}{dx^2}(z_\nu(x))$. Nótese como, excepto sobre la arista e_3 , en las demás aristas dicha función cambia de signo, y por tanto $z_\nu(x)$ no es ni cóncava ni convexa sobre dichas aristas.

5.4 Algoritmos en una red general

Los resultados de los teoremas 5.3.1 y 5.3.2 implican que se han de emplear técnicas de optimización global para obtener el mínimo de las funciones $z_D(x)$ y $z_\nu(x)$ en cada región primaria, y el esfuerzo computacional necesario dependerá por tanto de las funciones de densidad involucradas. En cualquier caso ambos problemas se pueden resolver mediante el algoritmo exhaustivo que se expone a continuación:

ALGORITMO 1/VC/(N), 1/MC/(N)*Paso 0*

Calcular la matriz de distancias ($D(u, v)$).

Para cada arista $[u, v]$:

- * Calcular todos los puntos de embotellamiento.
- * Ordenarlos según distancia creciente al vértice inicial.

Sea Z suficientemente grande. Hacer $x_\nu^* = 0$, $[u^*, v^*] = \emptyset$.

Paso 1

Seleccionar una arista $[u, v]$ de E que no haya sido considerada.

Sea Z_{uv} suficientemente grande, $x_\nu^*(u, v) = 0$.

Repetir para cada región primaria $[\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]$ de $[u, v]$:

- * Calcular $z_\nu(x; S_j)$, ($z_D(x; S_j)$) mediante la proposición 5.2.5.
- * Calcular la solución $x_\nu^*(S_j)$ del problema $\min\{z_\nu(x; S_j), x \in [\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]\}$.
- * Si $z_\nu(x_\nu^*(S_j)) < Z_{uv}$, hacer $Z_{uv} \leftarrow z_\nu(x_\nu^*(S_j))$, $x_\nu^*(u, v) \leftarrow x_\nu^*(S_j)$.

Paso 2

Si $Z_{uv} < Z$, hacer $Z \leftarrow Z_{uv}$, $x_\nu^* \leftarrow x_\nu^*(u, v)$, $[u^*, v^*] \leftarrow [u, v]$.

Si quedan aristas de E sin examinar, ir al paso 1.

En caso contrario, parar. Los valores de Z , x_ν^* , $[u^*, v^*]$ constituyen la solución.

COMPLEJIDAD

El trabajo de preprocesamiento del algoritmo (Paso 0) es el mismo que el de los pasos 1 y 2 del algoritmo 1/VAR/N de la 1-varianza, y por tanto se ejecuta en el mismo tiempo computacional: $O(mn \log)$ (supuesta la red planar o bien que $m \in O(n^2/\log n)$).

En el Paso 1, la obtención de $z_\nu(\cdot)$, (o $z_D(\cdot)$) sobre cada región primaria requiere una pasada sobre todos los vértices y aristas de la red ($O(n+m)$). Como el número de regiones primarias sobre cada arista es $O(n)$, y hay m aristas, se han de resolver $O(mn(n+m))$ subproblemas mediante la rutina de optimización adecuada a cada uno. La complejidad final del algoritmo dependerá por tanto de las funciones de densidad que intervengan.

Si las funciones de densidad son uniformes, las expresiones que se obtienen para $z_D(x)$ y $z_\nu(x)$ sobre cada región primaria son cuadráticas y de cuarto grado, respectivamente. En este caso se puede considerar constante el tiempo requerido para resolver cada subproblema, con lo que la complejidad del algoritmo es $O(mn(n + m))$.

Excepto el algoritmo heurístico debido a Chiu [7] para calcular una aproximación a la 1-mediana continua en una red general, no se han estudiado métodos para resolver el problema de forma exacta con menor complejidad. A este aspecto se dedica la siguiente sección, desarrollando un procedimiento aplicable tanto al problema de la varianza como al de la mediana continua, que calcula dentro de cada arista $[u, v]$ las sucesivas expresiones de $z_D(x)$ y de $z_\nu(x)$ sobre cada región primaria recursivamente, lo cual permitirá bajo determinadas condiciones, obtener un algoritmo de menor complejidad que el anterior.

5.4.1 Relaciones básicas sobre regiones primarias

Sea $e_0 = [u, v] \in E$ con los mismos puntos de embotellamiento y regiones primarias consideradas en la sección anterior, tal que $|B(u, v)| \neq \emptyset$.

Según se introdujo en el capítulo 1, para $j = 1, \dots, k + 1$ el conjunto de los vértices relativos a \bar{x}_j es:

$$B(\bar{x}_j) = \{v_t \in V / d(v_t, u) + \bar{x}_j = d(v_t, v) + l_{uv} - \bar{x}_j\}$$

De la definición de punto de embotellamiento se sigue que $B(\bar{x}_j) \neq \emptyset$, $\forall j = 1, \dots, k$. Se verifican además las relaciones básicas entre los conjuntos $V_u(S_j)$, $V_v(S_j)$, y $B(\bar{x}_j)$ establecidas en las proposiciones 1.6.3 y 1.6.9 que, para mayor claridad, se resumen a continuación:

$$B(\bar{x}_i) \cap B(\bar{x}_j) = \emptyset, \forall i, j = 1, \dots, k, i \neq j \quad \text{y} \quad B(\bar{x}_j) \subset V_u(S_j), \forall j = 1, \dots, k + 1$$

$$V_u(S_j) = V_u(S_{j-1}) \setminus B(\bar{x}_{j-1}), \quad \text{y} \quad V_v(S_j) = V_v(S_{j-1}) \cup B(\bar{x}_{j-1}), \forall j = 1, \dots, k + 1$$

Consecuentemente

$$V_u(S_{j-1}) \supset V_u(S_j), \text{ y } V_v(S_{j-1}) \subset V_v(S_j), \quad j = 1, \dots, k + 1$$

Definición 5.4.1 Para cada $j = 1, \dots, k+1$ se definen los siguientes subconjuntos de aristas:

$$B_j^{(1)}(E_u(S_j)) = \{e_{ht} = [v_h, v_t] \in E_u(S_j) / \begin{array}{l} \text{o bien } v_h \in B(\bar{x}_j), v_t \notin B(\bar{x}_j), \\ \text{o bien } v_h \notin B(\bar{x}_j), v_t \in B(\bar{x}_j) \end{array}\}$$

$$B_j^{(2)}(E_u(S_j)) = \{e_{ht} = [v_h, v_t] \in E_u(S_j) / v_h, v_t \in B(\bar{x}_j)\}$$

$$B_j(E_{[u,v]}(S_j)) = \{e_{ht} = [v_h, v_t] \in E_{[u,v]}(S_j) / \begin{array}{l} \text{o bien } v_h \in B(\bar{x}_j), v_t \notin B(\bar{x}_j), \\ \text{o bien } v_h \notin B(\bar{x}_j), v_t \in B(\bar{x}_j) \end{array}\}$$

Sea

$$B_j(E_u(S_j)) = B_j^{(1)}(E_u(S_j)) \cup B_j^{(2)}(E_u(S_j)) \quad (5.9)$$

Para $q = 1, 2$ el conjunto $B_j^{(q)}(E_u(S_j))$ está formado por aristas de $E_u(S_j)$ tal que sólo uno de sus vértices extremos (si $q = 1$), o ambos (si $q = 2$), pertenece a $B(\bar{x}_j)$. Análogamente los elementos de $B_j(E_{[u,v]}(S_j))$ son aristas de $E_{[u,v]}(S_j)$ con uno de sus vértices extremos en $B(\bar{x}_j)$. Por tanto

$$B_j^{(q)}(E_u(S_j)) \subset E_u(S_j), \quad q = 1, 2$$

y también $B_j(E_u(S_j)) \subseteq E_u(S_j)$. Análogamente, $B_j(E_{[u,v]}(S_j)) \subseteq E_{[u,v]}(S_j)$.

Proposición 5.4.2 Para cada $j = 1, \dots, k+1$, se verifica

$$E_u(S_j) = E_u(S_{j-1}) \setminus B_{j-1}(E_u(S_{j-1})) \quad (5.10)$$

Demostración: De la definición de los conjuntos $E_u(S_j)$ y relaciones de inclusión decreciente de los conjuntos $V_u(S_j)$ se tiene $E_u(S_j) \subset E_u(S_{j-1})$. Sea $e_{ht} \in E_u(S_j)$. Si fuese $e_{ht} = [v_h, v_t] \in B_{j-1}(E_u(S_{j-1}))$, al menos uno de los dos vértices extremos (o ambos) es un vértice de $B(\bar{x}_{j-1})$, sea el vértice v_h . Entonces por las relaciones básicas anteriores $v_h \notin V_u(S_j)$, lo que contradice que $[v_h, v_t] \in E_u(S_j)$. Esto demuestra $E_u(S_j) \subseteq E_u(S_{j-1}) \setminus B_{j-1}(E_u(S_{j-1}))$.

Recíprocamente, si $[v_h, v_t] \in E_u(S_{j-1}) \setminus B_{j-1}(E_u(S_{j-1}))$, entonces $v_h, v_t \in V_u(S_{j-1})$, y $v_h, v_t \notin B(\bar{x}_{j-1})$ (ya que $B_{j-1}(E_u(S_{j-1}))$ es el conjunto de aristas de $E_u(S_{j-1})$ tales que alguno de sus vértices pertenece a $B(\bar{x}_{j-1})$). Por las relaciones básicas, $v_h, v_t \in V_u(S_j)$, de donde $e_{ht} \in E_u(S_j)$, lo que demuestra la inclusión contraria. \square

Proposición 5.4.3 Para cada $j = 1, \dots, k + 1$, se verifica

$$E_v(S_j) = E_v(S_{j-1}) \cup B_{j-1}(E_{[u,v]}(S_{j-1})) \cup B_{j-1}^{(2)}(E_u(S_{j-1})) \quad (5.11)$$

Demostración: Puesto que $V_v(S_{j-1}) \subset V_v(S_j)$, se tiene $E_v(S_{j-1}) \subset E_v(S_j)$.

Sea $e_{ht} = [v_h, v_t] \in B_{j-1}^{(2)}(E_u(S_{j-1}))$. Entonces $v_h, v_t \in B(\bar{x}_{j-1})$, y por tanto $v_h, v_t \in V_v(S_j)$, lo que implica $[v_h, v_t] \in E_v(S_j)$.

Si $e_{ht} \in B_{j-1}(E_{[u,v]}(S_{j-1}))$, uno de los dos vértices, v_h o v_t , pertenece a $B(\bar{x}_{j-1})$ (no ambos). Supongamos $v_h \in B(\bar{x}_{j-1})$, entonces $v_h \in V_v(S_j)$. Pero como también $[v_h, v_t] \in E_{[u,v]}(S_{j-1})$ y es $v_h \in V_u(S_{j-1}) \supset B(\bar{x}_{j-1})$ resulta $v_t \in V_v(S_j)$, concluyéndose $[v_h, v_t] \in E_v(S_j)$. Este razonamiento demuestra

$$E_v(S_j) \supset E_v(S_{j-1}) \cup B_{j-1}(E_{[u,v]}(S_{j-1})) \cup B_{j-1}^{(2)}(E_u(S_{j-1}))$$

Para la inclusión contraria, sea $e_{ht} \in E_v(S_j)$. Entonces, $v_h, v_t \in V_v(S_j) \cup B(\bar{x}_{j-1})$.

Si $v_h, v_t \in V_v(S_{j-1})$, se sigue $e_{ht} \in E_v(S_{j-1})$.

Si $v_h, v_t \in B(\bar{x}_{j-1}) \subset V_u(S_{j-1})$, se sigue $e_{ht} \in B_{j-1}^{(2)}(E_u(S_{j-1}))$.

Por último, si $v_h \in V_v(S_{j-1})$, $v_t \in B(\bar{x}_{j-1})$, entonces $v_t \in V_u(S_{j-1})$, lo que implica $e_{ht} \in E_{[u,v]}(S_{j-1})$. Y por ser $v_h \notin B(\bar{x}_{j-1})$ (en caso contrario se tendría el apartado anterior), se concluye $e_{ht} \in B_{j-1}(E_{[u,v]}(S_{j-1}))$, quedando demostrada la inclusión contraria y por tanto el enunciado. □

Proposición 5.4.4 Para cada $j = 1, \dots, k + 1$, se verifica

$$E_{[u,v]}(S_j) = \left(E_{[u,v]}(S_{j-1}) \setminus B_{j-1}(E_{[u,v]}(S_{j-1})) \right) \cup B_{j-1}^{(1)}(E_u(S_{j-1})) \quad (5.12)$$

Demostración: Nuevamente se probará mediante la doble inclusión.

- Sea $e_{ht} \in E_{[u,v]}(S_j)$. Entonces, $v_h \in V_u(S_j)$, $v_t \in V_v(S_j)$, y equivalentemente, $v_h \in V_u(S_{j-1}) \setminus B(\bar{x}_{j-1})$, $v_t \in V_v(S_{j-1}) \cup B(\bar{x}_{j-1})$.

Si $v_t \in V_v(S_{j-1})$, entonces $e_{ht} \in E_{[u,v]}(S_{j-1})$ con $e_{ht} \notin B_{j-1}(E_{[u,v]}(S_{j-1}))$ ya que, en caso contrario, por (5.11) sería $e_{ht} \in E_v(S_j)$, lo que contradice la hipótesis. Luego debe ser $e_{ht} \in E_{[u,v]}(S_{j-1}) \setminus B_{j-1}(E_{[u,v]}(S_{j-1}))$.

Si $v_t \in B(\bar{x}_{j-1})$ por las relaciones básicas se sigue $[v_h, v_t] \in E_u(S_{j-1})$. Y por ser $v_h \notin B(\bar{x}_{j-1})$, resulta $e_{ht} \in B_{j-1}^{(1)}(E_u(S_{j-1}))$. Ambos razonamientos demuestran la relación

$$E_{[u,v]}(S_j) \subseteq \left(E_{[u,v]}(S_{j-1}) \setminus B_{j-1}(E_{[u,v]}(S_{j-1})) \right) \cup B_{j-1}^{(1)}(E_u(S_{j-1}))$$

- Recíprocamente, si $e_{ht} \in E_{[u,v]}(S_{j-1}) \setminus B_{j-1}(E_{[u,v]}(S_{j-1}))$, entonces $v_h \in V_u(S_{j-1})$, $v_t \in V_v(S_{j-1}) \subset V_v(S_j)$, con $v_h, v_t \notin B(\bar{x}_{j-1})$ lo que implica $v_h \in V_u(S_j)$ y por tanto $e_{ht} \in E_{[u,v]}(S_j)$. Análogamente, si $e_{ht} \in B_{j-1}^{(1)}(E_u(S_{j-1}))$, se tiene $v_h, v_t \in V_u(S_{j-1})$ y $v_h \in B(\bar{x}_{j-1})$, $v_t \notin B(\bar{x}_{j-1})$, lo que por las relaciones básicas supone que $v_h \in V_v(S_j)$ y $v_t \in V_u(S_j)$, y equivalentemente, $e_{ht} \in E_{[u,v]}(S_j)$. Con esto se demuestra la inclusión contraria y por tanto el enunciado. □

Proposición 5.4.5 Sean $j, q \in \{1, \dots, k+1\}$ tal que $j \neq q$. Entonces

$$B_j(E_u(S_j)) \cap B_q(E_u(S_q)) = \emptyset$$

Demostración: Supóngase que $\bar{x}_j < \bar{x}_q$. Se verá primeramente que para dos intervalos consecutivos S_j, S_{j+1} es $B_j(E_u(S_j)) \cap B_{j+1}(E_u(S_{j+1})) = \emptyset$. Pero esto es consecuencia directa de que $B_{j+1}(E_u(S_{j+1})) \subseteq E_u(S_{j+1})$, y de que por (5.10), $E_u(S_{j+1}) \cap B_j(E_u(S_j)) = \emptyset$.

Para los intervalos $S_j = (\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]$, $S_q = (\bar{x}_{q-1}, \bar{x}_q]$ basta reiterar el anterior razonamiento para S_r, S_{r+1} , con $r = j, \dots, q-1$, lo que concluye la demostración. □

Consecuencia inmediata de esta proposición es:

$$\sum_{j=1}^{k+1} |B_j(E_u(S_j))| \leq m$$

Proposición 5.4.6 Sean $j, q \in \{1, \dots, k+1\}$ tal que $j \neq q$. Entonces

$$B_j(E_{[u,v]}(S_j)) \cap B_q(E_{[u,v]}(S_q)) = \emptyset$$

Demostración: Al igual que en la anterior demostración, para $j < q$ se verá primero que $B_j(E_{[u,v]}(S_j)) \cap B_{j+1}(E_{[u,v]}(S_{j+1})) = \emptyset$. Pero esta relación se sigue de forma inmediata de que $B_{j+1}(E_{[u,v]}(S_{j+1})) \subseteq E_{[u,v]}(S_{j+1})$, y que por (5.12) es $E_{[u,v]}(S_{j+1}) \cap B_j(E_{[u,v]}(S_j)) = \emptyset$.

Reiterando este razonamiento para S_r, S_{r+1} , con $r \in \{j, \dots, q-1\}$ se concluye la demostración. \square

Puesto que para cada $j = 1, \dots, k+1$ los conjuntos $E_u(S_j)$, $E_v(S_j)$, $E_{[u,v]}(S_j)$, y e_0 son disjuntos y constituyen una partición de E , de las proposiciones anteriores se deduce el siguiente resultado:

$$\sum_{j=1}^{k+1} (|B_j(E_{[u,v]}(S_j))| + |B_j(E_u(S_j))|) \leq m \quad (5.13)$$

Sin embargo, aunque

$$\bigcup_{j=1}^{k+1} E_{[u,v]}(S_j) \subseteq E$$

los conjuntos $\{E_{[u,v]}(S_j), j = 1, \dots, k+1\}$ no tienen por que ser disjuntos, lo que impide acotar superiormente por m la expresión

$$\sum_{j=1}^{k+1} |E_{[u,v]}(S_j)|$$

Para $j = 0, \dots, k$, sea

$$\tau_j(u, v) = |E_{[u,v]}(S_j) \setminus B_j(E_{[u,v]}(S_j))|$$

entonces por (5.12) se tiene

$$\sum_{j=1}^{k+1} |E_{[u,v]}(S_j)| = \sum_{j=1}^{k+1} (|E_{[u,v]}(S_{j-1}) \setminus B_{j-1}(E_{[u,v]}(S_{j-1}))| + |B_{j-1}^{(1)}(E_u(S_{j-1}))|)$$

que se puede expresar

$$\sum_{j=1}^{k+1} |E_{[u,v]}(S_j)| = \sum_{j=1}^{k+1} \tau_{j-1}(u, v) + \sum_{j=1}^{k+1} |B_{j-1}^{(1)}(E_u(S_{j-1}))|$$

Sea

$$\tau(u, v) = \sum_{j=0}^k \tau_j(u, v) \quad (5.14)$$

entonces

$$\sum_{j=1}^{k+1} |E_{[u,v]}(S_j)| = \tau(u, v) + \sum_{j=0}^k |B_j^{(1)}(E_u(S_j))|$$

Si el grafo es poco denso, con el valor de m no muy superior al de n (caso de las redes planares) será $\tau(u, v) \leq a_N m$ con la constante multiplicativa a_N relativamente pequeña, lo que permitirá reducir la complejidad en la obtención de las funciones $z_D(\cdot)$ y $z_\nu(\cdot)$ a lo largo de cada arista $[u, v]$.

5.4.2 Algoritmo

Para cada $j = 1, \dots, k + 1$ las expresiones de $z_D(x; S_j)$ y $z_\nu(x; S_j)$ resultan de (5.7) y (5.8) sin más que calcular todos los sumandos que intervienen en dichas expresiones. Dichos sumandos están en función de las particiones de los conjuntos V y E relativas a S_j . A continuación se verá que a excepción de los sumandos relativos a la demanda sobre las aristas $E_{[u,v]}(S_j)$ y e_0 todos los demás sumandos en S_j se pueden obtener recursivamente a partir de los valores correspondientes en S_{j-1} .

- Sumandos relativos a la demanda nodal

Dichos sumandos corresponden a los coeficientes $a_D(S_j)$, $g_D(S_j)$, $a_\nu(S_j)$ y $b_\nu(S_j)$. Su cálculo se puede efectuar aplicando las relaciones (1.7), (1.8), (1.9) y (1.10) obtenidas en el capítulo 1, y que en este caso son como sigue:

$$a_D(S_j) = a_D(S_{j-1}) + z_m(v, B(\bar{x}_{j-1})) - z_m(u, B(\bar{x}_{j-1})) - l_{uv}w_\nu(B(\bar{x}_{j-1})) \quad (5.15)$$

$$g_D(S_j) = g_D(S_{j-1}) - 2w_\nu(B(\bar{x}_{j-1})) \quad (5.16)$$

$$a_\nu(S_j) = a_\nu(S_{j-1}) + \sum_{v_i \in B(\bar{x}_{j-1})} w_i [d(v_i, v) + l_{uv}]^2 - \sum_{v_i \in B(\bar{x}_{j-1})} w_i d(v_i, u)^2 \quad (5.17)$$

$$b_\nu(S_j) = b_\nu(S_{j-1}) - \left(z_m(u, B(\bar{x}_{j-1})) + z_m(v, B(\bar{x}_{j-1})) + l_{uv}w_\nu(B(\bar{x}_{j-1})) \right) \quad (5.18)$$

- Sumandos relativos a la demanda continua

Aplicando (5.10) y (5.11) a $z_\nu(x; S_j)$ y $z_D(x; S_j)$ en las expresiones (5.7) y (5.8), se tiene que para los términos relativos a la demanda continua

producida sobre las aristas $e_{ht} \in E_u(S_j)$ y $e_{ht} \in E_v(S_j)$ resulta

$$w_E(E_u(S_j)) = w_E(E_u(S_{j-1})) - w_E(B_{j-1}(E_u(S_{j-1}))) \quad (5.19)$$

De igual forma

$$\begin{aligned} \sum_{e_{ht} \in E_u(S_j)} p_{ht} Q_{(\cdot)}(u, e_{ht}) &= \sum_{e_{ht} \in E_u(S_{j-1})} p_{ht} Q_{(\cdot)}(u, e_{ht}) \\ &- \sum_{e_{ht} \in B_{j-1}(E_u(S_{j-1}))} p_{ht} Q_{(\cdot)}(u, e_{ht}) \end{aligned} \quad (5.20)$$

donde por $Q_{(\cdot)}$ representamos indistintamente H_D , H_V y R_ν . Asimismo por (5.11)

$$\begin{aligned} \sum_{e_{ht} \in E_v(S_j)} p_{ht} Q_{(\cdot)}(v, e_{ht}) &= \sum_{e_{ht} \in E_v(S_{j-1})} p_{ht} Q_{(\cdot)}(v, e_{ht}) \\ &+ \sum_{e_{ht} \in B_{j-1}(E_{[u,v]}(S_{j-1}))} p_{ht} Q_{(\cdot)}(v, e_{ht}) \\ &+ \sum_{e_{ht} \in B_{j-1}^{(2)}(E_u(S_{j-1}))} p_{ht} Q_{(\cdot)}(v, e_{ht}) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Sin embargo, estas relaciones no se pueden utilizar con los sumandos relativos a la demanda producida sobre las aristas $E_{[u,v]}(S_j)$. Dichos sumandos son:

$$\sum_{e_{ht} \in E_{[u,v]}(S_j)} D_{e_{ht}}(x), \text{ y } \sum_{e_{ht} \in E_{[u,v]}(S_j)} D_{e_{ht}}^{(2)}(x)$$

Puesto que en éste caso $D_{e_{ht}}(x)$ y $D_{e_{ht}}^{(2)}(x)$ son funciones de $\xi_{ht}(x) \in e_{ht}$, con $x \in S_j$ para $j = 1, \dots, k+1$, ambas varían de una región primaria a otra, y por tanto se han de evaluar en todas las aristas de cada uno de los conjuntos $E_{[u,v]}(S_j)$, $\forall j = 1, \dots, k+1$.

Teorema 5.4.7 *Para cada $e_0 = [u, v] \in E$, el número de aristas y de vértices de la red que han de ser evaluados para obtener $z_D(x)$ y $z_\nu(x)$ cuando $x \in [u, v]$ mediante el procedimiento descrito en (5.15) a (5.21) no es superior a $n + m + \tau(u, v)$.*

Demostración: Para cada $x \in [\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]$, $z_\nu(x) = z_\nu(x; S_j)$ y $z_D(x) = z_D(x; S_j)$. Supóngase conocida toda la información necesaria para calcular $z_\nu(x; S_{j-1})$ y $z_D(x; S_{j-1})$ mediante las expresiones de (5.7) y (5.8). Para obtener ambas funciones en S_j hay que calcular los coeficientes y sumandos relativos a:

- La demanda nodal. Por las expresiones (5.15) a (5.18) su obtención requiere una pasada sobre todos los vértices de $B(\bar{x}_{j-1})$.
- La demanda sobre las aristas. Por las expresiones (5.19), (5.20) y (5.21) los sumandos sobre $E_u(S_j)$ y $E_v(S_j)$ requieren examinar los conjuntos: $B_{j-1}(E_u(S_{j-1}))$, $B_{j-1}(E_{[u,v]}(S_{j-1}))$ y $B_{j-1}^{(2)}(E_u(S_{j-1}))$. Para la demanda del conjunto $E_{[u,v]}$ se han de examinar los elementos de $B_{j-1}^{(1)}(E_u(S_{j-1}))$, además de $\tau_{j-1}(u, v)$ aristas de E .

Como por (5.9), $B_{j-1}^{(q)}(E_u(S_{j-1})) \subset B_{j-1}(E_u(S_{j-1}))$, $q = 1, 2$, el número de vértices y de aristas que se han de recorrer para obtener $z_\nu(x; S_j)$, y $z_D(x; S_j)$ es

$$|B(\bar{x}_{j-1})| + |B_{j-1}(E_{[u,v]}(S_{j-1}))| + |B_{j-1}(E_u(S_{j-1}))| + \tau_{j-1}(u, v)$$

Por tanto, el número total de vértices y de aristas que se han de examinar para obtener $z_\nu(x)$ y $z_D(x)$, cuando $x \in [u, v]$ se obtendrá extendiendo el valor anterior a todas las regiones primarias de la arista, resultando

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k+1} |B(\bar{x}_{j-1})| + \sum_{j=1}^{k+1} (|B_{j-1}(E_{[u,v]}(S_{j-1}))| + |B_{j-1}(E_u(S_{j-1}))|) + \sum_{j=1}^{k+1} \tau_{j-1}(u, v) \\ \leq n + m + \tau(u, v) \end{aligned}$$

donde se ha utilizado (5.13), (5.14) y el segundo apartado de la proposición 1.6.3, lo que concluye la demostración. \square

Sea

$$\tau_N = \max\{\tau(u, v), [u, v] \in E\}$$

El algoritmo que se desarrolla a continuación es válido tanto para el problema 1-mediana como para el de la 1-varianza continua y con cualesquiera funciones de densidad utilizadas, y se basa en calcular ambas funciones mediante el procedimiento descrito, a lo largo de cada arista de la red.

ALGORITMO 1/VC(R)/(N), 1/MC(R)/(N)*Paso 0*

Calcular la matriz de distancias $(D(u, v))$.

Para cada arista $[u, v]$:

- * **Calcular** los puntos de embotellamiento.
- * **Ordenarlos** según distancia creciente al vértice inicial.
- * **Obtener** los conjuntos $B(\bar{x}_i)$.

Sea Z suficientemente grande. **Hacer** $x_\nu^* = 0, [u^*, v^*] = \emptyset$.

Paso 1

Seleccionar una arista $[u, v]$ de E que no haya sido considerada.

Sea Z_{uv} suficientemente grande, $x_\nu^*(u, v) = 0$.

Calcular los conjuntos $V_u(S_0), V_v(S_0), E_u(S_0), E_v(S_0), E_{[u,v]}(S_0)$.

Paso 2

Repetir para cada región primaria $[\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]$ de $[u, v]$:

* **Obtener** los conjuntos $V_u(S_j), V_v(S_j), E_u(S_j), E_v(S_j), E_{(u,v)}(S_j)$, así como $B_j(E_{(u,v)}(S_j), B_j^q(E_u(S_j)))$ ($q = 1, 2$) mediante las relaciones (5.10), (5.11), (5.12).

* **Obtener** las expresiones de $z_D(x; S_j), z_\nu(x; S_j)$ dadas en (5.7) y (5.8) mediante las relaciones (5.15) a (5.21).

* **Resolver** $\min\{z_\nu(x), x \in [\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]\}$. **Sea** $x_\nu^*(S_j)$ la solución.

* **Si** $z_\nu(x_\nu^*(S_j)) < Z_{uv}$, **hacer** $Z_{uv} \leftarrow z_\nu(x_\nu^*(S_j)), x_\nu^*(u, v) \leftarrow x_\nu^*(S_j)$.

Paso 3

Si $Z_{uv} < Z$, **hacer** $Z \leftarrow Z_{uv}, x_\nu^* \leftarrow x_\nu^*(u, v), [u^*, v^*] \leftarrow [u, v]$.

Si quedan aristas de E sin examinar, ir al paso 1.

En caso contrario, parar. Los valores de $Z, x_\nu^*, [u^*, v^*]$ constituyen la solución.

COMPLEJIDAD

Nuevamente la complejidad final del algoritmo dependerá de las funciones de densidad que intervengan. Para efectuar un análisis comparativo de la complejidad de éste algoritmo frente al algoritmo exhaustivo 1/VC/(N), se supondrá que todas las funciones de densidad son uniformes.

Paso 0: Al igual que en algoritmo 1/VAR/N, el cálculo de la matriz de distancias, puntos de embotellamiento y ordenación de los mismos se efectúa en tiempo $O(mn \log n)$ si $m \in O(n^2/\log n)$

Pasos 1 y 2: Para cada arista $[u, v]$ se calcula $z_v(\cdot)$ recursivamente sobre cada región primaria y se resuelve el correspondiente problema de optimización. Si todas las funciones de densidad sobre las aristas son uniformes, esta última rutina se puede ejecutar en tiempo constante con lo que, por el teorema 5.4.7 el tiempo de este paso es $n + m + \tau(u, v)$. Puesto que los pasos 1 y 2 se ejecutan para todas las aristas de la red el esfuerzo computacional requerido estará acotado por $mn \log n + m(m + n + \tau_N)$.

Por tanto, la complejidad del algoritmo vendrá dada por

$$\max \{O(mn \log n), O(m(m + n + \tau_N))\}$$

que en promedio será muy inferior a la del anterior algoritmo ($O(mn(m + n))$) sobre todo si el grafo es grande y poco denso ya que en este caso se obtendrán valores muy pequeños para cada $\tau(u, v)$ y por tanto para τ_N . Si bien en el peor de los casos para τ_N (cuando $\tau_N \in O(nm)$) el análisis asintótico de ambos algoritmos produce la misma complejidad computacional, el número de iteraciones que efectúa el algoritmo 1/VC(R)/N es inferior.

Proposición 5.4.8 *Incluso en el peor de los casos para τ_N el número de vértices y de aristas que son examinados por el algoritmo 1/VC(R)/N es inferior al del algoritmo 1/VC/N.*

Demostración: En la demostración se prescindirá de la complejidad computacional de la fase previa: $O(mn \log n)$, ya que su ejecución es común a ambos algoritmos.

El esfuerzo computacional que cada uno de los algoritmos consume en la fase de evaluación y resolución de cada uno de los subproblemas sobre todas las regiones primarias de la red es $O(mn(m + n))$ en el algoritmo 1/VC/N y $O(m(m + n + \tau_N))$ en 1/VC(R)/N, y corresponde al número de visitas efectuadas sobre nodos y aristas de la red.

En el peor de los casos $\tau_N \in O(nm)$ con lo que el tiempo consumido por este último algoritmo es $O(m(m + n + mn))$. Pero como para cualquier red

considerada, $0 \leq \tau_N \leq nm$, el enunciado de la proposición se probará verificando que $m + n + mn < n(n + m)$. Pero esta desigualdad equivale a $m + n < n^2$ y por tanto a $m < n(n - 1)$, relación que siempre es cierta ya que en una red sin bucles no dirigida es $m \leq \frac{n(n - 1)}{2}$. \square

En general para cada red $N(n, m)$ considerada se podrá expresar

$$\tau_N = a_N m, \quad 0 \leq a_N \leq n$$

5.4.3 Experiencia computacional

Para evaluar el tiempo promedio de ejecución del algoritmo $1/VC(R)/N$ se analizan los valores obtenidos para a_N sobre redes generadas aleatoriamente. La generación de las redes sigue el procedimiento descrito en el capítulo anterior, y se ha mantenido la misma distribución uniforme en $[5, 40]$ para las longitudes de las aristas. Igualmente, el tipo $N(n, m)$ denota a una red de n vértices y m aristas.

Todas las redes consideradas tienen $n = 25$ vértices. El número de aristas comienza con un valor inicial de $m = 30$, que se aumenta progresivamente de 10 en 10 hasta $m = 100$ aristas.

Sobre cada tipo de red $N(n, m)$ generada 100 veces se ha evaluado el porcentaje de casos para los que $\tau_N \leq a_N m$, según distintos valores considerados de a_N .

La tabla que sigue muestra los resultados obtenidos. Las columnas se encabezan con los valores de a_N considerados, y las filas con el número m de aristas. Cada elemento c_{ij} de la tabla recoge el porcentaje de veces que en la red considerada se obtuvo $\tau_N \leq a_N m$.

	Valores de a_N										
	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5
$N(25, 30)$	65	100									
$N(25, 40)$		1	32	84	100						
$N(25, 50)$				6	44	80	95	100			
$N(25, 60)$					2	33	81	97	100		
$N(25, 70)$						4	37	81	97	100	
$N(25, 80)$							15	61	90	99	100
$N(25, 90)$							3	48	92	98	100
$N(25, 100)$							1	41	76	89	100

Para redes con baja densidad ($m = 30$ y $m = 40$) un porcentaje muy elevado de casos se logra con pequeños valores de a_N : en $a_N = 1$ y $a_N = 2.5$ se sitúa la totalidad de los casos, y por tanto, $\tau_N \in O(m)$.

Al aumentar la densidad de la red aumentan los valores de a_N necesarios para conseguir porcentajes de casos superiores al 80%, sin embargo estos valores se mantienen pequeños frente a n : incluso en un tipo de red bastante denso como $N(25, 100)$ (red no planar), la totalidad de los casos se atrapa con $a_N = 5.5$. De hecho la cota $a_N m$ no se alcanzó en ninguno de los casos considerados, ya que por ejemplo el valor más elevado de τ_N que se obtuvo en el tipo $N(25, 100)$ fue 610, mientras que el máximo proporcionado por $a_N m$ cuando $a_N = 5.5$ es 750. Por tanto puede afirmarse que, también en estos casos, $\tau_N \in O(m)$.

La disminución que el procedimiento del algoritmo $1/VC(R)/N$ supone en el esfuerzo computacional se puede apreciar en la siguiente tabla, que refleja el número máximo de “visitas” (vértices y aristas examinados) requeridas por este algoritmo frente al exhaustivo $1/VC/N$ en la fase de evaluación y resolución de los subproblemas sobre la red. Se ha omitido la fase de preprocesamiento, común a ambas y con el mismo esfuerzo computacional.

a_N	$\tau_N \leq a_N m$ (en %)	$m(m + n + a_N m)$	$mn(m + n)$	
1	(100%)	2550	41250	$N(25, 30)$
2	(84%)	5800	65000	$N(25, 40)$
3	(80%)	11250	93750	$N(25, 50)$
4	(97%)	19500	127500	$N(25, 60)$
4	(81%)	26250	166250	$N(25, 70)$
5	(99%)	40400	210000	$N(25, 80)$
5	(98%)	50850	258750	$N(25, 90)$
5.5	(100%)	67500	312500	$N(25, 100)$

En todos los tipos de red considerados casi la totalidad de los casos se ejecuta en un número de visitas muy inferior a las requeridas por el algoritmo exhaustivo: como ejemplo, señalamos las 67.500 visitas que como máximo ejecutan el 100% de los casos examinados en el tipo $N(25, 100)$ frente a las 312.500 necesarias para resolver el problema en el mismo tipo de red con el algoritmo exhaustivo.

5.5 Algoritmos en una red árbol

Si la red considerada es un árbol $T(V, E)$, la convexidad de $z_D(x)$ sobre cada arista de T (corolario 5.3.4) así como una propiedad relativa a la arista que contiene al óptimo permite plantear un algoritmo lineal para resolver el problema de la 1-mediana continua.

Teorema 5.5.1 (Chiu [7], Labbé [36]) *Sea $N(V, E)$ una red conexa no dirigida y $e_o = [u, v]$ una arista puente de la red. Entonces:*

- (i) *El vértice u minimiza $z_D(x)$ sobre $[u, v]$ si y sólo si*

$$w(N_u) = w_v(V_u) + w_E(E_u) \geq 1/2$$

- (ii) *El punto $x^* \in [u, v]$ es un mínimo local de $z_D(x)$ sobre $[u, v]$ si y sólo si*

$$F_0(x^*) = \frac{1/2 - w(N_u)}{p_0}$$

Definición 5.5.2 Sea $N_s = (V_s, E_s) \subseteq N$ una subred de la red N . N_s se denomina una subred puente si existe una aplicación $\phi : N \setminus N_s \rightarrow N_s$ tal que para cualesquiera $x \in N \setminus N_s$, $x_s \in N_s$, se verifica $d(x, x_s) = d(x, \phi(x)) + d(\phi(x), x_s)$.

Definición 5.5.3 Una subred $N_s \subseteq N$ se dice *mayorante* si $w(V_s) \geq w(V)/2$.

Teorema 5.5.4 (Labbé [36]) Si N_s es una subred puente mayorante de N , entonces N_s contiene algún punto 1-mediana continua.

Estos dos teoremas permiten desarrollar un algoritmo lineal muy simple para resolver el problema de la 1-mediana continua en una red árbol con cualquier tipo de funciones de densidad. Dicho algoritmo (extensión al caso continuo del algoritmo de Goldman [13]), va examinando secuencialmente todas las aristas, acumulando los pesos obtenidos hasta el momento hasta encontrar un subárbol mayorante. Entonces se aplica el teorema 5.5.1 a la arista que enlaza dicho subárbol con el complementario. Puesto que cada arista se evalúa una sola vez, la complejidad del algoritmo es $O(n)$.

ALGORITMO 1/MC/(T) (Chiu [7], Labbé [36])

Paso 1

Seleccionar un vértice u de grado 1. **Sea** $[u, v]$ la arista incidente.

Si $w(u) \geq 1/2$, **parar:** u es la 1-mediana continua.

Paso 2

Si $w(u) + p_{uv} \geq 1/2$, **entonces** la 1-mediana continua es el punto $x^* \in [u, v]$ tal que $F_{uv}(x^*) = \frac{1/2 - w(u)}{p_{uv}}$.

Paso 3

Si $w(u) + p_{uv} < 1/2$, **modificar** T **eliminando** el vértice u y la arista incidente $[u, v]$.

Hacer $w(v) = w(v) + w(u) + p_{uv}$.

Ir al paso 1.

Para resolver el problema de la 1-varianza continua se hará una extensión del algoritmo 1/VAR/(T) (relativo a la demanda discreta). Esta extensión se refiere

sobre todo al procedimiento para calcular los coeficientes y valores auxiliares asociados a cada vértice, sin embargo la obtención del óptimo local sobre cada arista (y por tanto la complejidad del algoritmo) dependerá de las funciones de densidad que intervengan. En el caso de considerar funciones de densidad uniformes, el algoritmo será lineal.

5.5.1 Varianza continua en una red árbol

En este caso, para cada $e_0 = [u, v] \in E$ es $|B(u, v)| = \emptyset$, y la única región primaria en cada arista es la propia arista. Suponiendo enraizado el árbol T con un postorden definido en él, tal que v es *padre* de u en el postorden, y tal que $\forall x \in [u, v]$ es $x = d(u, x)$, y $l_{uv} - x = d(v, x)$, la partición inducida en V es: $\{V_u, \overline{V}_u\}$, siendo V_u el conjunto de vértices del subárbol enraizado en u . Entonces

$$\forall x \in [u, v], \quad V_u(x) = V_u = \{v_i \in V / d(v_i, x) = d(v_i, u) + x\}$$

$$\forall x \in [u, v], \quad \overline{V}_u(x) = \overline{V}_u = \{v_i \in V / d(v_i, x) = d(v_i, v) + l_{uv} - x\}$$

Análogamente, sobre las aristas de T se tienen los conjuntos

$$E_u = E_u(x) = \{e_{ht} = [v_h, v_i] \in E / v_h, v_i \in V_u\}$$

$$\overline{E}_u = E_v(x) = \{e_{ht} = [v_h, v_i] \in E / v_h, v_i \in \overline{V}_u\}$$

de forma que $\{E_u, \overline{E}_u$ y $e_0 = [u, v]\}$ constituyen una partición de E .

Entonces por la proposición 5.2.5 resulta

$$z_D(x) = \sum_{v_i \in V} w_i d(v_i, x) + \sum_{e_{ht} \in E_u} D_{e_{ht}}(x) + \sum_{e_{ht} \in \overline{E}_u} D_{e_{ht}}(x) + D_{e_0}(x)$$

$$z_\nu(x) = \sum_{v_i \in V} w_i d(v_i, x)^2 + \sum_{e_{ht} \in E_u} D_{e_{ht}}^{(2)}(x) + \sum_{e_{ht} \in \overline{E}_u} D_{e_{ht}}^{(2)}(x) + D_{e_0}^{(2)}(x) - (z_D(x))^2$$

- **Demanda Nodal**

La expresión de estos sumandos es la misma que en el caso del problema de la 1-varianza (proposición 1.5.4), sin más que sustituir g_u por $g_\nu(u) = w_\nu(V_u) - w_\nu(\overline{V}_u)$, resultando:

$$\sum_{v_i \in V} w_i d(v_i, x) = z_m(u) + g_\nu(u)x$$

$$\sum_{v_i \in V} w_i d(v_i, x)^2 = z_m^{(2)}(u) + 2x(2z_m(u, V_u) - z_m(u)) + w_\nu x^2$$

- **Demanda sobre las aristas**

Para cada $e_{ht} = [v_h, v_t] \in E$, sea $v_{ht}(u)$ el vértice de la arista $[v_h, v_t]$ más cercano al vértice u , esto es: $d(v_{ht}(u), u) = \min\{d(v_h, u), d(v_t, u)\}$. Cuando $e_{ht} = e_0 = [u, v]$, es $d(v_{ht}(u), u) = 0$.

Suponiendo que para cada arista e_{ht} la variable de integración y se desplaza desde el vértice $v_{ht}(u)$ más cercano al vértice al más lejano respecto de u , de forma que

$$\forall y \in e_{ht} = [v_h, v_t], \quad d(y, x) = \begin{cases} d(v_{ht}(u), u) + y + x, & \text{si } e_{ht} \in E_u \\ d(v_{ht}(u), u) + y - x, & \text{si } e_{ht} \in \bar{E}_u \end{cases}$$

se obtienen para las funciones $D_{e_{ht}}(x)$ y $D_{e_{ht}}^{(2)}(x)$ las siguientes expresiones:

$$\underline{e_{ht} \in E_u}$$

$$D_{e_{ht}}(x) = p_{ht}(\mu_{ht} + d(v_{ht}(u), u) + x)$$

$$D_{e_{ht}}^{(2)}(x) = p_{ht}[x^2 + 2x(d(v_{ht}(u), u) + \mu_{ht}) + d(v_{ht}(u), u)^2 + 2d(v_{ht}(u), u)\mu_{ht} + \mu_{ht}^{(2)}]$$

$$\underline{e_{ht} \in \bar{E}_u}$$

$$D_{e_{ht}}(x) = p_{ht}(\mu_{ht} + d(v_{ht}(u), u) - x)$$

$$D_{e_{ht}}^{(2)}(x) = p_{ht}[x^2 - 2x(d(v_{ht}(u), u) + \mu_{ht}) + d(v_{ht}(u), u)^2 + 2d(v_{ht}(u), u)\mu_{ht} + \mu_{ht}^{(2)}]$$

$$\underline{e_{ht} = e_0 = [u, v]}$$

$$D_{e_0}(x) = p_0[2xF_0(x) - x + \mu_0 - 2\mu_0(x)]$$

$$D_{e_0}^{(2)}(x) = p_0[x^2 - 2x\mu_0 + \mu_0^{(2)}]$$

Efectuando la suma de los correspondientes términos, denotando por

$$g_E(u) = \sum_{e_{ht} \in E_u} p_{ht} - \sum_{e_{ht} \in \bar{E}_u} p_{ht} - p_0$$

y teniendo en cuenta que $d(v_{ht}(u), u) = 0$, si $e_{ht} = e_0$ se obtiene, para $x \in e_0 = [u, v]$:

$$z_D(x) = [g_V(u) + g_E(u)]x + 2xp_0F_0(x) - 2p_0\mu_0(x) + B_D(u) \quad (5.22)$$

$$z_\nu(x) = x^2 + 2B_\nu(u)x + C_\nu(u) - (z_D(x))^2 \quad (5.23)$$

donde

$$B_D(u) = z_m(u) + \sum_{e_{ht} \in E} p_{ht} \mu_{ht} + \sum_{e_{ht} \in E} p_{ht} d(v_{ht}(u), u) \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} B_\nu(u) &= 2z_m(u, V_u) - z_m(u) + \sum_{e_{ht} \in E_u} p_{ht} \mu_{ht} - \sum_{e_{ht} \in (\bar{E}_u \cup e_0)} p_{ht} \mu_{ht} \\ &+ \sum_{e_{ht} \in E_u} p_{ht} d(v_{ht}(u), u) - \sum_{e_{ht} \in (\bar{E}_u \cup e_0)} p_{ht} d(v_{ht}(u), u) \\ C_\nu(u) &= z_m^{(2)}(u) + \sum_{e_{ht} \in E} p_{ht} \mu_{ht}^{(2)} + \sum_{e_{ht} \in E} p_{ht} d(v_{ht}(u), u)^2 + 2 \sum_{e_{ht} \in E} p_{ht} \mu_{ht} d(v_{ht}(u), u) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Puesto que si $K_{e_{ht}}$ es cualquier expresión definida sobre la arista e_{ht} se verifica

$$\sum_{e_{ht} \in E_u} K_{e_{ht}} + \sum_{e_{ht} \in (\bar{E}_u \cup e_0)} K_{e_{ht}} = \sum_{e_{ht} \in E} K_{e_{ht}}$$

el coeficiente $B_\nu(u)$ se puede expresar

$$\begin{aligned} B_\nu(u) &= 2z_m(u, V_u) - z_m(u) + 2 \sum_{e_{ht} \in E_u} p_{ht} \mu_{ht} - \sum_{e_{ht} \in E} p_{ht} \mu_{ht} \\ &+ 2 \sum_{e_{ht} \in E_u} p_{ht} d(v_{ht}(u), u) - \sum_{e_{ht} \in E} p_{ht} d(v_{ht}(u), u) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Análogamente, como $w_\nu + w_E = 1$, se tiene

$$g_\nu(u) + g_E(u) = 2(w_\nu(V_u) + w_E(E_u)) - 1$$

Por tanto la expresión de $z_\nu(x)$ sobre cada eje $e_0 = [u, v]$ se obtiene a partir de unos valores asociados al vértice inferior u de dicha arista, así como de valores globales sobre el árbol T . Dichos valores son

- Valores asociados a u sobre T :

$$z_m(u), z_m^{(2)}(u), \sum_{e_{ht} \in E} p_{ht} d_{ht}(u), \sum_{e_{ht} \in E} p_{ht} d_{ht}(u)^2 \text{ y } \sum_{e_{ht} \in E} p_{ht} \mu_{ht} d_{ht}(u)$$

donde $d_{ht}(u)$ representa abreviadamente $d(v_{ht}(u), u)$.

- Valores asociados a u sobre V_u y E_u :

$$w_\nu(V_u), w_E(E_u), z_m(u, V_u), \sum_{e_{ht} \in E_u} p_{ht} \mu_{ht}, \sum_{e_{ht} \in E_u} p_{ht} d_{ht}(u)$$

- Valores globales sobre T :

$$\sum_{e_{ht} \in E} \mu_{ht}, \sum_{e_{ht} \in E} \mu_{ht}^{(2)}, \sum_{e_{ht} \in E} p_{ht} \mu_{ht}$$

5.5.2 Algoritmo

Mediante las relaciones que se desarrollan a continuación se podrá extender el algoritmo AUX/V(T) al conjunto de aristas para calcular tanto los valores asociados a u como los globales sobre T . Esto requerirá 2 pasadas en postorden sobre T : una hacia la raíz, y otra en sentido contrario.

Para cada $u \in V$, sea H_u el conjunto de vértices *hijos* de u en el postorden (en la figura 5.9, $H_u = \{v_1, \dots, v_k\}$).

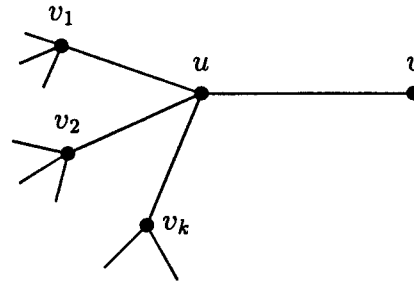


Figura 5.9

Se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 w_V(V_u) &= \sum_{v_i \in V_u} w_i = \sum_{v_i \in H_u} w_V(V_{v_i}) + w(u) \\
 w_E(E_u) &= \sum_{e_{ht} \in E_u} p_{ht} = \sum_{v_i \in H_u} \left(\sum_{e \in E_{v_i}} p_e + p_{v_i, u} \right) \\
 \sum_{e_{ht} \in E_u} Q_{ht} &= \sum_{v_i \in H_u} \left(\sum_{e \in E_{v_i}} Q_e + Q_{v_i, u} \right) \tag{5.27}
 \end{aligned}$$

donde Q_{ht} representa sucesivamente a $p_{ht}\mu_{ht}$, $p_{ht}\mu_{ht}^{(2)}$, μ_{ht} y $\mu_{ht}^{(2)}$.

Por otra parte, sea $e \in E_{v_i}$, con $v_i \in H_u$, (Figura 5.10). Entonces

$$d(v_e(u), u) = d(v_e(v_i), v_i) + d(v_i, u)$$

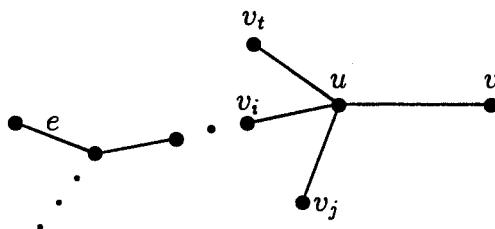


Figura 5.10

Además si $e = [v_i, u]$ es $d(v_e(u), u) = 0$. Denotando respectivamente a $d(v_e(u), u)$ y a $d(v_e(v_i), v_i)$ por $d_e(u)$ y $d_e(v_i)$, se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{e_{ht} \in E_u} p_{ht} d_{ht}(u) &= \sum_{v_i \in H_u} \left(\sum_{e \in E_{v_i}} p_e d_e(v_i) + d(v_i, u) w_E(E_{v_i}) \right) \\ \sum_{e_{ht} \in E_u} p_{ht} \mu_{ht} d_{ht}(u) &= \sum_{v_i \in H_u} \left(\sum_{e \in E_{v_i}} p_e \mu_e d_e(v_i) + d(v_i, u) \sum_{e \in E_{v_i}} p_e \mu_e \right) \\ \sum_{e_{ht} \in E_u} p_{ht} d_{ht}(u)^2 &= \sum_{v_i \in H_u} \left(\sum_{e \in E_{v_i}} p_e d_e(v_i)^2 + 2d(v_i, u) \sum_{e \in E_{v_i}} p_e d_e(v_i) + d(v_i, u)^2 w_E(E_{v_i}) \right) \end{aligned}$$

Por último, el cálculo de $z_m(u, V_u)$, $z_m(u)$ y $z_m^{(2)}(u)$ se puede hacer mediante las relaciones (1.3), (1.4), (1.5) y (1.6) utilizadas en el algoritmo AUX/V(T).

Efectuando un recorrido sobre las aristas de T en dirección a la raíz, las expresiones anteriores proporcionan al final de esta primera pasada todos los valores asociados a cada vértice u sobre V_u y E_u , así como los valores globales sobre T . En efecto, ya que si v_r es la raíz y $H_r = \{u_1, \dots, u_s\}$ los hijos de v_r , al finalizar la pasada hacia v_r se dispone de

$$\sum_{e_{ht} \in E_{u_j}} Q_{ht}, \quad \forall j = 1, \dots, s$$

por tanto los valores de $\sum_{e_{ht} \in E} Q_{ht}$ se obtienen aplicando (5.27) a H_r .

De igual forma, para cada $[u, v] \in E$ los valores asociados a u sobre todo el árbol T se resumen como

$$\sum_{e_{ht} \in E} Q_{ht}(u), \quad [u, v] \in E$$

donde $Q_{ht}(u)$ denota indistintamente a $p_{ht} d_{ht}(u)$, $p_{ht} \mu_{ht} d_{ht}(u)$, y $p_{ht} d_{ht}(u)^2$. Una vez efectuado el recorrido anterior hacia la raíz, su cálculo se completa mediante una segunda pasada *hacia atrás* sobre todas las aristas de T , desde la raíz

hacia la primera arista en el postorden. A continuación se describe la relación que se ha de utilizar para calcular $\sum_{e_{it} \in E} p_{it} d_{it}(u)$ en el paso hacia atrás; las demás se obtienen de forma análoga.

Para las aristas $[u_j, v_r]$, $u_j \in H_r$ se tiene

$$\sum_{e_{ht} \in E} p_{ht} d_{ht}(u_j) = \sum_{e_{ht} \in E_{u_j}} p_{ht} d_{ht}(u_j) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^s \left(\sum_{e_{ht} \in E_{u_k}} p_{ht} (d_{ht}(u_k) + d(u_k, u_j)) + p_{kr} d_{kr}(u_j) \right)$$

pero si $k \neq j$ es $d_{kr}(u_j) = l_{v_r u_j}$ y $d(u_k, u_j) = d(u_k, v_r) + l_{v_r u_j}$, resultando

$$\begin{aligned} \sum_{e_{ht} \in E} p_{ht} d_{ht}(u_j) &= \sum_{u_k \in H_r} \left(\sum_{e_{ht} \in E_{u_k}} p_{ht} d_{ht}(u_k) \right) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^s l_{v_r u_k} w_E(E_{u_k}) \\ &+ l_{v_r u_j} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^s (w_E(E_{u_{u_k}}) + p_{kr}) \end{aligned}$$

Continuando con la pasada hacia atrás, para cualquier otra arista $[u, v]$ tal que $v \notin H_r$ los valores relativos a u se obtienen a partir de los correspondientes a v como sigue

$$\sum_{e_{ht} \in E} p_{ht} d_{ht}(u) = \sum_{e_{ht} \in E} p_{ht} d_{ht}(v) + l_{uv} (w_E - 2w_E(E_u) - p_{uv})$$

A partir de todo lo expuesto se desarrolla el siguiente algoritmo para el problema de la 1-varianza continua en una red árbol.

ALGORITMO 1/VC/(T)

Paso 0

Calcular todos los valores asociados a cada vértice $u \in V$ utilizando las relaciones anteriores en el algoritmo AUX/V(T).

Sea Z suficientemente grande, $x_v^* = 0$, $[u^*, v^*] = \emptyset$.

Seleccionar $e_0 = [u, v]$ (primera arista en postorden).

Paso 1

Calcular $B_D(u)$, $C_\nu(u)$, $B_\nu(u)$ mediante (5.24) a (5.26).

Obtener $z_\nu(x)$ mediante (5.22) y (5.23).

Resolver el problema $\min\{z_\nu(x), x \in [0, l_{uv}]\}$. **Sea** $x_\nu^*(u, v)$ el mínimo.

Paso 2

Si $z_\nu(x_\nu^*(u, v)) < Z$, entonces:

* **Hacer** $Z \leftarrow z_\nu(x_\nu^*(u, v))$, $x_\nu^* \leftarrow x_\nu^*(u, v)$, $[u^*, v^*] \leftarrow [u, v]$.

Si quedan aristas de E sin examinar, entonces:

* **Seleccionar** $[u, v]$ (siguiente arista en postorden).

* **Ir** al paso 1.

En caso contrario, parar. Los valores de Z , x_ν^* , $[u^*, v^*]$ constituyen la solución.

COMPLEJIDAD

La fase previa (paso 0) requiere dos pasadas sobre todas las aristas del árbol, así como ir amontonando los cálculos obtenidos en cada avance relativos a cada arista hasta completar ambas pasadas. Su complejidad es $O(n)$.

En los pasos 1 a 2 se calcula en tiempo constante la función $z_\nu(x)$ sobre cada arista de T , y se resuelve el correspondiente subproblema. Puesto que en total se resuelven $n - 1$ subproblemas, la complejidad de esta fase es $O(n)$ si las funciones de densidad son uniformes. En tal caso, la complejidad resultante del algoritmo es $O(n)$.

Capítulo 6

Caminos de mínima varianza

Uno de los elementos que intervienen en la clasificación de los problemas de localización en redes es la forma o estructura del servicio (o servicios) a ser localizado. En los problemas tratados hasta ahora en esta memoria, así como en la mayor parte de los problemas estudiados en teoría de localización, se asume que los servicios se pueden modelizar como puntos aislados de la red.

Cuando el tipo de servicio a localizar no es lo suficientemente pequeño respecto a su entorno para poder ser representado por un punto, el problema planteado es de localización dimensional, o de estructuras dimensionales, (también denominado localización de servicios extensos por Mesa y Boffey [42]). Para modelizar el servicio se requiere una estructura tipo camino, ciclo, árbol o red. El interés en el estudio de este tipo de problemas esta motivado por situaciones reales en donde se persigue la localización de oleoductos, rutas de evacuación, líneas de transporte de pasajeros o mercancías, rutas para transporte de materiales peligrosos, etc. A este respecto el trabajo de Mesa [41] explora una amplia gama de aplicaciones que pudieran tener estos modelos.

Las estructuras más utilizadas en los problemas de localización dimensional son del tipo camino, ciclo y árbol, y los criterios aplicados son una extensión de los correspondientes en localización puntual a las medidas centro, mediana, centroide y problemas cubrimiento. Sin embargo, el paso de localizar puntualmente a la localización de estructuras no es una mera extensión, sino que supone en muchas ocasiones la consideración de problemas mucho más complejos, tanto a

la hora de obtener propiedades como en los aspectos computacionales. Un ejemplo de lo anterior lo constituye el que aunque los problemas de localización puntual 1-centro y 1-mediana sobre redes generales (cíclicas) tienen complejidad polinomial, los correspondientes a la localización del camino-centro y camino-mediana (también llamado *core*) en este tipo de redes son NP-duros.

La localización de estructuras dimensionales se inicia con los trabajos de Slater [56, 57] sobre caminos centrales, donde se introducen los conceptos de camino-centro, camino-mediana y camino-centroide como sigue: dada una red $N(V, E)$ tal que la demanda se produce en los vértices de la red, para cada camino P de la red, Slater define

- la excentricidad de P como $e(P) = \max_{v_i \in V} d(v_i, P)$
- la mediana de P (o suma de distancias) como

$$S(P) = \sum_{v_i \in V} d(v_i, P)$$

- el peso de rama $b(P)$ como el cardinal máximo de los conjuntos de vértices de los componentes de $N \setminus P$, esto es

$$b(P) = \max \{|N_c \cap V| : N_c \text{ es componente de } N \setminus P\}$$

El *camino-centro* es aquel de mínimo cardinal entre todos los caminos de mínima excentricidad. Un *camino-mediana* (*core*) es un camino de mínima suma entre todos los caminos de la red. El *camino-centroide* (o *espina*) es el de mínimo cardinal entre los que minimizan el peso de rama.

Una definición diferente del camino-centro se debe a Hedetniemi et al. [25], en donde la minimalidad respecto al cardinal del conjunto de vértices del camino se sustituye por la minimalidad respecto a la inclusión de conjuntos, aunque ambas definiciones coinciden sobre redes árbol. Las anteriores definiciones suponen que la demanda se distribuye uniformemente en todos los vértices: la red es no ponderada. Para redes ponderadas se ha de sustituir $d(v_i, P)$ por $w_i d(v_i, P)$ en $S(P)$, y en la expresión de $b(P)$, el peso de cada componente: $w(N_c) = \sum_{v_i \in N_c} w_i$ sustituye a su cardinal.

La localización del camino-mediana en redes árbol es resuelta mediante un algoritmo lineal por Morgan and Slater [48]. Peng et al. [51] simplifican el anterior algoritmo y extienden el problema a la localización de árboles-mediana con exactamente k hojas. Los algoritmos de Slater [57] y Hedetniemi et al. [25] localizan en tiempo lineal el camino-centro sobre redes árbol, y asimismo Slater [57] da un algoritmo lineal para el problema del camino centroide en árboles.

Otras extensiones del problema surgen al considerar restricciones sobre la longitud del camino o subárbol a localizar, (Minieka [43]), o bien problemas de cobertura (Kim et al. [30, 31], Kincaid et al. [34]). Este último tipo de problemas consiste en localizar la estructura dimensional (árbol o subred) $\mathcal{J} \subseteq N$ de mínima longitud que cubra a todos los puntos de demanda:

$$\begin{aligned} \min l(\mathcal{J}) \\ d(v_i, \mathcal{J}) \leq r_i, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

En el artículo de Mesa y Boffey [42] se clasifican y recopilan todos los trabajos existentes en la literatura sobre localización no puntual. La mayoría de los problemas descritos son resolubles en tiempo polinomial en redes árbol o redes tipo cactus, pero son NP-duros en redes generales, como se demuestra en el trabajo de Hakimi et al. [17], donde se analiza la complejidad computacional de una amplia colección de problemas de localización dimensional.

Todos los problemas tratados responden bien a modelos cobertura, bien a modelos donde se aplican y combinan los operadores min o max con las funciones $e(\cdot)$, $S(\cdot)$ y $b(\cdot)$, con o sin restricciones. Sin embargo, no se ha investigado el desarrollo de problemas de localización de estructuras aplicando criterios de igualdad. La utilización de estos criterios en la localización dimensional daría lugar a un amplio tipo de problemas (según el criterio aplicado, la forma del servicio a localizar, el tipo de red subyacente, la existencia o no de restricciones) cuyo estudio está todavía inexplorado.

En este capítulo se pretende una introducción a este tipo de problemas extendiendo el criterio varianza a la localización de caminos.

6.1 Formulación del problema y complejidad

Sea $N(V, E)$ una red conexa no dirigida de sistema normalizado de pesos, con $|V| = n$ y $|E| = m$, y (v_1, \dots, v_n) el vector demanda situado en los nodos de la red, y sea $P(x_1, x_2) \subset N$ un camino enlazando los puntos x_1, x_2 de N . Para cada $y \in N$ la distancia $d(y, P) = \min\{d(y, x) : x \in P\}$. Si $x_1, x_2 \in V$, y $V(P) = P \cap V$ entonces $d(y, P) = \min\{d(y, v) : v \in V(P)\}$.

La función mediana de P sobre un subconjunto $V' \subseteq V$ se define como

$$z_m(P, V') = \sum_{v_i \in V'} w_i d(v_i, P)$$

donde $z_m(P)$ denota a $z_m(P, V)$.

Definición 6.1.1 Para cada camino P de N se define la varianza de P como

$$z_s(P) = \sum_{v_i \in V} w_i [d(v_i, P) - z_m(P)]^2$$

Extendiendo la definición de $z_m^{(2)}(\cdot)$ a P como $z_m^{(2)}(P) = \sum_{v_i \in V} w_i d(v_i, P)^2$, es inmediato comprobar que $z_s(P) = z_m^{(2)}(P) - z_m(P)^2$.

El problema del camino de mínima varianza no restringido consiste en localizar un camino $P^* \subset N$ tal que $z_s(P^*) \leq z_s(P)$, para todo camino $P \subset N$. En tal caso se dirá que P^* es un camino de mínima varianza.

La ausencia de restricciones sobre la longitud implica que los puntos extremos del camino de mínima varianza son vértices de N . Si

$$\mathcal{P}(N) = \{P(v_i, v_j) : P \text{ es camino de } N\}$$

es el conjunto de todos los caminos de N cuyos puntos extremos son vértices, el problema (no restringido) de camino de mínima varianza se puede formular como

$$\min_{P \in \mathcal{P}(N)} z_s(P)$$

En el siguiente teorema se prueba que el problema del camino de mínima varianza es NP-duro incluso cuando la red es bastante simple. La demostración se basará en reducir el problema del camino hamiltoniano (conocido como NP-completo) al anterior problema.

Definición 6.1.2 Un camino hamiltoniano en N es un camino simple que contiene a todos los vértices de N .

El problema de decisión del camino hamiltoniano se plantea como sigue: dada una red $N(V, E)$, ¿existe o no un camino hamiltoniano en N ? Garey y Johnson [12] demostraron que este problema es NP-completo, y su correspondiente problema de búsqueda es NP-duro.

Teorema 6.1.3 *El problema del camino de mínima varianza en una red $N(V, E)$ es NP-duro, incluso si en la red considerada todos los ejes tienen igual longitud y todos los vértices igual peso.*

Demostración: Sea $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ el conjunto de vértices de N , con $w(v_i) = \frac{1}{n}$, $\forall i = 1, \dots, n$, y $|E| = m$. Se supondrá, sin pérdida de generalidad, que la longitud común de todos los ejes de E es 1.

Sea la red $\tilde{N}(\tilde{V}, \tilde{E})$ cuyos vértices tienen igual peso y sus ejes igual longitud, construida a partir de N de la siguiente manera:

El conjunto de vértices $\tilde{V} = V \cup V_1 \cup V_2$, donde los vértices de V_1 y de V_2 son réplicas de los vértices de V , tal que

$$\forall i = 1, \dots, n, v_{ij} \in V_j \text{ si y sólo si } v_i \in V, j = 1, 2$$

Claramente, $|\tilde{V}| = 3n$, y el peso común de todos los vértices de \tilde{V} es $w(\tilde{v}) = \frac{1}{3n}$. El conjunto de ejes $\tilde{E} = E \cup E'$ donde E' está formado por ejes que enlazan cada vértice $v_i \in V$ con sus dos réplicas v_{i1}, v_{i2} , esto es

$$E' = \{e'_{i1} = [v_i, v_{i1}], e'_{i2} = [v_i, v_{i2}], i = 1, \dots, n\}$$

Entonces $|\tilde{E}| = m + 2n$, y puesto que todos los ejes tienen igual longitud, se tiene $l(\tilde{e}) = 1, \forall \tilde{e} \in \tilde{E}$.

En la figura 6.1 (b) se muestra la red \tilde{N} obtenida a partir de la red elemental N de 6.1 (a).

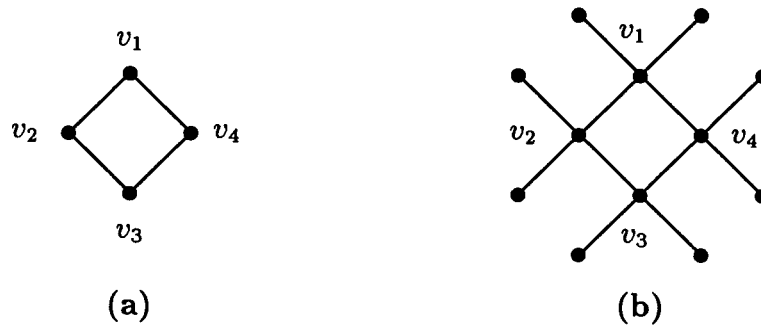


Figura 6.1

Considérese el siguiente problema de decisión: dado $B > 0$, ¿existe algún camino $P \subset \tilde{N}$ tal que $\tilde{z}_s(P) \leq B$? (donde $\tilde{z}_s(\cdot)$ denota la función varianza sobre \tilde{N}). Para un determinado valor de B se probará la equivalencia de este problema y el problema del camino hamiltoniano: se demostrará que existe un camino hamiltoniano P en N si y sólo si P es camino de mínima varianza en \tilde{N} tal que $\tilde{z}_s(P) = 2/9$.

Sea P un camino hamiltoniano en N , que por comodidad se supondrá $P = \{v_1, \dots, v_n\}$. Sobre la red \tilde{N} es $|V(P)| = n$, y $|\tilde{V} \setminus V(P)| = 2n$, por tanto

$$\tilde{z}_m(P) = \frac{1}{3n} \sum_{\tilde{v} \in \tilde{V}} d(\tilde{v}, P) = \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}$$

y análogamente

$$\tilde{z}_s(P) = \frac{1}{3n} \sum_{\tilde{v} \in V(P)} \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3n} \sum_{\tilde{v} \in \tilde{V} \setminus V(P)} \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

Sea $\mathcal{P}(\tilde{N})$ el conjunto de todos los caminos simples enlazando vértices distintos de \tilde{N} . Claramente, $\forall P' \in \mathcal{P}(\tilde{N})$ se verifica $|V(P')| \leq n + 2$. Se trata de probar que $\forall P' \in \mathcal{P}(\tilde{N})$, es $\tilde{z}_s(P') \geq \tilde{z}_s(P)$, para lo cual se considerarán los tres casos posibles que pueden darse para el cardinal de P' : $|V(P')| < n$, $|V(P')| = n$ y $|V(P')| > n$.

- Si $|V(P')| < n$, al menos dos vértices de $\tilde{V} \setminus V(P')$ aumentan en una unidad la distancia común de los demás respecto de P' , y por tanto aumenta el valor de la función varianza. Como ejemplo se construyen sobre la red de la figura 6.1 (b) tres posibles caminos P' con $|V(P')| = 3$, los cuales se muestran en la figura 6.2 (a), (b) y (c), con trazo negro más marcado. En

6.2 (a) exactamente dos vértices se situán a distancia 2. En 6.2 (b) hay 4 vértices a distancia 2, y el resto de los que no están en P' están a distancia 1. En 6.2 (c) hay dos vértices a distancia 3, cinco a distancia 2, y dos a distancia 1.

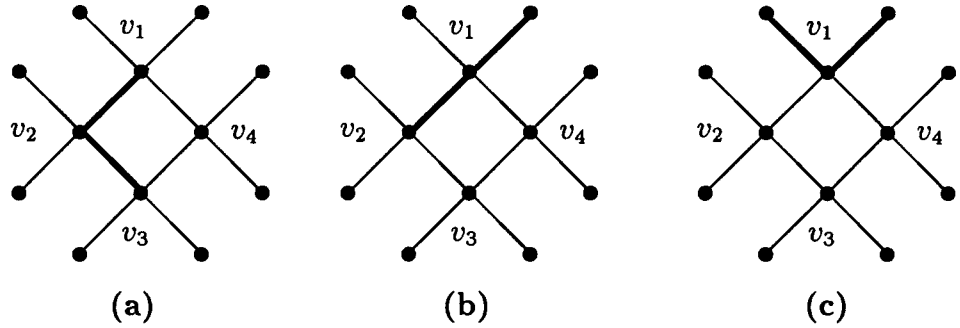


Figura 6.2

Se comprobará que $\tilde{z}_s(P') > \tilde{z}_s(P)$ incluso en el caso más favorable para P' , el cual sucede cuando $|V(P')| = n - 1$, y de los $2n + 1$ vértices de $\tilde{V} \setminus V(P')$, hay 2 vértices a distancia 2, y los $2n - 1$ restantes a distancia 1. Entonces

$$\tilde{z}_m(P') = \frac{2n-1}{3n} + \frac{4}{3n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{n} = \tilde{z}_m(P) + \frac{1}{n}$$

análogamente

$$\begin{aligned} \tilde{z}_s(P') &= \frac{n-1}{3n} \left(z_m(P) + \frac{1}{n} \right)^2 + \frac{2n-1}{3n} \left(1 - z_m(P) - \frac{1}{n} \right)^2 \\ &+ \frac{2}{3n} \left(2 - z_m(P) - \frac{1}{n} \right)^2 \end{aligned}$$

Sustituyendo $z_m(P)$ por su valor y desarrollando los cuadrados, resulta

$$\begin{aligned} \tilde{z}_s(P') &= \frac{n-1}{3n} \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{n^2} + \frac{4}{3n} \right) + \frac{2n-1}{3n} \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{3n} \right) \\ &+ \frac{2}{3n} \left(\frac{16}{9} + \frac{1}{n^2} - \frac{8}{3n} \right) \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{4n-4+2n-1+32}{3n} \right) + \frac{1}{n^2} \left(\frac{n-1+2n-1+2}{3n} \right) \\ &+ \frac{2}{3n} \left(\frac{2n-2-2n+1-8}{3n} \right) \\ &= \frac{1}{9} \left(2 + \frac{9}{n} \right) - \frac{1}{n^2} = \frac{2}{9} + \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} \right) > \frac{2}{9} = \tilde{z}_s(P) \end{aligned}$$

- Si $|V(P')| = n = |V(P)|$ no siendo P' camino hamiltoniano en N , entonces P' comparte $n - 1$ vértices comunes con P , supóngase que son v_1, \dots, v_{n-1} ,

siendo el restante vértice o bien de V_1 o bien de V_2 , por tanto P' es del tipo: $P' = \{v_{1j}, v_1, \dots, v_{n-1}\}$, o bien $P' = \{v_1, \dots, v_{n-1}, v_{n-1,j}\}$ para $j = 1, 2$. En cualquiera de los casos, de los $2n$ vértices de $\tilde{V} \setminus V(P')$, $2n - 2$ se sitúan a distancia 1, y exactamente dos vértices a distancia 2 con lo que, por un razonamiento similar al del apartado anterior se concluiría que $\tilde{z}_s(P') > z_s(P)$.

- Si $n + 1 \leq |V(P')| \leq n + 2$ sucede lo mismo. En efecto, si $|V(P')| = n + 2$, entonces P' contiene todos los vértices de P y sus vértices extremos son vértices de V_1 y/o de V_2 . Por tanto P' es del tipo $P' = \{v_{1j}, v_1, \dots, v_n v_{nk}\}$, con $j, k = 1, 2$. En cualquier caso los $2n - 2$ vértices restantes se sitúan a distancia 1 de P' , resultando

$$\tilde{z}_m(P') = \frac{2n - 2}{3n} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3n} = z_m(P) - \frac{2}{3n}$$

obteniéndose para la varianza se P' en \tilde{N} :

$$\begin{aligned} \tilde{z}_s(P') &= \frac{n + 2}{3n} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3n} \right)^2 + \frac{2n - 2}{3n} \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3n} \right)^2 \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{4n + 8 + 2n - 2}{3n} \right) + \frac{4}{9n^2} \left(\frac{n + 2 + 2n - 2}{3n} \right) \\ &\quad + \frac{4}{9n} \left(\frac{2n - 2 - 2n - 4}{3n} \right) \\ &= \frac{2}{9} + \frac{2}{9n} \left(1 - \frac{2}{n} \right) > \frac{2}{9} = z_s(P) \end{aligned}$$

ya que en una red cíclica, es $n \geq 3$. Análogo resultado se obtendría en el caso $|V(P')| = n + 1$.

De todo este razonamiento se concluye que el camino P es de mínima varianza en \tilde{N} , y es $\tilde{z}_s(P) = 2/9$.

Recíprocamente, un camino P de mínima varianza en \tilde{N} tal que $\tilde{z}_s(P) = 2/9$ debe contener a n vértices de \tilde{N} y situar a los $2n$ vértices restantes a distancia común 1, ya que según se acaba de ver, cualquier otra disposición aumenta el valor de la varianza. Pero dada la construcción de \tilde{N} , esto sólo es posible si los n vértices que pertenecen a P son los n vértices de V , lo que implica que P es un camino hamiltoniano en N .

De la equivalencia entre ambos problemas se concluye que el problema del camino de mínima varianza es NP-duro, esto es, se puede resolver mediante un algoritmo en tiempo polinomial si y sólo si $P = NP$. \square

En el caso de que la red considerada sea una red árbol $T(V, E)$, el problema del camino de mínima varianza es de tipo combinatorio, y se puede resolver en tiempo polinomial: basta examinar cada uno de los $\frac{n(n-1)}{2}$ caminos de T y seleccionar como óptimo aquel en el que la función varianza alcance el menor valor. La complejidad de este procedimiento exhaustivo es $O(n^3)$, ya que para cada camino P considerado, la obtención del valor de $z_s(P)$ requiere evaluar $z_m^{(2)}(P)$ y $z_m(P)$ mediante una pasada sobre todos los vértices del árbol.

6.2 Una aproximación lineal al problema sobre una red árbol

Los problemas de encontrar el camino centro y el camino mediana en una red árbol se resuelven mediante sendos algoritmos lineales. El propósito de esta sección es disponer de un algoritmo de similar complejidad (esto es, lineal) para proporcionar una solución aproximada al problema del camino de mínima varianza sobre una red árbol.

El algoritmo que se propone es de tipo ávido, y se inicia con un camino que contiene a un determinado punto. A este camino se le van añadiendo progresivamente aristas hasta que no puede ser prolongado. En cada iteración del algoritmo se actualiza la solución caso de ser necesario. Como se verá más adelante, el algoritmo tiene una complejidad promedio lineal, y proporciona la solución exacta en la mayoría de los casos examinados.

Los algoritmos lineales que resuelven, respectivamente, los problemas de los caminos centro y mediana se basan en ciertas propiedades de las funciones excentricidad y mediana. Dichas propiedades son:

- **Camino-centro:** *unicidad y anidamiento.* En una red árbol, el camino centro P_c^* es único y contiene a la solución x_c^* del problema puntual del 1-centro.
- **Camino-mediana:** *maximalidad.* En una red árbol el camino mediana P_m^* es maximal, esto es, enlaza dos vértices de grado 1 (vértices punta) de T . Esto es consecuencia de que la función mediana es decreciente respecto a la inclusión de caminos en $\mathcal{P}(T)$: dados $P, P' \in \mathcal{P}(T)$, si $P \subset P'$ entonces

$$z_m(P) > z_m(P').$$

Sin embargo el camino centro no tiene por qué ser maximal, y el camino mediana no tiene por qué ser único ni contener a la 1-mediana (puntual) de T . Según estas propiedades los algoritmos correspondientes operan como sigue:

- Camino-centro (Slater [57], Hedetniemi et al. [25]): el algoritmo parte del centro puntual x_c^* y va añadiendo progresivamente aristas situadas en las ramas conteniendo los vértices más distantes, hasta que no se produzca mejora.
- Camino-mediana (Morgan y Slater [48]): efectuando dos barridos de T , el algoritmo calcula, para cada vértice v no punta de T , el mejor camino maximal conteniendo a v .

Analizando el comportamiento de la función varianza sobre $\mathcal{P}(T)$ respecto de las tres propiedades antes citadas: unicidad, anidamiento y maximalidad, se tiene:

- El camino de mínima varianza no tiene por qué ser maximal, como se deduce del hecho de que la función $z_s(\cdot)$ no es decreciente respecto de la inclusión de conjuntos en $\mathcal{P}(T)$: dados $P, P' \in \mathcal{P}(T)$, $P \subset P'$ no implica $z_s(P) > z_s(P')$. Un ejemplo de esto se obtuvo en la demostración del teorema 6.1.3, cuando sobre la red \tilde{N} se comparó el camino P' de $n + 2$ vértices con el camino hamiltoniano P , resultando $P \subset P'$ y $z_s(P) = 2/9 < z_s(P')$.
- El comportamiento del camino de mínima varianza respecto del anidamiento y unicidad no está resuelto de forma definitiva, y es una cuestión que permanece abierta.

Sin embargo, en un estudio empírico realizado sobre 600 árboles generados aleatoriamente la propiedad de anidamiento se verificó en todos los casos observados: para ello se examinaron árboles de 25, 30, 35, 40, 45, y 50 vértices (generados mediante el algoritmo ARBOL). De cada tipo se generaron 100 casos, y en cada uno de ellos se calculó el punto de mínima varianza x_s^* (mediante el algoritmo 1/VAR/ T) y el camino de mínima varianza $P_{s(\text{exacto})}^*$ (por el procedimiento exhaustivo). En todos los casos se obtuvo $x_s^* \in P_{s(\text{exacto})}^*$ (véase la tabla 6.1).

Basándose en estos resultados, el algoritmo que se propone opera como sigue: se selecciona como solución inicial el menor camino P_s^* que contiene al (a los) punto(s) de mínima varianza x_s^* , y se parte de un camino de trabajo $P = P_s^*$. En cada iteración del proceso se añade una *arista mejor* (según un determinado criterio) al camino de trabajo P , y se sustituye P_s^* por el camino P si $z_s(P) < z_s(P_s^*)$. El algoritmo termina cuando no es posible prolongar P .

La siguiente cuestión es el criterio que selecciona a la *arista mejor* que debe ser añadida al camino de trabajo en cada iteración del algoritmo. Para ello se analizará la relación existente entre la varianza de P y las varianzas relativas en cada una de las componentes conexas T_i que se obtienen eliminando P de T .

Sea $P \in \mathcal{P}(T)$ tal que $P = \{u, u_1, \dots, u_s, v\}$, y sean T_1, \dots, T_k las componentes conexas (subárboles) obtenidas al desconectar T eliminando los vértices y las aristas de P . Sea T_0 el subárbol consistente en el camino P , (figura 6.3)

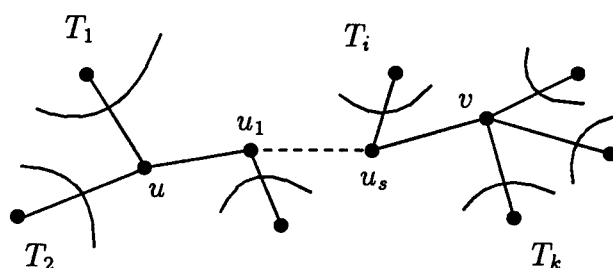


Figura 6.3

Sea $V_i = \{v_t \in V : v_t \in T_i\}$ el conjunto de vértices de la componente i -ésima, $i = 0, \dots, k$, y $w(V_i) = \sum_{v_t \in V_i} w_t$ su peso. Asimismo, T_i^N denota a la componente conexa de sistema de pesos normalizado, esto es, de sistema de pesos

$$\{w_t^N = \frac{w_t}{w(V_i)}, v_t \in V_i\}$$

La mediana relativa de P en T_i es la función mediana de P en T_i^N , definida por

$$z_m(P, T_i)_R = \sum_{v_t \in V_i} w_t^N d(v_t, P) = \frac{1}{w(V_i)} z_m(P, T_i)$$

Proposición 6.2.1 *Se verifica:* $z_m(P) = \sum_{i=1}^k w(V_i) z_m(P, T_i)_R$.

Demostración: De las definiciones de $z_m(P)$ y $z_m(P, T_i)_R$ se sigue

$$z_m(P) = \sum_{v_t \in V \setminus V_0} w_t d(v_t, P) = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{v_t \in V_i} w_t d(v_t, P) \right) = \sum_{i=1}^k w(V_i) z_m(P, T_i)_R$$

donde se ha utilizado que $w_t = w_i^N w(V_i)$, $\forall v_t \in V_i$. □

Análogamente la definición puntual de varianza relativa se extiende a caminos como sigue: La varianza relativa de P en T_i es la varianza de P en T_i^N dada por

$$z_s(P, T_i)_R = \sum_{v_t \in V_i} w_t^N [d(v_t, P) - z_m(P, T_i)_R]^2$$

Teorema 6.2.2 *La varianza de P en T es la suma de la mediana de las varianzas relativas de P y de la varianza de las medianas relativas, esto es*

$$z_s(P) = \sum_{i=1}^k w(V_i) z_s(P, T_i)_R + \sum_{i=0}^k w(V_i) [z_m(P, T_i)_R - z_m(P)]^2 \quad (6.1)$$

Demostración: La varianza relativa de P sobre cada componente T_i verifica la siguiente relación

$$z_s(P, T_i)_R = \sum_{v_t \in V_i} w_t^N [d(v_t, P) - z_m(P)]^2 - (z_m(P, T_i)_R - z_m(P))^2$$

En efecto, sumando y restando $z_m(P)$ en la expresión de $z_s(P, T_i)_R$ se tiene

$$\begin{aligned} z_s(P, T_i)_R &= \sum_{v_t \in V_i} w_t^N [d(v_t, P) - z_m(P) - (z_m(P, T_i)_R - z_m(P))]^2 \\ &= \sum_{v_t \in V_i} w_t^N [d(v_t, P) - z_m(P)]^2 + (z_m(P, T_i)_R - z_m(P))^2 \\ &\quad - 2(z_m(P, T_i)_R - z_m(P)) \left(\sum_{v_t \in V_i} w_t^N d(v_t, P) - z_m(P) \sum_{v_t \in V_i} w_t^N \right) \end{aligned}$$

la conclusión es inmediata, ya que $\sum_{v_t \in V_i} w_t^N d(v_t, P) = z_m(P, T_i)_R$ y $\sum_{v_t \in V_i} w_t^N = 1$. Despejando en dicha relación el primer sumando del segundo miembro resulta

$$\sum_{v_t \in V_i} w_t^N [d(v_t, P) - z_m(P)]^2 = z_s(P, T_i)_R + (z_m(P, T_i)_R - z_m(P))^2$$

Sustituyendo esta expresión en $z_s(P)$:

$$\begin{aligned}
 z_s(P) &= \sum_{v_t \in V} w_t [d(v_t, P) - z_m(P)]^2 = \sum_{i=0}^k \left(\sum_{v_t \in V_i} w_t^N w(V_i) [d(v_t, P) - z_m(P)]^2 \right) \\
 &= \sum_{i=0}^k w(V_i) \sum_{v_t \in V_i} w_t^N [d(v_t, P) - z_m(P)]^2 \\
 &= \sum_{i=0}^k w(V_i) \left(z_s(P, T_i)_R + [z_m(P, T_i)_R - z_m(P)]^2 \right) \\
 &= \sum_{i=1}^k w(V_i) z_s(P, T_i)_R + \sum_{i=0}^k w(V_i) [z_m(P, T_i)_R - z_m(P)]^2
 \end{aligned}$$

ya que $z_s(P, T_0)_R = 0$. □

En el algoritmo que se propone sólo se puede prolongar el camino de trabajo P hacia componentes que enlazan con alguno de los vértices extremos de P : u o v . El criterio de selección opera añadiendo la arista correspondiente a la componente de mayor varianza relativa. Si bien de esta forma se reduce el número de caminos examinados, pueden producirse desviaciones con respecto al camino óptimo, ya que la prolongación actúa fundamentalmente sobre el primer sumando de (6.1).

La rutina de selección es como sigue: sean $gr(u)$, $gr(v)$ los grados respectivos de los vértices extremos u , v de P , y sean $I_u = \{u_1, \dots, u_{gr(u)-1}\}$, $I_v = \{v_1, \dots, v_{gr(v)-1}\}$ los respectivos conjuntos de vértices adyacentes a u y adyacentes a v , no pertenecientes a P y en los cuales están enraizadas las componentes T_{u_j} , $u_j \in I_u$ y T_{v_i} , $v_i \in I_v$ tal que ninguna componente contiene vértices de P .

Fase de Selección

Calcular $I'_u \subseteq I_u$ tal que para cada $u_q \in I'_u$ se verifique

$$z_s(P, T_{u_q})_R = \max \{z_s(P, T_{u_j})_R, u_j \in I_u\}$$

Si I'_u consta de un único elemento u_q , seleccionar u_q .

En caso contrario calcular $I''_u \subseteq I'_u$ tal que para cada $u_q \in I''_u$ se verifique $z_s(P, T_{u_q})_R = \max \{z_s(P, T_{u_j})_R, u_j \in I'_u\}$.

* Si I''_u consta de un único elemento u_q , seleccionar u_q .

* En caso contrario, seleccionar arbitrariamente $u_q \in I''_u$.

(Análogamente se procede para seleccionar $v_p \in I_v$).

El siguiente resultado establece una relación entre las varianzas del camino P y el camino prolongado P' .

Teorema 6.2.3 *Sea $P(u, v)$ un camino enlazando los vértices u, v de T . Sea $T_{v_i} = (V_{v_i}, E_{v_i})$ la componente conexas de T correspondiente al subárbol enraizado en el vértice v_i adyacente a v , tal que $v_i \notin P$. Si $P' = P \cup [v, v_i]$ es el camino obtenido añadiendo la arista $[v, v_i]$ al camino P , se verifica*

$$z_s(P') = z_s(P) + l_{v,v_i}^2 w(V_{v_i}) w(\overline{V_{v_i}}) + 2l_{v,v_i} (z_m(P) w(V_{v_i}) - z_m(P, V_{v_i})) \quad (6.2)$$

donde $\overline{V_{v_i}} = V \setminus V_{v_i}$.

Demostración: Sea $P' = P \cup [v, v_i]$, (figura 6.4). Claramente, si $v_t \in V$ se verifica

$$d(v_t, P') = \begin{cases} d(v_t, P), & \text{si } v_t \in \overline{V_{v_i}} \\ d(v_t, P) - l_{v,v_i}, & \text{si } v_t \in V_{v_i} \end{cases}$$

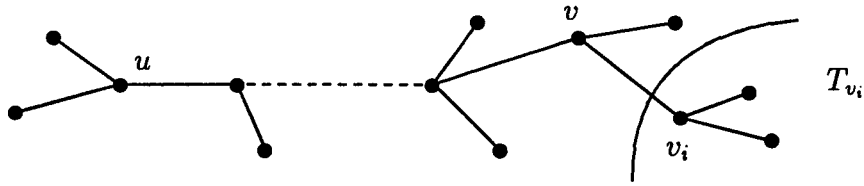


Figura 6.4

aplicando esta relación se obtiene de forma inmediata

$$z_m(P') = z_m(P) - w(V_{v_i}) l_{v,v_i} \quad (6.3)$$

Sustituyendo esta igualdad en el desarrollo de $z_s(P')$ resulta:

$$\begin{aligned} z_s(P') &= \sum_{v_t \in \overline{V_{v_i}}} w_t [d(v_t, P) - z_m(P) + w(V_{v_i}) l_{v,v_i}]^2 \\ &+ \sum_{v_t \in V_{v_i}} w_t [d(v_t, P) - z_m(P) - w(\overline{V_{v_i}}) l_{v,v_i}]^2 = \sum_{v_t \in \overline{V_{v_i}}} w_t [d(v_t, P) - z_m(P)]^2 \\ &+ \sum_{v_t \in V_{v_i}} w_t [d(v_t, P) - z_m(P)]^2 + l_{v,v_i}^2 w(\overline{V_{v_i}}) w(V_{v_i}) [w(V_{v_i}) + w(\overline{V_{v_i}})] \\ &+ 2l_{v,v_i} w(V_{v_i}) (z_m(P, \overline{V_{v_i}}) - z_m(P) w(\overline{V_{v_i}})) \\ &- 2l_{v,v_i} w(\overline{V_{v_i}}) (z_m(P, V_{v_i}) - z_m(P) w(V_{v_i})) \end{aligned}$$

simplificando términos opuestos y utilizando que $w(V_{v_i}) + w(\overline{V_{v_i}}) = 1$ se tiene

$$z_s(P') = z_s(P) + l_{v,v_i}^2 w(\overline{V_{v_i}})w(V_{v_i}) + 2l_{v,v_i} (z_m(P, \overline{V_{v_i}})w(V_{v_i}) - z_m(P, V_{v_i})w(\overline{V_{v_i}}))$$

y como $z_m(P, \overline{V_{v_i}}) = z_m(P) - z_m(P, V_{v_i})$ y $w(\overline{V_{v_i}}) = 1 - w(V_{v_i})$, el último paréntesis se puede expresar

$$z_m(P, \overline{V_{v_i}})w(V_{v_i}) - z_m(P, V_{v_i})w(\overline{V_{v_i}}) = z_m(P)w(V_{v_i}) - z_m(P, V_{v_i})$$

lo que concluye la demostración. \square

Para cada componente T_{v_i} correspondiente al vértice extremo v de P se verifica

$$z_m(P, V_{v_i}) = z_m(v, V_{v_i}) = \sum_{v_t \in V_{v_i}} w_t d(v, v_t)$$

y $z_m(P, T_{v_i})_R = \frac{1}{w(V_{v_i})} z_m(v, V_{v_i})$. Análogamente la varianza relativa de P sobre cada componente T_{v_i} se puede obtener directamente mediante la relación

$$z_s(P, T_{v_i})_R = \frac{z_m^{(2)}(v, V_{v_i})}{w(V_{v_i})} - \left(\frac{z_m(v, V_{v_i})}{w(V_{v_i})} \right)^2 \quad (6.4)$$

En efecto, ya que

$$\begin{aligned} z_s(P, T_{v_i})_R &= z_s(v, T_{v_i})_R = \sum_{v_t \in V_{v_i}} w_t^N [d(v, v_t) - z_m(v, V_{v_i})_R]^2 \\ &= \frac{1}{w(V_{v_i})} \sum_{v_t \in V_{v_i}} w_t [d(v, v_t) - \frac{1}{w(V_{v_i})} z_m(v, V_{v_i})]^2 \\ &= \frac{1}{w(V_{v_i})} \left(\sum_{v_t \in V_{v_i}} w_t d(v, v_t)^2 + \sum_{v_t \in V_{v_i}} w_t \left(\frac{z_m(v, V_{v_i})}{w(V_{v_i})} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{v_t \in V_{v_i}} w_t d(v, v_t) \frac{z_m(v, V_{v_i})}{w(V_{v_i})} \right) \end{aligned}$$

agrupando términos y teniendo en cuenta que $z_m^{(2)}(v, V_{v_i}) = \sum_{v_t \in V_{v_i}} w_t d(v, v_t)^2$ se obtiene la relación (6.4).

Para el cálculo de las relaciones (6.2), (6.3) y (6.4) se necesita disponer de un conjunto de valores auxiliares asociados a cada vértice $v \in V$, dados por:

$$z_m(v), z_m^{(2)}(v), z_m(v, V_{v_i}), z_m^{(2)}(v, V_{v_i}), w(V_{v_i}), i = 1, \dots, gr(v)$$

donde $T_{v_i}, i = 1, \dots, gr(v)$ son los subárboles enraizados en cada uno de los vértices v_i adyacentes a v . Estos valores auxiliares pueden ser calculados previamente en tiempo $O(n)$ mediante el algoritmo AUX / V(T).

6.2.1 Algoritmo

A continuación se desarrolla el algoritmo para obtener una aproximación al camino de mínima varianza sobre una red árbol.

ALGORITMO CAMINO/T

Paso 0

Calcular los valores auxiliares asociados a cada $v \in V$ mediante el algoritmo AUX/V(T).

Obtener el punto de mínima varianza x_s^* de T mediante el algoritmo 1/VAR/T.

Paso 1

Si x_s^* es interior a una arista $[u, v]$, **entonces**:

* **Hacer** $P_s^* = [u, v]$.

* **Calcular** $Z_s^* = z_s(P_s^*)$ aplicando (6.1).

En caso contrario ($x_s^* = v_s^* \in V$):

* **Hacer** $u = v_s^* = v$, $P_s^* = \{v_s^*\}$, $Z_s^* = z_s(x_s^*)$.

Hacer $P \leftarrow P_s^*$ (primer camino de trabajo), $z_s(P) \leftarrow Z_s^*$.

Si $gr(u) = gr(v) = 1$, ir al paso 7.

Paso 2

Si $|V(P)| \geq 2$, **seleccionar** $u_p \in I_u$, $v_q \in I_v$ (según se describe en fase de selección).

En caso contrario ($|V(P)| = 1$):

* **Hacer** $I_u = I_v$.

* **Seleccionar** $v_{p(1)} \in I_u$.

* **Seleccionar** $v_{p(2)} \in I_u \setminus \{v_{p(1)}\}$.

Paso 3

Si $|V(P)| \geq 2$:

* **Si** $z_s(P, T_{u_p})_R \neq z_s(P, T_{v_q})_R$, **entonces**

* * **Seleccionar** $h \in \{u_p, v_q\}$ tal que

$$z_s(P, T_h)_R = \max\{z_s(P, T_{u_p})_R, z_s(P, T_{v_q})_R\}$$

- * **En caso contrario:**
- * * **Seleccionar h tal que**

$$z_m(P, T_h)_R = \max\{z_m(P, T_{u_p})_R, z_m(P, T_{v_q})_R\}$$

Si también estos dos valores coinciden, seleccionar arbitrariamente $h \in \{u_p, v_q\}$.

En caso contrario ($|V(P)| = 1$):

- * **Seleccionar (con igual criterio) $h \in \{v_{p(1)}, v_{p(2)}\}$.**
- * **Sea \bar{h} el vértice no seleccionado.**
- * **Hacer $I_u \leftarrow I_u \setminus \{h\}$, $u_p \leftarrow \bar{h}$, $z_s(P, T_{u_p})_R \leftarrow z_s(P, T_{\bar{h}})_R$,
 $z_m(P, T_{u_p})_R \leftarrow z_m(P, T_{\bar{h}})_R$.**

Paso 4

Si $|V(P)| \geq 2$:

- * **Hacer $P' \leftarrow P \cup [u, u_p]$ si $h = u_p$, ($P' \leftarrow P \cup [v, v_q]$ si $h = v_q$).**

Si $|V(P)| = 1$:

- * **Hacer $P' \leftarrow P \cup [u, h]$.**

Sea $\tilde{h} \leftarrow h$ (vértice añadido).

Calcular $z_m(P')$ mediante (6.3), $z_s(P')$ mediante (6.2).

Si $z_s(P') < Z_s^*$, actualizar $P_s^* \leftarrow P'$, $Z_s^* = z_s(P')$.

Paso 5

Actualización del camino de trabajo:

- * **Si $|V(P)| \geq 2$, hacer $P \leftarrow P'$, $u \leftarrow u_p$, si $h = u_p$, ($v \leftarrow v_q$, si $h = v_q$).**
- * **Si $|V(P)| = 1$, hacer $P \leftarrow P'$, $v \leftarrow h$.**

Si $gr(u) = gr(v) = 1$, ir al paso 7.

En caso contrario, calcular el conjunto de vértices $I_{\tilde{h}}$ (adyacentes al vértice \tilde{h} añadido).

Paso 6

Si $|I_{\tilde{h}}| > 0$, entonces:

- * **Seleccionar $u_p \in I_u$ si $\tilde{h} = u$ ($v_q \in I_v$ si $\tilde{h} = v$) según fase de selección.**

En caso contrario:

- * **Hacer $z_s(P, T_{\tilde{h}})_R = 0$, $z_m(P, T_{\tilde{h}})_R = 0$.**

Ir al paso 3.

Paso 7

Parar. Z_s^* y el camino P_s^* constituyen la solución aproximada.

6.2.2 Ejemplo

Considérese el árbol de la figura 6.5, correspondiente a un modelo propuesto por Slater [57], caracterizado por una simetría estructural y por la descompensación en el grado de los vértices. En el ejemplo propuesto se consideran iguales los pesos de todos los vértices e iguales a 1 las longitudes de todas las aristas.

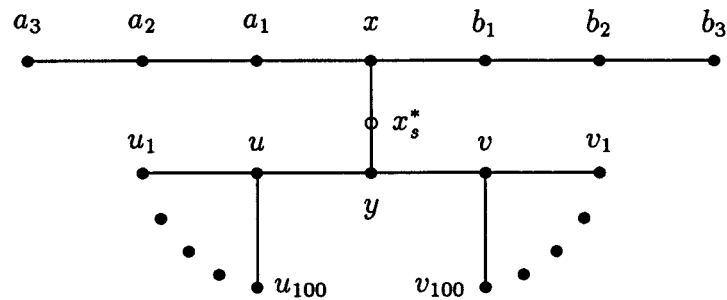


Figura 6.5

El punto de mínima varianza x_s^* se sitúa en la arista $[x, y]$ a distancia 0.633005 de x , y el valor de la varianza mínima es $z_s(x_s^*) = 0.0635703$. A continuación se aplicará el algoritmo anterior para obtener el camino de mínima varianza.

Etapa 1

$P_s^* = [x, y]$, y $Z_s^* = z_s(P_s^*) = 0.06585034$.

Primer camino de trabajo $P = P_s^* = [x, y]$.

Etapa 2

$I_x = \{a_1, b_1\}$, e $I_y = \{u, v\}$.

$z_s(P, T_{a_1})_R = z_s(P, T_{b_1})_R = 0.022131519$. Puesto que también la mediana relativa es la misma, se selecciona uno de los dos, sea a_1 .

$z_s(P, T_u)_R = z_s(P, T_v)_R = 0.018816$. Por la misma razón que antes, sea u el seleccionado.

Hacer $h = a_1$, ya que $z_s(P, T_{a_1})_R = \max\{z_s(P, T_{a_1})_R, z_s(P, T_u)_R\}$.

Prolongar $P = P \cup [x, a_1] = P(y, a_1)$.

Como $z_s(P) = 0.0791156 > Z_s^*$, no varía P_s^* .

Etapa 3

$$I_{a_1} = \{a_2\} \text{ y } z_s(P, T_{a_2})_R = 0.01185374.$$

Como $\max\{z_s(P, T_{a_2})_R, z_s(P, T_u)_R\} = z_s(P, T_u)_R$, hacer $h = u$.

Prolongar $P = P \cup [y, u] = P(u, a_1)$.

Como $z_s(P) = 0.297052155 > Z_s^*$, el camino P_s^* no se modifica.

Etapa 4

$$I_u = \{u_i, i = 1, \dots, 100\} \text{ y } z_s(P, T_{u_i})_R = 0.0047392.$$

Como $\max\{z_s(P, T_{a_2})_R, z_s(P, T_{u_i})_R\} = z_s(P, T_{a_2})_R$, hacer $h = a_2$.

Prolongar $P = P \cup [a_2, a_1] = P(a_2, u)$.

$z_s(P) = 0.3060317 > Z_s^*$, luego P_s^* no se modifica.

Etapa 5

$I_{a_2} = \{a_3\}$, y $z_s(P, T_{a_3})_R = 0,0047392 = z_s(P, T_{u_i})_R$. Como también $z_m(P, T_{a_3})_R = z_m(P, T_{u_i})_R$, seleccionar arbitrariamente $h \in \{a_3, u_i, i = 1, \dots, 100\}$. Sea $h = a_3$.

Prolongar $P = P \cup [a_3, a_2] = P(a_3, u)$.

Como $z_s(P) = 0.3152154 > Z_s^*$, el camino P_s^* no se modifica.

Etapa 6

Como $gr(a_3) = 1$, sólo se puede prolongar P por u .

Puesto que $z_s(P, T_{u_i})_R = 0.0047392, \forall i = 1, \dots, 100$, y también coinciden las medianas relativas, seleccionar arbitrariamente $h \in \{u_i, i = 1, \dots, 100\}$.

Sea $h = u_1$.

Prolongar $P = P \cup [u, u_1] = P(a_3, u_1)$.

Como $z_s(P) = 0.324353 > Z_s^*$, el camino P_s^* no se modifica.

Final

Parar, ya que $gr(a_3) = gr(u_1) = 1$.

El camino óptimo proporcionado por el algoritmo es $P_s^* = [x, y]$, y el valor correspondiente de la función objetivo es $Z_s^* = z_s(P_s^*) = 0.06585034$.

Además la solución obtenida es exacta, ya que el camino de mínima varianza es $P_s^* = [x, y]$ como se puede comprobar de forma exhaustiva.

6.2.3 Análisis de la complejidad

El paso 0, (cálculo de los valores auxiliares y obtención del punto de mínima varianza) se efectúa en tiempo $O(n)$.

En los pasos 1 y 2 se selecciona el primer camino de trabajo y se calculan los valores máximos de las varianzas relativas sobre el conjunto de todas las componentes conexas enraizadas en vértices adyacentes a los vértices extremos de P . La complejidad de esta fase es $O(n)$ ya que en el peor de los casos hay $O(n)$ vértices adyacentes sobre los que efectuar el cálculo.

Los pasos 3 a 6 se ejecutan tantas veces como aristas tenga el camino de trabajo al final del algoritmo. La selección del vértice que prolonga P , el cálculo de la varianza y la actualización de P_s^* si procede se efectúan en tiempo constante. La complejidad computacional de esta fase la aporta el paso 6, ya que en él se calcula el máximo sobre el conjunto de varianzas relativas de las componentes conexas correspondientes *al vértice prolongado*: Si dicho vértice fue v , el máximo de un conjunto de $gr(v) - 1$ elementos se calcula en tiempo $O(gr(v))$. Por tanto si P es el camino de trabajo final, de $m_p = |V(P)| - 1$ aristas, correspondiente a un determinado árbol T , el esfuerzo computacional requerido por el algoritmo sobre T es

$$\max\{O(n), O(g_p m_p)\}$$

donde $g_p = \max\{gr(v_i) : v_i \in V(P)\}$.

Si $m_p \in O(n)$, los vértices de P tienen muy bajo grado de conexión y por tanto es muy pequeño el valor de g_p , y recíprocamente: si $g_p \in O(n)$ el camino P tendrá pocas aristas, (como sucede en el ejemplo anterior: $g_p = 100$, pero $m_p = 6$). Por tanto se puede considerar que $g_p m_p \in O(cn)$, donde c representa el valor de m_p , si $g_p \in O(n)$, o bien de g_p , si $m_p \in O(n)$.

De todo lo anterior se concluye que la complejidad computacional del algoritmo es

$$O(cn)$$

Si bien depende del valor de c , la complejidad computacional resultante del algoritmo es, en promedio, lineal.

6.2.4 Experiencia computacional

En la tabla 6.1 se muestran los resultados producidos por este algoritmo sobre árboles aleatoriamente generados. De cada tipo de árbol $T(n)$ se examinaron 100 casos, y en cada uno de ellos se calculó el camino de mínima varianza por el procedimiento exhaustivo, y el camino aproximado mediante el anterior algoritmo.

La primera fila de la tabla (encabezada por $x_s^* \in P_{s(\text{exacto})}^*$) recoge el número de casos para los que se obtuvo la pertenencia del punto de mínima varianza x_s^* al camino de mínima varianza (exhaustivo) $P_{s(\text{exacto})}^*$. En la segunda fila (encabezada por $P_{s(\text{exacto})}^* = P_{s(\text{aprox})}^*$) aparece el número de veces que la solución aproximada coincidió con la exacta.

	$n = 25$	$n = 30$	$n = 35$	$n = 40$	$n = 45$	$n = 50$
$x_s^* \in P_{s(\text{exacto})}^*$	100	100	100	100	100	100
$P_{s(\text{exacto})}^* = P_{s(\text{aprox})}^*$	87	84	85	82	84	81

Tabla 6.1

6.2.5 Discusión

Para introducir posibles modificaciones en el algoritmo se han estudiado algunos casos concretos en los que la solución producida no es coincidente con la óptima, al objeto de detectar las causas de la desviación y poderlas corregir (o atenuar).

CASO 1

Corresponde al árbol de la figura 6.6, en el cual:

- El camino óptimo (procedimiento exhaustivo) es

$$P_{s(\text{exacto})}^* = \{10, 7, 11, 3, 9, 4, 1, 14, 5\}$$

- El camino aproximado es

$$P_{s(\text{aprox})}^* = \{10, 7, 11, 3, 9, 4, 1, 15, 13\}$$

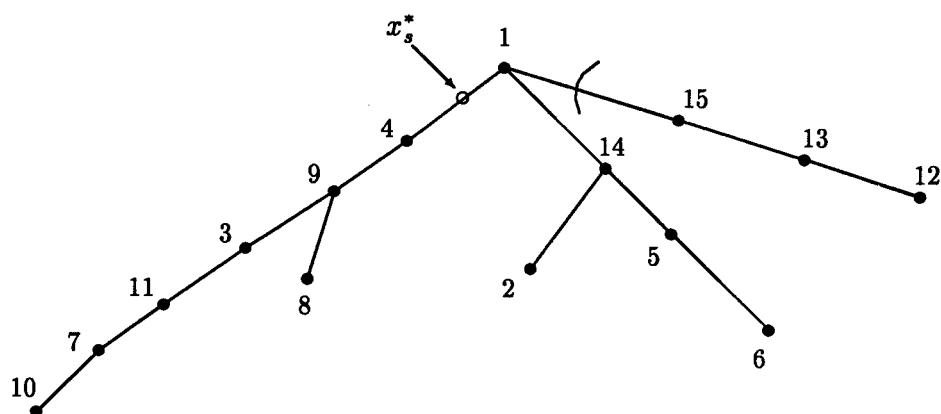


Figura 6.6

En una de las etapas de la ejecución del algoritmo, se tienen los siguientes resultados parciales:

Ocupante óptimo: $P_s^* = \{11, 3, 9, 4, 1\}$.

Camino de trabajo: $P = \{11, 3, 9, 4, 1\}$

que como se ve, son coincidentes. Al seleccionar la rama sobre la que efectuar la prolongación, el algoritmo selecciona la rama correspondiente al vértice 15, y obtiene el camino prolongado $P' \leftarrow P \cup [1, 15]$. Además $z_s(P') < z_s(P_s^*)$, procediéndose a la actualización: $P_s^* \leftarrow P'$.

La prolongación por esta rama, si bien mejora la varianza del ocupante óptimo, no es la mejor, ya que descarta la rama correspondiente al vértice 14 (en donde se introduce la solución exacta) de posteriores prolongaciones.

CASO 2

Es el árbol de la figura 6.7. Las soluciones producidas por los algoritmos exhaustivo y aproximado son:

- El camino óptimo (procedimiento exhaustivo) es

$$P_{s(\text{exacto})}^* = \{1, 2, 8, 19, 13, 14\}$$

- El camino aproximado es

$$P_{s(\text{aprox})}^* = \{2, 8, 19\}$$

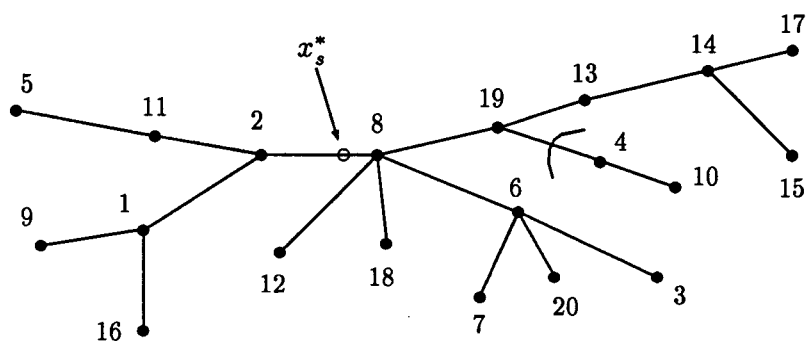


Figura 6.7

Los resultados parciales obtenidos en una de las etapas del algoritmo son:

Ocupante óptimo: $P_s^* = \{2, 8, 19\}$.

Camino de trabajo: $P = \{2, 8, 19\}$

La siguiente prolongación se efectúa por la rama correspondiente al vértice 4: $P' \leftarrow P \cup [19, 4]$, y como $z_s(P') > z_s(P) = z_s(P_s^*)$, no se actualiza el ocupante óptimo P_s^* . A pesar de ello la prolongación sigue por dicha rama, y posteriormente por la rama correspondiente al vértice 11 de forma que el último camino de trabajo considerado por el algoritmo es $P = \{5, 11, 2, 8, 19, 4, 10\}$.

En este caso el algoritmo prolonga el camino sobre una rama que no produce mejora, y descarta de posteriores prolongaciones la rama *buena*.

Estas observaciones sugieren la conveniencia de, en cada prolongación, considerar más ramas para evitar descartes prematuros. En este sentido se pueden introducir varias modificaciones (si bien suponen un aumento de la complejidad del algoritmo):

- Una de ellas consiste en considerar, para cada vértice extremo u, v , del camino de trabajo P , las *dos* ramas (si las hay) de mayor varianza relativa, y efectuar la prolongación atendiendo a uno de los siguientes criterios:
 1. Ordenar las ramas decrecientemente según las varianzas relativas. Si la prolongación por la rama de mayor varianza relativa no produce mejora de la varianza, seleccionar la siguiente y, si ésta tampoco mejora, la siguiente, y así hasta la última. Si en ninguna rama se produce mejora, o bien se selecciona la primera, o bien la que produzca menor aumento de la varianza.

2. O bien prolongar por aquella rama que produzca mayor disminución de la varianza.
- Otra posibilidad es en cada iteración, calcular las dos mejores prolongaciones de cada vértice extremo. Prolongar sobre la rama seleccionada y estudiar si una nueva prolongación a partir de esta última mejora (o no) la varianza de las prolongaciones precedentes no seleccionadas para, si no hay mejora, retroceder a la situación previa y efectuar nueva selección.

Referencias

- [1] A. AHO, J. HOPCROFT, J. ULLMAN *The design and analysis of computer algorithms*
Addison-Wesley (1974).
- [2] O. BERMAN *Mean-Variance location problems*
Transportation Science **24** (1990) 287-293
- [3] M.L. BRANDEAU AND S.S. CHIU *An overview of representative problems in location research.*
Management Science **35** (1989) 645-674.
- [4] M.L. BRANDEAU, S.S. CHIU AND R. BATTA *Locating the two-median of a tree network with continuous link demands.*
Ann. Operations Research **6** (1986) 223-253.
- [5] T.M. CAVALIER AND H.D. SHERALI *Network location problems with continuous link demands: p -medians on a chain and 2-medians on a tree*
Eur. Journal of Operational Research **23** (1986) 246-255.
- [6] T.M. CAVALIER AND H.D. SHERALI *Sequential location-allocation problems on chains and trees with probabilistic link demands*
Mathematical Programming **32** (1985) 249-277.
- [7] S.S. CHIU *The minisum location problem on an undirected network with continuous link demands*
Comput. Operations Research **14** (1987) 369-383.

- [8] P.M. DEARING, R.L. FRANCIS AND T.J. LOWE *Convex location problems on tree networks*
Operations Research **24** (1976) 628-642.
- [9] H.A. EISELT AND G. LAPORTE *Objectives in location problems*
in Facility Location: A Survey of Applications and Methods, (Zvi Drezner, ed.), Springer Series in Operations Research, New York (1995) 151-180.
- [10] E. ERKUT *Inequality measures for location problems*
Location Science **1** (1993) 199-217.
- [11] R.L. FRANCIS, L.F. MCGINNIS AND J.A. WHITE *Locational analysis*
European Journal of Operational Research **12** (1983) 220-252.
- [12] M.R. GAREY AND D.S. JOHNSON *Computers and Intractability*
W.H. Freeman, New York (1979).
- [13] A.J. GOLDMAN *Optimal center location in simple networks*
Transportation Science **5** (1971) 212-221.
- [14] G.H. GOLUB AND CH.F. VAN LOAN *Matrix computations*
North Oxford Academic, Oxford (1983).
- [15] S. L. HAKIMI *Optimum locations of Switching Centers and the Absolute Centers and Medians of a graph*
Operations Research **12** (1964) 450-459.
- [16] S.L. HAKIMI *Optimum distribution of switching centers in a communications network and some related graph-theoretic problems*
Operations Research **13** (1965) 462-475.
- [17] S.L. HAKIMI, E.F. SCHMEICHEL AND M. LABBÉ *On locating path- or tree-shaped facilities on networks*
Networks **23** (1993) 543-555.
- [18] J. HALPERN *The location of a center-median convex combination on an undirected tree*
Journal of Regional Science **16** (1976) 237-245.

- [19] J. HALPERN *Finding minimal center-median convex combination (cent-dian) of a graph*
Management Science **24** (1978) 535-544.
- [20] J. HALPERN *Duality in the cent-dian of a graph*
Operations Research **28** (1980) 722-735.
- [21] J. HALPERN AND O. MAIMON *Accord and conflict among several objectives in locational decisions on tree networks*
in Locational Analysis of Public Facilities, (J.F. Thisse and H.G. Holler, Eds.), Series of Studies in Mathematical and Managerial Economics, North-Holland, Amsterdam, (1983) 301-314.
- [22] G.Y. HANDLER AND P.B. MIRCHANDANI *Location on networks: Theory and algorithms*
MIT Press, Cambridge, Mass. (1979).
- [23] P. HANSEN AND M. ZHENG *An algorithm for the minimum variance point of a network*
RAIRO Recherche opérationnelle/Operations Research **25** (1991), 119-126.
- [24] F. HARARY *Graph theory*
Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, (1969).
- [25] S.M. HEDETNIEMI, E.J. COCKAINE AND S.T. HEDETNIEMI *Linear algorithms for finding the Jordan center and path center of a tree*
Transportation Science **15** (1981) 98-114.
- [26] R. HOLZMAN *An axiomatic approach to location on networks*
Mathematics of Operations Research **15** (1990) 553-563.
- [27] J.N. HOOKER, R.S. GARFINKEL AND C.K. CHEN *Finite dominating sets for network location problems*
Operations Research **39** (1991) 100-118.
- [28] O. KARIV AND S. L. HAKIMI *An algorithmic approach to network location problems, I: the p-Centers*
SIAM J. Appl. Math. **37** (1979) 513-537.

- [29] O. KARIV AND S. L. HAKIMI *An algorithmic approach to network location problems, II: the p -Medians*
SIAM J. Appl. Math. **37** (1979) 539-560.
- [30] T.U. KIM, T.J. LOWE, J.E. WARD AND R.L. FRANCIS *A minimum length covering subgraph of a network*
Annals of Operations Research **18** (1989) 245-260.
- [31] T.U. KIM, T.J. LOWE, J.E. WARD AND R.L. FRANCIS *A minimum length covering subtree of a tree*
Naval Research Logistics **37** (1990) 309-326.
- [32] R. K. KINCAID AND O. MAIMON *Locating a point of minimum variance on triangular graphs*
Transportation Science **23** (1989) 216-219.
- [33] R. K. KINCAID AND O. MAIMON *A note on locating a central vertex of a 3-cactus graph*
Computers & Operations Research **17** (1990) 315-320.
- [34] R.K. KINCAID, T.J. LOWE AND T.L. MORIN *The location of central structures in trees*
Computers & Operations Research **15** (1988) 103-113.
- [35] M. LABBÉ, D. PEETERS AND J-F. THISSE *Location on networks*
CORE Discussion Paper 9340, Université Catholique de Louvain, Belgique, (1993) 1-114.
- [36] M. LABBÉ *The median location problem with continuous demand*
Cahiers du CERO **34** (1992) 103-115.
- [37] M.C. LÓPEZ DE LOS MOZOS Y J.A. MESA *The 2-Variance Problem in a Tree Network*
por aparecer en Studies in Locational Analysis.
- [38] D.E. LUENBERGER *Programación lineal y no lineal*
Addison-Wesley Iberoamericana, (1989).

- [39] O. MAIMON *The variance equity measure in locational decision theory*
Ann. Operations Research **6** (1986) 147-160.
- [40] M.T. MARSH AND D.A. SCHILLING *Equity measurement in facility location analysis: A review and framework*
European Journal of Operational Research (1994) 1-17.
- [41] J.A. MESA *Location of extensive facilities: potencial applications*
Investigação Operational **12** (1992) 35-42.
- [42] J.A. MESA AND T.B. BOFFEY *A review of extensive facility location in networks*
European Journal of Operational Research **95** (1996) 592-603.
- [43] E. MINIEKA *The optimal location of a path or tree in a tree network*
Networks **15** (1985) 309-321.
- [44] E. MINIEKA *The Centers and Medians of a graph*
Operations Research **25** (1977) 641-650.
- [45] P. B. MIRCHANDANI AND A. OUDJIT *Localizing 2-Medians on probabilistic and deterministic tree networks*
Networks **10** (1980) 329-350.
- [46] P.B. MIRCHANDANI AND R.L. FRANCIS (EDS.) *Discrete location theory*
Wiley, New York, (1990).
- [47] J.A. MORENO *Heurísticas de búsqueda para problemas discretos de localización-asignación*
en *Lecturas en Teoría de Localización*, J. Puerto (editor). Publicaciones de la Universidad de Sevilla (1996) 107-134.
- [48] C.A. MORGAN AND P.J. SLATER *A linear algorithm for a core of a tree*
Journal of Algorithms **1** (1980) 247-258.
- [49] T. NISHIZEKI AND N. CHIBA *Planar graphs: theory and algorithms*
Annals of Discrete Mathematics **32**, North-Holland (1988) 1-11.

- [50] P.T. NKANSAH AND H.T. DAVID *Network median problems with continuously distributed demand*
Transportation Science **20** (1986) 213-219.
- [51] S. PENG, A.B. STEPHENS AND Y. YESHA *Algorithms for a core and k-tree core of a tree*
Journals of Algorithms **15** (1993) 143-159.
- [52] R.T. ROCKAFELLAR *Convex analysis*
Princeton University Press, Princeton, (1972).
- [53] H.D. SHERALI AND F.L. NORDAI *NP-hard, capacitated, balanced p-median problems on a chain graph with a continuum of links demands*
Mathematics of Operations Research, **1** (1988) 32-49.
- [54] H.D. SHERALI *Capacitated, balanced, sequential location-allocation problems on chains and trees*
Mathematical Programming **49** (1991) 381-396.
- [55] H.D. SHERALI AND T.P. RIZZO *Unbalanced, capacitated p-median problems on a chain graph with a continuum of link demands*
Networks **21** (1991) 133-163.
- [56] P.J. SLATER *Some definitions of central structures*
Lecture Notes in Mathematics 1073, Springer-Verlag, Berlin, (1984), 169-178.
- [57] P.J. SLATER *Locating central paths in a graph*
Transportation Science **16** (1982), 1-18.
- [58] B.C. TANSEL, R.L. FRANCIS AND T.J. LOWE *Location on networks: A survey - Part I: The p-center and p-median problems*
Management Science **29** (1983) 482-497.
- [59] B.C. TANSEL, R.L. FRANCIS AND T.J. LOWE *Location on networks: A survey - Part II: Exploiting the tree network structure*
Management Science **29** (1983) 498-511.

-
- [60] P. WOLFE *The Simplex method for quadratic programming*
Econometrics **27** (1959) 382-398.