123714219

Reserva

Consulta Sala

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada I

Álgebras de Lie casifiliformes graduadas de longitud maximal

Tesis 43

Memoria presentada por Joaquín Reyes Columé para optar al grado de Doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla

Vº. Bº.
de los Directores,

Fdo. José Ramón Gómez Martín,
Catedrático de E.U. del Departamento de Matemática Aplicada I
de la Universidad de Sevilla

Fdo. Antonio Jiménez Merchán,
Catedrático de E.U. del Departamento de Matemática Aplicada I
de la Universidad de Sevilla

Sevilla, abril de 1998

Sevilla a 9 de Septiembre de 1998
N/Ref.Secc.Tercer Ciclo-EL/PM
Asunto: Remitiendo Ejemplares Tesis Leidas

UNIVERSIDAD de SEVILLA

RECTORADO

DESTINATARIO
SR. DIRECTOR DE LA BIBLIOTECA
FACULTAD DE INFORMATICA Y ESTADISTICA
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Adjunto le remito ejemplares de Tesis Doctorales leídas en Departamentos vinculados a esa Facultad a fin de que pasen a formar parte de los fondos bibliográficos de consulta de ese Centro.

AUTORES DE LAS TESIS ENVIADAS

* REYES COLUME, JOAQUIN

LA JEFA DEL NEGOCIADO DE TESIS

Fdo.: Elena Laffitte Alaminos

A Montse y a nuestros hijos

Resumen

Se presentan en esta memoria algunos resultados algebraicos sobre la clasificación de familias de álgebras de Lie nilpotentes graduadas.

En el primer capítulo se reseñan las principales conclusiones sobre familias de leyes de álgebras de Lie nilpotentes naturalmente graduadas para los casos de índices de nilpotencia $n-1$ y $n-2$, (casos filiforme y casifiliforme) y se clasifican las álgebras de Lie naturalmente graduadas para una familia más general que las engloba (las llamadas p-filiformes) cuando la dimensión de la derivada es mínima $(n-p-1)$.

El objeto fundamental de este trabajo, es el estudio de las álgebras de Lie filiformes y casifiliformes que admiten una $\mathbb{Z}$-graduación conexa, con un número de subespacios homogéneos mayor que su índice de nilpotencia. La primera cuestión que se resuelve es la obtención de bases adaptadas y homogéneas para estas familias de álgebras y se determinan las distintas graduaciones admisibles en los casos de longitud máxima para las álgebras filiformes y casifiliformes; asimismo, cuando la longitud es $\dim \mathfrak{g} - 1$, para las álgebras casifiliformes.

Se estudian a continuación, las familias de álgebras de Lie filiformes, de lon-

gitud máxima, aquellas en las que el número de subespacios graduantes coincide con la dimensión del álgebra.

En la última parte de la memoria se obtienen las álgebras de Lie casifiliformes, con longitudes $n-1$ y n, siendo n la dimensión del álgebra. Los resultados dan una explicación al diferente grado de dificultad en la clasificación de las álgebras de Lie filiformes y casifiliformes, en términos del número de álgebras graduadas no isomorfas que se obtienen.

El hecho de que para dimensiones pequeñas las situaciones que se presentan difieren, en esencia, del caso general así como la complejidad de éste, han hecho imprescindible la utilización del cálculo formal.

Agradecimientos

Fruto de la colaboración entre los Departamentos de Matemáticas de la Universidad de Huelva, y de Matemática Aplicada I de la Universidad de Sevilla, surgió la propuesta de trabajar bajo la supervisión y dirección del profesor José Ramón Gómez Martín, en la realización de un proyecto de tesis doctoral.

Quisiera en primer lugar señalar todo lo que esta tesis debe a los directores de la misma: José Ramón Gómez Martín y Antonio Jiménez Merchán, de quienes partió la iniciativa y no han cesado en ningún momento de guiarme, de mostrarme su apoyo y estímulo, sin los cuales no hubiera podido realizarse; y para sus familias, especialmente Concha e Isidora, con quienes alguna deuda me cabe por las horas de trabajo extra que sus maridos compartieron conmigo.

He de hacer mención especial al profesor Yusupjan Khakimdjanov, que ha seguido con interés la elaboración de este trabajo y que con sus observaciones ha contribuido a que esta investigación llegara a buen término.

Quisiera agradecer a todo el profesorado del Departamento de Matemática Aplicada I de la Facultad de Informática y Estadística de la Universidad de Sevilla, que me han acogido desde el primer día con exquisita cordialidad, brindándome en todo momento su apoyo, experiencia y animo.

Gracias a la Universidad de Huelva, que mediante su programa de investigación ha posibilitado la colaboración entre los Departamentos de Matemáticas de la Universidad de Huelva y el Departamento de Matemática Aplicada I de la Universidad de Sevilla.

Asimismo, expreso también mi agradecimiento a todos aquellos compañeros y amigos del Departamento de Matemáticas que me animaron en mi tarea.

Mi agradecimiento alcanza a otras muchas personas, que han colaborado conmigo en el desarrollo de este proyecto, en el ambito personal. Pero entre todas destaca mi mujer, Montse, cuya ayuda y comprensión han posibilitado que hoy presente este trabajo. Para ella y para nuestros hijos, coautores de este trabajo, porque fueron capaces de prescindir de mi presencia en multitud de ocasiones, y para todos los demás .... gracias.

Introducción

La importancia de la teoría de grupos de Lie y álgebras de Lie en Matemática Aplicada ha ido en aumento en los últimos años. La teoría de Lie es de una utilidad fundamental en diversas áreas como el análisis, la geometría diferencial, la teoría de números, las ecuaciones diferenciales, la estructura atómica, la física de alta energía, la dinámica de particulas, la teoría de la relatividad...

El estudio de los aspectos constructivos se ha desarrollado enormemente con el uso de los ordenadores. Se tiene una poderosa herramienta que permite observar conjeturas teóricas sobre las representaciones de álgebras de Lie. Este área de la teoría de álgebras de Lie augura un rápido desarrollo [6] en un futuro próximo.

Uno de los primeros problemas que se consideran al estudiar una estructura algebraica es el de la clasificación salvo isomorfismo. La descomposición de Levi (puede verse en cualquier texto, como [5], [14], [30] o [33]) de un álgebra de Lie, en una suma semidirecta de su radical (el ideal resoluble maximal del álgebra) y una parte semisimple (la subálgebra de Levi), reduce, en esencia, el problema de la clasificación al de las álgebras semisimples y resolubles.

Las álgebras de Lie semisimples (sin ideales propios abelianos), juegan un papel importante en las aplicaciones físicas. Las complejas fueron clasificadas por Killing y Cartan en su tesis (1894). Posteriormente, Cartan (1914) clasificó las álgebras de Lie semisimples reales. La clasificación de la álgebras de Lie resolubles, sin embargo, es un problema abierto. Resulta que la clasificación de las álgebras de Lie puede reducirse todavía, en un cierto sentido (véase [30]) a la clasificación de un tipo particular: las álgebras de Lie nilpotentes. Y en el estudio y clasificación de un tipo de familia de estas álgebras es donde se enmarca este trabajo de investigación.

Son muchos los autores que han abordado el problema de la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes. Las listas para dimensiones menores o iguales a 5 sobre un cuerpo conmutativo fueron publicadas, por primera vez, por Dixmier en 1958 [15]. Más no son estas las primeras listas obtenidas de álgebras de Lie nilpotentes, puesto que en 1891 K. Umlauf [39] da en su tesis doctoral listas para todas las leyes de dimensiones 7, 8 y 9 admitiendo una base $\{X_0, X_1, \ldots X_{n-1}\}$ para la que $[X_0, X_i] = X_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n-2)$ sobre $\mathbf{R}$ ó $\mathbf{C}$, (las álgebras de Lie con esta propiedad son llamadas hoy en día filiformes). Estas listas contienen, no obstante, errores y álgebras escindidas y no presentadas como tales. En 1958, U. Morosov [36] publica la primera lista completa sobre un cuerpo $\mathbf{K}$ de característica 0, para dimensión 6.

Vergne [40] publica en 1.966 listas completas de dimensiones menores o iguales que 6 sobre $\mathbf{C}$, en su tesis de tercer ciclo, estudiando la variedad de leyes de álgebras de Lie nilpotentes mediante métodos cohomológicos más que estudiando directamente la clase de isomorfía. Otras listas completas las proporcionan Nielsen [37] y Cerezo [13] en 1.983, aunque de manera independiente y haciendo uso de métodos diferentes. El procedimiento debido a Cerezo (a partir del hecho que un álgebra de dimensión n es suma semidirecta de otra de dimensión $n-1$ y una recta) ha sido el seguido por M. Romdhani para dar la lista completa para las nilpotentes de dimensión 7 [38]. El tema ha continuado siendo estudiado por muchos autores en muy diversos lugares, pero como anteriormente la complejidad de los cálculos involucrados (realizados a veces a mano) ha continuado siendo fuentes de errores y produciendo listas "más o menos" fiables.

Recientemente, un nuevo invariante ha sido introducido por Goze para el estudio de las álgebras de Lie nilpotente: la sucesión característica o invariante de Goze. Usando este invariante, Ancochea y Goze obtienen la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes complejas de dimensión 7 [3] y la de las álgebras de Lie filiformes de dimensión 8 [2], [4]. Ancochea y Gómez inician el estudio de las álgebras de Lie filiformes de dimensión 9 [1], [21]. Usando el método de Ancochea y Goze, se han obtenido por Gómez y Echarte [20], [22]la clasificación de las álgebras filiformes complejas en dimensión 9. Con ligeras modificaciones, Boza, Echarte y Núñez abordan el caso de dimensión 10. El método de Ancochea y Goze, muy adecuado en dimensiones pequeñas, origina cálculos muy complejos a partír de dimensión 9. Un cambio sustancial, se va a producir con la forma de ver un álgebra de Lie filiforme por Khakimdjanov, modificando la dificultad de la clasificación; con esta metodología y utilizando lo que ellos mismos denominan cambios de bases elementales, Gómez, Jiménez-Merchán y Khakimdjanov [26], han presentado por primera vez las álgebras filiformes de dimensión 11 y han corregido las de dimensión 10 e inferiores, utilizando computación simbólica, implementando los algoritmos que el método requiere para el cálculo sobre ecuaciones polinómicas y los cambios de bases adaptadas.

Cuando se intentan estudiar problemas de clasificación de álgebras de Lie nilpotentes de índice de nilpotencia alto se observa un aumento sustancial de la complejidad de los cálculos. Algunos de los problemas de clasificación de álgebras de Lie nilpotentes de mayor interés consisten en la determinación de aquellas con una propiedad relevante, de tal suerte que a través de su estudio se puedan conocer características importantes del resto de la familia a la que pertenecen. En este contexto, se pueden destacar el estudio de las álgebras graduadas naturalment de la familia ya que, en cierta manera, se puede considerar que poseen la estructura básica de las álgebras de Lie nilpotentes correspondientes.

La familia de álgebras que consideró Vergne en su estudio, que llamó graduadas naturalmente, está formada por aquellas cuyas álgebras graduadas, con la graduación inducida por la sucesión central descendente del álgebra, son isomorfas al álgebra de partida. Vergne obtuvo que sólo existía un álgebra filiforme naturalmente graduada si la dimensión n es impar, y dos álgebras si n es par, denotadas en este trabajo por L_n y Q_n. Este hecho permite a Vergne distinguir la estructura básica de cualquier álgebra de Lie filiforme y aplicarlo al estudio de la variedad de leyes de álgebras de Lie nilpotentes [41]. Además, permite también a otros autores abordar distintos aspectos de la teoría (véase, por ejemplo, [29]). Resulta claro que la determinación de las álgebras naturalmente graduadas de una familia de álgebras de Lie nilpotentes, aporta información relevante al estudio de la misma. Gómez y Jiménez-Merchán, presentan la familia de álgebras de Lie casifiliformes graduadas naturalmente [25], [34].

La dificultad encontrada en la clasificación de las álgebras casifiliformes naturalmente graduada, hicieron que el grupo de investigación al cual pertenezco se interesase por descubrir donde estaba la clave de su complicación.

El primero de los problemas que se aborda en la tesis trata sobre las álgebras graduadas naturalmente para una familia señalada dentro de cada índice de nilpotencia. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de dimensión n y p-filiforme, es decir, de invariante de Goze $(n-p, 1, \ldots, 1)$, puede verse en [25], donde $p = 2$, que, cuando la dimensión de la subálgebra derivada es mínima, las únicas álgebras naturalmente graduadas son extensiones de L_n y Q_n, con la paridad de n adecuada. La generalización de este hecho, para cualquier álgebra p-filiforme con las condiciones requeridas, es el resultado principal del Capitulo 1. Caracterizamos estas álgebras p-filiformes naturalmente graduadas como extensiones de las álgebras graduadas L_{n-p+1}, si $n-p$ es par, y L_{n-p+1} ó Q_{n-p+1}, si $n-p$ es impar.

La continuación del estudio de las álgebras naturalmente graduadas iniciado por Vergne, nos ha llevado a la consideración en profundidad de familias de álgebras de Lie nilpotentes con otro tipo de graduación, como medio de obtener información sobre la familia a la que pertenece. La graduación natural considerada por Vergne no se ha revelado siempre la más útil en el estudio de problemas similares a los estudiados en [41]. Por ejemplo, Cabezas y Gómez han estudiado las álgebras p-filiformes, con p próximo a la dimensión [8], [12]. En estas álgebras de bajo índice de nilpotencia, donde la graduación natural informa muy poco utilizan, para determinar las álgebras de derivaciones, graduaciones del álgebra con un número mucho mayor de subespacios que los de la graduación natural [12].

Asimismo, Goze y Khakimdjanov (véase [30]) subrayan el importante papel de las álgebras de Lie filiformes para las que el producto corchete viene dado por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j} X_{i+j+1}, & 1 \leq i < j \leq n-2, \quad j \leq n-2-i. \end{cases}$$

Ello nos motiva al estudio de las graduaciones de las álgebras de Lie nilpotentes con el mayor número de subespacios no nulos posibles.

En el resto del trabajo se considera que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie $\mathbb{Z}$-graduada, es decir admitiendo una descomposición $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$, donde los subespacios $\mathfrak{g}_i$ verifican $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$, para todo $i, j \in \mathbb{Z}$. Las graduaciones que se considerarán son finitas (con un número finito de subespacios $\mathfrak{g}_i$ no nulos). Un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ admite una graduación $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2}$ *conexa* (finita) cuando cada $\mathfrak{g}_i$, con $n_1 \leq i \leq n_2$, es no nulo. La *longitud* $l(\mathfrak{g})$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se define como

$$l(\mathfrak{g}) = \max\{n_2 - n_1 + 1 : \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2} \text{ es una graduación conexa}\}.$$

Es decir, $l(\mathfrak{g})$ es el número máximo de subespacios de la graduación conexa "más larga" que puede conseguirse en $\mathfrak{g}$. El álgebra L_n, admite una graduación de longitud n (máxima), y sin embargo Q_n tiene longitud $n-1$.

Resulta clave para la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de longitudes superior a su índice de nilpotencia la elección, como referencia, de una cierta base homogénea y adaptada al álgebra; su existencia constituye el punto de partida que permite obtener su clasificación. Y estos son, precisamente, los resultados que se obtienen en el Capítulo 2: la existencia de bases adaptadas y homogéneas en familias de álgebras de Lie filiformes y casifiliformes de longitud superior a su índice de nilpotencia.

En el siguiente capítulo se realiza la clasificación de las álgebras de Lie filiformes de longitud máxima, aquellas álgebras graduadas en las que el número de subespacios homogéneos coincide con la dimensión del álgebra. Se demuestra que, en cada dimensión $n \geq 12$, sólo existen 4 ó 5 álgebras filiformes de longitud máxima. Además de la mencionada L_n, las álgebras de Lie filiformes de longitud máxima son R_n, K_n, W_n, Q'_n, donde su leyes vienen dada, en una base $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ homogénea y adaptada, por:

Si $n \geq 3$, el álgebra

$$L_n = \left\{ \begin{array}{ll} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2. \end{array} \right.$$

Si $n \geq 5$, el álgebra

$$R_n = \left\{ \begin{array}{ll} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \leq i \leq n-3. \end{array} \right.$$

Si $n \geq 8$, el álgebra

$$K_n = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le n-2 \\ \left[X_i, X_{2\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor -1-i}\right] = (-1)^{i-1} X_{2\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor}, & 1 \le i \le \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor, \\ \left[X_i, X_{2\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor -i}\right] = (-1)^{i-1} \left(\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor - i\right) X_{2\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor +1}, & 1 \le i \le \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^i \frac{(i-1)(n-3-i)}{2} \alpha X_{n-1}, & 2 \le i \le \frac{n-3}{2}, \end{cases}$$

donde $\alpha = 0$, si n par, y $\alpha = 1$, si n es impar.

Si $n \geq 8$, el álgebra

$$W_n = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le n-2, \\ [X_i, X_j] = \frac{6\,(i-1)!\,(j-1)!\,(j-i)}{(i+j)!} X_{i+j+1}, & 1 \le i < j \le n-2-i. \end{cases}$$

Si $n \geq 7$ y n es impar, el álgebra

$$Q'_n = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le n-2, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1} X_{n-1}, & 1 \le i \le \frac{n-3}{2}. \end{cases}$$

Cuando la familia es de dimensión $n < 12$, hay que añadir algunas álgebras, distintas de las anteriores, que constituyen casos excepcionales y que también se recogen en este Capítulo.

Los problemas de mayor envergadura son los que se presentan en el estudio de las álgebras graduadas casifiliformes con longitud superior al índice de nilpotencia y que se estudian en el Capítulo 4. Separamos en dos secciones este último capítulo, dedicándolas a la clasificación de las familias de leyes de álgebras de Lie casifiliformes con longitudes n y $n-1$, siendo n la dimensión del álgebra.

Cuando consideramos las álgebras casifiliformes de longitud máxima, además de las que son obtenidas como extensiones algebraicas de las álgebras filiformes de igual longitud, se tienen en cada dimensión $n \geq 13$ dos o tres álgebras según la paridad de n, y que serán denotadas como $\mathfrak{g}^1_{(n,2-n)}$, $\mathfrak{g}^2_{(n,1)}$ y $\mathfrak{g}^3_{(n,1)}$, donde sus leyes vienen dadas, en una base $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y\}$ homogénea y adaptada, por:

Si $n \geq 5$ y n es impar, el álgebra

$$\mathfrak{g}^1_{(n,2-n)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}Y, & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}. \end{cases}$$

Si $n \geq 5$, el álgebra

$$\mathfrak{g}^2_{(n,1)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, Y] = X_{i+2}, & 1 \leq i \leq n-4. \end{cases}$$

Si $n \geq 7$, el álgebra

$$\mathfrak{g}^3_{(n,1)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, Y] = X_{i+2}, & 1 \leq i \leq n-4, \\ [X_1, X_i] = X_{i+3}, & 2 \leq i \leq n-5. \end{cases}$$

También se recogen las álgebras que se deben añadir cuando $n < 13$.

La lista de álgebras cuya obtención ha planteado una mayor dificultad es la que se obtiene cuando se considera un álgebra casifiliforme de longitud $n-1$. Su estudio es el núcleo de este trabajo.

Cuando se estudian las álgebras de Lie casifiliformes de longitud $n-1$, la dificultad es mayor tanto por el número de tipo graduaciones que cabe considerar como por el número de álgebras que se obtienen. Además de la extensión algebraica del álgebra Q_{n-1}, son álgebras casifiliformes de longitud $n-1$ las álgebras $\mathfrak{g}^i_{(n,1,p)}$, con $1 \leq i \leq 10$ e $i = 12$ y la familia uniparamétrica $\mathfrak{g}^{11}_{(n,1,p)}(\alpha)$, donde sus leyes vienen dadas, en una base $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y\}$ homogénea y adaptada, por:

Si $n \geq 6$, para $3 \leq p \leq n-3$, las álgebras

$$\mathfrak{g}^1_{(n,1,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, Y] = X_{i+p}, & 1 \leq i \leq n-p-2. \end{cases}$$

Si $n \geq 6$, para $3 \leq p \leq n-3$, las álgebras

$$\mathfrak{g}^2_{(n,1,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, Y] = X_{i+p}, & 1 \leq i \leq n-p-2, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \leq i \leq n-4. \end{cases}$$

Si $n \geq 8$ y n es par, para $3 \leq p \leq n-3$ y p impar, y $p = n-4$, las álgebras

$$\mathfrak{g}^3_{(n,1,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, Y] = X_{i+p}, & 1 \leq i \leq n-p-2, \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i-1} X_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}. \end{cases}$$

Si $n \geq 6$, para $5 \leq p \leq n-1$ y p impar, las álgebras

$$\mathfrak{g}^4_{(n,1,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{p-2-i}] = (-1)^{i-1} Y, & 1 \leq i \leq \frac{p-3}{2}. \end{cases}$$

Si $n \geq 9$, para $5 \leq p \leq n-2$ y p impar, las álgebras

$$\mathfrak{g}^5_{(n,1,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{p-2-i}] = (-1)^{i-1}\beta Y, & 1 \leq i \leq \frac{p-3}{2} \\ \left[X_i, X_{2\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor -1-i}\right] = (-1)^{i-1}\left(X_{2\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} + (1-\beta)Y\right), & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor, \\ \left[X_i, X_{2\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor -i}\right] = (-1)^{i-1}\left(\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor - i\right) X_{2\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor +1}, & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor, \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i\frac{(i-1)(n-4-i)}{2}} \alpha X_{n-2}, & 2 \leq i \leq \frac{n-4}{2}. \end{cases}$$

donde $\alpha = 0$, si n es impar, y $\alpha = 1$, si n es par; y donde $\beta = 0$, si $p = 2\lfloor (n-1)/2 \rfloor - 1$, y $\beta = 1$, en otro caso.

Si $n \geq 8$ y n es par, para $5 \leq p \leq n-1$ y p impar, las álgebras

$$\mathfrak{g}^6_{(n,1,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{p-2-i}] = (-1)^{i-1}Y, & 1 \leq i \leq \frac{p-3}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i-1}X_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}. \end{cases}$$

Si $n \geq 9$, para $p = 5$ ó $p = 7$, las álgebras

$$\mathfrak{g}^7_{(n,1,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_1, X_j] = X_{j+2}, & 3 \leq j \leq n-4, \quad j \neq p-3, \\ [X_1, X_{p-3}] = X_{p-1} + Y, & \\ [X_i, X_{p-2-i}] = (-1)^{i-1}Y, & 2 \leq i \leq \frac{p-3}{2}. \end{cases}$$

Si $n \geq 9$, para $p = 5$ ó $p = 7$, las álgebras

$$\mathfrak{g}^8_{(n,1,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = \frac{6\,(i-1)!\,(j-1)!\,(j-i)}{(i+j)!} X_{i+j+1}, & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor, \\ & j \neq p-2-i, \ \ i < j \leq n-3-i, \\ [X_i, X_{p-2-i}] = \frac{6\,(i-1)!\,(p-3-i)!\,(p-2-2i)}{(p-2)!} X_{p-1} + (-1)^{i-1} Y, & 2 \leq i \leq \frac{p-3}{2}, \end{cases}$$

Si $n \geq 13$, para $n-3 \leq p \leq n-5$, las álgebras

$$\mathfrak{g}^9_{(n,1,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ \left[X_i, X_{2\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor -1-i}\right] = (-1)^{i-1} X_{2\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor}, & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor, \\ \left[X_i, X_{2\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor -i}\right] = (-1)^{i-1} \left(\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor - i \right) X_{2\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor +1}, & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor, \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^i \frac{(i-1)(n-4-i)}{2}\, \alpha\, X_{n-2}, & 2 \leq i \leq \frac{n-4}{2}, \\ [X_i, Y] = X_{i+p}, & 1 \leq i \leq n-p-2. \end{cases}$$

donde $\alpha = 0$, si n es impar, y $\alpha = 1$, si n es par.

Si $n \geq 13$, para $n-3 \leq p \leq n-5$, las álgebras

$$\mathfrak{g}^{10}_{(n,1,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = \frac{6\,(i-1)!\,(j-1)!\,(j-i)}{(i+j)!} X_{i+j+1}, & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor, i < j \leq n-3-i, \\ [X_i, Y] = X_{i+p}, & 1 \leq i \leq n-p-2, \end{cases}$$

Si $n \geq 12$ y n es par, las álgebras

$$\mathfrak{g}^{11}_{(n,1,n-3)}(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq p, \\ [X_i, X_{n-5-i}] = (-1)^{i-1}(\alpha X_{n-4} + Y), & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2}, \\ [X_i, X_{n-4-i}] = (-1)^{i-1}(\frac{n-4-2i}{2})\alpha X_{n-3}, & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2}, \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i}(\frac{(i-1)(n-4-i)}{2}\alpha + \frac{1}{\alpha})X_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}, \\ [X_1, Y] = X_{n-2}. & \end{cases}$$

donde $\alpha = re^{i\theta}$, con $r \neq 0$, y $-\pi/2 \leq \theta < \pi/2$.

Si $n \geq 13$, las álgebras $\mathfrak{g}^{12}_{(n,1,2\lfloor (n-1)/2 \rfloor-3)}$, definidas por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-5-i}] = (-1)^{i-1}(aX_{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-4} + Y), & 1 \leq i \leq \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor - 3, \\ [X_i, X_{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-4-i}] = (-1)^{i-1}(\frac{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-4-2i}{2})aX_{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-3}, & 1 \leq i \leq \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor - 3, \\ [X_i, X_{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-3-i}] = (-1)^{i}(\frac{(i-1)(2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-4-i)}{2}a + \frac{1}{a})X_{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-2}, & 1 \leq i \leq \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor - 2, \\ [X_i, X_{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-2-i}] = (-1)^{i-1}(\frac{(i-1)(i-2)(3\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-6-i)}{6}a + \frac{1}{a})X_{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-1}, & 1 \leq i \leq \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor - 2, \\ [X_i, X_{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-1-i}] = (-1)^{i}(\frac{(i-1)(i-2)(i-3)(4\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-8-i)}{24}a + \frac{1}{2a})bX_{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}, & 1 \leq i \leq \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor - 1, \\ [X_i, Y] = X_{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-3+i}, & 1 \leq i \leq n - 2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor + 1. \end{cases}$$

siendo $a = \sqrt{\frac{-12}{(2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-5)(2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-6)}}$, y donde $b = 0$, si n es impar, y $b = 1$, si n es par.

Se concluye la memoria recogiendo en un Apéndice aquellas álgebras casifiliformes de longitud $n-1$, que se deben añadir cuando $n \leq 14$, que en este caso resultan ser un número elevado que no aporta información relevante al caso general.

Un papel importante del método que conduce a los resultados obtenidos es, esencialmente, fruto del tratamiento computacional en el estudio de los problemas planteados, utilizando un lenguaje formal para generar estructuras y desarrollar ejemplos que nos permitan intuir y contrastar conjeturas. Se recoge, además, en el Apéndice uno de los programas utilizados, con el lenguaje de programación *Mathematica*, para la generación de familias.

Índice

Capítulo 0

Generalidades

Se introducen las nociones y definiciones generales que se utilizarán a lo largo de este trabajo de investigación, y se mencionan algunos textos introductorios sobre álgebras de Lie, que son suficientementeconocidos para el especialista.

Si el lector no está suficientemente familiarizado con los conceptos que se tratan, puede recurrir a los textos que se citan a continuación.

Podrían ser considerados básicos los textos de Jacobson [33] o Humphreys [32] y el "survey" de Belifante y Kolman [6]. Más recientemente, con un enfoque muy actual, puede ser consultado el texto de Bäuerle y Kerf [5]. Un texto muy reciente pero imprescindible, dedicado especialmente a las álgebras de Lie nilpotentes, objeto de estudio de esta Tesis, es el de Goze y Khakimdjanov [30].

0.1 Notaciones y terminología

Un *álgebra de Lie* $(\mathfrak{g}, \mu)$ *sobre un cuerpo* $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{K}$ dotado de una aplicación bilineal $\mu : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, llamada *producto o ley del* *álgebra*, que cumple las propiedades

$$\mu(x,x)=0$$

y la identidad de Jacobi, que se expresa como

$$\mu(x,\mu(y,z))+\mu(y,\mu(z,x))+\mu(z,\mu(x,y))=0$$

para todos los elementos x, y, z de $\mathfrak{g}$.

Se suele designar $\mu(x,y)$ por $[x,y]$ y así μ es nombrado usualmente como *producto corchete.* Por otra parte, $\mathfrak{g}$ representa el álgebra o el espacio vectorial, indistintamente, según contexto. A la dimensión del espacio vectorial subyacente se le llama también *dimensión del álgebra.* Las álgebras de Lie, en este trabajo, serán consideradas sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ y de dimensión finita. Es habitual en el tratamiento con álgebras de Lie usar la notación $\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$ para una base del álgebra y expresar los elementos del álgebra en mayúsculas.

Si llamamos $\mathcal{B}^2(\mathbb{C}^n)$ al espacio vectorial de las aplicaciones bilineales de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$ y fijamos una base $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ de $\mathbb{C}^n$, podemos determinar un elemento α de $\mathcal{B}^2(\mathbb{C}^n)$ conociendo el conjunto de escalares $C_{i,j}^k$, llamados *constantes de estructura*, definidos por las fórmulas $\alpha(e_i,e_j)=\sum_{k=1}^n C_{i,j}^k e_k$; de este modo, $\mathcal{B}^2(\mathbb{C}^n)$ puede ser dotado con estructura de espacio afín. Así, podemos considerar un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ como un elemento de $\mathcal{B}^2(\mathbb{C}^n)$; el conjunto $\mathcal{L}_n$ de leyes de álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}^n$ es un conjunto algebraico afín definido por las relaciones polinomiales

1. $C_{i,j}^k = -C_{j,i}^k$,
2. $\displaystyle\sum_{l=1}^n (C_{i,j}^l C_{k,l}^s + C_{j,k}^l C_{i,l}^s + C_{k,i}^l C_{j,l}^s) = 0$

y parametrizado por las $(n^3-n^2)/2$ constantes de estructura $C_{i,j}^k$.

Un subespacio $\mathfrak{g}_1$ de $\mathfrak{g}$ se dice que es una *subálgebra de Lie de* $\mathfrak{g}$ si $[X,Y]\in\mathfrak{g}_1$

para todo elemento X, Y de $\mathfrak{g}_1$, es decir, una subálgebra es un subespacio vectorial que es álgebra de Lie para la multiplicación inducida.

Una subálgebra de Lie $\mathcal{I}$ de $\mathfrak{g}$ se dice que es un *ideal* de $\mathfrak{g}$ si $[\mathcal{I}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathcal{I}$, es decir, $[X, Y] \in \mathcal{I}$ para cualquier elemento $X \in \mathcal{I}$, $Y \in \mathfrak{g}$; por supuesto, todo ideal es subálgebra.

Un álgebra de Lie no abeliana $\mathfrak{g}$ se dice *simple* si no tiene ideales propios y *semisimple* si no tiene ideales propios abelianos. Las álgebras semisimples son sumas directas de álgebras simples y éstas son conocidas desde los trabajos de Killing y Cartan y están clasificadas (pueden verse en [30] o [32]).

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, a la sucesión de ideales definidos mediante

$$\begin{cases} D^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, \\ D^1(\mathfrak{g}) = \mu(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}), \\ D^{k+1}(\mathfrak{g}) = \mu(D^k(\mathfrak{g}), D^k(\mathfrak{g})), \qquad k \geq 1, \end{cases}$$

se le llama ***sucesión derivada*** de $\mathfrak{g}$. Dicha sucesión verifica que

$$\mathfrak{g} = D^0(\mathfrak{g}) \supseteq D^1(\mathfrak{g}) \supseteq \cdots \supseteq D^i(\mathfrak{g}) \cdots$$

y si existe un entero k para el que $D^k(\mathfrak{g}) = \{0\}$ el álgebra se dice *resoluble*; en tal caso, al menor entero que cumple dicha condiciónse le llama *índice de resolubilidad* de $\mathfrak{g}$.

El Teorema de Lévi (veánse, por ejemplo, [30] o [33]) nos dice que toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ admite una descomposición en suma semidirecta de su radical (el ideal resoluble maximal del álgebra) y una subálgebra semisimple (la subálgebra de Levi). Este resultado reduce, en esencia, el problema de la clasificación de las álgebras de Lie al de la clasificación de las resolubles.

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, a la sucesión de ideales definidos mediante

$$\begin{cases} C^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, \\ C^{k+1}(\mathfrak{g}) = \mu(C^k(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}), \qquad k \geq 0. \end{cases}$$

se le llama *sucesión central descendente* de $\mathfrak{g}$. Dicha sucesión verifica que

$$\mathfrak{g} = C^0(\mathfrak{g}) \supseteq C^1(\mathfrak{g}) \supseteq \cdots \supseteq C^i(\mathfrak{g}) \cdots$$

y si existe un entero k para el que $C^k(\mathfrak{g}) = \{0\}$ el álgebra se dice *nilpotente*; en tal caso, al menor entero que cumple dicha condición se le llama *índice de nilpotencia* de $\mathfrak{g}$. Cuando dicho valor es $n-1$, las álgebras que se obtienen son llamadas *filiformes*; se dirán *casifiliformes* si su índice es $n-2$.

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie y $X \in \mathfrak{g}$, se denota por ad$X$ al endomorfismo de $\mathfrak{g}$ definido por

$$Y \mapsto \mu(X, Y)$$

y se le denomina *aplicación adjunta de X.*

La aplicación

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to gl(\mathfrak{g})$$

es una representación de $\mathfrak{g}$, llamada *representación adjunta* del álgebra. El Teorema de Engel nos dice que "*un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es nilpotente si y sólo si* ad$X$ *es nilpotente para todo elemento X de $\mathfrak{g}$*".

Un endomorfismo f de $\mathfrak{g}$ se dice que es una *derivación* del álgebra si

$$f(\mu(X, Y)) = \mu(f(X), Y) + \mu(X, f(Y)), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Al conjunto de las derivaciones se le denota por $Der(\mathfrak{g})$ y se le puede dotar de estructura de álgebra de Lie definiendo el producto corchete como

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f$$

Si todas las derivaciones son nilpotentes, el álgebra se dice *característicamente nilpotente*.

Se tiene que, para todo $X \in \mathfrak{g}$, el endomorfismo ad$X$ es una derivación que se dice *interior* del álgebra. El conjunto de las derivaciones interiores, ad$\mathfrak{g}$, es un ideal de Der($\mathfrak{g}$). Módulo el estudio de las derivaciones de las álgebras de Lie resolubles, la clasificación de las álgebras de Lie se reduce, vía el Teorema de Levi, a la de las resolubles y en particular a las nilpotentes (veáse [30]).

Un álgebra de Lie se dice $\mathbf{Z}$-*graduada*, o simplemente graduada, si puede ser descompuesta vectorialmente como

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} \mathfrak{g}_i$$

donde $\mathfrak{g}_i$ son subespacios que verifican $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subseteq \mathfrak{g}_{i+j}$ para todo $i, j \in \mathbf{Z}$.

Si el número de subespacios $\mathfrak{g}_i$ no nulos es finito, diremos que la $\mathbf{Z}$-graduación es finita.

Un álgebra de Lie se dice $\mathbf{Z}$-*filtrada*, o simplemente filtrada, si existen subespacios S_i, con $i \in \mathbf{Z}$ tales que

1. $\mathfrak{g} = \bigcup_{i \in \mathbf{Z}} S_i$,
2. $[S_i, S_j] \subset S_{i+j}$ $\quad i, j \in \mathbf{Z}$,
3. $S_i \subset S_j$ $\quad$ si $i > j$, (se dice, entonces, $\mathbf{Z}$-filtración *descendente*).

Si el número de subespacios propios de la filtración es finito, se dice que la filtración es finita, esto es, una filtración descendente $(S_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ es finita si existen $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$ tales que

$$\begin{cases} S_i = \mathfrak{g}, & i \leq n_1 \\ S_i = \{0\}, & i \geq n_2. \end{cases}$$

Si un álgebra de Lie es graduada y es $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} \mathfrak{g}_i$, puede considerarse la filtración asociada a la graduación dada por $S_k = \bigoplus_{i \geq k} \mathfrak{g}_i$.

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie filtrada, con $\mathfrak{g} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} S_i$, puede construirse a partir de ella, un álgebra graduada, poniendo

$$\operatorname{gr} \mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i \quad \text{con } \mathfrak{g}_i = \frac{S_i}{S_{i+1}},$$

y definiendo en $\operatorname{gr} \mathfrak{g}$ el producto $[\overline{X}, \overline{Y}] = \overline{[X, Y]}$, donde $\overline{[X, Y]}$ es la clase del elemento $[X, Y] \in S_{i+j}$, cuando X e Y son representates de S_i y S_j respectivamente.

0.2 Invariantes Clásicos

El problema de la clasificación de álgebras de Lie nilpotentes obliga a distinguir si son isomorfas; la decisión no es una cuestión fácil, por lo que se recuerdan los *invariantes* más comunes de un álgebra, es decir, aquellas propiedades que se conservan bajo isomorfismos, de los que destacan por su simpleza la dimensión y el índice de nilpotencia.

Otros invariantes usuales son los proporcionados por la sucesión derivada

$$\mathfrak{g} = D^0(\mathfrak{g}) \supset D^1(\mathfrak{g}) \supset \cdots \supset D^i(\mathfrak{g}) \cdots$$

por la sucesión central descendente

$$\mathfrak{g} = C^0(\mathfrak{g}) \supset C^1(\mathfrak{g}) \supset \cdots \supset C^i(\mathfrak{g}) \cdots$$

así como por la *sucesión central ascendente* que se define como

$$\{0\} = C_0(\mathfrak{g}) \subset C_1(\mathfrak{g}) \subset \cdots \subset C_i(\mathfrak{g}) \cdots$$

donde

$$\begin{cases} C_0(\mathfrak{g}) = \{0\}, \\ C_{k+1}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : \mu(X, \mathfrak{g}) \subseteq C_k(\mathfrak{g})\}, \quad k \geq 0. \end{cases}$$

Denotando por

$$d_i = dim(D^i(\mathfrak{g})), \quad c^i = dim(C^i(\mathfrak{g})), \quad c_i = dim(C_i(\mathfrak{g}))$$

entonces la sucesión de dimensiones

$$(n, d_1, \ldots, d_{p-1}, c^1, \ldots, c^{s-1}, c_1, \ldots, c_{s-1})$$

es un invariante de $\mathfrak{g}$. La clasificación de álgebras de Lie nilpotentes de dimensiones inferiores o iguales a 6 se puede obtener utilizando sólamente estos invariantes.

Se denotan la *subálgebra derivada* de $\mathfrak{g}$ y y el *centro* de $\mathfrak{g}$, respectivamente, por

$$\mu(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = C^1(\mathfrak{g}) = D^1(\mathfrak{g})$$

$$cen(\mathfrak{g}) = C_1(\mathfrak{g})$$

Asimismo, si $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$, el *centralizador* de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$ viene dado por

$$cen_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : \mu(X, \mathfrak{h}) = 0\}$$

Las dimensiones de estos ideales, a veces, resultan ser un invariante bastante útil para distinguir álgebras no isomorfas.

Un invariante más potente es el llamado *la sucesión característica* ó *invariante de Goze*, basado en conceptos elementales relacionados con la forma canónica de Jordan y se ha utilizado explícitamente, por primera vez, en los trabajos de Ancochea y Goze [2] y [3].

La sucesión característica se define como el máximo de los símbolos de Segre de las aplicaciones lineales nilpotentes ad$X$, siendo X un elemento del complementario de la subálgebra derivada, es decir, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie nilpotente compleja de dimensión finita n, para todo $X \in \mathfrak{g} - [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ se denota por

$$c(X) = (c_1(X), c_2(X), \ldots, 1)$$

la sucesión en orden decreciente de las dimensiones de los subespacios característicos del operador nilpotente ad$X$. Ordenando el conjunto de estas sucesiones en orden lexicográfico se define

$$c(\mathfrak{g}) = sup\{c(X) : X \in \mathfrak{g} - [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}$$

y a este se le llama *sucesión característica.* Es un invariante más potente que los anteriores y se ha utilizado para obtener la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 7, [3].

Evidentemente $c(\mathfrak{g})$ es un invariante para los isomorfismos y, por construcción, existe al menos un vector $X \in \mathfrak{g} - [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ tal que $c(\mathfrak{g}) = c(X)$; un vector que verifica dicha condición es llamado *vector característico* del álgebra.

Si $\mathfrak{g}$, es un álgebra de Lie nilpotente con sucesión característica $(p_1, p_2, \ldots, 1)$, existe una base que denotaremos por $\{X_0, X_1^{p_1}, \ldots, X_{p_1-1}^{p_1}, X_1^{p_2}, \ldots, X_{p_2-1}^{p_2}, \ldots\}$, verificando

$$[X_0, X_j^{p_i}] = X_{j+1}^{p_i} \qquad 1 \leq j \leq p_i - 2.$$

dicha base se dirá *base adaptada* del álgebra, siendo X_0 un vector característico.

El álgebra abeliana de dimensión n es la única de invariante de Goze (1,...,1), en las álgebras metabelianas la sucesión característica es (2,2,...,2,1,...1), en el álgebra de Heisemberg (2,1,...1), en las álgebras filiformes (n − 1,1) y en las álgebras casifiliformes (n − 2,1,1).

Capítulo 1

Extensiones algebraicas de álgebras de Lie filiformes

Cabezas y Gómez [8] y [9] denominan las álgebras de Lie$p$-filiformes, a aquellas cuyo índice de nilpotencia es $n-p$. (En el caso particular $p=1$ resultan las filiformes).

Las familias de álgebras de Lie nilpotentes graduadas naturalmente, cuando la dimensión de la subálgebra derivada es mínima, pueden ser caracterizadas en términos de las álgebras de Lie filiformes graduadas naturalmente de dimensión $n-p+1$.

El resultado principal de este capítulo generaliza el que obtienen Gómez y Jiménez-Merchán [23], para las álgebras casifiliformes.

1.1 Introducción

En el estudio de la cohomología de las álgebras de Lie nilpotentes que hace Vergne y que aplica al estudio de la variedad de leyes de álgebras de Lie nilpotentes [41], la clasificación de las álgebras filiformes graduadas naturalmente desempeña un papel importante al permitir expresar un álgebra filiforme de una forma simplificada. En efecto, Vergne obtiene que hay sólo dos álgebras filiformes graduadas no isomorfas cuando la dimensión es par y una cuando la dimensión es impar. Encuentra una base en la que la expresión de las graduadas naturalmente es "cómoda" y la filtración natural proporciona el resto de los productos necesarios que deben ser conocidos, para determinar cualquier álgebra filiforme a partir de las graduadas. Así, las álgebras naturalmente graduadas aparecen como la estructura básica de un álgebra filiforme.

Goze y Khakimdjanov[29], utilizan estas álgebras para la descripción de las álgebras de Lie caracteristicamente nilpotentes, problema que había sido abordado, desde su introducción por Dixmier y Lister[16], por diversos autores [17], [18], [19], [35].

La determinación por Gómez y Jiménez-Merchán[25], de las álgebras de Lie naturalmente graduadas en el caso casifiliforme (de índice de nilpotencia $n-2$), mostró que el problema se complica extraordinariamente al disminuir el índice de nilpotencia, al obtener que había una familia localmente finita en términos de la dimensión. No obstante, el caso en el que la dimensión de la derivada es $n-3$ las álgebras que se obtienen se pueden expresar como extensiones de las álgebras obtenidas por Vergne.

Las álgebras de Lie señaladas hasta ahora tienen índice de nilpotencia $n-1$ y $n-2$, respectivamente. Así, parece natural abordar el estudio de familias de álgebras de Lie nilpotentes de índice $n-3$.Para este índice de nilpotencia la sucesión característica no es única, como ocurría en los casos filiforme y casifiliforme, siendo sus posibles expresiones $(n-3,1,1,1)$ y $(n-3,2,1)$. A medida que disminuye el índice de nilpotencia la situación se complica, ya que va aumentando el número de posibilidades para la sucesión característica.

Cuando se aborda el estudio de álgebras de Lie con índice de nilpotencia inferior se introduce, de modo natural y en términos del invariante de Goze, el concepto de álgebra de Lie *p-filiforme*, como aquella de sucesión característica $(n-p,1\ldots,1)$. Los casos $p=1$ y $p=2$ corresponden a las álgebras de Lie filiformes y casifiliformes, respectivamente. La familia de las álgebras p-filiformes desempeña, para cada índice de nilpotencia, un papel en cierta manera similar al de las filiformes para la totalidad de la clase, en términos de la sucesión característica.

Incluso para este tipo de álgebras y valores de p grandes, la determinación de las álgebras naturalmente graduadas resulta un problema de gran envergadura.

En el presente capítulo se determinan las álgebras de Lie p-filiformes naturalmente graduadas con dimensión de la derivada mínima, lo que incluye el caso filiforme para $p=1$ y el caso casifiliforme para $p=2$. Las álgebras que resultan se pueden expresar todas como extensiones de álgebras obtenidas por Vergne, en el sentido que se indicó en el caso 2-filiforme.

1.2 Álgebras de Lie graduadas naturalmente

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie nilpotente de índice k, la sucesión central descendente, $\{C^i\mathfrak{g}\}_{0\leq i\leq k}$, define una filtración finita, $\{S^i\mathfrak{g}\}_{i\in\mathbb{Z}}$, denominada *filtración natural*, de la siguiente forma

$$S_{i+1} = \begin{cases} \mathfrak{g}, & \text{si} \quad i \leq 0 \\ C^i\mathfrak{g}, & \text{si} \quad 1 \leq i \leq k-1 \\ \{0\}, & \text{si} \quad i \geq k. \end{cases}$$

El álgebra de Lie graduada finita que se obtiene de la filtración natural, viene dada por

$$\operatorname{gr} \mathfrak{g} = \bigoplus_{i \leq k} \mathfrak{g}_i \quad \text{con } \mathfrak{g}_i = \frac{C^{i-1}(\mathfrak{g})}{C^i(\mathfrak{g})}.$$

Se dice que un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ es o está *graduada naturalmente* si es isomorfa al álgebra graduada $\operatorname{gr} \mathfrak{g}$ obtenida de la filtración natural del álgebra.

Vergne denomina álgebra de tipo $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ al álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tal que

$$\dim \left(\frac{C_{i-1}(\mathfrak{g})}{C_i(\mathfrak{g})} \right) = p_i, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Un álgebra de Lie *filiforme* es la que tiene tipo $\{2, 1, \ldots, 1\}$. Las álgebras de Lie filiforme graduadas naturalmente han sido determinadas por Vergne[41].

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie filiforme graduada naturalmente de dimensión n, de la definición se tiene que

$$\begin{cases} \dim(C^1\mathfrak{g}) = n-2, & \\ \dim(C^i\mathfrak{g}) = n-i-1, & \text{si} \quad 2 \leq i \leq n-1 \\ \{0\}, & \text{si} \quad i \geq n, \end{cases}$$

y, por tanto, será $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-1}$, donde

$$\begin{cases} \dim \mathfrak{g}_1 = 2, & \\ \dim \mathfrak{g}_i = 1, & \text{si} \quad 2 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

En las álgebras de Lie filiformes naturalmente graduadas se puede encontrar siempre una base $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ de $\mathfrak{g}$, que se dirá adaptada y homogénea del álgebra, tal que

$$[X_0, X_i] = X_{i+1} \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq n-2.$$

Se deduce, por tanto, de la determinación del operador adjunto $\operatorname{ad} X_0$, que

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_1 =< X_0, X_1 >, & \\ \mathfrak{g}_i =< X_i >, & \text{si} \quad 2 \leq i \leq n-1, \end{cases}$$

con lo que el álgebra de lie filiforme $\mathfrak{g}$ está graduada naturalmente si y sólo si

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j} X_{i+j}, & 1 \leq i < j \leq n-1-i, \end{cases}$$

siendo las $\{a_{i,j}\}$ las constantes que verifican las condiciones algebraicas obtenidas de las ecuaciones de Jacobi.

El resultado principal obtenido por Vergne viene expresado en el siguiente teorema:

Teorema 1.1 [41] *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie filiforme graduada naturalmente de dimensión n, entonces $\mathfrak{g} = L_n$ si n es impar, y $\mathfrak{g} = L_n$ ó $\mathfrak{g} = Q_n$ cuando n es par, siendo, en una base $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$,*

L_n el álgebra cuya ley está definida por

$$[X_0, X_i] = X_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-2.$$

Q_n el álgebra cuya ley está definida, ni n=2q, q≥ 2, por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [X_i, X_{n-1-i}] = (-1)^{i-1} X_{n-1}, & 1 \leq i \leq q-1. \end{cases}$$

El caso en que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie casifiliforme (de índice de nilpotencia $n-2$) se complica extraordinariamente, ya que se tienen que considerar los tipos $(3,1,\ldots,1)$, $(2,2,1\ldots,1)$, $(2,1,2,1,\ldots,1)$,...,$(2,1,\ldots,1,2)$. Las álgebras casifiliformes graduadas naturalmente han sido determinadas por Gómez y Jiménez-Merchán[25].

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie casifiliforme graduada naturalmente, admite una descomposición de la forma

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-2}$$

donde se tiene alguna de las siguientes posibilidades:

1. $\dim \mathfrak{g}_1 = 3, \quad \dim \mathfrak{g}_i = 1, \quad 2 \leq i \leq n-2$
2. $\dim \mathfrak{g}_1 = 2, \quad \exists p \text{ con } \dim \mathfrak{g}_p = 2, \quad \dim \mathfrak{g}_i = 1, \quad 2 \leq i \leq n-2, \quad i \neq p,$

y existe una base $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y\}$ en la que dicha descomposición queda determinada por uno de los tipos siguientes:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{t}_1 &= < X_0, X_1, Y > \oplus < X_2 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} >, \\
\mathfrak{t}_2 &= < X_0, X_1 > \oplus < X_2, Y > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} >, \\
&\vdots \\
\mathfrak{t}_{n-2} &= < X_0, X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2}, Y > .
\end{aligned}$$

El estudio detallado de las álgebras que resultan en cada caso se encuentra en [24], donde se pone de manifiesto que se tiene una familia de álgebras localmente finita para cada dimensión. El resultado obtenido cuando $\mathfrak{g}$ es un álgebra del tipo $\mathfrak{t}_1$, se recoge en el siguiente Teorema

Teorema 1.2 [24] *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente de dimensión n, de índice de nilpotencia $n-2$, graduada naturalmente y verificando* $\dim C^1(\mathfrak{g}) = n-3$.

Entonces $\mathfrak{g}$ *es isomorfa a*

$$L_{n-1} \oplus \mathsf{K}, \qquad \text{si } n \text{ es par,}$$

$$L_{n-1} \oplus \mathsf{K} \text{ ó } Q_{n-1} \oplus \mathsf{K}, \qquad \text{si } n \text{ es impar.}$$

Se va a probar a continuación que la condición de tener la subálgebra derivada la menor dimensión posible permite extender el resultado a la generalización del concepto de filiforme para cada índice de nilpotencia.

1.3 Álgebras p-filiformes graduadas naturalmente

El invariante de Goze permite caracterizar las álgebras filiformes y casifiliformes a través de las sucesiones características respectivas, $(n-1,1)$ y $(n-2,1,1)$. Para el resto de índices de nilpotencia no existe una sucesión característica única que determine a la familia. Para cada índice de nilpotencia se van a considerar las álgebras de "mayor" invariante de Goze.

Definicion 1.3 Un álgebra de Lie nilpotente g, de dimensión n, se denomina *p-filiforme* si tiene invariante de Goze $(n-p,1,\ldots,1)$.

Las álgebras de Lie filiformes son las 1-filiformes, las álgebras casifiliformes son las 2-filiformes y las álgebras de Lie abelianas son las $(n-1)$-filiformes, donde n es la dimensión del álgebra.

De la definición de sucesión característica se deduce que toda álgebra de Lie p-filiforme $\mathfrak{g}$, de dimensión n, tiene índice de nilpotencia $n-p$.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra p-filiforme de dimensión n. Si X_0 es un vector característico del álgebra, puede hallarse una *base adaptada* de $\mathfrak{g}$, denotada como $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-p}, Y_1, \ldots, Y_{p-1}\}$, tal que $X_0 \in \mathfrak{g} - [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ y verificando

$$\begin{aligned} &[X_0, X_i] = X_{i+1}, && 1 \leq i \leq n-p-1, \\ &[X_0, X_{n-p}] = 0, && \\ &[X_0, Y_j] = 0, && 1 \leq j \leq p-1. \end{aligned}$$

De modo que, si la subálgebra derivada de $\mathfrak{g}$, $C^1\mathfrak{g}$, tiene la dimensión apropiada y el álgebra está graduada naturalmente, podemos precisar la descomposición que origina la graduación en términos de una base adaptada homogénea.

Lema 1.4 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie p-filiforme graduada naturalmente, de dimensión n, tal que* $\dim(C^1\mathfrak{g}) = n - p - 1$, *se tiene, en una base adaptada, la descomposición*

$$\mathfrak{g} =< X_0, X_1, Y_1, Y_2, \ldots Y_{p-1} > \oplus < X_2 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-p} > .$$

Demostración.

La prueba se deduce directamente de las propiedades de la base adaptada del álgebra. Como

$$[X_0, X_i] = X_{i+1}, \qquad 1 \leq i \leq n-p-1,$$

se tiene, que

$$C^1(\mathfrak{g}) \supset < X_2, X_3, \cdots, X_{n-p} >$$

y como

$$\dim C^1(\mathfrak{g}) = n - p - 1$$

sigue que

$$Y_i \notin C^1\mathfrak{g} \text{ para cualquier } i$$

de donde la consideración de la filtración natural implica directamente el resultado. □

Se está en condiciones de obtener la clasificación de las álgebras de Lie graduadas naturalmente que se precisan en el lema anterior y que generaliza el resultado del Teorema 1.2.

Teorema 1.5 *Sea* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie p-filiforme graduada naturalmente, de dimensión n, y verificando* $\dim C^1(\mathfrak{g}) = n-p-1$. *Entonces, si* $p \neq n-2$, *el álgebra* $\mathfrak{g}$ *es isomorfa a*

$$\begin{array}{ll} L_{n-p+1} \oplus \mathbb{K}^{p-1}, & \textit{si } n-p \textit{ es par,} \\ L_{n-p+1} \oplus \mathbb{K}^{p-1} \ \ \textit{ó} \ \ Q_{n-p+1} \oplus \mathbb{K}^{p-1}, & \textit{si } n-p \textit{ es impar.} \end{array}$$

Demostración. Los casos $p=1$ y $p=2$ son los resultados que proporcionan el Teorema 1.1 y el Teorema 1.2 respectivamente. Si $p=n-1$, el álgebra $\mathfrak{g}$ es el álgebra abeliana de dimensión n y no hay nada que probar. Supóngase entonces que $3 \leq p \leq n-3$ y sea $\{X_0, X_1, \ldots X_{n-p}, Y_1, Y_2, \ldots Y_{p-1}\}$ una base adaptada del álgebra p-filiforme graduada $\mathfrak{g}$. De acuerdo con el Lema 1.4,

$$Y_i \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad 1 \leq i \leq p-1,$$

y el álgebra $\mathfrak{g}$ es de la familia

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-p-1, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j}\, X_{i+j}, & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-p-1}{2} \right\rfloor,\ i < j \leq n-p-i, \\ [X_i, Y_j] = b_{i,j}\, X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-p-1,\ 1 \leq j \leq p-1, \\ [Y_i, Y_j] = c_{i,j}\, X_2, & 1 \leq i < j \leq p-1. \end{cases}$$

donde los parámetros $a_{i,j}$, $b_{i,j}$ y $c_{i,j}$ verifican las relaciones algebraicas obtenidas de las identidades de Jacobi. Denotemos por $J(X_i, X_j, X_k) = 0$ la identidad de

Jacobi correspondiente a las terna de vectores $\{X_i, X_j, X_k\}$. Si se consideran las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, Y_j) = 0$, con $1 \leq i \leq n-p-2$ y $1 \leq j \leq p-1$, se obtiene que

$$[X_0, b_{i,j}X_{i+1}] = [X_{i+1}, Y_j] + [X_i, 0], \quad 1 \leq i \leq n-p-2, \; 1 \leq j \leq p-1,$$

de donde se deducen las relaciones

$$b_{i,j}X_{i+2} = b_{i+1,j}X_{i+2}, \quad 1 \leq i \leq n-p-2, \; 1 \leq j \leq p-1.$$

o, lo que es lo mismo,

$$b_{i,j} = b_{1,j}, \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq n-p-1, \; 1 \leq j \leq p-1.$$

De las relaciones de Jacobi $J(X_0, Y_i, Y_j) = 0$, con $1 \leq i < j \leq p-2$,

se deduce que

$$[X_0, c_{i,j}X_2] = [0, Y_j] + [X_i, 0,]$$

lo que prueba que

$$c_{i,j} = 0, \quad 1 \leq i < j \leq p-1.$$

El cambio de bases definido por las relaciones

$$\begin{cases} X_i' = X_i, & 0 \leq i \leq n-p, \\ Y_j' = Y_j + b_{1,j}\, X_0, & 1 \leq j \leq p-1, \end{cases}$$

permite suponer

$$b_{1\,j} = 0, \text{ para } 1 \leq j \leq p-1.$$

Así, el álgebra $\mathfrak{g}$ se puede expresar como

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-p-1, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j}\, X_{i+j}, & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-p-1}{2} \right\rfloor, \; i < j \leq n-p-i, \end{cases}$$

es decir, $Y_i \in \operatorname{cen} \mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{g} : [X, \mathfrak{g}] = 0\}$, para todo $1 \leq i \leq p-1$. Se obtiene entonces la descomposición del álgebra $\mathfrak{g}$ como la suma directa

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus < Y_1, \dots, Y_{p-1} >,$$

donde

$$\mathfrak{g}' = \frac{\bigoplus \mathfrak{g}_i}{< Y_1, \dots, Y_{p-1} >}$$

es un álgebra filiforme graduada. El hecho de ser $< Y_1, \dots, Y_{p-1} >$ el álgebra abeliana de dimensión $p-1$ junto al Teorema 1.1 aplicado al álgebra $\mathfrak{g}'$ completa la demostración. $\square$

La exclusión del caso $p = n-2$ del Teorema 1.5 es debida a que las relaciones de Jacobi de la familia que resulta se verifican trivialmente. Estas álgebras, cuya clasificación puede encontrarse en [10] ó en [31], se corresponden con las álgebras desucesión característica $(2, 1, \dots, 1)$ y son siempre graduadas de forma natural.

Capítulo 2

Graduaciones conexas. Bases homogéneas

Se introduce el concepto de longitud de un álgebra de Lie (en realidad $\mathbb{Z}$-longitud) como el número de subespacios homogéneos de la $\mathbb{Z}$-graduación conexa "más larga" posible para dicha álgebra.

Cuando la longitud es próxima a la dimensión los subespacios homogéneos tienen dimensión pequeña, lo que facilita extraordinariamente la determinación de ciertas propiedades geométricas.

Surge la necesidad de encontrar bases "cómodas" que permitan abordar el problema de la determinación de estas álgebras.

Se resuelve esta cuestión para las álgebras filiformes de longitud $\dim \mathfrak{g}$ y para las casifiliformes de longitudes $\dim \mathfrak{g}$ y $\dim \mathfrak{g} - 1$.

2.1 Introducción

En los trabajos de Vergne[41] y Gómez y Jiménez-Merchán [24], al considerar la graduación natural, el número de subespacios graduantes coincide con su índice de nilpotencia $n-1$ y $n-2$. De igual modo, en cualquier familia de álgebras de Lie nilpotentes naturalmente graduadas se verifica que el número de subespacios graduantes coincide con el índice de nilpotencia. Esta consecuencia se obtiene de la filtración que produce en el álgebra la sucesión central descendente, la cual determina el número de subespacios no nulos de la graduación. Al disminuir el índice de nilpotencia, la citada graduación no resultará, en general, la más conveniente para realizar el estudio de las derivaciones, órbitas, etc...

Cabezas y Gómez[12], muestran que para el índice de nilpotencia tres se puede obtener una graduación (no natural) conexa con un gran número de subespacios no nulos, de manera que dicha graduación les permite obtener resultados relevantes sobre diversos aspectos geométricos.

Del mismo modo, Goze y Khakimdjanov[29] destacan el importante papel de las álgebras filiformes graduadas cuyo producto corchete viene dado por la expresión

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j} X_{i+j+1}, & 1 \leq i < j \leq n-2-i, \end{cases}$$

para el estudio de las derivaciones.

En ambos casos se están considerando álgebras nilpotentes graduadas del tipo

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2}$$

con $n_2 - n_1 + 1 \in \{n, n-1\}$ y con $\mathfrak{g}_i \neq \{0\}$, siendo n la dimensión del álgebra.

Lo anterior motiva el estudio de las álgebras de Lie nilpotentes graduadas, con mayor número de subespacios homogéneos que su índice de nilpotencia.

La definición de *longitud de un álgebra*, (número de subespacios de la graduación conexa "mas larga" que admite un álgebra), permite fijar la nomenclatura para trabajar con las graduaciones que se van a considerar.

Una ventaja importante que resulta del trabajo con álgebras de Lie graduadas naturalmente es la existencia, de manera inmediata, de bases adaptadas y homogéneas, en las que los productos corchete vienen expresados de manera fácil. La pregunta es ahora evidente ¿es posible, en otro tipo de graduación, no natural, encontrar una base adaptada y homogénea?

La Subsección 2.3.1 está dedicada al estudio de bases adaptadas y homogéneas para álgebras de Lie filiformes graduadas de longitud máxima, es decir, para las que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2}$, con $n_2 - n_1 = n - 1$, siendo n la dimensión de $\mathfrak{g}$.

Se puede garantizar para las álgebras filiformes de longitud máxima la existencia de una base adaptada y homogénea, $\{X_0, X_1, \ldots X_{n-1}\}$, y su descomposición es, en esencia, de alguno de los tipos

1. – $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$, con $\mathfrak{g}_i =< X_{i-1} >$, $1 \leq i \leq n$.

2. – $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{2-n} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1$, con $\mathfrak{g}_1 =< X_0 >$, $\mathfrak{g}_i =< X_{i+n-1} >$, $2 - n \leq i \leq 0$.

(Además, aparecerán otras dos graduaciones equivalentes a estas con sólo realizar el cambio en el índice, $i' = -i$, de los subespacios graduantes).

Se termina el capítulo con las Subsecciones 2.3.2 y 2.3.3, en las que se realiza el estudio de la existencia de bases adaptadas y homogéneas para álgebras de Lie casifiliformes graduadas con longitudes n y $n - 1$, es decir,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2}, \quad \text{con} \quad n_2 - n_1 = n - 1$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2}, \quad \text{con} \quad n_2 - n_1 = n - 2$$

También en estas álgebras puede garantizarse la existencia de bases adaptadas y homogéneas, $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y\}$.

Para el primer caso (cuando el álgebra tiene longitud n), las descomposiciones que resultan son

$$1.-\quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{3-n} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, \quad \text{con} \quad \begin{cases} \mathfrak{g}_i = < X_{i+n-2} >, & 3-n \leq i \leq 0, \\ \mathfrak{g}_1 = < X_0 >, \\ \mathfrak{g}_2 = < Y > . \end{cases}$$

$$2.-\quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{2-n} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1, \quad \text{con} \quad \begin{cases} \mathfrak{g}_i = < X_{i+n-1} >, & 2-n \leq i \leq -1, \\ \mathfrak{g}_0 = < Y >, \\ \mathfrak{g}_1 = < X_0 > . \end{cases}$$

$$3.-\quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{2-n} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1, \quad \text{con} \quad \begin{cases} \mathfrak{g}_{2-n} = < Y >, \\ \mathfrak{g}_i = < X_{i+n-2} >, & 3-n \leq i \leq 0, \\ \mathfrak{g}_1 = < X_0 > . \end{cases}$$

$$4.-\quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-1}, \quad \text{con} \quad \begin{cases} \mathfrak{g}_0 = < Y >, \\ \mathfrak{g}_i = < X_{i-1} >, & 1 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

$$5.-\quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n, \quad \text{con} \quad \begin{cases} \mathfrak{g}_1 = < X_0 >, \\ \mathfrak{g}_2 = < Y >, \\ \mathfrak{g}_i = < X_{i-2} >, & 3 \leq i \leq n. \end{cases}$$

$$6.-\quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n, \quad \text{con} \quad \begin{cases} \mathfrak{g}_i = < X_{i-1} >, & 1 \leq i \leq n-1, \\ \mathfrak{g}_n = < Y > . \end{cases}$$

(Además, al igual que para el caso de las álgebras filiformes de longitud máxima, aparecerán graduaciones equivalentes a estas con sólo realizar el cambio, en el índice de los subespacios graduantes, $i' = -i$).

En el segundo caso (cuando la longitud del álgebra es $n-1$), las descomposiciones que resultan vienen dadas, en algunos tipos, en función de un cierto entero p y son

1.– $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{3-n} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1$, donde

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_i =< X_{i+n-2} >, & 3-n \leq i \leq 0, \\ \mathfrak{g}_1 =< X_0, Y > . & \end{cases}$$

ó existe $p \in \mathbf{Z}$, con $3-n \leq p \leq 0$, tal que

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_i =< X_{i+n-2} >, & 3-n \leq i \leq p-1, \\ \mathfrak{g}_p =< X_{p+n-2}, Y >, & \\ \mathfrak{g}_i =< X_{i+n-2} >, & p+1 \leq i \leq 0, \\ \mathfrak{g}_1 =< X_0 > . & \end{cases}$$

2.– $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{3-p} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-p+1}$, con $2 \leq p \leq n-1$, donde

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_i =< X_{p-2+i} >, & 3-p \leq i \leq 0, \\ \mathfrak{g}_1 =< X_0, X_{p-1} >, & \\ \mathfrak{g}_i =< X_{p-2+i} >, & 2 \leq i \leq n-p, \\ \mathfrak{g}_{n-p+1} =< Y > . & \end{cases}$$

3.– $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{2-p} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-p}$, con $2 \leq p \leq n-1$, donde

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_{2-p} =< Y >, & \\ \mathfrak{g}_i =< X_{p-2+i} >, & 3-p \leq i \leq 0, \\ \mathfrak{g}_1 =< X_0, X_{p-1} >, & \\ \mathfrak{g}_i =< X_{p-2+i} >, & 2 \leq i \leq n-p. \end{cases}$$

4.– $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-1}$, y existe p, con $1 \leq p \leq n-1$, donde

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_i =< X_{i-1} >, & 1 \leq i \leq p-1, \\ \mathfrak{g}_p =< X_{p-1}, Y >, & \\ \mathfrak{g}_i =< X_{i-1} >, & p+1 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

(Además aparecerán, como en los dos casos anteriores, graduaciones equivalentes a estas con sólo realizar el cambio, en el índice de los subespacios graduantes, $i' = -i$).

2.2 Longitud de un álgebra de Lie

Se introduce ahora la notación para el tipo de graduaciones que se van a considerar sobre álgebras de Lie nilpotentes, aunque en este capítulo el estudio se centrará en las filiformes y casifiliformes. En todo lo que sigue se van a considerar $\mathbb{Z}$-graduaciones.

Definicion 2.1 Se dice que un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ admite una graduación $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2}$ conexa (finita), cuando cada $\mathfrak{g}_i$, con $n_1 \leq i \leq n_2$, es no nulo.

Definicion 2.2 Se define la $\mathbb{Z}$-longitud, $l(\mathfrak{g})$, de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ como

$$l(\mathfrak{g}) = \max\left\{n_2 - n_1 + 1 : \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2} \text{ es una graduación conexa}\right\}.$$

Nota 2.3 Como en todo el trabajo se van a considerar sólo $\mathbb{Z}$-graduaciones, se hablará de longitud en lugar de $\mathbb{Z}$-longitud.

Es decir, la longitud $l(\mathfrak{g})$ es el número de subespacios de la graduación conexa "más larga" que puede conseguirse en $\mathfrak{g}$. Toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tiene al menos longitud uno, ya que se puede considerar la graduación conexa trivial $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0$. Por otra parte, como la longitud de un álgebra no puede ser mayor que su dimensión, se tiene para toda álgebra $\mathfrak{g}$ que $1 \leq l(\mathfrak{g}) \leq \dim \mathfrak{g}$.

Por ejemplo, el álgebra L_n admite la graduación natural, que viene dada por

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-1},$$

siendo, en una base adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$,

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_1 =< X_0, X_1 >, & \\ \mathfrak{g}_i =< X_i >, & \text{con } 2 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

y la graduación

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n,$$

siendo

$$\mathfrak{g}_i =< X_{i-1} >, \text{ con } 1 \leq i \leq n,$$

Ambas son graduaciones conexas de L_n, la segunda tiene el mayor número de subespacios no nulos posibles, n, y por tanto podemos decir que la longitud de L_n es

$$l(L_n) = n.$$

Q_n no admite una graduación de longitud n, ya que si la admitiese, se tendría esencialmente (veánse las proposiciones 2.4 y 2.5), que

$$Q_n = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$$

con

$$\mathfrak{g}_i =< X_{i-1} >,$$

y los productos corchetes deberían verificar

$$[X_i, X_j] \in [\mathfrak{g}_{i+1}, \mathfrak{g}_{j+1}] \subseteq \mathfrak{g}_{i+j+2} =< X_{i+j+1} >,$$

de donde

$$[X_i, X_j] = a_{i,j} X_{i+j+1} \text{ para todo } i \text{ y } j \text{ con } 0 \leq i, j \leq n-1 \text{ y } j \leq n-2-i.$$

Como el álgebra Q_n, (n par), viene dada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [X_i, X_{n-1-i}] = (-1)^{i-1} X_{n-1}, & 1 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1, \end{cases}$$

se observa que $[X_1, X_{n-2}] = X_{n-1}$ va en contradicción con el supuesto de estar Q_n graduada con n subespacios. Por tanto

$$l(Q_n) = n - 1$$

Así, la única álgebra de Lie filiforme *graduada naturalmente* que tiene longitud máxima es L_n.

La existencia de bases adaptadas y homogéneas en las familas de álgebras de Lie nilpotentes graduadas naturalmente está garantizada vía la filtración natural. El probar la existencia de tales bases en álgebras de Lie nilpotentes graduadas por otro tipo de graduación constituye el primer problema a resolver. En la siguiente sección se realiza esta prueba para las álgebras de Lie filiformes y casifiliformes de longitud máxima, igual a $\dim \mathfrak{g}$, y para las álgebras casifiliformes de longitud $\dim \mathfrak{g} - 1$.

2.3 Bases homogéneas y adaptadas

La determinación de las expresiones de las familias de leyes de álgebras de Lie nilpotentes graduadas plantea el problema de encontrar las bases en las que el producto corchete venga dado de forma sencilla.

Se estudia en la siguiente subsección, la existencia de bases adaptadas y homogéneas para las álgebras de Lie filiformes graduadas de longitud máxima, aquellas graduaciones cuyo número de subespacios homogéneos coincide con la dimensión del álgebra.

2.3.1 Bases en álgebras filiformes de longitud n

- **Caso** $n_1 \geq 0$ **(ó** $n_2 \leq 0$**)**

Cuando $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie filiforme graduada de longitud máxima, donde todos los subíndices de los subespacios homogéneos de la graduación son no negativos, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_m \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{m+n-1}$, con $m \geq 0$; se tiene, que la única graduación posible es aquella cuyo primer subespacio es $\mathfrak{g}_m = \mathfrak{g}_1$.

Proposición 2.4 *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie filiforme n-dimensional, con longitud $l(\mathfrak{g}) = n$, y $m \geq 0$ un entero para el que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_m \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{m+n-1}$ es una graduación conexa. Entonces tiene que ser $m = 1$.*

Demostración. Como $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_m \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{m+n-1}$ es una graduación conexa de $\mathfrak{g}$, $\dim(\mathfrak{g}_i) = 1$, se tiene la inclusión

$$C^1\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}_{2m+1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{m+n-1}.$$

Entonces, si $m \geq 2$ tiene que ser $\dim(C^1\mathfrak{g}) \leq n-3$, que se contradice con el hecho de que la subálgebra derivada de un álgebra filiforme $\mathfrak{g}$ verifica que $\dim(C^1\mathfrak{g}) = n-2$. Si $m = 0$, al ser $\mathfrak{g}_0$ una subálgebra de $\mathfrak{g}$ y por la nilpotencia del álgebra filiforme $\mathfrak{g}$, se tiene que $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_i] = 0$; luego $\mathfrak{g}_0 \in \operatorname{cen} \mathfrak{g}$ y, análogamente, se puede ver que $\mathfrak{g}_{n-1} \in \operatorname{cen} \mathfrak{g}$, con lo que se verifica que $\dim(\operatorname{cen} \mathfrak{g}) \geq 2$, hecho que está en contradicción con la condición de ser $\mathfrak{g}$ filiforme. Por tanto, tiene que ser $m = 1$, luego el álgebra tendrá la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$. □

Cuando $\mathfrak{g}$ admite una graduación con todos los subíndices negativos, una reordenación de estos, proporciona una graduación equivalente a la obtenida en la Proposición 2.4.

Proposición 2.5 *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie filiforme n-dimensional, con longitud $l(\mathfrak{g}) = n$, y $m \leq 0$ un entero para el que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{m-n+1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_m$ es una graduación conexa. Entonces tiene que ser $m = -1$.*

Veamos que existen bases homogéneas y adaptadas para las familias de álgebras de Lie filiformes en el caso de estar graduada como $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$. Cuando los subíndices de los subespacios homogéneos de la graduación son negativos, queda perfectamente determinado por simetría. El siguiente lema nos relaciona la existencia de tales bases con la existencia de una derivación apropiada.

Lema 2.6 *Un álgebra de Lie filiforme $\mathfrak{g}$, de dimensión n, admite una graduación conexa $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ si y sólo si existe una derivación diagonalizable de $\mathfrak{g}$ cuyos autovalores son los números enteros $\{1, 2, \ldots, n\}$.*

Demostración. Dado que $\mathfrak{g}$ viene graduada como $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ y si $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ es una base homogénea de $\mathfrak{g}$, con $X_i \in \mathfrak{g}_i$, definimos

$$d(X_i) = i\,X_i \text{ para } 1 \leq i \leq n$$

y se puede comprobar que d es una derivación del álgebra $\mathfrak{g}$.

Por otra parte, la existencia de una derivación diagonalizable d en $\mathfrak{g}$, con el espectro $\{1, 2, \ldots, n\}$ requerido, permite obtener la graduación de $\mathfrak{g}$,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n,$$

donde

$$\mathfrak{g}_i = \{X \in \mathfrak{g} : d(X) = i\,X\},$$

En efecto, si $X \in \mathfrak{g}_i$, $Y \in \mathfrak{g}_j$, entonces

$$d([X,Y]) = [d(X), Y] + [X, d(Y)] = (i+j)[X,Y]$$

y por tanto $[X,Y] \in \mathfrak{g}_{i+j}$; con lo que se tiene que $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$ y la graduación de $\mathfrak{g}$ está bien definida. $\square$

Estamos en condiciones de probar la existencia de bases adaptadas y homogénea, cuando $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$.

Proposición 2.7 *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie filiforme de dimensión n que admite la graduación conexa $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ y X_1 un vector característico del álgebra. Entonces existe una base homogénea y adaptada del álgebra, $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ tal que $X_1 \in \mathfrak{g}_1$.*

Demostración. Si $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ es una base homogénea y adaptada de $\mathfrak{g}$ y X_1 es un vector característico, se tiene

$$[X_1, X_i] = X_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-1,$$
$$[X_1, X_n] = 0,$$

los vectores X_1 y X_2 generan el álgebra $\mathfrak{g}$. Supuesto $X_1 \in \mathfrak{g}_r$ y $X_2 \in \mathfrak{g}_s$, se tendrá que $X_i \in \mathfrak{g}_{(i-2)r+s}$ para $i \geq 2$. Como la graduación es conexa será $r = 1$ y, $s = 2$, con lo que se tiene que

$$X_i \in \mathfrak{g}_i, \text{ para } 1 \leq i \leq n$$

y, por tanto, el Lema 2.6 garantiza entonces la existencia de una derivación d de $\mathfrak{g}$ tal que $d(X_i) = i\,X_i$.

Como $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie filiforme, existe una base $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ tal que

$$[U_1, U_i] = U_{i+1}, \qquad 2 \leq i \leq n-1;$$
$$[U_1, U_n] = 0.$$

En aplicación del Lema 2.6, sea d la derivación de $\mathfrak{g}$, de espectro $\{1, 2, \ldots, n\}$ y tal que $d(X) = i\,X$, para $X \in \mathfrak{g}_i$.

Dado que $U_1, U_2 \notin C^1\mathfrak{g}$ y como

$$U_i \in \mathfrak{g}_i \oplus \mathfrak{g}_{i+1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n,$$

se debe tener que

$$d(U_i) = i\,U_i + \sum_{j>i} \delta_{i\,j}\,U_j, \quad 1 \leq i \leq n.$$

La existencia de una base homogénea adaptada $\{X_1, \ldots, X_n\}$, con los generadores expresados por

$$X_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,U_i, \quad X_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\,U_i,$$

se deducirá de la compatibilidad del sistema de ecuaciones en α_i y β_i, para cualquier i, al exigir

$$d(X_1) = X_1 \text{ y } d(X_2) = 2\,X_2$$

en la expresiones anteriores y utilizar las relaciones obtenidas para cada vector $d(X_i)$.

Se tiene que

$$d(X_1) = d(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d(U_i)$$

y desarrollando, se llega a

$$d(X_1) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i(iU_i + \sum_{k=i+1}^{n} \delta_{i,k} U_k)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_i$$

igualando los coeficientes de U_i, se obtiene, entonces, que

$$\alpha_1 U_1 = \alpha_1 U_1$$

$$(2\alpha_2 + \alpha_1\delta_{1,2})U_2 = \alpha_2 U_2 \to \alpha_2 = -\frac{\delta_{1,2}\alpha_1}{2-1}$$

$$(3\alpha_3 + \alpha_1\delta_{1,3} + \alpha_2\delta_{2,3})U_3 = \alpha_3 U_3 \to \alpha_3 = -\frac{\alpha_1\delta_{1,3} + \alpha_2\delta_{2,3}}{3-1}$$

$$\vdots$$

$$(i\alpha_i + (\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j\delta_{j,i}))U_i = \alpha_i U_i \to \alpha_i = -\frac{\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j\delta_{j,i}}{i-1}$$

$$\vdots$$

con lo cual, eligiendo en la primera ecuación cualquier valor $\alpha_1 \neq 0$, se puede obtener el vector X_1.

Se pretende a continuación obtener el vector X_2 y para ello se determinarán los valores β_i, exigiendo que $d(X_2) = 2X_2$

$$d(X_2) = d(\sum_{i=1}^{n} \beta_i U_i) = 2(\sum_{i=1}^{n} \beta_i U_i),$$

desarrollando se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i(iU_i + \sum_{k=i+1}^{n} \delta_{i,k}U_k) = 2(\sum_{i=1}^{n} \beta_i U_i).$$

igualando los coeficientes de U_i, se obtiene que

$$\beta_1 U_1 = 2\beta_1 U_1 \to \beta_1 = 0$$

$$(2\beta_2 + \beta_1\delta_{1,2})U_2 = 2\beta_2 U_2 \to \beta_2 \text{cualquiera}$$

$$(3\beta_3 + \beta_1\delta_{1,3}\beta_2\delta_{2,3})U_3 = 2\beta_3 U_3 \to \beta_3 = -\tfrac{\beta_1\delta_{1,3}+\beta_2\delta_{2,3}}{3-2}$$

$$\vdots$$

$$(i\beta_i + (\sum_{j=1}^{i-1} \beta_j\delta_{j,i}))U_i = 2\beta_i U_i \to \beta_i = -\frac{\sum_{j=1}^{i-1} \beta_j\delta_{j,i}}{i-2}$$

$$\vdots$$

con lo que se pueden obtener todos los valores de β_i, para $2 \leq i \leq n-1$, eligiendo $\beta_2 \neq 0$.

El resto de los vectores de la base se obtiene por recurrencia, sabiendo que

$$d(X_1, X_i) \in \mathfrak{g}_{i+1}, \quad d(X_1, X_i) = (i+1)X_{i+1},$$

y por tanto, se tiene que existe una base adaptada y homogénea cuando el álgebra admite la graduación $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$. □

Corolario 2.8 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie filiforme de dimensión n que admite la graduación conexa $\mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ y si $\{X_1, \ldots, X_n\}$ es una base homogénea y adaptada, su descomposición ha de ser*

$$\mathfrak{g} = < X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \cdots \oplus < X_n > .$$

Cuando $\mathfrak{g}$ admite una graduación del tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-n} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-1}$, un procedimiento similar al realizado en el caso anterior nos permite garantizar que existe una base del álgebra $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, homogénea y adaptada, donde X_1 es un vector característico de $\mathfrak{g}$ y se tiene $X_1 \in \mathfrak{g}_{-1}$, $X_2 \in \mathfrak{g}_{-2}$.

Corolario 2.9 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie filiforme de dimensión n que admite la graduación conexa $\mathfrak{g}_{-n} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ y si $\{X_1, \ldots, X_n\}$ es una base homogénea y adaptada, su descomposición ha de ser*

$$\mathfrak{g} = < X_n > \oplus \cdots \oplus < X_2 > \oplus < X_1 > .$$

- **Caso $n_1 < 0 < n_2$.**

Consideremos, ahora, que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie filiforme de longitud máxima, tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2}$, donde $n_1 < 0 < n_2$, es decir, aquellas álgebras cuyas graduaciones tienen subespacios homogéneos con subíndices positivos y negativos. La prueba de la existencia de bases adaptadas y homogéneas para este tipo de graduaciones se realiza con un método constructivo.

Proposición 2.10 *Sea $\mathfrak{g}$ es un álgebra filiforme de longitud máxima, cuya descomposición es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2}$ con $n_2 - n_1 = n - 1$ y $n_1 < 0 < n_2$. Entonces, existe una base adaptada y homogénea de $\mathfrak{g}$.*

Demostración. Si $\mathfrak{g}$ es álgebra filiforme se tiene que $\dim \mathcal{C}^i\mathfrak{g} = n - i - 1$, para $1 \leq i \leq n-1$. Sea $\{U_{n_1}, \ldots, U_{n_2}\}$ una base de $\mathfrak{g}$, tal que $\mathfrak{g}_i =< U_i >$. Como $\dim \mathcal{C}^1\mathfrak{g} = n-2$ y $\dim \mathcal{C}^2\mathfrak{g} = n-3$, existirán tres vectores $U_i, U_j, U_k \in \mathfrak{g}$, tales que

$$\mathfrak{g}/\mathcal{C}^1\mathfrak{g} =< U_i, U_j > \quad \text{y} \quad \mathfrak{g}/\mathcal{C}^2\mathfrak{g} =< U_i, U_j, U_k >;$$

entonces, tiene que ser $[U_i, U_j] = a_{i,j}U_k$ con $a_{i,j} \neq 0$. En efecto, en otro caso, como $U_k \in \mathcal{C}^1\mathfrak{g}$, existe una pareja de subíndices r, s tal que $[U_r, U_s] = a_{r,s}U_k$ con $a_{r,s} \neq 0$, con $s \neq i, j$ ó $r \neq i, j$, y U_k estaría generado por dos vectores donde al menos uno de ellos pertenece a $\mathcal{C}^1\mathfrak{g}$ y por tanto se tendría $U_k \in \mathcal{C}^2\mathfrak{g}$, que contradice $\mathfrak{g}/\mathcal{C}^2\mathfrak{g} =< U_i, U_j, U_k >$. Cambiando de escala, si es necesario, se puede poner $[U_i, U_j] = U_{i+j}$ con

$$\mathfrak{g}/\mathcal{C}^2\mathfrak{g} =< U_i, U_j, U_{i+j} > .$$

Supóngase, entonces, que se tiene la igualdad $[U_i, U_{si+j}] = U_{(s+1)i+j}$, $0 \leq s \leq r-2$, con $\mathfrak{g}/\mathcal{C}^r\mathfrak{g} =< U_i, U_j, U_{i+j}, \ldots, U_{(r-1)i+j} >$ y sea

$$\mathfrak{g}/\mathcal{C}^{r+1}\mathfrak{g} =< U_i, U_j, U_{i+j}, \ldots, U_{(r-1)i+j}, U_k >,$$

donde $k \in \{ri + j, (r-1)i + 2j, (t + (r-1))i + 2j, 1 \leq t \leq r-2\}$. Se va a probar a continuación que tiene que ser $U_k = U_{ri+j}$. En efecto, no puede ser $k = (t + r - 1)i + 2j$, con $1 \leq t \leq r-2$, porque la relación de Jacobi

$J(U_i, U_{(s-1)i+2j}, U_{(r-1)i+j}) = 0$ implicaría que $U_{(s+r-1)i+2j} \in \mathcal{C}^{r+1}\mathfrak{g}$. Esto nos implica que los únicos valores admisibles para k, son $k = ri+j$ ó $k = (r-1)i+2j$.

Si suponemos $k = (r-1)i+2j$, de las relaciones de Jacobi $J(U_i, U_{si+j}, U_{(r-1-s)i+j}) = 0$ para $1 \leq s \leq \left\lfloor \frac{r-2}{2} \right\rfloor$, se tiene que

$$[U_{si+j}, U_{(r-1-s)i+j}] = (-1)^s [U_j, U_{(r-1)i+j}].$$

• Si r es impar de la relación de Jacobi $J(U_i, U_{\frac{r-3}{2}i+j}, U_{\frac{r-1}{2}i+j}) = 0$, se obtiene que $[U_j, U_{(r-1)i+j}] = 0$, que contradice el hecho de ser $k = (r-1)i + 2j$. Por tanto, si r es impar se tiene que $k = ri + j$.

• Si r es par y $k = (r-1)i+2j$, se tiene que $[U_{si+j}, U_{(r-1-s)i+j}] = (-1)^s [U_j, U_{(r-1)i+j}]$, para $1 \leq s \leq \frac{r-2}{2}$, y, por tanto,

$$\mathfrak{g}/\mathcal{C}^{r+2}\mathfrak{g} =< U_i, U_k, U_{(r-1)i+2j}, U_{si+j}, \quad 0 \leq s \leq r-1 >,$$

con

$$k \in \{ri + 2j, (r-1)i + 3j, (r-1+s)i + 3j,\ 1 \leq s \leq r-1\}.$$

Si $U_k = U_{(r+s-1)i+3j}$, con $1 \leq s \leq r-1$, se tiene que $U_{(r+s-1)i+3j} = [U_{si+j}, U_{(r-1)i+2j}]$, y la relación de Jacobi $J(U_i, U_{(s-1)i+j}, U_{(r-1)i+2j}) = 0$, implica que el vector $U_{(r+s-1)i+3j} \in \mathcal{C}^{r+2}\mathfrak{g}$ y por tanto no puede ser $k = (r+s-1)i + 3j$, para $1 \leq s \leq r-1$.

Si $k = (r-1)i + 3j$, la relación de Jacobi $J(U_j, U_{i+j}), U_{(r-2)i+j}) = 0$ implica que

$$[U_j, [U_{i+j}, U_{(r-2)i+j}]] = [[U_j, U_{i+j})], U_{(r-2)i+j}] + [U_{i+j}, [U_j, U_{(r-2)i+j})].$$

Como $[U_j, [U_{i+j}, U_{(r-2)i+j}]] \neq 0$, al menos uno de los restantes productos será no nulo. Observando cualquiera de ellos se tiene que $U_{(r-1)i+3j} \in \mathcal{C}^{r+2}\mathfrak{g}$, luego no puede ser $k = (r-1)i + 3j$.

Por tanto $k = ri + 2j$, con lo que $U_k = [U_i, U_{(r-1)i+2j}]$. De la relación de Jacobi $J(U_i, U_j, U_{(r-1)i+j}) = 0$ se tiene que

$$[U_{i+j}, U_{(r-1)i+j}] = [U_i, [U_j, U_{(r-1)i+j}],$$

y de la relación de Jacobi $J(U_i, U_{i+j}, U_{(r-2)i+j}) = 0$ se tiene que

$$[U_{2i+j}, U_{(r-2)i+j}] = (-1)^1 2[U_i, [U_j, U_{(r-1)i+j})].$$

Supongamos que

$$[U_{ki+j}, U_{(r-k)i+j}] = (-1)^{k-1} k[U_i, [U_j, U_{(r-1)i+j}]$$

y obtengamos la expresión para $k+1$. A partir de la relación de Jacobi $J(U_i, U_{ki+j}, U_{(r-k-1)i+j}) =$ 0 se tiene que

$$[U_i, [U_{ki+j}, U_{(r-k-1)i+j}]] = [[U_i, U_{ki+j}], U_{(r-k-1)i+j}] + [U_{ki+j}, [U_i, U_{(r-k-1)i+j}]],$$

y sustituyendo

$$[U_{ki+j}, U_{(r-1-k)i+j}] = (-1)^k [U_j, U_{(r-1)i+j}] = (-1)^k U_{(r-1)i+2j},$$

se tiene que

$$[U_{(k+1)i+j}, U_{(r-(k+1))i+j}] = (-1)^k (k+1) [U_i, [U_j, U_{(r-1)i+j}],$$

y por tanto se verifica, la hipótesis, para $k+1$.

De la relación de Jacobi $J(U_i, U_{\frac{r-2}{2}i+j}, U_{\frac{r}{2}i+j}) = 0$ se tiene que $[U_i, [U_j, U_{(r-1)i+j}]] = 0$, y por tanto no puede ser $k = ri + 2j$.

Luego si r es par, ó si r es impar, se tiene que $\mathfrak{g}/\mathcal{C}^{r+1}\mathfrak{g} =< U_i, U_{si+j}, \quad 0 \leq i \leq r >$. Por tanto $\mathfrak{g} =< U_i, U_j, U_{i+j}, \ldots, U_{(n-2)i+j} >$. Como $n_1 < 0 < n_2$, debe ser $(n-2)i + j = 0$, ya que el centro de $\mathfrak{g}$ es $\mathfrak{g}_0$. De la conexión de la graduación se infiere que i y j son primos entre sí, luego tiene que ser $i =$

1 y $j = -n+2$ o también $i = -1$ y $j = n-2$. En ambas situaciones se obtiene la base homogénea y adaptada $\{X_0, X_1, \dots, X_{n-1}\}$. En efecto, si es $\mathfrak{g} =< U_1, U_{2-n}, U_{3-n}, \dots, U_0 >$, se pone $X_0 = U_1$ y $X_i = U_{-n+i+1}$, para $1 \leq i \leq n-1$; y si es $\mathfrak{g} =< U_{-1}, U_{n-2}, U_{n-3}, \dots, U_0 >$, se pone $X_0 = U_{-1}$ y $X_i = U_{n-1-i}$, para $1 \leq i \leq n-1$. □

Nota 2.11 El método constructivo de la Proposición 2.10 se puede aplicar también a los casos $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2}$, con $n_1 \geq 0$, ó $n_2 \leq 0$, y se puede probar que dichas graduaciones tienen una base homogénea y adaptada.

Se obtiene, a continuación, que si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2}$, es un álgebra filiforme de longitud máxima, con $n_1 < 0 < n_2$, sólo existe, en esencia, una graduación admisible, donde $\mathfrak{g}_{n_1} = \mathfrak{g}_{2-n}$ y $\mathfrak{g}_{n_2} = \mathfrak{g}_1$; la otra graduación que se obtiene es equivalente a esta, con sólo realizar una reordenación por simetría de los subíndices de los subespacios $\mathfrak{g}_i$.

Proposición 2.12 *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie filiforme de dimensión n que admite la graduación conexa $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2}$, con $n_1 < 0 < n_2$ y $n_2 - n_1 = n-1$, $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ una base homogénea y adaptada del álgebra, y X_1 un vector característico. Entonces, su descomposición ha de ser de alguno de los tipos:*

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{2-n} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1$ *con* $X_1 \in \mathfrak{g}_1$ *y* $X_2 \in \mathfrak{g}_{2-n}$.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-2}$ *con* $X_1 \in \mathfrak{g}_{-1}$ *y* $X_2 \in \mathfrak{g}_{n-2}$.

Demostración. Como $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ es una base homogénea adaptada de

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2},$$

con X_1 un vector característico, se verifica que

$$[X_1, X_i] = X_{i+1}, \qquad 2 \leq i \leq n-1,$$

$$[X_1, X_n] = 0,$$

y los vectores X_1, y X_2 generan el álgebra $\mathfrak{g}$. Poniendo $X_1 \in \mathfrak{g}_r$ y $X_2 \in \mathfrak{g}_s$, se tendrá, para $i \geq 2$, que $X_i \in \mathfrak{g}_{(i-2)r+s}$ y, por la conexión de la graduación, se implica $r = 1$ ó $r = -1$.

- Si $r = 1$ sólo puede ser $s = 2$ ó $s = n_1$,

No puede ser $s = 2$, ya que la graduación que se obtendría sería del tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_1}$, que no tiene subespacios con subíndices negativos.

Por tanto, $s = n_1$ y como $n_2 = 1$ y el álgebra es de longitud máxima, tiene que ser $n_1 = 2 - n$, con lo que la graduación será $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{2-n} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1$.

Análogamente se razonaría en el caso $r = -1$. □

Corolario 2.13 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie filiforme de dimensión n que admite la graduación $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{2-n} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1$ y si $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ es una base adaptada y homogénea, su descomposición ha de ser*

$$\mathfrak{g} = < X_2 > \oplus \cdots \oplus < X_n > \oplus < X_1 > .$$

Corolario 2.14 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie filiforme de dimensión n que admite la graduación $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-2}$ y si $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ es una base adaptada y homogénea, su descomposición ha de ser*

$$\mathfrak{g} = < X_1 > \oplus < X_n > \oplus \cdots \oplus < X_2 > .$$

Se recogen a continuación en un teorema las conclusiones de esta subsección. Las bases que se consideran se corresponden con la renumeración de índices $i' = i - 1$, con lo que se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.15 *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie filiforme de longitud máxima, $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ una base adaptada y homogénea y X_0 un vector característico. Entonces, su des-*

composición ha de ser de uno de los siguientes tipos:

$$1.- \mathfrak{g} = < X_0 > \oplus < X_1 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-1} >$$

$$2.- \mathfrak{g} = < X_{n-1} > \oplus \cdots \oplus < X_1 > \oplus < X_0 >$$

$$3.- \mathfrak{g} = < X_1 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-1} > \oplus < X_0 >$$

$$4.- \mathfrak{g} = < X_0 > \oplus < X_{n-1} > \oplus \cdots \oplus < X_1 >$$

Demostración. Su demostración es la conclusión de los Corolarios 2.8, 2.9, 2.13 y 2.14. □

En las siguientes subsecciones se realiza el estudio de la existencia de bases homogéneas y adaptadas para familias de álgebras de Lie casifiliformes graduadas de longitudes n y $n-1$, siendo n la dimensión del álgebra. En ambos casos, la demostración sigue un procedimiento similar al realizado en la Subsección 2.3.1 para las álgebras de Lie filiformes de longitud máxima.

Cuando el primer subíndice de la graduación es mayor o igual que cero, (o el último subíndice de la graduación es menor o igual que cero), la prueba se realiza vía las derivaciones. Un proceso constructivo es seguido, al igual que en el caso filiforme, para aquellas graduaciones que tienen subíndices positivos y negativos.

2.3.2 Bases en álgebras casifiliformes de longitud n

Se prueba en esta subsección que si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2}$ es un álgebra casifiliforme de longitud máxima, existe una base homogénea y adaptada del álgebra que admite tal graduación. Asimismo, se determinan las distintas graduaciones posibles.

Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *casifiliforme* si su índice de nilpotencia es $n-2$. Esto equivale a que exista número natural p, con $1 \leq p \leq n-2$, tal que

$$\begin{cases} \dim \mathcal{C}^i\mathfrak{g} = n-i-1, & 1 \leq i < p, \\ \dim \mathcal{C}^i\mathfrak{g} = n-2-i, & p \leq i \leq n-2. \end{cases}$$

En el primer caso que se considera, cuando $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie casifiliforme de longitud máxima con todos los subíndices de los subespacios homogéneos son no negativos, es decir, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_m \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{m+n-1}$ con $m \geq 0$, se tiene que el primer subespacio ha de ser $\mathfrak{g}_m = \mathfrak{g}_0$ ó $\mathfrak{g}_m = \mathfrak{g}_1$.

Proposición 2.16 *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie casifiliforme n-dimensional, con longitud $l(\mathfrak{g}) = n$, y $m \geq 0$ un entero para el que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_m \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n+m-1}$ es una graduación conexa. Entonces tiene que ser $m = 1$ ó $m = 0$.*

Demostración. En efecto, como

$$\mathcal{C}^1\mathfrak{g} \subset <\mathfrak{g}_{2m+1}, \ldots \mathfrak{g}_{m+n-1}>,$$

se tiene que $\dim \mathcal{C}^1\mathfrak{g} \leq n-m-1$. No puede ser $m \geq 3$, pues si $m \geq 3$, entonces $\dim \mathcal{C}^1\mathfrak{g} \leq n-4$ que contradice el hecho de ser $\mathfrak{g}$ un álgebra casifiliforme. Tampoco puede ser $m = 2$, ya que si m=2, es

$$\mathcal{C}^2\mathfrak{g} \subset <\mathfrak{g}_{3m+1}, \ldots \mathfrak{g}_{n+m-1}>,$$

con lo cual $\dim \mathcal{C}^2\mathfrak{g} \leq n-2m-1 \leq n-5$, que contradice la hipótesis de ser $\mathfrak{g}$ un álgebra casifiliforme. Luego ha de ser $m = 0$ ó $m = 1$, y el álgebra sólo puede admitir las graduaciones $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-1}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ $\square$

Cuando el álgebra admite una graduación con todos los subíndices no positivos, con una reordenación de estos se obtiene:

Proposición 2.17 *Sean $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie casifiliforme n-dimensional, de longitud $l(\mathfrak{g}) = n$, y $m \leq 0$, un entero para el que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{m-n+1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_m$ es una graduación conexa. Entonces tiene que ser $m = -1$ ó $m = 0$.*

Se estudia ahora la familia de álgebras de Lie casifiliformes de longitud máxima, donde los subíndices de los subespacios graduantes son no negativos. Apoyándonos en las proposiciones anteriores, el caso de subíndices no positivos queda perfectamente determinado por simetría.

El resultado del Lema 2.6 es también valido en el caso de ser $\mathfrak{g}$ un álgebra casifiliforme de longitud máxima cuya graduación es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-1}$.

Y con un tratamiento similar al caso de álgebras filiformes de longitud máxima se prueban las Proposiciones 2.18 y 2.20.

Proposición 2.18 *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie casifiliforme de dimensión n que admite la graduación conexa $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ y X_1 un vector característico de $\mathfrak{g}$. Entonces existe una base del álgebra, $\{X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, Y\}$, homogénea y adaptada tal que $X_1 \in \mathfrak{g}_1$ y el vector Y está en $\mathfrak{g}_2$ o en $\mathfrak{g}_n$.*

Corolario 2.19 *Si $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie casifiliforme de dimensión n que admite la graduación conexa $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ y si $\{X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, Y\}$ es una base adaptada y homogénea, su descomposición ha de ser de los tipos siguientes:*

$$\mathfrak{g} = < X_1 > \oplus < Y > \oplus < X_2 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-1} >$$

$$\mathfrak{g} = < X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-1} > \oplus < Y >$$

Proposición 2.20 *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie casifiliforme de dimensión n que admite la graduación conexa $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-1}$ y X_1 un vector característico* *de $\mathfrak{g}$. Entonces existe una base del álgebra, $\{X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, Y\}$, homogénea y adaptada tal que el vector caracterítico $X_1 \in \mathfrak{g}_1$ y el vector Y está en $\mathfrak{g}_0$.*

Corolario 2.21 *Si $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie casifiliforme de dimensión n que admite la graduación conexa $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-1}$ y si $\{X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, Y\}$ es una base adaptada y homogénea, su descomposición ha de ser*

$$\mathfrak{g} =< Y > \oplus < X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-1} >$$

Cuando, $\mathfrak{g}$ admite una graduación $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{m-n+1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_m$, con $m \leq 0$, un procedimiento similar al realizado en el caso anterior, nos permite garantizar que existe una base del álgebra $\{X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, Y\}$, homogénea y adaptada, donde X_1 es un vector característico de $\mathfrak{g}$, y $X_1 \in \mathfrak{g}_{-1}$, obteniendose las siguientes graduaciones:

Corolario 2.22 *Si $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie casifiliforme de dimensión n que admite la graduación conexa $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-n} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ y si $\{X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, Y\}$ es una base adaptada y homogénea, su descomposición ha de ser de los tipos siguientes:*

$$\mathfrak{g} =< X_{n-1} > \oplus \cdots \oplus < X_2 > \oplus < Y > \oplus < X_1 >$$

$$\mathfrak{g} =< Y > \oplus < X_{n-1} > \oplus \cdots \oplus < X_2 > \oplus < X_1 >$$

Corolario 2.23 *Si $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie casifiliforme de dimensión n que admite la graduación conexa $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{1-n} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_0$ y si $\{X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, Y\}$ es una base adaptada y homogénea, su descomposición ha de ser*

$$\mathfrak{g} =< X_{n-1} > \oplus \cdots \oplus < X_2 > \oplus < X_1 > \oplus < Y >$$

Con un proceso constructivo similar al desarrollado en la Proposición 2.10, se puede probar que existen bases adaptadas y homogéneas para las familias de álgebras de Lie casifiliformes de longitud máxima, donde los subíndices de los subespacios graduantes tengan distinto signo.

Proposición 2.24 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra casifiliforme de longitud máxima, cuya descomposición es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2}$ con $n_2 - n_1 = n - 1$ y $n_1 < 0 < n_2$. Entonces, existe una base adaptada y homogénea de $\mathfrak{g}$.*

Las graduaciones que se obtienen cuando $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2}$ con $n_2 - n_1 = n - 1$ y $n_1 < 0 < n_2$, se recogen a continuación.

Proposición 2.25 *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie casifiliforme de dimensión n que admite la graduación conexa $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2}$, con $n_1 < 0 < n_2$ y $n_2 - n_1 = n-1$, $\{X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, Y\}$ una base homogénea y adaptada del álgebra y X_1 un vector característico. Entonces tiene que ser:*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{2-n} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1, \ con \begin{cases} Y \in \mathfrak{g}_{2-n}, \\ X_2 \in \mathfrak{g}_{3-n}, \\ X_1 \in \mathfrak{g}_1. \end{cases}$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{2-n} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1, \ con \begin{cases} X_2 \in \mathfrak{g}_{2-n}, \\ X_1 \in \mathfrak{g}_1, \\ Y \in \mathfrak{g}_0. \end{cases}$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{3-n} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_2, \ con \begin{cases} X_2 \in \mathfrak{g}_{3-n}, \\ X_1 \in \mathfrak{g}_1, \\ Y \in \mathfrak{g}_2. \end{cases}$$

Graduaciones equivalentes a estas se pueden obtener con el cambio de subíndices $k' = -k$.

Demostración. Como $\mathfrak{g}$ es casifiliforme y $\{X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, Y\}$ es una base adaptada, los vectores que generan dicha álgebra son $\{X_1, X_2, Y\}$, así, supongamos que $X_1 \in \mathfrak{g}_r$, $X_2 \in \mathfrak{g}_s$, $Y \in \mathfrak{g}_k$, ahora $X_i \in \mathfrak{g}_{(i-2)r+s}$.

Evidentemente si $r \neq \pm 1$, la graduación no sería conexa.

- Sea $r = 1$

  * Si $s > 0$, todos los subíndices serían no negativos.

  * Si $s = 0$, la longitud de $\mathfrak{g}$ no sería n.

  * Si $s < 0$, el conjunto de subíndices será:

  $\{s, s+1, s+2, \ldots, s+n-3, k, 1\}$, y no se pierde la conexión si

  ◇ $k = 0$ y $s + n - 3 = -1$, con lo que $s = 2 - n$, de donde

$$X_1 \in \mathfrak{g}_1, \quad Y \in \mathfrak{g}_0, \quad X_2 \in \mathfrak{g}_{2-n}$$

  ◇ $k = 2$ y $s + n - 3 = 0$, con lo que

$$X_1 \in \mathfrak{g}_1, \quad Y \in \mathfrak{g}_2, \quad X_2 \in \mathfrak{g}_{3-n}$$

  ◇ $k = n_1$ y $s + n - 3 = 0$, con lo que

$$X_1 \in \mathfrak{g}_1, \quad Y \in \mathfrak{g}_{2-n}, \quad X_2 \in \mathfrak{g}_{3-n}$$

Análogamente se puede razonar para $r = -1$. □

Corolario 2.26 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie casifiliforme de dimensión n que admite la graduación conexa $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2}$, con $n_1 < 0 < n_2$, y si $\{X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, Y\}$ es una base adaptada y homogénea, su descomposición ha de ser de uno de los tipos siguientes:*

$$\mathfrak{g} = <Y> \oplus <X_2> \oplus \cdots \oplus <X_{n-1}> \oplus <X_1>$$

$$\mathfrak{g} = <X_2> \oplus \cdots \oplus <X_{n-1}> \oplus <Y> \oplus <X_1>$$

$$\mathfrak{g} = <X_2> \oplus \cdots \oplus <X_{n-1}> \oplus <X_1> \oplus <Y>$$

Se recogen en el siguiente teorema las graduaciones posibles para las familias de algebras de Lie casifiliformes de longitud máxima. El cambio de subíndices $i' = i - 1$ en los vectores de la base homogénea y adaptada permite expresar esta como $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y\}$.

Teorema 2.27 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie casifiliforme de longitud máxima, y sea $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y\}$ una base adaptada y homogénea, y X_0 un vector característico. Entonces su descomposición ha de ser uno de los tipos siguientes:*

$$\mathfrak{g} =< X_0 > \oplus < Y > \oplus < X_1 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} >,$$

$$\mathfrak{g} =< X_0 > \oplus < X_1 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} > \oplus < Y >,$$

$$\mathfrak{g} =< Y > \oplus < X_0 > \oplus < X_1 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} >,$$

$$\mathfrak{g} =< Y > \oplus < X_1 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} > \oplus < X_0 >,$$

$$\mathfrak{g} =< X_1 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} > \oplus < Y > \oplus < X_0 >,$$

$$\mathfrak{g} =< X_1 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} > \oplus < X_0 > \oplus < Y > .$$

Graduaciones equivalentes a estas se pueden obtener, con el cambio de subíndices $k' = -k$, en los subespacios homogéneos de la graduación.

Demostración. La demostración es la conclusión de los Corolarios 2.19, 2.21, 2.22, 2.23 y 2.26. □

Se aborda en la siguiente subsección el estudio de la existencia de bases homogéneas y adaptadas para familias de álgebras de Lie casifiliformes de longitud $\dim \mathfrak{g} - 1$. La demostración, al igual que en el caso anterior, sigue un procedimiento similar al realizado en la Subsección 2.3.1 para las álgebras de Lie filiformes de longitud máxima.

2.3.3 Bases en álgebras casifiliformes de longitud $n-1$

También ahora en el primer caso que se considera, cuando $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie casifiliforme de longitud $n-1$ con todos los subíndices de los subespacios homogéneos no negativos, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_m \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{m+n-2}$ con $m \geq 0$, se tiene que el primer subespacio ha de ser $\mathfrak{g}_m = \mathfrak{g}_0$ ó $\mathfrak{g}_m = \mathfrak{g}_1$.

Proposición 2.28 *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie casifiliforme n-dimensional, con longitud $l(\mathfrak{g}) = n-1$, y $m \geq 0$, un entero para el que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_m \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n+m-2}$ es una graduación conexa. Entonces tiene que ser $m = 1$ ó $m = 0$.*

Demostración. La prueba se realizará estudiando los distintos valores que puede tomar m.

- Si $m > 2$

Si $\dim \mathfrak{g}_m = 1$, entonces

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset < \mathfrak{g}_{2m+1}, \ldots \mathfrak{g}_{m+n-2} >,$$

luego $\dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \leq n-(m+1) < n-3$, que contradice el hecho de ser $\mathfrak{g}$ es álgebra de Lie casifiliforme , pues se tiene que verificar que $\dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{n-2, n-3\}$.

Si $\dim \mathfrak{g}_m = 2$, entonces

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset < \mathfrak{g}_{2m}, \ldots \mathfrak{g}_{m+n-2} >,$$

luego $\dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \leq n-(m+1) < n-3$ y razonando de manera análoga al supuesto anterior llegamos a una contradicción. Por tanto, no puede ser $m > 2$.

- Si $m = 2$

$\mathcal{C}^1\mathfrak{g} \subset < \mathfrak{g}_5, \ldots \mathfrak{g}_n >$, con lo cual $\dim \mathcal{C}^1\mathfrak{g} = n-3$ y $\mathcal{C}^2\mathfrak{g} \subset < \mathfrak{g}_6, \mathfrak{g}_7, \ldots \mathfrak{g}_n >$, con lo cual $\dim \mathcal{C}^2\mathfrak{g} = n-5$, que contradice la hipótesis de ser $\mathfrak{g}$ un álgebra casifiliforme, luego no puede ser $m = 2$.

- Si $m = 0$, el álgebra vendrá graduada por

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{(n-2)},$$

y no puede ser $\dim \mathfrak{g}_0 = 2$. Si $\dim \mathfrak{g}_0 = 2$, se verifica que $\dim \mathcal{C}^1\mathfrak{g} \leq n-4$ y el álgebra no sería casifiliforme. En efecto, si $\dim \mathfrak{g}_0 = 2$, se tiene que $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_i] = 0$, para cualquier i, pues si existe i, tal que $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_i] \neq 0$, debe haber $X \in \mathfrak{g}_0$ e $Y \in \mathfrak{g}_i$ de manera que $[X, Y] = \alpha Y$ con $\alpha \neq 0$, y esto no puede ocurrir por la nilpotencia de $\mathfrak{g}$, y por tanto $\dim \mathcal{C}^1\mathfrak{g} \leq n-4$, y el álgebra no sería casifiliforme.

Así, las graduaciones posibles son:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-2}, \quad \text{con} \quad \dim \mathfrak{g}_0 = 1$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-1}.$$

□

Un resultado equivalente se enuncia cuando los subíndices de los subespacios homogéneos son todos negativos ó ceros.

Proposición 2.29 *Sean $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie casifiliforme n-dimensional, con longitud $l(\mathfrak{g}) = n-1$, y un entero $m \leq 0$, para el que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{m-n+2} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_m$ es una graduación conexa. Entonces tiene que ser $m = -1$ ó $m = 0$.*

El Lema 2.6, también es aplicable a las álgebras de Lie casifiliformes de longitud $n-1$, donde uno de los autovalores es de multiplicidad dos. Y con un procedimiento similar, al caso filiforme se puede probar la existencia de bases adaptadas y homogéneas para estas familias de álgebras, si todos los subíndices de los subespacios de la graduación son no negativos.

Proposición 2.30 *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie casifiliforme de dimensión n que admite la graduación conexa $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ y X_1 un vector característico del* *álgebra. Entonces existe una base del álgebra, $\{X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, Y\}$, homogénea y adaptada, tal que $X_1 \in \mathfrak{g}_1$ y el vector Y puede estar en cualquier $\mathfrak{g}_i$.*

La demostración de este resultado es identica a la realizada para el caso filiforme.

Corolario 2.31 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie casifiliforme de dimensión n que admite la graduación conexa $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-1}$ y si $\{X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, Y\}$ es una base adaptada y homogénea, su descomposición ha de ser de uno de los tipos siguientes:*

$$\mathfrak{g} = < X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \cdots \oplus < X_i, Y > \oplus \cdots \oplus < X_{n-1} >, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Corolario 2.32 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie casifiliforme de dimensión n que admite la graduación conexa $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-2}$ y si $\{X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, Y\}$ es una base adaptada y homogénea, su descomposición ha de ser*

$$\mathfrak{g} = < Y > \oplus < X_1, X_2 > \oplus < X_3 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-1} > .$$

Resultados y descomposiciones análogas se pueden considerar cuando los subíndices de los subespacios graduantes son no positivos.

Un proceso constructivo, similar al desarrollado para las álgebras de Lie filiformes de longitud máxima realizado en la Proposición 2.10, nos garantiza la existencia de bases adaptadas y homogéneas para las álgebras de Lie casifiliformes de longitud $n-1$, donde los subíndices de los subespacios graduantes son positivos y negativos.

Proposición 2.33 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de longitud $n-1$, cuya descomposición es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2}$ con $n_2 - n_1 = n-2$ y $n_1 < 0 < n_2$, entonces, existe una base adaptada y homogénea de $\mathfrak{g}$.*

Las graduaciones que se obtienen cuando $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2}$ con $n_2 - n_1 = n - 2$ y $n_1 < 0 < n_2$, son recogidas a continuación.

Proposición 2.34 *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie casifiliforme n-dimensional, de longitud $n-1$, graduada como $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2}$, con $n_1 < 0 < n_2$ y $n_2 - n_1 = n-2$ y X_1 un vector característico, con una base adaptada $\{X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, Y\}$ del álgebra. Entonces tiene que ser:*

$$X_1 \in \mathfrak{g}_1, X_2 \in \mathfrak{g}_{n_1}, \text{ y } \exists p \in \mathbf{Z},\ n_1 \leq p \leq n_2, \text{ con } Y \in \mathfrak{g}_p, \text{ y } \dim \mathfrak{g}_p = 2$$

$$X_1 \in \mathfrak{g}_1, X_2 \in \mathfrak{g}_{n_1}, \text{ y } Y \in \mathfrak{g}_{n_2}, \text{ y } \dim \mathfrak{g}_1 = 2$$

$$X_1 \in \mathfrak{g}_1, Y \in \mathfrak{g}_{n_1}, \text{ y } X_2 \in \mathfrak{g}_{n_1+1}, \text{ con } \dim \mathfrak{g}_1 = 2$$

Demostración.

Por ser $\mathfrak{g}$ casifiliforme los vectores que determinan la familia son $\{X_1, X_2, Y\}$. Suponiendo que $X_1 \in \mathfrak{g}_r$, $X_2 \in \mathfrak{g}_s$ e $Y \in \mathfrak{g}_k$, por ser una base homogénea y adaptada, se tiene que $X_i \in \mathfrak{g}_{(i-2)r+s}$,con lo que para que la graduación sea conexa se tiene $r = \pm 1$. Sea $r = 1$; análogamente se realiza si $r = -1$.

• Si $s > 0$, todos los subíndices serían no negativos, en contra de ser un álgebra graduada con subíndices negativos.

•Si $s = 0$, el conjunto de índices será $\{k, 0, 1, 2, \ldots, n-3\}$, con lo que $k = -1$, y la graduación será

$$< Y > \oplus < X_2 > \oplus < X_1, X_3 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-1} >,$$

luego $n_1 = -1$, y $n_2 = n - 3$.

• Si $s < 0$, se tiene que el conjunto de subíndices será $\{k, s, s+1, s+2, \ldots, s+n-3, 1\}$, como el cardinal debe ser $n-1$, y aparecen n valores algunos de ellos se repite.

$*$ Si $s+n-3<1$, por la conexión de la graduación debe ser $s+n-3=0$ luego $s=n-3$, y el valor de k, es un número $3-n\leq k\leq 1$, la graduación será

$$<X_2>\oplus<X_3>\oplus\cdots\oplus<X_p,Y>\oplus\cdots\oplus<X_{n-1}>\oplus<X_1>,$$

$*$ Si $s+n-3=1$, se tiene $s=4-n$, con lo que los posibles valores para k son

$\diamond$ $k=2$ y la graduación es

$$<X_2>\oplus<X_3>\oplus\cdots\oplus<X_{n-1},X_1>\oplus<Y>,$$

$\diamond$ $k=3-n$

$$<Y>\oplus<X_2>\oplus<X_3>\oplus\cdots\oplus<X_{n-1},X_1>,$$

$*$ Si $s+n-3>1$, debe existir un valor p, de manera que $s+p-2=1$, con $1\leq p\leq n-1$ y $s=3-p$, lo que los posibles valores para k son

$\diamond$ $k=2-p$ y la graduación es

$$<Y>\oplus<X_2>\oplus\cdots\oplus<X_{p-1}>\oplus<X_1,X_p>\oplus\cdots\oplus<X_{n-1}>,$$

$\diamond$ $k=n-p+1$ y la graduación es

$$<X_2>\oplus<X_3>\oplus\cdots\oplus<X_{p-1}>\oplus<X_1,X_p>\oplus\cdots\oplus<X_{n-1}>\oplus<Y>.$$

$\square$

Se recogen en el siguiente teorema las graduaciones posibles para las familias de álgebras de Lie casifiliformes de longitud $n-1$. De nuevo, el cambio de subíndices en los vectores de la base homogénea y adaptada $i'=i-1$, permite expresar ésta como $\{X_0,X_1,\ldots,X_{n-2},Y\}$.

Teorema 2.35 *Sean* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie casifiliforme de dimensión* n*, que admite la graduación conexa* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2}$*, con* $n_2 - n_1 = n-2$*, y* $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y\}$ *una base homogénea y adaptada. Entonces su descomposición ha de ser de uno de los siguientes tipos:*

1. $-$ $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{3-p} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-p+1}$, *con* $2 \leq p \leq n-1$, *donde*

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_i = < X_{p-2+i} >, & 3-p \leq i \leq 0, \\ \mathfrak{g}_1 = < X_0, X_{p-1} >, & \\ \mathfrak{g}_i = < X_{p-2+i} >, & 2 \leq i \leq n-p, \\ \mathfrak{g}_{n-p+1} = < Y > . & \end{cases}$$

2. $-$ $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{2-p} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-p}$, *con* $2 \leq p \leq n-1$, *donde*

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_{2-p} = < Y >, & \\ \mathfrak{g}_i = < X_{p-2+i} >, & 3-p \leq i \leq 0, \\ \mathfrak{g}_1 = < X_0, X_{p-1} >, & \\ \mathfrak{g}_i = < X_{p-2+i} >, & 2 \leq i \leq n-p. \end{cases}$$

3. $-$ $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-1}$, *y existe* p, *donde*

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_i = < X_{i-1} >, & 1 \leq i \leq p-1, \\ \mathfrak{g}_p = < X_{p-1}, Y >, & \\ \mathfrak{g}_i = < X_{i-1} >, & p+1 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

4. $-$ $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{3-n} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1$, *donde*

si $3-n \leq p \leq 0$

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_i = < X_{i+n-2} >, & 3-n \leq i \leq p-1, \\ \mathfrak{g}_p = < X_{p+n-2}, Y >, & \\ \mathfrak{g}_i = < X_{i+n-2} >, & p+1 \leq i \leq 0, \\ \mathfrak{g}_1 = < X_0 > . & \end{cases}$$

y si $p = 1$

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_i =< X_{i+n-2} >, & 3-n \leq i \leq 0, \\ \mathfrak{g}_1 =< X_0, Y > . \end{cases}$$

(Además aparecerán como en los dos casos anteriores, graduaciones equivalentes a estas con sólo realizar el cambio en el índice de los subespacios graduantes $i' = -i$).

Demostración. Su prueba es la conclusión de los Corolarios 2.31 y 2.32, y de la Proposición 2.34. □

Capítulo 3

Álgebras de Lie filiformes graduadas

Se determinan las familias de leyes de álgebras de Lie filiformes de longitud máxima y dimensión finita.

La cuestión de la existencia y determinación de bases adaptadas y homogéneas para estas familias de álgebras ha sido resuelto en el capítulo anterior, con lo que está garantizada la existencia de tales bases para estas álgebras de Lie en las graduaciones que se consideran.

3.1 Introducción

En el estudio de las álgebras de Lie nilpotentes graduadas casifiliformes con sucesión característica $(n-2,1,1)$, Gómez y Jiménez-Merchán[24] obtienen que en una base adaptada y homogénea existen otras familias de álgebras no graduadas naturalmente con igual número de subespacios graduantes y las determinan. El número de subespacios graduantes no nulos coincide, en este caso, con el índice de nilpotencia.

De forma natural, la consideración de bases adaptadas conduce a álgebras nilpotentes con graduaciones distintas de la natural.

En algunos problemas sobre álgebras de Lie nilpotentes (obtención de derivaciones, descripción de componentes, etc...), resulta evidente que la graduación de un álgebra es más útil cuanto más baja es la dimensión de los subespacios graduantes que se considera, aunque la graduación no sea la asociada a la sucesión central descendente.

Cabezas y Gómez[12] estudian un tipo de álgebras de Lie nilpotentes, de índice de nilpotencia $n-p$, en las que la graduación natural informa muy poco. Prueban que para $p=3$ admiten una graduación no natural, con $n-1$ subespacios graduantes, que les facilita la determinación del primer espacio de cohomología y la dimensión de las órbitas de estas álgebras.

Goze y Khakimdjanov[29] subrayan el importante papel de las álgebras de Lie filiformes para las que el producto corchete viene dado de una forma determinada. Describen dos componentes irreducibles de la variedad de leyes de álgebras de Lie nilpotentes caracterizadas por contener, respectivamente, las álgebras R_n y W_n que verifican la condición anterior.

Todo lo anterior justifica el estudio de la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de longitud máxima, de entre las que comparten un mismo índice de nilpotencia. Se realiza, en este capítulo, la clasificación de las álgebras de Lie filiformes de longitud máxima. Las graduaciones admisibles para estas familias de álgebras son, salvo equivalencias

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{2-n} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1$

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$

Se comienza, con el estudio de las álgebras filiformes que admiten una graduación del tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{2-n} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1$, aquella graduación que tiene subespacios graduantes de índices tanto positivos como negativos. Se demuestra que la única álgebra que admite tal descomposición es L_n.

El estudio de las álgebras de Lie filiformes del tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ es tratada en la siguiente sección. Estas familias de álgebras de Lie filiformes admiten una expresión general cuando la dimensión es mayor ó igual a 12.

Debido al elevado número de relaciones de Jacobi que aparecen ya en estas dimensiones, la realización de los cálculos de manera manual implica, de forma natural, cometer posibles errores. Ello motiva la utilización de soporte informático, en nuestro caso "Mathematica".

El resultado que se demuestra es que sólo existen 4 ó 5 álgebras para dimensión n dada, dependiendo de la paridad de n (a partir de una dimensión determinada). Para cualquier dimensión son álgebras de Lie filiformes de longitud n, no isomorfas, aparte de la mencionada L_n, las álgebras R_n, W_n, K_n y, además, si la dimensión del álgebra es impar el álgebra Q'_n.

Finalmente, se recogen las álgebras de este tipo en las dimensiones concretas no consideradas en la sección anterior, esto es, las menores que 12.

3.2 Álgebras de Lie filiformes graduadas de longitud máxima

Se estudian en esta Sección las álgebras de Lie filiforme de dimensión finita y longitud máxima. Se consideran distintos tipos de graduación y en cada caso se obtienen las álgebras que admiten la descomposición correspondiente.

Las graduaciones admisibles fueron obtenidas en el Capítulo 2, teniendo las álgebras que resultan la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2}$, con $n_2 - n_1 = n - 1$. Si $\{X_0, X_1, \ldots X_{n-1}\}$ es una base adaptada y homogénea, se tienen los siguientes casos:

- 1.-$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{2-n} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1$, con

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_i = < X_{i+n-1} >, & 2 - n \leq i \leq 0, \\ \mathfrak{g}_1 = < X_0 > . \end{cases}$$

- 2.-$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$, con

$$\left\{ \mathfrak{g}_i = < X_{i-1} >, \quad 1 \leq i \leq n. \right.$$

No es necesario considerar las graduaciones que pueden ser obtenidas con el cambio de subíndices en la graduación de $i' = -i$, en los subespacios homogéneos, ya que las álgebras que se obtiene resultan isomorfas con la graduación correspondiente. La referencia al menor subíndice de los subespacios de la graduación motiva la siguiente definición.

Definicion 3.1 *Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2}$, con $n_2 - n_1 = n - 1$ es un álgebra n-dimensional filiforme de longitud n, se dirá que $\mathfrak{g}$ es un álgebra del tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,n_1)}$.*

En el primero de los casos que se considera, las álgebras filiforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,2-n)}$, sólo L_n admite tal descomposición.

3.3 Álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,2-n)}$

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra filiforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,2-n)}$ entonces admite la descomposición $\mathfrak{g} =< X_1 > \oplus < X_2 > \cdots < X_{n-1} > \oplus < X_0 >$, siendo $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ una base adaptada y homogénea del álgebra. En la siguiente proposición se prueba que sólo L_n admite tal graduación.

Proposición 3.2 *Si $\mathfrak{g}$ un álgebra filiforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,2-n)}$, se tiene que $\mathfrak{g} = L_n$.*

Demostración. Por ser $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ una base adaptada y homogénea se tiene que $\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [X_0, X_{n-1}] = 0. \end{cases}$

Todos los demás productos han de ser nulos. En efecto, por ser $\mathfrak{g}$ un álgebra graduada se tiene que

$$[X_i, X_j] \in [\mathfrak{g}_{-(n-1-i)}, \mathfrak{g}_{-(n-1-j)}] \subset \mathfrak{g}_{-(n-1-(i+j-n+1))} =< X_{i+j-n+1} >,$$

con $i + j - n + 1 \geq 1$, entonces $i + j \geq n$, y son los únicos productos que cabe considerar. Además, de la condición de la graduación considerada, se tiene que

$$\mathfrak{g}_{-(n-1-(i+j-n+1))} =< X_{i+j-n+1} >, \quad \text{para } 1 \leq i \leq j \leq n-2,$$

luego $[X_i, X_j] = a_{i,j} X_{i+j-n+1}$, con $i + j \geq n$ y $1 \leq i < j \leq n-2$.

Observando el subíndice del vector $X_{i+j-n+1}$, se tiene que

$$i + j - n + 1 \leq i + n - 2 - n + 1 \leq i - 1 < i.$$

Como $i < j$, se tiene también que $i + j - n + 1 < j$, de donde se deduce que $X_{i+j-n+1}$ es de menor subíndice que cualquiera de los dos vectores que lo generan. Se tiene entonces que no puede ser $a_{i,j}$ no nulo para ningún par (i, j). En efecto, si $a_{i,j} \neq 0$ para algún par (i,j), se tiene que si $i+j-n+1=1$, entonces $\mathcal{C}^1\mathfrak{g} =< X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{n-1} >$ y $\dim \mathcal{C}^1\mathfrak{g} = n-1$; por otra parte, si $i+j-n+1 = k \neq 1$, debería ser

$$\mathcal{C}^k\mathfrak{g} =< X_{k+1}, \ldots, X_{n-1}, X_{i+j-n+1} >=< X_k, \ldots, X_{n-1} >= \mathcal{C}^{k-1}\mathfrak{g}$$

y el álgebra no sería nilpotente. Luego la única álgebra filiforme que admite este tipo de graduación es L_n, que tiene de ley

$$\left\{ [X_0, X_i] = X_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-2. \right. \qquad \square$$

A continuación se estudian las familias de álgebras filiformes del tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1)}$, donde dependiendo de la paridad de n, existen 4 ó 5 álgebras que admiten esta graduación.

3.4 Álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1)}$

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra filiforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1)}$, entonces admite la descomposición $\mathfrak{g} =< X_1 > \oplus < X_2 > \cdots < X_{n-1} > \oplus < X_0 >$, siendo $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ una base adaptada y homogénea del álgebra.

Se recoge en la siguiente proposición la estructura de estas familias de álgebras filiformes.

Proposición 3.3 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra filiforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1)}$, su estructura en una base adaptada y homogénea, $\{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$, viene dada por*

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j} X_{i+j+1}, & 1 \leq i < j \leq n-2-i, \end{cases}$$

donde las constantes de estructura $a_{i,j}$ satisfacen las correspondientes relaciones de Jacobi.

Las álgebras filiformes de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1)}$, son L_n, R_n, W_n, K_n y Q_n' (donde ésta última aparece sólo si n es impar), y que aparecerán en las siguientes subsecciones, donde R_n y W_n son las álgebras definidas en una base homogénea y adaptada $\{X_0, X_1, \dots, X_{n-1}\}$, por

$$R_n = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [X_1, X_j] = X_{2+j}, & 2 \leq j \leq n-3. \end{cases}$$

$$W_n = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [X_i, X_j] = \frac{6\,(i-1)!\,(j-1)!\,(j-i)}{(i+j)!} X_{i+j+1}, & 1 \leq i < j \leq n-2-i. \end{cases}$$

Definicion 3.4 Se denotan por K_n y Q_n' las álgebras definidas en una base homogénea y adaptada $\{X_0, X_1, \dots, X_{n-1}\}$, por

Si $n \geq 8$, K_n es el álgebra

$$K_n = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ \left[X_i, X_{2\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor -1-i}\right] = (-1)^{i-1} X_{2\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor}, & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor, \\ \left[X_i, X_{2\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor -i}\right] = (-1)^{i-1} \left(\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor - i\right) X_{2\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor +1}, & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^i \frac{(i-1)(n-3-i)}{2} \alpha X_{n-1}, & 2 \leq i \leq \frac{n-3}{2}, \end{cases}$$

donde $\alpha = 0$, si n par, y $\alpha = 1$, si n es impar.

Si $n \geq 7$ y n es impar, Q_n', es el álgebra

$$Q_n' = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1} X_{n-1}, & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}. \end{cases}$$

Nota 3.5 Es claro, que las álgebras consideradas son filiformes de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1)}$, y, particularizando en cada caso las constantes de estructura, se comprueba directamente que se verifican las relaciones de Jacobi en cada una de la álgebras antes mencionadas.

Si $n \geq 12$, las álgebras L_n, R_n, Q'_n, K_n y W_n son no isomorfas pues siempre, como queda reflejado en la siguiente tabla, se puede encontrar un invariante que las distinga dos a dos.

$\mathfrak{g}$	$\dim[\mathcal{C}^1\mathfrak{g}, \mathcal{C}^1\mathfrak{g}]$	$\dim \operatorname{cen} \mathcal{C}^1\mathfrak{g}$
L_n	0	$n-1$
R_n	0	$n-2$
K_n	2 si n es par ó 3 si n es impar	–
W_n	n-6	–
Q'_n	1 si n es impar	–

Se obtienen, en la siguiente proposición, las álgebras filiforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1)}$, donde la expresión general de dichas álgebras es obtenida a partir de $\dim \mathfrak{g} = 12$, existiendo 4 ó 5 álgebras dependiendo de la paridad de la dimensión.

Proposición 3.6 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra filiforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1)}$, con $n \geq 12$, se tiene que el álgebra es $\mathfrak{g} = L_n$, $\mathfrak{g} = R_n$, $\mathfrak{g} = K_n$ ó $\mathfrak{g} = W_n$; además, si n es impar, también puede ser $\mathfrak{g} = Q'_n$.*

Demostración. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1)}$, estará graduada como $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$, con $\mathfrak{g}_i =< X_{i-1} >$, $1 \leq i \leq n$, siendo $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ una base adaptada y homogénea. La ley de $\mathfrak{g}$ se expresará como

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j} X_{i+j+1}, & 1 \leq i < j \leq n-2-i. \end{cases}$$

donde las constantes de estructura $a_{i,j}$ deben satisfacer las igualdades que se obtienen de las relaciones de Jacobi $J(X_i, X_j, X_k) = 0$, para $1 \leq i < j < k \leq n-3-i-j$. Para $n = 12$ se obtiene que el álgebra es $\mathfrak{g} = L_{12}$, $\mathfrak{g} = R_{12}$, $\mathfrak{g} = K_{12}$ ó $\mathfrak{g} = W_{12}$.

Asimismo, si $n = 13$, las álgebras que resultan son: $\mathfrak{g} = L_{13}$, $\mathfrak{g} = R_{13}$, $\mathfrak{g} = K_{13}$, $\mathfrak{g} = W_{13}$ ó $\mathfrak{g} = Q'_{13}$.

Determinadas las álgebras filiforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(12,1)}$ y $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(13,1)}$, se obtiene la expresión general de dichas álgebras, en cualquier dimensión, aplicando la hipótesis de inducción sobre la dimensión de las familias de álgebras, distinguiendo según la paridad de n.

Supongamos cierta la proposición para $\dim \mathfrak{g} = n$.

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra filiforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n+1,1)}$, admite la descomposición

$$\mathfrak{g} = < X_0 > \oplus < X_1 > \oplus \cdots \oplus < X_n >;$$

como X_n es un elemento central, entonces el álgebra $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/ < X_n >$, es un álgebra filiforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1)}$ y, por tanto, distinguiendo la paridad de n, se tiene que:

- Si n es par, $\mathfrak{g}'$ puede ser $\mathfrak{g}' = L_n$, $\mathfrak{g}' = R_n$, $\mathfrak{g}' = K_n$ ó $\mathfrak{g}' = W_n$.

- Si $\mathfrak{g}' = L_n$, la ley de $\mathfrak{g}$ viene dada por

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [X_i, X_{n-i-1}] = a_i X_n, & 1 \leq i \leq \frac{n-2}{2}. \end{cases}$$

De las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{n-2-i}) = 0$, para $1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}$, se tiene que

$$[X_0, [X_i, X_{n-2-i}]] = [[X_0, X_i], X_{n-2-i}] + [X_i, [X_0, X_{n-2-i}]],$$

y por tanto, $0 = a_{i+1} + a_i$, para $1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}$, de donde $a_{i+1} = -a_i$ para $1 \leq i \leq \frac{n-2}{2}$, luego $a_i = (-1)^{i-1} a_1$, para $1 \leq i \leq \frac{n-2}{2}$.

Si $a_1 = 0$, el álgebra es $\mathfrak{g} = L_{n+1}$.

Si $a_1 \neq 0$, el cambio de bases

$$\begin{cases} X_0' = X_0, \\ X_i' = \frac{1}{a_1} X_i, \quad 1 \le i \le n, \end{cases}$$

permite suponer $a_1 = 1$, y el álgebra es $\mathfrak{g} = Q_n'$.

- Si $\mathfrak{g}' = R_n$, la ley de $\mathfrak{g}$ viene dada por

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le n-1, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \le i \le n-2, \\ [X_i, X_{n-i-1}] = a_i X_n, & 1 \le i \le \frac{n-2}{2}. \end{cases}$$

De las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{n-2-i}) = 0$, para $1 \le i \le \frac{n-4}{2}$, se tiene que

$$\begin{cases} 0 = a_{i+1} + a_i, & \text{si } 2 \le i \le \frac{n-4}{2}, \\ 1 = a_2 + a_1, \end{cases}$$

y por tanto, $a_i = (-1)^i(1 - a_1)$, para $1 \le i \le \frac{n-2}{2}$. De la relación de Jacobi $J(X_1, X_2, X_{n-5}) = 0$, se tiene $0 = [X_4, X_{n-5}] + [X_2, X_{n-3}]$, luego $0 = a_4 + a_2$, de donde se concluye $a_1 = 1$ y $a_i = 0$, para $2 \le i \le \frac{n-2}{2}$. Resultando ser el álgebra $\mathfrak{g} = R_{n+1}$.

- Si $\mathfrak{g}' = K_n$, el producto en $\mathfrak{g}$ viene dado por

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le n-2, \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i-1} X_{n-2}, & 1 \le i \le \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1} \left(\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor - i \right) X_{n-1}, & 1 \le i \le \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor, \\ [X_i, X_{n-1-i}] = a_i X_n, & 1 \le i \le \frac{n-2}{2}. \end{cases}$$

Se determinan las constantes a_i, a partir de las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{n-2-i}) = 0$, con $1 \le i \le \frac{n-4}{2}$, obteniéndose que

$$(-1)^{i-1} \left(\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor - i \right) = a_{i+1} + a_i \tag{3.1}$$

Ahora, de la relación de Jacobi $J(X_1, X_2, X_{n-5}) = 0$, se obtiene que

$$[X_1,[X_2,X_{n-5}]] = [[X_1,X_2],X_{n-5}] + [X_2,[X_1,X_{n-5}]],$$

y por lo tanto $[X_1, -X_{n-2}] = 0$, de donde $a_1 = 0$, con lo que

$$a_2 = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor - 1$$

Como n es par, se sigue que $\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor - 1 = \frac{n-2}{2} - 1 = \frac{(n+1)-3-2}{2}$, con lo que $a_2 = \frac{\dim \mathfrak{g}-3-2}{2}$, que también puede ser expresada como $a_2 = (-1)^2 \left(\frac{(2-1)(n+1-3-2)}{2}\right)$.

Se puede probar que

$$a_k = (-1)^k \left(\frac{(k-1)((n+1)-3-k)}{2}\right)$$

En efecto, la expresión se verifica para a_1 y a_2. Supongáse que para i, $a_i = (-1)^i \left(\frac{(i-1)((n+1)-3-i)}{2}\right)$, y veamóslo para $i+1$.

De la ecuación(3.1) se tiene que

$$(-1)^{i-1} \left(\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor - i \right) = a_{i+1} + a_i.$$

Sustituyendo a_i resulta que

$$(-1)^{i-1} \left(\frac{n-2}{2} - i \right) = a_{i+1} + (-1)^i \left(\frac{(i-1)((n+1)-3-i)}{2}\right),$$

de donde

$$a_{i+1} = (-1)^{i+1} \left(\frac{(n-3-i)i}{2}\right)$$

lo que prueba la suposición resultando ser $\mathfrak{g} = K_{n+1}$.

- Si $\mathfrak{g}' = W_n$, el producto de $\mathfrak{g}$ viene dado por

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le n-2, \\ [X_i, X_j] = \frac{6\,(i-1)!\,(j-1)!\,(j-i)}{(i+j)!} X_{i+j+1}, & 1 \le i < j \le n-2-i, \\ [X_i, X_{n-1-i}] = a_i X_n, & 1 \le i \le \frac{n-2}{2}. \end{cases}$$

Donde $a_i = a_{i,n-1-i}$. De las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{n-2-i}) = 0$, con $1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}$, se tiene que

$$a_{i,n-2-i} = a_{i+1} + a_i, \tag{3.2}$$

y de la relación de Jacobi $J(X_1, X_2, X_{n-5}) = 0$, se obtiene que

$$a_{2,n-5}\, a_1 = a_{1,2}\, a_4 + a_{1,n-5}\, a_2. \tag{3.3}$$

Desarrollando la ecuación(3.2) para los valores de $i = 1, 2, 3$, se tiene que

$$\begin{cases} a_2 = a_{1,n-3} - a_1, \\ a_4 = a_{3,n-5} - a_{2,n-4} + a_{1,n-3} - a_1. \end{cases}$$

Sustituyendo los valores $a_{i,j}$ en dichas ecuaciones y resolviendo la ecuación(3.3), se tiene $a_1 = \frac{6\,(n-3)}{(n-1)\,(n-2)}$. Como $a_1 = a_{1,n-2}$, dicho valor verifica la relación de las constantes de estructura para W_{n+1}.

Como $a_2 = a_{1,n-3} - a_1$, sustituyendo a_1, se obtiene que $a_2 = \frac{6\,(n-5)}{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}$, que también verifica la relación para las constantes de estructura del álgebra W_{n+1}.

Suponiendo que para un cierto k es, $a_k = \frac{6\,(k-1)!\,(n-2-k)!\,(n-1-2k)}{(n-1)!}$, se verá para $k+1$. De la ecuación(3.2), para $i = k$, se tiene $a_{k+1} = a_{k,n-2-k} - a_k$; al sustituir los valores $a_{k,n-2-k}$ y a_k se tiene, entonces, que $a_{k+1} = \frac{6\,k!\,(n-3-k)!\,(n-3-2k)}{(n-1)!}$, lo que prueba la suposición, resultando ser $\mathfrak{g} = W_{n+1}$.

Completada la demostración de la proposicion cuando la dimensión del álgebra es impar, se prueba ahora para dimensión par.

- Si n es impar, $\mathfrak{g}'$ es un álgebra de Lie filiforme de dimensión impar de tipo $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_{(n,1)}$, luego puede ser isomorfa a L_n, Q'_n, R_n, K_n, ó W_n y, al igual que en el apartado anterior, se va a estudiar cada uno de los casos.

- Si $\mathfrak{g}' = L_n$, el producto en $\mathfrak{g}$ viene dado por

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [X_i, X_{n-1-i}] = a_i X_n, & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}. \end{cases}$$

De las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{n-2-i}) = 0$, para $1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}$, se obtiene que

$$\begin{cases} 0 = a_{i+1} + a_i, & \text{si } 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2}, \\ 0 = a_{\frac{n-3}{2}}, \end{cases}$$

con lo que $a_i = 0$, para cualquier i, y el álgebra es $\mathfrak{g} = L_{n+1}$.

- Si $\mathfrak{g}' = R_n$, el producto en $\mathfrak{g}$ viene dado por

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{n-1-i}] = a_i X_n, & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}. \end{cases}$$

De las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{n-2-i}) = 0$, para $1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}$, se obtiene que

$$\begin{cases} 1 = a_2 + a_1, \\ 0 = a_{i+1} + a_i, & \text{si } 2 \leq i \leq \frac{n-5}{2}, \\ 0 = a_{\frac{n-3}{2}}, \end{cases}$$

con lo que $a_i = 0$, para $2 \leq i \leq \frac{n-3}{2}$, y $a_1 = 1$, y el álgebra es $\mathfrak{g} = R_{n+1}$.

- Si $\mathfrak{g}' = Q'_n$, el producto en $\mathfrak{g}$ viene dado por

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1} X_{n-1} & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2}, \\ [X_i, X_{n-1-i}] = a_i X_n, & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}. \end{cases}$$

De las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{n-2-i}) = 0$, para $1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}$, se obtiene que

$$\begin{aligned}(-1)^{i-1} &= a_{i+1} + a_i, \text{ si } 1 \leq i \leq \tfrac{n-5}{2},\\ (-1)^{\frac{n-3}{2}-1} &= a_{\frac{n-3}{2}}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Se determina la constante $a_{\frac{n-5}{2}}$, de la relación de Jacobi anterior para el valor $i = \frac{n-5}{2}$, teniéndose que

$$a_{\frac{n-5}{2}} = (-1)^{((\frac{n-3}{2}-1)-1)} - (-1)^{(\frac{n-3}{2}-1)} = 2(-1)^{(\frac{n-5}{2}-1)},$$

luego

$$a_{\frac{n-5}{2}} = (-1)^{(\frac{n-5}{2}-1)}\left(\frac{\dim \mathfrak{g} - 2}{2} - \frac{n-5}{2}\right)$$

Supuesto que para k se tiene que

$$a_k = (-1)^{k-1}\left(\frac{\dim \mathfrak{g} - 2}{2} - k\right)$$

Se va a probar para $k-1$. De la ecuación(3.4) para $i = k-1$, se tiene que

$$(-1)^{(k-1)-1} = a_{k-1} + a_k,$$

sustituyendo el valor de a_k, se obtiene que

$$a_{k-1} = (-1)^{k-2}\left(1 + \frac{(n+1)-2}{2} - k\right),$$

que se puede expresar como

$$a_{k-1} = (-1)^{(k-1)-1}\left(\frac{(n+1)-2}{2} - (k-1)\right)$$

lo que prueba la suposición, con lo que resulta $\mathfrak{g} = K_{n+1}$.

• Se prueba, a continuación que no puede ser $\mathfrak{g}' = K_n$. En efecto, si fuera $\mathfrak{g}' = K_n$, la ley de $\mathfrak{g}$ vendría dada por

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le n-2, \\ [X_i, X_{n-4-i}] = (-1)^{i-1} X_{n-3}, & 1 \le i \le \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor, \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i-1} \left(\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor - i \right) X_{n-2}, & 1 \le i \le \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^i \frac{(i-1)(n-3-i)}{2} X_{n-1}, & 2 \le i \le \frac{n-3}{2}, \\ [X_i, X_{n-1-i}] = a_i X_n, & 1 \le i \le \frac{n-3}{2}. \end{cases}$$

De las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{n-2-i}) = 0$, para $1 \le i \le \frac{n-3}{2}$, se obtiene que

$$\begin{array}{ll} (-1)^i \frac{(i-1)(n-3-i)}{2} = a_{i+1} + a_i, & \text{si } 1 \le i \le \frac{n-5}{2}, \\ (-1)^{\frac{n-3}{2}} \frac{\left(\frac{n-3}{2}-1\right)\left(n-3-\frac{n-3}{2}\right)}{2} = a_{\frac{n-3}{2}}. & \end{array} \tag{3.5}$$

Y por tanto $a_{\frac{n-3}{2}} \neq 0$. Se obtiene la constante $a_{\frac{n-5}{2}}$, de la ecuación(3.5) para $i = \frac{n-5}{2}$,

$$a_{\frac{n-5}{2}} = (-1)^{\frac{n-5}{2}} \left(\frac{\frac{(n-7)(n-1)}{4} + \frac{(n-3)(n-5)}{4}}{2} \right).$$

lo que demuestra que $a_{\frac{n-5}{2}} \neq 0$.

Una vez calculados los coeficientes $a_{\frac{n-5}{2}}$ y $a_{\frac{n-3}{2}}$, podemos expresarlos como

$$a_{\frac{n-3}{2}} = (-1)^{\frac{n-3}{2}} c_{\frac{n-3}{2}}$$

$$a_{\frac{n-5}{2}} = (-1)^{\frac{n-5}{2}} c_{\frac{n-5}{2}}$$

con $c_{\frac{n-3}{2}}$ y $c_{\frac{n-5}{2}}$ no nulos. Luego se supone que para $k+1$, $a_{k+1} = (-1)^{k+1} c_{k+1}$, con $c_{k+1} \neq 0$, y se prueba que $a_k = (-1)^k c_k$, para $1 \le i \le \frac{n-5}{2}$, con $c_k \neq 0$. En efecto, veamos como se llega a que $a_k \neq 0$. De la ecuación(3.5), para $i = k$, se tiene que

$$a_k = (-1)^k \frac{(k-1)(n-3-k)}{2} - a_{k+1},$$

como

$$a_{k+1} = (-1)^{k+1} c_{k+1} \text{ con } c_{k+1} \neq 0,$$

se tiene, entonces, que $a_k = (-1)^k \frac{(k-1)(n-3-k)}{2} - (-1)^{k+1} c_{k+1}$, y finalmente se llega a que

$$a_k = (-1)^k (\frac{(k-1)(n-3-k)}{2} + c_{k+1}).$$

Como $\frac{(k-1)(n-3-k)}{2} + c_{k+1} \neq 0$, se puede expresar $a_k = (-1)^k c_k$, con $c_k \neq 0$, y por tanto $a_k \neq 0$, como se pretendía demostrar. En particular , cuando $k = 1$, se tiene $a_1 \neq 0$. Además, de la ecuación(3.5) para $i = 1$, se tiene que

$$a_1 + a_2 = (-1)^i \left(\frac{(1-1)(n-3-i)}{2} \right), \text{ es decir, } a_2 = -a_1.$$

Esto conduce a una contradicción. En efecto, de la relación de Jacobi $J(X_1, X_2, X_{n-5}) = 0$ se tiene que

$$[X_1, (-1) \left(\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor - 2 \right) X_{n-2}] = [X_2, X_{n-3}]$$

luego

$$(-1) \left(\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor - 2 \right) a_1 = a_2,$$

que junto a la igualdad anterior $a_2 = -a_1$, implica $a_1 = 0$, y, por tanto, no puede ser $a_1 \neq 0$. Esta contradicción implica que no puede ser $\mathfrak{g}' = K_n$.

- Si $\mathfrak{g}' = W_n$, un tratamiento similar, al realizado al caso n par y $\mathfrak{g}' = W_n$, demuestra que el álgebra es $\mathfrak{g} = W_{n+1}$. □

Las álgebras filiforme graduadas de longitud n, siendo n la dimensión del álgebra, y cuya graduación es

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n,$$

son aquellas cuyas constantes de estructura, en una base adaptada y homogénea $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$, son las soluciones de las correspondientes identidades de Jacobi

$J(X_i, X_j, X_k) = 0$ para $0 \leq i < j < k \leq n - 3 - i - j$.

Obtenidas las álgebras que admiten tal graduación, se puede enunciar el siguiente corolario

Corolario 3.7 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra filiforme de dimensión $n \geq 12$ que admite una graduación*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$$

con

$$\mathfrak{g}_i = < X_{i-1} > .$$

Entonces la ley de $\mathfrak{g}$ viene dada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j}\, X_{i+j+1}, & 1 \leq i < j \leq n-i-2, \end{cases}$$

donde las constantes de estructura toman los valores que se especifican en alguno de los apartados siguientes:

1.- $a_{i,j} = 0$, *para cualquier i,j.*

2.- $\begin{cases} a_{1,j} = \beta, & 2 \leq j \leq n-3, \\ a_{i,j} = 0, & \textit{para } i \neq 1. \end{cases}$

3.- $\begin{cases} a_{i,n-2-i} = (-1)^{i-1}\beta, & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}, \\ a_{i,j} = 0, & \textit{en otro caso}\ , \end{cases}$

donde n es impar.

4.- $\begin{cases} a_{i,2\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor-1-i} = (-1)^{i-1}\beta, & 1 \leq i \leq \left\lfloor\frac{n-4}{2}\right\rfloor, \\ a_{i,2\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor-i} = (-1)^{i-1}\left(\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor - i\right)\beta, & 1 \leq i \leq \left\lfloor\frac{n-4}{2}\right\rfloor, \\ a_{i,n-2-i} = (-1)^{i}\,\frac{(i-1)(n-3-i)}{2}\beta\,\alpha, & 2 \leq i \leq \frac{n-3}{2}, \\ a_{i,j} = 0, & \textit{en otro caso}\ . \end{cases}$

donde $\alpha = 0$, *si* n *par, y* $\alpha = 1$, *si* n *es impar.*

5.- $\left\{ a_{i,j} = \frac{6\,(i-1)!\,(j-1)!\,(j-i)}{(i+j)!}\beta, \quad 1 \leq i < j \leq n-2-i. \right.$

Caso de la dimensión de $\mathfrak{g}$ menor que 12

El proceso para determinar las familias se realiza siempre de idéntica forma: conocidas las familias de dimensión $n-1$, para obtener las de dimensión n, se realiza la extensión por el ideal central, $< X_{n-1} >$.

- Si $\dim \mathfrak{g} = 2$, el álgebra que resulta es, de manera inmediata, la abeliana.

- Si $\dim \mathfrak{g} = 3$ ó $\dim \mathfrak{g} = 4$, las álgebras son L_3 ó L_4.

- Si $5 \leq \dim \mathfrak{g} \leq 11$, son álgebras de Lie filiformes así graduadas,

$$L_n = \left\{ [X_0, X_i] = X_{i+1}, \qquad 1 \leq i \leq n-2. \right.$$

$$R_n = \left\{ \begin{array}{ll} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \leq i \leq n-3, \end{array} \right.$$

y además, las álgebras siguientes:

- Si $\dim \mathfrak{g} = n$, con n impar y $n \geq 7$

$$Q'_n = \left\{ \begin{array}{ll} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 5, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1} X_{n-1}, & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}. \end{array} \right.$$

- Si $8 \leq \dim \mathfrak{g} \leq 11$,

$$K_n = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ \left[X_i, X_{2\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor -1-i}\right] = (-1)^{i-1} X_{2\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor}, & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor, \\ \left[X_i, X_{2\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor -i}\right] = (-1)^{i-1} \left(\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor - i \right) X_{2\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor +1}, & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^i \frac{(i-1)(n-3-i)}{2} \alpha X_{n-1}, & 2 \leq i \leq \frac{n-3}{2}. \end{cases}$$

donde $\alpha = 0$, si n par, y $\alpha = 1$, si n es impar.

- Si $\dim \mathfrak{g} = 7$,

$$W_7'(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 5, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_4] = \alpha X_6, & \\ [X_2, X_3] = (1-\alpha) X_6. & \end{cases}$$

donde $\alpha \in \mathbb{C} - \{1\}$.

- Si $\dim \mathfrak{g} = 8$,

$$W_8'(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 6, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_4] = \alpha X_6, & \\ [X_1, X_5] = (2\alpha - 1) X_7, & \\ [X_2, X_i] = (1-\alpha) X_{i+3}, & 3 \leq i \leq 4. \end{cases}$$

donde $\alpha \in \mathbb{C} - \{1\}$.

- Si $\dim \mathfrak{g} = 9$,

$$W_9'(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 7, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_4] = \alpha\, X_6, & \\ [X_1, X_5] = (2\alpha - 1)\, X_7, & \\ [X_1, X_6] = \dfrac{5\alpha - 3}{3 - \alpha} X_8, & \\ [X_2, X_i] = (1 - \alpha)\, X_{i+3}, & 3 \leq i \leq 4, \\ [X_2, X_5] = \dfrac{2\alpha(1-\alpha)}{3 - \alpha} X_8, & \\ [X_3, X_4] = \dfrac{3(1-\alpha)^2}{3 - \alpha} X_8. & \end{cases}$$

donde $\alpha \in \mathbb{C} - \{1, 3\}$.

- Si $\dim \mathfrak{g} = 10$,

$$K_{10}' = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 8, \\ [X_i, X_{5-i}] = (-1)^{i-1}\, X_6 & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{6-i}] = (-1)^{i-1}\, (3 - i)\, X_7, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{7-i}] = (-1)^i\, \frac{(i-1)(6-i)}{2}\, X_8, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_i, X_{8-i}] = (-1)^i\, 5X_9, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_3, X_5] = -3X_9. & \end{cases}$$

$$W'_{10}(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 8, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2} & 2 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_4] = \alpha X_6 & \\ [X_1, X_5] = (2\alpha - 1)X_7 & \\ [X_1, X_6] = \frac{5\alpha-3}{3-\alpha} X_8 & \\ [X_1, X_7] = \frac{\alpha(5\alpha-3)}{3-\alpha} X_9 & \\ [X_2, X_i] = (1-\alpha)X_{i+3} & 3 \leq i \leq 4, \\ [X_2, X_5] = \frac{2\alpha(1-\alpha)}{3-\alpha} X_8 & \\ [X_2, X_6] = \frac{(1-\alpha)(5\alpha-3)}{3-\alpha} X_9 & \\ [X_3, X_i] = \frac{3(1-\alpha)^2}{3-\alpha} X_{4+i} & 4 \leq i \leq 5. \end{cases}$$

donde $\alpha \in \mathbb{C} - 1, 3$.

- Si $\dim \mathfrak{g} = 11$,

$$K'_{11} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 9 \\ [X_i, X_{5-i}] = (-1)^{i-1}\, X_6, & 1 \le i \le 2, \\ [X_i, X_{6-i}] = (-1)^{i-1}\,(3-i)\, X_7, & 1 \le i \le 2, \\ [X_i, X_{7-i}] = (-1)^{i}\, \frac{(i-1)(6-i)}{2}\, X_8, & 1 \le i \le 3, \\ [X_i, X_{8-i}] = (-1)^{i}\, 5X_9 & 1 \le i \le 2, \\ [X_i, X_{9-i}] = \frac{-5}{2} X_{10} & 1 \le i \le 2, \\ [X_3, X_5] = -3X_9 & \\ [X_3, X_6] = \frac{15}{2} X_{10} & \\ [X_4, X_5] = \frac{-21}{2} X_{10} & \end{cases}$$

$$W'_{11}(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \le i \le 9 \\ [X_1, X_i] = X_{i+2} & 2 \le i \le 3 \\ [X_1, X_4] = \alpha X_6 & \\ [X_1, X_5] = (2\alpha - 1) X_7 & \\ [X_1, X_6] = \frac{5\alpha-3}{3-\alpha} X_8 & \\ [X_1, X_7] = \frac{\alpha(5\alpha-3)}{3-\alpha} X_9 & \\ [X_1, X_8] = \frac{10\alpha^3+2\alpha^2-14\alpha+6}{4\alpha(2-\alpha)} X_{10} & \\ [X_2, X_i] = (1-\alpha) X_{i+3} & 3 \le i \le 4, \\ [X_2, X_5] = \frac{2\alpha(1-\alpha)}{3-\alpha} X_8 & \\ [X_2, X_6] = \frac{(1-\alpha)(5\alpha-3)}{3-\alpha} X_9 & \\ [X_2, X_7] = \frac{-10\alpha^4+24\alpha^3-44\alpha^2+48\alpha-18}{4\alpha(2-\alpha)(3-\alpha)} X_{10} & \\ [X_3, X_i] = \frac{3(1-\alpha)^2}{3-\alpha} X_{i+4} & 4 \le i \le 5, \\ [X_3, X_6] = \frac{30\alpha^4-96\alpha^3+120\alpha^2-72\alpha+18}{4\alpha(2-\alpha)(3-\alpha)} X_{10} & \\ [X_4, X_5] = \frac{-42\alpha^4+144\alpha^3-180\alpha^2+96\alpha-18}{4\alpha(2-\alpha)(3-\alpha)} X_{10} & \end{cases}$$

donde $\alpha \in \mathbb{C} - \{0, 1, 2, 3\}$.

Estas álgebras son no isomorfas (véase[26]), al coincidir con las que reseñamos en el cuadro que se adjunta

g	L_n	R_n	$W'_n(\alpha)$	Q'_n	K_n	K'_n
$n = 5$	μ_5^1	μ_5^2	-	-	-	-
$n = 6$	μ_6^1	μ_6^2	-	-	-	-
$n = 7$	μ_7^1	μ_7^5	$\mu_7^8(\alpha')(\alpha' \neq 0)$	μ_7^3	-	-
$n = 8$	μ_8^{19}	μ_8^{14}	$\mu_8^8(\alpha')(\alpha' \neq 0)$	-	μ_8^{19}	-
$n = 9$	μ_9^{38}	$\mu_9^3(\alpha = 0)$	$\mu_9^3(\alpha')(\alpha' \neq 0, -2)$	μ_9^{37}	μ_9^{35}	-
$n = 10$	μ_{10}^{51}	$\mu_{10}^4(\alpha = 0)$	$\mu_{10}^4(\alpha')(\alpha' \neq 0, -2)$	-	μ_{10}^{49}	μ_{10}^{11}
$n = 11$	μ_{11}^{106}	μ_{11}^{18}	$\mu_{11}^8(\alpha')(\alpha' \neq -2, -1, 0, 1)$	μ_{11}^{108}	μ_{11}^{97}	μ_{11}^{25}

Se recoge la clasificación de las álgebras filiformes de longitud máxima determinadas en este Capítulo, en el siguiente Teorema.

Teorema 3.8 Clasificación de las álgebras filiforme de longitud máxima *Si $\mathfrak{g}$, es un álgebra filiforme n-dimensional, con $n \geq 12$, y longitud máxima, se tiene que $\mathfrak{g} = L_n$, $\mathfrak{g} = R_n$, $\mathfrak{g} = K_n$ ó $\mathfrak{g} = W_n$, pudiendo ser también $\mathfrak{g} = Q'_n$ si n es impar. Además, si $n < 12$, el álgebra también puede ser alguna de las álgebras obtenidas en la Subsección 3.4.*

Demostración. La prueba es conclusión de las algebras obtenidas en las Proposiciones 3.2 y 3.6 y de las álgebras obtenidas en la Subsección 3.4. □

Capítulo 4

Álgebras de Lie casifiliformes graduadas

Se presenta, en este capítulo, la clasificación de las álgebras de Lie casifiliformes, con longitudes n, y $n-1$, siendo n la dimensión del álgebra, en todas aquellas graduaciones (Capítulo [2]), donde se tiene demostrada la existencia de una base adaptada y homogénea.

4.1 Introducción

En el estudio de álgebras de Lie casifiliformes graduadas naturalmente Gómez y Jiménez-Merchán[24] mostraron que cuando el número de subespacios graduantes es $n-2$, siendo n la dimensión del álgebra, también existen álgebras no naturalmente graduadas. Además, ponen de manifiesto que la graduación natural no determina de manera única la ubicación de los vectores $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y\}$, de la base adaptada, con lo que el estudio que realiza es más complicado que la misma graduación para el caso filiforme. Algo similar ocurre cuando la longitud de la graduación es mayor que el índice de nilpotencia, para las álgebras casifiliformes.

En la determinación de las álgebras de Lie casifiliformes (de índice de nilpotencia $n-2$) graduadas con mayor número de subespacios graduantes que su índice de nilpotencia, se distinguen dos posibilidades, ya que se pueden considerar graduaciones con n y $n-1$ subespacios; además, si tenemos una base adaptada y homogénea $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y\}$, la ubicación del vector Y no queda fijada de manera única por el número de subespacios graduantes.

La primera sección de este capítulo está dedicada al problema de la clasificación de las álgebras casifiliformes de longitud máxima, aquellas que admiten una graduación conexa $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2}$, donde el número de subespacios homogéneos coincide con la dimensión del álgebra. En esencia, las únicas álgebras casifiliformes que tienen longitud máxima son $\mathfrak{g}^2_{(n,1)}$ y $\mathfrak{g}^3_{(n,1)}$; existiendo además si, n es impar, el álgebra $\mathfrak{g}^1_{(n,2-n)}$.

Se finaliza el capítulo con el estudio de las álgebras de Lie casifiliformes de longitud $n-1$, es decir, aquellas álgebras que admiten una graduación conexa $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \mathfrak{g}_{n_2}$, con $n_2 - n_1 = n-2$. Las graduaciones que pueden considerarse son aquellas que fueron obtenidas en el Capítulo 2. Como el número de subespacios de la graduación es $n-1$, siendo n la dimensión del álgebra, existe un subespacio de dimensión 2. Si $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y\}$ es una base homogénea y adaptada del álgebra, con $[X_0, X_i] = X_{i+1}$, para $1 \leq i \leq n-3$, y $[X_0, Y] = 0$; la ubicación del vector Y no está univocamente determinada por la graduación, por este motivo, se introduce la noción de álgebra del tipo $\mathfrak{g}_{(n,n_1,a,b)}$. Las álgebras se obtienen dependiendo de la graduación considerada, siendo estas en las dimensiones adecuadas las denotadas por: $\mathfrak{g}^i_{(n,1,p)}$ con $1 \leq i \leq 12$.

Se recogen en el Apéndice, aquellas álgebras en dimensiones concretas inferiores ($n \leq 14$), que constituyen excepciones del caso general que en este capítulo se determina.

4.2 Álgebras casifiliformes de longitud máxima

Se estudia en esta sección las álgebras de Lie casifiliformes de dimensión finita y longitud máxima. Se consideran distintos tipos de graduación y en cada caso se obtienen las álgebras que admiten la descomposición correspondiente.

Las graduaciones factibles fueron obtenidas en el Capítulo 2, teniendo las álgebras que resultan la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2}$, con $n_2 - n_1 = n - 1$. Si $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y\}$ es una base adaptada y homogénea, se tienen los casos siguientes:

$$1.- \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{3-n} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, \quad \text{con} \begin{cases} \mathfrak{g}_i =< X_{i+n-2} >, & 3-n \leq i \leq 0, \\ \mathfrak{g}_1 =< X_0 >, \\ \mathfrak{g}_2 =< Y > . \end{cases}$$

$$2.- \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{2-n} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1, \quad \text{con} \begin{cases} \mathfrak{g}_i =< X_{i+n-1} >, & 2-n \leq i \leq -1, \\ \mathfrak{g}_0 =< Y >, \\ \mathfrak{g}_1 =< X_0 > \end{cases}$$

$$3.- \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{2-n} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1, \quad \text{con} \begin{cases} \mathfrak{g}_{2-n} =< Y >, \\ \mathfrak{g}_i =< X_{i+n-2} >, & 3-n \leq i \leq 0, \\ \mathfrak{g}_1 =< X_0 > . \end{cases}$$

$$4.- \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-1}, \quad \text{con} \begin{cases} \mathfrak{g}_0 =< Y >, \\ \mathfrak{g}_i =< X_{i-1} >, & 1 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

$$5.-\quad \mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_n,\quad \text{con}\ \begin{cases}\mathfrak{g}_1=<X_0>,\\ \mathfrak{g}_2=<Y>,\\ \mathfrak{g}_i=<X_{i-2}>, 3\leq i\leq n.\end{cases}$$

$$6.-\quad \mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_n,\quad \text{con}\ \begin{cases}\mathfrak{g}_i=<X_{i-1}>, 1\leq i\leq n-1,\\ \mathfrak{g}_n=<Y>.\end{cases}$$

No es necesario considerar las graduaciones que pueden ser obtenidas con el cambio de subíndices $k'=-k$, en los subespacios homogéneos, ya que las álgebras que se obtienen resultan ser equivalentes a las obtenidas con la graduación correspondiente anterior. La referencia a la posición del vector Y de la base homogénea, así como al menor subíndice de los subespacios de la graduación, motiva la siguiente definición.

Definicion 4.1 Si $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{n_1}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_{n_2}$ es un álgebra n-dimensional casifiliforme de longitud n y el vector $Y\in\mathfrak{g}_a$, diremos que es $\mathfrak{g}$ es un álgebra de tipo $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{(n,n_1,a)}$.

Se distinguen las descomposiciones que, esencialmente, sólo producen extensiones del álgebra filiforme L_{n-1} de aquellas en las que resultan otro tipo de álgebras.

4.2.1 Álgebras de tipo $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{(n,n_1,a)}$, con $n_1<0$.

Dentro de esta familia de álgebras, en el primer caso que se considera sólo puede obtenerse el álgebra $L_{n-1}\oplus\mathbf{K}$.

Álgebras de tipo $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{(n,3-n,2)}$

Si $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{3-n}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_2$ es un álgebra del tipo considerado, entonces admite la descomposición $<X_1>\oplus<X_2>\oplus\cdots\oplus<X_0>\oplus<Y>$. La proposición siguiente nos determina el álgebra que resulta.

Proposición 4.2 *Si $\mathfrak{g}$ es una álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,3-n,2)}$, entonces se verifica que es isomorfa al álgebra $L_{n-1} \oplus \mathbb{K}$.*

Demostración. El hecho de pertenecer el vector Y al subespacio $\mathfrak{g}_2$ prueba que $Y \notin \mathcal{C}^1\mathfrak{g}$. Veamos ahora que $Y \in \operatorname{cen}\mathfrak{g}$. En efecto, si esto no ocurre debe existir un entero i tal que $[X_i, Y] = aX_{i+2}$, con $a \neq 0$; por lo tanto, se tiene $\mathcal{C}^k\mathfrak{g} \supset < X_{i+2}, X_{i+3}, \ldots, X_{n-2} >$, para cualquier k, lo que es imposible ya que $\mathfrak{g}$ es un álgebra nilpotente. El hecho de que $Y \notin \mathcal{C}^1\mathfrak{g}$ e $Y \in \operatorname{cen}\mathfrak{g}$ implica que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus < Y >$, siendo $\mathfrak{g}'$ un álgebra filiforme. Entonces, la Proposición 3.2 aplicada a $\mathfrak{g}'$ proporciona finalmente el resultado. □

En el segundo caso que se estudia, el resultado que se obtiene es la no existencia de álgebras casifiliformes con este tipo de graduación.

Álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,2-n,0)}$

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{2-n} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1$ es un álgebra de este tipo, la descomposición que admite ahora es $\mathfrak{g} =< X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \cdots < X_{n-2} > \oplus < Y > \oplus < X_0 >$, se tiene que

Proposición 4.3 *No existen álgebras de Lie casifiliformes no escindidas de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,2-n,0)}$.*

Demostración. Sea $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y\}$ una base adaptada del álgebra. Entonces, de la graduación resulta que si $X_i \in \mathfrak{g}_\alpha$ y $X_j \in \mathfrak{g}_\beta$, con $\alpha, \beta < 0$, se tiene que $Y \notin \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, ya que $\alpha + \beta < 0$; y como $[X_0, X_{n-2}] = 0$, se tiene que Y no es un vector de la subálgebra derivada de $\mathfrak{g}$, con lo cual $\dim \mathcal{C}^1\mathfrak{g} = n-3$. Además, como $Y \in \mathfrak{g}_0$ y $\mathfrak{g}$ es un álgebra nilpotente se tiene que $[X_i, Y] = 0$, para todo i, con lo que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus < Y >$ siendo $\mathfrak{g}'$ un álgebra filiforme no conexa, graduada por $< X_1 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} > \oplus < 0 > \oplus < X_0 >$. $\square$

Nota 4.4 Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,2-n,0)}$, se ha probado en la Proposicion 4.3 que dicha álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus < Y >$, donde $\mathfrak{g}'$ es una álgebra filiforme graduada no conexa por $< X_1 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} > \oplus < 0 > \oplus < X_0 >$, cuya ley es

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j} X_{i+j-(n-1)}, & n-1 \leq i+j \leq 2n-3, \quad 1 \leq i < j \leq n-2. \end{cases}$$

Y la única álgebra filiforme así graduada es $\mathfrak{g}' = L_{n-1}$.

En efecto, puede verse que los productos $[X_i, X_j]$, con $i \neq 0$, son nulos. Por ser $\mathfrak{g}'$ un álgebra graduada se tiene que

$$[X_i, X_j] \in [\mathfrak{g}_{-(n-1-i)}, \mathfrak{g}_{-(n-1-j)}] \subset \mathfrak{g}_{-(n-1-(i+j-n+1))} =< X_{i+j-n+1} >,$$

verificándose $i+j-n+1 \geq 1$. Los únicos productos que cabe que considerar son $[X_i, X_j]$, donde $1 \leq i < j \leq n-2$ y con $i+j \geq n$, luego

$$[X_i, X_j] = a_{i,j} X_{i+j-n+1} \text{ con } \ i+j \geq n, \quad 1 \leq i < j \leq n-2.$$

Observando el subíndice del vector $X_{i+j-n+1}$, se tiene que $i+j-n+1 \leq i+n-2-n+1 \leq i-1 < i$; como $i < j$, se tiene también que $i+j-n+1 < j$, de donde se deduce que $X_{i+j-n+1}$ es de menor subíndice que cualquiera de los dos vectores que lo generan. Se tiene, entonces, que no puede ser $a_{i,j}$ no nulo, para ningún par (i,j); ya que si $a_{i,j} \neq 0$ para $i+j-n+1 = 1$, entonces $\mathcal{C}^1\mathfrak{g}' = \{X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{n-2}\}$ luego $\dim \mathcal{C}^1\mathfrak{g}' = n-2$; por otra parte, si $i+j-n+1 = k \neq 1$, debería ser

$\mathcal{C}^k\mathfrak{g}' =< X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_{n-2}, X_{i+j-n+1} >=< X_k, X_{k+1}, \ldots, X_{n-2} >= \mathcal{C}^{k-1}\mathfrak{g}'$ y el álgebra no sería nilpotente. Luego la única álgebra filiforme que admite este tipo de graduación es $\mathfrak{g}' = L_{n-1}$, que tiene de ley

$$\left\{ \; [X_0, X_i] = X_{i+1}, \quad 1 \le i \le n-3. \right.$$

Y esto concluye la prueba de la afirmación que se hace en la Nota 4.4.

Continuando con el estudio de las restantes graduaciones, el primer caso que se considera es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,2-n,2-n)}$. Cuando el vector Y está en el subespacio $\mathfrak{g}_{2-n}$, además de ser $\mathfrak{g} = L_{n-1} \oplus \mathsf{K}$, se obtiene un álgebra distinta, cuando la paridad de la dimensión es la adecuada.

Álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,2-n,2-n)}$

Un álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{2-n} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1$ de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,2-n,2-n)}$ admite la descomposición $< Y > \oplus < X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \cdots < X_{n-2} > \oplus < X_0 >$ y se tiene

Proposición 4.5 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,2-n,2-n)}$ con $n \ge 4$, entonces se verifica que $\mathfrak{g} = L_{n-1} \oplus \mathsf{K}$, si n es par, y $\mathfrak{g} = L_{n-1} \oplus \mathsf{K}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n,2-n)}$, si n es impar, siendo*

$$\mathfrak{g}^1_{(n,2-n)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le n-3, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}Y, & 1 \le i \le \frac{n-3}{2}. \end{cases}$$

Demostración. Razonando como en la Proposición 3.2, se tiene que los productos $[X_i, X_j]$, con $i, j \neq 0$, nunca pueden dar como resultado un vector generado por los vectores $\{X_0, X_1 \ldots X_{n-2}\}$, pues esto implica que el álgebra no es nilpotente. Luego, los únicos productos no nulos han de ser aquellos cuyo resultado sea un múltiplo de vector Y. Como $[X_i, X_j] \in \mathfrak{g}_{-(n-2-(i+j-n+2))}$ y el vector $Y \in \mathfrak{g}_{2-n}$, se tiene que $n-2-(i+j-n+2) = n-2$, es decir, $j = n-i-2$. Así, se tendrá que $[X_i, X_{n-2-i}] = a_i Y$. De las relaciones de Jacobi de los vectores $\{X_0, X_{i-1}, X_{n-2-i}\}$, con $2 \leq i < \frac{n-1}{2}$, se tiene que $a_i = -a_{i-1}$, para todo entero $2 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$. Así, si n es impar se tiene $a_i = (-1)^{i-1} a_1$, para $2 \leq i \leq \frac{n-3}{2}$; y resulta que si $a_1 = 0$, el álgebra es $\mathfrak{g} = L_{n-1} \oplus \mathbf{K}$ y si $a_1 \neq 0$, entonces el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n,2-n)}$. Por otra parte, si n es par, la relación de Jacobi $J(X_0, X_{\frac{n-4}{2}}, X_{\frac{n-2}{2}}) = 0$ prueba que $a_{\frac{n-4}{2}} = 0$, con lo cual $a_i = 0$ para cualquier i y $\mathfrak{g} = L_{n-1} \oplus \mathbf{K}$. Las dimensiones de las subálgebras derivadas de $L_{n-1} \oplus \mathbf{K}$ y $\mathfrak{g}^1_{(n,2-n)}$ prueban que son álgebras no isomorfas. $\square$

Estudiamos a continuación las álgebras que admiten una descomposición de los tipos que restan, con $n_1 \geq 0$. Se obtendrán extensiones de las álgebras filiformes de longitud máxima, junto con algunas álgebras no escindidas.

4.2.2 Álgebras de tipo $\mathfrak{g}_{(n,n_1,a)}$, con $n_1 \geq 0$.

En el primero de los casos que cabe considerar sólo se obtienen extensiones de álgebras filiformes de longitud máxima.

Álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,0,0)}$

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-1}$ es un álgebra de Lie casifiliforme del tipo considerado admite una descomposición $< Y > \oplus < X_0 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} >$. El hecho de que $\mathfrak{g}_0$ tenga que ser una subálgebra de $\mathfrak{g}$ y que, además, la nilpotencia del álgebra $\mathfrak{g}$ garantice que $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_i] = 0$, para todo $\mathfrak{g}_i$, conduce directamente a la determinación de las álgebras que admiten tal descomposición.

Proposición 4.6 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,0,0)}$, entonces es isomorfa a $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathbf{K}$, siendo $\mathfrak{g}'$ un álgebra filiforme de longitud $l(\mathfrak{g}') = n-1$.*

El Teorema 3.6 determina las álgebras filiformes $\mathfrak{g}'$, de longitud máxima, con lo que se obtiene la clasificación de las álgebras de la proposición anterior.

En el caso siguiente que se estudia, además de la extensión de las álgebras filiformes de longitud máxima, el álgebra que resulta es $\mathfrak{g}^1_{(n,2-n)}$, cuando la paridad de la dimensión es la adecuada.

Álgebras de tipo $\mathfrak{g}_{(n,1,n)}$

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,n)}$ admite la descomposición $< X_0 > \oplus < X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} > \oplus < Y >$ y se tiene:

Proposición 4.7 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,n)}$, con dimensión de $\mathfrak{g}$ mayor ó igual que 13, entonces $\mathfrak{g}$ es una extensión algebraica de un álgebra filiforme de longitud máxima de dimensión $n-1$. Además, si n es impar el álgebra también puede ser $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n,2-n)}$.*

Demostración. Al ser $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y\}$ una base homogénea y adaptada, la ley del álgebra viene dada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j} X_{i+j+1}, & 1 \le i < j \le n-3-i, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = A_i Y, & 1 \le i \le \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor. \end{cases}$$

De las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{n-3-i}) = 0$, con $1 \le i \le \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor$, se obtiene que $A_{i+1} + A_i = 0$, con lo que $A_i = (-1)^{i-1} A_1$. Si n es par, de la relación de Jacobi $J(X_0, X_{\frac{n-4}{2}}, X_{\frac{n-2}{2}}) = 0$, se tiene que $A_1 = 0$, luego $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathbf{K}$, donde $\mathfrak{g}'$ es un álgebra filiforme de longitud máxima y de dimensión $n-1$. Si n es impar, y $A_1 = 0$, estaríamos en las mismas condiciones del caso anterior. Si $A_1 \neq 0$, el cambio de bases

$$\begin{cases} X_i' = X_i, & 0 \le i \le n-2, \\ Y' = \frac{1}{A_1} Y. \end{cases}$$

permite suponer $A_1 = 1$. Las relaciones de Jacobi $J(X_i, X_j, X_k) = 0$ con $0 \le i < j < k \le n-4-(i+j)$, determinan que las constantes de estructura de la familia verifican las expresiones del Corolario 3.7, con $\alpha = 0$. Y así, las constantes de estructura tienen que ser de uno de los tipos de los apartados siguientes:

1.- $a_{i,j} = 0$, para todo i, j.

2.- $\begin{cases} a_{1,j} = \beta, & 2 \le j \le n-4, \\ a_{i,j} = 0 & i \ne 1. \end{cases}$

3.- $a_{i,j} = \frac{6(i-1)!(j-1)!(j-i)!}{(i+j)!}\beta$

4.- $\begin{cases} a_{i,n-4-i} = (-1)^{i-1}\beta, & 1 \le i \le \left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor, \\ a_{i,n-3-i} = (-1)^{i-1}\frac{n-3-2i}{2}\beta, & 1 \le i \le \left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor, \\ a_{i,j} = 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Además, las álgebras de la familia tendrán que verificar las relaciones de Jacobi de los vectores $\{X_i, X_j, X_{n-3-(i+j)}\}$, con $1 \le i < j \le \left\lfloor \frac{n-3-i}{2} \right\rfloor$, las cuales proporcionan las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{ll} (-1)^{i-1}a_{j,n-3-i-j} = (-1)^{i+j}\, a_{i,j} + (-1)^{j-1}a_{i,n-3-i-j}, & 1 \le i < j \le \left\lfloor \frac{n-6-2i}{2} \right\rfloor, \\ (-1)^{i-1}a_{j,n-3-i-j} = (-1)^{n-4-i-j}\, a_{i,j} + (-1)^{j-1}a_{i,n-3-i-j}, & 1 \le i < j \le \left\lfloor \frac{n-3-i}{2} \right\rfloor, \\ & j \ge \left\lfloor \frac{n-2-2i}{2} \right\rfloor. \end{array}$$

Y, por tanto se deduce que $a_{i,j} = 0$, siempre que $1 \le i < j \le n-3-i$. Entonces tiene que ser

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le n-3, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}Y, & 1 \le i \le \frac{n-3}{2}. \end{cases}$$

Y por tanto $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n,2-n)}$. □

En la proposición anterior se ha obtenido la expresión general de las álgebras casifiliformes de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,n)}$, cuando la dimensión del álgebra es mayor o igual a 13. En dimensiones menores que 13, además de las álgebras obtenidas, existen otras álgebras que admiten la citada graduación, las cuales se recogen en la siguiente Nota.

Nota 4.8 Son álgebras casifiliformes de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,n)}$, las siguientes álgebras

Si $\dim \mathfrak{g} = 7$,

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le 4, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \le i \le 3, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}Y, & 1 \le i \le 2. \end{cases}$$

Si $\dim \mathfrak{g} = 9$,

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le 6, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \le i \le 3, \\ [X_1, X_4] = 3X_6, & \\ [X_1, X_5] = 5X_7, & \\ [X_2, X_i] = -2X_{i+3}, & 3 \le i \le 4, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}Y, & 1 \le i \le 3. \end{cases}$$

Si $\dim \mathfrak{g} = 11$,

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 6, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_i] = -X_{i+2}, & 5 \leq i \leq 6, \\ [X_2, X_i] = X_{i+3}, & 3 \leq i \leq 4, \\ [X_3, X_i] = X_{i+4}, & 4 \leq i \leq 5, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1} Y, & 1 \leq i \leq 4. \end{cases}$$

Se concluye esta subsección con el estudio de las álgebras casifiliformes de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,2)}$, donde las únicas álgebras no escindidas que existen son las álgebras definidas a continuación.

Definicion 4.9 Se denotan por $\mathfrak{g}^2_{(n,1)}$ y $\mathfrak{g}^3_{(n,1)}$, las álgebras definidas en una base homogénea y adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y\}$, por

Si $n \geq 5$, $\mathfrak{g}^2_{(n,1)}$ es el álgebra

$$\mathfrak{g}^2_{(n,1)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, Y] = X_{i+2}, & 1 \leq i \leq n-4. \end{cases}$$

Si $n \geq 7$, $\mathfrak{g}^3_{(n,1)}$ es el álgebra

$$\mathfrak{g}^3_{(n,1)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, Y] = X_{i+2}, & 1 \leq i \leq n-4, \\ [X_1, X_i] = X_{i+3}, & 2 \leq i \leq n-5. \end{cases}$$

Álgebras de tipo $\mathfrak{g}_{(n,1,2)}$

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,2)}$, admite la descomposición $< X_0 > \oplus < Y > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} >$. La estructura de esta familia de álgebras viene dada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, Y] = A_i X_{i+2}, & 1 \leq i \leq n-4, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j} X_{i+j+2}, & 1 \leq i < j \leq n-4-i. \end{cases}$$

Es claro que las álgebras $\mathfrak{g}^2_{(n,1)}$ y $\mathfrak{g}^3_{(n,1)}$, consideradas anteriormente son casifiliformes de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,2)}$. Particularizando en cada caso las constantes de estructura, se comprueba, directamente que se verifican las relaciones de Jacobi en cada una de las álgebras mencionadas.

Se recogen en la siguiente proposición las álgebras casifiliformes no escindidas que admiten este tipo de graduación.

Proposición 4.10 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme no escindida de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,2)}$, con dimensión $\mathfrak{g}$ mayor ó igual que 7, se verifica que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n,1)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^3_{(n,1)}$.*

Demostración. Supondremos que $Y \notin \operatorname{cen} \mathfrak{g}$, ya que si $Y \in \operatorname{cen} \mathfrak{g}$, el álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus < Y >$ es una extensión de un álgebra filiforme $\mathfrak{g}'$ con

$$\mathfrak{g}' = < X_0 > \oplus < 0 > \oplus < X_1 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-1} > .$$

Y dicha graduación de $\mathfrak{g}'$ no es conexa.

Se realiza la demostración de la proposición por inducción sobre la dimensión del álgebra. Si dimensión de $\mathfrak{g}$ es 7, el producto viene determinado por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 4, \\ [X_i, Y] = A_i X_{i+2}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_2] = a_{1,2} X_5. \end{cases}$$

De las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, Y) = 0$, para $1 \leq i \leq 2$, se obtiene que $A_1 = A_2 = A_3$, como $Y \notin \operatorname{cen} \mathfrak{g}$, las constantes verifican $A_i \neq 0$ y el cambio de bases

$$\begin{cases} X_i' = X_i, & 0 \leq i \leq 5, \\ Y' = \frac{1}{A_1}, \end{cases}$$

permite suponer $A_i = 1$, para $i = 1, 2, 3$. Se realiza la clasificación dependiendo de la nulidad de $a_{1,2}$. Así, si $a_{1,2} = 0$, se tiene que el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(7,1)}$.

Si $a_{1,2} \neq 0$, el cambio de bases

$$\begin{cases} X_0' = X_0, \\ X_i' = \frac{1}{a_{1,2}}, & 1 \leq i \leq 5, \\ Y' = Y. \end{cases}$$

permite suponer $a_{1,2} = 1$ con lo que el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^3_{(7,1)}$ y se verifica la proposición para $\dim \mathfrak{g} = 7$.

Supóngase que se verifica para $\dim \mathfrak{g} = n$ y veámoslo para $\dim \mathfrak{g} = n + 1$. El producto en $\mathfrak{g}$ viene dado por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [X_i, Y] = X_{i+2}, & 1 \leq i \leq n-4, \\ [X_{n-3}, Y] = AX_{n-1}, & \\ [X_1, X_i] = \alpha X_{i+3}, & 2 \leq i \leq n-5, \\ [X_i, X_{n-3-i}] = a_i X_{n-1}, & 1 \leq i < \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor. \end{cases}$$

con $\alpha = 0$, ó $\alpha = 1$,

De la relación de Jacobi $J(X_0, X_n - 4, Y) = 0$, se obtiene que $A = 1$; y con las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{n-4-i}) = 0$, para $2 \leq i < \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor$, se tiene que $0 = a_i + a_{i+1}$, de donde $a_i = (-1)^{i-2} a_2$. Con la relación de Jacobi $J(X_0, X_1, X_{n-5}) = 0$ se tiene $\alpha = a_2 + a_1$. Si $\dim \mathfrak{g}$ es par, de $J(X_0, X_{\frac{n-5}{2}}, X_{\frac{n-3}{2}}) = 0$, se tiene $a_2 = 0$ y $a_1 = \alpha$, con lo que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n+1,1)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^3_{(n+1,1)}$. Si $\dim \mathfrak{g}$ es impar, de la relación de Jacobi $J(X_1, X_{n-6}, Y) = 0$, se tiene que $a_1 = \alpha - a_3$, con lo que $a_1 = \alpha$, y por lo tanto $a_i = 0$ para cualquier $i \neq 1$. Así, el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n+1,1)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^3_{(n+1,1)}$.

□

Nota 4.11 En las dimensiones inferiores los resultados que se obtienen se derivan de manera natural de las estructura de la ley en el álgebra, siendo estos

Si $\dim \mathfrak{g} = 5$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(5,1)}$.

Si $\dim \mathfrak{g} = 6$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(6,1)}$.

En resumén, álgebras casifiliformes no escindidas y de longitud n son las álgebras $\mathfrak{g}^2_{(n,1)}$ y $\mathfrak{g}^3_{(n,1)}$, de la Proposición 4.10, y el álgebra $\mathfrak{g}^1_{(n,2-n)}$ (con n impar), de la Proposición 4.5.

Por su sencillez, las álgebras que se han obtenido son útiles para el estudio de problemas geométricos, (álgebra de las derivaciones, espacio de cohomología, etc...).

De los resultados de las proposiciones anteriores, se puede enunciar el siguiente teorema de clasificación para las álgebras casifiliformes de longitud máxima, el teorema recoge los resultados obtenidos en la Sección 4.2.

Teorema 4.12 Clasificación de álgebras filiformes de longitud máxima

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme n-dimensional de longitud máxima, se tiene que $\mathfrak{g}$ es o bien una extensión de un álgebra filiforme $(n-1)$-dimensional de longitud máxima o bien es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n,1)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^3_{(n,1)}$; además, si n es impar, también puede ser $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n,2-n)}$. Cuando la dimensión del álgebra es menor o igual que 11 *se deben añadir las álgebras recogidas en las Notas 4.8 y 4.11.*

Demostración. Denotamos por $\mathfrak{g}' \oplus \mathbf{K}$ el álgebra extensión de un álgebra filiforme $\mathfrak{g}'$ de longitud máxima, en el siguiente cuadro se puede observar que las álgebras que se obtienen en las Proposiciones 4.5 y 4.10 son no isomorfas. En efecto, siempre existe un invariante que las distingue.

$\mathfrak{g}$	$\dim(\operatorname{cen}\mathfrak{g})$	$\dim(C^1\mathfrak{g})$	$\dim(\operatorname{cen} C^1\mathfrak{g})$
$\mathfrak{g}' \oplus \mathbf{K}$	2	$n-3$	-
$\mathfrak{g}^1_{(n,2-n)}$ (con n impar)	2	$n-2$	-
$\mathfrak{g}^2_{(n,1)}$	1	$n-3$	$n-2$
$\mathfrak{g}^3_{(n,1)}$	1	$n-3$	$n-3$

□

El caso filiforme se concluye aquí y, sin embargo, en la sección siguiente se encontrarán álgebras casifiliformes con una longitud mayor que la natural. De hecho, se encuentran, todas las álgebras de longitud $n-1$.

4.3 Álgebras de longitud $\dim \mathfrak{g} - 1$

Se estudia en esta sección las álgebras de Lie casifiliformes de dimensión finita y longitud $\dim \mathfrak{g} - 1$. Análogamente al caso estudiado en la sección anterior, se consideran distintos tipos de graduación y se obtienen las álgebras que admiten la descomposición correspondiente.

De nuevo se parte de las graduaciones obtenidas en el Capítulo 2, teniendo las álgebras que resultan la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2}$, con $n_2 - n_1 = n - 2$. Si $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y\}$ es una base adaptada y homogénea, se tienen los casos siguientes:

1. – $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{3-n} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1$, donde

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_i = < X_{i+n-2} >, & 3-n \leq i \leq 0, \\ \mathfrak{g}_1 = < X_0, Y > . \end{cases}$$

ó existe un $p \in \mathbb{Z}$, con $3 - n \leq p \leq 0$, donde

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_i = < X_{i+n-2} >, & 3-n \leq i \leq p-1, \\ \mathfrak{g}_p = < X_{p+n-2}, Y >, & \\ \mathfrak{g}_i = < X_{i+n-2} >, & p+1 \leq i \leq 0, \\ \mathfrak{g}_1 = < X_0 > . \end{cases}$$

2. – $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{3-p} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-p+1}$, con $2 \leq p \leq n-1$, donde

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_i = < X_{p-2+i} >, & 3-p \leq i \leq 0, \\ \mathfrak{g}_1 = < X_0, X_{p-1} >, & \\ \mathfrak{g}_i = < X_{p-2+i} >, & 2 \leq i \leq n-p, \\ \mathfrak{g}_{n-p+1} = < Y > . \end{cases}$$

3. – $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{2-p} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-p}$, con $2 \leq p \leq n-1$, donde

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_{2-p} = < Y >, & \\ \mathfrak{g}_i = < X_{p-2+i} >, & 3-p \leq i \leq 0, \\ \mathfrak{g}_1 = < X_0, X_{p-1} >, & \\ \mathfrak{g}_i = < X_{p-2+i} >, & 2 \leq i \leq n-p. \end{cases}$$

4. – $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-1}$, y existe p, con $1 \leq p \leq n-1$, donde

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_i = < X_{i-1} >, & 1 \leq i \leq p-1, \\ \mathfrak{g}_p = < X_{p-1}, Y >, & \\ \mathfrak{g}_i = < X_{i-1} >, & p+1 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

La clasificación de estas familias se va a realizar dependiendo de los valores que puedan tomar $p \in \mathbb{Z}$, en cada uno de los casos.

No es necesario considerar las graduaciones que pueden ser obtenidas con el cambio de subíndices $k' = -k$ en los subespacios homogéneos, ya que las álgebras que se obtienen resultan ser equivalentes a las obtenidas con la graduación correspondiente anterior.

Como en el caso de longitud n, será importante destacar el menor subíndice de los subespacios no nulos de la graduación, así como la posición del vector Y de la base adaptada. Además, al ser $\mathfrak{g}$ un álgebra graduada conexa con $n-1$ subespacios, existe un subespacio de dimensión dos. La referencia a la posición de este subespacio motiva la siguiente definición.

Definicion 4.13 Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2}$ es un álgebra n-dimensional casifiliforme de longitud $n-1$, con $Y \in \mathfrak{g}_a$ y $\dim \mathfrak{g}_b = 2$, diremos que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,n_1,a,b)}$.

Así, los diferentes tipos de graduación son:

1.- $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,3-n,p,p)}$, con $3-n \leq p \leq 1$.

2.- $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,3-p,n-p+1,1)}$, con $2 \leq p \leq n-1$.

3.- $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,2-p,2-p,1)}$, con $2 \leq p \leq n-1$.

4.- $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,p,p)}$, con $1 \leq p \leq n-1$.

A continuación, se estudian las álgebras que resultan en cada caso, considerando las distintas graduaciones que se presentan. El estudio de las álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,p,p)}$ merece una consideración especial. En este caso la posición del vector Y, así como la dimensión de los últimos subespacios de la graduación, desempeñan un papel relevante.

El resto de los tipos que cabe considerar se estudian a continuación.

4.3.1 Álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,n_1,a,b)}$ con $n_1 \neq 1$

En el primero de los casos, las álgebras que admiten dicha descomposición tienen longitud máxima. Por tanto, no existen álgebras de este tipo con la longitud especificada.

Álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,3-n,1,1)}$

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{3-n} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,3-n,1,1)}$, admite una descomposición $\mathfrak{g} =< X_1 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} > \oplus < X_0, Y >$. La estructura de las álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,3-n,1,1)}$, queda recogida en el siguiente lema.

Lema 4.14 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,3-n,1,1)}$, la ley del álgebra viene dada por*

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j}\, X_{i+j-n+2}, & 1 \leq i < j \leq n-2, \quad n-1 \leq i+j \leq 2n-4, \\ [X_i, Y] = A_i\, X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3. \end{cases}$$

En la siguiente proposición se demuestra que dicha familia de álgebras no contiene a ninguna de longitud $n-1$.

Proposición 4.15 *No existen álgebras casifiliformes de tipo* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,3-n,1,1)}$.

Demostración. De acuerdo con el Lema 4.14, la ley del álgebra es

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j}\, X_{i+j-n+2}, & 1 \leq i < j \leq n-2, \quad n-1 \leq i+j \leq 2n-4, \\ [X_i, Y] = A_i\, X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3. \end{cases}$$

De las relaciones de Jacobi de los vectores $\{X_0, X_i, Y\}$, para $1 \leq i \leq n-3$, se tiene $A_i = A_{i+1}$ para cualquier valor de i, con lo que podemos suponer $A_i = A_1$, para $1 \leq i \leq n-2$. El cambio de bases

$$\begin{cases} X_i' = X_i, & 0 \leq i \leq n-2, \\ Y' = Y + A_1\, X_0, \end{cases}$$

permite suponer $[X_i, Y] = 0$ para $0 \leq i \leq n-2$. Así, se tiene $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus < Y >$ siendo $\mathfrak{g}'$ un álgebra filiforme graduada por $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_{3-n} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1$ con $X_0 \in \mathfrak{g}_1$ y $X_1 \in \mathfrak{g}_{3-n}$. De la Proposición 3.2 se tiene que $\mathfrak{g}' = L_{n-1}$, por tanto el álgebra es $\mathfrak{g} = L_{n-1} \oplus \mathbf{K}$, que tiene longitud máxima. Así, no existen álgebras casifiliformes de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,3-n,1,1)}$. $\square$

En el siguiente caso que se considera tampoco existen álgebras casifiliforme de longitud $n-1$.

Álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,3-n,p,p)}$

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{3-n} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_p \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,3-n,p,p)}$ con $3 - n \leq p \leq 0$, la descomposición que admite el álgebra viene dada por $\mathfrak{g} =< X_1 > \oplus \cdots \oplus < X_{p+n-2}, Y > \oplus \cdots \oplus < X_0 >$ y la estructura de esta familia viene recogida en el siguiente lema.

Lema 4.16 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,3-n,p,p)}$, con $3 - n \leq p \leq 0$, la ley del álgebra viene dada por*

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j} X_{i+j-n+2}, & n-1 \leq i+j \leq 2n-4, \\ & 1 \leq i < j \leq n-2,\ i+j \neq 2n+p-4, \\ [X_i, Y] = A_i X_{i+p}, & 1-p \leq i \leq n-3, \\ [X_{n-2}, Y] = A_{n+p-2} X_{n+p-2} + BY, & \\ [X_{n+p-3+i}, X_{n-1-i}] = a_i X_{n+p-2} + B_i Y, & 1 \leq i \leq \lfloor \frac{1-p}{2} \rfloor, \end{cases}$$

donde las constantes de estructura a_i, $a_{i,j}$, A_i, B y B_i deben verificar las ecuaciones que se obtienen de las relaciones de Jacobi.

El siguiente resultado determina las álgebras del tipo considerado.

Proposición 4.17 *No existen álgebras casifiliformes de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,3-n,p,p)}$.*

Demostración. Las condiciones de nilpotencia de $\mathfrak{g}$ garantizan que $B = 0$. Una prueba similar a la realizada en la Proposición 3.2, nos demuestra que las constantes de estructura A_i y $a_{i,j}$, para $j \neq 2n + p - i - 4$, son nulas. Veamos ahora que las constantes a_i son también nulas. En efecto, si alguna de ellas no lo fuese, entonces existirá un i' tal que $a_{i'} \neq 0$, y se tiene $[X_{n+p-3+i'}, X_{n-1-i'}] =$

$a_{i'}X_{n+p-2} + B_{i'}Y$; así, $\{X_{n+p-2}, X_{n+p-1}, \ldots, X_{n-2}\} \in \mathcal{C}^k\mathfrak{g}$ para cualquier valor de k y, el álgebra no sería nilpotente. Finalmente se determinan los coeficientes B_i de las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_{n+p-3+i}, X_{n-2-i}) = 0$, para $1 \leq i \leq \lfloor\frac{-p}{2}\rfloor$. Se obtiene que $B_i + B_{i+1} = 0$, con lo que $B_i = (-1)^{i-1}B_1$. Veamos que no se obtienen álgebras de este tipo cuando p es par.

- Si fuera p par y, para $i = \frac{-p}{2}$, se tiene $B_{n+\frac{p}{2}-3} = 0$, que implica $B_1 = 0$; por tanto se obtiene el álgebra de longitud máxima $\mathfrak{g} = L_{n-1} \oplus \mathbf{K}$.

- Si p es impar, el álgebra viene dada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_{n+p-3+i}, X_{n-1-i}] = (-1)^{i-1}B_1Y, & 1 \leq i \leq \frac{1-p}{2}. \end{cases}$$

No puede ser $B_1 = 0$, porque el álgebra es $\mathfrak{g} = L_{n-1} \oplus \mathbf{K}$, de longitud máxima. Tampoco puede ser $B_1 \neq 0$, ya que el álgebra que resulta es un álgebra filiforme. $\square$

Las álgebras que resultan en el siguiente tipo de graduación son extensiones de álgebras filiformes naturalmente graduadas.

Álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,3-p,n-p+1,1)}$

Se presenta en este apartado el estudio de las álgebras casifiliformes $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{3-p} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-p+1}$, con $2 \leq p \leq n-1$. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,3-n,1,1)}$, admite una descomposición $\mathfrak{g} =< X_1 > \oplus \cdots \oplus < X_0, X_{p-1} > \oplus \cdots \oplus < Y >$. Para esta familia de álgebras su estructura viene dada por

Proposición 4.18 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,3-p,n-p+1,1)}$ con $2 \leq p \leq n-1$, su ley viene dada por*

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j}\, X_{i+j-p+2}, & 1 \le i < j \le n-2, \quad p-1 \le i+j \le n+p-4 \\ [X_i, X_{n+p-3-i}] = A_i Y, & p-1 \le i \le \left\lfloor \frac{n+p-4}{2} \right\rfloor. \end{cases}$$

Las álgebras que admiten este tipo de graduación no tienen longitud $n-1$, salvo el caso que se detalla en la proposición siguiente.

Proposición 4.19 *No existen álgebras casifiliformes de tipo* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,3-p,n-p+1,1)}$, *con* $3 \le p \le n-1$. *Si* $p = 2$ *y* n *es impar, el álgebra es* $\mathfrak{g} = Q_{n-1} \oplus \mathbf{K}$.

Demostración. Se distinguen los casos $p \neq 2$ y $p = 2$

- Si $p \neq 2$, veamos que las constantes de estructura $a_{i,j}$ son nulas para cualquier valor i y j.

Si $1 \le i \le p-2$, $X_i \in \mathfrak{g}_{i-p+2}$, entonces se tiene $[X_i, X_j] = a_{i,j}\, X_{i+j-p+2}$ para $1 \le i < j \le n-2$ y $p-1 \le i+j \le n+p-4$. Si $a_{i,j} \neq 0$, como $i+j-p+2 \le j$, el subíndice del vector $X_{i+j-p+2}$ es menor o igual que el subíndice del vector X_j; al calcular $\{C^i(\mathfrak{g})\}_{i \in \mathbb{N}}$ no existirá $k \in \mathbb{N}$ de tal manera que $\{C^k(\mathfrak{g})\} = \{0\}$ y el álgebra no sería nilpotente.

Si $p-1 \le i \le \left\lfloor \frac{n+p-5}{2} \right\rfloor$, y existe una constante $a_{i,j} \neq 0$. Sea k es el menor valor de i tal que $[X_i, X_j] \neq 0$, para algún $j > i$; se tiene que $[X_k, X_j] = a_{k,j}\, X_{k+j-p+2}$, con $a_{k,j} \neq 0$; y, entonces, la relación de Jacobi $J(X_0, X_{k-1}, X_j) = 0$ implica la contradicción $[X_k, X_j] \neq 0$.

Una vez probado que $a_{i,j} = 0$ para cualquier i y j. Determinemos las constantes A_i, con $p-1 \le i \le \left\lfloor \frac{n+p-4}{2} \right\rfloor$. De las relaciones de Jacobi de los vectores $\{X_0, X_i, X_{n+p-4-i}\}$, para $p-1 \le i \le \left\lfloor \frac{n+p-5}{2} \right\rfloor$, se tiene que $A_{i+1} = -A_i$; entonces, $A_{(p-2)+i'} = (-1)^{i'-1} A_{p-1}$, con $1 \le i' \le \left\lfloor \frac{n-p}{2} \right\rfloor$. No puede ser $n+p$ impar, ya que la relación de Jacobi $J(X_0, X_{\frac{n+p-5}{2}}, X_{\frac{n+p-3}{2}}) = 0$ implica $A_{\frac{n+p-3}{2}} = 0$ y, por tanto, $A_{p-1} = 0$ y el álgebra se reduce a $\mathfrak{g} = L_{n-1} \oplus \mathbb{K}$, que es de longitud máxima. Si $n+p$ es par, no puede ser $A_1 = 0$, ya que se tendría también que es $\mathfrak{g} = L_{n-1} \oplus \mathbb{K}$. Así, $A_1 \neq 0$ y se tiene

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{n+p-3-i}] = (-1)^{i-1} A_1 Y, & p-1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n+p-4}{2} \right\rfloor, \end{cases}$$

que resulta ser un álgebra filiforme, como prueba el cambio de bases

$$\begin{cases} X'_0 = X_0 + X_{p-1}, & \\ X'_i = X_i, & 1 \leq i \leq n-2, \\ X'_{n-1} = A_1 Y, & \end{cases}$$

al ser $[X'_0, X'_i] = X'_{i+1}$, para $1 \leq i \leq n-2$.

Si $p \neq 2$, no se tiene, en ningún caso, un álgebra casifiliforme $\mathfrak{g}$ con longitud $n-1$.

- Si $p = 2$, el álgebra admite la descomposición $\mathfrak{g} = < X_0, X_1 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} > \oplus < Y >$; y se tiene que $Y \in \operatorname{cen} \mathfrak{g}$. Entonces, el álgebra es $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/ < Y >$ es un álgebra filiforme naturalmente graduada. Asi, dependiendo de la paridad de la dimensión del álgebra $\mathfrak{g}'$, la ley del álgebra $\mathfrak{g}$ viene dada por:

Si $\dim \mathfrak{g}$ es par,

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{n-1-i}] = A_i Y & 1 \leq i \leq \frac{n-2}{2}, \end{cases}$$

Un tratamiento similar al desarrollado en el caso $p \neq 2$, nos permite asegurar que no puede ser $\mathfrak{g}$ un algebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,n-1,1)}$, con n par, pues las álgebras que admiten tal descomposición serían: ó un álgebra $\mathfrak{g}$ casifiliforme de longitud máxima ó un álgebra $\mathfrak{g}$ filiforme. Luego $\dim \mathfrak{g}$ es impar y la ley del álgebra $\mathfrak{g}$ viene dada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}\, \alpha X_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}, \\ [X_i, X_{n-1-i}] = A_i Y & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor, \end{cases}$$

con $\alpha = 0$, ó $\alpha = 1$.

No puede ser $\alpha = 0$, ya que las relaciones de Jacobi de los vectores $\{X_0, X_i, X_{n-2-i}\}$, para $1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}$, implican que el álgebra es $\mathfrak{g} = L_{n-1} \oplus \mathbf{K}$, que es de longitud máxima.

Luego $\alpha = 1$. En efecto, las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{n-2-i}) = 0$ para $1 \leq i \leq \frac{n-5}{2}$, proporcionan las ecuaciones

$$0 = A_{i+1} + A_i, \text{ con } i \neq \frac{n-5}{2},$$

con lo cual $A_i = (-1)^{i-1} A_1$, para $1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}$. De la relación de Jacobi $J(X_0, X_{\frac{n-3}{2}}, X_{\frac{n-1}{2}}) = 0$, resulta que $A_{\frac{n-3}{2}} = 0$. Por tanto, $A_1 = 0$ y el álgebra es $\mathfrak{g} = Q_{n-1} \oplus \mathbf{K}$; como Q_{n-1} es un álgebra de longitud $n-2$, entonces $\mathfrak{g}$ es un álgebra escindida de longitud $n-1$. □

Nota 4.20 En el tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,3-p,n-p+1,1)}$ con $p = 2$, la graduación que se obtiene es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-1}$, que completará las álgebras que se estudian en las Subsecciones 4.3.2, 4.3.3 y 4.3.4.

Se concluye esta sección con el estudio de las álgebras casifiliformes de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,2-p,2-p,1)}$.

Álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,2-p,2-p,1)}$

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{2-p} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-p}$, con $2 \leq p \leq n-1$, es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,2-p,2-p,1)}$, la descomposición que admite el álgebra viene dada por

$\mathfrak{g} =< Y > \oplus < X_1 > \oplus \cdots \oplus < X_0, X_{p-1} > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} >$. La estructura de estas familias de álgebras está recogida en el siguiente lema.

Lema 4.21 *Si* $\mathfrak{g}$ *es un álgebra casifiliforme de tipo* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,2-p,2-p,1)}$, *con* $2 \leq p \leq n-1$, *la ley del álgebra viene dada por*

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j} X_{i+j-p+2}, & 1 \leq i < j \leq n-2, \quad p-1 \leq i+j \leq n+p-4 \\ [X_i, X_{p-2-i}] = A_i Y, & (A_i = 0 \text{ si } p \leq 4) \quad 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{p-3}{2} \right\rfloor. \end{cases}$$

Además de extensiones de álgebras filiformes naturalmente graduadas, existen para cada p y n adecuados un álgebra casifiliforme del tipo considerado.

Proposición 4.22 *Si* $\mathfrak{g}$ *es un álgebra casifiliforme de tipo* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,2-p,2-p,1)}$, *con* $2 \leq p \leq n-1$, *entonces se tiene que si* $p = 2$ *y* n *es impar el álgebra es* $\mathfrak{g} = Q_{n-1} \oplus K$. *Además si* p *es impar y* $p \geq 5$, *el álgebra es* $\mathfrak{g} = L_{(n,2-p,2-p,1)}$ *siendo*

$$L_{(n,2-p,2-p,1)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{p-2-i}] = (-1)^{i-1} Y, & 1 \leq i \leq \frac{p-3}{2}. \end{cases}$$

Demostración. La demostración se efectúa distinguiendo los casos $p \neq 2$ y $p = 2$.

- Si $p \neq 2$, no puede ser $p = 3$ ni $p = 4$, ya que $A_i = 0$ y la Proposición 4.19 nos garantiza que $\mathfrak{g} = L_{n-1} \oplus \mathbf{K}$, que es un álgebra de longitud máxima. Si $p \geq 4$, razonando como en la Proposición 4.19, del epigrafe anterior, se tiene que $a_{i,j} = 0$, para $1 \leq i < j \leq n-2, \quad p-1 \leq i+j \leq n+p-4$. La determinación de los coeficientes A_i, resulta de las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{p-3-i}) = 0$ para $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{p-5}{2} \right\rfloor$, obteniendose que $A_i + A_{i+1} = 0$, con lo que $A_i = (-1)^{i-1} A_1$ para $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{p-3}{2} \right\rfloor$.

No puede ser p par, porque tomando $i = \frac{p-4}{2}$, la relación de Jacobi de los vectores $\{X_0, X_{\frac{p-4}{2}}, X_{\frac{p-2}{2}}\}$ implica que $A_{\frac{p-4}{2}} = 0$ y, por tanto, $A_i = 0$ para cualquier valor de i. Y el álgebra es $\mathfrak{g} = L_{n-1} \oplus \mathbf{K}$, que tiene longitud máxima.

Si p es impar, no puede ser $A_1 = 0$. Luego $A_1 \neq 0$ y con un cambio de base análogo al reflejado de la Proposición 4.17, se tiene $\mathfrak{g} = L_{(n,2-p,2-p,1)}$, que es un álgebra de longitud $n-1$.

- Si $p = 2$, el álgebra es $\mathfrak{g} =< Y > \oplus < X_0, X_1 > \oplus < X_2 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} >$, donde $Y \in \mathfrak{g}_0$. Los posibles productos con este vector son nulos pues, $[X_i, Y] = \alpha X_i$, con $\alpha \neq 0$, para $2 \leq i \leq n-2$, contradice la nilpotencia de $\mathfrak{g}$; para $i = 1$, se tiene que $[X_1, Y] = a_0 X_0 + a_1 X_1$, y como X_0 es un vector característico del álgebra, que no pertenece al subálgebra derivada, se tiene $a_0 = 0$, y las condiciones de nilpotencia de $\mathfrak{g}$ obligan a que también $a_1 = 0$. Con lo que $\mathfrak{g}$ es una extensión algebraica de un álgebra filiforme naturalmente graduada. Con un tratamiento similar al de la Proposición 4.19, tiene que ser $\mathfrak{g} = Q_{n-1} \oplus \mathbf{K}$, con n impar,

Así, como $\dim \mathcal{C}^1(Q_{n-1} \oplus \mathbf{K}) = n - 3$ y $\dim \mathcal{C}^1(L_{(n,2-p,2-p,1)}) = n - 2$, se concluye que las álgebras obtenidas son no isomorfas. □

Nota 4.23 Posteriormente se denotará al álgebra $L_{(n,2-p,2-p,1)}$ por $\mathfrak{g}^4_{(n,1,p)}$.

Las siguientes subsecciones, con las que se continúa el estudio de las álgebras casifiliformes de longitud $\dim \mathfrak{g} - 1$, estan dedicadas a las álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,p,p)}$, con $1 \leq p \leq n-1$.

La primera subsección, se dedica a la obtención de la estructura de esta familia de álgebras. Asimismo, se obtienen algunas relaciones entre las constantes de estructura, que facilitarán posteriormente la clasificación.

Se concluye el Capítulo, obteniendo las álgebras que admiten tales graduaciones, según los diferentes valores de p. El uso del cálculo formal, en concreto el paquete de cálculo simbólico Mathematica, resultó ser una herramienta imprescindible, en la generación de familia y la obtención de ejemplos fiables.

4.3.2 Estructura de las álgebras $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,p,p)}$

Un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,p,p)}$, con $1 \leq p \leq n-1$, es aquella que admite la descomposición $\mathfrak{g} =< X_0 > \oplus \cdots \oplus < X_{p-1}, Y > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} >$, donde $X_i \in \mathfrak{g}_{i+1}$, para $0 \leq i \leq n-2$, e $Y \in \mathfrak{g}_p$, siendo $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y\}$ una base homogénea y adaptada del álgebra.

Como se refleja en la siguiente proposición, la estructura de estas familias de álgebras depende de p; en definitiva, de la ubicación del vector Y.

Proposición 4.24 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,p,p)}$, con $1 \leq p \leq n-1$, su estructura en una base homogénea y adaptada, viene dada por*

a) Si $p = 1$

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j} X_{i+j+1}, & 1 \leq i < j \leq n-3-i, \\ [X_i, Y] = A_i X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3. \end{cases}$$

b) Si $2 \leq p \leq 4$,

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j} X_{i+j+1}, & 1 \leq i < j \leq n-3-i, \\ [X_i, Y] = A_i X_{i+p}, & (A_i = 0, \text{ si } p \geq n-2) \quad 1 \leq i \leq n-2-p. \end{cases}$$

c) Si $5 \leq p$,

$$\mathfrak{g}=\begin{cases} [X_0,X_i]=X_{i+1}, & 1\leq i\leq n-3,\\ [X_i,X_j]=a_{i,j}\,X_{i+j+1}, & 1\leq i<j\leq n-3-i,\ j\neq p-2-i,\\ [X_i,X_{p-2-i}]=a_{i,p-2-i}\,X_{p-1}+B_i\,Y, & 1\leq i\leq \left\lfloor \frac{p-3}{2}\right\rfloor,\\ [X_i,Y]=A_i\,X_{i+p}, & (A_i=0,\ si\ p\geq n-2.)\ \ 1\leq i\leq n-2-p. \end{cases}$$

donde las constantes de estructura $a_{i,j}$, B_i y A_i satisfacen las relaciones de Jacobi.

Se obtienen, a continuación, algunas relaciones para las constantes de estructura en las distintas familias de álgebras consideradas.

Proposición 4.25 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{(n,1,p,p)}$, con $1\leq p\leq n-1$, se verifica que*

1.- Si $p<n-2$, entonces $A_i=A_1$, para $1\leq i\leq n-2-p$.

2.- $\begin{cases} B_i=(-1)^{i-1}B_1, & 1\leq i\leq \left\lfloor \frac{p-3}{2}\right\rfloor,\ \ si\,p\,es\,impar,\\ B_i=0, & si\,p\,es\,par. \end{cases}$

Demostración. Si $p<n-2$, las relaciones de Jacobi $J(X_0,X_i,Y)=0$, para $1\leq i\leq n-3-p$, implican que $A_i=A_{i+1}$, para cualquier i y, por tanto, $A_i=A_1$, con lo que se concluye la demostración del primer punto.

De las relaciones de Jacobi $J(X_0,X_i,X_{p-3-i})=0$, con $1\leq i\leq \left\lfloor \frac{p-5}{2}\right\rfloor$, se tiene $a_{i,p-3-i}X_{p-1}=a_{i+1,p-2-(i+1)}X_{p-1}+B_{i+1}Y+a_{i,p-2-i}X_{p-1}+B_iY$. Igualando los coeficientes de Y, se obtiene que $B_{i+1}+B_i=0$, para $1\leq i\leq \left\lfloor \frac{p-5}{2}\right\rfloor$, y por tanto $B_i=(-1)^{i-1}B_1$. Si p es par, la relación de Jacobi $J(X_0,X_{\frac{p-4}{2}},X_{\frac{p-2}{2}})=0$ implica $B_{\frac{p-4}{2}}=0$, con lo que $B_1=0$. Entonces, si p es par, $B_i=0$ para cualquier i, y si p es impar, $B_i=(-1)^{i-1}B_1$, para $1\leq i\leq \left\lfloor \frac{p-3}{2}\right\rfloor$. □

El resultado de la siguiente proposición, nos establece relaciones entre las constantes de estructura $a_{i,j}$, que permite expresarlos todos en función de los $a_{1,j}$.

Proposición 4.26 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,p,p)}$, con $1 \leq p \leq n-1$, se verifica que*

$$a_{i,j} = \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k \binom{i-1}{k} a_{1,j+k}, \quad con\ 2 \leq i < j \leq n-3-i,$$

con las restricciones

$$\sum_{k=0}^{i} (-1)^k \binom{i}{k} a_{1,i+1+k} = 0, \quad 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor.$$

Demostración. La expresión de los coeficientes $a_{i,j}$ se obtiene por inducción en el subíndice i. De las relaciones de Jacobi de los vectores $\{X_0, X_i, X_j\}$ donde $1 \leq i < j-1$, se tiene que $a_{i,j} = a_{i,j+1} + a_{i+1,j}$; entonces $a_{i+1,j} = a_{i,j} - a_{i,j+1}$ y por tanto la expresión es valida para $i = 1$, pues $a_{2,j} = a_{1,j} - a_{1,j+1}$ para cualquier j. Suponiendo cierta la expresión para s,

$$a_{s,j} = \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k \binom{s-1}{k} a_{1,j+k},$$

veámoslo para $s+1$.

De la relación de Jacobi $J(X_0, X_s, X_j) = 0$, se tiene que $a_{s+1,j} = a_{s,j} - a_{s,j+1}$ luego

$$a_{s+1,j} = \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k \binom{s-1}{k} a_{1,j+k} - \sum_{k=0}^{s-1} \binom{s-1}{k} a_{1,j+1+k},$$

agrupando en los coeficientes $a_{1,j}, a_{1,j+1}, \ldots, a_{1,j+s}$, se tiene que

$$(-1)^0\binom{s-1}{0}a_{1,j} = (-1)^0\binom{s}{0}a_{1,j}$$

$$\left((-1)^1\binom{s-1}{1} + \binom{s-1}{0}\right) a_{1,j+1} = (-1)^1\binom{s}{1}a_{1,j+1}$$

$$\left((-1)^2\binom{s-1}{2} + \binom{s-1}{1}a_{1,j+2}\right) = (-1)^2\binom{s}{2}a_{1,j+2}$$

$$\vdots$$

$$\left((-1)^k\binom{s-1}{k} + \binom{s-1}{k-1}\right) a_{1,j+k} = (-1)^k\binom{s}{k}a_{1,j+k}$$

$$\vdots$$

$$(-1)^s\binom{s-1}{s-1}a_{1,j+s} = (-1)^s\binom{s}{s}a_{1,j+s}$$

con lo cual,

$$a_{s+1,j} = (-1)^0\binom{s}{0}a_{1,j}+(-1)^1\binom{s}{1}a_{1,j+1}+\ldots+(-1)^k\binom{s}{k}a_{1,j+k}+\ldots+(-1)^s\binom{s}{s}a_{1,j+s},$$

que es la expresión que se debía obtener.

Las restricciones de la proposición resultan de las relaciones de Jacobi de los vectores $\{X_0, X_i, X_{i+1}\}$, para $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor$; desarrollándolas, se tiene que $a_{i,i+1} = a_{i,i+2}$ y sustituyendo las expresiones anteriores,

$$a_{i,i+1} = (-1)^0\binom{i-1}{0}a_{1,i+1} + \cdots + (-1)^k\binom{i-1}{k}a_{1,i+k+1} + \cdots + (-1)^{i-1}\binom{i-1}{i-1}a_{1,2i},$$

$$a_{i,i+2} = (-1)^0\binom{i-1}{0}a_{1,i+2} + \cdots + (-1)^k\binom{i-1}{k-1}a_{1,i+k+1} + \cdots + (-1)^{i-1}\binom{i-1}{i-1}a_{1,2i+1},$$

se obtiene, agrupando en los coeficientes $a_{1,i+1}, a_{1,i+1}, \ldots, a_{1,2i+1}$, la restricción

$$(-1)^0\binom{i-1}{0}a_{1,i+1} + \ldots + (-1)^k\binom{i}{k}a_{1,i+k+1} + \ldots (-1)^i\binom{i}{i}a_{1,2i+1} = 0. \qquad \square$$

El estudio de las álgebras en las distintas graduaciones, se realiza en las dos subsecciones siguientes. En la primera de ellas, se estudian las álgebras $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,p,p)}$, con $1 \leq p \leq 7$, en la que se agrupan resultados parciales propios de cada índice p. El caso general lo constituye las álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,p,p)}$, con $p \geq 8$, que detallamos en la Subsección 4.3.4. se obtiene siempre, dos álgebras (tres si n es par), cuando el vector Y de la base es un elemento central, y se obtienen, cuatro álgebras (cinco si n es par y p impar), cuando el vector Y no es central ni pertenece al subálgebra derivada. Cuando p es impar y $p \geq 8$, existe una familia paramétrica de álgebras con el vector Y de la base considerada perteneciendo a la subálgebra derivada y no perteneciendo al centro, para el tipo y dimensión adecuadas.

Se comienza, ahora, con el estudio de las álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,p,p)}$, con $1 \leq p \leq 7$.

4.3.3 Álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,p,p)}$ con $1 \leq p \leq 7$

En el primer caso que se considera no existe ningún álgebra casifiliforme de longitud $\dim \mathfrak{g} - 1$.

Álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,1,1)}$

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-1}$ es un álgebra del tipo considerado, admite la descomposición $\mathfrak{g} =< X_0, Y > \oplus < X_1 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} >$. La proposición siguiente demuestra que no existen álgebras casifiliformes de este tipo.

Proposición 4.27 *No existen álgebras casifiliformes de tipo* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,1,1)}$.

Demostración. En efecto, de las Proposiciones 4.24 y 4.25, la ley en el álgebra viene dada por:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j} X_{i+j+1}, & 1 \leq i < j \leq n-3-i, \\ [X_i, Y] = A_1 X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3. \end{cases}$$

y el cambio de bases

$$\begin{cases} X_i' = X_i, & 0 \leq i \leq n-2, \\ Y' = Y + A_1 X_0, \end{cases}$$

permite suponer $A_i = 0$, para $1 \leq i \leq n-3$. Por tanto, el producto viene dado por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j} X_{i+j+1}, & 1 \leq i < j \leq n-3-i. \end{cases}$$

Con lo cual $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus < Y >$, siendo $\mathfrak{g}'$ un álgebra filiforme de longitud máxima, luego $\mathfrak{g}$ tiene longitud máxima. □

Cuando $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,p,p)}$ con $2 \leq p \leq 4$, el vector Y de la base no puede pertenecer a la subálgebra derivada. Cuando se considera $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,2,2)}$ no existen álgebras casifiliformes de este tipo.

Álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,2,2)}$

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,2,2)}$, admite la descomposición $\mathfrak{g} =< X_0 > \oplus < X_1, Y > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} >$. En la siguiente proposición se demuestra, al igual que en el caso anterior, que no existen álgebras casifiliformes de este tipo.

Proposición 4.28 *No existen álgebras casifiliformes de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,2,2)}$.*

Demostración. En efecto, como antes, la ley del álgebra viene dada por

$$\mathfrak{g}_i = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j} X_{i+j+1}, & 1 \leq i < j \leq n-3-i, \\ [X_i, Y] = A X_{i+2}, & 1 \leq i \leq n-4. \end{cases}$$

Entonces, se tiene que si $A = 0$, el vector Y pertenece al centro del álgebra y por tanto $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus < Y >$, siendo $\mathfrak{g}'$ un álgebra filifome de longitud máxima.

Si $A \neq 0$ y, por tanto, $n \geq 5$, las únicas álgebras que se obtienen son $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n,1)}$. En efecto, cuando $n = 5$, la ley de $\mathfrak{g}$ viene dada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_1, Y] = AX_3. \end{cases}$$

El cambio de bases

$$\begin{cases} X_i' = X_i, & 0 \leq i \leq 3, \\ Y' = \frac{1}{A} Y, \end{cases}$$

permite suponer $A = 1$, con lo cual $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(5,1)}$.

Supongamos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n,1)}$. Si $\dim \mathfrak{g} = n + 1$, entonces $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} / < X_{n-1} >$, es un álgebra casifiliforme de dimensión n y de tipo $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_{(n,1,2,2)}$, es decir, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}^2_{(n,1)}$, y la ley del álgebra $\mathfrak{g}$ viene, entonces, dada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [X_i, Y] = X_{i+2}, & 1 \leq i \leq n-4, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = a_i X_{n-1}, & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor, \\ [X_{n-3}, Y] = AX_{n-1}. \end{cases}$$

De la relación de Jacobi $J(X_0, X_{n-4}, Y) = 0$, se tiene que $A = 1$. Asimismo de las relaciones de Jacobi $J(X_0, , X_i, X_{n-3-i}) = 0$, con $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor$, se tiene que $a_{i+1} = (-1)^i a_1$. Si n es par e $i = \frac{n-4}{2}$, se obtiene $a_{\frac{n-4}{2}} = 0$, de donde $a_1 = 0$ y por tanto $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n+1,1)}$. Si n es impar, sea $n = 2k + 1$, con $k \in \mathbb{N}$. Como antes, se tiene que $a_1 = -a_2$, $a_2 = -a_3$, $\ldots a_{k-2} = -a_{k-1}$, y la relación de Jacobi $J(X_{k-2}, X_{k-1}, Y) = 0$ implica $a_{k-2} = a_{k-1}$, luego $a_{k-1} = 0$ y es $a_1 = 0$, con lo que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n+1,1)}$. Luego, en ambos casos se tiene $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n+1,1)}$, que es un álgebra de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n+1,1,2)}$, con longitud máxima, como puede verse en la Proposición 4.10.

$\square$

Definicion 4.29 Si $3 \leq p \leq n-3$, se denotan por $\mathfrak{g}^1_{(n,1,p)}$, $\mathfrak{g}^2_{(n,1,p)}$ y $\mathfrak{g}^3_{(n,1,p)}$, las álgebras definidas en la base homogénea y adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y\}$ por

Si $n \geq 6$, $\mathfrak{g}^1_{(n,1,p)}$ es el álgebra

$$\mathfrak{g}^1_{(n,1,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, Y] = X_{i+p}, & 1 \leq i \leq n-p-2. \end{cases}$$

Si $n \geq 6$, $\mathfrak{g}^2_{(n,1,p)}$ es el álgebra

$$\mathfrak{g}^2_{(n,1,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, Y] = X_{i+p}, & 1 \leq i \leq n-p-2, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \leq i \leq n-4. \end{cases}$$

Si $n \geq 8$ y n es par, $\mathfrak{g}^3_{(n,1,p)}$ es el álgebra

$$\mathfrak{g}^3_{(n,1,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, Y] = X_{i+p}, & 1 \leq i \leq n-p-2, \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i-1} X_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}. \end{cases}$$

Es claro que las álgebras consideradas son casifiliformes de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,p,p)}$ y, particularizando en cada caso las constantes de estructura, se comprueba directamente que se verifican las relaciones de Jacobi en cada una de las álgebras antes mencionadas.

Las álgebras son no isomorfas pues siempre, como queda reflejada en la siguiente tabla, se puede encontrar un invariante que las distinga dos a dos

g	$\dim[\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}),\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})]$	$\dim(\operatorname{cen}\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}))$
$\mathfrak{g}^1_{(n,1,p)}$	0	$n-2$
$\mathfrak{g}^2_{(n,1,p)}$	0	$n-3$
$\mathfrak{g}^3_{(n,1,p)}$	1	–

Las álgebras mencionadas serán las únicas que aparecen en el caso de ser del tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,3,3)}$.

Álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,3,3)}$

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,3,3)}$, admite la descomposición $\mathfrak{g} =< X_0 > \oplus < X_1 > \oplus < X_2, Y > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} >$. Existen dos o tres álgebras, dependiendo de la paridad de la dimensión del álgebra.

Proposición 4.30 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,3,3)}$ y $n \geq 9$, se tiene que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n,1,3)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n,1,3)}$. Además, también puede ser $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^3_{(n,1,3)}$ si n es par.*

Demostración. De la graduación de $\mathfrak{g}$, la ley viene dada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j}\, X_{i+j+1}, & 1 \leq i < j \leq n-3-i, \\ [X_i, Y] = A\, X_{i+3}, & 1 \leq i \leq n-5. \end{cases}$$

No puede ser $A = 0$, pues si fuera $A = 0$, el vector Y pertenece al centro de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus < Y >$, siendo $\mathfrak{g}'$ un álgebra de filiforme de longitud máxima, y por tanto $\mathfrak{g}$ es de longitud máxima; luego $A \neq 0$.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra del tipo considerado. Si $\dim \mathfrak{g} = 9$, la ley del álgebra viene dada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le 6, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j} X_{i+j+1}, & 1 \le i < j \le 6 - i, \\ [X_i, Y] = A X_{i+3}, & 1 \le i \le 4, \end{cases}$$

realizando el cambio de bases adecuado ($Y' = 1/AY$), se puede suponer $A = 1$. De las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_1, X_i) = 0$, para $2 \le i \le 4$, $J(X_0, X_2, X_3) = 0$ y $J(X_1, X_2, Y) = 0$, se tiene que $a_{2,3} = 0$ y que $a_{1,i} = a_{1,2}$, para $2 \le i \le 5$. Con lo que $\mathfrak{g}$ es

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le 6, \\ [X_1, X_i] = a_{1,2} X_{i+2}, & 1 \le i \le 5, \\ [X_i, Y] = X_{i+3}, & 1 \le i \le 4. \end{cases}$$

Si $a_{1,2} = 0$, el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(9,1,3)}$. Si $a_{1,2} \neq 0$, realizando el cambio de bases

$$\begin{cases} X'_0 = X_0, \\ X'_i = \frac{1}{a_{1,2}} X'_i, & 1 \le i \le 7, \\ Y' = Y, \end{cases}$$

se tiene que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(9,1,3)}$. Con lo que se concluye la demostración para $n = 9$.

Si $\dim(\mathfrak{g}) = 10$, la descomposición es

$\mathfrak{g} =< X_0 > \oplus < X_1 > \oplus < X_2, Y > \oplus < X_3 > \oplus \cdots \oplus < X_8 >$, donde la ley del álgebra viene dada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le 7, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j} X_{i+j+1}, & 1 \le i < j \le 7 - i, \\ [X_i, Y] = A X_{i+3}, & 1 \le i \le 5, \end{cases}$$

donde puede suponerse $A = 1$. De las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, X_j) = 0$, para $1 \le i < j \le 6 - i$, $J(X_1, X_2, Y) = 0$, $J(X_1, X_2, X_3) = 0$ y $J(X_1, X_3, Y) = 0$. Se tienen las igualdades:

$$\begin{cases} a_{1,2} = a_{1,3} = a_{1,4} = a_{1,5}, \\ a_{1,5} = a_{2,5} + a_{1,6}, \\ a_{2,3} = a_{2,4} = 0, \\ a_{3,4} = -a_{2,5}, \\ 0 = 2a_{1,2}a_{2,5}. \end{cases}$$

Si $a_{1,2} \neq 0$, entonces $a_{2,5} = a_{3,4} = 0$ y por tanto $a_{1,i} = a_{1,2}$ para cualquier valor de i. La ley en el álgebra es

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 7, \\ [X_1, X_i] = a_{1,2}X_{i+2}, & 1 \leq i \leq 6, \\ [X_i, Y] = X_{i+3} & 1 \leq i \leq 5, \end{cases}$$

y realizando el cambio de bases adecuado se tiene que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(10,1,3)}$.

Si $a_{1,2} = 0$ las álgebras que se obtienen dependen de la nulidad de $a_{2,5}$. Así, si $a_{2,5} = 0$, entonces $a_{3,4} = 0$ y el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(10,1,3)}$. Si $a_{2,5} \neq 0$, se tiene que $a_{2,5} = -a_{3,4} = -a_{1,6} = -a$ y la ley en el álgebra es

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 7, \\ [X_i, X_{7-i}] = (-1)^i a X_8, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_i, Y] = X_{i+3}, & 1 \leq i \leq 5. \end{cases}$$

Aplicando el siguiente cambio de bases

$$\begin{cases} X'_0 = X_0, \\ X'_i = \frac{1}{a}X_i, \quad 1 \leq i \leq 8, \\ Y' = Y. \end{cases}$$

se puede suponer $a = 1$ y el álgebra resultante es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^3_{(10,1,3)}$. Así queda demostrado que, si la dimensión de $\mathfrak{g}$ es $\dim \mathfrak{g} = 9$, el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(9,1,3)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(9,1,3)}$, y si $\dim \mathfrak{g} = 10$, el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(10,1,3)}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(10,1,3)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^3_{(10,1,3)}$.

Se supone, ahora, cierto para $\dim \mathfrak{g} = n$, y la prueba para $n + 1$, se hace distinguiendo la paridad de n.

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra del tipo considerado con $\dim \mathfrak{g} = n + 1$, La ley del álgebra viene dada por:

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j} X_{i+j+1}, & 1 \leq i < j \leq n-2-i, \\ [X_i, Y] = A X_{i+3}, & 1 \leq i \leq n-4. \end{cases}$$

Realizando un cambio de bases adecuado se puede suponer $A = 1$ para $1 \leq i \leq n-4$.

• Si $\dim \mathfrak{g} = n + 1$, con $n + 1$ par, entonces $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/ < X_{n-1} >$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g}_{(n,1,3,3)}$, y puede ser $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}^1_{(n,1,3)}$ ó $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}^2_{(n,1,3)}$, con lo cual el producto en $\mathfrak{g}$ se puede expresar por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [X_1, X_i] = \alpha X_{i+2}, & 1 \leq i \leq n-4, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = a_{i,n-2-i} X_{n-1}, & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}, \\ [X_i, Y] = X_{i+3} & 1 \leq i \leq n-4. \end{cases}$$

con $\alpha = 0$ ó $\alpha = 1$.

De las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_{i-1}, X_{n-2-i}) = 0$, para $2 < i \leq \frac{n-3}{2}$, se obtiene que $a_{i,n-2-i} = -a_{i-1,n-1-i}$, y de las relaciones $J(X_1, X_{i-2}, X_{n-2-i}) = 0$, para $4 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$, se tiene que $0 = \alpha(a_{i,n-2-i} + a_{i-2,n-i})$.

Si $\alpha = 1$, se tiene que $a_{i,n-2-i} + a_{i-2,n-i} = 0$; luego $a_{i,n-2-i} = 0$ y $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n+1,1,3)}$.

Si $\alpha = 0$, el álgebra que resulta depende de la nulidad de $a_{i,n-2-i} + a_{i-2,n-i}$:

Si $a_{i,n-2-i} + a_{i-2,n-i} = 0$, se tiene que $a_{i,n-2-i} = 0$ para cualquier i y $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n+1,1,3)}$.

Si $a_{i,n-2-i} + a_{i-2,n-i} \neq 0$, entonces $a_{i,n-2-i} = (-1)^{(i-1)} a_{1,n-3}$ y denotando por $a = a_{1,n-3}$, el álgebra será $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^3_{(n+1,1,3)}$.

• Si $\dim \mathfrak{g} = n+1$, con $n+1$ impar, se tiene que, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/ < X_{n-1} >$ es un álgebra de tipo $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_{(n,1,3,3)}$, con $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}^1_{(n,1,3)}$, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}^2_{(n,1,3)}$ ó $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}^3_{(n,1,3)}$, con lo cual el producto en $\mathfrak{g}$ viene dado por

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [X_1, X_i] = \alpha X_{i+2}, & 1 \leq i \leq n-4, \quad \alpha = 0, 1, \\ [X_i, Y] = X_{i+3}, & 1 \leq i \leq n-4, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = a_{i,n-2-i} X_{n-1}, & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}. \end{cases}$$

ó

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{(i-1)} a X_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}, \\ [X_i, Y] = X_{i+3}, & 1 \leq i \leq n-4, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = a_{i,n-2-i} X_{n-1}, & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}. \end{cases}$$

En el primer caso, de las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_{i-1}, X_{n-2-i}) = 0$, para $2 < i \leq \frac{n-4}{2}$, se tiene que $a_{i,n-2-i} = -a_{i-1,n-1-i}$, para $3 < i \leq \frac{n-4}{2}$, y $\alpha = a_{2,n-4} + a_{1,n-3}$ y de la relación $J(X_0, X_{\frac{n}{2}-2}, X_{\frac{n}{2}-1}) = 0$ se obtiene que $a_{\frac{n}{2}-2,\frac{n}{2}} = 0$, con lo que $a_{i,n-2-i} = 0$, para $2 < i \leq \frac{n-2}{2}$, y $a_{1,n-3} = \alpha$. Si $\alpha = 0$, se obtiene el álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n+1,1,3)}$ y si $\alpha = 1$, el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n+1,1,3)}$.

En el segundo caso, de las relaciones de Jacobi $J(X_{i-3}, X_{n-2-i}, Y) = 0$, para $4 \leq i << \frac{n}{2} - 2$, se tiene $a_{i-3,n-i+1} = -a_{i,n-2-i}$; la relación de Jacobi $J(X_0, X_{i-1}, X_{n-2-i}) = 0$, para $2 \leq i < \frac{n-2}{2}$, implica $(-1)^{(i-1)} a = a_{i,n-i-2} + a_{i-1,n-i-1}$. Las ecuaciones para $i = 1, 2, 3$ son: $i = 1$, $a_{1,n-3} + a_{2,n-4} = -a$; $i = 2$, $a_{2,n-4} + a_{3,n-5} = a$ e $i = 3$, $a_{3,n-5} + a_{4,n-6} = -a$. Teniendo en cuenta que $a_{4,n-6} = -a_{1,n-3}$, se obtiene $a = 0$. De la relación de Jacobi $J(X_0, X_{\frac{n}{2}-2}, X_{\frac{n}{2}-1}) = 0$, se obtiene que $(-1)^{\frac{n}{2}-1} a = a_{\frac{n}{2}-2,\frac{n}{2}}$. Como $a = 0$, se tiene $a_{\frac{n}{2}-2,\frac{n}{2}} = 0$, con lo cual todas las constantes de estructura son nulas y el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n+1,1,3)}$. $\square$

Nota 4.31 Además de las álgebras mencionadas, si la dimensión de $\mathfrak{g}$ es 8, existe un álgebra, cuya ley está recogida en el Apéndice.

Cuando $p = 4$ y la dimensión es $n \geq 12$, las álgebras que se obtienen son $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n,1,4)}$ y $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n,1,4)}$.

Álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,4,4)}$

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,4,4)}$ admite la descomposición $\mathfrak{g} =< X_0 > \oplus < X_1 > \oplus < X_2 > \oplus < X_3, Y > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} >$. La siguiente proposición, demuestra que las álgebras que admiten esta graduación son $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n,1,4)}$ y $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n,1,4)}$.

Proposición 4.32 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,4,4)}$, con $n \geq 12$, se tiene que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n,1,4)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n,1,4)}$.*

Demostración. La demostración se realizará de manera idéntica al caso anterior, obteniendose la expresión de dichas familias para $\dim \mathfrak{g} = 12$ y con una inducción sobre la dimensión del álgebra.

Si $\dim \mathfrak{g} = 12$ el producto viene dado para estas familias de álgebras por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 9, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j}\, X_{i+j+1}, & 1 \leq i < j \leq 9 - i, \\ [X_i, Y] = A\, X_{i+4}, & 1 \leq i \leq 6. \end{cases}$$

Si $A = 0$, se tiene que $Y \in \operatorname{cen} \mathfrak{g}$ y se verifica que $\mathfrak{g}$ es una extensión algebraica de un álgebra filiforme de longitud máxima.

Luego $A \neq 0$, se puede suponer que $A = 1$ y se tiene que $Y \notin \operatorname{cen} \mathfrak{g}$.

En la Proposición 4.26 se tienen determinados, en función de los coeficientes $a_{1,j}$, el resto de constantes de estructura. Al exigir la verificación de las relaciones de Jacobi de los vectores $\{X_i, X_j, X_k\}$, con $1 \leq i < j < k$ y $i + j + k \leq 7$, y $\{X_i, X_j, Y\}$, se tiene que las soluciones para las constantes de estructura son:

1.- $a_{1,j} = 0$, para cualquier valor de j, con lo que, por extensión, resulta $a_{i,j} = 0$, para todo i, j y el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(12,1,4)}$

2.- $a_{1,j} = a_{1,2}$, para cualquier j, siendo el resto de constantes $a_{i,j} = 0$, para $i \neq 1$. Realizando el cambio de bases

$$\begin{cases} X'_0 = X_0, \\ X'_i = \frac{1}{a_{1,2}} X_i, \quad 1 \leq i \leq 10, \\ Y' = Y. \end{cases}$$

el álgebra que se obtiene es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(12,1,4)}$. Con lo que se concluye la demostración para $\dim(\mathfrak{g}) = 12$.

Supongamos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n,1,4)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n,1,4)}$, y sea, entonces, $\mathfrak{g}$ un álgebra de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n+1,1,4,4)}$, el álgebra admite la descomposición

$$\mathfrak{g} = < X_0 > \oplus < X_1 > \oplus < X_2 > \oplus < X_3, Y > \oplus \cdots \oplus < X_{n-1} > .$$

Entonces, el álgebra $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} / < X_{n-1} >$ es un álgebra casifiliforme y de tipo $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_{(n,1,4,4)}$ y a la que se le puede aplicar la hipótesis de inducción. Así, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}^1_{(n,1,4)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n,1,4)}$, luego el producto en $\mathfrak{g}$ viene dado por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [X_1, X_j] = \alpha X_{j+2}, & \text{con } \alpha = 0 \text{ ó } \alpha = 1, \ 2 \leq j \leq n-4, \\ [X_i, Y] = X_{i+4}, & 1 \leq i \leq n-6, \\ [X_{n-5}, Y] = AY, & \\ [X_i, X_{n-2-i}] = a_{i,n-2-i} X_{n-1} & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor. \end{cases}$$

De la relación de Jacobi $J(X_0, X_{n-6}, Y) = 0$, se obtiene $A = 1$, y de las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_1, X_{n-4}) = 0$, $J(X_0, X_i, X_{n-3-i}) = 0$, para $i \geq 2$, y $J(X_1, X_{n-7}, Y) = 0$, se obtienen las ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha = a_{1,n-3} + a_{2,n-4}, \\ 0 = a_{i,n-2-i} + a_{i+1,n-1-i}, \quad i \geq 2, \\ a_{1,n-3} = \alpha + a_{5,n-7}, \end{cases}$$

que conducen a $a_{1,n-3} = \alpha$ y $a_{i,n-2-i} = 0$, para $i \geq 2$. Entonces, si $\alpha = 0$, se tiene que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n+1,1,4)}$ y si $\alpha = 1$, se tiene que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n+1,1,4)}$. Con lo que se concluye la demostración $\square$

Nota 4.33 Además de las álgebras obtenidas en la Proposición 4.32, si la dimensión de $\mathfrak{g}$ es $n \leq 11$, existen otras álgebras que se recogen en al Apéndice.

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,p,p)}$ con $5 \leq p \leq 7$, cuando el vector Y de la base pertenece a la subálgebra derivada, existen, además de las álgebras $\mathfrak{g}^1_{(n,1,p)}$, $\mathfrak{g}^2_{(n,1,p)}$ y $\mathfrak{g}^3_{(n,1,p)}$, ya mencionadas, otras álgebras que verifican dicha condición. Las conclusiones obtenidas en los casos $p = 5$ y $p = 7$ son resultados parciales del caso general que se obtiene cuando $p \geq 8$, debido a la posición del vector Y de la graduación.

Definicion 4.34 Se denotan por $\mathfrak{g}^4_{(n,1,p)}$, $\mathfrak{g}^5_{(n,1,p)}$, $\mathfrak{g}^6_{(n,1,p)}$, $\mathfrak{g}^7_{(n,1,p)}$ y $\mathfrak{g}^8_{(n,1p)}$ las álgebras definidas en la base homogénea y adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y\}$ por:

Si $n \geq 6$, para $5 \leq p \leq n-1$ y p es impar, $gg^4_{(n,1,p)}$ son las álgebras

$$\mathfrak{g}^4_{(n,1,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{p-2-i}] = (-1)^{i-1} Y, & 1 \leq i \leq \frac{p-3}{2}. \end{cases}$$

Si $n \geq 9$, para $5 \leq p \leq n-2$ y p impar, $\mathfrak{g}^5_{(n,1,p)}$ son las álgebras

$$\mathfrak{g}^5_{(n,1,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{p-2-i}] = (-1)^{i-1} \beta Y, & 1 \leq i \leq \frac{p-3}{2} \\ \left[X_i, X_{2\lfloor\frac{n-3}{2}\rfloor-1-i}\right] = (-1)^{i-1}\left(X_{2\lfloor\frac{n-3}{2}\rfloor} + (1-\beta)Y\right), & 1 \leq i \leq \left\lfloor\frac{n-5}{2}\right\rfloor, \\ \left[X_i, X_{2\lfloor\frac{n-3}{2}\rfloor-i}\right] = (-1)^{i-1}\left(\left\lfloor\frac{n-3}{2}\right\rfloor - i\right) X_{2\lfloor\frac{n-3}{2}\rfloor+1}, & 1 \leq i \leq \left\lfloor\frac{n-5}{2}\right\rfloor, \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i\frac{(i-1)(n-4-i)}{2}} \alpha X_{n-2}, & 2 \leq i \leq \frac{n-4}{2}. \end{cases}$$

donde $\alpha = 0$, si n es impar, y $\alpha = 1$, si n es par; y donde $\beta = 0$, si $p = 2\lfloor(n-1)/2\rfloor - 1$, y $\beta = 1$, en otro caso.

Si $n \geq 8$ y n es par, para $5 \leq p \leq n-1$ y p impar, $\mathfrak{g}^6_{(n,1,p)}$ son las álgebras

$$\mathfrak{g}^6_{(n,1,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{p-2-i}] = (-1)^{i-1} Y, & 1 \leq i \leq \frac{p-3}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i-1} X_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}. \end{cases}$$

Si $n \geq 9$, para $p = 5$ ó $p = 7$, $\mathfrak{g}^7_{(n,1,p)}$ son las álgebras

$$\mathfrak{g}^7_{(n,1,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_1, X_j] = X_{j+2}, & 3 \leq j \leq n-4, \quad j \neq p-3, \\ [X_1, X_{p-3}] = X_{p-1} + Y, & \\ [X_i, X_{p-2-i}] = (-1)^{i-1} Y, & 2 \leq i \leq \frac{p-3}{2}. \end{cases}$$

Si $n \geq 9$, para $p = 5$ ó $p = 7$, $\mathfrak{g}^8_{(n,1,p)}$ son las álgebras

$$\mathfrak{g}^8_{(n,1,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = \frac{6\,(i-1)!\,(j-1)!\,(j-i)}{(i+j)!} X_{i+j+1}, & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor, \\ & j \neq p-2-i, \;\; i < j \leq n-3-i, \\ [X_i, X_{p-2-i}] = \frac{6\,(i-1)!\,(p-3-i)!\,(p-2-2i)}{(p-2)!} X_{p-1} + (-1)^{i-1} Y, & 2 \leq i \leq \frac{p-3}{2}, \end{cases}$$

Es claro que las álgebras consideradas son casifiliformes de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,p,p)}$ y particularizando en cada caso las constantes de estructura, se comprueba, directamente que se verifican las relaciones de Jacobi en cada una de las álgebras antes mencionadas.

Las álgebras son no isomorfas pues siempre, como queda reflejada en la siguiente tabla, se puede encontrar un invariante que las distinga dos a dos

g	$\dim[\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}), \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})]$	$\dim(\mathrm{cen}\, \mathcal{C}^2(\mathfrak{g}))$
$\mathfrak{g}^4_{(n,1,p)}$	0, si $p = 5$ ó 1 si $p \geq 7$	$n-1$ si p es 5 ó $n-2$ si $p \geq 7$
$\mathfrak{g}^5_{(n,1,p)}$	4 si n es par ó 3 si n es impar	- —
$\mathfrak{g}^6_{(n,1,p)}$	2	—
$\mathfrak{g}^7_{(n,1,p)}$	0, si $p = 5$ ó 1 si $p = 7$	$n-2$ si p es 5 ó $n-3$ si p es 7
$\mathfrak{g}^8_{(n,1,p)}$	$n-6$	

En el primer epigrafe se estudian las álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,5,5)}$.

Álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,5,5)}$

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,5,5)}$, admite la descomposición $\mathfrak{g} = < X_0 > \oplus \cdots \oplus < X_4, Y > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} >$. El estudio de las álgebras de este tipo se realiza dependiendo de la pertenencia del vector Y al centro ó a la subálgebra derivada. Sólo existen álgebras con el vector Y perteneciendo al centro y a la subálgebra derivada cuando la dimensión es $n \leq 12$, y están recogidas en el Apéndice.

Proposición 4.35 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,5,5)}$, con $n \geq 13$, se tiene que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n,1,5)}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n,1,5)}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^4_{(n,1,5)}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^5_{(n,1,5)}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^7_{(n,1,5)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^8_{(n,1,5)}$. Además si n es par, también puede ser $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^3_{(n,1,5)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^6_{(n,1,5)}$.*

Demostración. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g}_{(n,1,5,5)}$, por las Proposiciones 4.24 y 4.25, la ley de $\mathfrak{g}$ viene dada por

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3 \\ [X_i, X_j] = a_{i,j} X_{i+j+1} & 1 \leq i < j \leq n-3-i, \; i+j \neq 3, \\ [X_1, X_2] = a_{1,2} X_4 + BY, & \\ [X_i, Y] = AX_{i+p}, & (A = 0 \text{ si } 5 \geq n-2) \quad 1 \leq i \leq n-7. \end{cases}$$

No puede ser $A = B = 0$, pues se tendría que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus < Y >$, siendo $\mathfrak{g}'$ un álgebra filiforme de longitud máxima, y por tanto $\mathfrak{g}$ tendría longitud máxima.

Si $A = 0$ y $B \neq 0$, el vector Y pertenece al centro y a la subálgebra derivada, la ley de $\mathfrak{g}$ viene dada por

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3 \\ [X_i, X_j] = a_{i,j} X_{i+j+1} & 1 \leq i < j \leq n-3-i, \; i+j \neq 3, \\ [X_1, X_2] = a_{1,2} X_4 + BY. & \end{cases}$$

Realizando el cambio de bases

$$\begin{cases} X_i' = X_i, \quad 0 \leq i \leq n-2, \\ Y' = BY. \end{cases}$$

se puede suponer $B = 1$. De las relaciones de Jacobi $J(X_i, X_j, X_k) = 0$, con $i + j + k \leq n - 4$, se tienen las igualdades

$$a_{i,j+k} a_{j,k} = a_{i,j} a_{i+j+1,k} + a_{i,k} a_{j,i+k+1}.$$

Las constantes de estructura que satisfacen dichas igualdades son las recogidas en el Corolario 3.7, obteniendose que, si $n \geq 13$ el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^4_{(n,1,5)}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^5_{(n,1,5)}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^7_{(n,1,5)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^8_{(n,1,5)}$, además si n es par, el álgebra, tambien puede ser, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^6_{(n,1,5)}$.

Si $B = 0$ y $A \neq 0$, el vector Y no pertenece al subálgebra derivada ni al centro. Si $\dim \mathfrak{g} = 13$, de las relaciones de Jacobi de los vectores $\{X_i, X_j, X_k\}$, para $0 \leq i < j < k$, con $i+j+k = 9$ y de los vectores $\{X_i, X_j, Y\}$, con $0 \leq i < j \leq 5-i$, se obtienen las álgebras $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(13,1,5)}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(13,1,5)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^3_{(13,1,5)}$.

Si $\dim(\mathfrak{g}) = 14$, las álgebras que resultan, son $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(14,1,5)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(14,1,5)}$.

Se puede ahora utilizar para la demostración una inducción similar a la realizada en la familia de álgebras $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,3,3)}$.

El caso en el que $AB \neq 0$, implica que $n \leq 12$. $\square$

Nota 4.36 Además de las mencionadas álgebras obtenidas en la Proposición 4.35, si la dimensión de $\mathfrak{g}$ es $n \leq 12$, existen otras álgebras que se recogen en el Apéndice.

Se realiza a continuación el estudio de las álgebras casifiliformes de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,6,6)}$, donde las únicas álgebras que existen, cuando $n \geq 13$ son $\mathfrak{g}^1_{(n,1,6)}$ y $\mathfrak{g}^2_{(n,1,6)}$.

Álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,6,6)}$

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,6,6)}$ admite la descomposición $\mathfrak{g} =< X_0 > \oplus \cdots \oplus < X_5, Y > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} >$. Por la Proposición4.25, se tiene que el vector Y no pertenece al subálgebra derivada. Las álgebras que admiten la citada graduación están recogidas en la siguiente Proposición.

Proposición 4.37 *Si* $\mathfrak{g}$ *es un álgebra casifiliforme de tipo* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,6,6)}$*, con* $n \geq 13$*, se tiene que es* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n,1,6)}$ *ó* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n,1,6)}$.

Demostración. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,6,6)}$, de las Proposiciones4.24 y 4.25, se tiene que la ley de $\mathfrak{g}$ es

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3 \\ [X_i, X_j] = a_{i,j} X_{i+j+1} & 1 \leq i < j \leq n-3-i, \ i+j \neq 3, \\ [X_i, Y] = A X_{i+6}, & (A = 0 \ si \ 6 \geq n-2) \quad 1 \leq i \leq n-8. \end{cases}$$

No puede ser $A = 0$, pues se tendría que $Y \in \operatorname{cen} \mathfrak{g}$ y el álgebra sería de longitud máxima.

Si $A \neq 0$ y $\dim \mathfrak{g} = 13$, de las relaciones de Jacobi de los vectores $\{X_i, X_j, X_k\}$, para $0 \leq i < j < k$, con $i+j+k = 9$, y de las relaciones de Jacobi de los vectores $\{X_i, X_j, Y\}$, con $0 \leq i < j \leq 4-i$, se obtiene que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n,1,6)}$ y $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n,1,6)}$.

La demostración es ahora similar a la realizada en las familias de álgebras $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,4,4)}$. □

Nota 4.38 Además de las álgebras obtenidas en la Proposición 4.37, cuando la dimensión de $\mathfrak{g}$ es $n \leq 12$, existen otras álgebras que se recogen en el Apéndice.

Se termina esta subsección con las álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,7,7)}$. existiendo 6 álgebras si n es impar y 8 álgebras si n es par, cuando $n \geq 15$.

Álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,7,7)}$

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,7,7)}$, admite la descomposición $\mathfrak{g} =< X_0 > \oplus \cdots \oplus < X_6, Y > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} >$. Haciendo un estudio totalmente análogo al del tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,5,5)}$, distinguiendo los casos de pertenencia del vector Y al centro ó a la subálgebra derivada, llegamos a la siguiente Proposición:

Proposición 4.39 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,7,7)}$, si $n \geq 15$, el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n,1,7)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n,1,7)}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^4_{(n,1,7)}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^5_{(n,1,7)}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^7_{(n,1,7)}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^8_{(n,1,7)}$, además, tambien puede ser, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^3_{(n,1,7)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^6_{(n,1,7)}$, si n es par.*

Nota 4.40 Además de las álgebras obtenidas en la Proposición 4.39, cuando la dimensión de $\mathfrak{g}$ es $n \leq 14$, existen otras álgebras que se recogen en el Apéndice.

En la siguiente subsección se concluye el estudio de las álgebras casifiliformes de longitud $n-1$, con las álgebras de tipo $\mathfrak{g}_{(n,1,p,p)}$ con $p \geq 8$.

4.3.4 Álgebras de tipo $\mathfrak{g}_{(n,1,p,p)}$, con $p \geq 8$

Si $\mathfrak{g}$, es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g}_{(n,1,p,p)}$, con $p \geq 8$, admite la descomposición $\mathfrak{g} =< X_0 > \oplus \cdots \oplus < X_{p-1}, Y > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} >$, donde, de las Proposiciones 4.24 y 4.25, la ley del álgebra viene dada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j}\, X_{i+j+1}, & 1 \leq i < j \leq n-3-i,\ j \neq p-2-i, \\ [X_i, X_{p-2-i}] = a_{i,p-2-i}\, X_{p-1} + (-1)^{i-1} B\, Y, & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{p-3}{2} \right\rfloor, \\ [X_i, Y] = A X_{i+p},\ (A = 0 \text{ } si \text{ } p \geq n-2) & 1 \leq i \leq n-2-p. \end{cases}$$

Definicion 4.41 Se denotan por $\mathfrak{g}^9_{(n,1,9)}$ y $\mathfrak{g}^{10}_{(n,1,p)}$ las álgebras definidas en una base homogénea y adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y\}$ por:

Si $n \geq 13$, para $n-3 \leq p \leq n-5$ y $p \geq 10$, $\mathfrak{g}^9_{(n,1,p)}$ son las álgebras

$$\mathfrak{g}^9_{(n,1,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ \left[X_i, X_{2\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor -1-i}\right] = (-1)^{i-1} X_{2\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor}, & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor, \\ \left[X_i, X_{2\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor -i}\right] = (-1)^{i-1} \left(\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor - i \right) X_{2\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor +1}, & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor, \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i} \frac{(i-1)(n-4-i)}{2}\, \alpha\, X_{n-2}, & 2 \leq i \leq \frac{n-4}{2}, \\ [X_i, Y] = X_{i+p}, & 1 \leq i \leq n-p-2. \end{cases}$$

donde $\alpha = 0$, si n es impar, y $\alpha = 1$, si n es par.

Si $n \geq 13$, para $n-3 \leq p \leq n-5$ y $p \geq 10$, $\mathfrak{g}^{10}_{(n,1,p)}$ son las álgebras

$$\mathfrak{g}^{10}_{(n,1,p)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = \frac{6\,(i-1)!\,(j-1)!\,(j-i)}{(i+j)!} X_{i+j+1}, & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor, i < j \leq n-3-i, \\ [X_i, Y] = X_{i+p}, & 1 \leq i \leq \ n-p-2, \end{cases}$$

Las álgebras que a continuación se definen surgen cuando el subespacio de la graduación $\mathfrak{g}_\beta$, con $\dim \mathfrak{g}_\beta = 2$ se encuentra en los últimos lugares que cabe considerar, $n-3$, $n-4$ y $n-5$, cuando $\beta \leq n-6$, no existen nuevas álgebras.

Definicion 4.42 Se denotan por $\mathfrak{g}^{11}_{(n,1,n-3)}(\alpha)$ y $\mathfrak{g}^{12}_{(n,1,2\lfloor (n-1)/2 \rfloor -3)}$ las álgebras definidas en una base homogénea y adaptada $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}, Y\}$ por:

Si $n \geq 12$ y n es par, $\mathfrak{g}^{11}_{(n,1,n-3)}(\alpha)$ son las álgebras

$$\mathfrak{g}^{11}_{(n,1,n-3)} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq p, \\ [X_i, X_{n-5-i}] = (-1)^{i-1}(\alpha X_{n-4} + Y), & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2}, \\ [X_i, X_{n-4-i}] = (-1)^{i-1}(\frac{n-4-2i}{2})\alpha X_{n-3}, & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2}, \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i}(\frac{(i-1)(n-4-i)}{2}\alpha + \frac{1}{\alpha})X_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}, \\ [X_1, Y] = X_{n-2}. \end{cases}$$

donde $\alpha = re^{i\theta}$, con $r \neq 0$, y $-\pi/2 \leq \theta < \pi/2$.

Si $n \geq 13$, $\mathfrak{g}^{12}_{(n,1,2\lfloor (n-1)/2 \rfloor -3)}$, son las álgebras

$$\begin{cases}
[X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le n-3, \\
[X_i, X_{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-5-i}] = (-1)^{i-1}(aX_{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-4} + Y), & 1 \le i \le \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor - 3, \\
[X_i, X_{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-4-i}] = (-1)^{i-1}(\frac{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-4-2i}{2})aX_{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-3}, & 1 \le i \le \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor - 3, \\
[X_i, X_{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-3-i}] = (-1)^{i}(\frac{(i-1)(2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-4-i)}{2}a + \frac{1}{a})X_{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-2}, & 1 \le i \le \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor - 2, \\
[X_i, X_{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-2-i}] = (-1)^{i-1}(\frac{(i-1)(i-2)(3\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-6-i)}{6}a + \frac{1}{a})X_{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-1}, & 1 \le i \le \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor - 2, \\
[X_i, X_{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-1-i}] = (-1)^{i}(\frac{(i-1)(i-2)(i-3)(4\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-8-i)}{24}a + \frac{1}{2a})bX_{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}, & 1 \le i \le \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor - 1, \\
[X_i, Y] = X_{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-3+i}, & 1 \le i \le n - 2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor + 1
\end{cases}$$

siendo $a = \sqrt{\frac{-12}{(2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-5)(2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-6)}}$, y donde $b = 0$, si n es impar, y $b = 1$, si n es par.

Es claro que las álgebras consideradas son casifiliformes de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,p,p)}$ y particularizando en cada caso las constantes de estructura, se comprueba, directamente que se verifican las relaciones de Jacobi en cada una de las álgebras antes mencionadas.

En la siguiente proposición, se obtienen las álgebras que admiten tal graduación, realizando el estudio dependiendo de la pertenencia del vector Y, al centro del álgebra y a la subálgebra derivada.

Proposición 4.43 *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,p,p)}$, con $n \ge 13$ y $p \ge 8$. Entonces, se tiene que:*

1.- Si $n-2 \le p \le n-1$, no puede ser ppar, el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^4_{(n,1,p)}$ (p impar), $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^5_{(n,1,n-2)}$ (n impar) ó $\mathfrak{g}^6_{(n,1,n-1)}$ (n par).

2.- Si $n-5 \le p \le n-3$, el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n,1,p)}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n,1,p)}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^9_{(n,1,p)}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{10}_{(n,1,p)}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^3_{(n,1,p)}$ (n par), $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^4_{(n,1,p)}$ (p impar), $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^5_{(n,1,p)}$ (p impar), $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{12}_{(n,1,p)}$ (p impar y $p = 2\lfloor(n-1)/2\rfloor - 3$), $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^7_{(n,1,p)}$ (n par y p impar) ó

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{11}_{(n,1,n-3)}(\alpha)$ *(n par y p impar), con* $\alpha = re^{i\theta}$, *con* $r \neq 0$, *y* $-\pi/2 \leq \theta < \pi/2$.

3.- Si $8 \leq p \leq n-6$, *el álgebra es* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n,1,p)}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n,1,p)}$,$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^3_{(n,1,p)}$ *(p impar),* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^4_{(n,1,p)}$ *(p impar),* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^5_{(n,1,p)}$ *(p impar) ó* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^6_{(n,1,p)}$ *(n par y p impar).*

Demostración. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,p,p)}$, con $n \geq 13$ y $p \geq 8$, admite la descomposición

$$\mathfrak{g} =< X_0 > \oplus < X_1 > \oplus \cdots \oplus < X_{p-1}, Y > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} >,$$

se tiene por tanto que $p \leq n-1$. De las Proposiciones 4.24 y 4.25, la ley del álgebra viene dada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j}\, X_{i+j+1}, & 1 \leq i < j \leq n-3-i,\ j \neq p-2-i, \\ [X_i, X_{p-2-i}] = a_{i,p-2-i}\, X_{p-1} + (-1)^{i-1} BY, & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{p-3}{2} \right\rfloor, \\ [X_i, Y] = AX_{i+p},\ (A = 0,\ si\ p \geq n-2) & 1 \leq i \leq n-2-p, \end{cases}$$

donde $B = 0$, si p es par.

Así, se comienza ahora la clasificación de tales familias de álgebras dependiendo de la ubicación del vector Y (es decir de p) y de la nulidad de A y B.

• Si $p = n-1$ ó $p = n-2$, no puede ser p par. En efecto, si p es par, entonces, $B = 0$ y se tiene que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus < Y >$, siendo $\mathfrak{g}'$un álgebra filiforme de longitud máxima y, por tanto, $\mathfrak{g}$ tiene longitud máxima. Así, p es impar, y el razonamiento anterior prueba también que $B \neq 0$. Las únicas relaciones de Jacobi, que cabe considerar, entonces, son $J(X_i, X_j, X_k) = 0$, con $0 \leq i < j < k \leq n-4-i-j$; y se derivan de ellas las ecuaciones

$$a_{i,j+k+1} a_{j,k} = a_{i,j} a_{i+j+1,k} + a_{j,i+k+1} a_{i,k}$$

Estas ecuaciones se corresponden con las obtenidas de las relaciones de Jacobi $J(X_i, X_j, X_k) = 0$, con $0 \leq i < j < k \leq n-4-i-j$, para un álgebra $\mathfrak{g}'$, filiforme de longitud máxima y de dimensión $n-1$, cuya descomposición, en la base adaptada y homogénea $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}\}$, es

$$\mathfrak{g}' =< X_0 > \oplus < X_1 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} > .$$

Así, las constantes de estructura $a_{i,j}$, con $1 \leq i < j \leq n-3-i$, del álgebra $\mathfrak{g}$, se corresponden con las constantes de estructura de $\mathfrak{g}'$. El Corolario 3.7 nos dice, entonces, que las constantes de estructura $a_{i,j}$, con $1 \leq i < j \leq n-3-i$, del álgebra $\mathfrak{g}$, deben tomar los valores que se especifican en álgunos de los apartados siguientes:

1. $a_{i,j} = 0$, para cualquier i,j.

2. $\begin{cases} a_{1,j} = \beta, & 2 \leq j \leq n-4, \\ a_{i,j} = 0, & \text{para } i \neq 1. \end{cases}$

3. Si n es par,

$$\begin{cases} a_{i,n-3-i} = (-1)^{i-1}\beta, & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}, \\ a_{i,j} = 0, & \text{en otro caso} . \end{cases}$$

4. $\begin{cases} a_{i,2\lfloor\frac{n-3}{2}\rfloor-1-i} = (-1)^{i-1}\beta, & 1 \leq i \leq \lfloor\frac{n-5}{2}\rfloor, \\ a_{i,2\lfloor\frac{n-3}{2}\rfloor-i} = (-1)^{i-1}\left(\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor - i\right)\beta, & 1 \leq i \leq \lfloor\frac{n-5}{2}\rfloor, \\ a_{i,n-3-i} = (-1)^{i}\,\frac{(i-1)(n-3-i)}{2}\beta\,\alpha, & 2 \leq i \leq \frac{n-4}{2}, \\ a_{i,j} = 0, & \text{en otro caso} . \end{cases}$

donde $\alpha = 0$, si n impar, y $\alpha = 1$, si n es par.

5. $\left\{ a_{i,j} = \frac{6\,(i-1)!\,(j-1)!\,(j-i)}{(i+j)!}\beta, \quad 1 \leq i \leq \left\lfloor\frac{n-4}{2}\right\rfloor, \; i < j \leq n-3-i. \right.$

Además, de las relaciones de Jacobi $J(X_i, X_j, X_k) = 0$, cuando $i+j+k = p-3$, se obtienen las ecuaciones:

Si $1 \leq i < j \leq \frac{p-5-2i}{2}$, entonces

$$(-1)^{i-1} a_{j,p-3-i-j} = (-1)^{j-1} a_{i,p-3-i-j} + (-1)^{i+j} a_{i,j}.$$

Si $1 \leq i < j$ y $j \geq \frac{p-3-2i}{2}$, entonces

$$(-1)^{i-1} a_{j,p-3-i-j} = (-1)^{j-1} a_{i,p-3-i-j} + (-1)^{p-3-i-j} a_{i,j},$$

al tomarse junto con las igualdades obtenidas en cada uno de los apartados anteriores, determinan la estructura de la familia de álgebras que se consideran.

Veamos ahora cuáles son las soluciones que verifican, en cada caso las citadas ecuaciones.

Si $a_{i,j} = 0$, para cualquier i y j, se verifica de manera inmediata que satisface las anteriores ecuaciones, y la ley en $\mathfrak{g}$ viene dada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{p-2-i}] = (-1)^{i-1} B Y, & 1 \leq i \leq \frac{p-3}{2}, \end{cases}$$

con un cambio de bases adecuado ($Y' = BY$), se tiene que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^4_{(n,1,p)}$, para $p = n-1$, si n es par, ó $p = n-2$, si n es impar.

Sean $a_{1,j} = \beta$, para $2 \leq j \leq n-4$, y $a_{i,j} = 0$, en otro caso. La relación de Jacobi $J(X_1, X_2, X_{p-6}) = 0$, implica que $\beta = 0$, y el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^4_{(n,1,p)}$.

– Si $p = n-1$ (n es par), y $a_{i,n-3-i} = (-1)^{i-1}\beta$, para $1 \leq i \leq \frac{n-6}{2}$, $a_{i,j} = 0$, en otro caso, se tiene que los segundos subíndices de las constantes de estructura de las ecuaciones obtenidas, para $i+j+k = p-3$, verifican $j < p-3-i-j = n-4-i-j \leq n-5-j < n-5-i < n-3-i$; y por tanto

$$a_{i,j} = a_{i,p-3-i-j} = a_{j,p-3-i-j} = 0,$$

y satisfacen las igualdades anteriores. La ley de $\mathfrak{g}$ viene dada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i-1}\beta X_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}, \\ [X_i, X_{p-2-i}] = (-1)^{i-1} B Y, & 1 \leq i \leq \frac{p-3}{2}. \end{cases}$$

Si $\beta = 0$, el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^4_{(n,1,n-1)}$, y si $\beta \neq 0$, aplicando un cambio de bases ($X'_i = 1/\beta\, X_i$, para $1 \leq i \leq n-2$, e $Y' = BY$), nos dice que el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^6_{(n,1,n-1)}$.

Sean, ahora, $a_{i,j}$ las constantes de estructura que se tienen en el caso 4. Si $p = n-1$, la relación de Jacobi $J(X_1, X_2, X_{p-6}) = 0$, implica que $\beta = 0$, y el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^4_{(n,1,n-1)}$.

Si $p = n-2$, las constantes verifican las igualdades obtenidas para $i+j+k = p-3$. En efecto, como n es impar, las únicas constantes no nulas son aquellas cuyo segundo subíndice $j \geq n-4-i$; como $p = n-2$, entonces

$$j < p-3-i-j = n-5-i-j \leq n-6-j < n-6-i,$$

y por tanto $a_{i,j} = a_{i,p-3-i-j} = a_{j,p-3-i-j} = 0$, Si $\beta = 0$ el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^4_{(n,1,n-2)}$, y si $\beta \neq 0$, un cambio de bases ($X'_i = 1/\beta\, X_i$, para $1 \leq i \leq n-2$, e $Y' = BY$), nos dice que el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^5_{(n,1,n-2)}$.

Finalmente, si $a_{i,j} = \frac{6\,(i-1)!\,(j-1)!\,(j-i)}{(i+j)!}\beta$, para$1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor$, $i < j \leq n-3-i$, la relación de Jacobi $J(X_1, X_2, X_{p-6}) = 0$, implica que $\beta = 0$, y el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^4_{(n,1,p)}$.

Luego, si $n-1 \leq p \leq n-2$, sólo puede ser p impar y se tiene que el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^4_{(n,1,p)}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^6_{(n,1,n-1)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^5_{(n,1,n-2)}$.

Veamos ahora que ocurre cuando $n-5 \leq p \leq n-3$.

• Si $n-5 \leq p \leq n-3$, se obtiene ahora la expresión de las álgebras para cada uno de los posibles valores de p, considerando los casos $B = 0$ y $B \neq 0$.

– Si $p = n - 3$, el álgebra admite la descomposición

$$\mathfrak{g} = < X_0 > \oplus < X_1 > \oplus \cdots \oplus < X_{p-1}, Y > \oplus < X_p > \oplus < X_{p+1} >,$$

entonces $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/ < X_{p+1} >$, es un álgebra casifiliforme de dimensión $n-1$ y de tipo $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_{(n-1,1,n-3,n-3)}$, y la ley del álgebra $\mathfrak{g}$ viene dada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j}\, X_{i+j+1}, & 1 \leq i < j \leq n-3-i,\ j \neq p-2-i, \\ [X_i, X_{p-2-i}] = a_{i,p-2-i}\, X_{p-1} + (-1)^{i-1} B\, Y, & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{p-3}{2} \right\rfloor, \\ [X_1, Y] = A X_{p+1}, & \end{cases}$$

Si $B = 0$, ahora la ley de $\mathfrak{g}$ viene dada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j}\, X_{i+j+1}, & 1 \leq i < j \leq n-3-i, \\ [X_1, Y] = A X_{p+1}. & \end{cases}$$

No puede ser $A = 0$, pues sería $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'' \oplus < Y >$, siendo $\mathfrak{g}''$ un álgebra filiforme de longitud máxima y, por tanto, $\mathfrak{g}$ tendría longitud máxima. Luego $A \neq 0$, y las únicas relaciones, que cabe considerar, son $J(X_i, X_j, X_k) = 0$, con $0 \leq i < j < k \leq n-4-i-j$; y se tienen las ecuaciones

$$a_{i,j+k+1} a_{j,k} = a_{i,j} a_{i+j+1,k} + a_{j,i+k+1} a_{i,k}$$

Estas ecuaciones se corresponden, al igual que antes, con las relaciones de Jacobi $J(X_i, X_j, X_k) = 0$, con $0 \leq i < j < k \leq n-4-i-j$, que verifica un álgebra $\mathfrak{g}''$ filiforme de longitud máxima y de dimensión $n-1$, cuya descomposición es

$$\mathfrak{g}'' = < X_0 > \oplus < X_1 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-2} > .$$

Así, las constantes de estructura $a_{i,j}$, con $1 \leq i < j \leq n-3-i$, de $\mathfrak{g}$, se corresponden con las constantes de estructura de $\mathfrak{g}''$. De nuevo, el Corolario 3.7

nos determina, entonces, las constantes de estructura $a_{i,j}$ con $1 \leq i < j \leq n-3-i$, del álgebra $\mathfrak{g}$, y realizando un cambio de bases ($Y' = 1/AY, X_i' = 1/\beta X_i$, para $1 \leq i \leq n-2$, cuando $\beta \neq 0$), se llega a que el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n,1,n-3)}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n,1,n-3)}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^3_{(n,1,n-3)}$, (si n es par), $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^9_{(n,1,n-3)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{10}_{(n,1,n-3)}$.

– Si $n-5 \leq p \leq n-4$, una prueba similar nos demuestra que el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n,1,p)}$, $\mathfrak{g}^2_{(n,1,p)}$ ó $\mathfrak{g}^3_{(n,1,p)}$ (n es par), cuando $B = 0$ y $A \neq 0$.

Si $B \neq 0$, tiene que ser p impar. Ahora, distinguiremos los casos $A = 0$ y $A \neq 0$.

Si $A = 0$, entonces, la ley de $\mathfrak{g}$ viene dada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j}\, X_{i+j+1}, & 1 \leq i < j \leq n-3-i,\, j \neq p-2-i, \\ [X_i, X_{p-2-i}] = a_{i,p-2-i}\, X_{p-1} + (-1)^{i-1} B\, Y. & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{p-3}{2} \right\rfloor, \end{cases}$$

Un razonamiento similar al caso $p = n-2$, prueba que el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^4_{(n,1,p)}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^5_{(n,1,p)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^6_{(n,1,p)}$ (n par).

Si $A \neq 0$, puede verse en la estructura de la familia que el vector Y pertenece a la subálgebra derivada y no pertenece al centro del álgebra.

De la Proposición 4.25, la ley del álgebra para de tales familias viene dada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j} X_{i+j+1}, & 1 \leq i < j \leq n-3-i,\ j \neq i-p-2, \\ [X_i, X_j] = a_{i,p-2-i} X_{p-1} + (-1)^{i-1} BY, & 1 \leq i \leq \frac{p-3}{2}, \\ [X_i, Y] = AX_{i+p}, & 1 \leq i \leq n-2-p, \end{cases}$$

y el cambio de bases

$$\begin{cases} X_0' = X_0, \\ X_i' = \frac{1}{\sqrt{AB}} X_i, \quad 1 \le i \le n-2, \\ Y' = \frac{1}{A} Y, \end{cases}$$

permite suponer $A = B = 1$

– Si $p = n-3$, entonces $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/ < X_{p+1} >$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_{(p+2,1,p,p)}$, con $Y \in \operatorname{cen} \mathfrak{g}'$ e $Y \in \mathcal{C}^1\mathfrak{g}'$, por tanto se tiene que es $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}^4_{(p+2,1,p)}$ ó $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}^5_{(p+2,1,p)}$.

Si $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}^4_{(p+2,1,p)}$,

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le p, \\ [X_i, X_{p-2-i}] = (-1)^{i-1} Y, & 1 \le i \le \frac{p-3}{2}, \\ [X_i, X_{p-i}] = a_i X_{p+1}, & 1 \le i \le \frac{p-1}{2}, \\ [X_1, Y] = X_{p+1}. \end{cases}$$

De la relación de Jacobi $J(X_1, X_2, X_{p-4}) = 0$, se tiene que $[X_1, Y] = 0$, luego no existe un álgebra tal que $Y \notin \operatorname{cen} \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathcal{C}^1\mathfrak{g}$ con $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}^4_{(p+2,1,p)}$.

Si $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}^5_{(p+2,1,p)}$,

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le p, \\ [X_i, X_{p-2-i}] = (-1)^{i-1} \alpha X_{p-1} + (-1)^{i-1} Y, & 1 \le i \le \frac{p-3}{2}, \\ [X_i, X_{p-1-i}] = (-1)^{i-1} \frac{p-1-2i}{2} \alpha X_p, & 1 \le i \le \frac{p-3}{2}, \\ [X_i, X_{p-i}] = a_i X_{p+1}, & 1 \le i \le \frac{p-1}{2}, \\ [X_1, Y] = X_{p+1}. \end{cases}$$

Donde $a_i = (-1)^i (\frac{(i-1)(p-1-i)}{2} \alpha - a_1)$ para $1 \le i \le \frac{p-1}{2}$. En efecto, de las relaciónes de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{p-1-i}) = 0$ para $1 \le i \le \frac{p-3}{2}$, se tiene:

$$(-1)^{i-1} \left(\frac{p-1-2i}{2} \right) \alpha = a_{i+1} + a_i, \quad \text{para } 1 \le i \le \frac{p-3}{2},$$

por tanto, $a_{i+1} = (-1)^{i-1}(\frac{p-1-2i}{2})\alpha - a_i$. Así, para $i = 1$ se tiene que $a_2 = \frac{p-3}{2}\alpha - a_1$, que se puede expresar como $a_2 = \frac{(2-1)(p-2-1)}{2}\alpha - a_1$; y por tanto verifica la relación.

Suponiendo cierto que $a_k = (-1)^k\left(\frac{(k-1)(p-1-k)}{2}\alpha - a_1\right)$, se tiene que

$$a_{k+1} = (-1)^{k-1}\left(\frac{p-1-2k}{2}\right)\alpha - (-1)^k\left(\frac{(k-1)(p-1-k)}{2}\alpha - a_1\right),$$

con lo que $a_{k+1} = (-1)^{k-1}\left(\frac{p-1-2k+(k-1)(p-1-k)}{2}\right)\alpha - (-1)^{k+2}a_1$ que se puede expresar como $a_{k+1} = (-1)^{k+1}(\frac{k(p-k)}{2}\alpha - a_1)$ y por tanto

$$a_i = (-1)^i\left(\frac{(i-1)(p-1-i)}{2}\alpha - a_1\right), \quad \text{para } 1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}.$$

De la relación de Jacobi $J(X_1, X_2, X_{p-4}) = 0$, se tiene que $\alpha a_1 + 1 = 0$ con lo cual $a_1 = -\frac{1}{\alpha}$, y el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{11}_{(p+3,1,p)}(\alpha)$.

– Si $p = n - 4$, el álgebra, ahora, viene dada por

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq p, \\ [X_i, X_{p-2-i}] = (-1)^{i-1}(\alpha X_{p-1} + Y), & 1 \leq i \leq \frac{p-3}{2}, \\ [X_i, X_{p-1-i}] = (-1)^{i-1}(\frac{p-1-2i}{2})\alpha X_p, & 1 \leq i \leq \frac{p-3}{2}, \\ [X_i, X_{p-i}] = (-1)^i(\frac{(i-1)(p-1-i)}{2}\alpha + \frac{1}{\alpha})X_{p+1}, & 1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}, \\ [X_i, X_{p+1-i}] = a_i X_{p+2}, & 1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}, \\ [X_i, Y] = X_{p+i}, & 1 \leq i \leq 2. \end{cases}$$

De las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{p-i}) = 0$ para $1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}$, se tiene que

$$a_{i+1} + a_i = (-1)^i\left(\frac{(i-1)(p-1-i)}{2}\alpha + \frac{1}{\alpha}\right), \quad i \neq \frac{p-1}{2}, \tag{4.1}$$

$$a_{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{(\frac{p-3}{2})(\frac{p-1}{2})}{2} \alpha + \frac{1}{\alpha} \right). \tag{4.2}$$

De la relación de Jacobi $J(X_1, X_2, X_{p-3}) = 0$, se tiene que

$$a_1 \alpha \frac{-(p-5)}{2} = a_2 \alpha + 1,$$

como $a_2 = \frac{-1}{\alpha} - a_1$, entonces $a_1 = 0$. Aplicando este resultado se puede conjeturar que $a_i = (-1)^{i-1}(\frac{(i-1)(i-2)(3p-2i-3)}{12}\alpha + \frac{i-1}{\alpha})$. En efecto, para $i = 1$ e $i = 2$ se verifica. Suponiendola cierta para k; de la ecuación 4.1 para $i = k$, se tiene que

$$a_{k+1} = (-1)^k \left(\frac{(k-1)(p-1-k)}{2} \alpha + \frac{1}{\alpha} \right) - a_k,$$

y por tanto al sustituir el valor de a_k, se obtiene

$a_{k+1} = (-1)^k(\frac{(k-1)(p-1-k)}{2}\alpha + \frac{1}{\alpha}) - (-1)^{k-1}(\frac{(k-1)(k-2)(3p-2k-3)}{12}\alpha + \frac{k-1}{\alpha})$, con lo que $a_{k+1} = (-1)^k \left((k-1) \left(\frac{(p-1-k)}{2} + \frac{(k-2)(3p-2k-3)}{12} \right) \right) \alpha + \frac{k}{\alpha})$, y por tanto se tiene que

$$a_{k+1} = (-1)^k \left(\frac{(k-1)k(3p-2(k+1)-3)}{12} \alpha + \frac{k}{\alpha} \right)$$

y, por tanto, se ha probado que las constantes a_i son

$$a_i = (-1)^{i-1} \left(\frac{(i-1)(i-2)(3p-2i-3)}{12} \alpha + \frac{i-1}{\alpha} \right).$$

Además de la Ecuación 4.2, se obtiene que

$a_{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{(\frac{p-3}{2})(\frac{p-1}{2})}{2} \alpha + \frac{1}{\alpha} \right)$, al igualar las expresiones de la constante de estructura $a_{\frac{p-1}{2}}$, resulta que

$$\alpha = \sqrt{\frac{-12}{(p-2)(p-3)}}$$

y el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{12}_{(p+4,1,p)}$.

– Si $p = n-5$, la ley del álgebra viene dada por

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le p+2, \\ [X_i, X_{p-2-i}] = (-1)^{i-1}(\alpha X_{p-1} + Y), & 1 \le i \le \frac{p-3}{2}, \\ [X_i, X_{p-1-i}] = (-1)^{i-1}(\frac{p-1-2i}{2})\alpha X_p, & 1 \le i \le \frac{p-3}{2}, \\ [X_i, X_{p-i}] = (-1)^{i}(\frac{(i-1)(p-1-i)}{2}\alpha + \frac{1}{\alpha})X_{p+1}, & 1 \le i \le \frac{p-1}{2}, \\ [X_i, X_{p+1-i}] = (-1)^{i-1}(\frac{(i-1)(i-2)(3p-2i-3)}{12}\alpha + \frac{i-1}{\alpha})X_{p+2}, & 1 \le i \le \frac{p-1}{2}, \\ [X_i, X_{p+2+i}] = a_i X_{p+3}, & 1 \le i \le \frac{p+1}{2}, \\ [X_i, Y] = X_{p+i}, & 1 \le i \le 3. \end{cases}$$

con $\alpha = \sqrt{\frac{-12}{(p-2)(p-3)}}$

De las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{p+1-i}) = 0$ para $1 \le i \le \frac{p-1}{2}$, se tiene que

$$a_{i+1} + a_i = (-1)^{i-1}\left(\frac{(i-1)(i-2)(3p-2i-3)}{12}\alpha + \frac{i-1}{\alpha}\right), \ 1 \le i \le \frac{p-1}{2}, \tag{4.3}$$

De la relación de Jacobi $J(X_1, X_2, X_{p-2}) = 0$, se tiene que

$$a_1\left(\frac{(p-3)}{2}\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = a_2\frac{p-3}{2}\alpha,$$

y por tanto $a_1 = a_2 = 0$.

Veamos que

$$a_i = (-1)^i\left(\frac{(i-1)(i-2)(i-3)(2p-i-2)}{24}\alpha + \frac{(i-1)(i-2)}{2\alpha}\right), \quad 1 \le i \le \frac{p+1}{2}.$$

En efecto, se verifica para $i = 1$ e $i = 2$; suponiéndola cierta para k, de la Ecuación 4.3, para $i = k$ se tiene que

$$a_{k+1} = (-1)^{k-1}\left(\frac{(k-1)(k-2)(3p-2k-3)}{12}\alpha + \frac{k-1}{\alpha}\right) - a_k,$$

al sustituir el valor de a_k, se obtiene

$$a_{k+1} = (-1)^{k-1}\left(\tfrac{(k-1)(k-2)(3p-2k-3)}{12}\alpha + \tfrac{k-1}{\alpha}\right) - (-1)^k\left(\tfrac{(k-1)(k-2)(k-3)(2p-k-2)}{24}\alpha + \tfrac{(k-1)(k-2)}{2\alpha}\right)$$

que se puede expresar como

$$a_{k+1} = (-1)^{k+1}\left(\tfrac{(k-1)(k-2)}{12}\left(\tfrac{2(3p-2k-3)+(k-3)(2p-k-2)}{2}\right)\alpha + \tfrac{(k-1)(2+(k-2))}{2\alpha}\right),$$

y por tanto se tiene que

$$a_{k+1} = (-1)^{k+1}\left(\frac{(k-2)(k-1)k(2p-(k+1)-2)}{24}\alpha + \frac{(k-1)(k)}{2\alpha}\right),$$

y el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{12}_{(p+5,1,p)}$.

Concluyamos la prueba para el caso $8 \leq p \leq n-6$, considerando la nulidad de A y B. El caso $p = n-6$, muestra la regularidad que se encontrará cuando $8 \leq p \leq n-6$; y se considera aparte.

- Caso $p = n-6$.

– Si n, es par, entonces p es par y por tanto $B = 0$, no puede ser $A = 0$, pues el álgebra que resulta es de longitud máxima. Luego $A \neq 0$, un cambio de bases adecuado permite suponer $A = 1$, y de las Proposiciones 4.24 y 4.25, la ley del álgebra viene dada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j}\, X_{i+j+1}, & 1 \leq i < j \leq n-3-i, \\ [X_i, Y] = X_{i+p}, & 1 \leq i \leq n-2-p, \end{cases}$$

De las relaciones de Jacobi $J(X_i, X_j, X_k) = 0$, con $0 \leq i < j < k$ e $i+j+k \leq n-4$, se tiene, de nuevo, que las constantes de estructura $a_{i,j}$, con $1 \leq i < j \leq n-3-i$, del álgebra deben tomar los valores que se especifican en alguno de los apartados siguientes:

1. $a_{i,j} = 0$, para cualquier i, j.

2. $\begin{cases} a_{1,j} = \beta, & 2 \leq j \leq n-4, \\ a_{i,j} = 0, & \text{para } i \neq 1. \end{cases}$

Si n es par,

3. $\begin{cases} a_{i,n-3-i} = (-1)^{i-1}\beta, & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}, \\ a_{i,j} = 0, & \text{en otro caso .} \end{cases}$

4. $\begin{cases} a_{i,2\left\lfloor\frac{n-3}{2}\right\rfloor-1-i} = (-1)^{i-1}\beta, & 1 \leq i \leq \left\lfloor\frac{n-5}{2}\right\rfloor, \\ a_{i,2\left\lfloor\frac{n-3}{2}\right\rfloor-i} = (-1)^{i-1}\left(\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor - i\right)\beta, & 1 \leq i \leq \left\lfloor\frac{n-5}{2}\right\rfloor, \\ a_{i,n-3-i} = (-1)^{i}\,\frac{(i-1)(n-3-i)}{2}\beta\,\alpha, & 2 \leq i \leq \frac{n-4}{2}, \\ a_{i,j} = 0, & \text{en otro caso .} \end{cases}$

donde $\alpha = 0$, si n impar, y $\alpha = 1$, si n es par.

5. $\left\{ a_{i,j} = \frac{6\,(i-1)!\,(j-1)!\,(j-i)}{(i+j)!}\beta, \quad 1 \leq i \leq \left\lfloor\frac{n-4}{2}\right\rfloor, \; i < j \leq n-3-i. \right.$

La relación de Jacobi $J(X_1, X_2, Y) = 0$, obliga a que $a_{1,p+2} = a_{1,2}+a_{2,1+p}$. Veamos ahora que constantes de estructura la cumplen:

Así, se tiene que los conjuntos de soluciones 1 y 2, satisfacen la igualdad, y las álgebras que se tienen son $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n,1,p)}$ y $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n,1,p)}$.

El único valor del conjunto de soluciones del grupo 3, que satisface la citada igualdad es $\beta = 0$. En efecto, se tiene que $a_{1,p+2} = a_{1,n-4} = \beta$, $a_{1,2} = 0$ y $a_{2,p+1} = a_{2,n-3} = -\beta$, y por tanto $\beta = 0$, y el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n,1,p)}$.

De igual manera, si $a_{i,j}$, son las constantes de estructura del caso 4, tiene que ser $\beta = 0$. En efecto, se tiene que, $a_{1,p+2} = a_{1,2} = 0$ y $a_{2,p+1} = \frac{n-6}{2}\beta$, con lo que $\beta = 0$, y el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n,1,p)}$.

Asimismo, el único valor del conjunto de soluciones del caso 5 que satisface la citada igualdad es $\beta = 0$. En efecto, se tiene que, $a_{1,p+2} = \frac{6(p+1)}{(p+2)(p+3)} = \beta$ y

$a_{1,2} = \beta\ a_{2,p+1} = \frac{6(p-1)}{(p+1)(p+2)(p+3)}\beta$, y sustituyendo estos valores en la igualdad se tiene $\beta = 0$, y el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n,1,p)}$.

Luego el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n,1,n-6)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n,1,n-6)}$.

– Si n es impar, entonces p es impar, en este caso también puede ser $B \neq 0$.

Si $B = 0$ y $A \neq 0$, un tratamiento similar al caso n par, implica que el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n,1,n-6)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n,1,n-6)}$.

Si $B \neq 0$ y $A = 0$, de la Proposición 4.25, y con un cambio de bases adecuado, la estructura de $\mathfrak{g}$ es

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j}X_{i+j+1}, & 1 \leq i < j \leq n-3-i, \quad j \neq p-2-i, \\ [X_i, X_{p-2-i}] = a_{i,p-2-i}X_{p-1} + (-1)^{i-1}Y, & 1 \leq i \leq \frac{p-3}{2}. \end{cases}$$

Y con un tratamiento similar, al realizado en los casos $p = n-1$ y $p = n-2$, se prueba que el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^4_{(n,1,n-6)}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^5_{(n,1,n-6)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^6_{(n,1,n-6)}$.

Veamos que no puede ser $AB \neq 0$. En efecto si $AB \neq 0$, como p es impar, entonces $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/ < X_{p+4} >$, es un álgebra de tipo $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}^{12}_{(p+5,1,p)}$, y la ley del álgebra viene dada, ahora, por

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le p+3, \\ [X_i, X_{p-2-i}] = (-1)^{i-1}(\alpha X_{p-1} + Y), & 1 \le i \le \frac{p-3}{2}, \\ [X_i, X_{p-1-i}] = (-1)^{i-1}(\frac{p-1-2i}{2})\alpha X_p, & 1 \le i \le \frac{p-3}{2}, \\ [X_i, X_{p-i}] = (-1)^{i}(\frac{(i-1)(p-1-i)}{2}\alpha + \frac{1}{\alpha})X_{p+1}, & 1 \le i \le \frac{p-1}{2}, \\ [X_i, X_{p+1-i}] = (-1)^{i-1}(\frac{(i-1)(i-2)(3p-2i-3)}{12}\alpha + \frac{i-1}{\alpha})X_{p+2}, & 1 \le i \le \frac{p-1}{2}, \\ [X_i, X_{p+2-i}] = (-1)^{i}(\frac{(i-1)(i-2)(i-3)(2p-i-2)}{24}\alpha + \frac{(i-1)(i-2)}{2\alpha})X_{p+3}, & 1 \le i \le \frac{p+1}{2}, \\ [X_i, X_{p+3+i}] = a_i X_{p+4}, & 1 \le i \le \frac{p+1}{2}, \\ [X_i, Y] = X_{p+i}, & 1 \le i \le 4. \end{cases}$$

con $\alpha = \sqrt{\frac{-12}{(p-2)(p-3)}}$

De la relación de Jacobi $J(X_0, X_1, X_{p+1}) = 0$, se tiene que $0 = a_1 + a_2$, además de $J(X_1, X_2, X_{p-1}) = 0$, se tiene que $a_1 = a_2$ y por tanto $a_1 = a_2 = 0$.

Por la Proposición 4.26 se tiene que

$$\sum_{k=0}^{i}(-1)^k \binom{i}{k} a_{1,i+1+k} = 0, \text{ para } \quad 1 \le i \le \left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor$$

luego para $i = \frac{p+1}{2}$ se obtiene que

$\binom{\frac{p+1}{2}}{\frac{p-9}{2}} a_{1,p-3} - \binom{\frac{p+1}{2}}{\frac{p-7}{2}} a_{1,p-2} + \binom{\frac{p+1}{2}}{\frac{p-5}{2}} a_{1,p-1} = 0$, sustituyendo las constantes de estructuras $a_{1,j}$ por sus valores correspondientes, resulta la igualdad

$\frac{(p+1)(p-1)(p-3)(p^2-22p+165)}{3!640} = 0$, y dicha ecuación no posee solución entera con $p \ge 9$ y p impar, y por tanto no puede ser $AB \ne 0$, con n impar y $p = n - 6$.

Se concluye la prueba haciendo una inducción sobre la dimensión del álgebra para los casos restantes.

- Caso $8 \le p \le n - 7$.

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,p,p)}$, con $8 \le p \le n - 7$. De las Proposiciones 4.24 y 4.25, la ley del álgebra viene dada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j}\, X_{i+j+1}, & 1 \leq i < j \leq n-3-i,\ j \neq p-2-i, \\ [X_i, X_{p-2-i}] = a_{i,p-2-i}\, X_{p-1} + (-1)^{i-1} B\,Y, & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{p-3}{2} \right\rfloor, \\ [X_i, Y] = AX_{i+p}, & 1 \leq i \leq n-2-p, \end{cases}$$

No puede ser $A = B = 0$. En efecto, si $A = B = 0$, se tendría que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus < Y >$, siendo $\mathfrak{g}'$, un álgebra filiforme de longitud máxima y, por tanto, $\mathfrak{g}$ tendría longitud máxima. Y como se ha visto en el caso anterior tampoco puede ser $AB \neq 0$, para $8 \leq p \leq n-6$. Así, los únicos casos que cabe considerar, son $A = 0$ y $B \neq 0$ ó $A \neq 0$ y $B = 0$.

Los primeros casos que tienen sentido son cuando la dimensión del álgebra $\mathfrak{g}$ es $n = 15$ ó $n = 16$, y puede verse en estos casos directamente que las álgebras no isomorfas que resultan son:

Si $n = 15$, $p = 8$ y el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^i_{(15,1,8)}$, para $1 \leq i \leq 2$.

Si $n = 16$, $8 \leq p \leq 9$, y el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^i_{(16,1,p)}$, con $1 \leq i \leq 2$ y $8 \leq p \leq 9$, ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^i_{(16,1,9)}$, para $3 \leq i \leq 6$.

Supongamos el resultado cierto para un álgebra $\mathfrak{g}$ de dimensión n; y sea, ahora, $\mathfrak{g}$ un álgebra de dimensión $n+1$, cuya descomposición en una base homogénea y adaptada es

$$\mathfrak{g} =< X_0 > \oplus < X_1 > \oplus \cdots \oplus < X_{p-1}, Y > \oplus \cdots \oplus < X_{n-1} >, \quad \text{con} \quad 8 \leq p \leq n-6.$$

Si $p = n-6$, las álgebras que se obtienen son las del caso anterior. Sea, ahora, $p < n-6$, de las Proposiciones 4.24 y 4.25, la ley del álgebra viene dada por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j}\, X_{i+j+1}, & 1 \leq i < j \leq n-3-i,\, j \neq p-2-i, \\ [X_i, X_{p-2-i}] = a_{i,p-2-i}\, X_{p-1} + (-1)^{i-1} B\, Y, & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{p-3}{2} \right\rfloor, \\ [X_i, Y] = A X_{i+p},\ (A = 0,\ si\ p \geq n-2) & 1 \leq i \leq n-2-p, \end{cases}$$

donde $B = 0$, si p es par.

Si p es par, entonces $B = 0$, y de aplicar la hipótesis de inducción al álgebra $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/ < X_{n-1} >$, la ley del álgebra se puede expresar, entonces, por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [X_1, X_j] = \alpha\, X_{j+2}, & 2 \leq j \leq n-4, \\ [X_i, Y] = X_{i+p}, & 1 \leq i \leq n-1-p, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = a_i\, X_{n-1} & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor \end{cases}$$

con $\alpha = 0$ ó $\alpha = 1$.

Las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_{i-1}, X_{n-2-i}) = 0$, para $3 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$, implica que $a_i = -a_{i-1}$ y de la relación de Jacobi $J(X_0, X_1, X_{n-4}) = 0$, se tiene que $\alpha = a_1 + a_2$.

Si n es par, para $i = \frac{n-2}{2}$ se tiene que $a_{\frac{n-2}{2}} = 0$ y, por tanto, $a_i = 0$ para $i \geq 2$, y $a_1 = \alpha$. Luego el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n+1,1,p)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n+1,1,p)}$.

Si n es impar, de la relación de Jacobi $J(X_{\frac{n-1-p}{2}}, X_{\frac{n+1-p}{2}}, Y) = 0$, se tiene que $a_{\frac{n+1-p}{2}} = a_{\frac{n-1-p}{2}}$, con lo que $a_i = 0$ para $2 \leq i \leq \frac{n-3}{2}$, y $a_1 = \alpha$, y el álgebra es, al igual que antes, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n+1,1,p)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n+1,1,p)}$.

Concluida la prueba para el caso p par, se obtienen las álgebras para p impar.

Si p es impar, cabe considerar los dos casos $B = 0$ y $A \neq 0$ ó $B \neq 0$ y $A = 0$.

Sea, ahora $B = 0$ y $A \neq 0$.

Si $n+1$ es par, de aplicar la hipótesis de inducción al álgebra $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/ < X_{n-1} >$, la estructura de $\mathfrak{g}$ es

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le n-2, \\ [X_1, X_i] = \alpha\, X_{i+2}, & 1 \le i \le n-3, \\ [X_i, Y] = X_{i+p}, & 1 \le i \le n-1-p, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = a_i\, X_{n-1}, & 1 \le i \le \frac{n-3}{2}. \end{cases}$$

con $\alpha = 0$ ó $\alpha = 1$.

De las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{n-3-i}) = 0$, para $1 \le i \le \frac{n-5}{2}$, se tiene que $\alpha = a_2 + a_1$ y $a_i = (-1)^i a_2$ para $2 \le i \le \frac{n-3}{2}$, y la relación de Jacobi $J(X_1, X_2, X_{n-7}) = 0$, implica que $\alpha a_2 = 0$, con lo que, si $\alpha = 0$, entonces $a_i = (-1)^{i-1} a_1$, para $1 \le i \le \frac{n-3}{2}$. Si $a_1 = 0$, el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n+1,1,p)}$, y si $a_1 \neq 0$, con un cambio de bases adecuado, el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^3_{(n+1,1,p)}$. Si $\alpha = 1$, entonces $a_i = 0$, para $2 \le i \le \frac{n-3}{2}$ y $a_1 = 1$, y por tanto el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n+1,1,p)}$.

Si $n+1$ es impar, el producto de $\mathfrak{g}$, viene dado por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le n-2, \\ [X_1, X_i] = \alpha\, X_{i+2}, & 1 \le i \le n-3, \\ [X_i, Y] = X_{i+p}, & 1 \le i \le n-1-p, \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i-1} a X_{n-2} & 1 \le i \le \frac{n-4}{2}, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = a_i\, X_{n-1}, & 1 \le i \le \frac{n-4}{2}, \end{cases}$$

con $\alpha a = 0$ y $\alpha = 0$ ó $\alpha = 1$.

Si $a = 0$, de las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{n-3-i}) = 0$, para $1 \le i \le \frac{n-4}{2}$, se obtiene que $a_i = 0$, para $2 \le i \le \frac{n-4}{2}$, y $a_1 = \alpha$, y por tanto el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n+1,1,p)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n+1,1,p)}$.

Veamos que no puede ser $a \neq 0$. En efecto, si $a \neq 0$, de las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{n-3-i}) = 0$, para $1 \le i \le \frac{n-6}{2}$, se obtiene que $a_i = (-1)^i (i-1) a +$

$(-1)^{i-1}a_1$, y de la relación de Jacobi $J(X_0, X_{\frac{n-4}{2}}, X_{\frac{n-2}{2}}) = 0$, se tiene que $a_{\frac{n-4}{2}} = (-1)^{\frac{n-6}{2}}a$, que implica que $a_1 = \frac{n-4}{2}a$, y la relación de Jacobi $J(X_1, X_{n-p-2}, Y) = 0$, implica que $a = 0$, que prueba la contradicción.

Si $B = 0$ y $A \neq 0$, un tratamiento similar al caso n par, implica que el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1_{(n,1,n-6)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2_{(n,1,n-6)}$.

Si $B \neq 0$ y $A = 0$, de la Proposición 4.25, y con un cambio de bases adecuado, la estructura de $\mathfrak{g}$ es

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j}X_{i+j+1}, & 1 \leq i < j \leq n-3-i, \quad j \neq p-2-i, \\ [X_i, X_{p-2-i}] = a_{i,p-2-i}X_{p-1} + (-1)^{i-1}Y, & 1 \leq i \leq \frac{p-3}{2}. \end{cases}$$

Y con un tratamiento similar, al realizado en los casos $p = n-1$ y $p = n-2$, se prueba que el álgebra es $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^4_{(n,1,p)}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^5_{(n,1,p)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^6_{(n,1,p)}$ (n par). □

Nota 4.44 Si $p = 9$, para las dimensiones de $\mathfrak{g} = 10, 11 y 12$ las álgebras que se obtiene son $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^4_{(10,1,9)}$ y $\mathfrak{g}^6_{(10,1,9)}$ $\mathfrak{g}^4_{(11,1,9)}$ y $\mathfrak{g}^5_{(11,1,9)}$ y $\mathfrak{g}^4_{(12,1,9)}$, $\mathfrak{g}^6_{(12,1,9)}$ y $\mathfrak{g}^5_{(12,1,9)}$.

Si $p = 11$ y $\dim \mathfrak{g} = 12$, las álgebras que se tienen son, $\mathfrak{g}^4_{(12,1,11)}$, $\mathfrak{g}^6_{(12,1,11)}$

En las proposiciones que se sigue, se prueba que las álgebras obtenidas en esta Sección son no isomorfas dos a dos. Se recoge en la siguiente proposición, la prueba de que álgebras de igual dimensión y estructura, y de distinta graduación son no isomorfas.

Proposición 4.45 *Sean $\mathfrak{g}_1$ un álgebra de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,r,r)}$ y $\mathfrak{g}_2$ un álgebra de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,q,q)}$, con $r \neq q$. Entonces $\mathfrak{g}_1$ no es isomorfa a $\mathfrak{g}_2$.*

Demostración. Por ser álgebras casifiliformes se tiene que tener que $\dim \mathcal{C}^1\mathfrak{g} = n-2$ ó $\dim \mathcal{C}^1\mathfrak{g} = n-3$.

Si $\dim \mathcal{C}^1\mathfrak{g}_1 = n-2$ y $\dim \mathcal{C}^1\mathfrak{g}_2 = n-3$, evidentemente no son isomorfas.

Sean, ahora $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$, tales que $\dim \mathcal{C}^1\mathfrak{g}_i = n-2$, para $1 \leq i \leq 2$.

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme tal que $\dim \mathcal{C}^1\mathfrak{g} = n-2$, se tiene entonces que $\mathfrak{g}$ ha de ser un álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^i_{(n,1,p)}$, para $4 \leq i \leq 8$, $i = 11$ ó $i = 12$, y se verifica que

$$\dim \mathcal{C}^i\mathfrak{g} = \begin{cases} n-1-i, & 1 \leq i \leq p-3, \\ n-2-i, & p-2 \leq i \leq n-2. \end{cases}$$

Entonces, como $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}^s_{(n,1,r)}$ y $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}^k_{(n,1,q)}$, con $r \neq q$, se tiene que $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ son no isomorfas.

Sean, ahora $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$, tales que $\dim \mathcal{C}^1\mathfrak{g}_i = n-3$, para $1 \leq i \leq 2$.

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra tal que $\dim \mathcal{C}^1\mathfrak{g} = n-3$, se tiene entonces que $\mathfrak{g}$ ha de ser un álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^i_{(n,1,p)}$, para $1 \leq i \leq 3$, $i = 9$ ó $i = 10$, y por tanto

$$\mathcal{C}^{n-3-p}\mathfrak{g} = < X_{n-2-p}, X_{n-1-p}, \ldots, X_{n-2} >$$

y

$$\mathcal{C}^{n-2-p}\mathfrak{g} = < X_{n-1-p}, X_{n-p}, \ldots, X_{n-2} > .$$

Como $r \neq q$, sea $r < q$, entonces se verifica que $\dim \operatorname{cen}(\mathcal{C}^{n-2-r}\mathfrak{g}_1) < \dim \operatorname{cen}(\mathcal{C}^{n-2-r}\mathfrak{g}_2)$, y se deduce que $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ son no isomorfas. $\square$

En la siguiente proposición se prueba que no son isomorfas los distintos tipos de álgebras casifiliformes de dimensión n y longitud $n-1$ obtenidas en esta Sección y que puedan ser consideradas.

Proposición 4.46 *Si $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ son álgebras casifiliformes de dimensión $n \geq 15$, y longitud $n-1$, entonces $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ son no isomorfas.*

Demostración. En efecto, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de longitud $n-1$, el álgebra puede ser $\mathfrak{g} = Q_{n-1} \oplus \mathbf{K}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^i_{(n,1,p)}$, para $1 \leq i \leq 12$, y siempre se puede encontrar un invariante que las distinga dos a dos como queda reflejado en la siguiente tabla.

$\mathfrak{g}$/ dim	$\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})$	cen($\mathfrak{g}$)	$\mathcal{C}^{n-3}(\mathfrak{g})$	$[\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}),\mathcal{C}^1(\mathfrak{g})]$	cen $\mathcal{C}^2(\mathfrak{g})$	cen $\mathcal{C}^1\mathfrak{g}$
$Q_{n-1}\oplus$	$n-3$	2	-	-	-	-
$\mathfrak{g}^1_{(n,1,p)}$	$n-3$	1	-	0	-	$n-2$
$\mathfrak{g}^2_{(n,1,p)}$	$n-3$	1	-	0	-	$n-3$
$\mathfrak{g}^3_{(n,1,p)}$	$n-3$	1	-	1 si n es par	-	-
$\mathfrak{g}^9_{(n,1,p)}$	$n-3$	1	-	2 si n es impar 3 si n es par	-	-
$\mathfrak{g}^{10}_{(n,1,p)}$	$n-3$	1	-	$n-7$	-	-
$\mathfrak{g}^4_{(n,1,p)}$	$n-2$	2	1	0, $p=5$ 1 $p\geq 7$	$n-1$ $p=5$ $n-2$ $p\geq 7.$	-
$\mathfrak{g}^5_{(n,1,p)}$	$n-2$	2	1	3 si n es impar 4 si n es par	- —	-
$\mathfrak{g}^6_{(n,1,p)}$	$n-2$	2	1	2	—	-
$\mathfrak{g}^7_{(n,1,p)}$	$n-2$	2	1	0 $p=5$ 1 $p=7$	$n-2$ $p=5$ $n-3$ $p=7.$	-
$\mathfrak{g}^8_{(n,1,p)}$	$n-2$	2	1	$n-6$		-
$\mathfrak{g}^{11}_{(n,1,p)}(\alpha)$	$n-2$	1	-	3	-	-
$\mathfrak{g}^{12}_{(n,1,p)}$	$n-2$	1	-	4 ó 5	-	-

Probemos ahora que si $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}^{11}_{(n,1,p)}(\alpha)$, con $\alpha=re^{i\theta}$, con $r\neq 0$, y $-\pi/2\leq\theta<\pi/2$, son también álgebras no isomorfas.

En efecto, el cambio de bases

$$\begin{cases} X_0' = X_0, \\ X_i' = -X_i, \quad 1 \le i \le n-2, \\ Y' = Y. \end{cases}$$

permite probar que las álgebras $\mathfrak{g}^{11}_{(n,1,n-3)}(\alpha)$ y $\mathfrak{g}^{11}_{(n,1,n-3)}(-\alpha)$ son isomorfas.

En general, cualquier cambio de bases admisible es composición de cambios de bases en los que se deja invariante algunos de los generadores, en nuestro caso X_0 ó X_1.

- Tipo 1.-

Consideremos el cambio de bases,

$$\begin{cases} X_0' = X_0, \\ X_1' = \sum\limits_{i=0}^{i=n-2} a_i X_i + a_{n-1} Y. \end{cases}$$

Como $[X_0', X_i'] = X_{i+1}'$, para $1 \le i \le n-3$, resulta que

$$X_i' = \sum_{i=1}^{n-k+1} a_i X_{i+k-1}, \quad \text{para } 2 \le i \le n-2.$$

Supóngase $Y' = \sum\limits_{i=0}^{n-2} a_i' X_i + a_{n-1}' Y$. De $[X_0', Y'] = 0$, se sigue que $a_i' = 0$, para $1 \le i \le n-3$, y de $[X_1', Y'] = X_{n-2}'$, se implica que $a_0' = 0$. Además del producto corchete, $[X_1', X_p']$, se obtiene que $a_0 = 0$.

De $[X_1', X_{n-4}']$, se obtiene que $\alpha' = \frac{\alpha}{a_1}$ y y $a_1^2 = 1$, luego cualquier cambio de bases de este tipo, a losumo, hace isomorfas álgebras con valores opuestos del parámetro.

- Tipo 2.-

Supongamos, ahora que

$$\begin{cases} X_0' = \sum_{i=0}^{i=n-2} b_i X_i + a_{n-1} Y, \\ X_1' = X_1. \end{cases}$$

Como ha de ser $[X_0', X_i'] = X_{i+1}'$, se tiene que

$$\begin{cases} X_2' = b_0 X_2 - b_{p-3}\alpha X_{p-1} - b_{p-2}\frac{p-3}{2}\alpha X_p + (b_{p-1}\frac{1}{\alpha} - b_{p-2})X_{p+1} - b_{p-3}Y, \\ X_3' = b_0^2 X_3 + b_0 b_{p-4}\alpha X_{p-1} + b_0 b_{p-3}\frac{p-7}{2}\alpha X_p \\ \qquad -b_0 b_{p-2}((p-3)\alpha + \frac{1}{\alpha})X_{p+1} + b_0 b_{p-4} Y, \\ X_k' = b_0^{k-1} X_3 + (-1)^{k-1} {b_0}^{k-2}(b_{p-k-1}\alpha X_{p-1} + b_{p-k}\frac{p-2k-1}{2}\alpha X_p \\ \qquad -b_{p-k+1}(\frac{(k-1)(p-k-1)}{2}\alpha + \frac{1}{\alpha})X_{p+1} + b_{p-k-1}Y), & 4 \le k \le p-2, \\ X_{p-1}' = {b_0}^{p-2} X_{p-1} - {b_0}^{p-3} b_1 \frac{1-p}{2}\alpha\, X_p + {b_0}^{p-3} b_2 \frac{1}{\alpha} X_{p+1}, \\ X_p' = {b_0}^{p-1} X_p - {b_0}^{p-2}(\frac{1-p}{2}\alpha + \frac{1}{\alpha})X_{p+1}, \\ X_{p+1}' = {b_0}^{p-1} X_{p+1}, \\ Y' = {b_0}^{p-4}(\alpha - {b_0}^2\alpha')X_{p-1} + {b_0}^{p-3} b_1 \frac{1-p}{2}\alpha\alpha' X_p - {b_0}^{p-3} b_2 \frac{\alpha'}{\alpha} X_{p+1} + {b_0}^{p-4} Y. \end{cases}$$

Como ha de ser $[X_0', Y'] = 0$ y $[X_1', Y'] = X_{p+1}'$, se obtiene que $\alpha' = b_0\alpha$ y $\alpha = {b_0}^2\alpha'$, esto es $\alpha' = b_0\alpha$, con ${b_0}^3 = 1$.

Finalmente, del producto corchete $[X_2', X_{p-2}']$, y sustituyendo las expresiones anteriores, se llega a que ${b_0}^2 = 1$, esto es, $\alpha = \alpha'$, con lo que no hay álgebras casifiliformes isomorfas mediante los cambios de bases de este tipo. □

Se concluye, el trabajo con el siguiente Teorema, donde se recogen las álgebras casifiliformes, que se han obtenido en esta Sección, y que como ha quedado demostrado en las dos proposiciones anteriores son no isomorfas.

Teorema 4.47 Algebras casifiliformes de longitud $n-1$. *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de dimensión $n \geq 15$ y longitud $n-1$, se tiene que el álgebra es $\mathfrak{g} = Q_{n-1} \oplus \mathbf{K}$ ó*

Si $3 \leq p \leq n-3$	$\mathfrak{g}^1_{(n,1,p)}$ *y* $\mathfrak{g}^2_{(n,1,p)}$
Si n *es par, para* $3 \leq p \leq n-3$ *y* p *impar, ó* $p = n-4$	$\mathfrak{g}^3_{(n,1,p)}$
Si $5 \leq p \leq n-1$ *y* p *es impar*	$\mathfrak{g}^4_{(n,1,p)}$ *y* $\mathfrak{g}^5_{(n,1,p)}$
Si n *es par, para* $5 \leq p \leq n-1$ *y* p *es impar*	$\mathfrak{g}^6_{(n,1,p)}$
Si $p = 5$ *ó* $p = 7$	$\mathfrak{g}^7_{(n,1,p)}$ *y* $\mathfrak{g}^8_{(n,1,p)}$
Si $n-3 \leq p \leq n-5$	$\mathfrak{g}^9_{(n,1,p)}$ *y* $\mathfrak{g}^{10}_{(n,1,p)}$
Si $n-3 \leq p \leq n-5$, *para* p *impar*	$\mathfrak{g}^{11}_{(n,1,n-3)}(\alpha)$ *y* $\mathfrak{g}^{12}_{(n,1,p)}$, $(p = 2\lfloor (n-1)/2 \rfloor - 3)$

Conclusión y problemas abiertos

La clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes es un problema que se ha demostrado no puede ser resuelto totalmente. Uno de los objetivos del presente trabajo es, desde luego, hacer una aproximación a los "límites" de dicha clasificación.

Si se desea conocer mejor un cierto conjunto de estructuras algebraicas, es claro que su clasificación es uno de los problemas a abordar; y, en cierta forma, las álgebras naturalmente graduadas constituyen el "esqueleto" de las álgebras de la familia considerada. Se ha estudiado en esta memoria un caso particular de álgebras de Lie nilpotentes graduadas naturalmente, las de sucesión característica $(n-p, 1, \ldots, 1)$ cuando la dimensión de la subálgebra derivada es mínima, esto es $n-p-1$.

Además, como se ha puesto de manifiesto en los trabajos de Cábezas y Gómez y de Goze y Khakimdjanov, el considerar graduaciones con elevado número de subespacios graduantes facilita la tarea del estudio de las álgebras de derivaciones, y a partir de su conocimiento, de órbitas, espacio de cohomología, y en general, de ciertas propiedades geométricas de las álgebras. Por ello, se estudian en esta memoria las álgebras de Lie filiformes y casifiliformes de longitud mayor que el índice de nilpotencia, es decir, las álgebras filiformes y casifiliformes de longitud máxima y las álgebras casifiliformes de longitud $\dim \mathfrak{g} - 1$, todo ello para dimensiones arbitrarias. Como quiera que en estas familias la expresión general de las álgebras se obtiene a partir de dimensiones relativamente elevadas, el uso de cálculo simbólico se hace necesario, al menos, para facilitar la tarea de resolución de las identidades de Jacobi, y para poder conjeturar la solución final. Por ello, pensamos que a medida que disminuya el índice de nilpotencia, este tratamiento se hará, más que necesario, imprescindible.

Entre los problemas que de una forma "natural" podrían ser considerados una continuación de esta memoria, merecen señalarse:

- La clasificación de las álgebras de Lie 3-filiformes graduadas naturalmente.

- La clasificación de las álgebras de Lie 3-filiformes de longitud mayor que su índice de nilpotencia.

- La clasificación de las álgebras de Lie graduadas naturalmente de invariante de Goze $(n-3, 2, 1)$, que completaría la clasificación de las álgebras de Lie graduadas naturalmente de índice de nilpotencia $n-3$.

En el Capítulo 3, se han obtenido las álgebras de Lie filiformes de longitud máxima. El estudio de las derivaciones de las álgebras L_n, R_n y W_n ya ha sido realizado por Goze y Khakimdjanov [30], y un problema pendiente es por tanto:

- El estudio de las álgebras de derivaciones de las álgebras K_n y Q'_n, así como el estudio de propiedades geométricas de estas álgebras.

Asimismo, en el Capítulo 4 se han obtenido las álgebras casifiliformes de longitudes n y $n-1$, siendo n la dimensión del álgebra. Un problema a resolver ahora es:

• El estudio de las álgebras de las derivaciones y de propiedades geométricas de dichas álgebras.

Problemas más generales, y cuya resolución estan aún pendientes, pueden ser:

• Si $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ son álgebras de longitudes n_1 y n_2, respectivamente. ¿Cuál es la longitud de $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$?. Y la generalización de este problema a m álgebras.

• Obtener la clasificación de las álgebras filiformes y casifiliformes graduadas no conexas (donde exista al menos un subespacio graduante $\mathfrak{g}_i = \{0\}$.) Al trabajar con estas graduaciones se puede conseguir que los subespacios graduantes sean todos de dimensión 1, lo que facilita los cálculos, aunque, a cambio, dejen de ser conexas y, por tanto, aumente $n_2 - n_1$.

Apéndice

Se recogen en este Apéndice, los casos particulares de las álgebras casifiliformes de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,p,p)}$, en dimensiones y valores de p concretos, que culminan el estudio de los tipos considerados, cuya generalización se obtuvo en el Capítulo [4].

Además, dado que la expresión general de estas familias de álgebras se obtienen para valores elevados de la dimensión, el uso de cálculo simbólico se hace imprescindible. Se muestra en el final de este Apéndice un ejemplo que nos ayudó a conjeturar algunas familias de álgebras.

Álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,3,3)}$

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,3,3)}$, además de las álgebras $\mathfrak{g}^1_{(n,1,3)}$, $\mathfrak{g}^2_{(n,1,3)}$ y $\mathfrak{g}^3_{(n,1,3)}$ (n par), obtenidas en la Proposición 4.30, si la dimensión de $\mathfrak{g} = 8$, existen las siguientes álgebras que admiten la anterior graduación.

Si $\dim \mathfrak{g} = 8$

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 5, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_4] = \alpha X_6, & \\ [X_2, X_3] = (1-\alpha) X_6, & \\ [X_i, Y] = X_{i+3}, & 1 \leq i \leq 3. \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{C} - \{1\}$.

Álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,4,4)}$

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,4,4)}$, además de las álgebras $\mathfrak{g}^1_{(n,1,4)}$ y $\mathfrak{g}^2_{(n,1,4)}$ obtenidas en la Proposición 4.32, si la dimensión del álgebra $\mathfrak{g}$ es $n < 12$, existen las siguientes álgebras que admiten la citada graduación.

Si $\dim(\mathfrak{g}) = 8$

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 5, \\ [X_i, X_{5-i}] = (-1)^{i-1} X_6, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, Y] = X_{i+4}, & 1 \leq i \leq 2. \end{cases}$$

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 5, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_4] = \alpha X_6, & \\ [X_2, X_3] = (1-\alpha) X_6, & \\ [X_i, Y] = X_{i+4}, & 1 \leq i \leq 2. \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{C} - \{1\}$.

Si $\dim(\mathfrak{g}) = 9$

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 6, \\ [X_i, X_{5-i}] = (-1)^{i-1} X_6, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{6-i}] = (-1)^{i-1}(3-i) X_7, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, Y] = X_{i+4}, & 1 \leq i \leq 3. \end{cases}$$

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 6, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_4] = \alpha X_6, & \\ [X_1, X_5] = (2\alpha - 1) X_7, & \\ [X_2, X_i] = (1-\alpha) X_{i+3}, & 3 \leq i \leq 4, \\ [X_i, Y] = X_{i+4}, & 1 \leq i \leq 3. \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{C} - \{1\}$.

Si $\dim(\mathfrak{g}) = 10$

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 7, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_4] = -3X_6, & \\ [X_1, X_5] = -7X_7, & \\ [X_1, X_6] = -3X_8, & \\ [X_2, X_i] = 4X_{i+3}, & 3 \leq i \leq 4, \\ [X_2, X_5] = -4X_8, & \\ [X_3, X_4] = 8X_8, & \\ [X_i, Y] = X_{i+4}, & 1 \leq i \leq 4. \end{cases}$$

Si $\dim(\mathfrak{g}) = 11$

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 8, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_4] = -3X_6, & \\ [X_1, X_5] = -7X_7, & \\ [X_1, X_6] = -3X_8, & \\ [X_1, X_7] = 9X_9, & \\ [X_2, X_i] = 4X_{i+3}, & 3 \leq i \leq 4, \\ [X_2, X_5] = -4X_8, & \\ [X_2, X_6] = -12X_9, & \\ [X_3, X_i] = 8X_{i+4}, & 4 \leq i \leq 5, \\ [X_i, Y] = X_{i+4}, & 1 \leq i \leq 5. \end{cases}$$

Álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,5,5)}$

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,5,5)}$, además de las álgebras obtenidas en la Proposición 4.35, si la dimensión del álgebra es $n < 12$, existen las siguientes álgebras que admiten la anterior graduación:

a) Cuando el vector Y pertenece a la subálgebra derivada y pertenece al centro, $\mathfrak{g}$ puede ser además de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^4_{(n,1,5)}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^5_{(n,1,5)}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^6_{(n,1,5)}$ (n par), $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^7_{(n,1,5)}$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^8_{(n,1,5)}$, una de las álgebras:

- Si $\dim \mathfrak{g} = 8$,

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le 5, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2} + \delta_{2,i} Y, & 2 \le i \le 3, \\ [X_1, X_4] = \alpha X_6, & \\ [X_2, X_3] = (1-\alpha) X_6. & \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{C} - \{1\}$.

Si $\dim \mathfrak{g} = 9$,

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le 6, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2} + \delta_{2,i} Y, & 2 \le i \le 3, \\ [X_1, X_4] = \alpha X_6, & \\ [X_1, X_5] = (2\alpha - 1) X_7, & \\ [X_2, X_i] = (1-\alpha) X_{i+3}, & 3 \le i \le 4. \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{C} - \{1\}$.

Si $\dim \mathfrak{g} = 10$,

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le 7, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2} + \delta_{2,i} Y, & 2 \le i \le 3, \\ [X_1, X_4] = \alpha\, X_6, & \\ [X_1, X_5] = (2\alpha - 1)\, X_7, & \\ [X_1, X_6] = \frac{5\alpha-3}{3-\alpha}\, X_8, & \\ [X_2, X_i] = (1-\alpha)\, X_{i+3}, & 3 \le i \le 4, \\ [X_2, X_5] = \frac{2\alpha(1-\alpha)}{3-\alpha}\, X_8, & \\ [X_3, X_4] = \frac{3(1-\alpha)^2}{3-\alpha}\, X_8. & \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{C} - \{1, 3\}$.

Si $\dim \mathfrak{g} = 11$,

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 8, \\ [X_1, X_2] = Y, & \\ [X_i, X_{5-i}] = (-1)^{i-1}\, X_6 & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{6-i}] = (-1)^{i-1}\,(3-i)\, X_7, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{7-i}] = (-1)^{i}\, \frac{(i-1)(6-i)}{2}\, X_8, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_i, X_{8-i}] = (-1)^{i}\, 5X_9, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_3, X_5] = -3X_9. & \end{cases}$$

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 8, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2} + \delta_{2,i} Y, & 2 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_4] = \alpha X_6, & \\ [X_1, X_5] = (2\alpha - 1) X_7, & \\ [X_1, X_6] = \frac{5\alpha-3}{3-\alpha} X_8, & \\ [X_1, X_7] = \frac{\alpha(5\alpha-3)}{3-\alpha} X_9, & \\ [X_2, X_i] = (1-\alpha) X_{i+3}, & 3 \leq i \leq 4, \\ [X_2, X_5] = \frac{2\alpha(1-\alpha)}{3-\alpha} X_8, & \\ [X_2, X_6] = \frac{(1-\alpha)(5\alpha-3)}{3-\alpha} X_9, & \\ [X_3, X_i] = \frac{3(1-\alpha)^2}{3-\alpha} X_{4+i}, & 4 \leq i \leq 5. \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{C} - \{1, 3\}$.

Si $\dim \mathfrak{g} = 12$,

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 9, \\ [X_1, X_2] = Y, & \\ [X_i, X_{5-i}] = (-1)^{i-1}\, X_6, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{6-i}] = (-1)^{i-1}\,(3-i)\, X_7, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{7-i}] = (-1)^{i}\, \frac{(i-1)(6-i)}{2}\, X_8, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_i, X_{8-i}] = (-1)^{i}\, 5X_9, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{9-i}] = \frac{-5}{2} X_{10}, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_3, X_5] = -3X_9, & \\ [X_3, X_6] = \frac{15}{2} X_{10}, & \\ [X_4, X_5] = \frac{-21}{2} X_{10}, & \end{cases}$$

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 9, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2} + \delta_{2,i} Y, & 2 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_4] = \alpha X_6, & \\ [X_1, X_5] = (2\alpha - 1) X_7, & \\ [X_1, X_6] = \frac{5\alpha-3}{3-\alpha} X_8, & \\ [X_1, X_7] = \frac{\alpha(5\alpha-3)}{3-\alpha} X_9, & \\ [X_1, X_8] = \frac{10\alpha^3+2\alpha^2-14\alpha+6}{4\alpha(2-\alpha)} X_{10}, & \\ [X_2, X_i] = (1-\alpha) X_{i+3}, & 3 \leq i \leq 4, \\ [X_2, X_5] = \frac{2\alpha(1-\alpha)}{3-\alpha} X_8, & \\ [X_2, X_6] = \frac{(1-\alpha)(5\alpha-3)}{3-\alpha} X_9, & \\ [X_2, X_7] = \frac{-10\alpha^4+24\alpha^3-44\alpha^2+48\alpha-18}{4\alpha(2-\alpha)(3-\alpha)} X_{10}, & \\ [X_3, X_i] = \frac{3(1-\alpha)^2}{3-\alpha} X_{i+4}, & 4 \leq i \leq 5, \\ [X_3, X_6] = \frac{30\alpha^4-96\alpha^3+120\alpha^2-72\alpha+18}{4\alpha(2-\alpha)(3-\alpha)} X_{10}, & \\ [X_4, X_5] = \frac{-42\alpha^4+144\alpha^3-180\alpha^2+96\alpha-18}{4\alpha(2-\alpha)(3-\alpha)} X_{10}, & \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{C} - \{0, 1, 2, 3\}$.

b) Cuando el vector Y no pertenece al centro ni a la subálgebra derivada, además de las álgebras $\mathfrak{g}^1_{(n,1,5)}$, $\mathfrak{g}^2_{(n,1,5)}$ y $\mathfrak{g}^3_{(n,1,5)}$ (n es par), existen las siguientes álgebras que admiten esta graduación,

Si $\dim(\mathfrak{g}) = 8$

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 5, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_4] = \alpha X_6, & \\ [X_2, X_3] = (1-\alpha)X_6, & \\ [X_1, Y] = X_6. & \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{C} - \{1\}$.

Si $\dim(\mathfrak{g}) = 9$

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 6, \\ [X_i, X_{5-i}] = (-1)^{i-1}X_6, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{6-i}] = (-1)^{i-1}(3-i)X_7, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, Y] = X_{i+5}, & 1 \leq i \leq 2. \end{cases}$$

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 6, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_4] = \alpha X_6, & \\ [X_1, X_5] = (2\alpha - 1)X_7, & \\ [X_2, X_i] = (1-\alpha)X_{i+3}, & 3 \leq i \leq 4, \\ [X_i, Y] = X_{i+5}, & 1 \leq i \leq 2. \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{C} - \{1\}$.

Si $\dim(\mathfrak{g}) = 10$,

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le 7, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \le i \le 3, \\ [X_1, X_4] = \alpha X_6, & \\ [X_1, X_5] = (2\alpha - 1) X_7, & \\ [X_1, X_6] = \frac{5\alpha-3}{3-\alpha} X_8, & \\ [X_2, X_i] = (1-\alpha) X_{i+3}, & 3 \le i \le 4, \\ [X_2, X_5] = \frac{2\alpha(1-\alpha)}{3-\alpha} X_8, & \\ [X_3, X_4] = \frac{3(1-\alpha)}{3-\alpha}, & \\ [X_i, Y] = X_{i+5} & 1 \le i \le 3. \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{C} - \{1\}$.

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le 7, \\ [X_i, X_{5-i}] = (-1)^{i-1} X_6, & 1 \le i \le 2, \\ [X_i, X_{6-i}] = (-1)^{i-1}(3-i) X_7, & 1 \le i \le 2, \\ [X_i, X_{7-i}] = (-1)^i \frac{(i-1)(6-i)}{2} X_8, & 1 \le i \le 3, \\ [X_i, Y] = X_{i+5}, & 1 \le i \le 3. \end{cases}$$

Si $\dim(\mathfrak{g}) = 11$,

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 8, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_i] = -X_{i+2}, & 5 \leq i \leq 6, \\ [X_2, X_i] = X_{i+3}, & 3 \leq i \leq 4, \\ [X_2, X_6] = -X_9, & \\ [X_3, X_i] = X_{i+4}, & 4 \leq i \leq 5, \\ [X_i, Y] = X_{i+5} & 1 \leq i \leq 4. \end{cases}$$

c) Existen familias de álgebras cuando el vector Y pertenece a la subálgebra derivada pero no al centro, que son casos excepcionales de las álgebras que admiten tales condiciones, cuya expresión general se tienen cuando $p \geq 8$, las cuales se han obtenido en la Proposición 4.43 estas álgebras son:

Si $\dim \mathfrak{g} = 8$

$$\mathfrak{g}(\alpha, \beta) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 5, \\ [X_1, X_i] = \alpha X_{i+2} + \delta_{2,i} Y, & 2 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_4] = \beta X_6, & \\ [X_2, X_3] = (\alpha - \beta) X_6, & \\ [X_1, Y] = X_6. & \end{cases}$$

Si $\dim \mathfrak{g} = 9$

$$\mathfrak{g}(\alpha, \beta) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 6, \\ [X_1, X_i] = \alpha X_{i+2} + \delta_{i,2} Y, & 2 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_4] = \beta X_6, & \\ [X_1, X_5] = (2\beta - \alpha) X_7, & \\ [X_2, X_3] = (\alpha - \beta) X_{i+3}, & 3 \leq i \leq 4, \\ [X_i, Y] = X_{i+5}, & 1 \leq i \leq 2. \end{cases}$$

Si $\dim \mathfrak{g} = 10$

$$\mathfrak{g}(\beta) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 7, \\ [X_1, X_i] = -\frac{1}{2\sqrt{3}} X_{i+2} + \delta_{i,2} Y, & 2 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_4] = \beta X_6, & \\ [X_1, X_5] = (2\beta - \frac{1}{2\sqrt{3}}) X_7, & \\ [X_1, X_6] = \frac{5}{2\sqrt{3}} X_8, & \\ [X_2, X_i] = (-\frac{1}{2\sqrt{3}} - \beta) X_{i+3}, & 3 \leq i \leq 4, \\ [X_2, X_5] = (2\beta - \frac{3}{\sqrt{3}}) X_8, & \\ [X_3, X_4] = (\frac{5}{2\sqrt{3}} - 3\beta) X_8, & \\ [X_i, Y] = X_{i+5}, & 1 \leq i \leq 3. \end{cases}$$

$$\mathfrak{g}(\alpha, \beta) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 7, \\ [X_1, X_i] = \alpha X_{i+2} + \delta_{2,i} Y, & 2 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_4] = \frac{1+3\alpha^2+3\alpha\beta}{5\alpha+\beta} X_6, & \\ [X_1, X_5] = \frac{1+\alpha^2+5\alpha\beta}{5\alpha+\beta} X_7, & \\ [X_1, X_6] = \beta X_8, & \\ [X_2, X_i] = (\frac{2\alpha^2-1-2\alpha\beta}{5\alpha+\beta}) X_{i+3}, & 3 \leq i \leq 4, \\ [X_2, X_5] = \frac{2+\alpha^2-\beta^2}{5\alpha+\beta} X_8, & \\ [X_3, X_4] = \frac{(\alpha+\beta)^2-3}{5\alpha+\beta} X_8, & \\ [X_i, Y] = X_{i+5}, & 1 \leq i \leq 3. \end{cases}$$

Si $\dim \mathfrak{g} = 11$

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 8, \\ [X_1, X_i] = -\frac{\alpha^2-2}{2\alpha} X_{i+2} + \delta_{2,i} Y, & 2 \leq i \leq 3 \\ [X_1, X_4] = \frac{1}{\alpha} X_6, & \\ [X_1, X_i] = \frac{\alpha^2+2}{2\alpha} X_{i+2}, & 5 \leq i \leq 6, \\ [X_1, X_7] = \frac{1}{\alpha} X_9, & \\ [X_2, X_i] = -\frac{\alpha}{2} X_{i+3}, & 3 \leq i \leq 4, \\ [X_2, X_6] = \frac{\alpha}{2} X_9, & \\ [X_3, X_i] = -\frac{\alpha}{2} X_{i+4}, & 4 \leq i \leq 5, \\ [X_i, Y] = X_{i+5}, & 1 \leq i \leq 4. \end{cases}$$

Si $\dim \mathfrak{g} = 12$

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 9, \\ [X_1, X_i] = -\frac{\alpha^2-2}{2\alpha} X_{i+2} + \delta_{2,i} Y, & 2 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_4] = \frac{1}{\alpha} X_6, & \\ [X_1, X_i] = \frac{\alpha^2+2}{2\alpha} X_{i+2}, & 5 \leq i \leq 6, \\ [X_1, X_7] = \frac{1}{\alpha} X_9, & \\ [X_1, X_8] = \frac{(2-2\alpha^2)^2}{4\alpha} X_{10}, & \\ [X_2, X_i] = -\frac{\alpha}{2} X_{i+3}, & 3 \leq i \leq 4, \\ [X_2, X_6] = \frac{\alpha}{2} X_9, & \\ [X_2, X_7] = \frac{4\alpha-\alpha^3}{4} X_{10}, & \\ [X_3, X_i] = -\frac{\alpha}{2} X_{i+4}, & 4 \leq i \leq 5, \\ [X_3, X_6] = \frac{\alpha^3-2\alpha}{4}, X_{10}, & \\ [X_i, Y] = X_{i+5}, & 1 \leq i \leq 5. \end{cases}$$

Álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,6,6)}$

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,6,6)}$, de dimensión $n < 12$, además de las álgebras $\mathfrak{g}^1_{(n,1,6)}$ y $\mathfrak{g}^2_{(n,1,6)}$ obtenidas en la Proposición 4.37, existen las siguientes álgebras que admiten la citada graduación .

Si $\dim \mathfrak{g} = 9$

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 6, \\ [X_i, X_{5-i}] = (-1)^{i-1} X_6, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{6-i}] = (-1)^{i-1}(3-i) X_7, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_1, Y] = X_7. \end{cases}$$

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 6, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_4] = \alpha X_6, \\ [X_1, X_5] = (2\alpha - 1) X_7, \\ [X_2, X_i] = (1-\alpha) X_{i+3}, & 3 \leq i \leq 4, \\ [X_1, Y] = X_7. \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{C} - \{1\}$.

Si $\dim \mathfrak{g} = 10$

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 7, \\ [X_i, X_{7-i}] = (-1)^{i-1} X_8, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_i, Y] = X_{i+6} & 1 \leq i \leq 2. \end{cases}$$

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le 7, \\ [X_i, X_{5-i}] = (-1)^{i-1} X_6, & 1 \le i \le 2, \\ [X_i, X_{6-i}] = (-1)^{i-1}(3-i) X_7, & 1 \le i \le 2, \\ [X_i, X_{7-i}] = (-1)^{i \frac{(i-1)(6-i)}{2}} X_8, & 1 \le i \le 3, \\ [X_i, Y] = X_{i+6} & 1 \le i \le 2. \end{cases}$$

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le 7, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \le i \le 3, \\ [X_1, X_4] = \alpha X_6, & \\ [X_1, X_5] = (2\alpha - 1) X_7, & \\ [X_1, X_6] = \frac{5\alpha - 3}{3 - \alpha} X_8, & \\ [X_2, X_i] = (1-\alpha) X_{i+3}, & 3 \le i \le 4, \\ [X_2, X_5] = \frac{2\alpha(1-\alpha)}{3-\alpha} X_8, & \\ [X_3, X_4] = \frac{3(1-\alpha)}{3-\alpha}, & \\ [X_i, Y] = X_{i+6} & 1 \le i \le 2. \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{C} - \{1, 3\}$.

Si $\dim \mathfrak{g} = 11$,

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le 8, \\ [X_i, X_{7-i}] = (-1)^{i-1} X_8, & 1 \le i \le 3, \\ [X_i, X_{8-i}] = (-1)^{i-1}(4-i) X_9, & 1 \le i \le 3, \\ [X_i, Y] = X_{i+6} & 1 \le i \le 3. \end{cases}$$

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 8, \\ [X_i, X_{5-i}] = (-1)^{i-1} X_6, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{6-i}] = (-1)^{i-1}(3-i) X_7, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{7-i}] = (-1)^i \frac{(i-1)(6-i)}{2} X_8, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_7] = -5X_9, & \\ [X_2, X_6] = 5X_9, & \\ [X_3, X_5] = -3X_9, & \\ [X_i, Y] = X_{i+6}, & 1 \leq i \leq 3. \end{cases}$$

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 8, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_4] = \alpha X_6, & \\ [X_1, X_5] = (2\alpha - 1) X_7, & \\ [X_1, X_6] = \frac{5\alpha-3}{3-\alpha} X_8, & \\ [X_1, X_7] = \frac{\alpha(5\alpha-3)}{3-\alpha} X_9, & \\ [X_2, X_i] = (1-\alpha) X_{i+3}, & 3 \leq i \leq 4, \\ [X_2, X_5] = \frac{2\alpha(1-\alpha)}{3-\alpha} X_8, & \\ [X_2, X_6] = \frac{(1-\alpha)(5\alpha-3)}{3-\alpha} X_9, & \\ [X_3, X_i] = \frac{3(1-\alpha)^2}{3-\alpha} X_{i+4}, & 4 \leq i \leq 5, \\ [X_i, Y] = X_{i+6}, & 1 \leq i \leq 3. \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{C} - \{1, 3\}$.

Si $\dim \mathfrak{g} = 12$,

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 9, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_4] = \frac{3}{7} X_6, & \\ [X_1, X_5] = \frac{-1}{7} X_7, & \\ [X_1, X_6] = \frac{-1}{3} X_8, & \\ [X_1, X_7] = \frac{-1}{7} X_9, & \\ [X_1, X_8] = \frac{3}{7} X_{10}, & \\ [X_2, X_i] = \frac{4}{7} X_{i+3}, & 3 \leq i \leq 4, \\ [X_2, X_i] = (-1)^{i-1} \frac{4}{21} X_{i+3}, & 5 \leq i \leq 6, \\ [X_2, X_7] = \frac{-4}{7} X_{10}, & \\ [X_3, X_i] = \frac{3}{7} X_8, & 4 \leq i \leq 5, \\ [X_3, X_6] = \frac{8}{21} X_{10}, & \\ [X_4, X_5] = \frac{4}{21} X_{10}, & \\ [X_i, Y] = X_{i+6}, & 1 \leq i \leq 4. \end{cases}$$

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 9, \\ [X_i, X_{5-i}] = (-1)^{i-1} X_6, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{6-i}] = (-1)^{i-1} (3 - i) X_7, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{7-i}] = (-1)^{i-1} \frac{(i-1)(6-i)}{2} X_8, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_i, X_{8-i}] = (-1)^i \, 5 X_9, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{9-i}] = \frac{-5}{2} X_{10}, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_3, X_5] = -3 X_9, & \\ [X_3, X_6] = \frac{15}{2} X_{10} & \\ [X_4, X_5] = \frac{-21}{2} X_{10}, & \\ [X_i, Y] = X_{i+6}, & 1 \leq i \leq 4. \end{cases}$$

Álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,7,7)}$

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,7,7)}$, de dimensión $n \leq 14$, además de las álgebras recogidas en la Proposición 4.39, existen las siguientes álgebras que admiten la citada graduación.

a) Cuando el vector Y pertenece a la subálgebra derivada y pertenece al centro, $\mathfrak{g}$ puede ser además de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^4_{(n,1,7)}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^5_{(n,1,7)}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^6_{(n,1,7)}$ (n par), $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^7_{(n,1,7)}$ ó $\mathfrak{g}^8_{(n,1,7)}$, una de las siguientes álgebras:

Si $\dim \mathfrak{g} = 8$,

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 5, \\ [X_1, X_2] = X_4 + Y, & \\ [X_1, X_3] = X_5, & \\ [X_1, X_4] = \alpha X_6, & \\ [X_2, X_3] = (1-\alpha)X_6 - Y. & \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{C} - \{1\}$.

Si $\dim \mathfrak{g} = 9$,

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 6, \\ [X_1, X_2] = X_4 + Y, & \\ [X_1, X_3] = X_5, & \\ [X_1, X_4] = \alpha X_6, & \\ [X_1, X_5] = (2\alpha - 1)X_7, & \\ [X_2, X_3] = (1-\alpha)X_6, & \\ [X_2, X_4] = (1-\alpha)X_7. & \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{C} - \{1\}$.

Si $\dim \mathfrak{g} = 10$,

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 7, \\ [X_1, X_2] = X_4 + Y, & \\ [X_1, X_3] = X_5, & \\ [X_1, X_4] = \alpha\, X_6, & \\ [X_1, X_5] = (2\alpha - 1)\, X_7, & \\ [X_1, X_6] = \dfrac{5\alpha - 3}{3 - \alpha}\, X_8, & \\ [X_2, X_3] = (1 - \alpha)\, X_6, & \\ [X_2, X_4] = (1 - \alpha) X_7, & \\ [X_2, X_5] = \dfrac{2\alpha(1 - \alpha)}{3 - \alpha}\, X_8, & \\ [X_3, X_4] = \dfrac{3(1 - \alpha)^2}{3 - \alpha}\, X_8, & \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{C} - \{1, 3\}$.

Si $\dim \mathfrak{g} = 11$,

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 8, \\ [X_i, X_{5-i}] = (-1)^{i-1}\, X_6 + (-1)^{i-1} Y, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{6-i}] = (-1)^{i-1}\, (3 - i)\, X_7, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{7-i}] = (-1)^i\, \frac{(i-1)(6-i)}{2}\, X_8, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_i, X_{8-i}] = (-1)^i\, 5 X_9, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_3, X_5] = -3 X_9. & \end{cases}$$

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 8 \\ [X_1, X_2] = X_4 + Y, & \\ [X_1, X_3] = X_5, & \\ [X_1, X_4] = \alpha X_6, & \\ [X_1, X_5] = (2\alpha - 1)X_7, & \\ [X_1, X_6] = \frac{5\alpha-3}{3-\alpha} X_8, & \\ [X_1, X_7] = \frac{\alpha(5\alpha-3)}{3-\alpha} X_9, & \\ [X_2, X_3] = (1-\alpha)X_6 - Y, & \\ [X_2, X_4] = (1-\alpha)X_7, & \\ [X_2, X_5] = \frac{2\alpha(1-\alpha)}{3-\alpha} X_8, & \\ [X_2, X_6] = \frac{(1-\alpha)(5\alpha-3)}{3-\alpha} X_9, & \\ [X_3, X_i] = \frac{3(1-\alpha)^2}{3-\alpha} X_{4+i}, & 4 \leq i \leq 5. \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{C} - \{1, 3\}$.

Si $\dim \mathfrak{g} = 12$,

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 9 \\ [X_i, X_{5-i}] = (-1)^{i-1} X_6 + (-1)^{i-1} Y, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{6-i}] = (-1)^{i-1} (3-i) X_7, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{7-i}] = (-1)^i \frac{(i-1)(6-i)}{2} X_8, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_i, X_{8-i}] = (-1)^i 5 X_9, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{9-i}] = \frac{-5}{2} X_{10}, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_3, X_5] = -3X_9, & \\ [X_3, X_6] = \frac{15}{2} X_{10}, & \\ [X_4, X_5] = \frac{-21}{2} X_{10}, & \end{cases}$$

$$
\mathfrak{g}(\alpha) = \begin{cases}
[X_0, X_i] = X_{i+1} & 1 \leq i \leq 9 \\
[X_1, X_2] = X_4 + Y, & \\
[X_1, X_3] = X_5, & \\
[X_1, X_4] = \alpha X_6, & \\
[X_1, X_5] = (2\alpha - 1)X_7, & \\
[X_1, X_6] = \frac{5\alpha-3}{3-\alpha} X_8, & \\
[X_1, X_7] = \frac{\alpha(5\alpha-3)}{3-\alpha} X_9, & \\
[X_1, X_8] = \frac{10\alpha^3+2\alpha^2-14\alpha+6}{4\alpha(2-\alpha)} X_{10}, & \\
[X_2, X_3] = (1-\alpha)X_{i+3} - Y, & \\
[X_2, X_4] = (1-\alpha)X_7, & \\
[X_2, X_5] = \frac{2\alpha(1-\alpha)}{3-\alpha} X_8, & \\
[X_2, X_6] = \frac{(1-\alpha)(5\alpha-3)}{3-\alpha} X_9, & \\
[X_2, X_7] = \frac{-10\alpha^4+24\alpha^3-44\alpha^2+48\alpha-18}{4\alpha(2-\alpha)(3-\alpha)} X_{10}, & \\
[X_3, X_i] = \frac{3(1-\alpha)^2}{3-\alpha} X_{i+4}, & 4 \leq i \leq 5, \\
[X_3, X_6] = \frac{30\alpha^4-96\alpha^3+120\alpha^2-72\alpha+18}{4\alpha(2-\alpha)(3-\alpha)} X_{10}, & \\
[X_4, X_5] = \frac{-42\alpha^4+144\alpha^3-180\alpha^2+96\alpha-18}{4\alpha(2-\alpha)(3-\alpha)} X_{10}, &
\end{cases}
$$

con $\alpha \in \mathbf{C} - \{0, 1, 2, 3\}$.

b) Cuando el vector Y no pertenece al centro ni a la subálgebra derivada, además de las álgebras $\mathfrak{g}^1_{(n,1,7)}$, $\mathfrak{g}^2_{(n,1,7)}$ y $\mathfrak{g}^3_{(n,1,7)}$ (n par), existen las siguientes álgebras que admiten tal graduación

Si $\dim \mathfrak{g} = 10$,

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 7, \\ [X_i, X_{5-i}] = (-1)^{i-1} X_6, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{6-i}] = (-1)^{i-1}(3-i) X_7, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{7-i}] = (-1)^{i} \frac{(i-1)(6-i)}{2} X_8, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, Y] = X_8. \end{cases}$$

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 7, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_4] = \alpha X_6, \\ [X_1, X_5] = (2\alpha - 1) X_7, \\ [X_1, X_6] = \frac{5\alpha - 3}{3 - \alpha} X_8, \\ [X_2, X_i] = (1-\alpha) X_{i+3}, & 3 \leq i \leq 4, \\ [X_2, X_5] = \frac{2\alpha(1-\alpha)}{3-\alpha} X_8, \\ [X_3, X_4] = \frac{3(1-\alpha)^2}{3-\alpha} X_8, \\ [X_1, Y] = X_8. \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{C} - \{1, 3\}$.

Si $\dim(\mathfrak{g}) = 11$

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 8, \\ [X_i, X_{7-i}] = (-1)^{i-1} X_8, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_i, X_{8-i}] = (-1)^{-1}(4-i) X_9, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_i, Y] = X_{i+7}, & 1 \leq i \leq 2. \end{cases}$$

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 8, \\ [X_i, X_{5-i}] = (-1)^{i-1} X_6, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{6-i}] = (-1)^{i-1}(3-i) X_7, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{7-i}] = (-1)^{i} \frac{(i-1)(6-i)}{2} X_8, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_7] = -5X_9, & \\ [X_2, X_6] = 5X_9, & \\ [X_3, X_5] = -3X_9, & \\ [X_i, Y] = X_{i+7}, & 1 \leq i \leq 2. \end{cases}$$

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 8, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_4] = \alpha X_6, & \\ [X_1, X_5] = (2\alpha - 1) X_7, & \\ [X_1, X_6] = \frac{5\alpha-3}{3-\alpha} X_8, & \\ [X_1, X_7] = \frac{\alpha(5\alpha-3)}{3-\alpha} X_9, & \\ [X_2, X_i] = (1-\alpha) X_{i+3}, & 3 \leq i \leq 4, \\ [X_2, X_5] = \frac{2\alpha(1-\alpha)}{3-\alpha} X_8, & \\ [X_2, X_6] = \frac{(1-\alpha)(5\alpha-3)}{3-\alpha} X_9, & \\ [X_3, X_i] = \frac{3(1-\alpha)^2}{3-\alpha} X_{i+4}, & 4 \leq i \leq 5, \\ [X_i, Y] = X_{i+7}, & 1 \leq i \leq 2. \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{C} - \{1, 3\}$.

Si $\dim \mathfrak{g} = 12$,

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 9, \\ [X_i, X_{7-i}] = (-1)^{i-1} X_8, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_i, X_{8-i}] = (-1)^{-1}(4-i) X_9, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_i, X_{9-i}] = (-1)^i \frac{(i-1)(8-i)}{2} X_{10}, 1 \leq i \leq 4, & \\ [X_i, Y] = X_{i+7}, & 1 \leq i \leq 3. \end{cases}$$

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 9, \\ [X_i, X_{5-i}] = (-1)^{i-1} X_6, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{6-i}] = (-1)^{i-1}(3-i) X_7, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{7-i}] = (-1)^i \frac{(i-1)(6-i)}{2} X_8, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_7] = -5X_9, & \\ [X_1, X_8] = \frac{-5}{2} X_{10} & \\ [X_2, X_6] = 5X_9, & \\ [X_2, X_7] = \frac{-5}{2} X_{10} & \\ [X_3, X_5] = -3X_9, & \\ [X_3, X_6] = \frac{15}{2} X_{10}, & \\ [X_4, X_5] = \frac{-21}{2} X_{10}, & \\ [X_i, Y] = X_{i+7}, & 1 \leq i \leq 3. \end{cases}$$

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le 9, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \le i \le 3, \\ [X_1, X_4] = \alpha X_6, & \\ [X_1, X_5] = (2\alpha - 1)X_7, & \\ [X_1, X_6] = \frac{5\alpha-3}{3-\alpha}X_8, & \\ [X_1, X_7] = \frac{\alpha(5\alpha-3)}{3-\alpha}X_9, & \\ [X_1, X_8] = \frac{10\alpha^3+2\alpha^2-14\alpha+6}{4\alpha(2-\alpha)}X_{10}, & \\ [X_2, X_i] = (1-\alpha)X_{i+3}, & 3 \le i \le 4, \\ [X_2, X_5] = \frac{2\alpha(1-\alpha)}{3-\alpha}X_8, & \\ [X_2, X_6] = \frac{(1-\alpha)(5\alpha-3)}{3-\alpha}X_9, & \\ [X_2, X_7] = \frac{-10\alpha^4+24\alpha^3-44\alpha^2+48\alpha-18}{4\alpha(2-\alpha)(3-\alpha)}X_{10}, & \\ [X_3, X_i] = \frac{3(1-\alpha)^2}{3-\alpha}X_{i+4}, & 4 \le i \le 5, \\ [X_3, X_6] = \dfrac{30\alpha^4 - 96\alpha^3 + 120\alpha^2 - 72\alpha + 18}{4\alpha(2-\alpha)(3-\alpha)}X_{10}, & \\ [X_4, X_5] = \dfrac{-42\alpha^4 + 144\alpha^3 - 180\alpha^2 + 96\alpha - 18}{4\alpha(2-\alpha)(3-\alpha)}X_{10}, & \\ [X_i, Y] = X_{i+7}, & 1 \le i \le 3. \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{C} - \{0, 1, 2, 3\}$.

c) Existen familias de álgebras cuando el vector Y pertenece a la subálgebra derivada pero no al centro, que son casos excepcionales de las álgebras que admiten tales condiciones, cuya expresión general se obtiene cuando $p \geq 8$.

Si $\dim \mathfrak{g} = 10$

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le 7, \\ [X_1, X_2] = aX_4, \\ [X_1, X_3] = aX_5, \\ [X_1, X_4] = \frac{-1+3\ (a)^2+3ab}{5a+b} X_6 + Y, \\ [X_1, X_5] = \frac{-2+(a)^2+5ab}{5a+b} X_7, \\ [X_1, X_6] = bX_8, \\ [X_1, Y_0] = X_8, \\ [X_2, X_3] = \frac{1+2(a)^2-2ab}{5a+b} X_6 - Y, \\ [X_2, X_4] = \frac{1+2(a)^2-2ab}{5a+b} X_7, \\ [X_2, X_5] = \frac{-2+(a)^2-(b)^2}{5a+b} X_8, \\ [X_3, X_4] = \frac{3+(a)^2-2ab+(b)^2}{5a+b} X_8. \end{cases}$$

$5a + b \neq 0$

$$\begin{cases} [X_0, X_j] = X_{j+1}, & 1 \le j \le 7, \\ [X_1, X_j] = -\frac{i}{2\sqrt{3}}\ X_{j+2}, & 2 \le j \le 3, \\ [X_1, X_4] = \left(-\frac{i}{4\sqrt{3}} + \frac{a}{2}\right)\ X_6 + Y, \\ [X_1, X_5] = a\ X_7 \\ [X_1, X_6] = \frac{5i}{2\sqrt{3}}\ X_8, \\ [X_1, Y] = X_8, \\ [X_2, X_3] = \left(-\frac{i}{4\sqrt{3}} - \frac{a}{2}\right)\ X_6 - Y, \\ [X_2, X_4] = \left(-\frac{i}{4\sqrt{3}} - \frac{a}{2}\right)\ X_7, \\ [X_2, X_5] = \left(-\frac{5i}{2\sqrt{3}} + a\right)\ X_8, \\ [X_3, X_4] = \left(\frac{9i}{4\sqrt{3}} - \frac{3a}{2}\right)\ X_8, \end{cases}$$

Si $\dim \mathfrak{g} = 11$

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{array}{ll} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 8, \\ [X_1, X_i] = \frac{1}{6}(5\ a - 3b - \beta)X_{i+2}, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_1, X_4] = a\ X_6 + Y, & \\ [X_1, X_5] = \frac{1}{6}(7a + 3b + \beta)\ X_7, & \\ [X_1, X_6] = bX_8, & \\ [X_1, X_7] = \frac{1}{2}\ (-5a + 3b - \beta)X_9, & \\ [X_2, X_3] = \frac{1}{6}(-a - 3b - \beta)X_6 - Y, & \\ [X_2, X_4] = \frac{1}{6}(-a - 3b - \beta)X_7), & \\ [X_2, X_5] = \frac{1}{6}(7a - 3b + \beta)X_8, & \\ [X_2, X_6] = \frac{1}{2}(5a - b + \beta)X_9, & \\ [X_3, X_i] = \frac{1}{3}(-4a - \beta)X_{i+4}, & 4 \leq i \leq 5, \\ [X_i, Y] = X_{i+7}, & 1 \leq i \leq 2, \end{array} \right.$$

con $\beta = \sqrt{12 + 25(a)^2 - 18ab + 9(b)^2}$.

Si $\dim \mathfrak{g} = 12$

Existen álgebras de este tipo que admiten la citada graduación, y serán aquellas cuyas constantes de estructura verifican las relaciones

$5+33a_{1,6}{}^2+18a_{1,6}{}^4-89a_{1,6}a_{1,7}-48a_{1,6}{}^3a_{1,7}+70\,a_{1,7}{}^2+20a_{1,6}{}^2a_{1,7}{}^2+28a_{1,6}a_{1,7}{}^3-10a_{1,7}{}^4+21a_{1,6}a_{1,8}-35a_{1,7}\,a_{1,8}+24\,a_{1,6}{}^2\,a_{1,7}\,a_{1,8}-52\,a_{1,6}\,a_{1,7}{}^2\,a_{1,8}+20a_{1,7}{}^3\,a_{1,8}=0$

$15a_{1,5}-48a_{1,6}-18a_{1,6}{}^3+44a_{1,7}+18a_{1,6}{}^2a_{1,7}+20\,a_{1,5}\,a_{1,7}{}^2-10\,a_{1,6}\,a_{1,7}{}^2+2\,a_{1,7}{}^3-21\,a_{1,8}-24\,a_{1,6}\,a_{1,7}\,a_{1,8}+12\,a_{1,7}{}^2a_{1,8}=0$

$1+3a_{1,5}a_{1,6}-3a_{1,6}{}^2-5a_{1,5}a_{1,7}+7a_{1,6}a_{1,7}-2\,a_{1,7}{}^2=0$

$7+5a_{1,5}{}^2-3a_{1,6}{}^2-17a_{1,5}a_{1,7}+25a_{1,6}a_{1,7}-8\,a_{1,7}{}^2-7\,a_{1,5}\,a_{1,8}+7\,a_{1,6}\,a_{1,8}-2\,a_{1,7}\,a_{1,8}=0$

$a_{1,4}-3a_{1,5}+3a_{1,6}-a_{1,7}=0$

$a_{1,3}-5a_{1,5}+6a_{1,6}-2a_{1,7}=0$

$a_{1,2}-5a_{1,5}+6a_{1,6}-2a_{1,7}=0$

Si se verifica alguna de las relaciones siguientes

$$-1+7a_{1,5}{}^2-10a_{1,5}a_{1,6}+3a_{1,6}{}^2\neq 0$$

$$961+1416a_{1,6}^2+528a_{1,6}^4=0$$

$$81+44a_{1,6}^2=0$$

$$(961+1416a_{1,6}^2+528a_{1,6}^4)(81+44a_{1,6}^2)\neq 0$$

siempre se obtienen álgebras correspondientes a la graduación anterior. A continuación se muestra un ejemplo.

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 10, \\ [X_1, X_i] = \frac{1}{2}(5a - 5b - \beta)X_{i+2}, 2 \leq i \leq 3, & \\ [X_1, X_4] = \frac{1}{4}\ (7\ a - 5\ b - \beta)X_6 + Y, & \\ [X_1, X_5] = aX_7, & \\ [X_1, X_6] = bX_8, & \\ [X_1, X_7] = \frac{1}{4}\ (-5\ a + 7\ b - \beta)X_9, & \\ [X_1, X_8] = \frac{((-15a^3+a^2(35b-11\beta)+3a(14+b^2+6b\beta)-3(10b+5b^3-2\beta+b^2\beta)))}{(-8+56\ a^2-80ab+24b^2)})X_{10}, & \\ [X_2, X_3] = \frac{1}{4}(3\ a - 5\ b - \beta)X_6 - Y, & \\ [X_2, X_4] = (-a + \frac{1}{4}\ (7\ a - 5\ b - \beta))X_7, & \\ [X_2, X_5] = (a - b)X_8, & \\ [X_2, X_6] = \frac{1}{4}\ (5\ a - 3\ b + \beta)X_9, & \\ [X_2, X_7] = -\frac{((55a^3-16b-57b^3+4\beta+3b^2\beta+a^2(-163b+3\beta)+a(32+173b^2-2b\beta)))}{(8(-1+7a^2-10ab+3b^2))}X_{10}, & \\ [X_3, X_i] = \frac{1}{4}\ (-a - b - \beta)\ X_{i+4}, & 4 \leq i \leq 5, \\ [X_3, X_6] = \frac{(125\ a^3-10\ b-75\ b^3+2\beta+9b^2\beta+a^2(-305\ b+17\beta)+a\ (22+263b^2-22b\beta))}{(8\ (-1+7\ a^2-10\ a\ b+3\ b^2))}X_{10}, & \\ [X_4, X_5] = \frac{(-139a^3+a^2\ (311\ b-31\beta)+3b(4+23b^2-5b\beta)+a(-20-249b^2+42b\beta))}{(8\ (-1+7\ a^2-10\ a\ b+3\ b^2))}X_{10}, & \\ [X_i, Y] = X_{i+7}, & 1 \leq i \leq 3. \end{cases}$$

con $\beta = \sqrt{8 + 25(a)^2 - 46ab + 25(b)^2}$.

Si $\dim \mathfrak{g} = 13$

$$\begin{cases}
[X_0, X_j] = X_{j+1}, & 1 \leq j \leq 10, \\
[X_1, X_2] = -\frac{2\,i}{\sqrt{3}}\, X_4, & \\
[X_1, X_3] = -\frac{2\,i}{\sqrt{3}}\, X_5, & \\
[X_1, X_4] = -\frac{i}{\sqrt{3}}\, X_6 + Y, & \\
[X_1, X_6] = \frac{i}{\sqrt{3}}\, X_8 & \\
[X_1, X_7] = \frac{2\,i}{\sqrt{3}}\, X_9 & \\
[X_1, X_8] = \frac{2\,i}{\sqrt{3}}\, X_{10} & \\
[X_2, X_3] = -\frac{i}{\sqrt{3}}\, X_6 - Y & \\
[X_2, X_4] = -\frac{i}{\sqrt{3}}\, X_7 & \\
[X_2, X_5] = -\frac{i}{\sqrt{3}}\, X_8 & \\
[X_2, X_6] = -\frac{i}{\sqrt{3}}\, X_9 & \\
[X_2, X_8] = \frac{2\,i}{\sqrt{3}}\, X_{11} & \\
[X_3, X_6] = -\frac{i}{\sqrt{3}}\, X_{10} & \\
[X_3, X_7] = -\frac{2\,i}{\sqrt{3}}\, X_{11} & \\
[X_4, X_5] = \left(-\frac{2\,i}{\sqrt{3}} + i\,\sqrt{3} \right) X_{10} & \\
[X_4, X_6] = \frac{i}{\sqrt{3}}\, X_{11} & \\
[X_j, Y] = X_{j+7}, & 1 \leq j \leq 4
\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
[X_0, X_j] = X_{j+1}, & 1 \leq j \leq 11, \\
[X_1, X_j] = -\sqrt{\frac{1}{62}\,(-23 + 43\ i\ \sqrt{3})}X_{j+2}, & 2 \leq j \leq 3, \\
[X_1, X_4] = -\sqrt{\frac{1}{31}\,(2 + 3\ i\ \sqrt{3})}X_6 + Y, & \\
[X_1, X_5] = -\sqrt{\frac{1}{62}\,(-11 - i\ \sqrt{3})}X_7, & \\
[X_1, X_6] = -\sqrt{\frac{2}{31}\,(-11 - i\ \sqrt{3})}X_8, & \\
[X_1, X_7] = -\sqrt{\frac{1}{62}\,(-53 - 33\ i\ \sqrt{3})}X_9, & \\
[X_1, X_8] = -\sqrt{\frac{1}{62}\,(1 - 45\ i\ \sqrt{3})}X_{10}, & \\
[X_1, X_9] = -i\ \sqrt{\frac{3}{62}\,(-11 - i\ \sqrt{3})}X_{11}, & \\
[X_2, X_j] = -\sqrt{\frac{3}{62}\,(-7 + 5\ i\ \sqrt{3})}X_{j+3} - \delta_{3,j}Y, & 3 \leq j \leq 4, \\
[X_2, X_5] = \sqrt{-\frac{1}{62}\ i\ (-11\ i + \sqrt{3})}X_8, & \\
[X_2, X_6] = \sqrt{\frac{1}{62}\,(7 - 5\ i\ \sqrt{3})}X_9, & \\
[X_2, X_7] = \sqrt{\frac{1}{31}\,(2 + 3\ i\ \sqrt{3})}X_{10}, & \\
[X_2, X_8] = (-1 + i)\ \sqrt{\frac{1}{31}\,(-11\ i + \sqrt{3})}X_{11}, & \\
[X_3, X_j] = -\sqrt{\frac{1}{31}\,(2 + 3\ i\ \sqrt{3})}X_{j+4}, & 4 \leq j \leq 5, \\
[X_3, X_6] = \sqrt{-\frac{1}{62}\ i\ (-11\ i + \sqrt{3})}X_{10}, & \\
[X_3, X_7] = \sqrt{\frac{3}{31}\,(-2 - 3\ i\ \sqrt{3})}X_{11}, & \\
[X_4, X_j] = -\sqrt{\frac{1}{62}\,(7 - 5\ i\ \sqrt{3})}X_{j+5}, & 5 \leq j \leq 6 \\
[X_4, X_6] = -\sqrt{\frac{1}{62}\,(7 - 5\ i\ \sqrt{3})}X_{11}, & \\
[X_j, Y] = X_{j+7}, & 1 \leq j \leq 4.
\end{cases}
$$

$$
\mathfrak{g} = \left\{
\begin{array}{ll}
[X_0, X_j] = X_{j+1}, & 1 \leq j \leq 10 \\
[X_1, X_2] = \sqrt{\frac{1}{62}\,(-23 - 43\,i\,\sqrt{3})}\; X_4 & \\
[X_1, X_3] = \left(\sqrt{\frac{1}{62}\,(-23 - 43\,i\,\sqrt{3})}\right)\, X_5 & \\
[X_1, X_4] = \left(\sqrt{\frac{1}{31}\,(2 - 3\,i\,\sqrt{3})}\right)\, X_6 + Y & \\
[X_1, X_5] = \sqrt{\frac{1}{62}\,(-11 + i\,\sqrt{3})}\; X_7 & \\
[X_1, X_6] = \sqrt{\frac{2}{31}\,(-11 + i\,\sqrt{3})}\; X_8 & \\
[X_1, X_7] = \left(\sqrt{\frac{1}{62}\,(-53 + 33\,i\,\sqrt{3})}\right)\, X_9 & \\
[X_1, X_8] = \left(\sqrt{\frac{1}{62}\,(1 + 45\,i\,\sqrt{3})}\right)\, X_{10} & \\
[X_1, X_9] = -i\,\sqrt{\frac{3}{62}\,(-11 + i\,\sqrt{3})}\; X_{11} & \\
[X_1, Y] = X_8 & \\
[X_2, X_3] = \left(\sqrt{\frac{3}{62}\,(-7 - 5\,i\,\sqrt{3})}\right)\, X_6 - Y & \\
[X_2, X_4] = \left(\sqrt{\frac{3}{62}\,(-7 - 5\,i\,\sqrt{3})}\right) X_7 & \\
[X_2, X_5] = -\sqrt{\frac{1}{62}\,i\,(11\,i + \sqrt{3})}\; X_8 & \\
[X_2, X_6] = -\sqrt{\frac{1}{62}\,(7 + 5\,i\,\sqrt{3})} X_9 & \\
[X_2, X_7] = -\sqrt{\frac{1}{31}\,(2 - 3\,i\,\sqrt{3})} X_{10} & \\
[X_2, X_8] = \left(\sqrt{\frac{2}{31}\,i\,(11\,i + \sqrt{3})}\right) X_{11} & \\
[X_2, Y] = X_9 & \\
[X_3, X_4] = \mathit{bigg}(\sqrt{\frac{1}{31}\,(2 - 3\,i\,\sqrt{3})}\Big)\; X_8 & \\
[X_3, X_5] = \left(\sqrt{\frac{1}{31}\,(2 - 3\,i\,\sqrt{3})}\right) X_9 & \\
[X_3, X_6] = -\sqrt{\frac{1}{62}\,i\,(11\,i + \sqrt{3})}\; X_{10} & \\
[X_3, X_7] = -\sqrt{\frac{3}{31}\,(-2 + 3\,i\,\sqrt{3})} X_{11} & \\
[X_3, Y\,] = X_{10} & \\
[X_4, X_5] = \left(\sqrt{\frac{1}{62}\,(7 + 5\,i\,\sqrt{3})}\right) X_{10} & \\
[X_4, X_6] = \left(\sqrt{\frac{1}{62}\,(7 + 5\,i\,\sqrt{3})}\right) X_{11} & \\
[X_4, Y] = X_{11} &
\end{array}
\right.
$$

Si $\dim \mathfrak{g} = 14$,

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_j] = X_{j+1}, & 1 \leq j \leq 12, \\ [X_1, X_j] = -\sqrt{\frac{1}{62}\,(-23 + 43\;i\;\sqrt{3})}X_{j+2}, & 2 \leq j \leq 3, \\ [X_1, X_4] = -\sqrt{\frac{1}{31}\,(2 + 3\;i\;\sqrt{3})}X_6 + Y, & \\ [X_1, X_5] = -\sqrt{\frac{1}{62}\,(-11 - i\;\sqrt{3})}X_7, & \\ [X_1, X_6] = -\sqrt{\frac{2}{31}\,(-11 - i\;\sqrt{3})}X_8, & \\ [X_1, X_7] = -\sqrt{\frac{1}{62}\,(-53 - 33\;i\;\sqrt{3})}X_9, & \\ [X_1, X_8] = -\sqrt{\frac{1}{62}\,(1 - 45\;i\;\sqrt{3})}X_{10}, & \\ [X_1, X_9] = -i\;\sqrt{\frac{3}{62}\,(-11 - i\;\sqrt{3})}X_{11}, & \\ [X_1, X_{10}] = \sqrt{\frac{1}{31}\,(38 - 5\;i\;\sqrt{3})}X_{12}, & \\ [X_2, X_j] = -\sqrt{\frac{3}{62}\,(-7 + 5\;i\;\sqrt{3})}X_{j+3} - \delta_{j,3}Y, & 3 \leq j \leq 4, \\ [X_2, X_5] = \sqrt{-\frac{1}{62}\;i\;(-11\;i + \sqrt{3})}X_8, & \\ [X_2, X_6] = \sqrt{\frac{1}{62}\,(7 - 5\;i\;\sqrt{3})}X_9, & \\ [X_2, X_7] = \sqrt{\frac{1}{31}\,(2 + 3\;i\;\sqrt{3})}X_{10}, & \\ [X_2, X_8] = (-1 + i)\;\sqrt{\frac{1}{31}\,(-11\;i + \sqrt{3})}X_{11}, & \\ [X_2, X_9] = -\sqrt{\frac{1}{62}\,(211 - 9\;i\;\sqrt{3})}X_{12}, & \\ [X_3, X_j] = -\sqrt{\frac{1}{31}\,(2 + 3\;i\;\sqrt{3})}X_{j+4}, & 4 \leq j \leq 5, \\ [X_3, X_6] = \sqrt{-\frac{1}{62}\;i\;(-11\;i + \sqrt{3})}X_{10}, & \\ [X_3, X_7] = \sqrt{\frac{3}{31}\,(-2 - 3\;i\;\sqrt{3})}X_{11}, & \\ [X_3, X_8] = \sqrt{\frac{3}{62}\,(53 + 33\;i\;\sqrt{3})}X_{12}, & \\ [X_4, X_j] = -\sqrt{\frac{1}{62}\,(7 - 5\;i\;\sqrt{3})}X_{j+5}, & 5 \leq j \leq 6, \\ [X_4, X_7] = -\sqrt{\frac{3}{62}\,(-1 + 45\;i\;\sqrt{3})}X_{12}, & \\ [X_5, X_6] = \sqrt{\frac{1}{31}\,(-46 + 55\;i\;\sqrt{3})}X_{12}, & \\ [X_j, Y] = X_{j+7}, & 1 \leq j \leq 5. \end{cases}$$

$$
\mathfrak{g} = \begin{cases}
[X_0, X_j] = X_{j+1} & 1 \leq j \leq 11 \\
[X_1, X_j] = \sqrt{\frac{1}{62}\,(-23 - 43\, i\, \sqrt{3})}\; X_{j+2}, & 2 \leq j \leq 3, \\
[X_1, X_4] = \sqrt{\frac{1}{31}\,(2 - 3\, i\, \sqrt{3})}\; X_6 + Y & \\
[X_1, X_5] = \sqrt{\frac{1}{62}\,(-11 + i\, \sqrt{3})}\; X_7 & \\
[X_1, X_6] = \sqrt{\frac{2}{31}\,(-11 + i\, \sqrt{3})}\; X_8 & \\
[X_1, X_7] = \sqrt{\frac{1}{62}\,(-53 + 33\, i\, \sqrt{3})}\; X_9 & \\
[X_1, X_8] = \sqrt{\frac{1}{62}\,(1 + 45\, i\, \sqrt{3})}\; X_{10} & \\
[X_1, X_9] = -i\, \sqrt{\frac{3}{62}\,(-11 + i\, \sqrt{3})}\; X_{11} & \\
[X_1, X_{10}] = -\sqrt{\frac{1}{31}\,(38 + 5\, i\, \sqrt{3})}\; X_{12} & \\
[X_2, X_3] = \sqrt{\frac{3}{62}\,(-7 - 5\, i\, \sqrt{3})}\; X_6 - Y & \\
[X_2, X_4] = \sqrt{\frac{3}{62}\,(-7 - 5\, i\, \sqrt{3})}\; X_7 & \\
[X_2, X_5] = -\sqrt{\frac{1}{62}\, i\,(11\, i + \sqrt{3})}\; X_8 & \\
[X_2, X_6] = -\sqrt{\frac{1}{62}\,(7 + 5\, i\, \sqrt{3})}\; X_9 & \\
[X_2, X_7] = -\sqrt{\frac{1}{31}\,(2 - 3\, i\, \sqrt{3})}\; X_{10} & \\
[X_2, X_8] = \sqrt{\frac{2}{31}\, i\,(11\, i + \sqrt{3})}\; X_{11} & \\
[X_2, X_9] = \sqrt{\frac{1}{62}\,(211 + 9\, i\, \sqrt{3})} X_{12} & \\
[X_3, X_4] = \sqrt{\frac{1}{31}\,(2 - 3\, i\, \sqrt{3})}\; X_{j+4}, & 4 \leq j \leq 5, \\
[X_3, X_6] = -\sqrt{\frac{1}{62}\, i\,(11\, i + \sqrt{3})}\; X_{10} & \\
[X_3, X_7] = -\sqrt{\frac{3}{31}\,(-2 + 3\, i\, \sqrt{3})}\; X_{11} & \\
[X_3, X_8] = -\sqrt{\frac{3}{62}\,(53 - 33\, i\, \sqrt{3})}\; X_{12} & \\
[X_4, X_5] = \sqrt{\frac{1}{62}\,(7 + 5\, i\, \sqrt{3})}\; X_{10} & \\
[X_4, X_6] = \sqrt{\frac{1}{62}\,(7 + 5\, i\, \sqrt{3})}\; X_{11} & \\
[X_4, X_7] = \sqrt{\frac{3}{62}\,(-1 - 45\, i\, \sqrt{3})}\; X_{12} & \\
[X_5, X_6] = -\sqrt{\frac{1}{31}\,(-46 - 55\, i\, \sqrt{3})}\; X_{12} & \\
[X_j, Y] = X_{j+7}, & 1 \leq j \leq 5
\end{cases}
$$

Álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,8,8)}$

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g}_{(n,1,8,8)}$, además de las álgebras obtenidas en la Proposición 4.43, existen las siguientes álgebras cuando la dimensión de $\mathfrak{g}$ es $n \leq 13$

Si $\dim(\mathfrak{g}) = 11$

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 8, \\ [X_i, X_{7-i}] = (-1)^{i-1} X_8, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_i, X_{8-i}] = (-1)^{-1}(4-i) X_9, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_1, Y] = X_9. \end{cases}$$

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 8, \\ [X_i, X_{5-i}] = (-1)^{i-1} X_6, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{6-i}] = (-1)^{i-1}(3-i) X_7, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{7-i}] = (-1)^i \frac{(i-1)(6-i)}{2} X_8, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_i, X_{8-i}] = (-1)^i 5 X_9, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_3, X_5] = -3X_9, \\ [X_1, Y] = X_9. \end{cases}$$

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 8, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_4] = \alpha X_6, \\ [X_1, X_5] = (2\alpha - 1) X_7, \\ [X_1, X_6] = \frac{5\alpha-3}{3-\alpha} X_8, \\ [X_1, X_7] = \frac{\alpha(5\alpha-3)}{3-\alpha} X_9, \\ [X_2, X_i] = (1-\alpha) X_{i+3}, & 3 \leq i \leq 4, \\ [X_2, X_5] = \frac{2\alpha(1-\alpha)}{3-\alpha} X_8, \\ [X_2, X_6] = \frac{(1-\alpha)(5\alpha-3)}{3-\alpha} X_9, \\ [X_3, X_i] = \frac{3(1-\alpha)^2}{3-\alpha} X_{i+4}, & 4 \leq i \leq 5, \\ [X_1, Y] = X_9. \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbf{C} - \{1, 3\}$

Si $\dim \mathfrak{g} = 12$,

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 9, \\ [X_i, X_{9-i}] = (-1)^i X_{10}, & 1 \leq i \leq 4, \\ [X_i, Y] = X_{i+8}, & 1 \leq i \leq 2. \end{cases}$$

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 9, \\ [X_i, X_{7-i}] = (-1)^{i-1} X_8, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_i, X_{8-i}] = (-1)^{-1}(4-i) X_9, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_i, X_{9-i}] = (-1)^i \frac{(i-1)(8-i)}{2} X_{10}, & 1 \leq i \leq 4, \\ [X_i, Y] = X_{i+8}, & 1 \leq i \leq 2. \end{cases}$$

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 9, \\ [X_i, X_{5-i}] = (-1)^{i-1} X_6, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{6-i}] = (-1)^{i-1}(3-i) X_7, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{7-i}] = (-1)^i \frac{(i-1)(6-i)}{2} X_8, & 1 \leq i \leq 3, \\ [X_i, X_{8-i}] = (-1)^i 5 X_9, & 1 \leq i \leq 2, \\ [X_i, X_{9-i}] = \frac{-5}{2} X_{10}, 1 \leq i \leq 2, & \\ [X_3, X_5] = -3 X_9, & \\ [X_3, X_6] = \frac{15}{2} X_{10}, & \\ [X_4, X_5] = \frac{-21}{2} X_{10}, & \\ [X_i, Y] = X_{i+8}, & 1 \leq i \leq 2. \end{cases}$$

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le 9, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \le i \le 3, \\ [X_1, X_4] = \alpha X_6, & \\ [X_1, X_5] = (2\alpha - 1)X_7, & \\ [X_1, X_6] = \frac{5\alpha-3}{3-\alpha} X_8, & \\ [X_1, X_7] = \frac{\alpha(5\alpha-3)}{3-\alpha} X_9, & \\ [X_1, X_8] = \frac{10\alpha^3+2\alpha^2-14\alpha+6}{4\alpha(2-\alpha)} X_{10}, & \\ [X_2, X_i] = (1-\alpha)X_{i+3}, & 3 \le i \le 4, \\ [X_2, X_5] = \frac{2\alpha(1-\alpha)}{3-\alpha} X_8, & \\ [X_2, X_6] = \frac{(1-\alpha)(5\alpha-3)}{3-\alpha} X_9, & \\ [X_2, X_7] = \frac{-10\alpha^4+24\alpha^3-44\alpha^2+48\alpha-18}{4\alpha(2-\alpha)(3-\alpha)} X_{10}, & \\ [X_3, X_i] = \frac{3(1-\alpha)^2}{3-\alpha} X_{i+4}, & 4 \le i \le 5, \\ [X_3, X_6] = \frac{30\alpha^4-96\alpha^3+120\alpha^2-72\alpha+18}{4\alpha(2-\alpha)(3-\alpha)} X_{10}, & \\ [X_4, X_5] = \frac{-42\alpha^4+144\alpha^3-180\alpha^2+96\alpha-18}{4\alpha(2-\alpha)(3-\alpha)} X_{10}, & \\ [X_i, Y] = X_{i+8}, & 1 \le i \le 2. \end{cases}$$

$\alpha \in \mathbb{C} - \{0, 1, 2, 3\}$

Álgebras $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n,1,9,9)}$

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra casifiliforme de tipo $\mathfrak{g}_{(n,1,9,9)}$, ademas de las álgebras obtenidas en la Proposición 4.43, si la dimensión del álgebra es $n \le 12$, existen las siguientes álgebras que admiten la citada graduación.

Si $\dim \mathfrak{g} = 12$,

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le 9, \\ [X_i, X_{7-i}] = (-1)^{i-1} X_8, & 1 \le i \le 3, \\ [X_i, X_{8-i}] = (-1)^{-1}(4-i) X_9, & 1 \le i \le 3, \\ [X_i, X_{9-i}] = (-1)^{i} \frac{(i-1)(8-i)}{2} X_{10}, & 1 \le i \le 4, \\ [X_1, Y] = X_{10}. \end{cases}$$

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \le i \le 9, \\ [X_i, X_{5-i}] = (-1)^{i-1} X_6, & 1 \le i \le 2, \\ [X_i, X_{6-i}] = (-1)^{i-1}(3-i) X_7, & 1 \le i \le 2, \\ [X_i, X_{7-i}] = (-1)^{i} \frac{(i-1)(6-i)}{2} X_8, & 1 \le i \le 3, \\ [X_i, X_{8-i}] = (-1)^{i} 5 X_9, & 1 \le i \le 2, \\ [X_i, X_{9-i}] = \frac{-5}{2} X_{10}, & 1 \le i \le 2, \\ [X_3, X_5] = -3X_9, & \\ [X_3, X_6] = \frac{15}{2} X_{10}, & \\ [X_4, X_5] = \frac{-21}{2} X_{10}, & \\ [X_1, Y] = X_{10}. \end{cases}$$

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 9, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}, & 2 \leq i \leq 3, \\ [X_1, X_4] = \alpha X_6, & \\ [X_1, X_5] = (2\alpha - 1)X_7, & \\ [X_1, X_6] = \frac{5\alpha-3}{3-\alpha} X_8, & \\ [X_1, X_7] = \frac{\alpha(5\alpha-3)}{3-\alpha} X_9, & \\ [X_1, X_8] = \frac{10\alpha^3+2\alpha^2-14\alpha+6}{4\alpha(2-\alpha)} X_{10}, & \\ [X_2, X_i] = (1-\alpha)X_{i+3}, & 3 \leq i \leq 4, \\ [X_2, X_5] = \frac{2\alpha(1-\alpha)}{3-\alpha} X_8, & \\ [X_2, X_6] = \frac{(1-\alpha)(5\alpha-3)}{3-\alpha} X_9, & \\ [X_2, X_7] = \frac{-10\alpha^4+24\alpha^3-44\alpha^2+48\alpha-18}{4\alpha(2-\alpha)(3-\alpha)} X_{10}, & \\ [X_3, X_i] = \frac{3(1-\alpha)^2}{3-\alpha} X_{i+4}, & 4 \leq i \leq 5, \\ [X_3, X_6] = \frac{30\alpha^4-96\alpha^3+120\alpha^2-72\alpha+18}{4\alpha(2-\alpha)(3-\alpha)} X_{10}, & \\ [X_4, X_5] = \frac{-42\alpha^4+144\alpha^3-180\alpha^2+96\alpha-18}{4\alpha(2-\alpha)(3-\alpha)} X_{10}, & \\ [X_1, Y] = X_{10}. & \end{cases}$$

$\alpha \in \mathbb{C} - \{0, 1, 2, 3\}$

Cálculo simbólico

```
(* Etapa=numero *)
(* dim = n      *)
(* grad = p     *)

leymu::usage =
  "leymu[dim,grad]  genera la ley de un algebra de Lie de
  \n  dimension dim, que es graduada de indice grad.
  \n  Se presenta la base por si se le quiere dar formato.";
verley::usage =
  "verley  presenta la ley por pantalla.";
formato::usage =
  "formato  da la salida en la notación habitual.";
jac::usage =
  "jac[i,j,k]  da el vector que debe ser nulo para que
  \n  la ley sea la de un álgebra de Lie.";
reljac::usage =
  "reljac[i,j,k]  da una matriz con las componentes y
  \n  expresiones respectivas que deben ser nulas,
  \n  obtenidas del vector jac[i,j,k].";
lisjac::usage =
  "lisjac[i,j,k]  da una lista con las expresiones que
   \n  deben ser nulas, obtenidas del vector jac[i,j,k].";

               (* formato *)
formato:=(
Format[X[dim-1]]:=Subscripted[Y[0]];
```

```
Format[X[i_]]:=Subscripted[X[i]];
Format[a[i__]]:=Subscripted[a[i]];
Format[b[i__]]:=Subscripted[b[i]];
Format[X[dim-1],TeXForm]:=Subscripted[Y[0]];
Format[X[i_],TeXForm]:=Subscripted[X[i]];
Format[a[i__],TeXForm]:=Subscripted[a[i]];
Format[b[i__],TeXForm]:=Subscripted[b[i]];)


          (* Genera la familia de leyes p-graduadas *)
leymu[n_Integer, p_Integer]:=
Module[{i, j, k},
  (* auxiliar para limpieza *)
  Clear[base,mu,X,a,b,dim,grad];
  (* dimensión y graduación *)
  dim=n;
  grad=p;
  (* base canónica *)
  base=Table[X[i], {i, 0, dim-1}];
  (* bilinealidad y antisimetría *)
  mu[0, x_] := 0;
  mu[x_, 0] := 0;
  mu[x_, x_] := 0;
  mu[x_, y_] := Simplify[-mu[y, x]] /; OrderedQ[{y,x}];
  mu[x_+y_, z_] := Simplify[mu[x, z] + mu[y, z]];
  mu[z_, x_+y_] := Simplify[mu[z, x] + mu[z, y]];
  mu[a_ x_, y_] := a mu[x,y];
  mu[x_, a_ y_] := a mu[x,y];
```

```
(* Casi Filiformes *)
For[i=1, i<=dim-3, i++,
    mu[X[0], X[i]] = X[i+1]
];
mu[X[0], X[dim-2]]=0;
mu[X[0], X[dim-1]]=0;  (* X[dim-1] es el vector Y[0] *)

              (* p-graduadas  *)
(* Corchetes del vector Y[0]=X[dim-1] *)
For[i=1, i<=dim-2, i++,
    If[i<=dim-grad-2,
         mu[X[i],X[dim-1]]=X[i+grad],
         mu[X[i],X[dim-1]]=0
    ]
];
(* Corchetes restantes del vector base[dim-2] *)
For[i=1, i<=dim-3, i++,
    mu[X[i],X[dim-2]]=0
];
   For[j=2, j<=dim-3, j++,
     If[j<=dim-4,
      If[j+3 !=grad,
   mu[X[1],X[j]]= a[1,j] X[j+2],
   mu[X[1],X[j]]= a[1,j] X[grad-1],
     ],
   mu[X[1],X[j]]= 0,
    ]
   ];
```

```
  (* Corchetes restantes de la ley *)
  For[i=2, i<=dim-4, i++,
      For[j=i+1, j<= dim-3, j++,
          If[i+j<= dim-3,
             If[i+j+1 != grad-1,
    mu[X[i],X[j]]= Sum[(-1)^k Binomial[i-1,k] a[1,j+k],{k,0,i-1}] X[i+j+1]
    mu[X[i],X[j]]= Sum[(-1)^k Binomial[i-1,k] a[1,j+k],{k,0,i-1}] X[grad-1
             ],
             mu[X[i],X[j]]=0
          ]
      ]
  ];
  Print[
    "\'Algebra de dimensión ",dim,
    ", graduada de índice ", grad,"."
  ];
  Print["base = "];
  Print["  ",base];
]    (* Fin del Module inicial *)
:[font = input; nowordwrap; ]

             (* Saca la ley generada por pantalla *)
verley:=
Module[{i,j},
 Print["[", X[0], ",",  X["i"], "] = ",
        X["i+1"], "  1<i<=", dim-3 ];
 For[i=1,i<=dim-2,i++,
```

```
   For[j=i+1,j<=dim-1,j++,
     If[!NumberQ[mu[X[i],X[j]]],
        Print["[", X[i], ",",  X[j], "] = ",
        mu[X[i],X[j]] ]
     ]
   ]
 ]
]

        (* Saca la  ley particular  por pantalla
           LA asignación es SOLO VISUAL *)
leypar[asig_List]:=
Module[{i,j},
 Print["[", X[0], ",",  X["i"], "] = ",
        X["i+1"], "  1<i<=", dim-2 ];
 For[i=1,i<=dim-2,i++,
   For[j=i+1,j<=dim-1,j++,
     If[!NumberQ[mu[X[i],X[j]]],
        Print["[", X[i], ",",  X[j], "] = ",
        mu[X[i],X[j]] /. asig]
     ]
   ]
 ]
]

 (* vector Jacobi de tres vectores de la base canónica X *)
jac[i_Integer,j_Integer,k_Integer]:=
   Collect[ mu[X[i],mu[X[j],X[k]]] +
```

```
              mu[X[j],mu[X[k],X[i]]] +
              mu[X[k],mu[X[i],X[j]]],
        base
   ]

      (* Selecciona coeficientes no nulos, almacenandolos
         en una MATRIZ con sus componentes respectivas,
         para vector Jacobi correspondiente *)
reljac[i_Integer,j_Integer,k_Integer]:=
 Module[{t,prov},
   prov=jac[i,j,k];
   Select[
     Table[{t,Coefficient[prov,X[t]]}, {t,0,dim-1}],
     !NumberQ[#[[2]]]&
   ]
 ];

     (* LISTA DE RELACIONES que deben ser nulas, obtenidas
         del vector Jacobi correspondiente, sin indicar la
         componente respectiva.
         MONITOR: en la pantalla añadir // TableForm *)
lisjac[i_Integer,j_Integer,k_Integer]:=
   Map[#[[2]]&, reljac[i,j,k]]

     (* Da en forma de matriz todas las ternas de vectores
        y sus vectores de Jacobi, cuando no es trivial.*)
JACOBI:=
Module[{i,j,k,lista={}},
```

```
 For[j=1,j<=dim-3,j++,
   For[k=j+1,k<=dim-2,k++,
     If[jac[0,j,k]=!=0,
        lista=Join[lista,{{0,j,k}, jac[0,j,k]}]
     ]
   ]
 ];
 For[i=1,i<=dim-3,i++,
   For[j=i+1,j<=dim-2,j++,
     For[k=j+1,k<=dim-1,k++,
       If[jac[i,j,k]=!=0,
         lista=Join[lista,{{i,j,k}, jac[i,j,k]}]
       ]
     ]
   ]
 ];
 lista
]

     (* Da todas las expresiones que deben ser nulas para
        que la ley sea la de un álgebra de Lie *)
RELJAC:=
Module[{i,j,k,lista={}},
 For[j=1,j<=dim-3,j++,
   For[k=j+1,k<=dim-2,k++,
     If[jac[0,j,k]=!=0,
       lista=Union[lista,lisjac[0,j,k]]
     ]
```

```
    ]
  ];
  For[i=1,i<=dim-3,i++,
    For[j=i+1,j<=dim-2,j++,
      For[k=j+1,k<=dim-1,k++,
        If[jac[i,j,k]=!=0,
          lista=Union[lista,lisjac[i,j,k]]
        ]
      ]
    ]
  ];
  lista
]

   (*  Convierte los elementos de una lista en ecuaciones *)

ECUACION[lis_List]:=Map[(#==0)&,lis]
```

Bibliografia

[1] Ancochea-Bermudez, J.M. y Gómez Martín, J.R. *Sobre el abierto de la variedad de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 9, formado por las leyes filiformes.* Proc. XV Jornadas Hispano-Lusas de Matemática 3 pp. 95-99. Evora. 1990.

[2] Ancochea-Bermudez, J.M. et Goze, M. *Classification des algèbres de Lie filiformes de dimension 8.* Archiv. Math. 50, pp. 511-525, 1988.

[3] Ancochea-Bermudez, J.M. et Goze, M. *Classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7.* Archiv. Math. 52, pp. 175-185, 1989.

[4] Ancochea-Bermudez, J.M. and Goze, M. *On the varietes of nilpotent Lie algebras of dimension 7 and 8.* J. Pure Appl. Algebra 77, pp. 131-140. 1992.

[5] Bäuerle, G.G.A. and De Kerf, E.A. *Lie Algebras Part 1.* Studies in Mathematical Physics I. Elsevier, 1990.

[6] Belifante, J.G.F. and Kolman, B. *A survey of Lie Groups and Lie Algebras with Applications and Computacional Methods.* SIAM, Philadelphia, 1989.

[7] Boza, L., Echarte. F.J. and Núñez, J. *Classification of complex Filiform Lie Algebras of dimension 10.* Algebras Groups and Geometries 77, pp. 253-276. 1992.

[8] Cabezas, J.M. *Una generalización de las álgebras de Lie filiformes.* Tesis. Universidad de Sevilla. 1997.

[9] Cabezas, J.M., Gómez, J.R. *Generación de la familia de leyes de álgebras de Lie* $(n-5)$*-filiformes en dimensión cualquiera.* Actas del Encuentro de Análisis Matricial y Aplicaciones, EAMA'97, pp. 109-116, 1997.

[10] Cabezas, J.M., Gómez, J.R. *Las álgebras metabelianas de invariante de Goze minimal.* Actas del Encuentro de Análisis Matricial y Aplicaciones, EAMA'97, pp. 117-123, 1997.

[11] Cabezas, J.M., Gómez, J.R., Jiménez-Merchán, A. *Family of p-filiform Lie algebras.* Proc. of the colloquium Algebra and Operator Theory-Tashkent, 1997. pp. 93-102. Kluwer Academics Publishers, 1997.

[12] Cabezas, J.M., Gómez, J.R. *Cohomología de las álgebras de Lie* $(n-3)$*-filiformes.* En preparación.

[13] Cerezo, A. *Les algèbres de Lie nilpotentes réelles et complexes de dimension 6.* Université de Nice, prépublication 27. 1984.

[14] Chow, Y. *General theory of Lie algebras (vol. 1 y 2).* Gordon and Breach. 1978.

[15] Dixmier, J. *Sur les représentations unitaries des groupes de Lie nilpotentes III.* Canadian J. Math. 10, pp. 321-348. 1958.

[16] Dixmier, J. and Lister. M.G. *Derivations of nilpotent Lie algebras.* Proc. A.M.S. 8, pp. 155-158, 1957.

[17] Dyer, J.L. *A nilpotent Lie algebra with nilpotent automorphism group.* Bull. Amer. Math. Soc. 76, pp. 52-56, 1970.

[18] Echarte, F.J., Gómez J.R. and J. Nuñez. *A necessary and sufficient condition for a complex filiform Lie algebra to be a characteristically nilpotent Lie algebra.* Bull. Math. S.S.M. Romania. Tome 37(85),n.3-4, pp. 63-72, 1993.

[19] Favre, G. *Une algèbre caractéristiquement nilpotente de dimension 7.* C.R.A.Sc. Paris, Serie A 274, pp. 1338-1339, 1972.

[20] Gómez Martín, J.R. *Clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes complejas filiformes de dimensión 9.* Tesis. Universidad de Sevilla. 1990.

[21] Gómez Martín, J.R. *Les algèbres de Lie. Étude des lois filiformes.* Proceedings 5ème journées Franco-Belges d'algèbre. Colmar. 1991

[22] Gómez Martín, J.R. y Echarte Reula, F.J. *Classification of complex filiform nilpotent Lie algebras of dimension 9.* Rendiconti Cagliari 61, fasc.1, pp. 21-28. 1991.

[23] Gómez, J.R., Jiménez-Merchán, A. *The graded algebras of a class of Lie algebras in Mathematics with Vision* (ed. V. Keränen, P. Mitic), pp. 151–158. Proceeding of the First International Mathematica Symposium, Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, 1995.

[24] Gómez, J.R., Jiménez-Merchán, A. *Álgebras de Lie casifiliformes graduadas* Preprint MA1-04-97 VI.

[25] Gómez, J.R., Jiménez-Merchán, A. *Álgebras de Lie graduadas y cálculo simbólico.* Actas del Primer Encuentro de Álgebra Computacional y Aplicaciones, EACA'95, pp. 57–65, 1995.

[26] Gómez, J.R., Jiménez-Merchán, A., Khakimdjanov, Y. *Low-Dimensional Filiform Lie Algebras* Aceptado para publicación en Journal of Pure and Applied Algebra

[27] Gómez,J.R., Jiménez-Merchán, A., Reyes, J. *Extensiones de Álgebras de Lie filiformes graduadas.* Actas del Segundo Encuentro de Álgebra Computacional y Aplicaciones, EACA'96, pp. 136–142, 1996.

[28] Gómez,J.R., Jiménez-Merchán, A., Reyes, J. *Bases homogéneas de álgebras de Lie casifiliformes graduadas.* Actas del Encuentro de Análisis Matricial y Aplicaciones, EAMA'97, pp. 252-259, 1997.

[29] Goze, M., Khakimdjanov, Y. *Sur les algèbres de Lie nilpotentes admettant un tore de dérivations.* Manuscripta Mathematica 84, pp. 115–224, 1994.

[30] Goze, M., Khakimdjanov, Y. *Nilpotent Lie algebras.* Kluwers Academics Publishers, 1996.

[31] Goze,M., Piu, P. *Classification des métriques invariantes à gauche sur le groupe de Heisemberg,* Circolo Math. di Palermo, ser. II, 1990.

[32] Humphreys, J.E. *Introduction to Lie algebras and representation theory.* Spriger-Verlag, New York, 1972.

[33] Jacobson, N. *Lie Algebras.* Dover Publications, Inc. New York, 1979.

[34] Jiménez-Merchán, A. *Familias de leyes de álgebras de Lie nilpotentes* Tesis doctoral. Universidad de Sevilla, 1995.

[35] M. Luks. *What is the typical nilpotent Lie algebra?, in Computers in non associate rings and algebras.* Acad. Press., New York, p. 189-207, 1977.

[36] Morosov V. *Clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión* 6. (en ruso el original). Isvestia Vys. Ucheb. Zav. 4, pp.161-171. 1958.

[37] Nielsen, O.A. *Unitary representation and coadjoint orbits of low-dimensional nilpotent Lie groups.* Queen's papers in pure and appl. Math. 63. 1983.

[38] Romdhani, M. *Clasiffication of real and complex nilpotent Lie algebras of dimension 7.* Linear and multilinear alg. 24, pp.167-189.1989.

[39] Umlauf, K. A. *Über die Zusammensetzung der endlichen continuierlichen Transformationsgruppen insbesondere der Gruppen vom Range null.* Thesis, Leipzig, 1891.

[40] Vergne, M. *Variété des algèbres de Lie nilpotentes.* Tesis. París. 1966.

[41] Vergne, M. *Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes.* Bulletin Société Mathematique de la France 98, pp. 81-116, 1970.

JOAQUÍN REYES POCUMÉ
Algebras de Lie casifiliformes graduadas de longitud maximal

APTO CUM LAUDE

26 JUNIO 98

Reyes

Jenis Mª Caberes Mtn. de Aragón