

2.15765

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
BIBLIOTECA

# UNIVERSIDAD DE SEVILLA

## FACULTAD DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de

de la

de este Departamento desde el día 19-6-92

hasta el día 14-7-92

Sevilla 15 de Julio

1992

EL DIRECTOR DE



## LOCALIZACIÓN MULTICRITERIO DE CENTROS PELIGROSOS

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
SECRETARÍA GENERAL

218

97

17 JUN 1992

*Alina Lafitte*

R.  
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

**FACULTAD DE MATEMÁTICAS**

LOCALIZACIÓN MULTICRITERIO DE CENTROS PELIGROSOS

DIRECTORES DE LA TESIS:

**Rafael Infante Macias**  
Catedrático de Estadística  
e Investigación Operativa  
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

**José Muñoz Pérez**  
Catedrático de Ciencias de  
la Computación e Inteligencia  
Artificial.  
UNIVERSIDAD DE MALAGA

TESIS PRESENTADA POR

**Juan José Saameño Rodríguez**  
para optar al Grado de  
Doctor en Matemáticas



Fdo: Rafael Infante



Fdo: José Muñoz



Fdo: Juan J. Saameño

## **AGRADECIMIENTOS**

Deseo hacer constar mi gratitud y sincero agradecimiento a los Profesores D. Rafael Infante Macias y D. José Muñoz Pérez, sin cuya ayuda y aliento este trabajo no hubiese sido posible.

Asimismo, deseo expresar mi agradecimiento al Departamento de Estadística e Investigación Operativa de esta Universidad por su ayuda en su elaboración.

Por último, a mi esposa y mis hijos por los ánimos que me han transmitido en todos los momentos y por su comprensión y paciencia.



# INDICE

**INDICE:**

*Página:*

**INTRODUCCION** ..... 4

**CAPITULO I: DOMINANCIA** ..... 18

I.1.- Introducción ..... 19

I.2.- Vector de componentes máximas ..... 21

I.3.- Determinación de puntos no dominados ..... 25

I.4.- Apéndice al Capítulo I: Algunas propiedades útiles de las normas 33

**CAPITULO II: DOMINANCIA EN REGIONES POLIGONALES** ... 40

II.1.- Introducción ..... 41

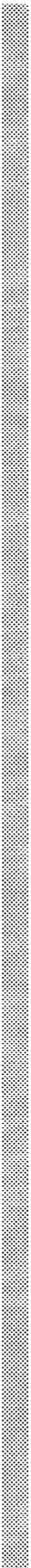
II.2.- Determinación de puntos eficientes ..... 43

II.3.- Algoritmo de construcción de los puntos eficientes en la  
frontera de S ..... 48

---

---

<b>CAPITULO III: PROBLEMA GENERAL DE LOCALIZACION DE CENTROS PELIGROSOS</b> .....	54
III.1.- Introducción: .....	55
III.2.- Planteamiento del problema .....	57
III.3.- Primeras propiedades de la función $f(x)$ .....	61
III.4.- Comportamiento de la función, $f(x)$ , ante la dominancia .....	68
III.5.- Condiciones de equidistancia .....	72
<b>CAPITULO IV: UNA APLICACION DEL PROBLEMA GENERAL: CASO DE NORMA EUCLIDEA</b> .....	85
IV.1.- Introducción .....	86
IV.2.- Definición del problema .....	88
IV.3.- Optimos interiores a $S$ .....	89
IV.4.- Optimos en la frontera: caso en que $S$ es una región poligonal ...	95
IV.5.- Algoritmo de búsqueda de óptimos .....	99
IV.6.- Problema maxmin .....	101
<b>BIBLIOGRAFIA</b> .....	105



# INTRODUCCION

La Teoría de Localización comienza a desarrollarse en el siglo XVII, aunque la mayoría de los trabajos en este área, se han realizado en los últimos 30 años. Sin embargo, la investigación sobre la localización de centros peligrosos, nocivos o detestables, no se ha llevado a cabo hasta los últimos diez años. Además, como señalan Erkut y Neuman (1989), el número de trabajos realizados sobre la localización de este tipo de centros es inferior al 2% de los trabajos que aparecen en la literatura de localización. Es decir, solo hay unos 50 trabajos que tratan con modelos analíticos aplicables a la localización de este tipo de centros. Una explicación de esta descompensación puede ser que hasta hace poco no han aparecido centros de servicio que pueden causar daños o perjuicios a la salud o que atentan o son una amenaza para nuestro bienestar o estilo de vida. Así, gran parte de la sociedad prefiere tener una *central nuclear, un cementerio atómico, un mega-aeropuerto, un basurero, una cárcel, etc, lo más alejado posible*. Estas preferencias se contraponen con las preferencias clásicas en teoría de localización donde se desea que el centro de servicio o el punto de demanda estén *lo más cerca posible*, como es el caso de ambulatorios, farmacias, supermercados, estaciones de bomberos, etc.

Las soluciones a estos problemas pueden traspasar el ámbito nacional.

Así, en Junio de 1980, el gobierno belga protestó al gobierno francés por haber colocado éste varias centrales nucleares a lo largo de su frontera común. El gobierno francés decidió colocar la mitad de sus centrales nucleares a lo largo de su costa atlántica y en la frontera con Bélgica y Alemania, a gran distancia de los grandes núcleos de población.

Los modelos analíticos de localización de centros peligrosos vienen configurados con los siguientes elementos:

a) Un conjunto  $\mathbf{V} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$  de "m" puntos que representan la posición de cada uno de los *centros (poblaciones) afectados* por la ubicación de los centros peligrosos.

b) Un conjunto  $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_p\}$  de "p" puntos que representan la posición de cada uno de los centros peligrosos, y que trataremos de determinar en base a los *objetivos* establecidos.

c) Un espacio solución que puede ser:

-  $\mathbf{R}^k$

- Grafo (tipo árbol o general)

d) Una región factible, S:

- Continua (convexa o no convexa)

- Discreta.

e) Una medida de distancia  $d(P_i, X_k)$ :

- Euclidea
- Rectangular
- Poliédrica
- Sobre una red.

f) Un conjunto de pesos  $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  que representan los diferentes niveles de repulsión para los centros afectados, es decir, la incompatibilidad relativa entre el centro a ubicar y el centro afectado:

- Pesos iguales (modelo no ponderado)
- Pesos diferentes.

g) Funciones objetivo:

- Objetivo único:  
*maximin*  
*maxisum*
- Multiobjetivo.

h) Interacciones:

- Solo entre puntos de S con puntos de X
- Solo entre puntos de X con puntos de X
- Con los dos tipos de interacciones anteriores

El problema de localización de centros peligrosos más conocido es el problema *maximin*. Se trata de ubicar el centro peligroso de manera que el

centro afectado más cercano quede lo más lejos posible, es decir:

$$\text{Máx}_{x \in S} [ \text{mín}_{1 \leq i \leq m} w_i d(X, P_i) ]$$

Este problema se puede formular también de la siguiente manera:

Máx Z

(P1)

sujeto a:  $z \leq w_i d(X, P_i), i=1,2,\dots,m$

$x \in S$

La mayoría de los artículos publicados utilizan la distancia euclídea y enumeran todos los óptimos locales basándose en las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker. Así, el primer artículo que sugiere este método es el de Dasarathy y White (1980). En este trabajo, el conjunto S es una región poliédrica de  $\mathbf{R}^k$  y todos los pesos son iguales. Se prueba la existencia de un conjunto finito de candidatos para la solución óptima y se presenta un algoritmo combinatorio que se compara con los existentes de la programación convexa.

Drezner y Wesolowsky (1980) tratan el problema ponderado sobre el plano, imponiendo que el centro detestable esté dentro de una distancia predeterminada de cada centro afectado. Así, la región factible viene determinada por la intersección de "m" círculos centrados en cada centro afectado. Proponen un algoritmo para determinar la solución.

Melachrinoudis y Cullinane (1983) consideran el problema sobre un polígono no convexo con regiones circulares alrededor de los centros afectados dentro de las cuales no se permite la ubicación del centro peligroso. Así aseguran que el centro no deseado esté fuera de regiones como lagos, ríos, parques nacionales, etc. Utilizan las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker y enumeran los óptimos locales con un algoritmo que es una modificación del propuesto por Dasarathy y White (1980).

Melachrinoudis (1985), ha demostrado que una solución óptima,  $X^*$ , para el problema **P1** está localizada:

- a) En un vértice de  $S$  (región poligonal), o
- b) Sobre un lado de  $S$ ,  $w$ -equidistante de dos puntos de  $V$ , o
- c) En el interior de  $S$ ,  $w$ -equidistante de tres puntos de  $V$ .

Melachrinoudis y Cullinane (1986) consideran el siguiente problema:

$$\min_{(x,y) \in S} \left\{ \max_{1 \leq i \leq m} \frac{w_i}{[(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2]} \right\}$$

$$\text{sujeto a } c_{j1}x + c_{j2}y + c_{j3} \leq 0$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

Se aplica a la localización de centros no deseados que producen de alguna manera *polución ambiental*, mediante radiaciones, ruidos o gases, y se supone que la concentración de la misma sigue la ley de la inversa del cuadrado de la distancia. Es decir, los niveles de emisiones no deseables,

desde una fuente de polución, son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia a la fuente. Proponen un algoritmo de programación matemática cuando la región factible es poligonal y convexa.

Recientemente, Erkut y Öncü (1991) han introducido la versión paramétrica siguiente:

$$\text{Max } Z$$

$$\text{sujeto a } Z \leq (w_i)^{1/q} d(X, P_i), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$X \in S$$

donde  $1 \leq q < \infty$ . Demuestran que este problema tiene la misma solución óptima que el siguiente problema minimax:

$$\text{min } Z$$

$$\text{sujeto a } Z \geq \frac{u_i}{d(X, P_i)^q}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$X \in S$$

donde  $u_i > 0$  es un peso proporcional a la susceptibilidad o sensibilidad del centro afectado  $P_i$ . Precisamente este problema, para  $q = 2$ , es el propuesto por Melachrinoudis y Cullinae (1986), que hemos señalado mas arriba como una alternativa realista al problema maxmin.

Aunque este nuevo resultado tampoco libra al decisor de tener que especificar los pesos  $w_i$ , sin embargo, le permite cambiar los pesos

sistemáticamente, de manera que sea menos importante la elección inicial de los mismos. Se puede observar la trayectoria de la localización óptima conforme  $q$  aumenta.

El problema *maxmin* con distancia rectangular no es tan popular como con la distancia euclídea. Además, algunos de los resultados obtenidos con la distancia euclídea se han aplicado a la distancia rectangular. El primer trabajo recogido en la literatura es el de Drezner y Wesolowsky (1983), donde se proponen dos métodos para resolver el problema 1-maxmin sobre un polígono convexo. El primer método se basa en una búsqueda binaria con un punto de vista geométrico. El segundo método divide la región factible en segmentos rectangulares al trazar líneas verticales y horizontales por cada punto afectado, y resuelve un problema de programación lineal para cada segmento. Melachrinoudis (1988) propone esencialmente el mismo algoritmo para este problema.

Melachrinoudis y Cullinane (1986) establecen tres propiedades de la solución óptima del problema 1-maxmin sobre un polígono convexo  $S$ , que limitan, de forma eficiente, la búsqueda de la solución óptima.

En la literatura no hay trabajos de localización en redes con criterio maxmin. La razón está clara, su resolución es trivial; basta considerar todos los pares de vértices para determinar la solución óptima. En el caso de que todos los pesos sean iguales, la solución óptima es el punto medio del eje mas largo.

En cuanto al problema de la localización de un centro peligroso con criterio *maxisum* (problema 1-maxisum) podemos decir que hay muy pocos

trabajos en la literatura. El problema se puede expresar como sigue:

$$\max_{X \in S} \sum_{i=1}^m w_i d(X, P_i)$$

El problema 1-maximum en el plano ha sido estudiado por Hansen, Peeters y Thisse (1981). Consideran el problema de minimizar

$$\sum_{i=1}^m D_i(\|X - P_i\|)$$

para  $X \in S$ , donde  $D_i(\cdot)$  es una función continua y decreciente. Se supone cerrado y acotado. Utilizan el concepto de *punto remoto* para caracterizar la solución del problema. Así, representando por  $C$  a la envolvente convexa de  $V$ , prueban que el conjunto intersección de  $S$  con  $C$  ó el conjunto de puntos remotos desde  $C$ , contienen al menos una solución óptima para el problema anterior. Asimismo, cuando las funciones  $D_i$  son lineales, entonces el conjunto de puntos extremos de la envolvente convexa de  $S$  que son remotos desde  $C$ , contienen al menos una solución óptima. Sin embargo, cuando  $S$  es convexo y la intersección de  $S$  con  $C$  no es vacía, entonces el conjunto de puntos remotos desde  $C$  viene dado por la frontera de  $S$ . Por esta razón se debe dar otra definición (mas restrictiva) de *punto remoto*: Se dice que  $s \in S$  es *remoto* desde  $C$  sí, y sólo sí, para todo  $x \in C$ , la semirrecta que parte de  $x$  y pasa por  $s \in S$  no contiene puntos de  $S$  mas allá de  $s$ . Se obtienen resultados similares a los anteriores con esta nueva definición, solo que ahora el conjunto de puntos remotos suele ser mas reducido.

Hansen, Peeters y Thisse (1981) proponen un algoritmo de ramificación y acotación similar al método del cuadrado grande con cuadrados pequeños desarrollado por Hansen y Thisse (1981), que permite la resolución del problema anterior.

Drezner y Wesolowsky (1988) y Tellier y Polanski (1989) también han estudiado este problema pero con pesos positivos y negativos, es decir, contemplando simultáneamente centros *repulsivos* y *atractivos*. Cuando la suma de los pesos es positiva el problema tiene solución finita y si es negativa la solución es ilimitada. Un estudio detallado de este problema ha sido realizado por Velasco (1991) caracterizando los puntos solución y proponiendo algoritmos para su determinación.

En el mundo real, el problema de localizar un centro peligroso o no deseado es claramente un problema de decisión multiobjetivo. Aunque el problema de la localización de un centro de servicio deseado es también multiobjetivo, sin embargo, desde el punto de vista social, el grado de molestia de un centro peligroso es mayor que el grado de utilidad de un centro de servicio deseado. Esto supone que en él existan presiones sociales, manifestaciones, etc, que aumentan la complejidad social del problema. Así, los costes de operación, el impacto biológico, la calidad del aire, el impacto socioeconómico, etc son factores a tener en cuenta para la ubicación y operación del centro.

En este trabajo, se estudia el problema de localización de centros peligrosos con *criterios múltiples*. Como señalan Erkut y Neuman (1989), se ha realizado muy poca investigación sobre modelos de optimización multiobjetivo en este área. Solo han encontrado un artículo y un trabajo

presentado en el "TIMS/ORSA meeting". Estos dos trabajos se basan en el problema 1-maximin con distancia rectangular.

Mehrez, Sinuany-Stern y Stulman (1985) consideran una función objetivo ponderada que combina los criterios minimax y maximin y utiliza la distancia rectangular. Desarrollan un procedimiento que produce una gráfica de la localización óptima para cualquier peso posible. Obtienen el conjunto de puntos eficientes y sus rangos de optimalidad.

Aquí abordaremos el problema desde dos puntos de vista, uno a través del concepto de *dominancia* y otro a través de la definición de una función,  $f(x)$  multiobjetivo. Las dos maneras de tratarse el problema están conectadas como veremos en el Capítulo III. Todo lo aquí realizado está hecho en  $\mathbf{R}^2$  puesto que es ahí donde se plantean los problemas de mas interés, no obstante, todas las propiedades estudiadas son facilmente transportables a  $\mathbf{R}^k$ .

En el Capítulo I del presente trabajo, se aborda el problema de localización de centros peligrosos o no deseados desde el punto de vista de la dominancia. Es decir, se considera la mejor ubicación para tal centro aquella para la cual, desde el punto de vista de todos los puntos  $P_i$ , no existe otra mejor. Esto es, el óptimo sería aquél punto,  $x^*$ , tal que:

$$\|x - P_i\| \leq \|x^* - P_i\| \text{ para cada } x \in S \text{ e } i=1,2,\dots,m$$

En este aspecto se advierte primero que el problema, en general no tiene solución. No obstante, desde otro punto de vista, este planteamiento nos sirve para quedarnos solamente con el conjunto de puntos no dominados, en este sentido se llega a la conclusión de que tal conjunto resulta de la unión de los

dos conjuntos siguientes:

- a) la intersección de S con C
- b) la frontera de S.

Además, demostramos que el problema de encontrar un  $x \in S$  tal que domine a todos los demás, si tiene solución, está en la Frontera de S.

Acabamos este Capitulo con un apéndice sobre propiedades de las normas que se utilizan en el presente trabajo. De estas algunas se pueden encontrar en la literatura sobre el particular y otras no, sin embargo, hemos considerado oportuna su inclusión aquí por cuanto se hace a menudo referencia a ellas.

En el Capitulo II, se continúa por la misma línea en el caso de que el conjunto factible sea una poligonal convexa, en tal caso se estudia como reducir el conjunto de puntos eficientes de la frontera de S a través del concepto de *equivértice*, se termina dicho capítulo dando un algoritmo de búsqueda de los puntos no dominados de la frontera.

En el Capítulo III, se trata lo que hemos denominado *problema general de localización de centros no deseados*, empezamos por definir una función que engloba a todas las expuestas con anterioridad en esta introducción de la manera siguiente:

Sean  $w_1, w_2, \dots, w_m$  números positivos (pesos), y sean los números positivos o nulos  $k_1, k_2, \dots, k_m$ ; supongamos, además, que se verifica, para una cierta permutación,  $(.)$ , lo siguiente:

$$w_{(1)}\|x - P_{(1)}\| \leq w_{(2)}\|x - P_{(2)}\| \leq \dots \leq w_{(m)}\|x - P_{(m)}\|,$$

entonces, definimos la función:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m k_i b_{(i)} \|x - P_{(i)}\|$$

Se trata entonces de buscar los puntos,  $x \in S$  tales que  $f(x)$  sea máximo.

Observemos en primer lugar que se estudia el problema con una norma cualquiera en un conjunto cerrado y acotado; que, por otra parte, según los valores que tomemos para los  $k_i$  se obtienen distintos problemas, así, por ejemplo, si

$k_1 = 1$  y todos los demás  $k_i = 0$  para  $i=2,3,\dots,m$  se obtiene el problema maximin, si son todos los  $k_i$  iguales y distintos de cero obtenemos el problema maxisum, etc.

Obtenemos los siguientes resultados:

- a) La función definida es continua y por tanto existe solución óptima en  $S$ .
- b) La función posee la propiedad de que respeta la dominancia, es decir, si un punto está dominado por otro, la función toma en éste un valor mayor o igual que en el primero.
- c) Los puntos óptimos de la función, bajo ciertas pequeñas restricciones para la norma o para los pesos  $w_i$ , son puntos  $w$ -equidistantes de los  $P_i$ .

Por tanto, obsérvese que ya tenemos una generalización de los resultados que hemos enunciado con anterioridad, con la particularidad de que aquí no se toma la decisión sobre la función objetivo, ni siquiera con respecto a la norma o a los pesos. Es de prever que cuando tomemos una norma en particular se pueda, utilizando los mismos métodos que aquí usamos, obtener los resultados a que hemos hecho referencia.

Así, en el último Capítulo hacemos una aplicación al caso de norma euclidea con pesos iguales, obteniéndose que las soluciones óptimas de la función objetivo están entre los conjuntos siguientes:

- a) Los vértices de la poligonal  $S$ .
- b) Los puntos de los lados de  $S$  equidistantes de dos puntos  $P_i$ .
- c) Los puntos interiores equidistantes de tres puntos  $P_i$ .

Mencionar solamente que tales resultados son válidos tanto para el problema maxmin, maxisum o cualquier otro que se nos pudiese ocurrir y que ya hacemos mención en el Capítulo III.

Acaba el trabajo y el Capítulo IV dando un algoritmo de búsqueda de soluciones óptimas que engloba la introducción de la función,  $f(x)$ , como deseemos y una implementación de tal algoritmo.



Capítulo I:

DOMINANCIA

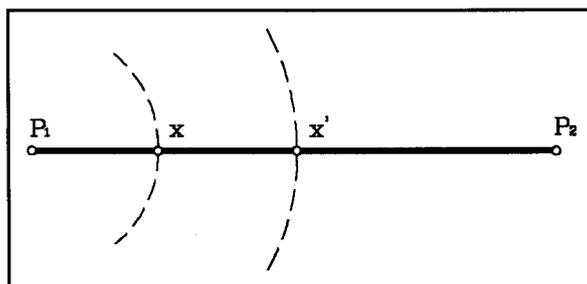
## **I.1: INTRODUCCIÓN:**

En este Capitulo estudiamos el Problema de la Localización de Centros Peligrosos como un problema de decisión multicriterio.

Cuando hay que ubicar un centro peligroso en una región donde hay "m" poblaciones afectadas, situadas en los puntos  $P_1, P_2, \dots, P_m$  estamos frente a un problema de decisión multicriterio, pues el deseo de cada población es bien claro: ubicar el centro lo mas retirado posible de ella. Sin embargo, estos criterios se van a contraponer entre sí, es decir, una ubicación óptima para una población puede ser pésima para otra.

Observemos que, en general, dadas "m" poblaciones no es posible encontrar la ubicación óptima para todas ellas en el sentido que lo decimos en el párrafo anterior. Tal situación se observa en la figura I.1 donde se advierte que si consideramos las posibles ubicaciones del centro peligroso en el conjunto  $S = [P_1, P_2]$  las poblaciones de "demanda" situadas en los mismos puntos  $P_1$  y  $P_2$  y la norma euclidea, la mejor ubicación con respecto al punto  $P_1$  sería el punto  $P_2$  y recíprocamente, es decir, dado cualquier punto "x",

siempre es posible encontrar un punto mejor bien para  $P_1$ , bien para  $P_2$ .



*Fig.: I.1*

No obstante, este enfoque del problema nos proporcionará ciertos resultados importantes.

De una parte, cuando sea posible determinar puntos que verifiquen estar mas alejados de todas las poblaciones  $P_i$  que todos los demás habremos resuelto el problema.

En otro caso, también será deseable que cualquier criterio que utilicemos lleve implícito la propiedad que si un punto,  $x$ , está mas alejado de todos los  $P_i$  que otro punto,  $y$ , el primero debe ser mejor que el segundo.

**I.2: VECTOR DE COMPONENTES MÁXIMAS:****Definición I.2.1:**

Sea  $\| \cdot \|$  una norma cualquiera sobre  $\mathbf{R}^2$ ,  $S$  un subconjunto cerrado y acotado de  $\mathbf{R}^2$  y un conjunto de puntos  $P_1, P_2, \dots, P_m$  del plano. Para dos puntos  $x, y \in S$ , se dice que  $x$  *domina a*  $y$ , ó, *que y está dominado por x* si:

$$\| y - P_i \| \leq \| x - P_i \| ; \forall i = 1, 2, \dots, m$$

**Definición I.2.2:**

En las mismas condiciones anteriores, definimos el **vector de distancia** de un punto  $x \in \mathbf{R}^2$  a los puntos,  $P_i$ , de demanda, como la función vectorial:

$$\mathbf{v}(x) = ( \| x - P_1 \|, \| x - P_2 \|, \dots, \| x - P_m \| ).$$

Si existe  $x \in S$  tal que  $x$  domina a todo punto  $y \in S$ , entonces  $x$  sería la mejor solución del problema. Mas claramente, si

$$\text{Máx}_{y \in S} \| y - P_i \| = \| x - P_i \| ; \forall i = 1, 2, \dots, m$$

entonces  $x$  es una solución óptima.

Por tanto el problema se plantea como:

$$\text{Max } \{ \mathbf{v}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in S \}$$

entendiendo dicho máximo como el vector que tiene todas sus componentes máximas.

A tal vector,  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ , si existe, le llamaremos el **vector de componentes máximas** y al punto " $\mathbf{x}$ ", la solución ideal.

En la introducción a este Capítulo ya vimos que el vector de componentes máximas no tiene por qué existir en general; por tanto el concepto de dominancia de puntos nos servirá, en realidad, para determinar el conjunto de puntos eficientes de  $S$ .

### **Propiedad I.2.1:**

Si definimos la relación:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{v}(\mathbf{y}) \Leftrightarrow \| \mathbf{x} - P_i \| \leq \| \mathbf{y} - P_i \| \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

se tiene que tal relación es una relación de preorden sobre  $S$ . (En general, no es una relación de orden).

*Demostración:*

La demostración es inmediata, pues es evidentemente reflexiva ya que  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{v}(\mathbf{x})$ .

Es transitiva pues se sigue que:

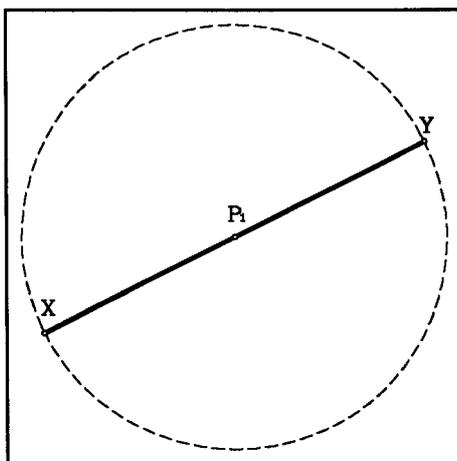
$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{v}(\mathbf{y}); \mathbf{v}(\mathbf{y}) \leq \mathbf{v}(\mathbf{z}) \Rightarrow$$

$$\| \mathbf{x} - \mathbf{P}_i \| \leq \| \mathbf{y} - \mathbf{P}_i \| \leq \| \mathbf{z} - \mathbf{P}_i \|; i=1,2,\dots,m$$

por lo tanto:  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{v}(\mathbf{z})$ . ■

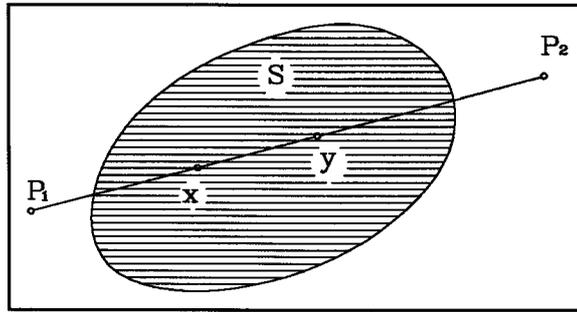
La propiedad antisimétrica no se cumple en general, baste considerar la norma euclídea sobre  $\mathbf{R}^2$  y la figura I.2 donde se observa que:

Si  $\mathbf{X} = \{ \mathbf{P}_1 \}$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{v}(\mathbf{y})$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{y}) \leq \mathbf{v}(\mathbf{x})$  y es  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ .



*Fig.: I.2*

Por último, decir aquí, que tampoco los puntos están totalmente ordenados como muestra la figura I.3 en la que si  $\mathbf{X} = [P_1, P_2]$ , los puntos  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  no son comparables.

*Fig.: I.3***NOTACIÓN:**

De aquí en adelante, denotaremos por  $\mathbf{X}$  a la envolvente convexa de los puntos  $P_1, P_2, \dots, P_m$ . Es decir:

$$\mathbf{X} = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2; \mathbf{x} = \sum \lambda_i P_i \text{ con } \sum \lambda_i = 1 \text{ y } \lambda_i \geq 0 \}.$$

De otra parte, denotamos por  $B(\mathbf{x}_0, r)$  al conjunto siguiente:

$$B(\mathbf{x}_0, r) = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2; \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r \}$$

**I.3: DETERMINACIÓN DE PUNTOS NO DOMINADOS:****Teorema I.3.1:**

Sea  $\| \cdot \|$  una norma sobre  $\mathbf{R}^2$ ,  $S \subset \mathbf{R}^2$  un conjunto cerrado y acotado,  $P_1, P_2, \dots, P_m$ , "m" puntos de  $\mathbf{R}^2$  y  $\mathbf{X} = [ P_1, P_2, \dots, P_m ]$  la envolvente convexa de estos puntos. Si "s" es un punto interior a  $S - \mathbf{X}$ , entonces existe un punto  $s^* \in \text{Fr}(S) - \mathbf{X}$  tal que  $v(s^*) \geq v(s)$ .

*Demostración:*

Sea  $s \in \text{Int} ( S - \mathbf{X} ) \Rightarrow \exists r > 0$  tal que  $B(s, r) \subset S - \mathbf{X}$ .

Por otra parte, según el Teorema I.A.1 existe  $x \in \mathbf{X}$  tal que

$$\| x - P_i \| \leq \| s - P_i \|, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m. \quad (1)$$

Puesto que  $s$  es el centro de la bola  $B(s, r)$ , y,  $B(s, r) \subset S - \mathbf{X}$ , existe  $\lambda > 1$  tal que:

$$\lambda s + (1 - \lambda)x \in B(s, r)$$

Además, por ser  $\mathbf{X}$  convexo, resulta que:

$$x^* = \lambda s + (1 - \lambda)x \notin \mathbf{X}. \quad \forall \lambda > 1. \quad (2)$$

ya que si  $x^* \in \mathbf{X}$ ,  $s \in [x, x^*]$  y  $s \in \mathbf{X}$

Sea entonces,

$$\lambda_1 = \sup_{\lambda \geq 1} \{ \lambda ; \lambda s + (1 - \lambda) x \in S - \mathbf{X} \}$$

Evidentemente  $\lambda_1 > 1$ . Sea:

$$s_1 = \lambda_1 s + (1 - \lambda_1) x.$$

Se tiene que  $s_1 \in S$ , aun más,  $s_1 \in \text{Fr}(S)$  puesto que si  $s_1$  fuese interior a  $S$ , repitiendo el razonamiento anterior llegaríamos a que  $\lambda_1$  no sería el superior.

Como  $\lambda_1 > 1$ , de (1) se tiene que  $s_1 \notin \mathbf{X}$ . Veamos ahora que  $s_1$  es el punto  $s^*$  que buscamos.

De la expresión:

$$s_1 = \lambda_1 s + (1 - \lambda_1) x$$

resulta que:

$$s = \frac{1}{\lambda_1} s_1 + \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1} x \quad \text{así:}$$

$$\|s - P_i\| = \left\| \frac{1}{\lambda_1} s_1 + \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1} x - \left( \frac{1}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1} \right) P_i \right\| \leq \frac{1}{\lambda_1} \|s_1 - P_i\| + \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1} \|x - P_i\| \leq$$

y por la expresión (1)

$$\leq \frac{1}{\lambda_1} \|s_1 - P_i\| + \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1} \|s - P_i\|$$

obteniendo finalmente que:

$$\left(1 - \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1}\right) \|s - P_i\| \leq \frac{1}{\lambda_1} \|s_1 - P_i\|$$

es decir,

$$\|s - P_i\| \leq \|s_1 - P_i\| \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad \blacksquare$$

### Corolario I.3.1:

Si el problema:  $\max \{v(x), x \in S\}$  tiene una solución ideal, entonces existe una que está en la Frontera de S.

*Demostración:*

Sabemos, por el resultado del teorema anterior, que el conjunto de puntos no dominados se nos ha quedado reducido al conjunto:

$$(S \cap X) \cup (Fr(S) - X).$$

Por tanto, si existe solución será  $s^* \in (Fr(S) - X)$ , en cuyo caso ya estaría demostrado, o bien  $s^* \in S \cap X$ . Demostremoslo en éste caso:

Si  $S \cap X = \{s^*\}$ , entonces  $s^* \in Fr(S)$  y también habríamos terminado. Supongamos, entonces, que  $\exists s_1 \neq s^*$ , y,  $s_1 \in S \cap X$ :

Puesto que  $s^*$  era solución tenemos que:

$$\| s^* - P_i \| \geq \| s_1 - P_i \|, \forall i = 1, 2, \dots, m.$$

Consideremos ahora los puntos:  $\lambda s^* + (1 - \lambda) s_1 \in S$ , para  $\lambda \geq 1$  (existen algunos, por lo menos para  $\lambda = 1$ ) y sean:

$$\lambda_1 = \sup_{\lambda \geq 1} \{ \lambda / \lambda s^* + (1 - \lambda) s_1 \in S \}$$

$$s_0 = \lambda_1 s^* + (1 - \lambda_1) s_1;$$

Como  $S$  es un conjunto cerrado se tiene:  $s_0 \in S$  y procediendo de manera análoga a como lo hicimos en el teorema I.A.1, obtendríamos que:

$$\| s^* - P_i \| \leq \| s_0 - P_i \|, \text{ para } i = 1, 2, \dots, m \quad \blacksquare$$

### **Comentario:**

Hemos visto, que los puntos interiores de  $S - X$  están dominados por puntos de la frontera de  $S$ . Lo que ahora nos faltaría ver es, de una parte, si existen puntos de  $S \cap X$  que dominen a los demás puntos de este mismo conjunto, y, de otra parte, si no existen tales puntos, ¿será posible, en general, encontrar puntos de  $Fr(S) - X$  que dominen a los de  $S \cap X$ ?

Para contestar a la primera de las cuestiones, demostraremos con el Lema I.3.1 y el Teorema I.3.3, que con unas hipótesis mínimas no es posible dominar puntos de  $S \cap X$  con puntos de éste mismo conjunto. En cuanto a la segunda de las cuestiones veremos, con un ejemplo, que hay que decir mas cosas referentes al conjunto  $S$ , para poder asegurar la contestación afirmativa a la pregunta.

**Lema I.3.1:**

Sea  $\mathbf{X}$  la envolvente convexa de los puntos  $P_1, P_2, \dots, P_m$  con  $m \geq 3$ ; elijamos un  $P_i$  cualquiera y sea  $T$  un subconjunto de  $\mathbf{X}$ , con  $T$  no vacío y tal que todos sus puntos son interiores. Sea  $x$  un punto interior a  $T$ ; si definimos:

$$H = \{ t \in \mathbf{X} / \| t - P_i \| \leq \| x - P_i \| \}$$

Entonces, existe  $y \in T - H$ .

Es decir, para todo punto,  $x$ , interior a  $\mathbf{X}$ , dado  $i=1,2,\dots,m$ , existe otro punto,  $y$ , también interior a  $\mathbf{X}$  verificando que:

$$\|y - P_i\| > \|x - P_i\|.$$

*Demostración:*

El elegir  $m \geq 3$  es para asegurarnos de que existen subconjuntos de  $\mathbf{X}$  con todos sus puntos interiores.

Sea  $x \in \text{int}(T) \Rightarrow$  Existe  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \subset T$ .

Sea entonces  $0 < h < r$  y tomemos el conjunto

$$K = \{ z = \lambda x + (1 - \lambda)P_i \in \mathbf{X} \text{ con } \lambda > 1 \}.$$

$K \neq \emptyset$  pues si elegimos  $\lambda = 1 + h \| x - P_i \|^{-1}$ , es  $\lambda > 1$  y, además:

$$\| z - x \| = \| \lambda x + (1-\lambda)P_i - x \| = \| (\lambda - 1)(x - P_i) \| =$$

$$\| h \| x - P_i \|^{-1} (x - P_i) \| = h < r$$

Luego  $z \in B(x, r) \subset T \subset X$ .

De otra parte  $z \notin H$  pues:

$$\| z - P_i \| = \left\| \frac{1}{\lambda}x + \frac{\lambda-1}{\lambda}P_i - P_i \right\| = \frac{1}{\lambda} \| x - P_i \| < \| x - P_i \|$$

■

### **Teorema I.3.2:**

Si  $X \cap S$  tiene puntos interiores se verifica que para todo  $x \in X \cap S$ , existe  $t \in X \cap S$  y un punto de demanda  $P_i$   $i = 1, 2, \dots, m$  tales que:

$$\| t - P_i \| > \| x - P_i \|.$$

(Es decir los puntos de  $X \cap S$  no dominan a los puntos de dicho conjunto).

*Demostración:*

Sea  $x \in X \cap S$ , si  $x \in \text{int}(X)$ , eligiendo  $T = \text{int}(X)$  y aplicando el lema anterior, existe  $y \in T$  tal que  $\| y - P_i \| > \| x - P_i \|$ .

Supongamos, por tanto que es  $x \in \text{Fr}(X \cap S)$ . Si para todo  $t \in X \cap S$  se verificase que:

$$\|x - P_i\| \geq \|t - P_i\|, i = 1, 2, \dots, m; \text{ tendríamos:}$$

Existe, por hipótesis,  $t \in \text{int}(\mathbf{X} \cap \mathbf{S})$ ; entonces particionamos  $\mathbf{X}$  en triángulos con vértice común,  $t$ , y tales que, en cada triángulo, los otros dos vértices sean  $P_i$  adyacentes en la poligonal  $\mathbf{X}$ . De esta manera, existen  $P_i, P_j$  tales que si  $M = [t, P_i, P_j]$  es la envolvente convexa de los puntos dados,  $x \in M$ .

Según la Proposición: I.A.3, será:

$$\|x - P_i\| + \|x - P_j\| \leq \|t - P_i\| + \|t - P_j\| \Rightarrow$$

$$\|x - P_i\| \leq \|t - P_i\|, \text{ ó, } \|x - P_j\| \leq \|t - P_j\|.$$

Pero, puesto que,  $\|x - P_i\| \geq \|t - P_i\|$  para todo  $i=1,2,\dots,m \Rightarrow$

$$\|x - P_i\| = \|t - P_i\|, \text{ y, } \|x - P_j\| = \|t - P_j\|.$$

Ahora bien,  $t \in \text{int}(\mathbf{X} \cap \mathbf{S})$ , luego, aplicando de nuevo el lema anterior, tendremos que existe, para el "i" o el "j" anterior,  $y \in \mathbf{X} \cap \mathbf{S}$  con:

$$\|y - P_i\| > \|t - P_i\| = \|x - P_i\|.$$

■

Para responder a la segunda de las cuestiones que nos planteábamos en el comentario, podemos observar en la figura I.4 que, en general, los puntos de  $\text{Fr}(\mathbf{S}) - \mathbf{X}$ , no dominan a los puntos de  $\mathbf{X}$  comunes con  $\mathbf{S}$ , en ésta figura, la norma considerada es la euclídea y en ella se puede ver que  $\forall y \in \mathbf{R}$  y  $\forall x \in \mathbf{S} - \mathbf{X}$  es

$$\|x - P_1\| > \|y - P_1\|.$$

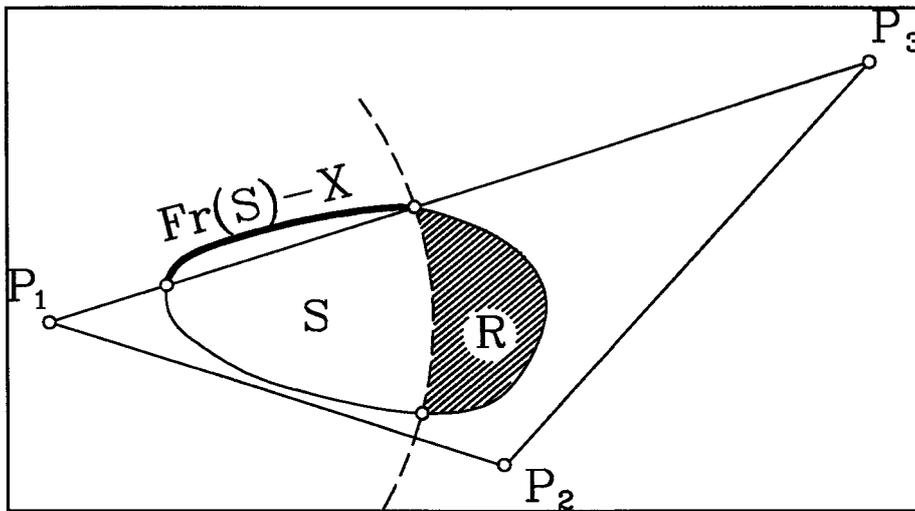


Fig.: I.4

En todo caso, se pueden dar condiciones suficientes para asegurar que los puntos de  $S \cap \mathbf{X}$  estén dominados tales como la siguiente:

**Proposición I.3.1:**

Sea  $\delta(\mathbf{X}) = R = \max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m} \|P_i - P_j\|$ . Si existe  $s \in S$  tal que  $d(s, \mathbf{X}) = \min_{x \in \mathbf{X}} \|s - x\| \geq R$ , entonces  $s$  domina a los puntos de  $S \cap \mathbf{X}$ .

*Demostración:*

Es trivial pues:  $\|s - P_i\| \geq d(s, \mathbf{X}) \geq R = \delta(\mathbf{X}) \geq \|x - P_i\|$ .

**I.A: APÉNDICE AL CAPITULO I:  
ALGUNAS PROPIEDADES ÚTILES DE LAS NORMAS:**

**Proposición I.A.1:**

Si  $x \in [P_1, P_2]$ , entonces:

$$\|x - P_1\| + \|x - P_2\| = \|P_1 - P_2\|.$$

*Demostración:*

$x \in [P_1, P_2] \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbf{R} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$  tal que  $x = \alpha P_1 + (1 - \alpha)P_2 \Rightarrow$

$$\|x - P_1\| + \|x - P_2\| =$$

$$\|\alpha P_1 + (1 - \alpha)P_2 - P_1\| + \|\alpha P_1 + (1 - \alpha)P_2 - P_2\| =$$

$$\|(1 - \alpha)(P_2 - P_1)\| + \|\alpha(P_1 - P_2)\| = (1 - \alpha)\|P_1 - P_2\| + \alpha\|P_1 - P_2\| =$$

$$\|P_1 - P_2\|.$$

■

**Proposición I.A.2:**

Sean  $x, t \in [P_1, P_2]$  y  $\|x - P_1\| < \|t - P_1\|$ , entonces:

$$\|x - P_2\| > \|t - P_2\|.$$

*Demostración:*

$$x, t \in [P_1, P_2] \Rightarrow$$

$$x = \alpha P_1 + (1-\alpha)P_2, t = \beta P_1 + (1-\beta)P_2 \quad \text{con } 0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1 \Rightarrow$$

$$\|x - P_1\| = \|\alpha P_1 + (1-\alpha)P_2 - P_1\| = (1-\alpha) \|P_2 - P_1\|$$

$$\|t - P_1\| = \|\beta P_1 + (1-\beta)P_2 - P_1\| = (1-\beta) \|P_2 - P_1\|$$

Por hipótesis:  $\|x - P_1\| < \|t - P_1\|$ , luego:  $1 - \alpha < 1 - \beta \Rightarrow \alpha > \beta$ , haciendo lo mismo que anteriormente:

$$\|x - P_2\| = \alpha \|P_2 - P_1\|; \|t - P_2\| = \beta \|P_2 - P_1\|, \text{ por lo tanto:}$$

$$\|x - P_2\| > \|t - P_2\|.$$

■

### **Proposición I.A.3:**

Sean  $x \in [P_1, P_2]$  y  $t \in \mathbf{R}^2$ . Se tiene:

$$\|x - P_1\| + \|x - P_2\| \leq \|t - P_1\| + \|t - P_2\|.$$

*Demostración:*

Consideremos dos casos: (i):  $t \in [P_1, P_2]$ ; (ii):  $t \notin [P_1, P_2]$ .

(i): De la Proposición I.A.1 tendríamos:

$$\|x - P_1\| + \|x - P_2\| = \|t - P_1\| + \|t - P_2\|$$

(ii): En este otro caso:  $x \in [t, P_1, P_2] \Rightarrow x = \alpha t + \beta P_1 + \lambda P_2$  con  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \lambda \geq 0, \alpha + \beta + \lambda = 1$ , así:

$$\begin{aligned} & \|x - P_1\| + \|x - P_2\| = \\ & \|\alpha t + \beta P_1 + \lambda P_2 - (\alpha + \beta + \lambda)P_1\| + \|\alpha t + \beta P_1 + \lambda P_2 - (\alpha + \beta + \lambda)P_2\| \leq \\ & \leq \alpha \|t - P_1\| + \lambda \|P_2 - P_1\| + \alpha \|t - P_2\| + \beta \|P_2 - P_1\| \leq \\ & \leq \alpha \|t - P_1\| + \lambda \|P_2 - t\| + \lambda \|t - P_1\| + \alpha \|t - P_2\| + \beta \|t - P_2\| + \beta \|t - P_1\| = \\ & = (\alpha + \beta - \lambda) \|t - P_1\| + (\alpha + \beta + \lambda) \|t - P_2\| = \\ & = \|t - P_1\| + \|t - P_2\|. \end{aligned}$$

■

**Proposición I.A.4:**

Sea  $x \in [P_1, P_2]$ ,  $y, t \in \mathbf{R}^2$ . Entonces se verifica:

o bien  $\|x - P_1\| \leq \|t - P_1\|$ , o bien,  $\|x - P_2\| \leq \|t - P_2\|$ .

*Demostración:*

Aplicando I.A.3, si fuese:  $\|x - P_1\| > \|t - P_1\|$ , y,

$\|x - P_2\| > \|t - P_2\|$  tendríamos:

$$\|x - P_1\| + \|x - P_2\| > \|t - P_1\| + \|t - P_2\|. \quad \blacksquare$$

### **Proposición I.A.5:**

Sea  $t \notin [P_1, P_2]$ , existe un subintervalo  $[x_1, x_2]$  contenido en  $[P_1, P_2]$  tal que si  $x \in [x_1, x_2]$ , entonces:

$$\|x - P_1\| \leq \|t - P_1\| \quad \text{y} \quad \|x - P_2\| \leq \|t - P_2\|.$$

*Demostración:*

$$t \notin [P_1, P_2] \Rightarrow \|t - P_1\| = r_1 \quad \text{y} \quad \|t - P_2\| = r_2$$

Sea  $x_1 \in [P_1, P_2]$  de forma tal que si  $x \in [P_1, x_1]$ , se verifique que  $\|x - P_1\| \leq r_1$  y, análogamente,

$x_2 \in [P_1, P_2]$  tal que si  $x \in [x_2, P_2]$  se cumpla que  $\|x - P_2\| \leq r_2$ .

Si no fuese posible tomar el  $x_1$  anterior dentro de  $[P_1, P_2]$  sería porque  $\forall x \in [P_1, P_2]$  tendríamos que:  $\|x - P_1\| \leq \|t - P_1\|$ , entonces  $\forall x \in [x_2, P_2]$  ya se verificaría la proposición.

Tomemos, entonces,  $I = [x_2, x_1]$ . Se tiene:

a)  $I \neq \emptyset$ , pues si  $I = \emptyset \Rightarrow y \in [x_2, x_1]$  es  $\|y - P_1\| > r_1$ , y,  $\|y - P_2\| > r_2 \Rightarrow \|y - P_1\| + \|y - P_2\| > \|t - P_1\| + \|t - P_2\|$  en contra de la proposición I.A.3.

b) Si  $x \in I \Rightarrow x \in [P_1, x_1]$ , y,  $x \in [x_2, P_2]$  y, por tanto, se verifica lo que queríamos. ■

**Teorema I.A.1:**

Sean  $P_1, P_2, \dots, P_m$  "m" puntos de  $\mathbf{R}^2$ , y  $\mathbf{X}$  la envolvente convexa de ellos. Si  $x^* \notin \mathbf{X}$ , existe al menos  $x \in \mathbf{X}$ , tal que

$$\|x - P_i\| \leq \|x^* - P_i\| \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, m.$$

*Demostración:*

En primer lugar, veamos que el teorema es cierto si los puntos  $P_1, P_2, \dots, P_m$  están alineados:

En efecto: Supongamos que el segmento  $[P_1, P_m]$  contiene a todos los puntos  $P_i$  y "ordenemos" los puntos  $P_i$  de tal forma que decimos que  $P_i \leq P_j$  si el punto mas próximo a  $P_1$  es el  $P_i$ , podemos, asimismo, suponer que el orden resultante es el mismo que el orden de los subindices.

(El orden que hemos establecido es el siguiente:

$$P_i - P_1 = \lambda_i (P_m - P_1) \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, m$$

Pues bien,  $P_i \leq P_j$  si  $\lambda_i \leq \lambda_j$ )

Según la propiedad I.A.5, dados  $P_1, P_i$ , existe un intervalo  $I_i = [x_1, x_i]$  tal que si  $x \in I_i$ , se verifica que :

$$\|x - P_1\| \leq \|x^* - P_1\|; \|x - P_i\| \leq \|x^* - P_i\|.$$

Puesto que hay un número finito de puntos  $P_i$ , tomemos  $J = I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_m$  que será un subintervalo de  $[P_1, P_m]$  y dentro de él, se verifica:

$$x \in J \Rightarrow x \in I_i \text{ para todo } i=1,2,\dots,m \Rightarrow \|x - P_i\| \leq \|x^* - P_i\|.$$

Procedamos, entonces, a la demostración cuando los puntos  $P_i$ , no están alineados:

Sabemos que  $\mathbf{X} \subset \mathbf{R}^2$  es convexo y cerrado.

Si  $x^* \notin \mathbf{X}$ , designemos por  $H$  al conjunto siguiente:

$$H = \{ s \in \mathbf{R}^2 / \|s - P_i\| \leq \|x^* - P_i\|, \quad i = 1,2,\dots,m \}$$

Entonces, puede suceder:  $H \cap \mathbf{X} \neq \emptyset$ , en cuyo caso el teorema estaría demostrado, o bien:

$$H \cap \mathbf{X} = \emptyset.$$

En este último caso, se tiene:

$H$  es cerrado,  $H \neq \emptyset$  puesto que  $x^* \in H$ , y,  $H$  es convexo ya que:  $x, y \in H$  y  $0 \leq \alpha \leq 1$  se tiene:

$$\begin{aligned} \|\alpha x + (1-\alpha)y - P_i\| &= \|\alpha(x - P_i) + (1-\alpha)(y - P_i)\| \leq \\ &\alpha\|x - P_i\| + (1-\alpha)\|y - P_i\| \leq \\ &\leq \alpha\|x^* - P_i\| + (1-\alpha)\|x^* - P_i\| \leq \|x^* - P_i\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, aplicando el Teorema de separación de Hahn-Banach, existe un hiperplano, T, que separa los conjuntos convexos  $\mathbf{X}$  y H.

Tomemos los segmentos  $[x^*, P_i]$ , evidentemente, estos segmentos contienen puntos de T, sean entonces  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$  los puntos de T comunes a los segmentos.

Por la Proposición I.A.1, tenemos:

$$\|x^* - P_i\| = \|x^* - Q_i\| + \|Q_i - P_i\|, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Por otra parte, T es el subespacio generado por los puntos  $Q_i$  y estos están alineados, luego aplicando lo demostrado en la primera parte de este teorema tendremos que existe

$$z \in T \quad / \quad \|z - Q_i\| \leq \|x^* - P_i\| \quad \text{para todo } i=1,2,\dots,m.$$

Así tendríamos:

$$\|x^* - P_i\| = \|x^* - Q_i\| + \|Q_i - P_i\| \geq \|z - Q_i\| + \|Q_i - P_i\| \geq \|z - P_i\|,$$

lo cual implica que  $z \in H$  que es absurdo.

Por tanto,  $H \cap \mathbf{X} \neq \emptyset$ . ■



Capítulo II:

DOMINANCIA EN REGIONES

POLIGONALES.

## II.1: INTRODUCCIÓN:

En el Capitulo anterior se ha estudiado lo siguiente: Dado un conjunto de "m" puntos del plano,  $\mathbf{P} = \{ P_1, P_2, \dots, P_m \}$  y un subconjunto S, de  $\mathbf{R}^2$ , determinar todos aquellos puntos,  $\mathbf{x}$ , de S para los cuales no existe otro punto,  $\mathbf{y} \in S$ , tal que:

$$\| \mathbf{x} - P_i \| \leq \| \mathbf{y} - P_i \| \text{ para todo } i=1,2,\dots,m.$$

A este conjunto de puntos se le denomina el conjunto de puntos no dominados de S respecto a los puntos  $P_1, P_2, \dots, P_m$  y a la norma  $\| \cdot \|$ .

Los resultados que obtuvimos se pueden resumir diciendo que este conjunto está formado por  $(S \cap \mathbf{X}) \cup (\text{Fr}(S) - \mathbf{X})$ .

En este capitulo seguiremos estudiando el mismo problema pero ahora supondremos que el conjunto factible, S, está constituido por una región poligonal convexa determinada por unos vértices  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ .

Llamaremos puntos eficientes a los puntos no dominados de  $S$ , por lo tanto el conjunto de puntos eficientes,  $E$ , será:

$$E = \{ x \in S / x \text{ es eficiente} \} =$$

$$\{ x \in S / x \text{ no está dominado por cualquier otro } y \in S \} =$$

$$\{ x \in S / \forall y \in S, \exists i=1,2,\dots,m \text{ con } \| y - P_i \| < \| x - P_i \| \}$$

## II.2: DETERMINACIÓN DE LOS PUNTOS EFICIENTES:

Las preferencias de cada uno de los centros afectados por la ubicación del centro peligroso son muy claras; los centros afectados prefieren como lugar de ubicación el punto mas alejado de S. En este sentido, tenemos la siguiente proposición:

### Proposición II.2.1:

Para cada punto fijo,  $P_i$ , existe un vértice de la poligonal, S, que es el punto mas alejado de él.

*Demostración:*

Sea:

$$x \in S \Rightarrow x = \sum_{j=1}^m \lambda_j Q_j, \quad \lambda_j \in [0, 1], \quad \sum_{j=1}^m \lambda_j = 1 \Rightarrow$$

$$\| x - P_i \| \leq \sum_{j=1}^m \lambda_j \| Q_j - P_i \| \leq \max_{1 \leq j \leq m} \| Q_j - P_i \| = \| Q_k - P_i \|^2$$

Por tanto, cada punto fijo,  $P_i$ , tiene asociado un vértice  $Q_{(i)}$  que es el punto de S mas alejado de dicho  $P_i$ , es decir, el punto preferido de  $P_i$ . ■

**Definición II.2.1:**

Un punto,  $x \in S$  se dice que es eficiente si no está dominado por ningún otro punto de  $S$ . Es decir, no existe ningún otro punto de  $S$  que sea mas preferido por todos los puntos afectados  $P_1, P_2, \dots, P_m$ .

**Proposición II.2.2:**

Si se verifica que

$$\| Q_1 - P_i \| \geq \| Q_2 - P_i \| \text{ para } i=1,2,\dots,m \quad (2.1)$$

entonces:

$$\| \lambda Q_1 + (1 - \lambda)Q_2 - P_i \| \leq \| Q_1 - P_i \|, i=1,2,\dots,m \quad (2.2)$$

*Demostración:*

$$\| \lambda Q_1 + (1 - \lambda)Q_2 - P_i \| \leq \lambda \| Q_1 - P_i \| + (1 - \lambda) \| Q_2 - P_i \|$$

$$\leq \| Q_1 - P_i \| \quad i = 1,2,\dots,m \quad \blacksquare$$

Obsérvese, que si en (2.1) al menos una de las desigualdades es estricta, entonces al menos una de las desigualdades de (2.2) también es estricta, para todo  $\lambda$  tal que  $0 < \lambda < 1$ .

**Proposición II.2.3:**

El conjunto de puntos eficientes contenido en un segmento,  $[Q_1, Q_2]$  es otro segmento y/o alguno de los vértices.

*Demostración:*

Si  $Q_1$  domina a  $Q_2$ , es decir, si:

$$\| Q_1 - P_i \| \geq \| Q_2 - P_i \|, i=1,2,\dots,m$$

con la desigualdad estricta para al menos un  $i$ , entonces por la proposición anterior,  $\lambda Q_1 + (1 - \lambda) Q_2$  con  $\lambda \in (0, 1)$ , es dominado por  $Q_1$  con al menos una desigualdad estricta. Por tanto el único punto del segmento  $[Q_1, Q_2]$  que puede ser eficiente, es el punto  $Q_1$ .

En el caso general, sean:

$$I_1 = \{ i ; \| Q_1 - P_i \| > \| Q_2 - P_i \| \}$$

$$I_2 = \{ i ; \| Q_1 - P_i \| \leq \| Q_2 - P_i \| \}$$

$$r_k = \| Q_1 - P_k \|.$$

Como la norma es una función convexa, se tiene que el conjunto:

$$A_k = \{ x \in \mathbf{R}^2 / \| x - P_k \| \leq r_k \}$$

es un conjunto convexo. Por tanto, el conjunto:

$$C = \bigcap_{i \in I_2} \{ A_i \}$$

es también convexo. Además  $Q_1 \in A_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , y así:

$$[ Q_1, Q_2 ] \cap C$$

es un segmento que contiene al vértice  $Q_1$ .

En consecuencia, para todo punto  $x \in [ Q_1, Q_2 ] \cap C$  y  $x \neq Q_1$ , se tiene que

$$\text{si } i \in I_2 \text{ es } \| x - P_i \| \leq r_i = \| Q_1 - P_i \|,$$

y de la proposición anterior tenemos

$$\| x - P_i \| < \| Q_1 - P_i \| \text{ para todo } i \in I_1,$$

ya que hemos dicho que  $x \in [ Q_1, Q_2 ]$  y, respecto a los puntos  $P_i$  tales que  $i \in I_1$  el punto  $Q_1$  domina al punto  $Q_2$ . Por lo tanto, el punto  $x$  está dominado por el punto  $Q_1$  con alguna de las desigualdades estricta, es decir, el punto  $x$  es no eficiente.

De manera análoga se obtiene un conjunto de puntos (segmento) dominados por  $Q_2$ , quedando así un segmento de puntos eficientes, contenidos en el segmento  $[Q_1, Q_2]$ .

Para entender el significado de ésta proposición, se puede ver la figura II.1 que ilustra como se consigue el conjunto de puntos no dominados contenidos en el segmento  $[ Q_1, Q_2 ]$ , donde los puntos  $Q_{(1)}$  y  $Q_{(2)}$  son los denominados *equivertices*, es decir, los puntos del segmento  $[ Q_1, Q_2 ]$  que distan, desde  $P_1$  y  $P_2$  lo mismo que  $Q_1$  y  $Q_2$ , respectivamente.

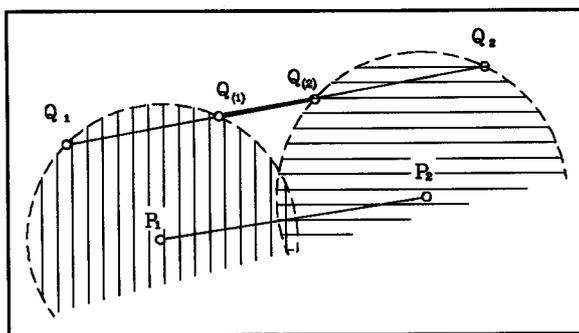


Fig.: II.1

En dicha figura se observa como el subsegmento del segmento  $[Q_1, Q_2]$  de puntos no dominados es el segmento  $[Q_{(1)}, Q_{(2)}]$ .

### II.3: ALGORITMO DE CONSTRUCCIÓN DE LOS PUNTOS EFICIENTES EN LA FRONTERA DE S

A continuación presentamos un algoritmo para determinar los equivértices, en el caso de la distancia euclídea. vamos a tratar de construir los segmentos de puntos eficientes. Entendemos por **equivértice** los puntos,  $x$ , del segmento

$[Q_1, Q_2]$  que verifican:

$$\| Q_1 - P_k \| = \| x - P_k \|$$

siendo  $x$  el punto extremo del segmento  $[ Q_1, Q_2 ] \cap C$  mas próximo a  $Q_1$ .

#### ALGORITMO:

*Paso 0:* Poner  $k = 1$ .

*Paso I.-* **Determinar** el conjunto:

$$I_k = \{ i ; \| Q_k - P_i \| \leq \| Q_{k+1} - P_i \| \}$$

*Paso II.-* Si  $I_k \neq \emptyset$  y  $\text{adh}(I_k) \neq \emptyset$  entonces ir al paso siguiente.

En otro caso, parar. Según sea  $I_k = \emptyset$  ó  $\text{adh}(I_k) = \emptyset$ , el punto eficiente del lado  $Q_k Q_{k+1}$  será el vértice  $Q_k$  ó  $Q_{k+1}$ .

Ir al paso I con  $k = k + 1$ .

*Paso III.-* Determinar para todo  $i \in I_k$

$$\lambda_i = \text{Máx} \left[ 0, 2 \frac{(Q_{k+1} - Q_k)(P_i - Q_k)}{|Q_{k+1} - Q_k|^2} \right]$$

y para todo  $j \in \text{adh}(I_k)$

$$\mu_j = \text{Máx} \left[ 0, 2 \frac{(Q_k - Q_{k+1})(P_j - Q_{k+1})}{|Q_{k+1} - Q_k|^2} \right]$$

*Paso IV.-* Determinar

$$\lambda = \text{Mín}_i \lambda_i, \quad \mu = \text{Mín}_j \mu_j$$

El segmento determinado por los puntos

$$E_1 = \lambda Q_{k+1} + (1 - \lambda)Q_k$$

$$E_2 = \mu Q_k + (1 - \mu)Q_{k+1}$$

es el conjunto de puntos eficientes del lado  $Q_k Q_{k+1}$  junto con sus vértices  $Q_k$  y  $Q_{k+1}$

*Paso V:* Si  $k = m$  parar. En otro caso ir al paso I con  $k = k+1$ .

□

Hasta ahora hemos determinado los puntos eficientes que están en la frontera de  $S$ . Ahora podemos conseguir una reducción de puntos dominados si utilizamos los resultados obtenidos en el Capítulo I, en especial el siguiente:

Si  $X$  es la envolvente convexa de los puntos  $P_1, P_2, \dots, P_m$  y  $X$  está contenido en  $S$ . Entonces si  $x$  es un punto interior del conjunto  $S - X$ , existe un punto de la frontera de  $S$  que lo domina.

**Comentario:**

En el caso de la distancia euclídea todos los puntos de  $X$  son eficientes. Sin embargo, en el caso de la distancia rectangular, pueden haber en  $X$  puntos no dominados, como se comprueba en el ejemplo de la Fig: II.2.

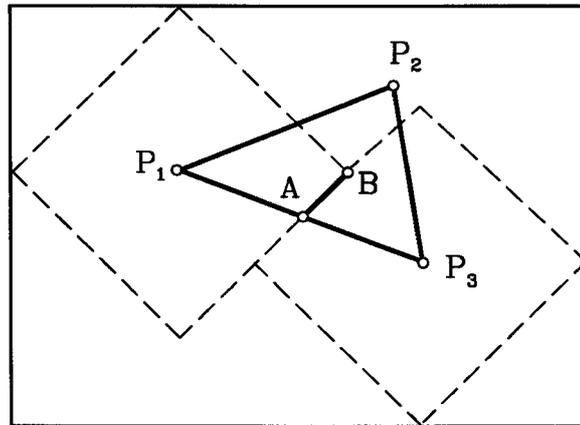


Fig.: II.2

Por otra parte, como estamos resolviendo un problema de localización multicriterio, donde las funciones objetivo son:

$$g_i(x) = d(x, P_i) = \|x - P_i\|, \quad i=1,2,\dots,n$$

podía pensarse en utilizar el siguiente resultado (ver Roy y Vincke) para caracterizar y determinar los puntos eficientes, dados el conjunto de acciones S y el conjunto de criterios:

$$(g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)).$$

**Teorema II.3.1:**

Una condición suficiente para que un punto,  $x \in \mathbf{R}^2$ , sea eficiente es que existan "m" constantes positivas,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , tales que "x" maximice la función:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$$

en S.

Sin embargo, como las funciones objetivo,  $g_i(x)$  son convexas, las soluciones de los problemas de la forma:

$$\text{Máx}_{x \in S} \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) \quad (2.3)$$

constituyen un subconjunto del conjunto de vértices de  $S$ , por lo que el resultado anterior no tiene aquí ningún interés. Asimismo, la condición suficiente que nos proporciona el Teorema II.3.1, no es una condición necesaria, ya que el conjunto de  $\mathbf{R}^n$  en el que se transforma el conjunto  $S$  mediante la transformación:

$$Z_i = g_i(x)$$

no es un conjunto convexo como puede comprobarse con el ejemplo que aparece en la figura II.3 y su transformado en la figura II.4. El punto  $T$  es eficiente y, en cambio, no aparece como una solución de problemas del tipo (2.3).

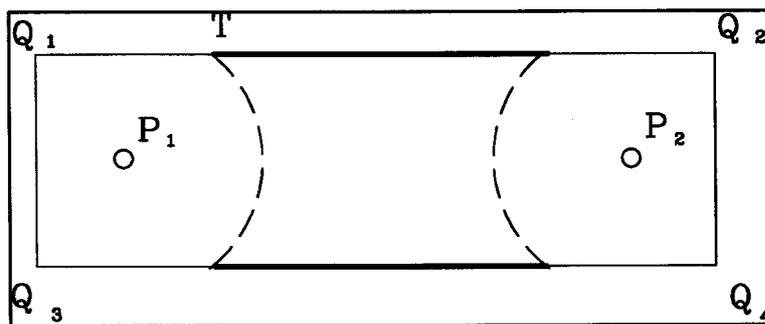


Fig.: II.3

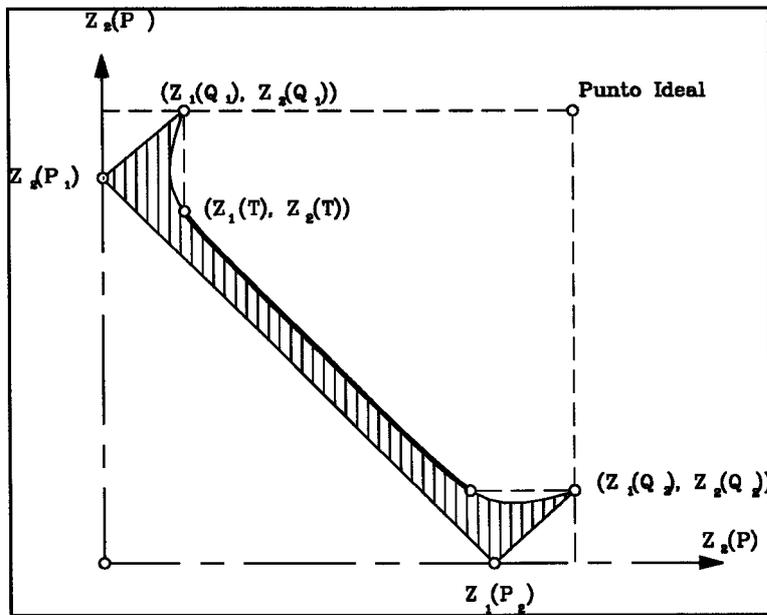


Fig.: II.4



Capítulo III:

PROBLEMA GENERAL DE

LOCALIZACION DE

CENTROS PELIGROSOS

### III.1: INTRODUCCIÓN:

El problema de Localización de Centros no Deseados (o problema de Localización de Centros Peligrosos) se plantea en los términos siguientes:

Sea  $\| \cdot \|$  una norma sobre  $\mathbf{R}^2$ , S un subconjunto cerrado y acotado de  $\mathbf{R}^2$  y los puntos  $P_1, P_2, \dots, P_m$  del plano. Si  $D_i; i = 1, 2, \dots, m$  son "m" funciones de  $\mathbf{R}$  en  $\mathbf{R}^+$  continuas y decrecientes, se trata de encontrar el punto o puntos de S tales que hacen mínimas las siguientes funciones:

Antiproblema de Rawls:

$$H(s) = \max_{1 \leq i \leq m} D_i( \|s - P_i\| )$$

Antiproblema de Weber:

$$E(s) = \sum_{i=1}^m D_i( \|s - P_i\| )$$

Las funciones  $D_i$  se denominan *funciones de molestia* sobre cada punto  $P_i$  y las funciones  $H(s)$  y  $E(s)$  son las *funciones de molestias totales* de Rawls

y Weber respectivamente.

En los problemas usuales las funciones  $D_i$  son funciones lineales de la forma:

$$D_i(x) = a - b_i x \quad \text{con } a > 0, b_i > 0 \quad i=1,2,\dots,m$$

y los enunciados quedarían de la siguiente forma:

Antiproblema de Rawls: (Problema maximin)

$$\max_{x \in S} \min_{1 \leq i \leq m} b_i \|x - P_i\|$$

Antiproblema de Weber: (Problema maxisum)

$$\max_{x \in S} \sum_{i=1}^m b_i \|x - P_i\|$$

Evidentemente, puesto que las funciones  $D_i$  son continuas en  $S$  (cerrado y acotado) todos los problemas aquí enunciados tienen solución.

El problema que nos plantearemos en este Capítulo será el de dar un nuevo enfoque de forma tal que en un solo problema abarquemos los dos problemas en su forma lineal así como otros muchos que nos podrían ser de utilidad.

### III.2: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA:

#### Definición III.2.1:

Se denomina permutación del conjunto:  $\{1,2,\dots,m\}$  a toda aplicación,  $\sigma$ , biyectiva de dicho conjunto en sí mismo.

Sea ahora  $\| \cdot \|$  una norma cualquiera sobre  $\mathbf{R}^2$ ,  $S \subset \mathbf{R}^2$  un conjunto cerrado y acotado,  $P_1, P_2, \dots, P_m$  "m" puntos de  $\mathbf{R}^2$  y  $b_i$   $i=1,2,\dots,m$  "m" números reales no negativos.

Definimos la función:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) b_i \|x - P_i\| \quad (3.1)$$

donde  $\lambda_i(x)$  son funciones de  $\mathbf{R}^2$  en  $\mathbf{R}$  definidas de la siguiente forma:

Sea  $x \in S$ ,  $k_i$   $i=1,2,\dots,m$  y,  $\sigma$ , la permutación de  $\{1,2,\dots,m\}$  que verifica:

$$b_{\sigma(1)} \|x - P_{\sigma(1)}\| \leq b_{\sigma(2)} \|x - P_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq b_{\sigma(m)} \|x - P_{\sigma(m)}\|$$

Entonces

$$\lambda_j(x) = k_j \quad \text{si} \quad b_j \|x - P_j\| \text{ ocupa el lugar } j\text{-ésimo en la}$$

sucesión anterior.

El problema de Localización de Centros Peligrosos o Centros no

Deseados lo enunciaremos de la siguiente forma:

$$\max_{x \in S} \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) b_i \|x - P_i\| = \max_{x \in S} f(x)$$

O lo que es lo mismo:

$$\max_{x \in S} \sum_{i=1}^m k_i b_{\sigma(i)} \|x - P_{\sigma(i)}\|$$

Obsérvese lo siguiente:

Cuando  $k_1 = 1$  para todo  $i=1,2,\dots,m$  obtenemos el Problema lineal de Weber.

Cuando  $k_1 = 1$  y  $k_i = 0$  para todo  $i \neq 1$  se obtiene el Problema lineal de Rawls.

Además, el enunciado anterior nos podría cubrir innumerables tipos de problemas más, como por ejemplo:

Si  $k_l = 1$  y  $k_i = 0$  para  $i \neq l$  podríamos enunciar el problema como encontrar la ubicación del centro de manera tal que sea máxima la población que ocupa el lugar  $l$ -ésimo de afectación por la función  $f(x)$ .

Del mismo modo, el enunciado anterior, nos cubre problemas de tipo multicriterio tales como el siguiente:

Tomando como  $h(x)$  la función del problema lineal de Rawls y como

$g(x)$  la del problema de Weber, maximizar la función:

$$F(x) = \alpha h(x) + (1 - \alpha) g(x), \text{ para } \alpha \in [0, 1]$$

es decir, combinaciones lineales convexas de los dos criterios mas usuales, lo que nos permitirá estudiar un amplio abanico de problemas.

.....

La función  $f(x)$  debe tener sentido, es decir, debe ser unívoca para cada valor del punto  $x \in S$ , en este sentido tenemos la proposición siguiente:

**Proposición III.2.1:**

La función  $f(x)$  está bien definida.

*Demostración:*

En efecto, si:

$$b_{\sigma(j)} \|x - P_{\sigma(j)}\| < b_{\sigma(j+1)} \|x - P_{\sigma(j+1)}\|$$

entonces la asignación de los  $k_j$  es única.

Si, por el contrario

$$b_{\sigma(j)} \|x - P_{\sigma(j)}\| = b_{\sigma(j+1)} \|x - P_{\sigma(j+1)}\|$$

el valor de la función no sufre alteración si consideramos en la sucesión situado en primer lugar el  $\sigma(j)$  o el  $\sigma(j + 1)$ . ■

### III.3: PRIMERAS PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN $f(\mathbf{x})$ :

#### Proposición III.3.1:

En general, la función  $f(\mathbf{x})$  no es convexa.

*Demostración:*

Consideremos  $\| \cdot \|$  la norma euclídea por ejemplo.

Sean  $b_1 = b_2 = 1$  y  $k_1 = 1, k_2 = 0$ . consideremos la figura III.1, donde se aprecia:

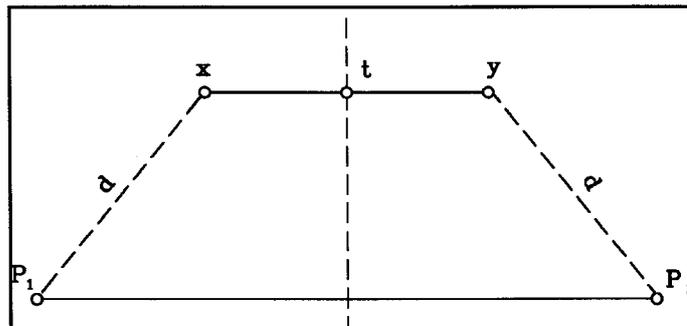


Fig.: III.1

la recta que contiene al segmento  $[x, y]$  es paralela al segmento:  $[P_1, P_2]$ , además:

$$\|x - P_1\| = \|y - P_2\|.$$

Tomemos, por último:  $t = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ .

Así, tenemos:

$$f(x) = \|x - P_1\| = \|y - P_2\| = f(y)$$

Por otra parte:

$$f(t) = \|t - P_1\| = \|t - P_2\|$$

y, por tanto:  $f(t) > f(x); \quad f(t) > f(y)$

Ahora bien:

$$f(t) = f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) = \|t - P_1\| > \|x - P_1\| =$$

$$= \frac{1}{2} \|x - P_1\| + \frac{1}{2} \|x - P_1\| =$$

$$= \frac{1}{2} \|x - P_1\| + \frac{1}{2} \|y - P_2\| = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y)$$

Por lo tanto,  $f(x)$  no es convexa.

**Lema III.3.1:**

Sean  $a_1, a_2, \dots, a_m$  números reales tales que:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m$$

y  $b_1, b_2, \dots, b_m$  otra sucesión de números reales tales que:

$$| a_i - b_i | < \varepsilon \quad i=1,2,\dots,m$$

Si  $\sigma$  es la permutación del conjunto  $\{ 1,2,\dots,m \}$  que hace que:

$$b_{\sigma(1)} \leq b_{\sigma(2)} \leq \dots \leq b_{\sigma(m)}, \text{ entonces}$$

$$| a_i - b_{\sigma(i)} | < \varepsilon, \text{ para todo } i=1,2,\dots,m$$

*Demostración:*

Procedemos por inducción:

En el caso  $k = 1$ , la propiedad es trivial.

Supongamos que el lema es cierto para  $k = m - 1$  y veámoslo para  $k = m$ :

Tomemos la sucesión:  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m$  y  $b_1, b_2, \dots, b_m$  verificando que:

$$| a_i - b_{\sigma(i)} | < \varepsilon \quad i = 1,2, \dots, m$$

Si elegimos los términos de la sucesión  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{m-1}$  y los términos:  $b_1, b_2, \dots, b_{m-1}$ , por hipótesis de inducción se verifica que si " $v$ " es la permutación de los elementos del conjunto  $\{ 1, 2, \dots, m-1 \}$  que establece:

$$b_{v(1)} \leq b_{v(2)} \leq \dots \leq b_{v(m-1)},$$

entonces, se verifica:

$$| a_i - b_{v(i)} | < \varepsilon \text{ para } i = 1, 2, \dots, m-1$$

Si ahora añadimos a nuestras sucesiones los elementos  $a_m, b_m$ , entonces se tiene:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m \text{ y}$$

$$b_{v(1)} \leq b_{v(2)} \leq \dots \leq b_{v(k)} \leq b_m \leq b_{v(k)} \leq \dots \leq b_{v(m-1)} \text{ y}$$

$$| a_i - b_{v(i)} | < \varepsilon \text{ para } i = 1, 2, \dots, k$$

Por otra parte:

$$\text{si } a_{k+1} \geq b_m \text{ entonces, } | a_{k+1} - b_m | = a_{k+1} - b_m \leq a_m - b_m < \varepsilon \text{ y,}$$

$$\text{si } a_{k+1} < b_m \text{ entonces, } | a_{k+1} - b_m | = b_m - a_{k+1} \leq b_{v(k+1)} - a_{k+1} < \varepsilon$$

$$\text{Por lo tanto } | a_{k+1} - b_m | < \varepsilon$$

En cuanto al resto de los términos es:

Para  $m-1 > i > k+1$  resulta que

$$| a_{i+1} - b_{v(i)} | = a_{i+1} - b_{v(i)} \leq a_{i+1} - b_m \leq a_m - b_m < \varepsilon \text{ o bien}$$

$$= b_{v(i)} - a_{i+1} \leq b_{v(i+1)} - a_{i+1} < \varepsilon$$

Por último:

$$| a_m - b_{v(m-1)} | = a_m - b_{v(m-1)} \leq a_m - b_m \leq \varepsilon, \text{ o bien}$$

$$= b_{v(m-1)} - a_m \leq b_{v(m-1)} - a_{m-1} < \varepsilon$$

Por tanto, el resultado está probado puesto que es:

$$\sigma(i) = v(i) \text{ para } i=1,2,\dots,k$$

$$\sigma(k+1) = m$$

$$\sigma(i) = v(i-1) \text{ para } i=k+2,\dots,m$$

■



### Teorema III.3.1:

La función  $f(x)$  definida en (3.1) es continua.

*Demostración:*

Sea  $x_0 \in \mathbf{R}^2$  y veamos que  $f(x)$  es continua en  $x_0$ :

Puesto que la norma es una función continua, tendremos que dado  $\varepsilon > 0$ , existen  $\delta_i$  positivos tales que si  $\|x - x_0\| < \delta_i$  se verifica que:

$$| b_i \| x - P_i \| - b_i \| x_0 - P_i \| | < \frac{\varepsilon}{km}$$

donde  $k = \max (k_1, k_2, \dots, k_m)$

Tomemos, entonces,  $\delta = \min (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$ , y,  $x \in \mathbf{R}^2$  tal que  $\|x - x_0\| < \delta$ , puesto que  $\delta \leq \delta_i$ ,  $i=1,2,\dots,m$  será:

$$| b_i \| x - P_i \| - b_i \| x_0 - P_i \| | < \frac{\varepsilon}{km}$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que la permutación que ordena las normas en el punto  $x_0$  es la identidad, es decir:

$$b_1 \|x_0 - P_1\| \leq b_2 \|x_0 - P_2\| \leq \dots \leq b_m \|x_0 - P_m\|$$

en tal caso, se tiene:

$$f(x_0) = k_1 b_1 \|x_0 - P_1\| + k_2 b_2 \|x_0 - P_2\| + \dots + k_m b_m \|x_0 - P_m\|$$

Sea ahora  $\sigma$  la permutación tal que:

$$b_{\sigma(1)} \|x - P_{\sigma(1)}\| \leq b_{\sigma(2)} \|x - P_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq b_{\sigma(m)} \|x - P_{\sigma(m)}\|$$

Por el Lema anterior:

$$| b_i \|x_0 - P_i\| - b_{\sigma(i)} \|x - P_{\sigma(i)}\| | < \varepsilon/km.$$

Por tanto, si  $\|x - x_0\| < \delta$ , se verificará:

$$\begin{aligned}
 & |f(x) - f(x_0)| \leq \\
 & k_1 |b_1 \|x_0 - P_1\| - b_{\sigma(1)} \|x - P_{\sigma(1)}\| | + k_2 |b_2 \|x_0 - P_2\| - b_{\sigma(2)} \|x - P_{\sigma(2)}\| | + \dots \\
 & + \dots + k_m |b_m \|x_0 - P_m\| - b_{\sigma(m)} \|x - P_{\sigma(m)}\| | \leq \\
 & \leq k \left( \frac{\varepsilon}{km} + \dots + \frac{\varepsilon}{km} \right) = \varepsilon
 \end{aligned}$$

■

**Corolario III.3.1:**

Sea  $S \subset \mathbf{R}^2$  un subconjunto compacto de  $\mathbf{R}^2$ , entonces el problema general de localización de centros no deseados tiene siempre solución en  $S$ .

*Demostración:*

El resultado es trivial por ser la función  $f(x)$  definida en (3.1) continua en un conjunto cerrado y acotado.

### III.4: COMPORTAMIENTO DE LA FUNCIÓN "f(x)" ANTE LA DOMINANCIA:

Como ya indicábamos en el Capítulo I, es deseable que para que un criterio sobre localización de Centros no deseados esté "coherentemente definido" debe llevar implícito que si un punto domina a otro, el dominante debe ser "mejor" que el dominado.

El criterio que hemos definido es, en éste sentido, coherente como lo muestra la siguiente proposición:

#### Proposición III.4.1:

Sean  $x$  e  $y$  dos puntos de  $\mathbf{R}^2$  tales que

$$\|x - P_i\| \leq \|y - P_i\| ; i = 1, 2, \dots, m$$

Entonces se verifica que:

$$f(x) \leq f(y)$$

*Demostración:*

Para proceder a la demostración, veamos previamente el siguiente resultado:

**Lema III.4.1:**

Supongamos que:

$$b_1 \|x - P_1\| \leq b_2 \|x - P_2\| \leq \dots \leq b_m \|x - P_m\|$$

y que  $y \in \mathbf{R}^2$  es tal que  $\|x - P_i\| \leq \|y - P_i\|$  para todo  $i=1,2,\dots,m$  y que se verifica que

$$b_{\sigma(1)} \|y - P_{\sigma(1)}\| \leq b_{\sigma(2)} \|y - P_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq b_{\sigma(m)} \|y - P_{\sigma(m)}\|,$$

entonces

$$b_i \|x - P_i\| \leq b_{\sigma(i)} \|y - P_{\sigma(i)}\| \text{ para } i = 1,2,\dots,m$$

*Demostración:*

Procedemos por inducción:

El resultado es trivialmente cierto para  $k=1$ .

Supongamoslo cierto para  $k = m - 1$  y veámoslo para  $k = m$

Sean  $x,y \in \mathbf{R}^2$  con  $\|x - P_i\| \leq \|y - P_i\|$ ,  $i=1,2,\dots,m$  y tales que:

$$b_1 \|x - P_1\| \leq b_2 \|x - P_2\| \leq \dots \leq b_{k-1} \|x - P_{k-1}\| \leq b_k \|x - P_k\| \leq$$

$$\leq b_{k+1} \|x - P_{k+1}\| \leq \dots \leq b_m \|x - P_m\| \quad y$$

$$b_{\sigma(1)}\|y - P_{\sigma(1)}\| \leq b_{\sigma(2)}\|y - P_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq b_{\sigma(k-1)}\|y - P_{\sigma(k-1)}\| \leq b_{\sigma(k)}\|y - P_{\sigma(k)}\| \leq$$

$$\leq b_{\sigma(k+1)}\|y - P_{\sigma(k+1)}\| \leq \dots \leq b_{\sigma(m)}\|y - P_{\sigma(m)}\|$$

Si  $\sigma(m) = k$ , aplicamos la hipótesis de inducción y resulta

$$b_i\|x - P_i\| \leq b_{\sigma(i)}\|y - P_{\sigma(i)}\| \quad \text{para } i=1,2,\dots,k-1$$

$$b_{i+1}\|x - P_{i+1}\| \leq b_{\sigma(i)}\|y - P_{\sigma(i)}\| \quad \text{para } i=k, k+1,\dots,m-1$$

Ahora, si  $i = k, k+1, \dots, m-1$  se tiene:

$$b_{i+1}\|x - P_{i+1}\| \leq b_{\sigma(i)}\|y - P_{\sigma(i)}\| \leq b_{\sigma(i+1)}\|y - P_{\sigma(i+1)}\|.$$

Por último:

$$b_k\|x - P_k\| \leq b_{k+1}\|x - P_{k+1}\| \leq b_{\sigma(k)}\|y - P_{\sigma(k)}\|$$



Continuemos, entonces, con la demostración del teorema.

Tenemos que:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m k_i b_i \|x - P_i\| \quad y \quad f(y) = \sum_{i=1}^m k_i b_{\sigma(i)} \|y - P_{\sigma(i)}\|$$

$$\text{con } b_i \|x - P_i\| \leq b_{i+1} \|x - P_{i+1}\| \quad i=1,2,\dots,m \quad y$$

$$b_{\sigma(i)} \|y - P_{\sigma(i)}\| \leq b_{\sigma(i+1)} \|y - P_{\sigma(i+1)}\| \quad i=1,2,\dots,m$$

$$y \quad b_i \|x - P_i\| \leq b_i \|y - P_i\| \quad i=1,2,\dots,m$$

Luego, aplicando el lema anterior, tenemos:

$$b_i \|x - P_i\| \leq b_{\sigma(i)} \|y - P_{\sigma(i)}\| \quad \text{para } i=1,2,\dots,m$$

y, por lo tanto:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m k_i b_i \|x - P_i\| \leq \sum_{i=1}^m k_i b_{\sigma(i)} \|y - P_{\sigma(i)}\| = f(y)$$

■

**Comentario:**

A partir de este resultado, son pues, aplicables los obtenidos en el Capitulo I y II respecto a dominancia.

En este sentido, tenemos que existen soluciones del problema general de localización de centros no deseados que están o bien en  $\mathbf{X}$  o bien en  $\text{Fr}(S - \mathbf{X})$ , y, también el obtenido en el Capitulo II para regiones poligonales.

### III.5: CONDICIONES DE EQUIDISTANCIA:

En este apartado estudiamos mas a fondo qué otras propiedades verifican las soluciones del problema general, además de las ya expresadas en anteriores capítulos.

#### Proposición III.5.1:

Si  $\| \cdot \|$  es una norma tal que las circunferencias (es decir, los conjuntos de puntos:  $\{ x \in \mathbf{R}^2; \| x - P \| = a \}$  donde  $P \in \mathbf{R}^2$  es un punto fijo, y "a" es un número real positivo) no contienen segmentos, entonces para cada subconjunto abierto y no vacío,  $U \subset \mathbf{R}^2$ , y cada punto fijo,  $P \in \mathbf{R}^2$ , existen  $x, y \in U$ ,  $y \neq x$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}$  con  $0 < \alpha < 1$  tales que:

$$\| \alpha x + (1 - \alpha)y - P \| < \alpha \| x - P \| + (1 - \alpha)\| y - P \|.$$

*Demostración:*

Sea  $x \in U$  y  $x \neq P$ , por ser  $U$  abierto, sabemos que existe  $\rho > 0$  tal que  $B = B(x, \rho) \subset U$ .

Consideramos la circunferencia

$$L = \{ y \in \mathbf{R}^2; \| y - P \| = \| x - P \| \}.$$

Se tiene:

$L \cap B \neq \emptyset$  puesto que  $x \in L$  y, obviamente,  $x \in B$ . Además, puesto que la función:  $\varphi(y) = \| y - P \|$  es continua, existe  $y \in L$  tal que  $y \in B$  con

$y \neq x$ .

Tomemos

$$[x, y] \not\subset L \quad \text{y} \quad [x, y] \subset B \subset U$$

ya que  $B = B(x, \rho)$  es un conjunto convexo.

Por lo tanto, existe  $z \in [x, y] \subset U$  tal que  $z \notin L$ .

Así

$z = \alpha x + (1 - \alpha)y$  con  $0 < \alpha < 1$  y puesto que la norma es una función convexa:

$$\|\alpha x + (1 - \alpha)y - P\| \leq \alpha\|x - P\| + (1 - \alpha)\|y - P\| = \|x - P\|$$

Pero, puesto que  $z \notin L$  la igualdad no puede darse, por tanto, es:

$$\|\alpha x + (1 - \alpha)y - P\| < \alpha\|x - P\| + (1 - \alpha)\|y - P\|$$

■

### Proposición III.5.2:

Sea  $\| \cdot \|$  una norma que verifica las condiciones de la anterior proposición, y  $g(x)$  la función siguiente:

$$g(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \|x - P_i\| \quad \text{con} \quad \lambda_i \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i > 0$$

entonces, la función,  $g(x)$ , no es constante en cualquier abierto de  $\mathbf{R}^2$ .

*Demostración:*

Sea  $U \subset \mathbf{R}^2$ , puesto que  $\sum \lambda_i > 0$  y  $\lambda_i \geq 0$ ,  
 existe  $j = 1, 2, \dots, m$  tal que  $\lambda_j > 0$ .

Tomemos, entonces,  $x \in U$  y  $x \neq P_j$ ; por la proposición anterior, sabemos  
 que existe  $y \in U$  y  $\alpha$  con  $0 < \alpha < 1$  tales que:

$$\|\alpha x + (1 - \alpha)y - P_j\| < \alpha\|x - P_j\| + (1 - \alpha)\|y - P_j\|$$

Si  $g(x) \neq g(y)$ , la proposición estaría probada.

Supongamos entonces que  $g(x) = g(y)$ .

En este caso, teniendo en cuenta que para  $i = j$  la desigualdad es estricta,  
 se obtiene:

$$\begin{aligned} g(\alpha x + (1 - \alpha)y) &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \|\alpha x + (1 - \alpha)y - P_i\| < \\ &< \sum_{i=1}^m \lambda_i (\alpha \|x - P_i\| + (1 - \alpha)\|y - P_i\|) = \\ &= \alpha \sum_{i=1}^m \lambda_i \|x - P_i\| + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^m \lambda_i \|y - P_i\| = \sum_{i=1}^m \lambda_i \|x - P_i\| = g(x) \end{aligned}$$

Luego existe  $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$  con  $z \in U$  y tal que  $g(z) \neq g(x)$



**Teorema III.5.1**

Sea  $\| \cdot \|$  una norma para la cual las circunferencias no tienen segmentos. Entonces, los posibles óptimos de la función objetivo,  $f(x)$ , interiores a  $S$  son necesariamente puntos para los cuales existen  $i, j = 1, 2, \dots, m$  tales que:

$$b_i \| x - P_i \| = b_j \| x - P_j \|$$

*Demostración:*

En efecto, sea  $x_0$  un óptimo de la función:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) b_{\sigma(i)} \| x - P_{\sigma(i)} \|$$

donde:

$$b_{\sigma(1)} \| x_0 - P_{\sigma(1)} \| \leq b_{\sigma(2)} \| x_0 - P_{\sigma(2)} \| \leq \dots \leq b_{\sigma(m)} \| x_0 - P_{\sigma(m)} \|$$

y, supongamos que tenemos:

$$b_{\sigma(1)} \| x_0 - P_{\sigma(1)} \| < b_{\sigma(2)} \| x_0 - P_{\sigma(2)} \| < \dots < b_{\sigma(m)} \| x_0 - P_{\sigma(m)} \|$$

Entonces, por la continuidad de la norma, existe un entorno,  $U$ , de  $x_0$  donde se verificará:

$$b_{\sigma(1)} \| x - P_{\sigma(1)} \| \leq b_{\sigma(2)} \| x - P_{\sigma(2)} \| \leq \dots \leq b_{\sigma(m)} \| x - P_{\sigma(m)} \|; \quad \forall x \in U.$$

Luego para todo  $x \in U$  será:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) b_{\sigma(i)} \|x - P_{\sigma(i)}\| \Rightarrow$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^m k_i b_{\sigma(i)} \|x - P_{\sigma(i)}\|$$

o bien, llamando:  $\mu_i = k_i b_{\sigma(i)}$ , la podemos escribir como

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \mu_i \|x - P_i\| \quad \forall x \in U$$

Tomemos ahora  $x \in U$  y  $B(x_0, r) \subset U$  con  $r > 0$ .

Puesto que  $B(x_0, r)$  es un conjunto convexo, existen  $y \in B(x_0, r)$  y  $\alpha > 1$  tales que:

$$x = \alpha x_0 + (1 - \alpha)y,$$

por lo tanto:

$$x_0 = \frac{1}{\alpha} x + \frac{\alpha - 1}{\alpha} y \Rightarrow$$

$$\|x - P_i\| = \left\| \frac{1}{\alpha} x + \frac{\alpha - 1}{\alpha} y - P_i \right\| = \left\| \frac{1}{\alpha} (x - P_i) + \frac{\alpha - 1}{\alpha} (y - P_i) \right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha} \|x - P_i\| + \frac{\alpha - 1}{\alpha} \|y - P_i\|$$

En consecuencia,

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^m \mu_i \|x_0 - P_i\| \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^m \mu_i \|x - P_i\| + \frac{\alpha-1}{\alpha} \sum_{i=1}^m \mu_i \|y - P_i\| =$$

(puesto que  $x_0$  era un óptimo para la función  $f(x)$  )

$$= \frac{1}{\alpha} f(x) + \frac{\alpha-1}{\alpha} f(y) \leq \frac{1}{\alpha} f(x) + \frac{\alpha-1}{\alpha} f(x_0)$$

Así, se tiene:  $f(x_0) \leq f(x)$ , pero usando otra vez el hecho de ser  $x_0$  un óptimo deberá ser:  $f(x) = f(x_0)$  para todo  $x \in U$ , es decir: la función:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \mu_i \|x - P_i\|$$

es constante en el entorno  $U$ , lo cual contradice la proposición III.5.2.

Por lo tanto, si un punto interior al conjunto de oportunidades o conjunto factible,  $S$ , es solución de nuestro problema para una norma con las condiciones antes expresadas, necesariamente debe cumplirse que alguna de las desigualdades debe saturarse en ese punto. ■

**Comentario:**

En primer lugar, debemos hacer notar que las restricciones impuestas en el teorema son necesarias como se demuestra con el siguiente ejemplo:

Si tomamos sobre  $\mathbf{R}^2$  la norma  $L_1$  o norma rectangular, los puntos  $P_1$  y  $P_2$  y el conjunto  $S$  como en la figura III.2, y la función  $f(x)$  definida como

$$f(x) = \|x - P_1\| + \|x - P_2\|$$

podemos apreciar que tomados dos puntos cualesquiera  $x, y \in S$  es  $f(x) = f(y)$  ya que el valor de  $f(x)$  se correspondería con la longitud de la quebrada en trazo continuo y el de  $f(y)$  con la de trazo discontinuo. Por tanto,  $f(x)$  es constante en  $S$ , es decir, toma su valor máximo en todos los puntos de dicho conjunto, en especial, en aquellos donde

$$\|x - P_1\| = \|x - P_2\|.$$

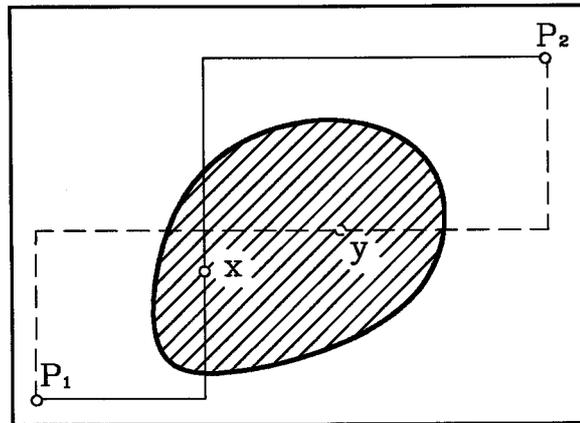


Fig.: III.2

Obsérvese que las condiciones impuestas a la norma no son, en general, muy restrictivas; piensese que, en los fenómenos que podemos estudiar, muy raramente las molestias se propagan siguiendo normas del estilo de las que hemos eliminado en el Teorema anterior. No obstante, el teorema también se verifica imponiendo condiciones a los coeficientes  $\lambda_1(x)b_{\sigma(1)}$ , como veremos a continuación.

**Proposición III.5.3:**

Sea la función:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \|x - P_i\|$$

con  $\lambda_i \geq 0$  y para algún  $i, j = 1, 2, \dots, m$   $\lambda_i \neq \lambda_j$ . En estas condiciones, la función  $f(x)$  no es constante en cualquier subconjunto,  $U$ , abierto de  $\mathbf{R}^2$ .

*Demostración:*

Con el fin de simplificar notaciones, supongamos que es  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , por lo tanto o bien  $\lambda_1$ , o bien  $\lambda_2$  es distinto de 1. Supongamos que es  $\lambda_1$ . Trabajaremos con la hipótesis de que es  $\lambda_1 > 1$  y a las mismas conclusiones llegaríamos si fuese  $\lambda_1 < 1$ .

Sea la función  $g(x)$  definida como

$$g(x) = \|x - P_1\| + \sum_{i=2}^m \lambda_i \|x - P_i\|$$

Sea, ahora,  $x \in U$  y  $r > 0$  tales que  $B(x, r) \subset U$ . Pueden suceder dos casos:

a)  $g(x)$  es constante en  $B(x, r)$ .

Entonces existe  $y \neq x$ ,  $y \in [x, P_1]$  e  $y \in B(x, r)$ ; se tiene, por tanto:

$$\|y - P_1\| < \|x - P_1\|, \quad y$$

$$g(x) = \|x - P_1\| + \sum_{i=2}^m \lambda_i \|x - P_i\| = \|y - P_1\| + \sum_{i=2}^m \lambda_i \|y - P_i\| = g(y)$$

por consiguiente:

$$\|x - P_1\| - \|y - P_1\| = \sum_{i=2}^m \lambda_i \|y - P_i\| - \sum_{i=2}^m \lambda_i \|x - P_i\| \neq 0$$

Ahora, puesto que  $\lambda_1 > 1$ , obtendremos:

$$\lambda_1 (\|x - P_1\| - \|y - P_1\|) \neq \sum_{i=2}^m \lambda_i \|y - P_i\| - \sum_{i=2}^m \lambda_i \|x - P_i\|$$

es decir,  $f(x) \neq f(y)$ .

b)  $g(x)$  no es constante en  $B(x, r)$ . Para tratar este caso veamos previamente que si  $g(x)$  no es constante en la bola anterior se verifica que existen  $y_1$  e  $y_2$  tales que:

$$g(y_1) < g(x) < g(y_2).$$

En efecto, por ser  $g(x)$  no constante en  $B(x, r)$ , existe  $y_1$  tal que  $g(y_1) \neq g(x)$ . Supongamos que es  $g(y_1) < g(x)$  (de igual modo razonaríamos si

fuese al contrario).

Sabemos, de capítulos precedentes, que existe  $\lambda > 1$  tal que:

$$y_2 = \lambda x + (1 - \lambda)y_1 \in B(x, r)$$

entonces, será:

$$x = \frac{1}{\lambda}y_2 + \frac{\lambda-1}{\lambda}y_1$$

así, se tiene:

$$\begin{aligned} g(x) &= \|x - P_1\| + \sum_{i=2}^m \lambda_i \|x - P_i\| = \left\| \frac{1}{\lambda}y_2 + \frac{\lambda-1}{\lambda}y_1 - P_1 \right\| + \sum_{i=2}^m \lambda_i \left\| \frac{1}{\lambda}y_2 + \frac{\lambda-1}{\lambda}y_1 - P_i \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda} [ \|y_2 - P_1\| + \sum_{i=2}^m \lambda_i \|y_2 - P_i\| ] + \frac{\lambda-1}{\lambda} [ \|y_1 - P_1\| + \sum_{i=2}^m \|y_1 - P_i\| ] < \\ &< \frac{1}{\lambda}g(y_2) + \frac{\lambda-1}{\lambda}g(x) \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$g(x) < g(y_2).$$

Sigamos, ahora con la demostración de la proposición para el caso b)

Existe  $y \in B(x, r)$  tal que  $g(y) < g(x)$ , así

$$\|y - P_1\| + \sum_{i=2}^m \lambda_i \|y - P_i\| < \|x - P_1\| + \sum_{i=2}^m \lambda_i \|x - P_i\|$$

luego

$$\|x - P_1\| - \|y - P_1\| > \sum_{i=2}^m \lambda_i \|y - P_i\| - \sum_{i=2}^m \lambda_i \|x - P_i\|$$

y, como  $\lambda_1 > 1 > 0$ , tendremos:

$$\lambda_1 [ \|x - P_1\| - \|y - P_1\| ] > \sum_{i=2}^m \lambda_i \|y - P_i\| - \sum_{i=2}^m \lambda_i \|x - P_i\|$$

es decir:

$$f(x) > f(y)$$



De acuerdo con esta proposición podremos enunciar el siguiente teorema que no necesita demostración puesto que sería la misma del teorema anterior:

**Teorema III.5.2:**

Si para cada  $x$  interior a  $S$ , existen  $i, j = 1, 2, \dots, m$  tales que se verifica que:

$$\lambda_i(x) b_{\sigma(i)} \neq \lambda_j(x) b_{\sigma(j)}$$

entonces si un punto  $x$ , que es un óptimo del problema general de localización de centros peligrosos, es interior a  $S$ , se verifica que alguna de las desigualdades siguientes se satura.

$$b_{\sigma(1)}\|x - P_{\sigma(1)}\| \leq b_{\sigma(2)}\|x - P_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq b_{\sigma(m)}\|x - P_{\sigma(m)}\|$$

Obsérvese, entonces, que si la función  $f(x)$  verifica alguna de las hipótesis de los teoremas III.5.1 o III.5.2, los puntos óptimos interiores a  $S$  se encuentran en los lugares geométricos de los puntos,  $x$ , que verifican:

- a)  $x$  es interior a  $S - X$
- b) existen  $i, j = 1, 2, \dots, m$  tales que  $b_i\|x - P_i\| = b_j\|x - P_j\|$ .

Por ejemplo, en el caso de norma euclidea, las ubicaciones de esos posibles óptimos serán las mediatrices de los segmentos  $[P_i, P_j]$  si todos los  $b_i$  son iguales y serán circunferencias centradas en la recta  $P_iP_j$  en otro caso como nos muestra la fig III.3 donde hemos supuesto  $b_1 = 1$  y  $b_2 = 2$

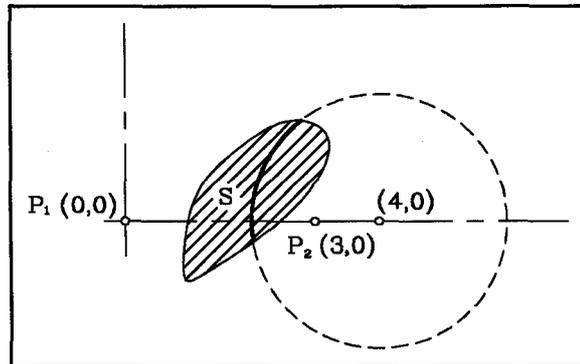
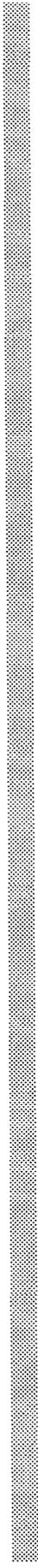


Fig.: III.3

En la figura se puede observar como las posibles ubicaciones interiores a S se encuentran en el arco de la circunferencia con centro el punto  $(4,0)$  y radio 2.



Capítulo IV:

UNA APLICACION DEL

PROBLEMA GENERAL:

CASO DE NORMA EUCLIDEA.

## **IV.1: INTRODUCCIÓN:**

Consideremos ahora sobre  $\mathbf{R}^2$  la norma euclídea. Sabemos que esta norma verifica las hipótesis del Teorema III.5.1, lo cual, junto con los resultados obtenidos en los Capítulos precedentes, nos permite afirmar:

1.- Los posibles óptimos de la función objetivo,  $f(\mathbf{x})$ , del Problema General de Localización de Centros Peligrosos se encuentran o bien en el interior de  $S - \mathbf{X}$ , o bien en  $\text{Fr}(S) - \mathbf{X}$ .

2.- Si un óptimo de  $f(\mathbf{x})$  es interior a  $S$ , entonces existen  $r, s = 1, 2, \dots, m$  tales que

$$b_r \|\mathbf{x} - P_r\| = b_s \|\mathbf{x} - P_s\| \quad (1)$$

Obsérvese que, uniendo las dos conclusiones obtenemos:

Para buscar los posibles máximos de  $f(\mathbf{x})$  se procederá, en primera instancia

entre los puntos del conjunto:

$$H = [\text{Fr}(S) - \mathbf{X}] \cup \{x \in X \cap S; \exists r, s=1,2,\dots,m \text{ con } b_r \|x - P_r\| = b_s \|x - P_s\|\}$$

En este último Capítulo afinaremos un poco más y, estudiaremos el caso que los pesos son todos iguales, es decir:  $b_i = b_j, \forall i, j = 1, 2, \dots, m$ .

Asimismo, hacer notar que la restricción aquí impuesta a los  $b_i$  no es caprichosa, ya que es bastante habitual esta elección puesto que, por ejemplo, en el problema maxmin, el ponderar las distancias  $\|x - P_i\|$  con pesos proporcionales al tamaño de la población nos conduciría a suponer alejadas poblaciones de mayor tamaño.

Veamos entonces primero como se nos quedará el planteamiento del problema en este caso y a continuación veremos que resultados adicionales obtenemos.

## IV.2: DEFINICIÓN DEL PROBLEMA:

Sea  $\|\cdot\|$  la norma euclidea sobre  $\mathbf{R}^2$ ,  $S$  un subconjunto cerrado y acotado de  $\mathbf{R}^2$  y " $P_1, P_2, \dots, P_m$ " "m" puntos del plano (poblaciones afectadas).

Sean, por otra parte, los números reales y positivos  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , y supongamos que para cada  $x \in S$   $\sigma$  es la permutación del conjunto:  $\{1, 2, \dots, m\}$  que verifica:

$$\|x - P_{\sigma(1)}\| \leq \|x - P_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq \|x - P_{\sigma(m)}\|$$

Si definimos la función:  $\lambda_j(x) = k_j$  si  $\|x - P_i\|$  ocupa el lugar el lugar  $j$ -ésimo en la sucesión anterior, el enunciado del problema sería el siguiente:

$$\max_{x \in S} \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \|x - P_i\| = \max_{x \in S} \sum_{i=1}^m k_i \|x - P_{\sigma(i)}\|$$

Sabemos, del Teorema III.5.1, que las posibles soluciones interiores a  $S$  están sobre los lugares geométricos:

$$L_{ij} = \{ x \in S ; \|x - P_i\| = \|x - P_j\| \}; \quad i, j=1, 2, \dots, m$$

y, en el caso que estamos tratando (norma euclidea), tales lugares geométricos están sobre las mediatrices de los segmentos  $[P_i, P_j]$ .

### IV.3: ÓPTIMOS INTERIORES A S:

#### Proposición IV.3.1:

Si  $\|\cdot\|$  es la norma euclidea sobre  $\mathbf{R}^2$ , y para algún  $i = 1, 2, \dots, m$ , los puntos  $y$ ,  $z$  y  $P_i$  no están alineados para algún  $\lambda_i$  no nulo, entonces la función:

$$g(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \|x - P_i\|$$

no es constante en el segmento  $[y, z]$ .

*Demostración:*

Veamos en primer lugar que si  $0 < \alpha < 1$ , se verifica que:

$$\|\alpha y + (1-\alpha)z - P_i\| < \alpha\|y - P_i\| + (1-\alpha)\|z - P_i\|$$

En efecto:

Puesto que  $\|\cdot\|$  es convexa se tiene:

$$\|\alpha y + (1-\alpha)z - P_i\| \leq \alpha\|y - P_i\| + (1-\alpha)\|z - P_i\|$$

es decir,

$$\|\alpha y - (1-\alpha)z - P_i\| = \alpha\|y - P_i\| + (1-\alpha)\|z - P_i\| \quad (4.1)$$

Ahora si se diera la igualdad:

$$\|\alpha y + (1-\alpha)z - P_i\|^2 = [\alpha\|y - P_i\| + (1-\alpha)\|z - P_i\|]^2$$

Por ser  $\|\cdot\|$  euclidea, proviene de un producto escalar sobre  $\mathbf{R}^2$  y será:

$$\begin{aligned} \|\alpha y + (1-\alpha)z - P_i\|^2 &= [\alpha(y - P_i) + (1-\alpha)(z - P_i)] [\alpha(y - P_i) + (1-\alpha)(z - P_i)] \\ &= [\alpha\|y - P_i\|^2 + [(1-\alpha)\|z - P_i\|]^2 + 2\alpha(1-\alpha)(y - P_i)(z - P_i)] = (4.2) \end{aligned}$$

y por (4.1), tendremos que:

$$= [\alpha\|y - P_i\|^2 + [(1-\alpha)\|z - P_i\|]^2 + 2\alpha(1-\alpha)\|y - P_i\| \|z - P_i\|, \text{ es decir:}$$

$$(y - P_i)(z - P_i) = \|y - P_i\| \cdot \|z - P_i\|$$

lo cual implica que los vectores  $y - P_i$  y  $z - P_i$  son paralelos, y puesto que los dos tienen su origen en  $P_i$  tendremos que  $y, z, P_i$  están alineados en contra de la hipótesis.

Finalmente, si  $y, z, P_i$  no están alineados y fuese  $g(y) \leq g(z)$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} g(\alpha y + (1-\alpha)z) &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \|\alpha y + (1-\alpha)z - P_i\| < \\ &< \alpha \sum_{i=1}^m \lambda_i \|y - P_i\| + (1-\alpha) \sum_{i=1}^m \lambda_i \|z - P_i\| = \alpha g(y) + (1-\alpha)g(z) \leq g(z) \end{aligned}$$

y esto para todo  $\alpha \notin [0, 1]$ , por lo tanto, la función,  $g(x)$ , no es constante en  $[y, z]$ . ■

**Teorema IV.3.1:**

Si  $x_0$  es un punto interior a  $S$  tal que maximiza la función

$$f(x) = \sum_{i=1}^m k_i \|x - P_{\sigma(i)}\|$$

donde  $\sigma$  es la permutación tal que:

$$\|x - P_{\sigma(1)}\| \leq \|x - P_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq \|x - P_{\sigma(m)}\|,$$

entonces existen  $r, s, t, u = 1, 2, \dots, m$  tales que:

$$\|x_0 - P_r\| = \|x_0 - P_s\| \quad \text{y} \quad \|x_0 - P_t\| = \|x_0 - P_u\|.$$

*Demostración:*

Del Teorema III.5.1, sabemos que existen  $P_r$  y  $P_s$  tales que:

$$\|x_0 - P_r\| = \|x_0 - P_s\|$$

Sea:  $r = \sigma(i)$ ,  $s = \sigma(i+1)$  para un cierto  $i$ .

Se tiene por tanto,

$$\|x_0 - P_{\sigma(1)}\| \leq \|x_0 - P_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq \|x_0 - P_{\sigma(i)}\| = \|x_0 - P_{\sigma(i+1)}\| \leq \dots \leq \|x_0 - P_{\sigma(m)}\|$$

si tuviéramos

$$\|x_0 - P_{\sigma(1)}\| < \|x_0 - P_{\sigma(2)}\| < \dots < \|x_0 - P_{\sigma(i)}\| = \|x_0 - P_{\sigma(i+1)}\| < \dots < \|x_0 - P_{\sigma(m)}\|,$$

entonces, por la continuidad de la norma, existiría  $h > 0$

$$\|x - P_{\sigma(1)}\| \leq \|x - P_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq \|x - P_{\sigma(i)}\| \leq \dots \leq \|x - P_{\sigma(m)}\|$$

$$\forall x \in B(x_0, h)$$

Sea  $L_i = \{ x \in B(x_0, h); \|x - P_{\sigma(i)}\| = \|x - P_{\sigma(i+1)}\| \}$

$L_i$  es un segmento que denotaremos por  $[y, z]$ , por otra parte, la función  $f(x)$  queda definida en dicho segmento como:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \|x - P_i\| \quad \text{con } \lambda_i \text{ constantes.}$$

Si  $x_1 \in [y, z]$  y  $x_1 \neq x_0$ , entonces

$x_1 \in [y, x_0]$  ó  $x_1 \in [x_0, z]$ .

Para el primer caso,  $x_1 \in [y, x_0]$ , tomamos un punto,  $w \in [x_0, z]$ , existe  $\beta > 1$  tal que:  $x_1 = \beta x_0 + (1-\beta)w$  y así

$$x_0 = \frac{1}{\beta} x_1 + \frac{\beta-1}{\beta} w$$

Tenemos,

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \left\| \frac{1}{\beta} x_1 + \frac{\beta-1}{\beta} w - P_i \right\| \leq \frac{1}{\beta} f(x_1) + \frac{\beta-1}{\beta} f(w) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\beta} f(x_1) + \frac{\beta-1}{\beta} f(x_0)$$

pues  $x_0$  es un máximo de  $f(x)$  en  $S$ .

Por tanto,

$$f(x_0) \leq f(x_1),$$

y así

$$f(x_1) = f(x_0),$$

Esto es, la función es constante sobre el segmento  $[y, z]$

Aquí podemos distinguir dos casos:

a) Existe  $\lambda_i$  no nulo tal que  $P_i$  no está alineado con  $x$  e  $y$ .

b) Los únicos  $\lambda_i$  no nulos son los correspondientes a  $P_i$  que están alineados con  $x$  e  $y$ .

En el primer caso habríamos llegado a un absurdo por la proposición anterior.

Veamos ahora que el caso b) no se puede dar.

En efecto, puesto que  $x_0$  es un punto interior a  $S$ , existe  $B(x_0, \delta) \subset B(x_0, h) \subset S$ .

Si ahora tomamos  $s \in B(x_0, \delta)$ ,  $s \neq x_0$  y  $s$  sobre la perpendicular a la recta que contiene a  $x_0$ , y los  $P_i$  para los cuales  $\lambda_i > 0$ . Tenemos

$$(s - x_0)(x_0 - P_i) = 0$$

y, por otra parte:

$$\|s - P_i\|^2 = (s - P_i)(s - P_i) = [(s - x_0) + (x_0 - P_i)].[(s - x_0) + (x_0 - P_i)] =$$

$$\|s - x_0\|^2 + \|x_0 - P_i\|^2 + 2(s - x_0)(x_0 - P_i) =$$

$$\|s - x_0\|^2 + \|x_0 - P_i\|^2 > \|x_0 - P_i\|^2$$

Resulta así  $\|s - P_i\| > \|x_0 - P_i\|$

y, por tanto:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \|s - P_i\| > \sum_{i=1}^m \lambda_i \|x_0 - P_i\|$$

es decir,  $f(s) > f(x_0)$ , en contra de que  $x_0$  era un máximo de  $f(x)$  en  $S$ .

Finalmente, si  $x_1 \in [x_0, z]$  se procedería de manera análoga al primer caso. ■

#### IV.4: ÓPTIMOS EN LA FRONTERA: CASO EN QUE S ES UNA REGIÓN POLIGONAL.

Desde el punto de vista práctico, el conjunto  $S$  va a venir dado, en la mayoría de los casos, por una región poligonal. Sea  $S$  una región poligonal convexa de vértices  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ .

El siguiente Teorema nos va a asegurar que si la solución óptima está en la frontera de  $S$ , entonces existe un conjunto finito de puntos candidatos a esas soluciones óptimas.

##### **Teorema IV.4.1:**

Los posibles óptimos de la función  $f(x)$  que están sobre la frontera de  $S$  son o bien vértices o bien puntos para los cuales existen  $P_i$  y  $P_j$  tales que:

$$\|x - P_i\| = \|x - P_j\|.$$

*Demostración:*

En efecto, sea  $x \in \text{Fr}(S)$  y supongamos que  $x$  no es un vértice de la poligonal  $S = [Q_1, Q_2, \dots, Q_n]$ , supongamos, para simplificar notación, que:

$$x \in [Q_1, Q_2] \text{ y } x \neq Q_i \text{ para } i = 1, 2$$

Procediendo de manera análoga a teoremas precedentes tendremos que si para ese  $x$  se verificase que:

$$\|x - P_{\sigma(1)}\| < \|x - P_{\sigma(2)}\| < \dots < \|x - P_{\sigma(m)}\|$$

existirá  $h > 0$  tal que para todo  $y \in B(x, h)$  se tiene que:

$$\|x - P_{\sigma(1)}\| \leq \|x - P_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq \|x - P_{\sigma(m)}\|$$

y  $\|x - Q_i\| > h$  para  $i=1,2$  y algún número real,  $h > 0$

Por lo tanto:

$$f(z) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \|z - P_i\| \text{ con } \lambda_i \text{ constantes } \forall z \in B(x, h)$$

Si ahora tomamos el segmento,  $B(x, h) \cap [Q_1, Q_2]$ , procediendo de manera análoga a situaciones anteriores se prueba el teorema.

■

### Conclusión:

Cuando tratamos el caso en que los pesos,  $b_i$ , son todos iguales y la norma es euclídea los posibles óptimos de la función  $f(x)$  definida en (4.2) hay que buscarlos, con independencia de los  $k_i$  que nosotros elijamos, dentro del conjunto discreto que se forma entre los siguientes:

a) Los puntos interiores a  $S$  que se obtienen como puntos de corte de las

mediatrices de los segmentos  $[P_i, P_j]$  para  $i, j = 1, 2, \dots, m$ ; esto es, a lo sumo:

$$\frac{m^2(m-1)^2 - 2m(m-1)}{8} \text{ puntos}$$

de estos, según lo obtenido en el Capítulo I, podemos desechar los que no estén en  $X$ .

b) Los puntos que se obtienen al cortar cada una de las mediatrices con los segmentos del contorno de  $S$ , es decir:

$$m(m - 1) \text{ puntos nuevos distintos.}$$

c) Los vértices de la poligonal  $S$ . Esto es "n" puntos más.

Evidentemente, cuando adoptemos algunos valores concretos para los  $k_i$ , sería posible ampliar nuestro estudio de tal manera que podamos reducir el conjunto de puntos factibles.

La siguiente figura nos da una imagen gráfica de cuales son los puntos que nos resuelven nuestro problema:

Los puntos marcados con el símbolo:  $\odot$  son los posibles óptimos de la función objetivo,  $f(x)$ .

De los 20 puntos obtenidos, es claro que si se adopta algunos valores

particulares para los  $k_i$  se pueden reducir bastante.

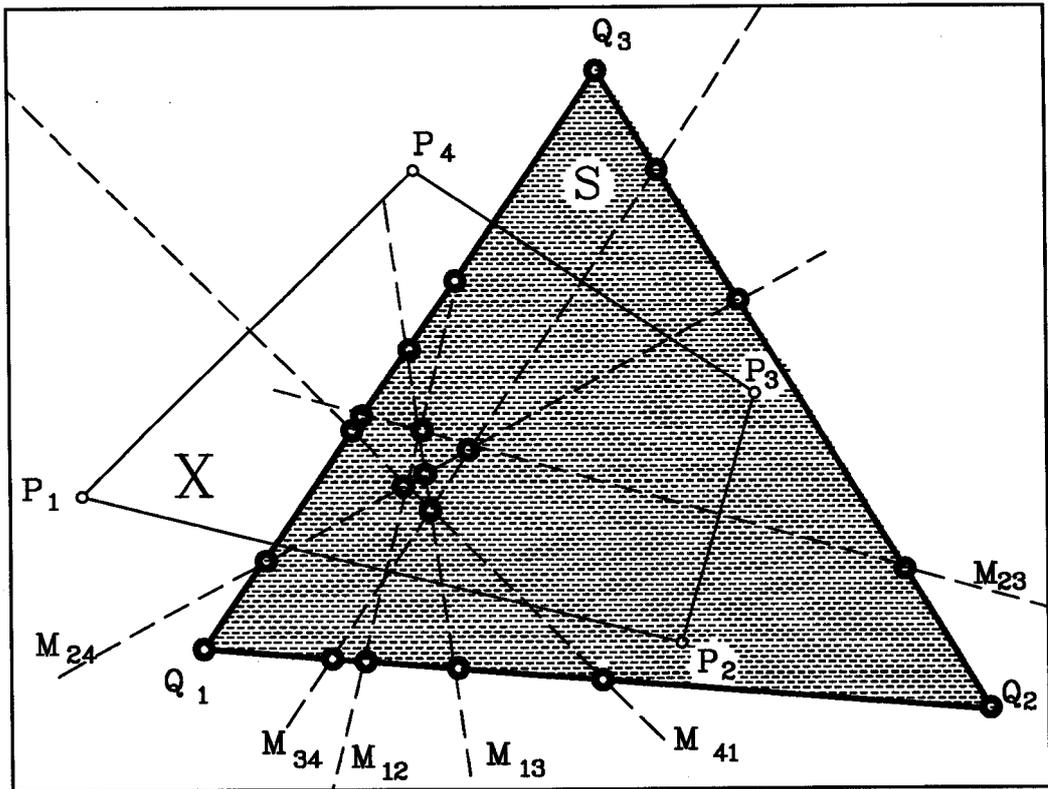


Fig.: IV.1

## IV.5: ALGORITMO:

De acuerdo con los resultados obtenidos anteriormente, podemos establecer el algoritmo de búsqueda de puntos optimos de la siguiente forma:

Consideremos el poligono  $S$  determinado por los puntos  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , de manera que sus lados son:  $Q_1Q_2, Q_2Q_3, \dots, Q_{n-1}Q_n$  y que cada punto  $Q_i$  viene dado por las coordenadas  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Paso I:** Poner:

$$a_i = x_{i+1} - x_i$$

$$b_i = y_{i+1} - y_i$$

$$c_i = x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$ , donde  $x_{n+1} = x_1$  e  $y_{n+1} = y_1$ .

**Paso II:** Poner

$$a_{ij}^* = y_j - y_i$$

$$b_{ij}^* = x_j - x_i$$

$$c_{ij}^* = - \left( \frac{y_i + y_j}{2} \right) a_{ij}^* - \left( \frac{x_i + x_j}{2} \right) b_{ij}^*$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$

**Paso III:** Resolver el sistema de ecuaciones:

$$a_i y + b_i x + c_i = 0$$

$$a_{jk}^* y + b_{jk}^* x + c_{jk}^* = 0$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$  y almacenar los puntos

solución. Sea **L** el conjunto de dichos puntos.

**Paso IV:** Resolver el sistema de ecuaciones:

$$a_{ij}^* y + b_{ij}^* x + c_{ij}^* = 0$$

$$a_{rs}^* y + b_{rs}^* x + c_{rs}^* = 0$$

para  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ;  $r = i+1, \dots, n$ ;  $s = r+1, \dots, n$

Sea **M** el conjunto de puntos solución.

**Paso V:** Parar. El conjunto de puntos eficientes es  $\mathbf{L} \cup \mathbf{M} \cup \mathbf{V}$ , donde

**V** es el conjunto:  $\mathbf{V} = \{ Q_1, Q_2, \dots, Q_n \}$ .

## IV.6: PROBLEMA MAXMIN.

En este epígrafe tratamos, como ejemplo de aplicación de lo obtenido anteriormente, el problema mas conocido de localización de centros peligrosos, el Problema Maximin.

Como ya dijimos en III.2, el problema maxmin planteado en términos de la función  $f(x)$  se enuncia de la siguiente forma:

Sean  $P_1, P_2, \dots, P_m$   $m$  puntos de  $\mathbf{R}^2$ ,  $\mathbf{S}$  una poligonal convexa y  $x \in \mathbf{S}$ , si  $\sigma$  es la permutación del conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  tal que:

$$\|x - P_{\sigma(1)}\| \leq \|x - P_{\sigma(2)}\| \leq \dots \leq \|x - P_{\sigma(m)}\|$$

definimos

$$f(x) = \sum_{i=1}^m k_i \|x - P_{\sigma(i)}\|$$

con  $k_1 = 1$  y  $k_j = 0$  para  $j = 2, 3, \dots, m$

Entonces el problema maxmin es equivalente a maximizar  $f(x)$  en  $\mathbf{S}$ , es decir:

$$\max_{x \in \mathbf{S}} f(x) = \max_{x \in \mathbf{S}} \min_{1 \leq i \leq m} \|x - P_i\|$$

### Teorema IV.6.1:

Sea  $\|\cdot\|$  la norma euclidea sobre  $\mathbf{R}^2$ , y  $x_0$  un optimo de  $f(x)$  interior a  $\mathbf{S}$ , entonces  $\|x_0 - P_{\sigma(1)}\| = \|x_0 - P_{\sigma(2)}\| = \|x_0 - P_{\sigma(3)}\|$

*Demostración:*

Sabemos del Teorema IV.3.1 que si  $x_0$  es un óptimo de  $f(x)$  interior a  $S$ , entonces  $\|x_0 - P_{\sigma(i)}\| = \|x_0 - P_{\sigma(i+1)}\|$ ,  $\|x_0 - P_{\sigma(j)}\| = \|x_0 - P_{\sigma(j+1)}\|$  para algun  $i, j = 1, 2, \dots, m$ . Veamos en primer lugar que  $i$  o  $j$  es 1:

En efecto, supongamos que:

$$\|x_0 - P_{\sigma(1)}\| < \|x_0 - P_{\sigma(2)}\| \leq \dots$$

por la continuidad de la norma, existe un entorno  $B = B(x_0, \epsilon)$  tal que si  $x \in B \subset S$  se tiene que:

$$\|x_0 - P_{\sigma(1)}\| < \|x_0 - P_{\sigma(2)}\| \leq \dots$$

y, por tanto,  $f(x) = \|x - P_{\sigma(1)}\|$ , ahora bien, la semirrecta con origen en  $P_{\sigma(1)}$  y que contiene a  $x_0$  tiene puntos de  $B$  mas allá de  $x_0$ , sea  $y$  (ver figura IV.2 (A)) uno de estos puntos, será  $f(y) = \|y - P_{\sigma(1)}\| > \|x_0 - P_{\sigma(1)}\|$  en contra de que  $x_0$  era un máximo de  $f(x)$ .

Así ya tenemos que si  $x_0$  es un máximo interior a  $S$ , se verifica necesariamente que  $\|x_0 - P_{\sigma(1)}\| = \|x_0 - P_{\sigma(2)}\|$ .

Supongamos, ahora que:

$$\|x_0 - P_{\sigma(1)}\| = \|x_0 - P_{\sigma(2)}\| < \|x_0 - P_{\sigma(3)}\| \leq \dots$$

Por la misma razón anterior, existe un entorno,  $B$ , de  $x_0$  en el cual es:

$$\|x - P_{\sigma(1)}\| \leq \|x - P_{\sigma(3)}\| \leq \dots ; \quad \|x - P_{\sigma(2)}\| \leq \|x - P_{\sigma(3)}\| \leq \dots$$

para todo  $x$  de  $B$ .

Así, para  $x \in B$  será  $f(x) = \|x - P_{\sigma(1)}\|$  ó  $f(x) = \|x - P_{\sigma(2)}\|$ , ahora bien, si consideramos la recta  $\{x \in B; \|x - P_{\sigma(1)}\| = \|x - P_{\sigma(2)}\|\}$ , en ella

existen puntos  $x$  tales que  $\|x - P_{\sigma(1)}\| > \|x_0 - P_{\sigma(1)}\|$  y,

$\|x - P_{\sigma(2)}\| > \|x_0 - P_{\sigma(2)}\|$ , luego en este punto se tendrá que  $f(x) = f(x_0)$  (ver figura IV.2 (B)), luego llegaríamos a un absurdo, por tanto si  $x_0$  es un máximo de  $f(x)$  interior a  $S$  se tiene que:

$$\|x_0 - P_{\sigma(1)}\| = \|x_0 - P_{\sigma(2)}\| = \|x_0 - P_{\sigma(3)}\|$$

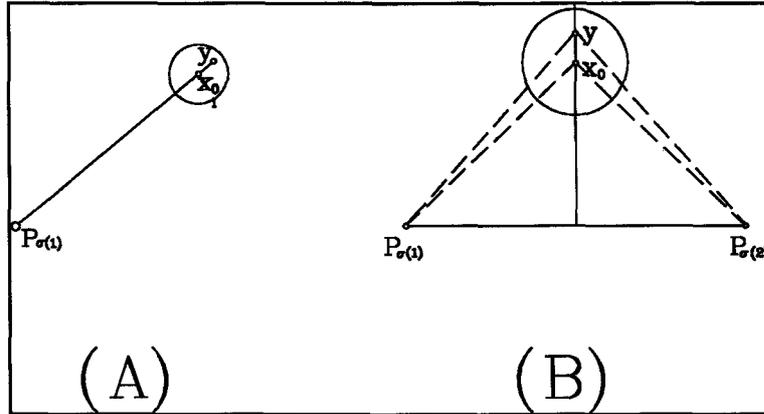


Fig.: IV.2

**Teorema IV.6.2:**

Si  $x_0$  es un máximo de  $f(x)$  en la frontera de  $S$  y no es un vértice de  $S$  entonces:  $\|x_0 - P_{\sigma(1)}\| = \|x_0 - P_{\sigma(2)}\|$

*Demostración:*

Del Teorema IV.4.1 sabemos que los posibles máximos de  $f(x)$  en la frontera de  $S$  que no son vértices son equidistantes de dos puntos  $P_i$ , supongamos que  $\|x_0 - P_{\sigma(1)}\| < \|x_0 - P_{\sigma(2)}\| \leq \dots$

como siempre, existe un entorno,  $B$ , de  $x_0$  en el cual se verifica que:

$$\|x - P_{\sigma(1)}\| \leq \|x - P_{\sigma(i)}\| \text{ para } i = 2, 3, \dots, m.$$

La mediatriz del segmento  $P_{\sigma(1)}P_{\sigma(2)}$  contiene puntos de  $B$  y en esos puntos es  $\|x - P_{\sigma(1)}\| > \|x_0 - P_{\sigma(1)}\|$ , por tanto  $f(x) > f(x_0)$  y llegamos a una contradicción con el hecho de que  $x_0$  era un máximo de  $f(x)$

**Conclusión:**

Vemos, entonces, que con los métodos que hemos utilizado a lo largo del presente trabajo se llega a que los puntos eficientes para el problema maxmín son o bien los puntos interiores,  $x$ , de  $S$  que equidistan de los tres puntos de demanda  $P_i$  más próximos a él, o los de la frontera que equidistan de los dos  $P_i$  más próximos o bien los vértices, es decir, el mismo resultado que ya sabíamos sobre el problema maxmin, dejando abierta una puerta para el estudio, de la misma forma, de otros problemas que se planteen en términos de la función  $f(x)$ .



## BIBLIOGRAFIA

**REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS:**

**CARRIZOSA, E.J.; FERNANDEZ, F.R.**

*An extension of the theorems for p-medians and p-centers on networks.*

Depto de Estadística e I.O. Universidad de Sevilla

**CHURCH, T.L.; GARFINKEL, R.S. (1978)**

*Locating an obnoxious facility on a network.*

Transportation Science. 12/2 (107-118)

**DASARATHY, B.; WHITE, L.J. (1980)**

*A Maximin Location Problem.*

Operations Research, 28. (1385-1400)

**DREZNER, Z. (1983)**

*Constrained location problems in the plane and on a sphere.*

IIE Transactions 15/3 (300-304)

**DREZNER, Z.; WESOLOWSKY, G.O. (1980)**

*A Maximin Location Problem with Maximum Distance Constraints.*

AIIE Transactions, 12. (249-252)

**DREZNER, Z.; WESOLOWSKY, G.O. (1983)**

*Minimax and maximin facility location problems on a sphere.*

Naval Research Logistics Quarterly 30 (305-312)

**DREZNER, Z.; WESOLOWSKY, G.O. (1983)**

*The locations of an obnoxious facilities with rectangular distances.*

Journal of Regional Science. 23/2 (241-248)

**DREZNER, Z.; WESOLOWSKY, G.O. (1985)**

*Location of Multiple Obnoxious Facilities.*

Transportation Science, 19. (193-202)

**DREZNER, Z; THISSE, J.F.; WESOLOWSKY, G.O. (1986)**

*The minimax-min Location Problem.*

Journal of Regional Science (87-101)

**DREZNER, Z; WESOLOWSKY, G.O. (1988)**

*The Weber problem on the plane with some negative weights.*

35th National meeting of Regional Sciences. Assn Toronto

**DREZNER, Z; WESOLOWSKY, G.O. (1989)**

*Location of an obnoxious route*

Journal of Regional Science, 41 (1011-1018)

**ERKUT, E. ; NEUMAN, S. (1989)**

*Analytical model for locating undesirable facilities.*

European Journal of Operational Research, 40 (275-291)

**ERKUT, E; ÖNCÜ T.S. (1991)**

*A Parametric 1-Maximin Location Problem.*

J. Opl. Res. Soc. 42,1 (49-55)

**GOICOECHEA, A; HANSEN, D.R.; DUKSTEIN, L. (1982)**

*Multiobjective Decision Analysis with Engineering and Business Applications.*

Wiley, New York.

**GOLDMAN, A.J.; DEARING, P.M. (1975)**

*Concepts of optimal locations for partially noxious facilities.*

Bulletin of Operational Research Society of America 23/1, B85.

**HANSEN, P.; PEETERS, D; THISSE, J.F. (1981)**

*On the Location of an obnoxious facility.*

Sistemi Urbani, 3 (299-317)

**HANSEN, P.; PEETERS, D; THISSE, J.F. (1982)**

*An algorithm for a constrained Weber problem.*

Management Science, 22. (51-56)

**INFANTE MACIAS, R.**

*Teoría de la Localización: Evolución y estado actual.*

Apertura del curso (1988-89). Universidad de Sevilla.

**MANGASARIAN, O.L. (1969)**

*Nonlinear Programing.*

Ed. McGraw Hill (México)

**MEHREZ, A; SINUANY-STERN, Z; STULMAN, A. (1985)**

*A single facility location problem with weighted maximin-minimax rectilinear distance.*

Comput. Ops. Research 12/1 (51-60)

**MEHREZ, A; SINUANY-STERN, Z; STULMAN, A. (1983)**

*The one-dimensional single facility maximin distance location problem.*

Journal of regional Science, 23, 2 (233-239).

**MELACHRINOUDIS, E. (1985)**

*Determining an optimun location for an undesirable facility in a workroom environment.*

Applied Mathematical Modeling, 9. (365-369)

**MELACHRINOUDIS, E. (1988)**

*An Efficient Computational Procedure for the Rectilinear MAXIMIN Location Problem.*

Transportation Science 22, 3 (217-223).

**MELACHRINOUDIS, E; CULLINANE, T.P. (1982)**

*A maxmin aproach to the location of an undesirable facility in a nonconvex region.*

Modeling and Simulation 13 (533-538)

**MELACHRINOUDIS, E; CULLINANE, T.P. (1985)**

*Locating an undesirable Facility within a Geografical Region using the maximin criterion.*

Journal of Regional Science, 25. (115-127)

**MELACHRINOUDIS, E; CULLINANE, T.P. (1986)**

*Locating an undesirable facility with a minimax criterion.*

European Journal of Operational Research, 24. (139-146)

**MELACHRINOUDIS, E; CULLINANE, T.P. (1986)**

*Locating an obnoxious facility within a polygonal region.*

Annals of Operations Research 24, (239-246)

**OSTRESH, L.M.** (1977)

*The multifacility Location Problem: Applications and Descent Theorems.*

Journal of Regional Science, 17 (409-419)

**PREPARATA, F.P.; HONG, S.J.** (1977)

*Convex hulls of finite sets of points in two and three dimensions.*

Communications of the ACM. 20 (87-93)

**ROBERTS, A.W.; VARBERG, D.E.** (1973)

*Convex functions.*

Academic Press, New York.

**ROCKAFELLAR, R.T.** (1970)

*Convex Analysis.*

Princeton University Press.

**ROSS, G.T.; SOLAND, R.M.** (1980).

*A multicriteria approach to the location of public facilities.*

European Journal of Operational Research, 4. (307-321).

**TELLIER, L.N.** (1972)

*The Weber Problem: Solution and Interpretation.*

Geographical Analysis, 4. (215-233)

**TELLIER, L.N.; POLANSKY, B.** (1989)

*The Weber Problem: Frequency of Different Solution Types and Extension to Repulsive forces and Dynamic Processes.*

Journal of Regional Science, 29 (387-405)

**WENDELL, R.E.; HURTER, A.P.** (1973)

*Location Theory, Dominance and Convexity.*

Operacions Research (314-319)

# UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunión de la Comisión de Grados por el Grado de Licenciado  
en el día 22 de Septiembre de 1992 en el Consejo Doctoral de  
D. JUAN JOSE SAMENÓ RODRIGUEZ

LOCALIZACIÓN MULTICRITERIO de CENTROS PELIGROSAS

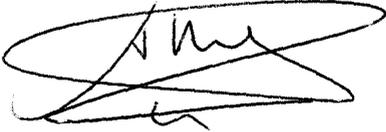
APTO COM LAUDE

Sevilla, 7 de Septiembre de 1992

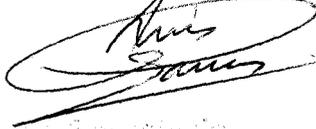
El Vocal,



El Presidente



El Vocal,



El Secretario



El Vocal,



El Decano

