

TESIS

UNA TEORIA DE SEGUIMIENTO ENTRE VEHICULOS (A THEORY OF CAR-FOLLOWING)

por
JOSE MARIA DEL CASTILLO GRANADOS
Ingeniero Industrial por la E.S.I. de Sevilla

presentada en la
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS
de la
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

para la obtención del
Grado de Doctor Ingeniero Industrial

Sevilla, Abril de 1994

A mis padres
José y Purificación

Prefacio

La presente Tesis expone los resultados de la investigación llevada a cabo durante tres años en el Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Sevilla. Este trabajo ha sido posible gracias a una beca de investigación concedida por la Dirección General de Universidades de la Junta de Andalucía.

El profesor F. G. Benítez ha sido el director de esta Tesis Doctoral. Me gustaría agradecerle su constante apoyo y asistencia, y sobre todo, la confianza que desde un primer momento me otorgó. También quiero dar las gracias a P. Pintado por las discusiones fructíferas que hemos mantenido durante estos años.

He disfrutado de la hospitalidad del profesor J. H. van Schuppen del Centrum voor Wiskunde en Informatica de Amsterdam. Mi más sincero agradecimiento hacia él por su paciencia y generosidad. Estoy en deuda con S. A. Smulders del Departamento de Ingeniería de Tráfico del Ministerio Holandés de Obras Públicas y con la Dirección General de Tráfico de su homólogo español, por los datos de tráfico que me suministraron. También me gustaría agradecer al profesor Fai Ma el haberme acogido en el Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de California en Berkeley. Igualmente, deseo expresar mi agradecimiento a los profesores C. F. Daganzo y G. F. Newell del Institute of Transportation Studies de la misma universidad, por los estímulos que me dieron.

Por último, no puedo dejar de mencionar a todos aquellos que han contribuido a hacer de mi trabajo un placer y una experiencia enriquecedora.

La presente Tesis describe una teoría de seguimiento entre vehículos. Dicha teoría está basada en una forma funcional para la curva de equilibrio velocidad-densidad y en una formulación del tiempo de reacción de los conductores. Como una extensión de la teoría, se han estudiado los cambios que introduce en el modelo de Payne la adopción de la mencionada formulación para el tiempo de reacción.

Esta Tesis presenta basicamente los resultados ya expuestos en los siguientes artículos:

Del Castillo J. M., Pintado P. and Benítez F. G. (1994) *The Reaction Time of Drivers and the Stability of Traffic Flow*. Transportation Research 28B, 35–60.

Del Castillo J. M. and Benítez F. G. (1994) *On the Functional Form of the Speed-Density Relationship, Part I: General Theory*. Transportation Research

B, pendiente de publicación.

Del Castillo J. M. and Benítez F. G. (1994) *On the Functional Form of the Speed-density Relationship, Part II: Application of the Theory*. Transportation Research B, pendiente de publicación.

Del Castillo J. M. (1994) *A Generic Car-Following Model, Part I: Formulation of the Model*. Transportation Research B, enviado.

Del Castillo J. M. (1994) *A Generic Car-Following Model, Part II: Numerical Solution*. Transportation Research B, enviado.

No obstante, los contenidos de la Tesis han sido dispuestos en un orden más adecuado.

Sevilla, Abril de 1994

Jose M. del Castillo

Indice

MEMORIA	1
APENDICE	6
A Introducción	7
A.1 Modelos Macr3scopicos de Tráfico	7
A.2 La Curva Velocidad-Densidad	7
A.3 Modelos de Seguimiento de Vehículos	9
A.4 El Modelo Simple de Continuidad	9
A.5 El Modelo de Payne	10
A.6 Esquema de la Tesis	10
B La Relación Velocidad-Densidad	11
B.1 La Condición de Concavidad	11
B.2 Los Modelos de Velocidad-Densidad Existentes	12
B.3 Los Parámetros del Tráfico	14
B.4 La Forma Funcional	17
B.5 Ejemplos de Funciones Generadoras	18
B.6 La Derivación de la Forma Funcional	21
B.6.1 Argumento matemático	21
B.6.2 Argumento del comportamiento de los conductores	22
C Ajuste de Datos de Tráfico en Autopistas	25
C.1 Selección de Datos de Tráfico en Equilibrio	25
C.2 Estimación de Cantidades Medias.	27
C.3 Análisis de Regresión	27
C.4 Interpretación de los Resultados	31
D Un Modelo de Seguimiento de Vehículos	40
D.1 El Modelo de Propagación	40
D.2 El Modelo Lineal	41
D.3 El Modelo no Lineal	43
D.4 Tiempo de Reacción y Condición de Concavidad	45

D.5	El Problema de la Retrogresión	46
D.6	El Modelo Adimensional	48
D.7	Solución del Problema de la Retrogresión	49
E	Solución Numérica y Resultados	50
E.1	Solución Numérica del Modelo	50
E.2	Algoritmo para el Modelo Lineal	51
E.3	Algoritmo para el Modelo Original	54
E.4	Algoritmo para el Modelo Aproximado	58
E.5	Resultados Numéricos	59
F	Revisión del Modelo de Payne	65
F.1	El Modelo de Payne Linealizado	65
F.2	Onda de Compresión Estacionaria	66
F.3	Tiempo de Reacción y Condición de Consistencia	69
F.4	Consecuencias en el modelo de Payne	72
F.5	Comparación con otros Autores	74
F.6	Estabilidad del Flujo de Tráfico	79
	BIBLIOGRAFIA	82
	SUMMARY	87
	CURRICULUM VITAE	89

MEMORIA

En la presente Tesis se expone una teoría de seguimiento de vehículos. Los principales componentes de dicha teoría son una forma funcional para la curva de equilibrio velocidad-densidad y una formulación para el tiempo de reacción de los conductores.

En el apéndice A se presenta una breve introducción al modelado del tráfico. Los modelos del flujo de tráfico pueden ser clasificados en cuatro grupos principales, de acuerdo con el tipo de descripción: microscópica o macroscópica y aleatoria o determinista. Los modelos de seguimiento entre vehículos son microscópicos y fundamentalmente deterministas. Los modelos fluidodinámicos son igualmente deterministas pero macroscópicos. Los dos más importantes son el Modelo Simple de Continuidad o Modelo de Lighthill-Whitham y el Modelo de Payne.

En el apéndice B se propone una forma funcional para la curva velocidad-densidad. Esta forma funcional está basada en una definición adimensional de la distancia entre vehículos, la *distancia equivalente*, y en una función, la *función generadora*, cuyo argumento es la distancia equivalente.

La mencionada forma funcional es derivada mediante dos tipos de argumentos. La hipótesis de la existencia de un conjunto de parámetros fundamentales del tráfico es un punto crucial de ambos argumentos. Dicha hipótesis es justificada por medio de una extensa revisión bibliográfica. Los parámetros fundamentales son la densidad de atasco, la velocidad de las ondas cinemáticas en el atasco y la velocidad máxima. Los dos primeros parámetros son cuasi-universales, puesto que están débilmente condicionados por las características de la carretera en cuestión. Por el contrario, dichos parámetros se encuentran principalmente determinados por el volumen físico de los vehículos y el tiempo de reacción de los conductores. Se observan unos valores medios de 150 veh/km/carril para la densidad de atasco y de 20 km/h para la la velocidad de las ondas cinemáticas en el atasco.

El primer argumento mediante el cual se deriva la forma funcional, está basado en el conjunto de propiedades que la relación intensidad-velocidad-densidad debe satisfacer. Entre todas las propiedades referidas se hace especial hincapié en la *condición de concavidad*. Esta condición descarta del Modelo Simple de Continuidad la existencia de ondas de choque de aceleración. Para ello la curva de equilibrio velocidad-espaciamento, o equivalentemente, el dia-

grama fundamental del tráfico deben ser funciones cóncavas. El conjunto de propiedades de la relación velocidad-densidad-flujo de tráfico impone restricciones tan severas que resulta virtualmente imposible encontrar curvas arbitrarias que las cumplan. Sin embargo, se demuestra que si las curvas velocidad-densidad poseen la forma funcional propuesta, entonces resulta relativamente sencillo encontrar expresiones analíticas para éstas.

El segundo argumento surge al aplicar el análisis dimensional a un modelo genérico de seguimiento de vehículos. Según dicho modelo, los conductores responden a los cambios de distancia con un tiempo de reacción y sensibilidad determinados. La aplicación del análisis dimensional al mencionado modelo, demuestra que la sensibilidad de los conductores no puede depender arbitrariamente de las variables del tráfico. La dependencia explícita de la sensibilidad conduce a la forma funcional para la curva velocidad-densidad, o sea, a una función, la función generadora, cuyo argumento es la distancia equivalente.

Finalmente se muestran diversos ejemplos de funciones generadoras. De todas las posibles curvas velocidad-densidad que se pueden derivar de ellas, sólo dos tienen especial interés: la curva *exponencial* y la curva de *máxima sensibilidad*. De entre todas las curvas velocidad-densidad sugeridas por otros autores, sólo una responde a la forma funcional propuesta en esta Tesis. Es concretamente la curva exponencial, que aparece en algunos trabajos que han pasado completamente inadvertidos. De este hecho se deduce que las curvas velocidad-densidad propuestas son completamente novedosas y, lo que es más importante, de todas las existentes en la literatura son las únicas que satisfacen el conjunto de propiedades requeridas.

En el apéndice C la teoría desarrollada en el apéndice previo se aplica a datos de tráfico. Ciertas curvas velocidad-densidad basadas en la forma funcional anterior, son usadas en un modelo de regresión que se ajusta a datos de tráfico en autopistas de tres carriles. Primeramente los datos originales son sometidos a un test estadístico para contrastar la estacionariedad de la serie de las velocidades y de las cuentas de vehículos. La aplicación iterativa de dicho test permite encontrar la serie estacionaria de mayor duración. Las cantidades medias se determinan a partir de las medias de las series. El procedimiento de selección de periodos de tráfico estacionario incluye una serie de recomendaciones sobre la duración mínima de dichos periodos para contar con estimadores suficientemente fiables.

Las curvas elegidas para los modelos de regresión son la exponencial y la de máxima sensibilidad. La bondad del ajuste es excelente, excepto para los detectores situados en el carril izquierdo. Para el carril izquierdo, un modelo de regresión bilineal resulta más adecuado. No obstante, dicho modelo no responde a la forma funcional cuya validez se pretende verificar. En todos los modelos de regresión ensayados, la desviación entre los datos y los valores predichos es extraordinariamente reducida. Este hecho confirma la validez del procedimiento para aislar periodos de tráfico estacionario. Dicho procedimiento elimina satisfactoriamente la dispersión de las medidas individuales.

En el apéndice D se presenta un modelo de seguimiento de vehículos. El modelo es derivado a partir de tres condiciones: la velocidad de los vehículos en equilibrio es una función dada de la distancia entre ellos, las perturbaciones se propagan sin amplificarse y la velocidad de propagación de pequeñas perturbaciones coincide con la velocidad de las ondas cinemáticas de la teoría de Lighthill-Whitham.

El modelo de seguimiento de vehículos es formulado primeramente para el caso de relación lineal entre la velocidad y la distancia. Partiendo de las tres condiciones anteriormente mencionadas, se obtiene una expresión para el tiempo de reacción y la sensibilidad de los conductores.

A continuación se extiende el mismo razonamiento para el caso de curva velocidad-distancia no lineal. Se obtiene entonces una formulación para el tiempo de reacción en función de la distancia entre vehículos. Si se acepta la condición de concavidad, el tiempo de reacción resulta ser una función creciente de la distancia entre vehículos. A densidades altas, dicha función proporciona un valor del tiempo de reacción del orden de 0.6 segundos, lo que concuerda con diversos datos. Conforme el tráfico se hace más ligero, el tiempo de reacción tiende a infinito, lo que significa realmente que las interacciones entre conductores desaparecen.

El modelo de seguimiento de vehículos no lineal responde a una ecuación diferencial con retraso dependiente del estado. En dicho modelo la inversión del orden de la causalidad o *retrogresión*, puede aparecer como consecuencia de la variabilidad del tiempo de reacción. El problema de la retrogresión es resuelto mediante un razonamiento basado en el comportamiento esperable de los conductores. Dicho razonamiento introduce el concepto de *saturación de la percepción*.

Finalmente, se demuestra que al adoptar para la curva velocidad-distancia la forma funcional propuesta en el apéndice B, el modelo adimensional resultante no contiene parámetros. Este hecho destacable implica que la dinámica de un convoy de vehículos está exclusivamente gobernada por la función generadora.

En el apéndice E se explican dos algoritmos de diferencias finitas para el modelo de seguimiento de vehículos previamente formulado. Para el primer algoritmo es necesario desarrollar un criterio numérico de saturación. Dicho criterio permite conocer si en un intervalo de tiempo suficientemente corto se va a producir saturación. Para ello se requiere evaluar una determinada función tan sólo en los extremos del intervalo.

El segundo algoritmo es especialmente adecuado para simulación debido a su extrema simplicidad. Los resultados numéricos muestran que el comportamiento del convoy obtenido mediante dicho algoritmo concuerda con la teoría de Lighthill-Whitham. En concreto se observa que las ondas de frenado no se distorsionan conforme se propagan por el convoy de vehículos, mientras que el perfil de las ondas de aceleración se estira progresivamente. Por último, mediante los dos algoritmos, se obtiene el movimiento del vehículo seguidor para ciertas maniobras del vehículo seguido. No se observan diferencias apreciables

en los resultados de lo que se deduce que el segundo algoritmo resulta más idóneo por su reducido número de operaciones.

En el apéndice F se formula una condición para cualquier modelo macroscópico de tráfico: la *condición de consistencia*. Dicha condición obliga a que la linealización de cualquier modelo macroscópico conduzca a las ecuaciones del Modelo Simple de Continuidad linealizado. En otras palabras: elimina del modelo linealizado las ondas no cinemáticas.

Al aplicar dicha condición al modelo de Payne se obtiene una expresión del tiempo de reacción en función de la densidad. Dicha expresión es similar a la propuesta en el apéndice D. Los cambios introducidos en el modelo de Payne por la adopción de la mencionada expresión del tiempo de reacción son investigados. Este estudio demuestra que los resultados del modelo de Payne modificado son casi idénticos a los del Modelo Simple de Continuidad, e incluso idénticos en ciertos casos.

También se realiza un análisis comparativo del modelo de Payne resultante con los modelos propuestos por otros autores. Dichos autores toman un valor macroscópico del tiempo de reacción, del orden de decenas de segundos, a diferencia de los valores microscópicos dados por la formulación propuesta en esta Tesis. Sin embargo, el análisis demuestra que la adopción de la nueva formulación del tiempo de reacción no hubiera modificado esencialmente los resultados obtenidos por dichos autores. La razón de esta aparente paradoja radica en que la sobrestimación del tiempo de reacción se ve compensada con la del coeficiente de anticipación.

Finalmente la estabilidad del tráfico es estudiada linealizando el modelo de Payne modificado. El análisis de estabilidad no conduce a ningún resultado práctico, lo que sugiere la necesidad de introducir términos estocásticos en el modelo para explicar los fenómenos de inestabilidad observados en el tráfico.

En resumen, las principales contribuciones de esta Tesis a la Teoría del Flujo de Tráfico son las que se enumeran a continuación:

- (i) se ha definido una forma funcional para la curva de equilibrio velocidad-densidad;
- (ii) se ha demostrado que las curvas que obedecen dicha forma funcional satisfacen todas las propiedades requeridas;
- (iii) se ha comprobado que dichas curvas se ajustan excelentemente a datos de tráfico;
- (iv) se ha formulado un modelo de seguimiento entre vehículos, que incluye una formulación del tiempo de reacción de los conductores;
- (v) la adimensionalización de dicho modelo conduce a un modelo universal, o sea, sin parámetros;
- (vi) se ha propuesto un algoritmo que simula el modelo anterior de una manera extremadamente simple;

- (vii) se ha demostrado que los cambios introducidos en el modelo de Payne por la nueva formulación del tiempo de reacción, conducen a un modelo casi idéntico al Modelo Simple de Continuidad;
- (viii) se ha comparado el modelo de Payne modificado con los modelos propuestos por otros autores, no habiéndose encontrado diferencias significativas.

Apéndice A

Introducción

A.1 Modelos Macroscópicos de Tráfico

Los modelos en los que el tráfico se asimila a un fluido son denominados modelos macroscópicos de tráfico. Las variables que describen el movimiento de dicho fluido son la velocidad media de los vehículos (V) y la densidad de tráfico (K). K representa el número de vehículos por unidad de longitud. La intensidad de tráfico (Q), que es el número de vehículos por unidad de tiempo está relacionada con las otras cantidades, ya que $Q = KV$. Una definición más precisa de estas variables se puede consultar en Leutzbach (1988).

Una hipótesis básica de los modelos macroscópicos es la existencia de una velocidad de equilibrio (V_e) que sería la velocidad de los vehículos en condiciones de tráfico estacionario y homogéneo. Esta velocidad es función de la densidad a través de una relación ($V_e = V_e(K)$) que tiene en cuenta factores como la geometría de la carretera y el comportamiento de los conductores. A lo largo de esta Tesis nos referiremos a la relación $V_e - K$ como la curva velocidad-densidad, entendiendo por velocidad, la velocidad de equilibrio.

Los modelos macroscópicos pueden ser divididos en dos tipos: modelos de primer orden y modelos de segundo orden. En los primeros la velocidad es considerada una función de la densidad, o sea, $V = V_e = V_e(K)$ por lo que solo la ecuación de continuidad es requerida para formular el modelo. En los segundos la velocidad es una variable independiente lo que exige introducir una nueva ecuación en el modelo: la ecuación de cantidad de movimiento.

A.2 La Curva Velocidad-Densidad

Las investigaciones sobre la relación entre la velocidad y la densidad comenzaron en los años 20. El trabajo de Schaar (1925) puede considerarse como pionero en este campo. Greenshields (1935) propuso una relación lineal entre la velocidad

y la densidad:

$$V_e = V_f \left(1 - \frac{K}{K_j}\right),$$

donde K_j es la *densidad de atasco* y V_f la máxima velocidad posible. A partir del trabajo de Greenshields (1935), numerosos autores han propuesto diversos modelos de velocidad-densidad. Los más conocidos son el de Greenberg (1959)

$$V_e = V_c \ln \left(\frac{K_j}{K}\right); \quad (\text{A.1})$$

Underwood (1961)

$$V_e = V_f \exp \left(-\frac{K}{K_c}\right);$$

y Drake et al. (1967)

$$V_e = V_f \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{K}{K_c}\right)^2\right);$$

donde K_c y V_c son los valores de la densidad y la velocidad para los que se alcanza la capacidad o máxima intensidad posible. Otra familia de curvas velocidad-densidad han sido deducidas de modelos de car-following:

$$V_e = V_f \left(1 - \left(\frac{K}{K_j}\right)^l\right)^m, \quad (\text{A.2})$$

que es una generalización de la curva propuesta por Pipes (1967):

$$V_e = V_f \left(1 - \frac{K}{K_j}\right)^m.$$

Por otra parte, Prigogine y Herman (1971) han calculado numéricamente curvas velocidad-densidad a partir de las ecuaciones de la teoría cinética del tráfico.

Greenshields postuló para las curvas velocidad-densidad las siguientes propiedades:

- (i) los valores de la velocidad van desde cero hasta una máximo conocido como *velocidad de flujo libre*, V_f ;
- (ii) los valores de la densidad están comprendidos entre cero (flujo libre) y un máximo llamado *densidad de atasco* K_j ;
- (iii) el máximo de la velocidad se alcanza en flujo libre, $V_e(0) = V_f$;
- (iv) la circulación se interrumpe a la densidad de atasco, $V_e(K_j) = 0$;

- (v) la velocidad decrece con la densidad, o sea, $V_e'(K) < 0$ para $0 < K \leq K_j$, donde (') significa derivada respecto de la densidad;
- (vi) en el límite de flujo libre la dependencia de la velocidad sobre la densidad desaparece al igual que las interacciones entre conductores, $V_e'(0) = 0$.

Estas propiedades de la curva velocidad-densidad son propiedades estáticas. En la sección B.1 se propondrá otra propiedad de tipo dinámico: la condición de concavidad.

A.3 Modelos de Seguimiento de Vehículos

Los modelos de seguimiento de vehículos, o simplemente modelos de car-following, establecen una relación entre la reacción de un conductor de un vehículo y los cambios de velocidad del vehículo precedente. La respuesta tiene lugar tras un tiempo de reacción y la sensibilidad de la respuesta es función de la velocidad y la distancia entre los vehículos. La mayoría de los modelos son de la forma:

$$\dot{V}(t+T) = \alpha_{pq} V(t)^p \frac{[V_L(t) - V(t)]}{[X_L(t) - X(t)]^q}, \quad (\text{A.3})$$

donde T es el tiempo de reacción y X es la distancia recorrida. El subíndice L hace referencia al vehículo seguido. Las variables sin subíndice son las del vehículo seguidor. Se puede demostrar que este modelo de car-following conduce a las curvas velocidad-densidad del tipo (A.2).

A.4 El Modelo Simple de Continuidad

En este modelo, la velocidad se supone que es una función de la densidad. La única ecuación del modelo es la de continuidad que expresa el balance entre el flujo neto de vehículos a través de una sección y la variación del número de vehículos en ésta. Se tiene:

$$K_t + (Q_e)_x = 0, \quad (\text{A.4})$$

donde los subíndices indican derivada parcial.

La relación velocidad-densidad conduce a una ecuación para la densidad,

$$K_t + C(K)K_x = 0, \quad (\text{A.5})$$

donde

$$C(K) = \frac{dQ_e(K)}{dK} = Q_e'(K) = KV_e'(K) + V_e(K). \quad (\text{A.6})$$

La ecuación (A.5) es una ecuación de ondas no lineales. Las soluciones son ondas que se desplazan a una velocidad $C(K)$. El modelo de continuidad fue propuesto por Lighthill y Whitham (1955), por lo que también se conoce como teoría de Lighthill y Whitham.

A.5 El Modelo de Payne

El modelo de Payne es el más usado de todos los modelos de segundo orden. Las ecuaciones de este modelo son la ecuación de continuidad:

$$K_t + (KV)_x = 0; \quad (\text{A.7})$$

y la de cantidad de movimiento,

$$V_t + VV_x = \frac{V_e - V}{T} - \frac{\nu}{T} \frac{1}{K} K_x; \quad (\text{A.8})$$

donde T es el tiempo de reacción y ν es el coeficiente de anticipación. Payne sugirió un tiempo de reacción constante y la siguiente expresión para ν :

$$\nu = -\frac{1}{2} V_e'. \quad (\text{A.9})$$

Payne (1971) derivó dicho modelo como una versión continua del modelo de seguimiento de vehículos

$$\dot{X}_{n+1}(t+T) = V_e \left(\frac{1}{X_n(t) - X_{n+1}(t)} \right).$$

A.6 Esquema de la Tesis

En el apéndice B se verá que ninguna de las curvas velocidad-densidad propuestas hasta ahora satisface las propiedades requeridas. Por consiguiente, la búsqueda de una expresión analítica para la curva velocidad-densidad es una cuestión abierta. En el apéndice B se propone una forma funcional para la curva velocidad-densidad, con la particularidad de que las curvas que obedecen a dicha expresión satisfacen las propiedades mencionadas. En el apéndice B se ajusta un modelo de regresión no lineal basado en dichas curvas a datos de tráfico en autopistas. En el apéndice D se expone un modelo de seguimiento entre vehículos que está basado en una formulación para el tiempo de reacción y en la forma funcional de la curva velocidad-densidad. Diversas soluciones numéricas del modelo resultante se presentan en el apéndice E. Como aplicación se formula un algoritmo de simulación microscópica del tráfico. Finalmente, en el apéndice F la formulación para el tiempo de reacción se deduce a partir del modelo de Payne. Las consecuencias de adoptar dicha formulación en el modelo de Payne también se estudian.

Apéndice B

La Relación Velocidad-Densidad

B.1 La Condición de Concavidad

La solución del Modelo Simple de Continuidad (A.5) puede ser fácilmente obtenida en forma paramétrica mediante el método de las características. Para dicho modelo las características son rectas de pendiente $C'(K)$ (ver Whitham 1974). Además la densidad permanece constante a lo largo de las características, por lo que conociendo el valor de ésta en una curva de contorno, se puede conocer en el resto del dominio.

Es posible encontrar puntos donde la densidad toma dos valores, lo que ocurre si las características se cortan. Dichos puntos corresponden en realidad a una onda de choque, llamada así ya que la densidad varía súbitamente a través de la onda. En principio pueden existir dos tipos de onda de choque: ondas de choque de aceleración y ondas de choque de frenado. En las primeras la velocidad aumenta tras la onda, mientras que en las segundas disminuye. La condición necesaria y suficiente para que existan ondas de choque de aceleración es que $C''(K) > 0$. De igual manera, para la existencia de ondas de choque de frenado es necesario y suficiente que $C''(K) < 0$.

Una onda de choque en el tráfico real se corresponde a una situación en la que los vehículos experimentan un cambio brusco, pero no instantáneo, de velocidad. Tales cambios de velocidad se producen regularmente cuando un convoy de vehículos se aproxima a un semáforo en rojo o cuando en general un vehículo frena bruscamente para evitar colisionar con el vehículo precedente. Es decir, los cambios bruscos de velocidad que, de una manera idealizada, describen las ondas de choque, corresponden siempre a disminuciones de velocidad. Por lo tanto resulta natural admitir solamente ondas de choque de frenado en el modelo. No parece razonable pensar en aceleraciones violentas de los vehículos como si éstos fueran catapultados hacia delante, situación descrita por una onda de choque de aceleración. Por lo tanto las ondas de choque de aceleración deber ser descartadas del Modelo Simple de Continuidad. La condición necesaria y

suficiente para ello es:

$$C'(K) = Q_e''(K) < 0, \quad (\text{B.1})$$

o sea, que la curva intensidad-densidad sea cóncava.

Franklin (1961) fue el primero en enunciar claramente esta propiedad: "The relationship between flow and density is such that for densities greater than that corresponding to maximum flow the gradient of the curve increases in magnitude with density. In such a case, if the flow is decelerated each successive wave carrying a small increase in density travels faster than the previous waves and the waves coalesce to form a shock wave". Sorprendentemente, la condición de concavidad ha sido olvidada en la mayor parte de los trabajos de investigación realizados durante los últimos 30 años. Tan sólo recientemente Ansorge (1990) la ha recuperado para la teoría. Dicho autor ha probado que (B.1) es equivalente a la condición de entropía que permite eliminar del Modelo Simple de Continuidad las soluciones que no son físicamente válidas.

La condición de concavidad puede ser también escrita en términos de la curva velocidad-espaciamento. Si se tiene en cuenta que el espaciamento (H) es el inverso de la densidad, se obtiene,

$$K^3 Q_e'' = \frac{d^2 V_e}{dH^2},$$

que demuestra que la curva velocidad-espaciamento debe ser cóncava. De ahora en adelante se asumirá que la curva intensidad-densidad satisface la condición de concavidad.

Finalmente, la velocidad de una onda de choque que cause una disminución de la velocidad de V_1 a V_2 , está dada por:

$$V_s = \frac{K_2 V_2 - K_1 V_1}{K_2 - K_1}, \quad (\text{B.2})$$

donde $V_i = V_e(K_i)$. La ecuación (B.2) se obtiene de la igualdad de la intensidad de tráfico Q_s relativo a la onda:

$$Q_s = K_1(V_1 - V_s) = K_2(V_2 - V_s).$$

La velocidad de la onda es la pendiente de la recta que pasa por los puntos (K_1, Q_1) y (K_2, Q_2) , mientras que la velocidad $V_e(K)$ es la pendiente de la recta que pasa por el origen y el punto $(K, Q_e(K))$, ver figura B.1.

B.2 Los Modelos de Velocidad-Densidad Existentes

Resulta bastante notable que ninguno de los modelos de velocidad-densidad mencionados en la sección A.2 satisfagan completamente las propiedades enumeradas en dicha sección y la condición de concavidad (B.1). Por lo tanto, el

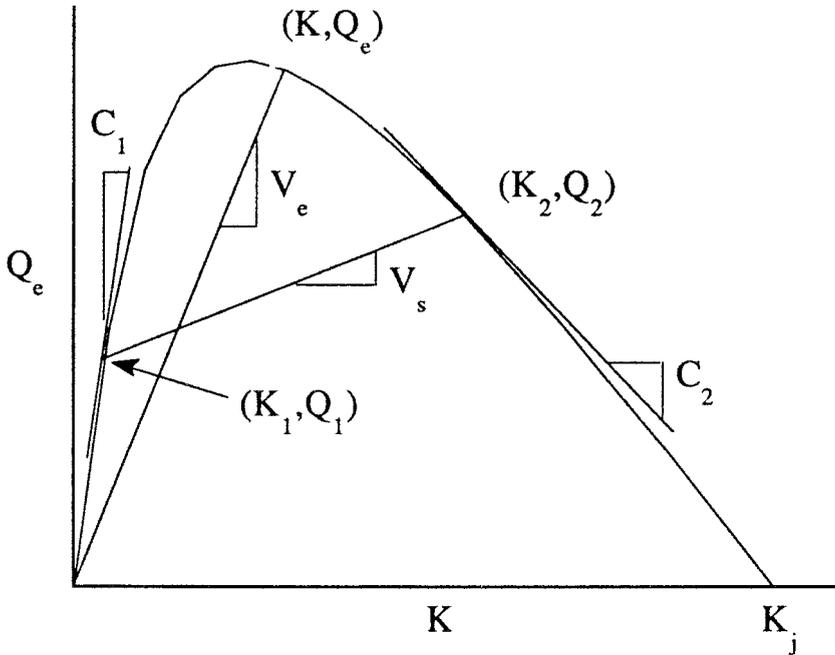


Figura B.1: Diagrama Fundamental y velocidad de las ondas.

encontrar un modelo de velocidad-densidad que cumpla todas las propiedades requeridas es una cuestión sin resolver. La figura B.2 muestra las curvas velocidad-densidad más comunes. El eje x representa la densidad adimensional definida como K/K_{ref} , donde el valor de referencia K_{ref} , es K_j or K_c dependiendo de la curva. Igualmente la velocidad de referencia V_{ref} , es V_f or V_c .

Aparte de estos problemas, existe una controversia sobre la continuidad de la curva intensidad-densidad. Desde el trabajo de Edie (1961), diversos autores han sugerido curvas velocidad-densidad discontinuas. Recientemente, autores como Koshi, Iwasaki y Okhura (1983) y Payne (1984) han basado esta conclusión en exhaustivos análisis de datos de tráfico en autopistas. Edie observó una discontinuidad en la curva intensidad-densidad para densidades de 90 vehículos por milla. Una discontinuidad semejante obtuvo también Payne en su análisis. Sin embargo, estos análisis pueden llevar a conclusiones falsas debido principalmente al método seguido para seleccionar los datos. Hall et al. (1986) han criticado igualmente el trabajo de Koshi et al. (1986). La opinión de estos autores revela los defectos de los análisis realizados: la discontinuidad observada en la curva intensidad-densidad sería la consecuencia de la existencia

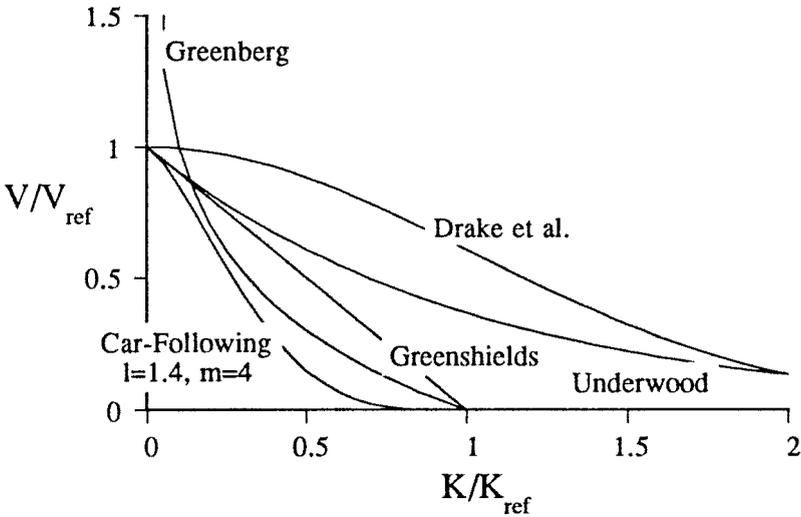


Figura B.2: Curvas velocidad-densidad más comunes.

de un cuello de botella aguas abajo. Además los datos han sido probablemente agrupados de tal manera que reflejan condiciones que nunca han existido en la realidad. Hall et al. llevan también a cabo un agudo análisis de los trabajos de Ceder (1979) y Easa (1983), arrojando serios interrogantes sobre la validez de las conclusiones.

Otra cuestión polémica es la derivabilidad de la curva intensidad-densidad. Hall et al. encontraron que una curva suave no ajustaba bien los datos recogidos por ellos. Una curva con forma de V invertida resultaba ideal para explicar el régimen de transición entre el régimen congestionado y el libre. Ellos dieron un argumento basado en el análisis de ondas de choque para justificar la forma de V invertida. Sin embargo, si la curva intensidad-densidad sólo tiene en cuenta estados estacionarios del tráfico, resulta un contrasentido recurrir a argumentos de tipo dinámico para interpretar características de la curva intensidad-densidad. Por ello, la continuidad y derivabilidad del diagrama fundamental del tráfico debe ser admitida a priori, para dejar que cualquier discontinuidad o pico sea explicada mediante un modelo dinámico. Por lo tanto, se asumirá que la curva intensidad-densidad es continua y diferenciable.

B.3 Los Parámetros del Tráfico

En esta sección se argumenta que los principales parámetros de las curvas de tráfico son la densidad de atasco K_j , la velocidad de flujo libre V_f y la velocidad

de las ondas cinemáticas en el atasco, C_j , que está dada por:

$$C_j = Q'(K_j). \quad (\text{B.3})$$

Por lo tanto la relación velocidad-densidad puede ser escrita de la siguiente forma:

$$V_e = F(K, K_j, V_f, C_j, n_1, \dots, n_p),$$

donde, n_1, \dots, n_p es un conjunto de parámetros adimensionales que caracterizan las propiedades de la curva velocidad-densidad que no podemos explicar en términos de los parámetros físicos K_j , V_f y C_j .

El que la densidad de atasco y la velocidad de flujo libre sean parámetros fundamentales del tráfico es consecuencia directa de las propiedades de la curva velocidad-densidad. La densidad de atasco está principalmente determinada por la longitud de los vehículos y toma valores que varían en un rango relativamente pequeño. En general, se puede considerar $K_j = 150$ vehículos por kilómetro como valor medio. Este valor corresponde a un espaciamiento de atasco H_j de 6.7 metros. La velocidad de flujo libre varía sin embargo en un rango considerablemente más amplio. Por lo tanto, la densidad de atasco puede ser considerada una constante cuasi-universal. A continuación se demostrará que lo mismo ocurre con la velocidad de las ondas den el atasco. En este caso se puede tomar como valor medio -20 km/h.

En la literatura sobre Teoría del Flujo de Tráfico existen numerosos testimonios que confirman la afirmación anterior. La mayoría de ellos surgen del análisis de la relación velocidad-densidad en el régimen congestionado. El valor de C_j está dado por

$$C_j = K_j \left. \frac{dV_e}{dK} \right|_{K_j} = -H_j \left. \frac{dV_e}{dH} \right|_{H_j}.$$

Dicho valor puede ser estimado también a partir del tiempo que un vehículo en un convoy parado tarda en arrancar en función de su posición dentro del convoy.

Pipes (1953) propuso un modelo de seguimiento de vehículos basado en la regla del código de la circulación de California: "a good rule for following another vehicle at a safe distance is to allow yourself the length of a car (about fifteen feet) for every ten miles per hour you are traveling". Si se asume un espaciamiento de atasco ligeramente superior a la distancia de seguridad, por ejemplo 20 pies, el valor de C_j que da este criterio sería:

$$C_j = -20 \text{ pies} \times \frac{10 \text{ millas/h}}{15 \text{ pies}} = -21 \text{ km/h}.$$

Lighthill y Whitham (1955) fueron los primeros en señalar la linealidad de la curva velocidad-espaciamiento a altas densidades: "as V increases, the mean headway increases almost linearly (by about 1.2 ft for each 1 mile/h increase in speed)". Puesto que según ellos la longitud media de un vehículo en Gran

Bretaña es de 17 pies, las observaciones anteriores conducen al siguiente valor de C_j :

$$C_j = -17 \text{ pies} \times \frac{1 \text{ millas/h}}{1.2 \text{ pie}} = -23 \text{ km/h.}$$

Foote (1963) referencia un trabajo de Daou sobre formación de convoyes en los túneles Lincoln y Holland en Nueva York: "for constant speed platoons, Daou hypothesized a mean headway-time versus mean speed relationship of $t_h = 1.6 + 25/V_e$ ". Teniendo en cuenta que el intervalo temporal entre dos vehículos t_h es igual a H/V_e , se obtiene:

$$C_j = -\frac{25 \text{ pie}}{1.6 \text{ seg}} = -17 \text{ km/h.}$$

Edie y Baverez (1965) recopilaron datos en el túnel Holland para estudiar la propagación de ondas de marcha y parada. El túnel fue dividido en cuatro secciones y el valor medio de la velocidad de propagación de dichas ondas fue -16 km/h.

Dörfler (1965) estudió la dinámica de un convoy parado en un semáforo. El encontró que el tiempo transcurrido entre el inicio de la fase verde y el arranque de cada vehículo t_s , era un función lineal de la posición de éste en el convoy n_s . Concretamente:

$$t_s = -0.68 + 1.08n_s,$$

donde el tiempo está en segundos. La linealidad de esta expresión es debida a la constancia de la velocidad de la onda de arranque. Dicha velocidad es un estimador razonable de C_j . Tomando un valor de 5.6 m para el espaciamiento de atasco, tal como sugiere Dörfler, se tiene:

$$C_j = -\frac{5.6 \text{ m}}{1.08 \text{ seg}} = -19 \text{ km/h.}$$

Lam y Rothery (1970) estudiaron la propagación de fluctuaciones de velocidad en autopistas, calculando el desfase temporal que maximizaba la correlación entre la velocidad medida en dos puntos diferentes. La velocidad de la onda puede ser estimada como la distancia entre los puntos dividida por el desfase temporal. Este procedimiento da un valor de 17.8 pie/seg, o sea, $C_j = -19.4$ km/h.

Recientemente Ozaki (1993) ha obtenido una serie de observaciones de velocidad-espaciamiento correspondiente a tráfico estacionario. De ellas se deduce una velocidad de la onda de -17 km/h, aproximadamente.

Por lo tanto, numerosas observaciones experimentales sostienen que la velocidad de las ondas en el atasco es una constante cuasi-universal cuyos valores oscilan entre -17 y -23 km/h. Valores ligeramente por debajo de este rango han sido encontrados por Franklin (1965) y Duckstein et al. (1970), $C_j = -13.1$ km/h y $C_j = -14.4$ km/h respectivamente. Por otra parte, Greenberg (1959) y Herman et al. (1971) dan valores de -27 km/h.

La sobreestimación del valor de C_j es bastante frecuente en las curvas de velocidad-densidad tomadas por algunos autores. Concretamente Drake et al. (1967), Payne (1979), Michalopoulos y Pisharody (1980) y Michalopoulos et al. (1984), consideran curvas $V_e - K$ que dan unos valores de C_j absolutamente irrealistas, -43 km/h, -158 km/h, -48 km/h y -96 km/h. respectivamente.

En esta sección se ha puesto de manifiesto la existencia de tres parámetros fundamentales del tráfico: la densidad de atasco (K_j), la velocidad de las ondas en el atasco (C_j) y la velocidad de flujo libre (V_f). Además se ha demostrado que los dos primeros son cuasi-universales. Franklin (1965) fue el primero en destacar el papel de estos tres parámetros: "the flow-concentration relationship is determined by three main factors ... the jam concentration ... the slope of the steady-state part of the curve, and the maximum safe speed". Resulta sorprendente que el trabajo de Franklin haya pasado inadvertido durante 30 años.

B.4 La Forma Funcional

En la sección previa se ha visto que tanto la densidad de atasco como la velocidad de las ondas en el atasco son prácticamente constantes. Por lo tanto, resulta obvio adimensionalizar las variables de tráfico por estas magnitudes. Definiendo entonces:

$$u_e = \frac{V_e}{|C_j|}, \quad \rho = \frac{K}{K_j}, \quad q_e = \frac{Q}{K_j|C_j|},$$

las propiedades de la curva velocidad-densidad (ver sección A.2) y la condición de concavidad se transforman en

$$u_e(0) = u_f, \quad (\text{B.4})$$

$$u_e(1) = 0, \quad (\text{B.5})$$

$$u'_e(\rho) < 0, \quad 0 < \rho < 1, \quad (\text{B.6})$$

$$u'_e(0) = 0, \quad (\text{B.7})$$

$$q''_e(\rho) < 0, \quad 0 < \rho < 1, \quad (\text{B.8})$$

donde $u_f = V_f/|C_j|$ y las derivadas son respecto de la densidad adimensional ρ . Debido a la adimensionalización elegida se debe cumplir:

$$u'_e(1) = q'_e(1) = -1. \quad (\text{B.9})$$

El problema de encontrar una función continua y derivable que cumpla las anteriores propiedades se simplifica considerablemente si se restringe la búsqueda a funciones que tengan la siguiente forma funcional:

$$u_e = u_f \left[1 - f \left(\frac{1}{u_f} \left(\frac{1}{\rho} - 1 \right) \right) \right]. \quad (\text{B.10})$$

Haciendo

$$\lambda = \frac{1}{u_f} \left(\frac{1}{\rho} - 1 \right), \quad (\text{B.11})$$

se tendrá

$$u_e = u_f(1 - f(\lambda)).$$

La función $f(\lambda)$ se llamará *función generadora*. Su argumento λ es un espaciamiento adimensional y por ello se denominará *espaciamiento equivalente*.

Entonces la función generadora debe satisfacer las siguientes propiedades:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda) = 0, \quad (\text{B.12})$$

$$f(0) = 1, \quad (\text{B.13})$$

$$\dot{f}(\lambda) < 0, \quad \lambda > 0, \quad (\text{B.14})$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^2 \dot{f}(\lambda) = 0, \quad (\text{B.15})$$

$$\ddot{f}(\lambda) > 0, \quad \lambda > 0, \quad (\text{B.16})$$

$$\dot{f}(0) = -1, \quad (\text{B.17})$$

donde $(\dot{})$ significa derivada respecto de λ . Además,

$$0 < f(\lambda) < 1, \quad \lambda > 0. \quad (\text{B.18})$$

Es fácil ver que de las condiciones (B.12), (B.16) y (B.18) implican (B.14). Por lo tanto la lista de propiedades para la función generadora se reduce a (B.12), (B.13), (B.15), (B.16), (B.17) y (B.18). Las condiciones para la función generadora son menos restrictivas que para las relaciones originales.

B.5 Ejemplos de Funciones Generadoras

En esta sección se proponen cuatro familias de funciones generadoras: exponencial, doble exponencial, racional y racional-inversa. La familia exponencial de funciones generadoras está dada por:

$$f(\lambda) = \exp \left[1 - \left(1 + \frac{\lambda}{n} \right)^n \right], \quad (\text{B.19})$$

con $n > 0$. Para $n = 1$, la expresión anterior se reduce a

$$f(\lambda) = \exp(-\lambda). \quad (\text{B.20})$$

La curva velocidad-densidad resultante es:

$$V_e = V_f \left[1 - \exp \left(\frac{|C_j|}{V_f} \left(1 - \frac{K_j}{K} \right) \right) \right]. \quad (\text{B.21})$$

Cuando $n \rightarrow \infty$ la función generadora exponencial tiende a:

$$f(\lambda) = \exp[1 - \exp(\lambda)], \quad (\text{B.22})$$

que es a su vez una función generadora.

La familia doble exponencial se puede obtener introduciendo un parámetro en la anterior función generadora:

$$f(\lambda) = \exp \left[n \left(1 - \exp \left(\frac{\lambda}{n} \right) \right) \right],$$

con $n \geq 1$. El límite de estas curvas cuando $n \rightarrow \infty$ es $f(\lambda) = \exp(-\lambda)$.

La familia racional corresponde a la expresión:

$$f(\lambda) = \frac{1}{\left(\frac{\lambda}{n} + 1 \right)^n}.$$

con $n > 1$. Finalmente la familia racional-inversa tiene la forma:

$$f(\lambda) = \frac{n}{\exp(n\lambda) + n - 1}$$

donde $0 < n \leq 2$. Para $n = 1$, se reduce a la curva (B.21), y para $n = 2$, la función toma la forma más familiar:

$$f(\lambda) = 1 - \tanh(\lambda).$$

La figura B.3 muestra las curvas velocidad-espaciamento generadas por estas cuatro familias para diversos valores de los parámetros. la velocidad adimensional v_e definida como:

$$v_e = \frac{V_e}{V_f} = \frac{u_e}{u_f} = 1 - f(\lambda), \quad (\text{B.23})$$

ha sido representada frente al espaciamento adimensional (λ). Un hecho bastante destacable es que todas las curvas están acotadas superiormente por la curva

$$v_e = 1 - \exp[1 - \exp(\lambda)],$$

que se aproxima al régimen bilineal idealizado:

$$v_e = \lambda, \quad \lambda < 1$$

$$v_e = 1, \quad \lambda \geq 1.$$

Tan sólo la curva velocidad-densidad dada por (B.21) ha sido propuesta anteriormente por otros autores. Esta curva tiene de hecho una interesante

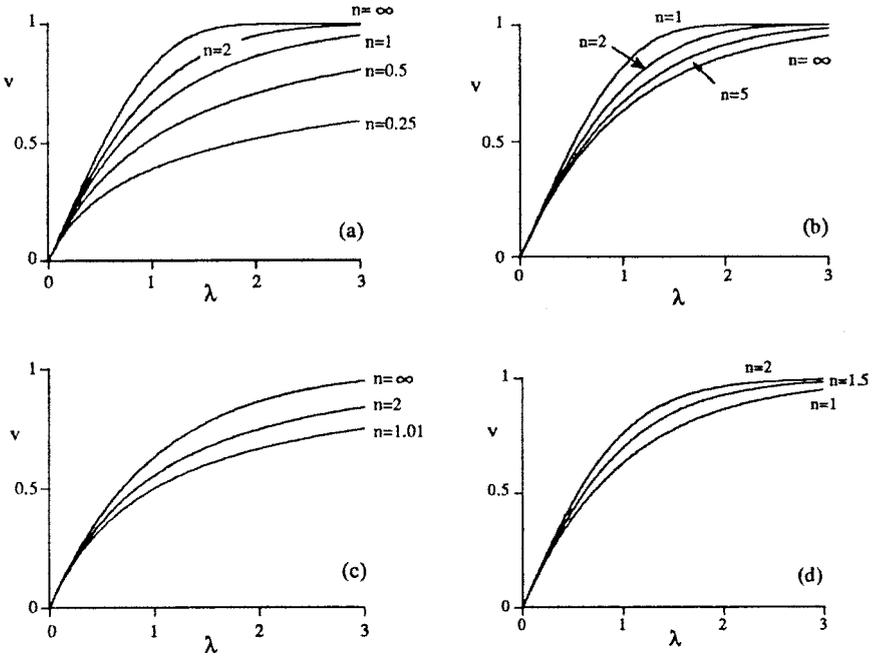


Figura B.3: Velocidad adimensional (v) y espaciamento equivalente (λ) para las familias exponencial (a), doble exponencial (b), racional (c) y racional-inversa (d).

historia. Fue propuesta independientemente por Newell (1961) y Franklin (1961) como solución estacionaria de los modelos de seguimiento de vehículos:

$$V_i = V_f \left[1 - \exp \left(\frac{|C_j|}{V_f} (1 - K_j (X_{i-1} - X_i)) \right) \right] \quad (\text{Newell})$$

y

$$\frac{dV_i}{dt} = |C_j| K_j \left(1 - \frac{V_i}{V_f} \right) (V_{i-1} - V_i) \quad (\text{Franklin})$$

donde el subíndice i se usa para el vehículo seguidor y $i - 1$ para el seguido. Newell toma (B.21) a priori simplemente porque “it has approximately the correct shape and it is reasonably simple”, mientras que Franklin parte del anterior modelo de seguimiento de vehículos ya que encuentra que “a reasonable agreement with the measured acceleration characteristics of automobiles is obtained if it is assumed that the available acceleration decreases in proportion to the speed”. La curva (B.21) es posteriormente mencionada en el trabajo de

Leutzbach y Bexelius (1966), que más tarde es referenciado en el libro de Valdés (1971). Desde entonces, la curva exponencial desaparece misteriosamente de la literatura.

B.6 La Derivación de la Forma Funcional

En esta sección se derivará la forma funcional (B.10) mediante dos argumentos diferentes: uno estrictamente matemático y otro basado en el comportamiento de los conductores.

B.6.1 Argumento matemático

Sin pérdida de generalidad se puede escribir

$$u_e = u_f[1 - f(\lambda(\rho))], \quad q = \rho u(\rho),$$

donde $\lambda(\rho)$ es en principio una función desconocida. Al derivar respecto de ρ se obtiene:

$$\begin{aligned} u'_e(\rho) &= -u_f \dot{f}(\lambda) \lambda', \\ q''_e(\rho) &= -u_f [\rho \ddot{f}(\lambda) \lambda'^2 + (\rho \lambda'' + 2\lambda') \dot{f}(\lambda)], \end{aligned}$$

donde

$$\lambda' = \frac{d\lambda}{d\rho}.$$

La elección de una función $\lambda(\rho)$ que satisfaga

$$\rho \lambda'' + 2\lambda' = 0, \tag{B.24}$$

elimina la dependencia de $q''_e(\rho)$ respecto de $\dot{f}(\lambda)$ y simplifica el problema de encontrar una expresión analítica para $u_e(\rho)$. La integración de la anterior ecuación diferencial con las condiciones

$$\lambda(\rho_0) = \lambda_0, \quad \lambda'(\rho_0) = \lambda'_0,$$

produce:

$$\lambda - \lambda_0 = \lambda'_0 \rho_0^2 \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} \right).$$

Por lo tanto

$$\lambda' = \lambda'_0 \frac{\rho_0^2}{\rho^2},$$

y la condición (B.9) obliga a que

$$-u_f \dot{f}(\lambda(1)) \lambda'_0 \rho_0^2 = -1. \tag{B.25}$$

Entonces la transformación $\lambda(\rho)$ está dada por:

$$\lambda - \lambda_0 = -\frac{1}{u_f f(\lambda(1))} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right).$$

La elección de ρ_0 , λ_0 y λ'_0 que conduce al espaciamento equivalente (B.11) es obviamente $\rho_0 = 1$, $\lambda_0 = 0$ y $\lambda'_0 = -1/u_f$. Otra elección de ρ_0 , λ_0 y λ'_0 hubiera conducido a la misma forma de la función generadora sin más que hacer una adecuada transformación de variables. En conclusión, la forma funcional (B.10) es la única que simplifica el problema de la curva velocidad-densidad ya que reduce el número de condiciones requeridas.

B.6.2 Argumento del comportamiento de los conductores

La curva velocidad-densidad puede ser considerada como una solución de equilibrio de un modelo de seguimiento entre vehículos. Un modelo genérico de seguimiento entre vehículos puede ser escrito en la siguiente forma adimensional:

$$\frac{du}{d\tau} = s(u, h; u_f) \frac{dh}{d\tau},$$

donde $\tau = t|C_j|K_j$ es el tiempo adimensional y $h = 1/\rho$ es el espaciamento adimensional. La función s es la sensibilidad de los conductores respecto de cambios en la velocidad relativa. La solución de equilibrio del modelo anterior es entonces:

$$\frac{du_e}{dh} = s(u_e; u_f).$$

En principio la sensibilidad puede depender separadamente de la velocidad y de la velocidad adimensional de flujo libre u_f . Pero esta hipótesis implicaría que la sensibilidad dependiera de la velocidad de las ondas en el atasco. No es razonable suponer que la sensibilidad depende de este parámetro macroscópico que no está relacionado con el comportamiento individual de cada conductor. En realidad resulta absurdo admitir que los conductores conocen incluso la existencia de las ondas que generan, por lo tanto la dependencia de la sensibilidad de C_j debe ser eliminada. La única manera de hacerlo es suponiendo que:

$$s(u_e; u_f) = s(u_e/u_f) = s(V_e/V_f).$$

Por lo que la integración de la ecuación

$$\frac{du_e}{dh} = s(u_e/u_f), \tag{B.26}$$

con la condición $u_e(h = 1) = 0$ conduce a la solución

$$R(u_e/u_f) - R(0) = \frac{1}{u_f}(h - 1),$$

que escrita en términos de la densidad adimensional conduce a la forma funcional propuesta (B.10), puesto que la constante $R(0)$ es irrelevante.

La función s es en realidad la sensibilidad adimensional y viene dada por (B.26):

$$s(v_e) = \frac{du_e}{dh} = \frac{dv_e}{d\lambda} = -\dot{f}(\lambda) = -\dot{f}(f^{-1}(1 - v_e)).$$

La sensibilidad física se obtiene teniendo en cuenta que $v_e = V_e/V_f$:

$$S(v_e) = \frac{dV_e}{dH} = \frac{|C_j|}{H_j} s(v_e). \quad (\text{B.27})$$

En esta expresión aparece el parámetro C_j pero en la forma $|C_j|/H_j$, que es una medida microscópica relacionada con el tiempo de reacción de los conductores.

Para la familia exponencial de funciones generadoras la sensibilidad viene dada por:

$$s(v_e) = (1 - v_e)[1 - \ln(1 - v_e)]^{(1 - \frac{1}{n})}.$$

Las curvas de sensibilidad se muestran en la figura B.4 para diversos valores de n . El límite superior de todas ellas se obtiene con $n = \infty$

$$s(v_e) = (1 - v_e)[1 - \ln(1 - v_e)], \quad (\text{B.28})$$

que corresponde a la curva velocidad-densidad generada por (B.22). Por esta razón se denominará a esta curva con el nombre de *curva de máxima sensibilidad*.

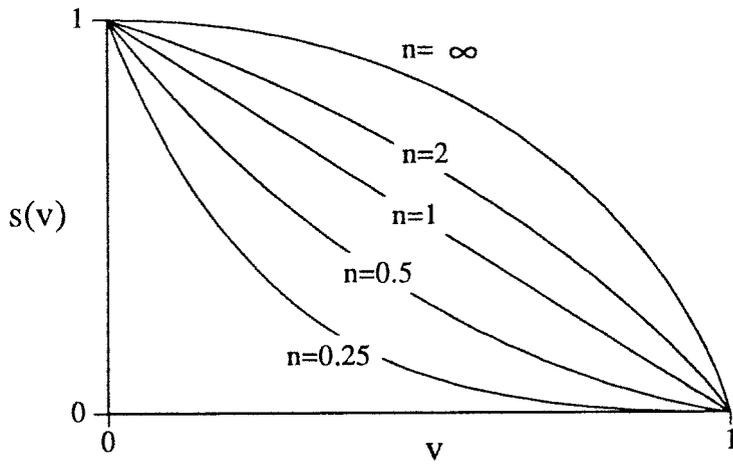


Figura B.4: Curvas de sensibilidad para la familia exponencial.

Apéndice C

Ajuste de Datos de Tráfico en Autopistas

En el apéndice previo se han propuesto diversas curvas velocidad-densidad que responden a la forma funcional:

$$V_e = V_f[1 - f(\lambda)], \quad (C.1)$$

donde λ viene dado por

$$\lambda = \frac{|C_j|}{V_f} \left(\frac{H}{H_j} - 1 \right). \quad (C.2)$$

De todos los modelos propuestos, dos presentan especial interés. Son la curva exponencial

$$V_e = V_f \left[1 - \exp \left(\frac{|C_j|}{V_f} \left(1 - \frac{H}{H_j} \right) \right) \right], \quad (C.3)$$

y la curva de máxima sensibilidad:

$$V_e = V_f \left[1 - \exp \left(1 - \exp \left(\frac{|C_j|}{V_f} \left(\frac{H}{H_j} - 1 \right) \right) \right) \right]. \quad (C.4)$$

En este apéndice se aplican estos dos modelos a datos de tráfico en autopistas.

C.1 Selección de Datos de Tráfico en Equilibrio

Los datos de tráfico usados en este estudio fueron recogidos en la autopista A2 Amsterdam-Utrecht por Smulders (1992). Se trata de una autopista de tres carriles. Dichos datos fueron tomados en la hora punta de la mañana (6.30 a 9.30) en días laborales. Se componen de mediciones de la velocidad media, ocupación y número de vehículos registrados cada 30 segundos. La velocidad media en el intervalo i -ésimo de 30 segundos se denota \bar{V}_i y el número de vehículos contados en el mismo es N_i .

Todos los detectores que no registraban un rango suficientemente amplio de velocidades (de 30 km/h a 100 km/h) fueron descartados. Esta primera selección dejó dos grupos de tres detectores correspondientes al sentido hacia

Amsterdam. Los detectores han sido nombrados de acuerdo con su posición (U y D) para los tres primeros (upstream) y los tres segundos (downstream), y el carril que registran (L, C, R) para el carril izquierdo, central y derecho respectivamente. Los seis detectores se denominan: UL, UC, UR y DL, DC, DR.

Para cuantificar la homogeneidad espacial del tráfico se usó el coeficiente de autocorrelación de las mediciones de los detectores, $r(\bar{V}_i, \bar{V}_{i+k})$. Como criterio se rechazaron aquellos días y detectores cuyo máximo coeficiente de correlación fuera menor que 0.5. De acuerdo a este criterio se rechazó el segundo día para los seis detectores.

A continuación se aislaron periodos potencialmente estacionarios a partir de las 12 horas de datos (4 días \times 3 horas cada día). Dichos periodos se seleccionaron visualmente. La figura C.1 muestra los periodos seleccionados del quinto día del detector DL.

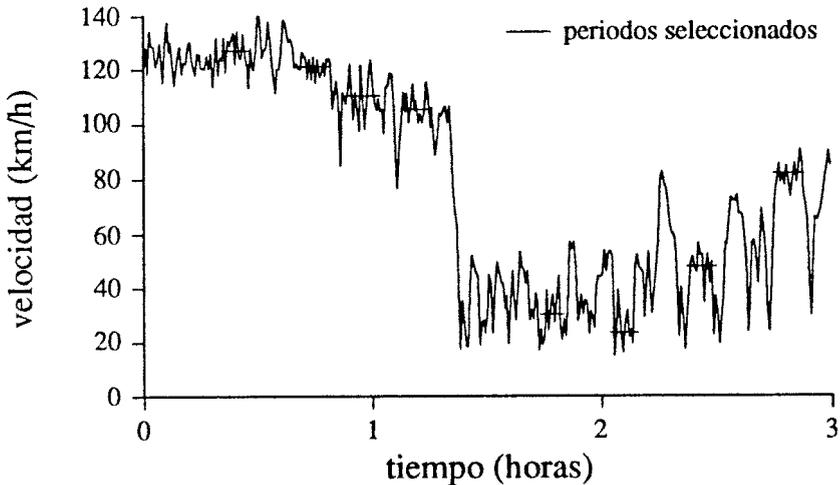


Figura C.1: Periodos seleccionados para verificar su estacionariedad.

Para verificar la estacionariedad de los periodos seleccionados se siguieron las recomendaciones de Breiman y Lawrence (1973) aplicándose un test no paramétrico basado en el test τ de Kendall. Mediante este test se seleccionaba de cada periodo el mayor subperiodo cuya serie de velocidades y cuentas de vehículos no mostrara ninguna tendencia. Para detectar alguna tendencia en la muestra se medía la correlación de ésta con la secuencia 1,2,...,n. El resultado del test era por lo tanto el mayor periodo estacionario detectado en cada caso.

C.2 Estimación de Cantidades Medias.

La intensidad media sobre el periodo estacionario se estimó mediante la media muestral:

$$\hat{N} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i = \frac{m}{n},$$

donde m es el número de vehículos en los n intervalos de 30 segundos. Por otra parte, la relación $Q = V_e/H$ es cierta si la velocidad es la velocidad media espacial, cuyo estimador no sesgado es la media armónica muestral. Como sólo se dispone de la media aritmética muestral y la varianza muestral para cada intervalo de 30 segundos, la media armónica muestral puede ser sustituida en primer aproximación por éstas. En efecto, desarrollando el inverso de la velocidad de cada vehículo V_k en torno a la media aritmética se tiene:

$$\frac{1}{V_k} \approx \frac{1}{V_a} - \frac{V_k - V_a}{V_a^2} + \frac{(V_k - V_a)^2}{V_a^3}.$$

Por consiguiente, la esperanza de la media aritmética muestral será aproximadamente:

$$E \left[\frac{1}{\hat{V}_e} \right] = \frac{1}{m} E \left[\sum_{k=1}^m \frac{1}{V_k} \right] \approx \frac{1}{V_a} + \frac{\sigma^2}{V_a^3}.$$

Reemplazando la media y la varianza (V_a, σ^2) por sus estimadores muestrales ($\hat{V}, \hat{\sigma}^2$), se obtiene finalmente el siguiente estimador de la media armónica:

$$\hat{V}_e = \frac{\hat{V}^3}{\hat{V}^2 + \hat{\sigma}^2}.$$

El espaciamiento (en metros) fue estimado mediante la relación

$$\hat{H} = \frac{1000 \times \hat{V}_e}{120 \times \hat{N}}$$

para la velocidad en km/h y la intensidad en vehículos cada 30 segundos.

C.3 Análisis de Regresión

En esta sección nos referiremos a los estimadores de la velocidad y del espaciamiento simplemente como velocidad y espaciamiento. El modelo de regresión utilizado para ajustar los datos obtenidos corresponde a la expresión

$$\hat{V}_e = V_j \left[1 - f \left(\frac{|C_j|}{V_j} \left(\frac{\hat{H}}{H_j} - 1 \right) \right) \right] + \varepsilon, \quad (C.5)$$

con

$$\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

Se trata pues de un modelo de regresión con error normal aditivo de varianza constante. Como función generadora se eligió la curva exponencial (C.3) y la de máxima sensibilidad (C.4), por lo que los parámetros a estimar son $|C_j|$, V_j , y H_j . Además el modelo de regresión es no lineal puesto que la dependencia respecto de que los parámetros es no lineal.

Para los detectores del carril derecho, DR y UR, el análisis de regresión se realizó tomando las curvas exponencial y de máxima sensibilidad. Las tablas C.1 y C.2 muestran los estimadores de los parámetros así como la desviación del error, σ_ε . Las curvas velocidad-espaciamento resultantes se muestran en las figuras C.2 y C.3 donde 'max. sens.' se refiere a la curva de máxima sensibilidad y 'exponencial' a la exponencial. El sesgo y la desviación de los estimadores proporcionan una medida de la precisión de la estimación. Se trata del sesgo y desviación aproximados al truncar el desarrollo de los estimadores en serie de Taylor. Las expresiones explícitas se pueden consultar en Ratkowsky (1983).

Detector DR: curva exponencial			
Total periodos estacionarios: 18			
Desviación del error (km/h): 1.96			
parámetro	estimación	% sesgo	% desviación std.
V_j	86.4 km/h	1.56	6.98
$ C_j $	11.92 km/h	4.29	85.15
H_j	6.18 m	-7.46	68.73
K_j	161.75 veh/km	54.7	68.73
Detector DR: curva máxima sensibilidad			
Total periodos estacionarios: 18			
Desviación del error (km/h): 2.65			
parámetro	estimación	% sesgo	% desviación std.
V_j	74.88 km/h	0.55	2.97
$ C_j $	5.86 km/h	4.03	97.89
H_j	4.34 m	-6.08	86.73
K_j	230.4 veh/km	81.3	86.73

Tabla C.1: Resultados para el detector DR.

Las observaciones de velocidad-espaciamento para los detectores de los carriles central e izquierdo mostraban un abrupto cambio de pendiente en la transición del régimen congestionado al libre. Resultaba obvio que la curva exponencial no podría ajustar los datos de estos detectores. Entonces se decidió usar un modelo basado en la curva de máxima sensibilidad y otro modelo bilineal. Este último modelo de velocidad-densidad no satisface las propiedades

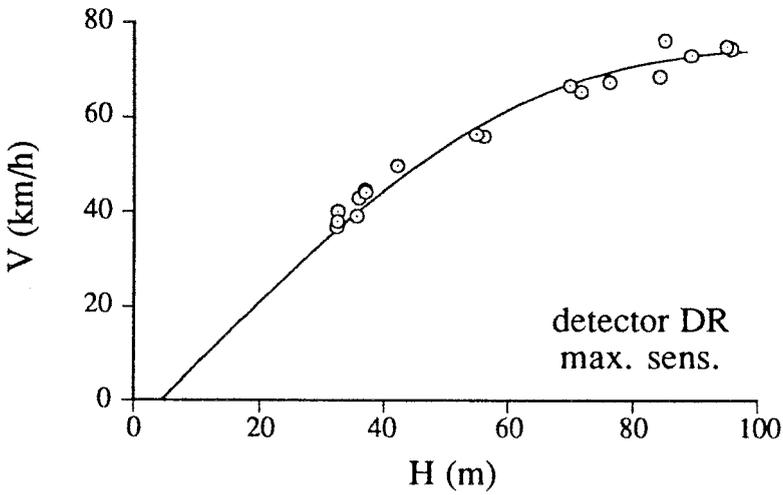
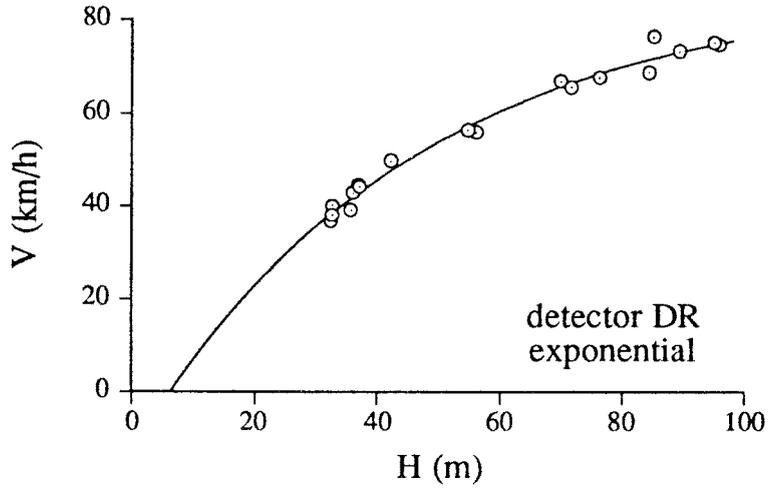


Figura C.2: Curvas velocidad-espaciamiento y observaciones del detector DR.

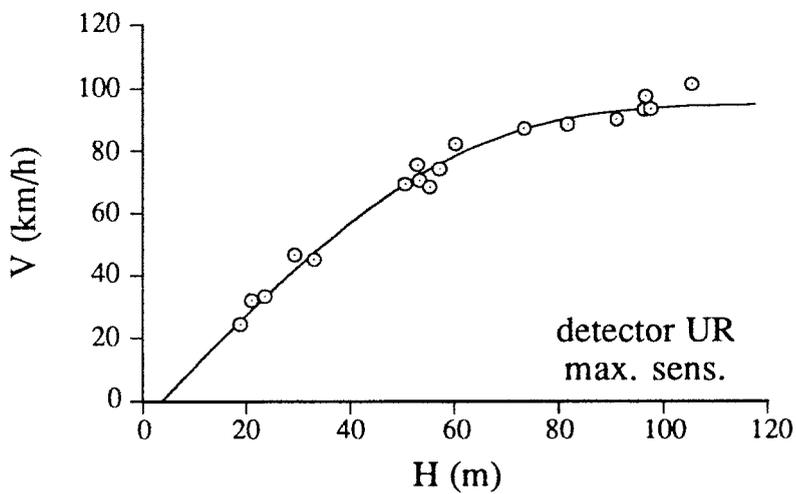
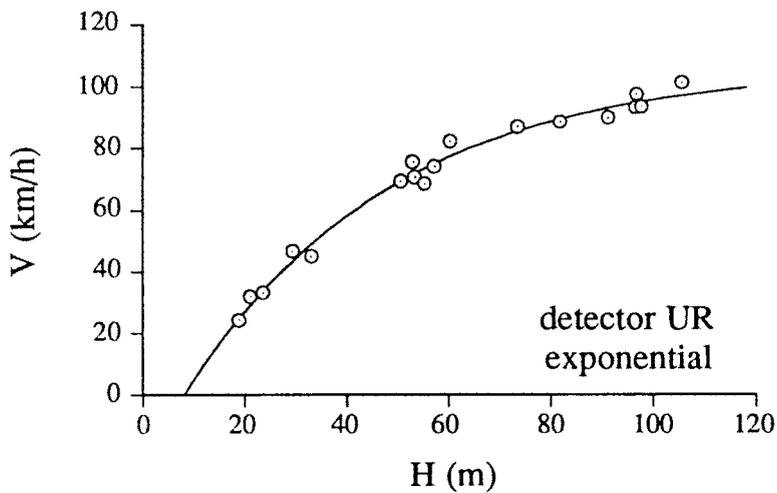


Figura C.3: Curvas velocidad-espaciamento y observaciones del detector UR.

Detector UR: curva exponencial			
Total periodos estacionarios: 18			
Desviación del error (km/h): 3.1			
parámetro	estimación	% sesgo	% desviación std.
V_f	106.85 km/h	0.41	3.9
$ C_j $	21.22 km/h	0.54	28.26
H_j	8.08 m	-1.20	20.44
K_j	123.79 veh/km	4.20	20.44

Detector UR: curva máxima sensibilidad			
Total periodos estacionarios: 18			
Desviación del error (km/h): 3.47			
parámetro	estimación	% sesgo	% desviación std.
V_f	94.85 km/h	0.16	2.09
$ C_j $	6.14 km/h	0.88	60.12
H_j	3.64 m	-2.31	54.45
K_j	274.73 veh/km	31.96	54.45

Tabla C.2: Resultados para el detector UR.

requeridas por lo que, en cierta manera, va en contra de la teoría aquí desarrollada. Pero, por otra parte constituye un buen 'test de bondad de ajuste' de ella. Los estimadores de máxima verosimilitud del modelo bilineal se calcularon según el método de Quandt (1958). El sesgo de $|C_j|$ es siempre cero puesto que es un parámetro lineal en este modelo. Los resultados para los detectores DC, UC, DL y UL se presentan en las tablas C.3 a la C.6. En las figuras C.4 a la C.7 se muestran las correspondientes curvas velocidad-espaciamiento y las observaciones.

C.4 Interpretación de los Resultados

La metodología clásica para juzgar sin modelo de regresión ajusta bien unas observaciones se basa en el análisis de los errores. En la práctica cuando el tamaño de la muestra es limitado y no existen replicaciones de los datos, dicha metodología resulta de dudosa utilidad. En nuestro caso, si los modelos de regresión ajustados se comportan bien, los valores estimados de los parámetros $|C_j|$ y K_j deben ser realistas. La velocidad de la onda, según se vió en la sección B.3, están entre 15 y 25 km/h. Para la densidad de atasco, un valor en torno a 150 veh/km resulta razonable. Por consiguiente, como criterio de bondad de ajuste, se usará principalmente el valor estimado para dichos parámetros. Adicionalmente, la varianza de los errores puede servir de criterio auxiliar.

Para los detectores del carril derecho, DR y UR, la curva exponencial pro-

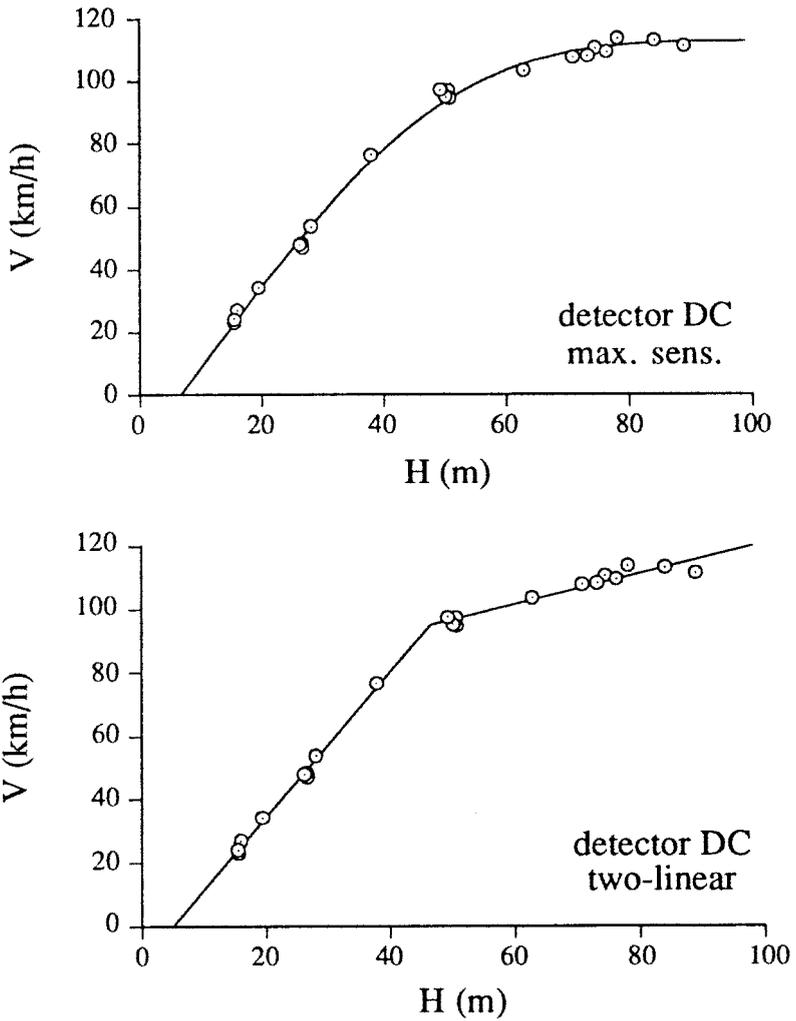


Figura C.4: Curvas velocidad-espaciamento y observaciones del detector DC.

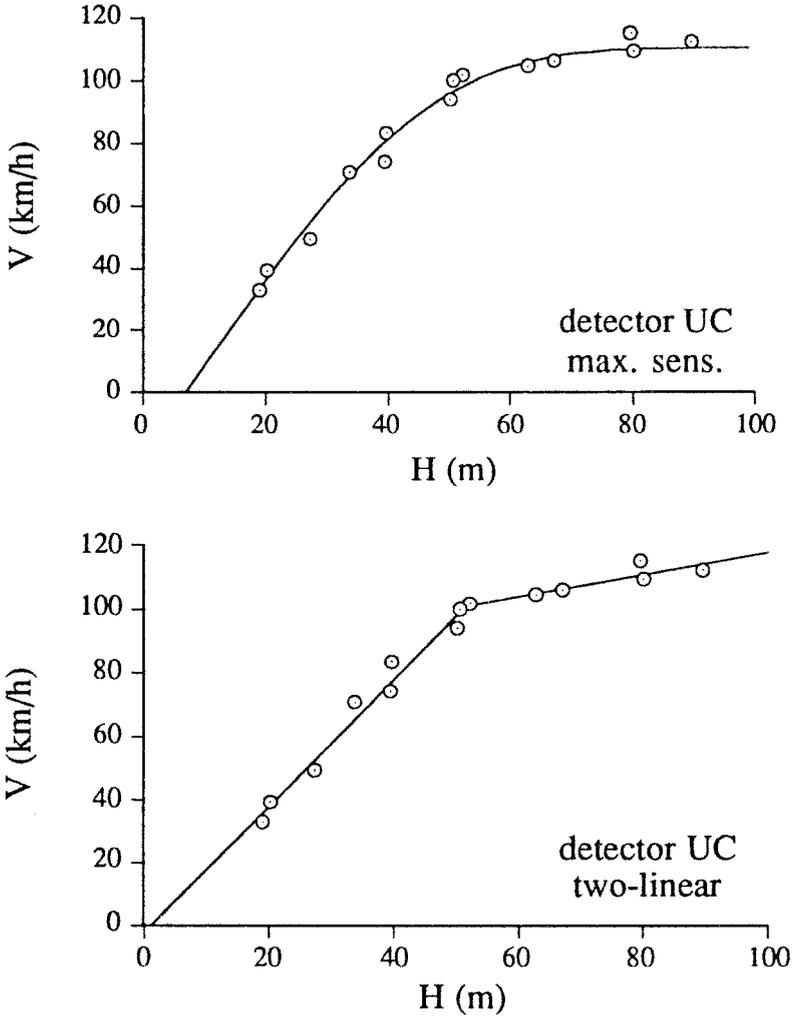


Figura C.5: Curvas velocidad-espaciamento y observaciones del detector UC.

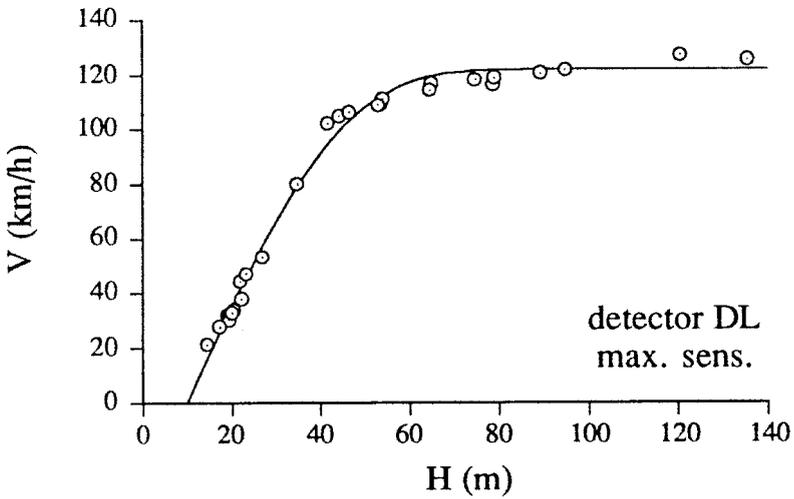
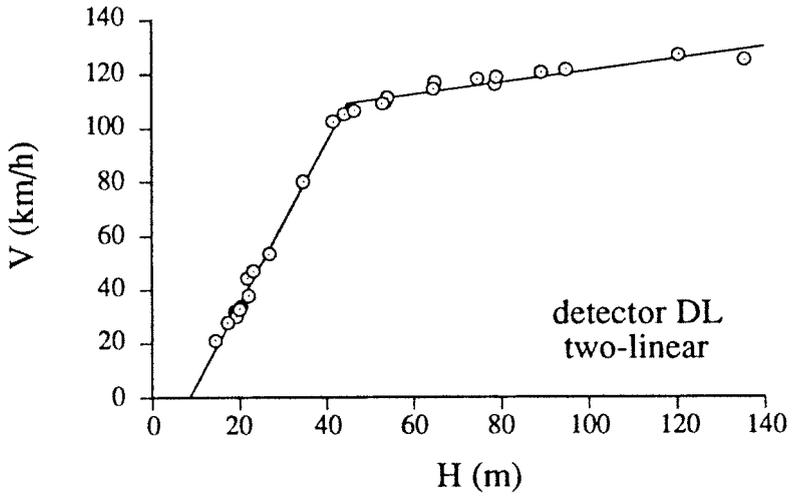


Figura C.6: Curvas velocidad-espaciamento y observaciones del detector DL.

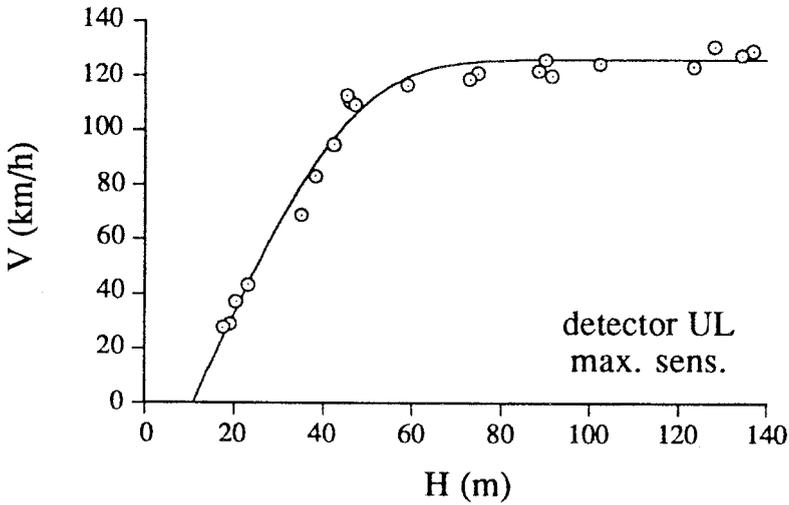
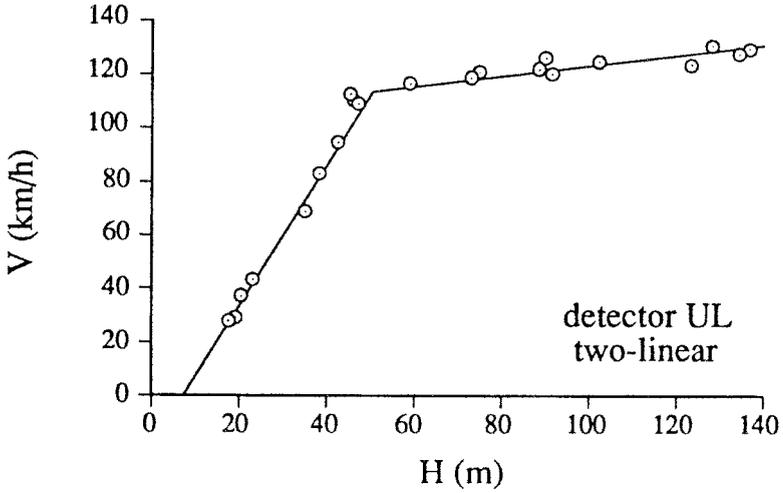


Figura C.7: Curvas velocidad-espaciamento y observaciones del detector UL.

Detector DC: curva de máxima sensibilidad			
Total periodos estacionarios: 21			
Desviación del error (km/h): 2.21			
parámetro	estimación	% sesgo	% desviación std.
V_f	113 km/h	0.04	0.98
$ C_j $	17.98 km/h	0.13	11.6
H_j	6.77 m	-0.15	8.91
K_j	147.77 veh/km	0.94	8.91
Detector DC: modelo bilineal			
Total periodos estacionarios: 21			
Régimen congestionado:		$V = 2.28 \times H - 11.3$	
V (km/h), H (m)	Desviación del error (km/h): 1.5		
Régimen libre:		$V = 0.49 \times H + 72.32$	
V (km/h), H (m)	Desviación del error (km/h): 2.1		
parámetro	estimación	% sesgo	% desviación std.
$ C_j $	11.3 km/h	0	14.12
H_j	4.95 m	-0.35	11.44
K_j	202.2 veh/km	1.66	11.44

Tabla C.3: Resultados para el detector DC.

duce un ajuste superior al de la curva de máxima sensibilidad. Las estimaciones de $|C_j|$ y H_j dadas por este último modelo son claramente irrealistas. La falta de datos para espaciamentos pequeños en el detector DR es la causa de los considerables valores de la desviación de las estimaciones. Por el contrario, los valores obtenidos para el detector UR son muy precisos.

En cuanto a los detectores del carril central, DC y UC, el ajuste logrado por la curva de máxima sensibilidad es excelente. La desviación de las estimaciones en el detector UC resulta considerablemente mayor debido al reducido tamaño de la muestra. Los modelos bilineales no se ajustan bien pero proporcionan una estimación del punto de transición entre el régimen congestionado y el libre.

Finalmente para los detectores del carril izquierdo, DL y UL, la curva de máxima sensibilidad sobrestima claramente $|C_j|$. Para estos detectores el modelo bilineal produce el mejor ajuste. Las desviaciones dadas por este modelo son sobresalientemente pequeñas, lo que es debido a la linealidad del modelo.

Una característica muy destacable de todos los modelos ajustados es el sesgo extremadamente bajo de las estimaciones de los parámetros de V_f , $|C_j|$ y H_j . Excepto para el detector DR, todos los sesgos están por debajo del 1%. Según Ratkowsky (1983), este porcentaje indica un comportamiento cuasi-lineal del modelo respecto de los parámetros. Si el sesgo fuera importante, sería aconsejable una reparametrización del modelo para reducirlo. El mayor sesgo

Detector UC: curva de máxima sensibilidad			
Total periodos estacionarios: 14			
Desviación del error (km/h): 3.68			
parámetro	estimación	% sesgo	% desviación std.
V_f	110.4 km/h	0.1	1.85
$ C_j $	19.8 km/h	0.75	28.31
H_j	6.97 m	-0.81	22.22
K_j	143.51 veh/km	5.75	22.22
Detector UC: modelo bilineal			
Total periodos estacionarios: 14			
Régimen congestionado: $V = 2 \times H - 2.3$			
V (km/h), H (m)		Desviación del error (km/h): 4.74	
Régimen libre: $V = 0.34 \times H + 83.4$			
V (km/h), H (m)		Desviación del error (km/h): 2.29	
parámetro	estimación	% sesgo	% desviación std.
$ C_j $	2.3 km/h	0	44.05
H_j	1.15 m	-19.95	42.73
K_j	871.68 veh/km	38.2	42.73

Tabla C.4: Resultados para el detector UC.

producido en las estimaciones del detector DR están causadas por la ausencia de observaciones para espaciamientos pequeños.

El análisis de regresión llevado a cabo demuestra que una aproximación algo burda de la curva intensidad-densidad es la curva bilineal dada por:

$$Q_e = KV_f, \quad 0 \leq K \leq K_c; \quad (C.6)$$

$$Q_e = V_f K_c \frac{K_j - K}{K_j - K_c}, \quad K_c \leq K \leq K_j. \quad (C.7)$$

En la figura C.8 se ha representado esta curva junto con las curvas exponencial y de máxima sensibilidad. El eje x representa la densidad adimensional $\rho = K/K_j$ y el eje y la intensidad adimensional $q_e = KV_e/(K_j|C_j|)$. Las curvas corresponden al caso $u_f = V_f/|C_j| = 5$. La aproximación es muy buena fuera del régimen de transición. En cualquier caso, el error cometido es compensado por la enorme simplicidad del modelo Simple de Continuidad resultante al tomar la curva intensidad-densidad bilineal.

Detector DL: modelo bilineal			
Total periodos estacionarios: 27			
Régimen congestionado:		$V = 3 \times H - 25.67$	
V (km/h), H (m)	Desviación del error (km/h): 2.63		
Régimen libre:		$V = 0.22 \times H + 99.41$	
V (km/h), H (m)	Desviación del error (km/h): 2.31		
parámetro	estimación	% sesgo	% desviación std.
$ C_j $	25.67 km/h	0	7.86
H_j	8.54 m	-0.13	5.52
K_j	117.14 veh/km	0.43	5.52

Detector DL: curva de máxima sensibilidad			
Total periodos estacionarios: 27			
Desviación del error (km/h): 3.74			
parámetro	estimación	% sesgo	% desviación std.
V_f	122 km/h	0.02	1.1
$ C_j $	34.94 km/h	0.27	9.78
H_j	9.93 m	-0.08	6.11
K_j	100.74 veh/km	0.45	6.11

Tabla C.5: Resultados para el detector DL.

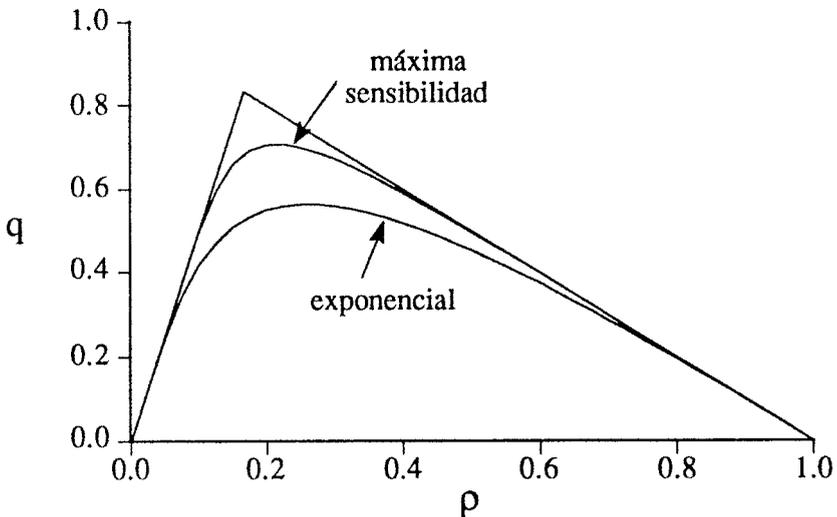


Figura C.8: Curvas exponencial y de máxima sensibilidad junto con la aproximación bilineal.

Detector UL: modelo bilineal			
Total periodos estacionarios: 21			
Régimen congestionado:		$V = 2.63 \times H - 18.99$	
V (km/h), H (m)	Desviación del error (km/h): 2.8		
Régimen libre:		$V = 0.19 \times H + 103.92$	
V (km/h), H (m)	Desviación del error (km/h): 2.63		
parámetro	estimación	% sesgo	% desviación std.
$ C_j $	18.99 km/h	0	16.21
H_j	7.21 m	-0.52	12.55
K_j	138.73 veh/km	2.1	12.55
Detector UL: curva de máxima sensibilidad			
Total periodos estacionarios: 21			
Desviación del error (km/h): 5.25			
parámetro	estimación	% sesgo	% desviación std.
V_j	126 km/h	0.02	1.34
$ C_j $	38.85 km/h	0.32	15.80
H_j	10.81 m	-0.37	10.56
K_j	100.74 veh/km	1.49	10.56

Tabla C.6: Resultados para el detector UL.

Apéndice D

Un Modelo de Seguimiento de Vehículos

D.1 El Modelo de Propagación

Un enfoque diferente en la modelización del tráfico mediante modelos de seguimiento de vehículos lo constituyen los *modelos de propagación*. El Modelo de propagación más simple asume que la velocidad de un vehículo seguidor es proporcional a la velocidad del vehículo seguido, estando afectada la respuesta por un desfase temporal T_r , o *tiempo de respuesta*:

$$V(t + T_r) = GV_L(t), \quad (\text{D.1})$$

donde G es el factor de ganancia.

Un estudio experimental en el dominio de la frecuencia de este modelo de propagación fue realizado por Herman et al. (1977). Ellos encontraron que el factor de ganancia disminuía rápidamente para frecuencias mayores de 0.1 Hz. Por debajo de este valor la ganancia era generalmente mayor que la unidad cuando el espaciamiento medio entre los vehículos era menor de 40 m. Sin embargo, los valores de la ganancia medidos en experimentos en autopistas son cercanos a la unidad, lo que significa que las perturbaciones de velocidad ni se amplifican ni se amortiguan. Por esta razón se asumirá $G = 1$, lo que implica adoptar una postura neutral respecto de la amplificación y amortiguamiento de las perturbaciones.

Herman y Rothery (1969) encontraron valores del tiempo de respuesta T_r dentro del rango de 1 a 3 segundos, con un valor medio de 2.1 segundos. En general, encontrar una expresión analítica para el tiempo de respuesta es complejo debido a la variabilidad de éste. Por ello parece más razonable proponer una formulación teórica a partir de la teoría de ondas cinemáticas. Según dicha teoría la velocidad de propagación de las perturbaciones de velocidad y densidad está dada por:

$$C = \frac{dQ_e}{dK} = K \frac{dV_e}{dK} + V_e.$$

Puresto que el modelo de propagación (D.1) debe ser consistente con la teoría

de ondas cinemáticas, el tiempo de respuesta será el tiempo que tarda una perturbación en propagarse de un vehículo al siguiente. Este tiempo es obviamente:

$$T_r = \frac{H}{V_e - C} = -\frac{H^2}{dV_e} = \frac{dH}{dV_e}. \quad (\text{D.2})$$

El tiempo de respuesta es por lo tanto una función del espaciamiento. En la deducción de (D.2) se ha asumido que los vehículos se desplazan a la velocidad de equilibrio V_e . Esta hipótesis es falsa si el tráfico se encuentra lejos del equilibrio. En este caso, el tiempo de respuesta será una función más complicada de las variables de tráfico. El modelo de propagación definido por (D.1) con $G = 1$ y T_r dado por (D.2) está incompleto ya que no incluye ninguna relación entre la velocidad y el espaciamiento. En las dos secciones siguientes se verá como se puede subsanar este defecto.

D.2 El Modelo Lineal

Este modelo establece una relación lineal entre la aceleración del vehículo seguidor y el espaciamiento, la velocidad relativa y la aceleración del vehículo seguido:

$$\dot{V}(t + T) = \alpha[V_L(t) - V(t)] + \beta[X_L(t) - X(t)] + \gamma\dot{V}_L(t).$$

Los experimentos de seguimiento de vehículos realizados por Kometani y Sasaki (1961) y Rockwell et al. (1968) mostraron que la influencia del espaciamiento en la respuesta del vehículo seguidor era despreciable. El mismo resultado fue obtenido por Helly (1961). El término de aceleración puede ser igualmente despreciado, según indicaron Evans y Rothery (1973). Por lo tanto, un modelo simplificado pero realista es:

$$\dot{V}(t + T) = \alpha[V_L(t) - V(t)], \quad (\text{D.3})$$

que es el conocido modelo propuesto por Chandler et al. (1958). La cuestión ahora es cómo elegir los parámetros α y T para que las soluciones del modelo (D.3) sean 'equivalentes' a las del modelo de propagación (D.1). Por soluciones equivalentes se entenderá lo siguiente:

- (i) la razón entre las velocidades de dos vehículos consecutivos es próxima a la unidad;
- (ii) el desfase temporal entre las velocidades de los mismos vehículos es próximo al tiempo de respuesta T_r ;
- (iii) la solución estacionaria de ambos modelos debe conducir a la misma curva de equilibrio velocidad-espaciamiento.

Si las soluciones del modelo de seguimiento de vehículos satisfacen las anteriores propiedades, entonces reproducirán las características principales y la solución de equilibrio del modelo de propagación.

La estabilidad de las soluciones de (D.3) ha sido estudiada por Chandler et al. (1958). Ellos demostraron que las soluciones son asintóticamente estables si:

$$\alpha T \leq \frac{1}{2}.$$

La frontera de la estabilidad está dada por la igualdad. Con esta condición el amortiguamiento de las soluciones es mínimo y de hecho sólo ligeramente menor que la unidad. Por lo tanto, para satisfacer la primera de las condiciones de equivalencia, se debe hacer $\alpha T = 1/2$.

La amplificación de la velocidad en el dominio de la frecuencia, $G(\omega)$, se obtiene haciendo $V_L = \exp(i\omega t)$ y $V = G(\omega)V_L$ ien (D.3). Entonces

$$|G(\omega)| = \left[\left(1 - \frac{\omega}{\alpha} \sin \omega T\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\alpha} \cos \omega T\right)^2 \right]^{-1/2}.$$

En la figura D.1 se muestra $|G(\omega)|$ como función de ωT cuando $\alpha T = 1/2$. Hasta valores de la frecuencia adimensional iguales a 0.6, el amortiguamiento resulta insignificante.

El próximo paso consiste en encontrar una relación entre el tiempo de respuesta T_r y el tiempo de reacción T . El desfase en la velocidad de dos vehículos consecutivos es $\varphi = \arg[G(\omega)]$. Por otra parte, el mismo desfase dado por el modelo de propgación es ωT_r . La razón entre los desfases es por lo tanto:

$$\frac{\varphi}{\omega T_r} = \frac{1}{\omega T_r} \arctan \left[\frac{\frac{\omega}{\alpha} \cos \omega T}{1 - \frac{\omega}{\alpha} \sin \omega T} \right].$$

Para la equivalencia de los modelos (D.3) y (D.1) es necesario que esta razón sea lo más cercana posible a la unidad. Si se

$$T_r = 2T, \tag{D.4}$$

los desfases dados por ambos modelos son casi idénticos hasta valores de la frecuencia adimensional de 0.4, ver figura D.1.

Finalmente, la curva velocidad-espaciamento del modelo de propagación y del modelo de seguimiento de vehículos debe ser la misma. Integrando (D.3) se obtiene una relación lineal entre la velocidad y el espaciamento como solución estacionaria:

$$V_e = \alpha(H - H_j), \tag{D.5}$$

donde H_j es el espaciamento de atasco. Por lo tanto, el tiempo de respuesta del modelo de propagación cuya solución estacionaria es (D.5), será según (D.2):

$$T_r = \frac{1}{\alpha}.$$

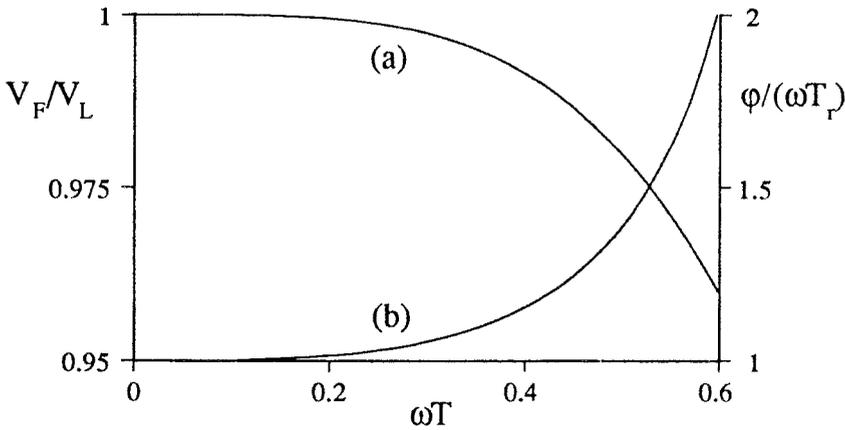


Figura D.1: Amplificación de la velocidad (a) y razón entre los desfases (b).

Usando la relación (D.4) entre los tiempos de respuesta y de reacción, se obtiene:

$$T = \frac{1}{2\alpha}. \quad (D.6)$$

Para derivar la expresión (D.4) y la relación entre α y T , se ha considerado que sólo frecuencia adimensionales de hasta 0.4 contribuyen a la respuesta. Esta hipótesis necesita ser justificada ahora. En el régimen congestionado, la relación entre la velocidad y el espaciamiento es casi lineal, por lo que la velocidad de las ondas cinemáticas es $C = C_j = -H_j\alpha$. Valores típicos de C_j oscilan entre -15 y -25 km/h, ver sección B.3. Por otra parte, para el espaciamiento de atasco, H_j , se puede tomar un valor de 6 m. Por consiguiente, los valores del tiempo de reacción dados por (D.6) oscilan entre 0.45 y 0.75 segundos. En cuanto a la frecuencia, el análisis realizado por Herman y Rothery (1969), Darroch y Rothery (1971) y Hoffmann (1975) mostró que la contribución de frecuencias superiores a 0.1 Hz en el espectro de la velocidad es perfectamente despreciable. por lo tanto, los valores máximos significativos de ωT están alrededor de 0.4. Este valor puede ser considerado como la frecuencia de corte del sistema vehículo-conductor. Se concluye que las relaciones (D.4) y $G \approx 1$ son válidas.

D.3 El Modelo no Lineal

En esta sección se extiende el resultado de la sección anterior y se formula un modelo genérico de seguimiento de vehículos para el caso de una relación no lineal entre la velocidad y el espaciamiento.

El modelo lineal de seguimiento (D.3) puede ser escrito en la forma:

$$V(t + T) = \alpha[X_L(t) - X(t) - H_j].$$

El hecho de que el segundo miembro de esta ecuación sea la velocidad de equilibrio V_e sugiere definir con la misma estructura el modelo genérico:

$$V(t + T(t)) = V_e(H(t)). \quad (\text{D.7})$$

En este modelo, V_e será en general una función no lineal del espaciamiento. Si se linealiza el modelo en torno a un punto de equilibrio (V_0, H_0) , se obtiene el modelo lineal:

$$V(t + T_0) = V_0 + \alpha_0[X_L(t) - X(t) - H_0], \quad (\text{D.8})$$

Donde los parámetros son el tiempo de reacción de equilibrio $T_0 = T(H_0)$, y la pendiente de la curva velocidad-espaciamiento en el punto de equilibrio:

$$\alpha_0 = \left. \frac{dV_e}{dH} \right|_{H_0}.$$

Usando el mismo argumento que en la sección previa, el modelo (D.8) es equivalente al modelo de propagación si $T_0 = T_{r0}/2$ y el tiempo de respuesta está dado por (D.2). Por lo tanto, el tiempo de reacción será:

$$T_0 = \frac{1}{2 \left. \frac{dV_e}{dH} \right|_{H_0}}.$$

Además otra condición para la equivalencia es $\alpha_0 T_0 = 1/2$, a partir de la cual la misma se obtiene la expresión para el tiempo de reacción.

El modelo (D.8) puede ser generalizado inmediatamente para grandes fluctuaciones lejos del punto de equilibrio (V_0, H_0) , si el tiempo de reacción de equilibrio se reemplaza por el tiempo de reacción real T y la velocidad de equilibrio linealizada por la velocidad de equilibrio real $V_e(H)$. El modelo que se obtiene es el dado por (D.7) donde el tiempo de reacción es

$$T = \frac{1}{2 \left. \frac{dV_e}{dH} \right|_{H_0}}. \quad (\text{D.9})$$

Para pequeñas fluctuaciones el modelo linealizado (D.8) es una aproximación del modelo genérico (D.7). Para grandes fluctuaciones el tiempo de reacción puede llegar a depender de otros factores. Por ejemplo, es razonable pensar que el tiempo de reacción disminuye cuando la velocidad es mayor que la velocidad de equilibrio y viceversa. Es fácil tener en cuenta este hecho si se sustituye

la velocidad de equilibrio por la velocidad real. Teniendo en cuenta (D.4), el tiempo de reacción vendría dado por:

$$T = \frac{H}{2(V - C)} = \frac{1}{2 \left(\frac{V - V_e}{H} + \frac{dV_e}{dH} \right)}, \quad (D.10)$$

y la expresión (D.9) sería una aproximación válida para pequeñas desviaciones del equilibrio. No obstante, por simplicidad, el tiempo de reacción será considerado una función exclusiva del espaciamiento.

El modelo de seguimiento de vehículos dado por (D.7) y (D.9) se le ha denominado modelo genérico porque no parte a priori de una ley específica de seguimiento, a diferencia de otros modelos como el modelo clásico (A.3).

D.4 Tiempo de Reacción y Condición de Concavidad

A partir de la expresión del tiempo de reacción (D.9), es fácil derivar las siguientes relaciones:

$$\frac{T'}{T^2} = 2KQ_e'' = 2H^2 \frac{d^2 V_e}{dH^2}, \quad (D.11)$$

donde (') significa derivada respecto de la densidad.

Por la tanto, la condición de concavidad implica que el tiempo de reacción es una función decreciente de la densidad, o inversamente, suponer que el tiempo de reacción decrece con la densidad, implicaría descartar ondas de choque de aceleración. La expresión (D.11) relaciona la curvatura de la curva intensidad-densidad con la tasa de variación del tiempo de reacción. Esta relación permite hacerse una idea de como es la función tiempo de reacción. Concretamente, si el régimen de transición a densidades intermedias se desprecia y se considera únicamente los regímenes cuasilineales de las densidades extremas, el tiempo de reacción tomará entonces dos valores constantes. Concretamente, para la aproximación bilineal de la curva intensidad-densidad dada por (C.6) y (C.7) o equivalentemente la aproximación bilineal de la curva velocidad-espaciamiento:

$$\begin{aligned} V_e &= |C_j| \left(\frac{H}{H_j} - 1 \right), & H_j \leq H \leq H_c; \\ V_e &= V_f, & H_c \leq H, \end{aligned}$$

el tiempo de reacción vendrá dado por:

$$\begin{aligned} T &= \infty, & 0 \leq K \leq K_c; \\ T &= \frac{H_j}{2|C_j|} = \frac{1}{2|C_j|K_j}, & K_c \leq K \leq K_j. \end{aligned}$$

La ecuación (D.9) predice la existencia de dos regímenes diferentes:

- (i) a altas densidades el tiempo de reacción es prácticamente constante y del orden de 0.6 segundos, ver sección D.2;
- (ii) a bajas densidades la conducción se vuelve más relajada y el tiempo de reacción toma valores mucho mayores, lo que quiere decir que en realidad las interacciones entre conductores prácticamente desaparecen.

Las curvas tiempo de reacción-espaciamento para los detectores de los carriles derecho y central del apéndice anterior se han representado en la figura D.2. Las curvas de máxima sensibilidad (detectores DC y UC) proporcionan una curva de tiempo de reacción más pronunciada que las dadas por el modelo exponencial (detectores DR y UR).

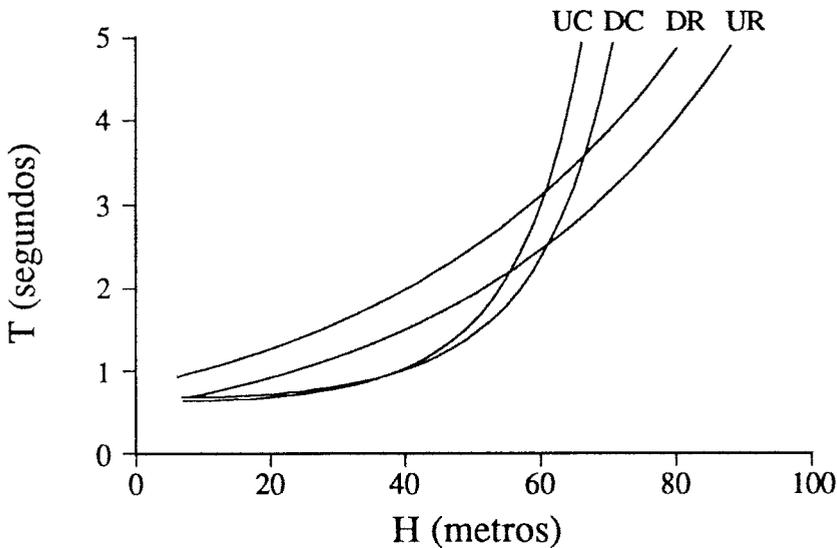


Figura D.2: Tiempo de reacción como función del espaciamento.

D.5 El Problema de la Retrogresión

El modelo genérico de seguimiento de vehículos puede ser escrito en términos del espaciamento si se tiene en cuenta que:

$$\dot{H}(t) = V_L(t) - V(t). \tag{D.12}$$

Escribiendo esta relación para el tiempo $t + T$:

$$\dot{H}(t + T(H(t))) = V_L(t + T(H(t))) - V_e(H(t)), \tag{D.13}$$

donde T está dado por (D.9). La ecuación (D.13) es una ecuación diferencial con retraso dependiente del estado, o ecuación diferencial funcional (FDE). Ecuaciones de este tipo han sido propuestas en otros campos como la biología de las poblaciones, Aiello et al. (1992), y la teoría económica, Bélair y Mackey (1989).

Una de las características de los modelos basados en FDE, es la posibilidad de retrogresión de las soluciones, o sea, de la inversión del orden natural de la causalidad. Para que el modelo (D.13) tenga sentido es necesario que las respuestas a estímulos consecutivos sean consecutivas. La figura D.3 muestra un esquema de como puede aparecer la retrogresión en las respuestas a dos estímulos. En el primer caso el orden de la causalidad es respetado, mientras que en el segundo se invierte, ya que $t_A + T_A > t_B + T_B$. Entonces, si la reacción del conductor se produce de manera continua, la condición para evitar la retrogresión es

$$\frac{dT}{dt} > -1. \tag{D.14}$$

Esta condición se obtiene al tender $t_B - t_A$ a cero, con $t_B > t_A$.

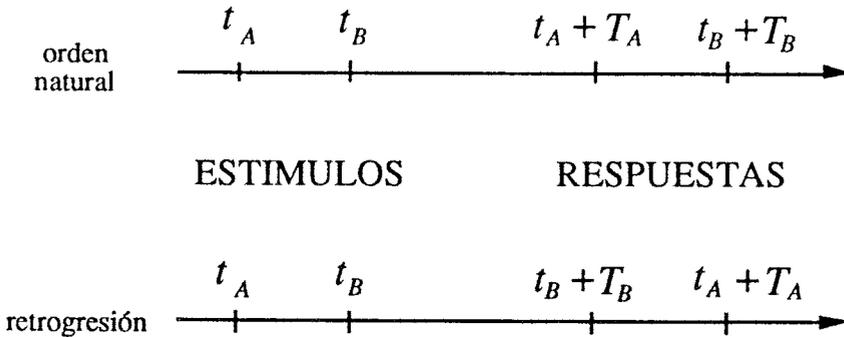


Figura D.3: Orden natural de causalidad y retrogresión.

Teniendo en cuenta que el tiempo de reacción está dado por (D.9), la condición de no retrogresión se transforma en:

$$\frac{dT}{dH}[V_L(t) - V(t)] > -1. \tag{D.15}$$

Como el tiempo de reacción es una función creciente del espaciamento, la retrogresión sólo puede ocurrir si la velocidad relativa es negativa. En la siguiente sección se investigará si las soluciones del modelo genérico de seguimiento de vehículos pueden presentar retrogresión.

D.6 El Modelo Adimensional

En esta sección se adoptara para el modelo genérico de seguimiento de vehículos, las curvas velocidad-espaciamento cuya forma funcional viene dada por (C.1). Definamos el siguiente tiempo de reacción adimensional:

$$\zeta = \frac{T|C_j|}{H_j}.$$

Entonces de (D.9), (C.1) y la expresión para el espaciamento equivalente (C.2), el tiempo de reacción adimensional viene dado por:

$$\zeta = -\frac{1}{2} \frac{d\lambda}{df}, \quad (\text{D.16})$$

donde f es la función generadora. Igualmente el tiempo adimensional se definirá como:

$$\tau = \frac{t|C_j|}{H_j}.$$

Recordando que la velocidad adimensional es $v = V/V_f$, la ecuación (D.7) se transforma en:

$$v(\tau + \zeta(\lambda(\tau))) = v_e(\lambda(\tau)). \quad (\text{D.17})$$

Además la adimensionalización elegida permite escribir la ecuación (D.12) en la siguiente forma adimensional:

$$\dot{\lambda}(\tau) = v_L(\tau) - v(\tau). \quad (\text{D.18})$$

La característica más sobresaliente de este modelo es la ausencia de parámetros. en otras palabras, la forma funcional propuesta en el apéndice B resulta ser una transformación de semejanza.

Teniendo en cuenta la expresión del tiempo de reacción adimensional (D.16), y las de la curva velocidad-espaciamento exponencial (B.20) y de máxima sensibilidad (B.22), la condición para evitar la retrogresión queda:

$$\dot{\lambda} > -2 \exp(-\lambda), \quad (\text{D.19})$$

para la curva exponencial y:

$$\dot{\lambda} > -2 \frac{\exp[\lambda + 1 - \exp(\lambda)]}{\exp(\lambda) - 1}. \quad (\text{D.20})$$

para la de máxima sensibilidad.

En la figura D.4 se ha representado el dominio de retrogresión dado por estas expresiones. También se ha representado la trayectoria de un vehículo que se aproximara a otro parado, por lo que la velocidad relativa sería $\dot{\lambda} = -v$. Se observa que el vehículo que se aproxima se puede encontrar en el dominio de retrogresión, lo que prueba que las soluciones con retrogresión son posibles.

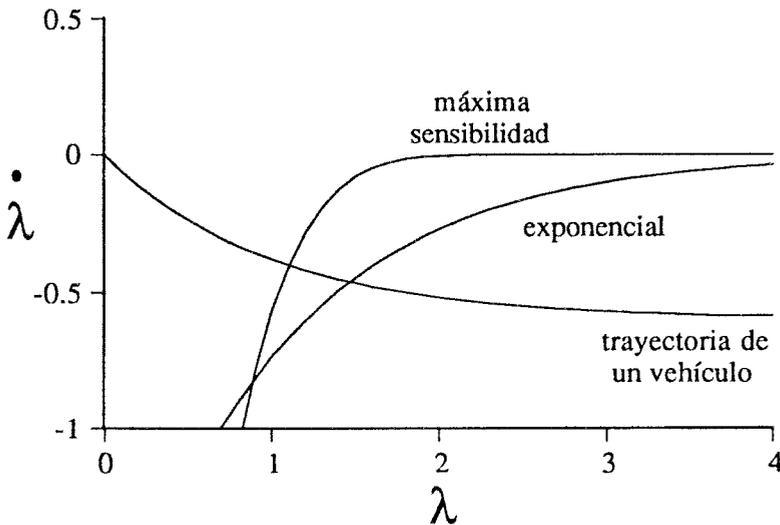


Figura D.4: Dominio de retrogresión para las curva exponencial y de máxima sensibilidad.

D.7 Solución del Problema de la Retrogresión

Se puede considerar que los conductores reaccionan a los cambios de velocidad de manera discreta. En cada reacción se marcan el objetivo de alcanzar la velocidad de equilibrio en un tiempo igual al tiempo de reacción. Sin embargo la situación del tráfico puede ser tal que obligue a los conductores a rectificar antes de haber alcanzado el objetivo que inicialmente se fijaron. Entonces, resulta natural suponer que los conductores intentaran alcanzar la velocidad objetivo inicial, $V_e(H(t))$, mediante una maniobra de aceleración constante. La aceleración sería pues

$$\dot{V}(t) = \frac{V_e(H(t)) - V(t)}{T(H(t))}, \tag{D.21}$$

ya que el tiempo para alcanzar la velocidad objetivo sería $T(H(t))$. Si el objetivo inicial es modificado por el siguiente objetivo, la ecuación (D.21) reemplaza a (D.7) y el problema de retrogresión desaparece. Esta sustitución de ecuaciones ocurre por lo tanto cuando la condición (D.14) se viola. En otras palabras, en lugar de existir retrogresión en las soluciones, lo que existe es una especie de *saturación de la percepción*, como si la capacidad del conductor para procesar los estímulos resultara desbordada.

Apéndice E

Solución Numérica y Resultados

E.1 Solución Numérica del Modelo

Las ecuaciones del modelo adimensional han sido establecidas en la sección D.6. La ley de seguimiento está expresada por la ecuación (D.17) siempre que no haya saturación, o sea si:

$$\frac{d\zeta}{d\tau} > -1, \quad (\text{E.1})$$

sino la ley de seguimiento es:

$$\dot{v}(\tau) = \frac{v_e(\lambda(\tau)) - v(\tau)}{\zeta(\lambda(\tau))}. \quad (\text{E.2})$$

La ecuación anterior es la forma adimensional de (D.21). La velocidad de equilibrio, v_e , y el tiempo de reacción, ζ , son funciones del espacimientto equivalente λ .

La primera cuestión que surge al resolver las ecuaciones del modelo es la relativa a las condiciones iniciales. Si la condición de saturación (E.1) se viola en el tiempo inicial, el problema inicial se compondrá de ecuaciones diferenciales ordinarias, concretamente (E.2) y (D.18). Esto ocurre si:

$$\left. \frac{d\zeta}{d\lambda} \right|_0 (v_L(0) - v(0)) \leq -1,$$

donde el tiempo inicial se ha hecho cero arbitrariamente. En este caso, sólo se necesitan los valores iniciales, $v(0)$ y $\lambda(0)$. Sin embargo, si los valores iniciales no satisfacen la condición de saturación, el problema se compondrá de una ecuación funcional (D.17) y de una ecuación diferencial ordinaria (D.18). a partir de estas ecuaciones es imposible calcular la velocidad y el espaciamiento en el intervalo $(0, \zeta(\lambda(0)))$. Entonces una de las variables debe ser especificada en dicho intervalo. Por otra parte, la continuidad de la velocidad obliga a que:

$$\lim_{\tau \rightarrow \zeta(\lambda(0))} v(\tau) = v_e(\lambda(0)). \quad (\text{E.3})$$

Por esta razón resulta más natural especificar la velocidad.

Una vez que la velocidad ha sido especificada en el intervalo inicial, la integración de (D.18) proporciona $\lambda(\tau)$ en dicho intervalo. El proceso de resolución prosigue en sucesivos pasos: ahora, la velocidad puede ser calculada en el intervalo $(\zeta(\lambda(0)), \zeta((\lambda(0) + \zeta(\lambda(\zeta(\lambda(0))))))$ a partir de (D.17). A continuación, se obtiene el espaciamiento en el mismo intervalo integrando (D.18). Por lo tanto, el procedimiento se compone de los siguientes pasos:

- (i) integrar (D.18) en $I_n = (\zeta_n, \zeta_{n+1}]$ para obtener el espaciamiento, λ ;
- (ii) evaluar la velocidad v en el nuevo intervalo $I_{n+1} = (\zeta_{n+1}, \zeta_{n+2}]$ mediante (D.17);
- (iii) hacer $n + 1 \rightarrow n$ e ir al paso (i).

Los extremos de los intervalos sucesivos se obtienen mediante la ley de recurrencia:

$$\zeta_{n+1} = \zeta_n + \zeta(\lambda(\zeta_n))$$

y para $n = 0$ se define $\zeta_0 = 0$. Las condiciones iniciales son $\lambda(0)$, $v(0)$ y $v(\tau)$ para $\tau \in I_0$, junto con la condición de continuidad (E.3).

El procedimiento anterior es válido siempre que no haya saturación. Por lo tanto, la condición (E.1) necesita ser evaluada durante el proceso de integración. Si en un instante determinado, τ_S

$$\left. \frac{d\zeta}{d\tau} \right|_{\tau_S} = -1, \quad (\text{E.4})$$

entonces el procedimiento anterior se para, y la solución prosigue integrando las ecuaciones (E.2) y (D.18) con los valores iniciales $\lambda(\tau_S)$ y $v(\tau_S)$. En la práctica, se busca τ_S después de haber integrado el espaciamiento en el intervalo I_n . Si $\tau_S \in I_n$ la solución para $\tau > \tau_S$ es rechazada.

Por otra parte, puede ocurrir que desaparezca el estado de saturación mientras se integra (E.2) y (D.18). Supongamos que (E.4) se verifica en $\tau = \tau_S$ pero no se verifica (E.1) en tiempo anterior. Entonces para $\tau > \tau_S$ el modelo es equivalente al dado por la ecuación funcional (D.17) y (D.18), pero para resolver este problema necesitamos conocer o la velocidad o el espaciamiento en $I_S = (\tau_S, \tau_S + \zeta(\lambda(\tau_S)))$. Por consiguiente, el modelo está incompleto. Para resolver las transiciones de estados de saturación a estados normales, se puede suponer que la velocidad varía linealmente en el intervalo I_S , desde su valor inicial hasta el valor de equilibrio $v(\tau_S + \zeta(\lambda(\tau_S))) = v_e(\lambda(\tau_S))$.

E.2 Algoritmo para el Modelo Lineal

Cuando la curva velocidad-espaciamiento es lineal, el modelo de seguimiento de vehículos también lo es. Por otra parte, el tiempo de reacción es constante y

la condición (E.1) siempre se satisface. Entonces, el modelo se reduce a una ecuación diferencial con retraso constante. Sin pérdida de generalidad se puede asumir que la función generadora es:

$$f(\lambda) = 1 - \lambda,$$

entonces el tiempo de reacción es $\zeta = 1/2$ y la velocidad de equilibrio es $v_e = \lambda$. El modelo está dado por la ecuación:

$$\dot{v}(\tau + 1/2) = v_L(\tau) - v(\tau), \quad (\text{E.5})$$

que se obtiene diferenciado (D.17).

Nuestra intención es reemplazar la anterior ecuación diferencial por un modelo más simple en diferencias finitas. Un punto crucial del algoritmo es la elección del intervalo de tiempo entre sucesivas iteraciones. Un intervalo excesivamente largo disminuiría el número de operaciones pero aumentaría el error y viceversa. Una buena elección del intervalo es $\Delta = 1/2$, el valor del tiempo de reacción. Para esta elección podemos escribir directamente la ley de seguimiento en diferencias finitas:

$$v_{n+1} = \lambda_n, \quad (\text{E.6})$$

donde los subíndices n y $n + 1$ indican los instantes de tiempo separados por $1/2$. Si hubiéramos elegido un intervalo de discretización diferente, la ley de seguimiento no tendría una forma tan simple.

Otro punto importante es el orden del algoritmo. Hay esencialmente dos alternativas: un algoritmo de aceleración lineal o de aceleración constante. En el primer caso la aceleración de un vehículo entre los instantes τ y $\tau + \Delta$ varía linealmente, o sea:

$$a_{n+1} = a_n + \frac{\Delta a}{2}, \quad (\text{E.7})$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{a_n}{2} + \frac{\Delta a}{8}, \quad (\text{E.8})$$

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \frac{\Delta v_n}{2} + \frac{\Delta a_n}{8} + \frac{\Delta^2 a}{48}, \quad (\text{E.9})$$

donde Δa es la sobreaceleración, $\Delta^2 a = \Delta a_{Ln} - \Delta a_n$ es la sobreaceleración relativa, $\Delta a_n = a_{Ln} - a_n$ es la aceleración relativa y $\Delta v_n = v_{Ln} - v_n$ es la velocidad relativa. Para el algoritmo de aceleración constante:

$$v_{n+1} = v_n + \frac{a_n}{2}, \quad (\text{E.10})$$

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \frac{\Delta v_n}{2} + \frac{\Delta a_n}{8}, \quad (\text{E.11})$$

donde la aceleración a_n se obtiene de (E.6).

Se podría pensar que el algoritmo de aceleración lineal proporciona mejores resultados que el de aceleración constante. Sin embargo, ésto es radicalmente falso. De hecho el primer algoritmo introduce un serio error, como se verá a continuación. Las ecuaciones del algoritmo pueden ser escritas en forma matricial para el caso en el que el vehículo seguido se desplaza a una velocidad constante, v_0 . Las ecuaciones para la desviación de la velocidad, $w = v - v_0$ y la desviación del espaciamiento $\mu = \lambda - \lambda_0$ pueden ser derivadas de (E.6), (E.7), (E.8) y (E.9) para el algoritmo de aceleración lineal:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ w_{n+1} \\ \mu_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{24} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ w_n \\ \mu_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{x}_n.$$

Para el algoritmo de aceleración constante se obtiene de (E.6), (E.10) y (E.11):

$$\mathbf{y}_{n+1} = \begin{bmatrix} w_{n+1} \\ \mu_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_n \\ \mu_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{y}_n.$$

Los autovalores de las matrices proporcionan una medida de la amortiguación de la solución en cada intervalo de discretización, $\Delta = 1/2$. Para la matriz \mathbf{A}_3 los autovalores son: $\alpha_{1,2} = 0.326914 \pm 0.310252i$ y $\alpha_3 = -0.820495$, y para \mathbf{A}_2 son: $\alpha_{1,2} = 0.375 \pm 0.330719i$. Por lo tanto, la respuesta está atenuada ya que la parte real de los autovalores es menor que la unidad.

Por otra parte, la ecuación del modelo de seguimiento de vehículos puede ser aproximada por la EDO (ecuación diferencial ordinaria):

$$\frac{1}{2} \ddot{v}(\tau) + \dot{v}(\tau) + v(\tau) = v_L(\tau). \quad (\text{E.12})$$

Este hecho se puede comprobar comparando las funciones de transferencia de la ecuación anterior con la de (E.5). Hasta frecuencias adimensionales de 0.4, ambas funciones toman valores casi idénticos. Para el caso del vehículo seguido viajando a velocidad constante, el comportamiento de las soluciones está gobernado por las raíces de la ecuación característica de (E.12): $\alpha_{1,2} = -1 \pm i$. Entonces, el amortiguamiento de la solución tras un tiempo Δ es:

$$\exp\left(\frac{-1 \pm i}{2}\right) \approx 0.36788 \pm 0.36788i.$$

Este valor está mucho más próximo al dado por el algoritmo de aceleración constante. Además el algoritmo de aceleración lineal introduce una solución espúrea a través de la raíz α_3 . Esto ocurre porque el orden de dicho algoritmo es superior al orden efectivo de la ecuación diferencial, que es dos. En conclusión, el algoritmo de aceleración constante aproxima adecuadamente el modelo original.

E.3 Algoritmo para el Modelo Original

El objetivo de esta sección es formular un algoritmo para el modelo no lineal de seguimiento de vehículos. El análisis previo del algoritmo para el modelo lineal, sugiere considerar que la aceleración es constante durante el intervalo de discretización. Entonces la aceleración vendría dada por:

$$a = \frac{v_e(\lambda_1) - v(\tau_1)}{\zeta_1}, \quad (\text{E.13})$$

en el intervalo $(\tau_1, \tau_1 + \zeta_1)$, siendo $\zeta_1 = \zeta(\lambda(\tau_1))$. La anterior ecuación es válida siempre que no haya saturación. Se puede hacer $\tau_1 = 0$ sin pérdida de generalidad. Entonces no hay saturación siempre que:

$$\zeta(\tau) + \tau > \zeta_1, \quad 0 < \tau < \zeta_1. \quad (\text{E.14})$$

Desafortunadamente, la condición anterior se debe comprobar para un número suficientemente grande de instantes de tiempo en el intervalo $(0, \zeta_1)$, lo cual supone una considerable carga computacional.

Para disminuir el coste computacional, nos preguntamos si es posible desarrollar un criterio de saturación que requiera sólo la evaluación de (E.14) en los extremos del intervalo de discretización. A continuación, se demostrará que ésto es posible si se reduce el intervalo de discretización de $(0, \zeta_1)$ a $(0, 1/2)$. Notar que el intervalo original siempre contiene al $(0, 1/2)$ ya que el tiempo de reacción mínimo es $1/2$.

Definamos la función de saturación como:

$$\mathcal{S}(\tau) = \zeta(\tau) + \tau - \zeta_1, \quad (\text{E.15})$$

para $0 < \tau < 1/2$. Por lo que hay saturación si $\mathcal{S}(\tau) < 0$. Resulta obvio que $\mathcal{S}(0) = 0$. Por otra parte

$$\frac{d\mathcal{S}}{d\tau} = \frac{d\zeta}{d\lambda}(\Delta v_1 + \Delta a\tau) + 1,$$

y

$$\frac{d^2\mathcal{S}}{d\tau^2} = \frac{d^2\zeta}{d\lambda^2}(\Delta v_1 + \Delta a\tau)^2 + \frac{d\zeta}{d\lambda}\Delta a,$$

donde $\Delta v_1 = v_{L1} - v_1$ es la velocidad relativa al inicio de la reacción y $\Delta a = a_L - a$ es la aceleración relativa. Entonces, si

$$\left. \frac{d\mathcal{S}}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \frac{d\zeta}{d\lambda}\Delta v_1 + 1 < 0, \quad (\text{E.16})$$

y

$$\left. \frac{d^2\mathcal{S}}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} = \frac{d^2\zeta}{d\lambda^2}\Delta v_1^2 + \frac{d\zeta}{d\lambda}\Delta a \neq 0$$

la saturación tiene lugar justo al principio de la reacción. Por consiguiente, la condición (E.16) proporciona un criterio de saturación. Este criterio es justo el opuesto de (E.1) particularizado para $\tau = 0$. Sin embargo, la condición (E.16) es suficiente pero no necesaria. Es decir, puede ser violada pero haber saturación en un instante de tiempo posterior al comienzo de la reacción.

Si el criterio (E.16) falla, necesitamos formular otro criterio. Por razones de simplicidad, el nuevo criterio debería requerir la evaluación de la función de saturación S sólo en los extremos del intervalo $(0, 1/2)$. Por lo tanto, es necesario que la frontera de la saturación esté delimitada por $\tau = 1/2$. En otras palabras, la condición $S(1/2) > 0$ debería implicar $S(\tau) > 0$ para $\tau \in (0, 1/2)$. La transición de la no saturación a la saturación debería ser como la mostrada en la figura E.1. Sin embargo, con las hipótesis realizadas sobre el tiempo de reacción no resulta posible demostrar que la transición es realmente así. Por ello, se realizó una 'prueba por ordenador'. Antes de nada, veremos de qué variables depende el segundo criterio de saturación.

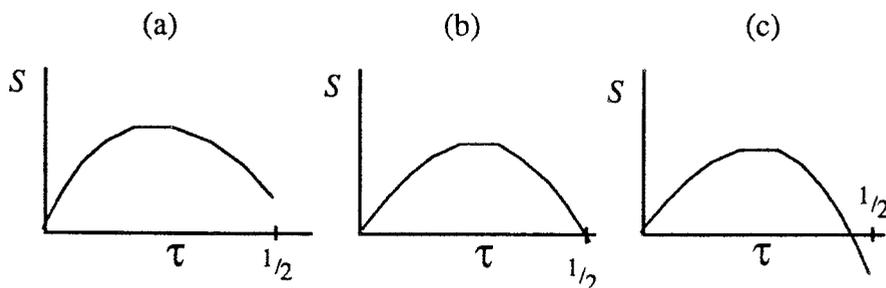


Figura E.1: Sin saturación (a), frontera de la saturación (b) y saturación antes del instante final (c).

En el extremo final del intervalo se tiene:

$$S(1/2) = \zeta_2 + 1/2 - \zeta_1,$$

donde el tiempo de reacción ζ_2 es una función del espaciamento final λ_2 . Como la aceleración se considera constante, el espaciamento final es:

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \frac{\Delta v_1}{2} + \frac{\Delta a}{8}, \quad (\text{E.17})$$

donde los subíndices 1 y 2 indican los estados inicial y final. La expresión anterior se puede escribir en términos de la velocidad media relativa, $\Delta v_m = (\Delta v_1 + \Delta v_2)/2$, como:

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \frac{\Delta v_m}{2}, \quad (\text{E.18})$$

puesto que la aceleración relativa es $\Delta a = 2(\Delta v_2 - \Delta v_1)$. Por consiguiente, el criterio de saturación es:

$$\zeta_2 + \frac{1}{2} - \zeta_1 < 0, \quad (\text{E.19})$$

que depende sólo de λ_1 y Δv_m . En general, la función de saturación depende de λ_1 , Δv_1 y Δv_2 , ya que el último parámetro está relacionado con la aceleración.

Para cada trio de condiciones iniciales y finales $-\lambda_1$, Δv_1 , Δv_2 - la función de saturación fue evaluada en 20 instantes de tiempo equidistantes dentro del intervalo $(0, 1/2]$. El intervalo de velocidades relativas, desde -1 hasta 1, fue discretizado en 100 valores equidistantes. El cuadrante $\Delta v_1 > 0, \Delta v_2 > 0$ fue eliminado, puesto que la saturación no es posible en dicho dominio. El límite superior para el espaciamiento inicial, λ_{max} , fue elegido como aquel valor para el que el tiempo de reacción era 50. Para la curva velocidad-espaciamiento exponencial $\lambda_{max} = \ln 100 \approx 4.60517$, y para la curva de máxima sensibilidad $\lambda_{max} \approx 2.0332$. El intervalo de λ_1 fue discretizado en 100 valores equidistantes. El programa representaba el dominio de saturación en el plano $\Delta v_1, \Delta v_2$ para cada valor de λ_1 . Para todos los casos evaluados, la saturación se producía si (E.16) o (E.19) se satisfacían. Este procedimiento de verificación no constituye una prueba formal pero justifica en cierta manera el empleo de los criterios de saturación debido al elevado número de puntos en los que se discretizó el dominio.

En conclusión, dos criterios de saturación han sido desarrollados. El primero está dado por (E.16) coincide con la condición de saturación original y depende sólo de las condiciones iniciales λ_1 y Δv_1 . El segundo criterio está dado por (E.19) y depende de las condiciones iniciales y de la velocidad media relativa Δv_m . Las curvas frontera de saturación se obtienen transformando (E.16) y (E.19) en igualdades. Teniendo en cuenta las expresiones (D.16), (B.20), y (B.22), las curvas frontera dadas por el primer criterio son:

$$\Delta v_1 = -2e^{\lambda_1}, \quad (\text{E.20})$$

para la curva exponencial, y

$$\Delta v_1 = -2 \frac{\exp [\lambda_1 + 1 - e^{\lambda_1}]}{e^{\lambda_1} - 1}, \quad (\text{E.21})$$

para la curva de máxima sensibilidad. Las curvas frontera dadas por el segundo criterio se obtienen de las mismas expresiones y de (E.18). Son, para la curva exponencial:

$$\Delta v_m = 2 \ln [1 - e^{-\lambda_1}], \quad (\text{E.22})$$

y para la de máxima sensibilidad en forma implícita:

$$\exp \left[\exp \left(\lambda_1 + \frac{\Delta v_m}{2} \right) - e^{\lambda_1} - \frac{\Delta v_m}{2} \right] + \exp [\lambda_1 + 1 - e^{\lambda_1}] = 1. \quad (\text{E.23})$$

Las curvas de frontera de saturación se representan en la figura E.2. Estas curvas presentan ciertas características interesantes: en todos los casos existe un límite inferior para el espaciamiento inicial bajo el cual la saturación no es posible. Dicho límite corresponde a una velocidad relativa igual a la unidad. En la tabla E.1 se muestran los valores del espaciamiento mínimo de saturación, y las correspondientes velocidades de equilibrio.

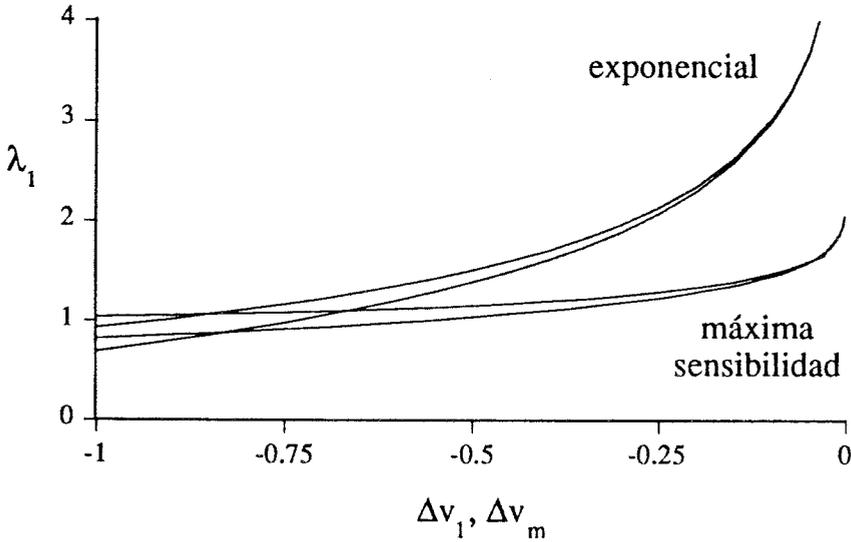


Figura E.2: Curvas frontera de saturación.

criterio de saturación	curva velocidad-espaciamiento	
	exponencial	máxima sensibilidad
primero	0.6931472	0.8210585
	0.5	0.7199829
segundo	0.9327521	1.0370783
	0.6065306	0.8381302

Tabla E.1: Espaciamiento mínimo de saturación (arriba) y velocidad de equilibrio correspondiente (abajo).

El espaciamiento mínimo dado por el criterio (E.16) es menor que el dado por (E.19) para ambas curvas velocidad-espaciamiento. Además es bastante sobresaliente el hecho de que ambos criterios proporcionan curvas frontera de saturación bastante similares para todo el rango de velocidades relativas. En

concreto, las curvas son casi idénticas para velocidades relativas bajas. Esto demuestra que el segundo criterio equivale prácticamente a aplicar el primero a la velocidad relativa media.

A continuación se formula finalmente el algoritmo para el modelo original de seguimiento de vehículos cuyas ecuaciones son (D.17) a (D.18). Se ha demostrado previamente que la velocidad final es

$$v_2 = v_1 + a/2, \quad (\text{E.24})$$

donde la aceleración está dada por (E.13), si no hay saturación. Entonces, se prosigue la integración tomando el mismo valor para la aceleración en el siguiente intervalo $(1/2, 1]$. Este procedimiento se repite hasta la velocidad objetivo $v_e(\lambda_1)$ haya sido alcanzada, si no ha habido saturación antes de que se alcance dicho objetivo. Por el contrario, si hay saturación en cualquiera de los intervalos, no es posible obtener una expresión analítica para la velocidad final. El tiempo de discretización debe ser reducido y la velocidad final dependerá del paso de discretización tomado. Todas estas consideraciones se pueden resumir en los siguientes pasos:

- (i) dada la velocidad inicial, v_1 y el espaciamiento, λ_1 , evaluar la velocidad final v_2 mediante (E.24) y (E.13);
- (ii) evaluar el tiempo de reacción final, ζ_2 , y verificar los criterios de saturación (E.16) y (E.19);
- (iii) si cualquiera de los criterios se cumple reducir el paso de tiempo $1/2$ a $1/(2N)$ con N entero, e ir desde (i) directamente a (iv) N veces;
- (iv) hacer los valores finales igual a los iniciales, y si no ha habido saturación, guardar el valor previo de la aceleración;
- (v) ir a (i).

En general, la velocidad y el espaciamiento obtenidos mediante este procedimiento corresponderán a instantes de tiempo arbitrarios. En cambio, resultaría muy conveniente que los valores correspondieran a instantes de tiempo equiespaciados. Además, el tiempo entre dos valores consecutivos no debería ser mayor de $1/2$ para que el movimiento de cada vehículo fuera adecuadamente descrito. Estos valores equiespaciados son fácilmente obtenibles interpolando entre los valores dados por el algoritmo. La interpolación se realiza teniendo en cuenta que la aceleración es constante entre los valores originales.

E.4 Algoritmo para el Modelo Aproximado

El procedimiento expuesto previamente es considerablemente más simple que la integración directa de las ecuaciones del modelo. No obstante, la necesidad

de evaluar los criterios de saturación junto con la de disminuir el tiempo de discretización si hay saturación, hace que el modelo sea ligeramente complicado para aplicaciones de simulación. Las complicaciones surgen cuando hay saturación. Esto se podría evitar si se aproximara la ecuación diferencial funcional por la ecuación diferencial ordinaria (E.2). Entonces el modelo se reduciría a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias, concretamente (E.2) y (D.18), para las que el problema de saturación no existe.

La cuestión entonces estriba en saber hasta qué punto es válida la aproximación:

$$v(\tau + \zeta(\lambda(\tau))) \approx v(\tau) + \dot{v}(\tau)\zeta(\lambda(\tau)).$$

Diversos resultados de aproximación de ecuaciones diferenciales funcionales con retraso constante mediante ecuaciones diferenciales ordinarias aparecen en Halanay y Răsvan (1981). Desgraciadamente no parece haber ningún resultado para el tipo de modelo que nos ocupa. Por lo tanto, la aproximación estará justificada en base a los resultados numéricos y a la física del problema, ya que la escala de tiempo de las fluctuaciones del tráfico es mayor o igual al tiempo de reacción.

El modelo aproximado puede ser resuelto mediante los métodos clásicos para ODEs. Sin embargo, un método eficiente y extremadamente simple es el método de Euler. De acuerdo con este método, la función se aproxima por el primer término de la serie de Taylor. Entonces, tomando un tiempo de discretización de $1/2$, la velocidad final se calcula de acuerdo con (E.24), y el espaciado final está dado por (E.17). Es fácil ver que para el modelo lineal este método coincide con el expuesto en la sección E.2.

E.5 Resultados Numéricos

Esta sección presenta los resultados numéricos correspondientes a diversos ejemplos. Concretamente dos ejemplos han sido resueltos mediante cuatro métodos diferentes. Los métodos empleados han sido clasificados de acuerdo con la versión del modelo de seguimiento de vehículos y con la técnica de resolución. Dos versiones del modelo de seguimiento de vehículos han sido consideradas: la primera corresponde al modelo original basado en las ecuaciones (D.17), (D.18) y (E.2), y la segunda es el modelo basado en ODEs obtenido al aproximar (D.17) por (E.2). El primer modelo es denominado (OR) y el segundo (AP). Para cada uno de estos modelos, los ejemplos han sido resueltos integrando directamente el modelo mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden, y mediante los algoritmos en diferencias finitas explicados en las secciones anteriores. Las etiquetas RK y FD indican el método de resolución empleado. Además todos los ejemplos han sido resueltos tomando la curva velocidad-espaciado exponencial y la de máxima sensibilidad.

El primer ejemplo considerado consiste en una maniobra de aproximación a un vehículo que se desplaza a velocidad constante. El vehículo seguidor parte a

la velocidad máxima y la velocidad del primer vehículo es 0.15. El espaciamiento inicial es λ_{max} , que corresponde a un tiempo de reacción igual a 50. Los valores de λ_{max} se dan en la sección E.3. Dichas condiciones iniciales fueron elegidos para que durante la primera parte de la maniobra de frenado hubiera saturación. Además interesaba contrastar la validez de la formulación para el tiempo de reacción para grandes velocidades relativas. Los resultados obtenidos se representan en la figura E.3. La simulación comienza en $\tau = 0$ pero sólo se ha representado el intervalo de tiempo más significativo. El régimen de saturación dura respectivamente hasta $\tau = 1.5$ y $\tau = 4.5$ para las curvas de máxima sensibilidad y la exponencial.

En el segundo ejemplo, el vehículo líder describe una trayectoria genérica, cuya velocidad está dada por:

$$v_L(\tau) = 0.6 - 0.2 \cos^2\left(\frac{\pi\tau}{5}\right) - 0.2 \sin\left(\frac{\pi\tau}{10}\right).$$

Se eligió este registro de velocidad porque contiene dos frecuencias representativas del espectro de velocidades y porque además la respuesta tiene lugar sin saturación. En la figura E.4 se muestran los resultados obtenidos.

Lo más sobresaliente de los resultados obtenidos es la similaridad entre ellos. De hecho, todos los resultados numéricos pueden ser encerrados dentro de una banda de velocidad de anchura 0.15. Esto significa que las soluciones pueden ser consideradas casi idénticas puesto que la aleatoriedad del tráfico es de por sí del 15% o mayor. La correlación de la respuesta del vehículo seguidor con la del seguido es mayor para el modelo basado en la curva de máxima sensibilidad. Esto se explica fácilmente por la manera en que se ha derivado el modelo de seguimiento de vehículos. La derivación del modelo perseguía aproximar el modelo de propagación

$$v(\tau + 2\zeta) = v_L(\tau), \quad (E.25)$$

por un modelo de seguimiento de vehículos. El modelo no lineal fue derivado generalizando a partir del modelo lineal. Por lo tanto, desviaciones de la hipótesis de linealidad tienen como consecuencia desviaciones similares del modelo de propagación.

Del análisis previo se concluye que el algoritmo FDAP da los mejores resultados en cuanto a simplicidad y exactitud. Por esta razón este algoritmo fue analizado con mayor profundidad. Dos aspectos de la solución tenían especial interés: la amplificación o atenuación de la respuesta y la distorsión del perfil de velocidad a lo largo de la caravana.

Para estudiar la propagación de una perturbación a lo largo de una caravana, se resolvieron diversos ejemplos. En todos estos ejemplos, el movimiento del vehículo líder consistía en una maniobra de frenado o aceleración rápido seguida de una recuperación de la velocidad inicial. Se consideraron caravanas con 50 vehículos y se evaluaron los mínimos y máximos de las velocidades dependiendo de que el vehículo líder frenara o acelerara. En todos los casos, la

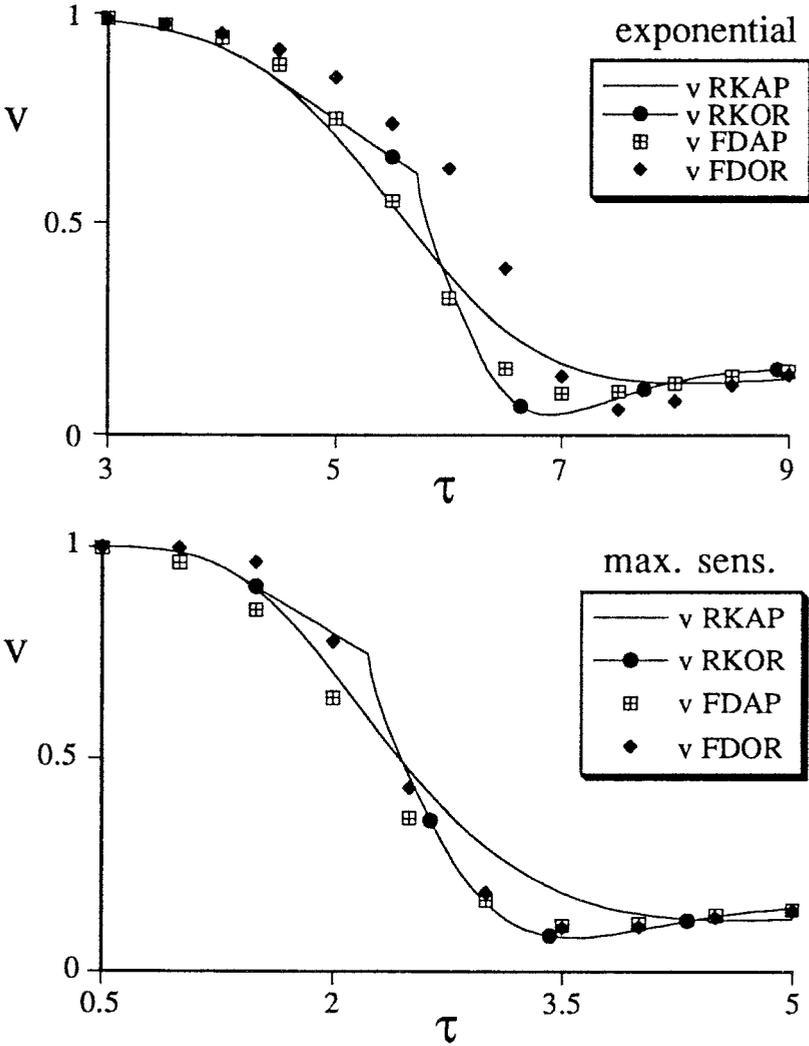


Figura E.3: Frenado desde $\lambda = \lambda_{max}$ y $v = 1$ hasta $v_L = 0.15$.

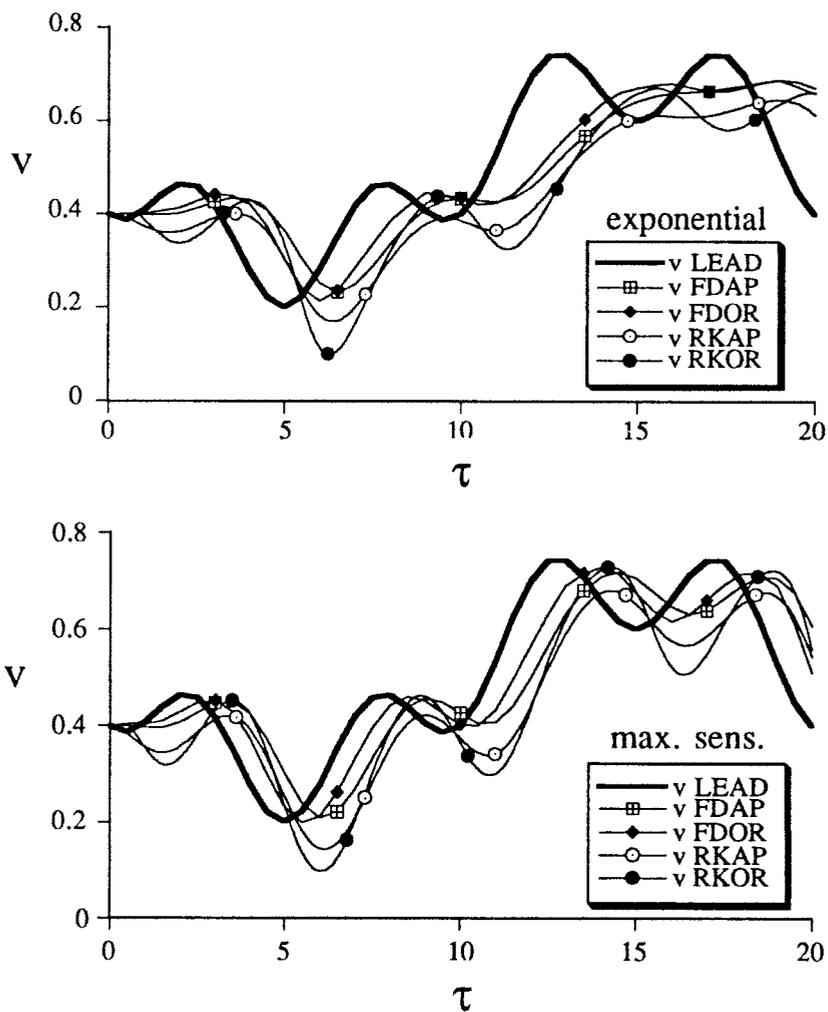


Figura E.4: Un registro genérico de velocidad para el vehículo líder.

repuesta se amortiguaba ya que los mínimos y los máximos de las velocidades aumentaban y disminuían respectivamente, con la posición del vehículo en la caravana. Todos los ejemplos se resolvieron tomando las curvas exponencial y de máxima sensibilidad.

El segundo punto de interés está relacionado con la manera en la que el perfil de velocidad se propaga a través de la caravana. El tiempo de reacción ha sido derivado de la teoría de ondas cinemáticas. De acuerdo con esta teoría, si la curva intensidad-densidad es cóncava, las ondas de aceleración se distorsionan mientras que las de frenado se propagan sin distorsionarse. Por lo tanto, este comportamiento debe ser reflejado en el modelo de seguimiento de vehículos. Para comprobar este punto, diversos ejemplos de maniobras de frenado y aceleración se simularon. La figura E.5 (a) muestra el perfil de velocidad de 13 vehículos al aproximarse a un vehículo líder que desplaza a una velocidad de 0.2. La velocidad inicial de la caravana es 0.9 y se observa que no hay distorsión en el perfil de velocidades. La figura (b) muestra el problema inverso: la caravana acelerando desde 0.2 hasta 0.9. En este caso el perfil de velocidad sufre una distorsión clara. Los resultados representados en la figura E.5 fueron obtenidos con la curva velocidad-espaciamento de exponencial, pero para la curva de máxima sensibilidad son similares. Por el contrario para la curva velocidad-espaciamento lineal, los resultados muestran que el perfil de velocidad no experimenta distorsión tanto en frenado como en aceleración, lo que concuerda con la teoría de ondas cinemáticas.

Se concluye que el algoritmo desarrollado en la sección E.4 resulta muy apropiado para simulación microscópica debido a su simplicidad y a su capacidad para reproducir los resultados de la teoría de ondas cinemáticas. Por lo tanto es un serio competidor de otros algoritmos como el propuesto por Gipps (1981) y usado en el programa MULTSIM.

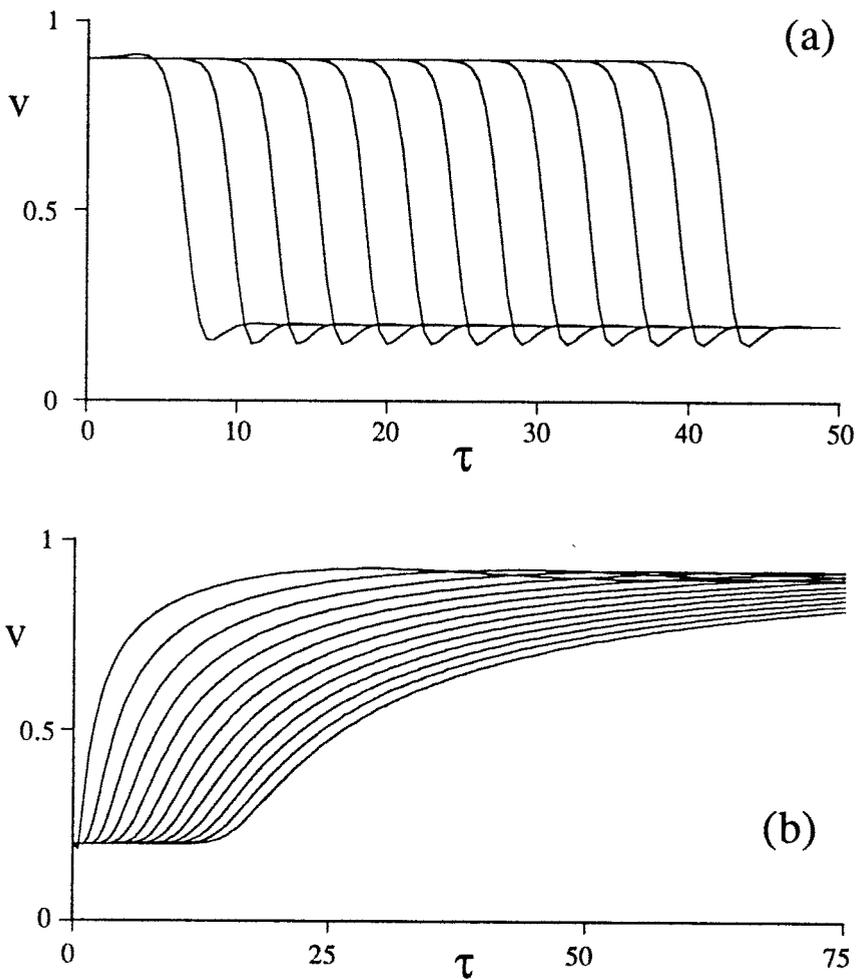


Figura E.5: Propagación de una onda de frenado (a) y de una onda de aceleración (b).

Apéndice F

Revisión del Modelo de Payne

F.1 El Modelo de Payne Linealizado

Las ecuaciones originales del modelo de Payne son (A.7) y (A.8). Si se linealizan dichas ecuaciones para pequeñas perturbaciones en torno a un punto de equilibrio $(K_0, V_0 = V_e(K_0))$, las ecuaciones resultantes son:

$$\begin{aligned}\hat{K}_t + V_0 \hat{K}_x + K_0 \hat{V}_x &= 0, \\ \hat{V}_t + V_0 \hat{V}_x &= \frac{V'_0 \hat{K} - \hat{V}}{T_0} - \frac{\nu_0}{T_0 K_0} \hat{K}_x,\end{aligned}$$

donde \hat{K} y \hat{V} son las perturbaciones de densidad y velocidad con $\hat{K} \ll K_0$ y $\hat{V} \ll V_0$; $V'_0 = V'_e(K_0)$; $\nu_0 = \nu(K_0) = -\frac{1}{2}V'_0$ y $T_0 = T(K_0, V_0)$. Las cantidades totales son $K = K_0 + \hat{K}$, $V = V_0 + \hat{V}$.

Manipulando las anteriores ecuaciones se llega a una ecuación de segundo orden para la densidad:

$$\hat{K}_t + C_0 \hat{K}_x = \nu_0 \hat{K}_{xx} - T_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \hat{K}, \quad (\text{F.1})$$

donde C_0 es la velocidad de la onda cinemática correspondiente a K_0 , o sea, $C_0 = V_0 + V'_0 K_0$. La misma ecuación se obtiene para \hat{V} . Es importante observar que el segundo miembro de (F.1) es el modelo Simple de Continuidad linealizado e igualado a cero. Por consiguiente, cabría esperar que para pequeños cambios de densidad las soluciones de (F.1) pudieran ser aproximadas por las de:

$$\hat{K}_t + C_0 \hat{K}_x = 0. \quad (\text{F.2})$$

El segundo miembro de (F.1) es en sí mismo un operador de ondas, ya que puede ser escrito en la forma:

$$-T_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + C^+ \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + C^- \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{K},$$

donde:

$$C^+ = V_0 + \sqrt{\frac{\nu_0}{T_0}}, \quad C^- = V_0 - \sqrt{\frac{\nu_0}{T_0}}.$$

Se puede demostrar (ver Kevorkian, 1981 o Whitham, 1974) que la solución de (F.1) tiende a la de (F.2) conforme $T_0 \rightarrow 0$ si la velocidad de la onda cinemática C_0 está entre las de las ondas de alto orden C^+ y C^- :

$$C^- < C_0 < C^+.$$

Si la anterior restricción se viola, pueden surgir inestabilidades que conduzcan a ondas de choque. Por lo tanto, la solución estable se corresponde a una señal principal que se desplaza a una velocidad C_0 precedida y seguida de señales secundarias que se propagan a lo largo de las características de la ecuación. Como $C_0 = V_0 + K_0 V_0'$, la condición de estabilidad se reduce a:

$$-K_0 V_0' < \sqrt{\frac{\nu_0}{T_0}}.$$

F.2 Onda de Compresión Estacionaria

Para ver si el modelo de Payne suaviza las ondas de choque del modelo Simple de Continuidad, buscamos soluciones con la forma:

$$K = F(x - V_s t) = F(y),$$

$$V = G(x - V_s t) = G(y).$$

Al introducir esta forma funcional en las ecuaciones (A.7) y (A.8) se obtiene

$$(K(V - V_s))_y = 0,$$

$$(V - V_s)V_y = \frac{V_e - V}{T} - \frac{\nu}{TK}K_y,$$

de las que a su vez se deduce una ecuación para la velocidad

$$\left(\nu - \frac{Q_s^2}{K^2 T}\right) K_y = K(V_e - V_s) - Q_s, \quad (\text{F.3})$$

donde $Q_s = K(V - V_s) = K_1(V_1 - V_s) = K_2(V_2 - V_s)$ es la intensidad de tráfico relativa a la onda y $V_s = (K_1 V_1 - K_2 V_2)/(K_1 - K_2)$ es la velocidad de la onda. La pareja de valores (K_1, V_1) y (K_2, V_2) corresponde a la velocidad y la densidad en los extremos de la onda.

Debido a que la condición de concavidad es asumida, sólo puede haber ondas de choque de compresión o frenado, por lo que $K_y > 0$ y $K_1 < K_2$,

$V_1 > V_2$. Además el segundo miembro de (F.3) es siempre positivo. Esto se demuestra fácilmente teniendo en cuenta que

$$K(V_e - V_s) - Q_s = \left(\frac{KV_e - K_1V_1}{K - K_1} - V_s \right) (K - K_1).$$

En el intervalo $[K_1, K_2]$ ambos factores del segundo miembro permanecen constantes. El primero es la diferencia entre las pendientes de las rectas AB y AC (ver figura F.1), y esta diferencia es siempre positiva si $Q_e'' < 0$.

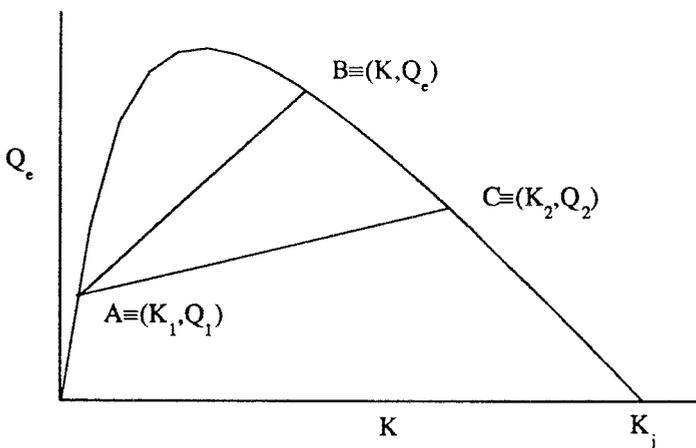


Figura F.1: La pendiente de AB es siempre mayor que la de AC .

Por lo tanto la ecuación (F.3) puede dar soluciones continuas sólo si:

$$A = \frac{\nu}{T} - \frac{Q_s^2}{K^2} > 0, \tag{F.4}$$

en $[K_1, K_2]$. En este caso la ecuación (F.3) debe ser resuelta con las condiciones $K(y \rightarrow -\infty) = K_1$ y $K(y \rightarrow +\infty) = K_2$, y la solución será como la mostrada en la figura F.2. Si A cambia de signo en $K^* \in [K_1, K_2]$ entonces K_y vale infinito en ese punto y el perfil de la onda se vuelve hacia atrás (ver figura F.3).

en este caso la solución analítica no tiene sentido físico y debe ser reemplazada por una solución débil, que requiere una discontinuidad. La condición de salto a través de la discontinuidad se halla integrando la ecuación (F.3) entre los valores de y a ambos lados del punto y_a donde la discontinuidad debe ser emplazada:

$$\int_{y_a - \epsilon}^{y_a + \epsilon} \left(\frac{\nu}{T} - \frac{Q_s^2}{K^2} \right) K_y dy = \int_{y_a - \epsilon}^{y_a + \epsilon} \frac{K(V_e - V_s) - Q_s}{T} dy.$$

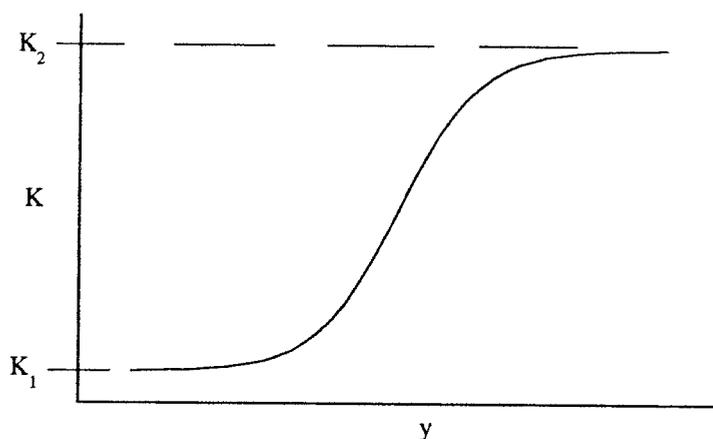


Figura F.2: Perfil de onda continuo.

Tomando el límite cuando ε tiende a cero y teniendo en cuenta que el integrando del segundo miembro permanece acotado mientras que el del primer miembro tiende a infinito, se obtiene:

$$[g] + Q_s^2 \left[\frac{1}{K} \right] = 0,$$

donde $[\]$ indica 'salto a través de la discontinuidad' y

$$g = \int \frac{\nu}{T} dK.$$

Cuando A cambia de signo en $[K_1, K_2]$ se pueden distinguir dos subcasos.

(i) $A(K_1) > 0$ y $A(K_2) < 0$ (ver figura F.4). El salto de densidad $[K] = K_2 - K_a$ y K_a se calcula usando la condición de salto, concretamente:

$$\int_{K_a}^{K_2} \frac{\nu}{T} dK + Q_s^2 \left(\frac{1}{K_2} - \frac{1}{K_a} \right) = 0. \quad (\text{F.5})$$

(ii) $A(K_1) < 0$ y $A(K_2) > 0$ (ver figura F.5). Entonces $[K] = K_a - K_1$, donde K_a se obtiene de la condición:

$$\int_{K_1}^{K_a} \frac{\nu}{T} dK + Q_s^2 \left(\frac{1}{K_a} - \frac{1}{K_1} \right) = 0. \quad (\text{F.6})$$

Finalmente si $A < 0$ en $[K_1, K_2]$ no existen soluciones continuas de (F.3) y la solución débil es simplemente una discontinuidad desde K_1 a K_2 , como en el modelo Simple de Continuidad (ver figura F.6).

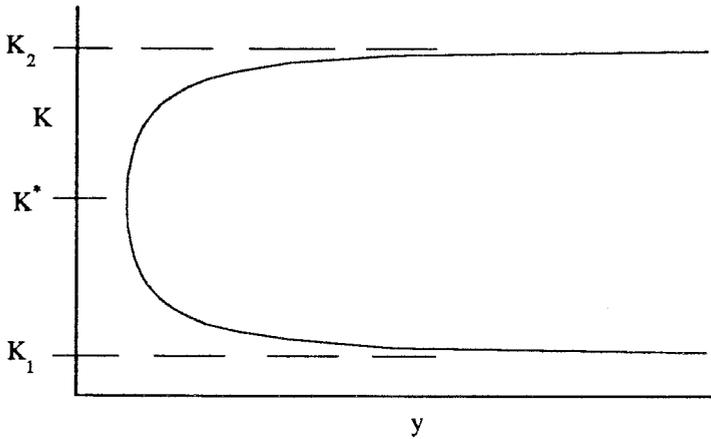


Figura F.3: Perfil de onda que se vuelve hacia atras.

Si se recuerda que $Q_s = K(V - V_s)$, la condición para ondas de compresión continuas se transforma en:

$$V - \sqrt{\frac{\nu}{T}} < V_s < V + \sqrt{\frac{\nu}{T}},$$

que tiene un gran parecido con la condición de estabilidad para el modelo linealizado.

F.3 Tiempo de Reacción y Condición de Consistencia

En esta sección se deducirá una expresión para el tiempo de reacción como función de la densidad. Además se verá la relación existente entre el tiempo de reacción y la condición de concavidad. Para deducir la expresión del tiempo de reacción nos basaremos en el modelo de Payne linealizado, que daba la siguiente ecuación para la densidad:

$$\hat{K}_t + C_0 \hat{K}_x + T_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + C^+ \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + C^- \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{K} = 0. \quad (F.7)$$

Ahora debemos volver a la teoría a partir de la cual se deriva la analogía fluidodinámica de los modelos macroscópicos de tráfico: la dinámica de gases. Las ecuaciones del flujo unidireccional isentrópico de un gas son:

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0,$$

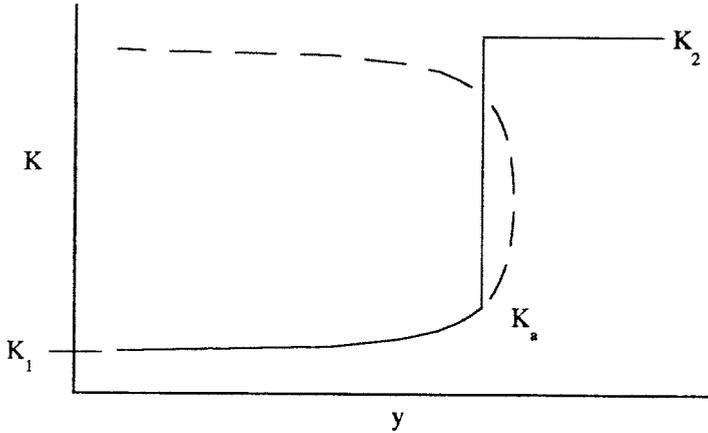


Figura F.4: Discontinuidad cuando $A(K_1) > 0$ y $A(K_2) < 0$.

$$u_t + uu_x = -\frac{a^2}{\rho}\rho_x,$$

donde $a = a(\rho)$ es la velocidad del sonido. Las ecuaciones linealizadas en torno a $(\rho_0, u_0 = 0)$ conducen a la ecuación de ondas de la acústica:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}.$$

En este caso las ondas que describen el fenómeno tienen una clara interpretación física: llevan información sobre pequeños cambios de densidad y presión.

Sin embargo, en el modelo de Payne linealizado, las ondas cuyas velocidades son C^+ , C^- no parecen tener un significado físico concreto. Además, la onda de velocidad $C^+ = V_0 + \sqrt{\nu_0/T_0}$ viajaría más rápido que los vehículos, lo cual es absurdo. Por lo tanto las ondas C^+ deben ser eliminadas del modelo ya que no pueden representar el comportamiento de los conductores. La única manera de eliminarlas es haciendo $C^- = C_0$ en (F.7). Entonces la ecuación linealizada se transforma en:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + C_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(1 + T_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + C^+ \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \hat{K} = 0,$$

cuya solución general es,

$$\hat{K} = F(x - C_0 t) + e^{-t/T_0} G(x - C^+ t).$$

Las únicas soluciones relevantes son aquellas con $G \equiv 0$, las cuales son a su vez soluciones del modelo Simple de Continuidad linealizado (F.2). En vista

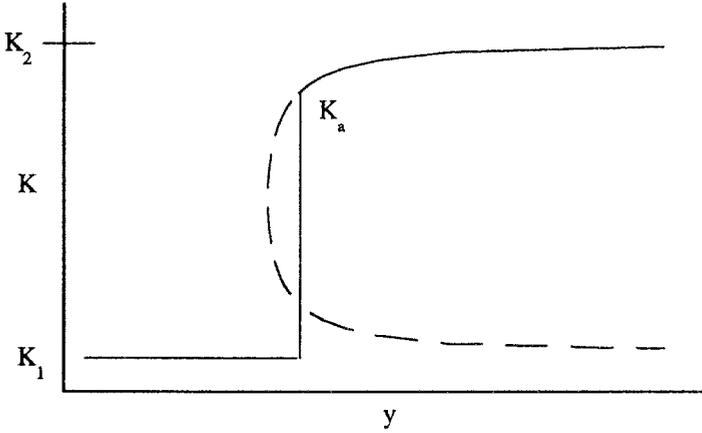


Figura F.5: Discontinuidad cuando $A(K_1) < 0$ y $A(K_2) > 0$.

de los resultados, se formulará la condición de consistencia para los modelos macroscópicos de tráfico de la siguiente manera: “la linealización de cualquier modelo macroscópico de tráfico debe conducir a las ecuaciones del modelo Simple de Continuidad linealizado”.

Si $C_0 = C^-$ se satisface para punto de equilibrio $(K_0, V_0 = V_e(K_0))$ entonces

$$C = V_e + KV'_e = V_e - \sqrt{\frac{\nu}{T}} = C^-,$$

y por lo tanto,

$$\sqrt{\frac{\nu}{T}} = -KV'_e,$$

y como ν está dado por (A.9), el tiempo de reacción es

$$T = -\frac{1}{2K^2V'_e}. \tag{F.8}$$

La expresión anterior es la misma que (D.9). Aunque la expresión (D.9) fue obtenida a partir de un modelo de seguimiento de vehículos, la idea que subyace en ambas expresiones es la misma. La formulación del tiempo de reacción garantiza que pequeñas perturbaciones de velocidad y densidad se propagan de acuerdo con la teoría de ondas cinemáticas, tanto en el modelo de seguimiento de vehículos como en el modelo de Payne.

También se podía haber hecho C^+ igual a C_0 y se habrían obtenido las mismas soluciones para la densidad

$$\hat{K} = F(x - C_0t) + e^{-t/T_0} H(x - C^-t),$$

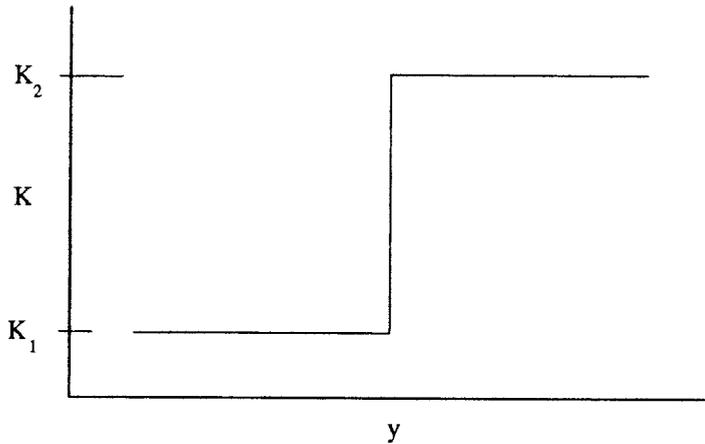


Figura F.6: El perfil es discontinuo si $A(K) < 0$.

y después de hacer $H \equiv 0$, se tendría:

$$\sqrt{\frac{v}{T}} = KV'_e,$$

en contra de la hipótesis de V'_e positivo.

Debido al modo en que se ha obtenido el tiempo de reacción, éste debe ser considerado como un tiempo de reacción de equilibrio, o sea, se debería escribir estrictamente:

$$T_e = -\frac{1}{2K^2V'_e}.$$

Para condiciones de no equilibrio la expresión (D.10) toma la forma:

$$T = \frac{T_e}{1 + 2K(V - V_e)T_e}.$$

Esta expresión tiene en cuenta el hecho de que los conductores conducen con más precaución cuando llevan una velocidad mayor que la de equilibrio y viceversa, como observó Köhler (1974) entre otros. Para simplificar la teoría nosotros asumiremos que

$$T = T_e.$$

F.4 Consecuencias en el modelo de Payne

Para investigar los cambios que la nueva formulación del tiempo de reacción produce en el modelo de Payne, consideraremos primero soluciones de la forma

$F(x - V_s t)$. Soluciones continuas con esta forma son posibles si la condición (F.4) se satisface. Con la nueva formulación del tiempo de reacción se tiene:

$$A = (KV_e')^2 - (V - V_s)^2 = (KV_e' + V - V_s)(KV_e' - V + V_s).$$

Teniendo en cuenta que $V_i = V_e(K_i)$, la evaluación de A en los extremos da:

$$A(K_i) = (C_i - V_s)(K_i V_{ei}' - V_i + V_s), \quad i = 1, 2,$$

donde $C_i = K_i V_{ei}' + V_i$ es la velocidad de las ondas cinemáticas. El segundo factor es siempre negativo si $V > V_s$. Gracias a la condición de concavidad se cumple que el primer factor es siempre positivo para el punto de menor densidad y negativo para el de mayor densidad, ver la figura B.1. Por lo tanto $A(K_1) < 0$ y $A(K_2) > 0$ y no son posibles soluciones continuas en el intervalo $[K_1, K_2]$. Para este caso, el salto a través de la discontinuidad se obtiene de (F.6).

Es de gran interés conocer de qué orden de magnitud es el salto de densidad y velocidad a través de la discontinuidad. Para ello definiremos las variables adimensionales ρ , u , u_e , q y q_e , como en la sección B.4 y los siguientes parámetros adimensionales:

$$\mu = \frac{\nu K_j}{|C_j|}, \quad \zeta = T|C_j|K_j.$$

Entonces, para la curva velocidad-densidad de Greenshields:

$$u_e = 1 - \rho, \quad \frac{\mu}{\zeta} = \rho^2, \quad q_s = \rho_1 \rho_2,$$

y tras adimensionalizar, la ecuación (F.6) se transforma en:

$$(\rho_a^2 + \rho_1 \rho_a + \rho_1^2) \rho_a - 3\rho_1 \rho_2^2 = 0, \quad (F.9)$$

La velocidad tras la onda de choque, u_a , se obtiene de la conservación del flujo relativo a la onda

$$u_a = \frac{q_s}{\rho_a} + u_s.$$

Para la curva velocidad-densidad de Greenberg

$$u_e = -\ln(\rho), \quad \frac{\mu}{\zeta} = 1,$$

y (F.6) se reduce a

$$u_a - u_s = \frac{1}{u_1 - u_s}, \quad (F.10)$$

y

$$\rho_a = \frac{q_s}{u_a - u_s}.$$

La ecuación (F.9) ha sido resuelta para diversos valores de (u_1, u_2) en el intervalo $[0, 1] \times [0, 1]$ mientras que la ecuación (F.10), se tomaron valores en el

intervalo $[0, 5] \times [0, 5]$. En ambos casos el salto de velocidad en la discontinuidad representa un 95% de la diferencia total de velocidad a través de la onda:

$$\frac{u_1 - u_a}{u_1 - u_2} \approx 0.95.$$

Por consiguiente, la capacidad del modelo de Payne para resolver de manera continua las ondas de choque del modelo Simple de Continuidad es bastante limitada. Concretamente, al añadir la ecuación de cantidad de movimiento sólo se obtiene un 5% de 'información adicional' sobre la velocidad. En otras palabras, los resultados del modelo de Payne pueden ser muy bien aproximados por los del modelo Simple de Continuidad. Esto es claramente una consecuencia de haber introducido la condición de consistencia en el modelo de Payne.

El resultado anterior no es aplicable sólo a soluciones de la forma $F(x - V_s t)$, sino que incluso se mantiene para cualquier solución realista del modelo de Payne. Esto es fácil de demostrar si se tiene en cuenta que el modelo de Payne con ν y T dado por (A.9) y (F.8), permite soluciones no estacionarias en las que $V = V_e(K)$. En efecto, si se hace $V = V_e$ la ecuación de cantidad de movimiento se transforma en

$$V_{e,t} + V_e V_{e,x} = -K V_e'^2 K_x,$$

que resulta ser la ecuación de continuidad si se divide por V_e' . Por lo tanto si el tiempo característico de variación de las condiciones del tráfico es considerablemente mayor que el tiempo de reacción, el término de relajación en (A.8) puede ser despreciado. Esta condición es muy probable que se satisfaga en la realidad ya que el tiempo de reacción es pequeño, concretamente del orden de segundos, mientras que las condiciones del tráfico varían más lentamente.

Un caso en el que los dos modelos dan exactamente la misma solución es en el *problema del vehículo líder* con condiciones de contorno de equilibrio. Para este problema las condiciones de contorno se imponen sobre la trayectoria del vehículo líder, $x = X_L(t)$. Si las condiciones a lo largo de $X_L(t)$ son de equilibrio, o sea si $V_L(t) = V_e(K_L(t))$, donde $V_L(t)$ es la velocidad del vehículo, las soluciones del modelo de Payne y la del modelo Simple de Continuidad son las mismas. Se concluye que la adopción de la formulación para el tiempo de reacción dada por (F.8), hace que el modelo de Payne sea casi idéntico al modelo Simple de Continuidad.

F.5 Comparación con otros Autores

Payne (1971) sugirió valores de 1.5 segundos para el tiempo de reacción aunque más tarde -Payne (1979)- recomendó 'valores macroscópicos' del orden de 10 segundos o mayores. Los valores tomados para el tiempo de reacción normalmente están entre 15 y 70 segundos -Cremer et al. (1981), Papageorgiou et al. (1989), Payne (1979), Smulders (1990)-. Sin embargo, los valores proporcionados por la expresión (F.8) en el régimen congestionado son claramente 'microscópicos'.

Concretamente a altas densidades toma un valor de 0.6 segundos aproximadamente, mientras que tiende a infinito cuando la densidad tiende a cero.

Por lo tanto cabría esperar obtener resultados muy diferentes del modelo de Payne dependiendo de la formulación para el tiempo de reacción que se adoptara: constante y macroscópico o la dada por F.8. Para estudiar más a fondo esta cuestión se eligieron los modelos definidos por Cremer et al. (1981), Papageorgiou et al. (1989) y Payne (1979). Estos modelos serán denotados como modelo *A*, *B* y *C*, respectivamente. La intención del análisis comparativo era demostrar que el término de relajación tiene escasa influencia en el modelo de Payne y que el término dominante es el de anticipación.

Para cada uno de estos tres modelos se definió un modelo equivalente como aquel que proporcionaría el mismo valor de ν/T . Por lo tanto el término de anticipación del modelo original y del modelo equivalente deben ser iguales. De esta condición se puede obtener la curva velocidad-densidad del modelo equivalente simplemente integrando la ecuación diferencial:

$$\frac{\nu}{T} = (KV_e')^2.$$

Como el parámetro ν/T es considerado constante en los modelos *A*, *B* y *C*, la integración de la anterior ecuación con la condición $V_e(K_0) = V_0$ conduce a la curva velocidad-densidad de Greenberg (A.1). Para los modelos *A* y *C* la condición impuesta es concretamente $V_e(K_j) = 0$, mientras que para el modelo *B* una condición diferente debe ser adoptada ya que la densidad de atasco es infinita en dicho modelo. En este modelo el término de anticipación es

$$\frac{\nu}{T} \frac{1}{\kappa + K} K_x,$$

siendo $\kappa = 40$ veh/km/carril, lo que sugiere la condición $V_e(\kappa) = V_f$. Además, la velocidad en los modelos equivalentes está limitada por la velocidad de flujo libre de los modelos originales.

La tabla F.1 muestra las curvas velocidad-densidad usadas en los modelos *A*, *B* y *C*, y la correspondiente curva obtenida para los modelos equivalentes por el procedimiento anteriormente explicado. Las curvas de los modelos original y equivalente están representadas en las figuras F.7, F.8 y F.9. No hay que destacar ninguna variación significativa entre las curvas originales y las equivalentes. El parecido es considerable sobre todo en la zona de densidades medias, que es precisamente la zona de operación para la que los modelos originales fueron calibrados.

una vez que la curva velocidad-densidad equivalente ha sido obtenida, el tiempo de reacción para el modelo equivalente se calcula a partir de (F.8). Como el tiempo de reacción es función de la densidad, se ha calculado el valor medio que toma en cada modelo para compararlo con los valores de los modelos originales. Teniendo en cuenta la expresión (D.9), el tiempo de reacción medio

	Velocidad en km/h, densidad en veh/km/carril
Cremer et al. (1981)	$V_e = 123 \left[1 - \left(\frac{K}{200} \right)^{1.4} \right]^4$ $V_e = \min \left[123, -46 \ln \left(\frac{K}{200} \right) \right]$
Papageorgiou et al. (1989)	$V_e = 90 \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{K}{120} \right)^2 \right)$ $V_e = \min \left[90, 90 \left(1 - .419 \ln \left(\frac{K}{40} \right) \right) \right]$
Payne (1979)	$V_e = \min \left[88.5, 88.5 \left(1.94 - 6 \left(\frac{K}{143} \right) + 8 \left(\frac{K}{143} \right)^2 - 3.93 \left(\frac{K}{143} \right)^3 \right) \right]$ $V_e = \min \left[88.5, -56 \ln \left(\frac{K}{143} \right) \right]$

Tabla F.1: Curvas velocidad-densidad originales (arriba) y equivalentes (abajo).

se calcula promediando desde la velocidad cero hasta la velocidad de flujo libre:

$$\bar{T} = \frac{1}{V_f} \int_0^{V_f} T(V) dV = \frac{1}{V_f} \int_0^{V_f} \frac{1}{2} \frac{dH}{dV} dV = \frac{1}{2V_f} \left(\frac{1}{K(V_f)} - \frac{1}{K_j} \right).$$

Los valores obtenidos mediante esta expresión se dan en la tabla F.2 junto con los valores de T en los modelos originales. En los tres casos, los valores son claramente microscópicos, asociados con el comportamiento individual de cada conductor. No obstante, como el tiempo característico de variación de las condiciones del tráfico en autopistas es del orden de minutos, cabe esperar que los modelos equivalentes y los originales proporcionen soluciones próximas.

En conclusión, se puede considerar en primera aproximación que el tráfico evoluciona a través de estados de cuasi-equilibrio. En otras palabras, el término de relajación puede ser despreciado tanto en los modelos equivalentes como en los originales. Si se hace ésto, o sea si V se hace igual a V_e , los modelos equivalentes se reducen al modelo Simple de Continuidad, mientras que de los modelos originales se obtienen dos ecuaciones para una sola incógnita. Estas dos ecuaciones no deberían proporcionar resultados muy diferentes, como se ha demostrado al comparar las curvas de velocidad-densidad equivalentes y originales. Un análisis más exhaustivo debería incluir la comparación de los resultados numéricos obtenidos al dejar ν/T constante y decrecer T hasta valores

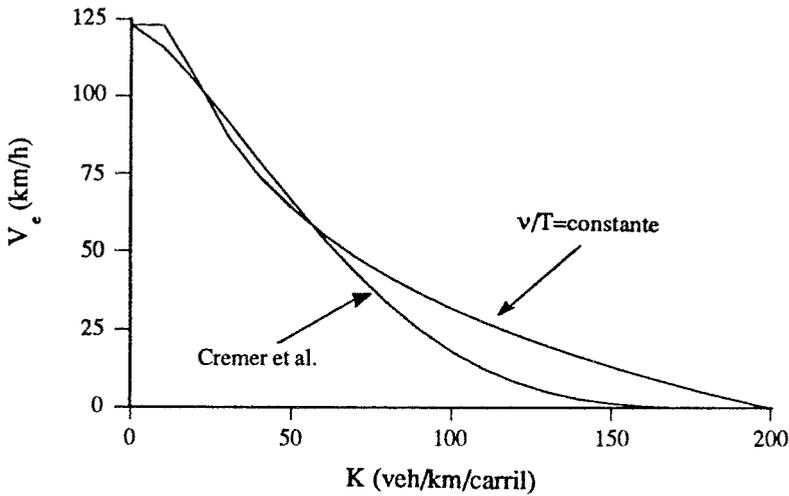


Figura F.7: Curvas velocidad-densidad original y equivalente para el modelo A.

	valores de los autores		valores medios de $T = -\frac{1}{2K^2V_c}$ (seg.)
	$\sqrt{\nu/T}$ (km/h)	T (segundos)	
Cremer et al.	46	36	1
Papageorgiou et al.	37	72	0.45
Payne (1979)	56	25	0.55

Tabla F.2: Valores de los parámetros ν y T.

microscópicos. De hecho, tal análisis ha sido realizado por Papageorgiou et al. (1989) para valores de T entre 36 y 108 segundos. El modelo resultó bastante insensible frente a variaciones del tiempo de reacción.

Resumiendo, del análisis se desprende la siguiente conclusión: los valores del tiempo de reacción propuestos en los modelos de Cremer et al. (1981), Papageorgiou et al. (1989) y Payne (1979), son mucho mayores que los dados por la formulación (F.8). Por otra parte, los valores del coeficiente de anticipación, ν , son también mucho mayores que los que se hubieran obtenido usando la expresión (A.9), de tal manera que los valores del cociente ν/T muestran un buen acuerdo con los obtenidos para los modelos equivalentes mediante (F.8).

En cuanto a los valores dados a ν , es sorprendente que los autores mencionados hayan pasado por alto la contradicción existente entre los valores de ν y

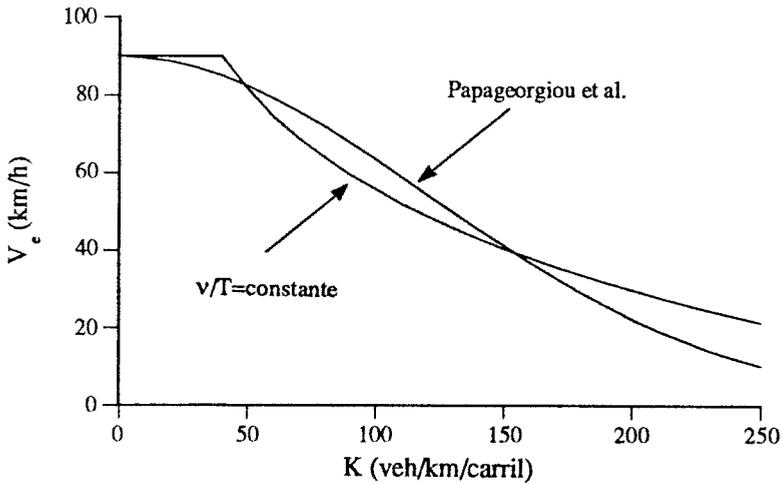


Figura F.8: Curvas velocidad-densidad original y equivalente para el modelo B.

la expresión (A.9). En concreto, Papageorgiou llega a escribir la expresión (A.9) para unas páginas más tarde tomar un valor de ν mucho mayor que el que daría dicha expresión. En efecto, la curva velocidad-densidad tomada por Papageorgiou es:

$$V_e = V_f \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{K}{K_{cr}}\right)^2\right),$$

con $V_f = 90$ km/h y $K_{cr} = 120$ veh/km/carril. Por lo que el valor de ν promediado entre $K = 0$ y $K = K_{cr}$ habría sido

$$\bar{\nu} = \frac{1}{K_{cr}} \int_0^{K_{cr}} \nu dK = \frac{1}{2K_{cr}} (V_f - V_e(K_{cr})) = 0.15 \text{ km}^2/\text{h},$$

mientras que el valor hallado mediante identificación de parámetros es $\nu = 28 \text{ km}^2/\text{h}$.

En esta sección se ha comparado el modelo de Payne resultante de adoptar la nueva formulación del tiempo de reacción con modelos propuestos por otros autores. En todos estos modelos el tiempo de reacción era constante. La única formulación del modelo de Payne que haga uso de un tiempo de reacción variable es la propuesta por Yamauchi (1983). Dicha formulación ha sido utilizada por

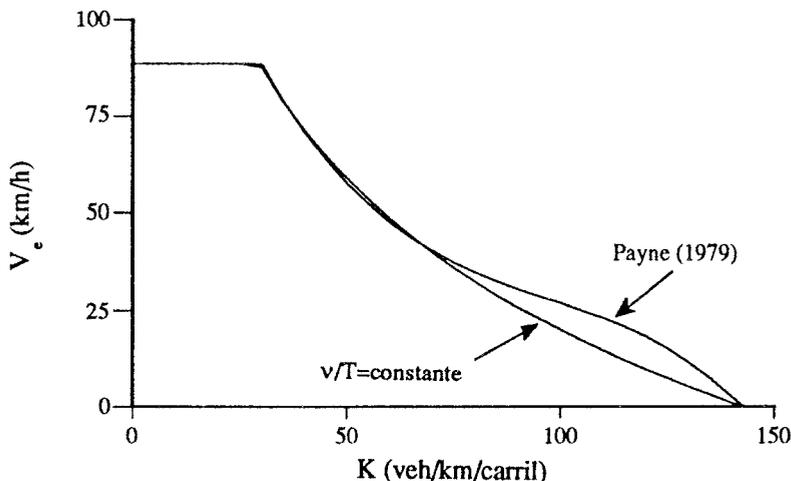


Figura F.9: Curvas velocidad-densidad original y equivalente para el modelo C.

Michalopoulos et al. (1984). El tiempo de reacción está dado por:

$$T(K) = \begin{cases} \frac{T_{max} - T_{min1}}{K_s} K + T_{min1}, & K \leq K_s; \\ \frac{T_{min2} - T_{max}}{K_j - K_s} (K - K_s) + T_{max}, & K > K_s. \end{cases} \quad (F.11)$$

La figura F.10 muestra la curva tiempo de reacción-densidad con los valores de los parámetros tomados por Michalopoulos et al. (1984). La forma de la curva no tiene ningún parecido con la de la figura D.2 aunque los valores dados son igualmente microscópicos. Además Michalopoulos et al. calcularon el coeficiente de anticipación a partir de la expresión (A.9). Como ellos tomaron la curva velocidad-densidad de Greenshields con $V_f = 96.5$ km/h y $K_j = 109$ veh/km/carril-, se tiene $\nu = 0.44$ km²/h. El modelo de Payne resultante fue comparado con el modelo Simple de Continuidad y no encontraron diferencias significativas en los resultados. Este hecho es consecuencia de la pequeña influencia del término de relajación del modelo de Payne, como se ha señalado anteriormente.

F.6 Estabilidad del Flujo de Tráfico

la estabilidad del flujo de tráfico ha sido estudiada entre otros por Payne (1971) y Kühne (1984). Estos autores estudiaron como se propagan las perturbaciones de velocidad y densidad en torno a un punto de equilibrio $(K_0, V_0 = V_e(K_0))$.

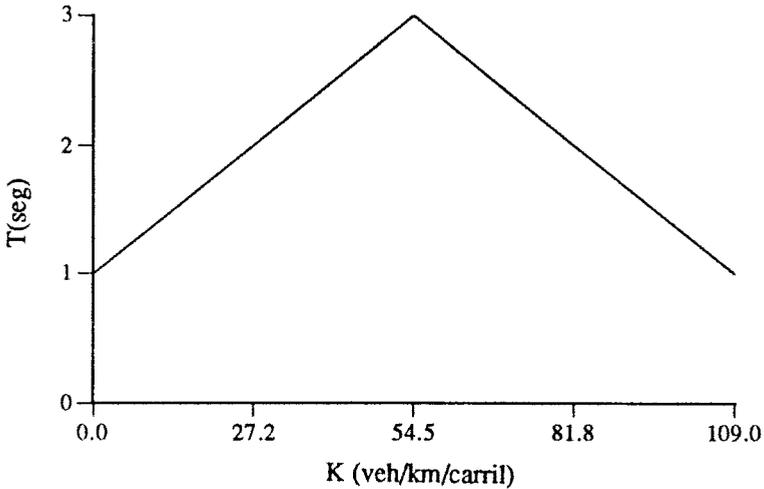


Figura F.10: Tiempo de reacción en función de la densidad según Yamauchi.

Payne tomó el parámetro ν como función de la densidad dada por (A.9) mientras que Kühne consideró ν/T constante. El tiempo de reacción fue considerado constante por ambos autores. Payne halló que las perturbaciones eran amplificadas si

$$a = -2TK_0^2 V_e'(K_0) > 1. \quad (\text{F.12})$$

Kühne encontró un criterio ligeramente diferente

$$a = -\sqrt{\frac{T}{\nu}} K_0 V_e'(K_0) > 1, \quad (\text{F.13})$$

ya que partía de otra versión del modelo de Payne. Según el primer criterio (F.12), el flujo de tráfico se volvía inestable cuando la densidad superaba los 37.5 veh/km/carril. El segundo criterio daba un valor de la densidad crítica semejante, 35 veh/km/carril. La idea de la densidad crítica más allá de la cual el tráfico se vuelve inestable ha tenido una gran aceptación entre diversos autores, siendo compartida también por Smulders (1990) y Cremer (1979).

Con la nueva formulación (F.8) el tiempo de reacción en el punto de equilibrio es

$$T_0 = -\frac{1}{2K_0^2 V_e'(K_0)},$$

y

$$\sqrt{\frac{\nu_0}{T_0}} = -K_0 V_e'(K_0).$$

Si se sustituyen estas expresiones en los criterios de estabilidad (F.12) y (F.13), se obtiene $a = 1$ en ambos casos, lo que significa que las perturbaciones ni se amplifican ni se amortiguan. Por lo tanto el flujo de tráfico evoluciona por la frontera entre la estabilidad y la inestabilidad. Este hecho es consecuencia de la condición de consistencia, que obliga a que las perturbaciones se propagen sin sufrir amplificación o amortiguamiento.

Por lo tanto, cuando la expresión (F.8) se adopta en el modelo de Payne, el análisis de estabilidad lineal no arroja ningún resultado. Este hecho sugiere que para estudiar los fenómenos de inestabilidad del tráfico se requiere una nueva aproximación: realizar un análisis de estabilidad no lineal y/o incluir términos estocásticos en el modelo. No obstante, la linealización del modelo no parece ser una aproximación descabellada si se tiene en cuenta que a altas densidades, la curva intensidad-densidad es prácticamente lineal. Por consiguiente, parece que la naturaleza aleatoria del fenómeno no puede ser despreciada en el análisis de estabilidad y que es necesario introducir términos estocásticos en el modelo.

BIBLIOGRAFIA

- Aiello W. G., Freedman, H. I. and Wu J. (1992) *Analysis of a Model Representing Stage-Structured Population Growth with State-Dependent Delay*. SIAM Journal of Applied Mathematics, 52, 855-869.
- Ansorge, R. (1990) *What does the Entropy Condition mean in Traffic Flow Theory?* Transportation Research, 24B, 133-143.
- Bélaïr J. and Mackey M. C. (1989) *Consumer Memory and Price Fluctuations in Commodity Markets*. Journal of Dynamics and Differential Equations, 1, 299-325.
- Breiman L. and Lawrence R. L. (1973) *Time Scales, Fluctuations and Constant Flow Periods in Uni-directional Traffic*. Transportation Research, 7, 77-105.
- Ceder A. (1976) *A Deterministic Traffic Flow Model for the Two-regime Approach*. Transportation Research Record, 567, 16-30.
- Chandler R. E., Herman R. and Montroll E. W. (1958) *Traffic Dynamics: Studies in Car-Following*. Operations Research, 6, 165-184.
- Cremer M. (1979) *Der Verkehrsfluß auf Schnellstraßen*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo.
- Cremer M. and Papageorgiou, M. (1981) *Parameter Identification for a Traffic Flow Model*. Automatica, 17, 837-843.
- Darroch J. N. and Rothery R. (1971) *Car-Following and Spectral Analysis*. Proceedings of the 5th International Symposium on the Theory of Traffic Flow, 47-56.
- Del Castillo J. M., Pintado P. and Benítez F. G. (1993) *Una Metodología para Ajustar Curvas Velocidad-Densidad a Datos de Tráfico*. Actas del I Simposium sobre Ingeniería de los Transportes, 81-90.
- Dörfler W. (1965) *Fahrdynamik an signalgesteuerten Kreuzungen*. Straßenbau und Straßenverkehrstechnik, 38.

- Drake J. S., Schofer J. L. and May A. D. (1967) *A Statistical Analysis of Speed-Density Hypotheses*. Highway Research Record, 156, 53-87.
- Driver R. D. (1963) *A Two-Body Problem of Classical Electrodynamics*. Ann. Physics 21, 122-142.
- Duckstein L., Unwin E. A. and Boyd E. T. (1970) *Variable Perception Time in Car-Following and its Effect on Model Stability*. IEEE Trans. on Man-Machine Systems, 3, 149-156.
- Edie L. C. (1961) *Car-Following and Steady State Theory for Non-congested Traffic*. Operations Research, 9, 66-76.
- Edie L. C. and Baverez E. (1965) *Generation and Propagation of Stop-Start Waves*. Proceedings of the 3rd International Symposium on the Theory of Traffic Flow, Elsevier, New York, 26-37.
- Easa S. M. (1983) *Selecting Two-regime Traffic Flow Models*. Transportation Research Record, 869, 25-36.
- Evans L. and Rothery R. (1973) *Experimental Measurements of Perceptual Thresholds in Car-Following*. Highway Research Record, 464, 13-29.
- Foote R. S. (1963) *Single Lane Traffic Flow Control*. Proceedings of the 2nd International Symposium on Transportation and Traffic Theory, 84-103.
- Forbes T. W. and Simpson M. E. (1968) *Driver and Vehicle Response in Freeway Deceleration Waves*. Transportation Science, 2, 77-104.
- Franklin R. E. (1961) *The Structure of a Traffic Shock Wave*. Civil Engineering and Public Works Review, 56 (662), 1186-1188.
- Franklin R. E. (1965) *Further Analysis on some Experiments on Single-Lane Traffic Flow*. Road Research Laboratory, Note No. 829.
- Gipps R. P. (1981) *A Behavioural Car-Following Model for Computer Simulation*. Transportation Research 15B, 105-111.
- Greenberg, H. (1959) *An Analysis of Traffic Flow*. Operations Research, 7 (1), 79-85.
- Greenshields, B. D. (1935) *A Study in Highway Capacity*. Highway Research Board Proceedings, 14, 448-477.
- Halanay A. and Räsvan V. (1981) *Approximations of Delays by Ordinary Differential Equations*, in 'Recent Advances in Differential Equations', 155-197, Academic Press.

- Hall F. L., Allen B. L. and Gunter M. A. (1986) *Empirical Analysis of Freeway Flow-Density Relationships*. Transportation Research 20A, 197-210.
- Helly W. (1961) *Simulation of Bottlenecks in Single-lane Traffic Flow*. Theory of Traffic Flow, R. Herman (Editor), Elsevier, 207-238.
- Herman R., Lam T. and Rothery R. W. (1971) *The Starting Characteristics of Automobile Platoons*. Proceedings of the 5th International Symposium on Transportation and Traffic Theory, Elsevier, 1-17.
- Herman R. and Rothery R. (1969) *Frequency and Amplitude Dependence of Disturbances in a Traffic Stream*. Proceedings of the 4th International Symposium on the Theory of Traffic Flow, 14-22.
- Herman R., Rothery R. and Rule R. G. (1977) *Analysis of Car-Following Experiments Employing Spectral Analysis*. Proceedings of the 7th International Symposium on the Theory of Traffic Flow, 37-67.
- Hoffmann E. R. (1975) *Human Control of Road Vehicles*. Vehicle System Dynamics, 5, 105-126.
- Kevorkian J. and Cole J. D. (1981) *Perturbations Methods in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo.
- Köhler U. (1974) *Stability of Vehicle Platoons*. Proc. 6th Int. Symp. on Transportation and Traffic Theory, Elsevier, New York.
- Kolmanovskii V. and Myshkis A. (1992) *Applied Theory of Functional Differential Equations*. Kluwer Academic Publishers.
- Kometani E. and Sasaki T. (1961) *Dynamic Behavior of Traffic with a Nonlinear Spacing-Speed Relationship*. Theory of Traffic Flow, R. Herman (Editor), Elsevier, 105-119.
- Koshi M., Iwasaki M. and Okhura I. (1983) *Some Findings and an Overview on Vehicular Flow Characteristics*. Proceedings of the 8th International Symposium on Transportation and Traffic Theory, University of Toronto Press, Toronto, Ontario, 403-426.
- Kühne R. (1984) *Macroscopic Freeway Model for Dense Traffic Stop-Start Waves and Incident Detection*. Proc. 9th Int. Symp. on Transportation and Traffic Theory. VNU Science Press, Utrecht.
- Lam T. and Rothery R. (1970) *The Spectral Analysis of Speed Fluctuations on a Freeway*. Transportation Science, 4, 293-310.
- Leutzbach W. (1988) *Introduction to the Theory of Traffic Flow*. Springer-

Verlag.

Leutzbach W. and Bexelius S. (1966) *Probleme der Kolonnenfahrt*. Straßenbau und Straßenverkehrstechnik, 44.

Lighthill M. J. and Whithman G. B. (1955) *On Kinematic Waves: a Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads*. Proceedings of the Royal Society, Series A, 229, 317–345.

Michalopoulos P. G. and Pisharody V. B. (1980) *Platoon Dynamics on Signal Controlled Intersections*. Transportation Science, 14, 365–396.

Michalopoulos P. G., Beskos D. E., and Yamauchi Y. (1984) *Multilane Traffic Flow Dynamics: some Macroscopic Considerations*. Transportation Research, 18B, 377–395.

Newell G. F. (1961) *Nonlinear Effects in the Dynamics of Car-Following*. Operations Research, 9, 209–229.

Ozaki H. (1993) *Reaction and Anticipation in the Car-Following Behavior*. Proceedings of the 12th International Symposium on Transportation and Traffic Theory, Elsevier, 349–366.

Papageorgiou M., Blosseville J. M. and Hadj-Salem H. (1989) *Macroscopic Modeling of Traffic Flow on the Boulevard Périphérique in Paris*. Transportation Research, 23B, 29–47.

Payne H. J. (1971) *Models of freeway traffic and control*. Simulation Council Proceedings, 1, 51–61. Simulation Councils Inc., La Jolla, California.

Payne H. J. (1979) *FREFLO: a Macroscopic Simulation Model of Freeway Traffic*. Transportation Research Record, 772, 68–75.

Payne H. J. (1984) *Discontinuity in Equilibrium Freeway Traffic Flow*. Transportation Research Record 971, 140–146.

Pipes L. A. (1953) *An Operational Analysis of Traffic Dynamics*. Journal of Applied Physics, 24 (3), 274–287.

Pipes, L. A. (1967) *Car-Following Models and the Fundamental Diagram of Road Traffic*. Transportation Research, 1, 21–29.

Prigogine, I. and Herman, R. (1971) *Kinetic Theory of Vehicular Traffic*. American Elsevier, New York.

Quandt R. E. (1958) *The Estimation of the Parameters of a Linear Regression System Obeying Two Separate Regimes*. Journal of the American Statistical Association, 53, 873–880.

- Ratkowsky D. A. (1983) *Nonlinear Regression Modeling: a Unified Practical Approach*. Marcel Dekker, New York.
- Rockwell T. H., Ernst, R. L. and Hanken A. (1968) *A Sensitivity Analysis of Empirically Derived Car-Following Models*. Transportation Research, 2, 363-373.
- Schaar (1925) *Die Leistungsfähigkeit einer Straße für den Kraftverkehr*. Verkehrstechnik, 23.
- Smulders S. A. (1990) *Control of freeway traffic flow by variable speed signs*. Transportation Research, 24B, 111-132.
- Smulders S. A. (1992) Private communication.
- Stoodley K. D. C., Lewis T. and Stainton C. L. S. (1980) *Applied Statistical Techniques*. Ellis Horwood, Chichester.
- Underwood, R. T. (1961) *Speed, Volume and Density Relationships, Quality and Theory of Traffic Flow*. Yale Bureau of Highway Traffic, New Haven, Connecticut, 141-188.
- Valdés, A. (1971) *Ingeniería de Tráfico*. Dossat, Madrid.
- Whitham G. B. (1974) *Linear and Nonlinear Waves*. John Wiley & Sons, New York.
- Yamauchi Y. (1983) *Dynamic and Numerical Treatment of Freeway Flow*. Master Thesis, University of Minnesota, Minneapolis.

SUMMARY

This Thesis presents a car-following theory. The main components of the theory are the functional form of the equilibrium speed-density curve and the formulation for the reaction time of drivers. A brief introduction to traffic flow modeling is given in Chapter A.

In Chapter B a functional form for the speed-density relationship is presented. This functional form is made up of a dimensionless headway, the *equivalent headway* and of a function, the *generating function*, whose argument is the equivalent headway. This functional form is derived by means of two different argumentations. The first argumentation is based on the set of properties that the volume-speed-density relationships should satisfy. Among these conditions, the *concavity condition* is specially remarked. The second argumentation arises when applying a dimensional analysis to a generic car-following model.

A crucial point for both argumentations is the assumption of the existence of a set of fundamental parameters of traffic flow. The justification of this assumption lies on an extensive literature review. The fundamental parameters are the jam density, the free flow speed and the kinematic wave speed at jam density. Finally, several examples of generating functions are shown. From all the possible speed-density curves derived from them, two have special interest: the *exponential* and the *maximum sensitivity* speed-density curve. From all the existing speed-density curves only one has the proposed functional form. It is the exponential curve, which is regarded in a few and unnoticed works.

In Chapter C the theory developed in the previous chapter is applied. Some speed-density curves having the above functional form are fitted to three-lane freeway traffic data. The goodness of fit is excellent, except in the case of the left lane detectors. A procedure for isolating stationary traffic periods is also explained. This procedure satisfactorily eliminates the dispersion of the individual measurements.

The car-following model itself is presented in Chapter D. The model is derived on three premises: the speed of the vehicles in equilibrium is a given function of the headway, propagation of disturbances takes place without amplification and the propagation speed of small disturbances is given by the kinematic wave speed from the Lighthill-Whitham theory. Based on these premises, a formulation for the reaction time of drivers is derived. Under the assumption of the concavity condition, the reaction time turns out to be an increasing

function of the headway.

The car-following model is first derived for a linear speed-headway curve, and then extended for a generic speed-headway curve. The resulting model consists of a state-dependent delay differential equation. In this model, inversion of the causality order or *retrogression* of the solution may occur as a consequence of the variability of the reaction time. This problem of retrogression has been solved by means of a behavioral argumentation that introduces the concept of *saturation of perception*. Finally, it is shown that when adopting for the speed-headway curve the functional form of Chapter B, the resulting dimensionless model has no parameters. This remarkable fact implies that the platoon dynamics is exclusively governed by the generating function.

In Chapter E, two finite-difference algorithms for the dimensionless car-following model are proposed. For the first algorithm it is necessary to develop a numerical criteria to properly account for saturation. The second algorithm is specially adequate for simulation purposes, due to its extreme simplicity. The numerical results show that the behavior of a vehicle platoon described by this algorithm agrees with that predicted by the kinematic wave theory.

In Chapter F, a condition for any continuum traffic flow model is proposed: the *consistency condition*. An expression for the reaction time of drivers as a function of traffic density is derived when applying this condition to the Payne model. This expression is the same as that proposed in Chapter D. The changes introduced in the Payne model by the adoption of this expression for the reaction time are investigated. A comparison analysis of the resulting Payne model with others proposed by several authors and with the Simple Continuum Model is carried out. This analysis leads to the conclusion that the results of the Payne model are almost identical to those given by the Simple Continuum Model. Finally, the stability of traffic flow is studied by linearizing the Payne model modified by the adoption of the new formulation for the reaction time. The analysis does not bring any practical result. This fact shows that the inclusion of stochastic terms in the models could be necessary to explain instability phenomena in traffic flow.

CURRICULUM VITAE

Jose María del Castillo Granados nacido en Sevilla, el 24 de diciembre de 1965. Ingeniero Industrial por la Universidad de Sevilla (1983-1989). Último año de la carrera cursado en la Universidad de Sheffield dentro del programa ERASMUS. Ayudante de investigación (Enero 1990- Junio 1991) en el Institut für Tragwerke und Simulationstechnik de la Universidad del Rhur, Bochum, Alemania. Becario de Investigación en el Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Sevilla desde Marzo de 1991.

Publicaciones:

- 4 artículos en revistas internacionales;
- 1 artículo en un libro (editorial Elsevier);
- 1 artículo en un congreso internacional;
- 4 artículos en revistas nacionales.

Otros méritos:

- miembro del Comité Organizador del *I Simposium sobre Ingeniería de los Transportes*, Sevilla 24-26 de Marzo de 1993;
- revisor de la revista *Transportation Research*.