

TESIS

ANÁLISIS GEOMÉTRICAMENTE  
NO LINEAL EN DINÁMICA DE  
MECANISMOS FLEXIBLES

por

JUANA MARIA MAYO NÚÑEZ  
Ingeniera Industrial por la E.T.S.I.I. de Sevilla

presentada en la

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE  
INGENIEROS INDUSTRIALES  
de la  
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

para la obtención del  
Grado de Doctor Ingeniero Industrial

Sevilla, Noviembre de 1993

# Agradecimientos

La autora, parafraseando a su maestro, quiere expresar su más sincero agradecimiento al Profesor D. Jaime Domínguez Abascal por su constante ayuda y consejos dados durante la realización de este trabajo.

También desea agradecer a D. José Guerrero de Mier las muchas horas dedicadas a la confección formal de esta tesis, su buen humor y su gran apoyo moral.

En especial, al Profesor A.A. Shabana sus valiosos consejos y enseñanzas, además de la cesión desinteresada del código fuente del programa DAMS que ha servido de base para gran parte de la investigación desarrollada en esta tesis.

Por último, hace extensivo su agradecimiento a D. Rafael Gallego Sevilla, D. Alfredo Navarro Robles, D. Javier García-Lomas Jung, D. Ramón Abascal y D. Joaquín Guerrero, así como a todos los compañeros de trabajo.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Definición e interés del problema

Tradicionalmente se han denominado mecanismos a los sistemas mecánicos formados por cuerpos interconectados mediante pares cinemáticos que permiten el movimiento relativo entre los cuerpos. El concepto de mecanismo suele asociarse a sistemas mecánicos simples, como el mecanismo de cuatro barras o el biela-manivela, que se usan para controlar la posición y, en algunos casos, la velocidad y aceleración de los componentes de una máquina. Pero existen sistemas mecánicos más complejos, como los que se muestran en la Fig. 1.1, pertenecientes a diferentes áreas de la Ingeniería Mecánica: Automoción, Robótica, Tecnología Aeroespacial, Biomecánica, etc. En la literatura inglesa se usa un término más general para englobar a todos los sistemas mecánicos, denominándoseles sistemas *multibody*. No habiéndose encontrado ninguna referencia análoga en castellano, se ha optado por traducirlo como *sistemas multicuerpos* en este trabajo.

La dinámica de estos sistemas se caracteriza por la existencia de rotaciones finitas de sus elementos que conducen a no linealidades geométricas, las cuales se reflejan, tanto en las ecuaciones diferenciales del movimiento, como en las ecuaciones algebraicas de restricción. Debido a este comportamiento no lineal no es posible obtener una solución analítica, salvo para algunos casos particulares.

Los primeros métodos para el análisis cinemático y dinámico de mecanismos eran gráficos, y se restringían a considerar mecanismos simples formados por sólidos rígidos (Hirschhorn, 1962; Beyer, 1963). Posterior-

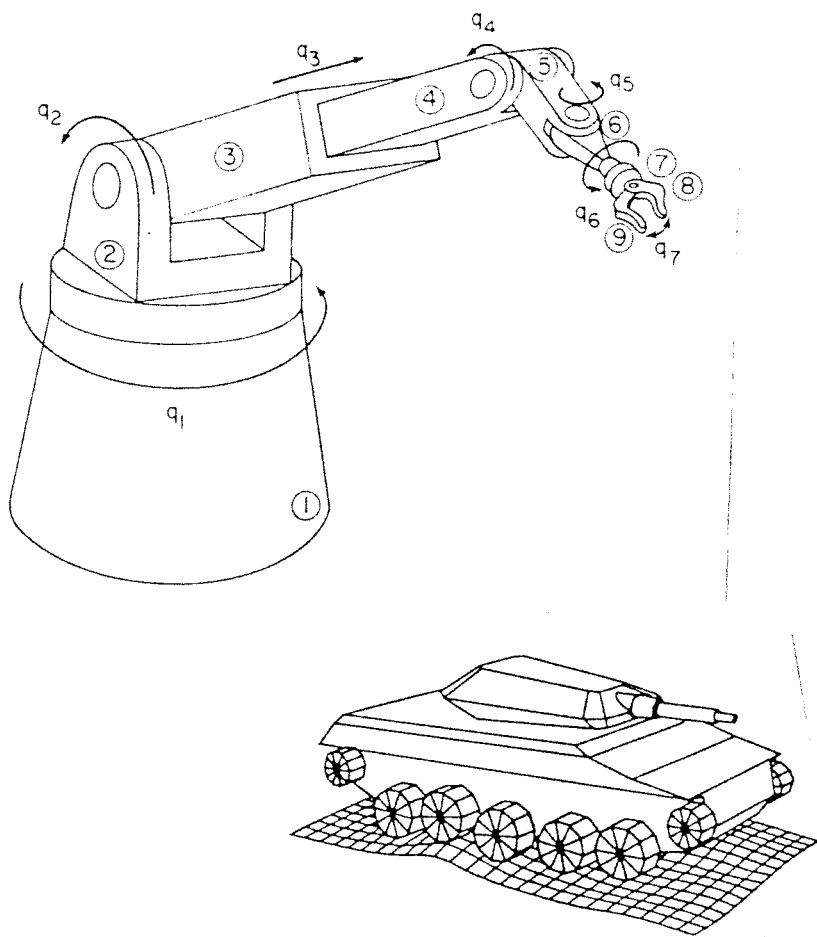


Figura 1.1: Ejemplos de sistemas multicuerpos

mente, con la llegada de la era espacial, surgió el problema de formular las ecuaciones del movimiento de los ingenios aeroespaciales, cuyas estructuras eran muy complejas. Hooker y Margulies (1965) y Roberson y Wittenburg (1966) desarrollaron metodologías que sistematizaban la obtención de las ecuaciones del movimiento, y cuya solución podía ser obtenida numéricamente. La restricción de aplicación a sistemas con pares cinemáticos fue eliminada en los setenta por Frisch (1974) y Wittenburg (1977) entre otros. Comenzaron además a estudiarse otras aplicaciones mecánicas distintas a las espaciales (Orlandea et al., 1977; Paul, 1979; Haug et al., 1981) para las que fue necesario resolver dificultades debidas a la existencia de cadenas cinemáticas cerradas y restricciones no holónomas, raramente presentes en tecnología aeroespacial.

Paralelamente al desarrollo de la dinámica de sistemas multicuerpos rígidos, se empezaron a desarrollar modelos de los sistemas mecánicos en los que se trataban miembros flexibles además de los tradicionales elementos rígidos. Hasta entonces se habían despreciado las deformaciones de los cuerpos, pero éstas comenzaron a ser importantes con el aumento de las velocidades de operación de los mecanismos, con la utilización de elementos más ligeros y con el aumento de los requerimientos de precisión. Los primeros modelos que incluían cuerpos flexibles (Winfrey, 1971; Erdman et al., 1972; Imam et al., 1973; Sadler y Sandor, 1973) realizaban hipótesis simplificativas que desacoplaban el movimiento de sólido rígido del debido a la deformación de los cuerpos; es decir, suponían que las deformaciones elásticas eran producidas por las fuerzas de inercia asociadas con el movimiento de sólido rígido, pero que éste último no dependía de las deformaciones elásticas.

Posteriormente, algunos autores (Chu y Pan, 1975) consideraron el acoplamiento entre los desplazamientos de sólido rígido y los desplazamientos elásticos en las ecuaciones del movimiento, pero se limitaron a aplicaciones simples en las que sólo se consideraba un elemento flexible. A finales de los setenta y comienzos de los ochenta (Song, 1979; Shabana, 1982), empiezan a surgir métodos para simular numéricamente el comportamiento dinámico de sistemas generales formados por cuerpos rígidos y flexibles, en los que se contempla el acoplamiento existente entre el movimiento global de sólido rígido y los desplazamientos debidos a las pequeñas deformaciones.

Kane et al. (1987) pusieron de manifiesto que, para determinadas aplicaciones, las respuestas obtenidas con algunos de los métodos existentes de análisis podían ser completamente erróneas, debido a que no

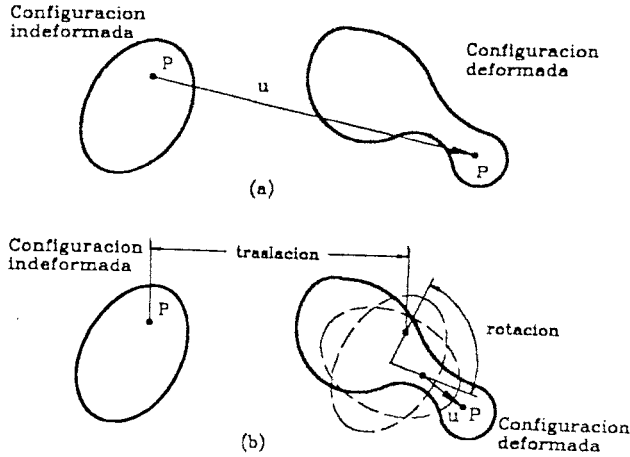


Figura 1.2: Representación de los desplazamientos para distintas formulaciones

se incluían todos los efectos que influían en la respuesta. En aquellos problemas en los que las deflexiones de los elementos son grandes o existen fuerzas axiales altas, es importante considerar los efectos no lineales debidos a la deformación para obtener una respuesta correcta. Un ejemplo típico es el del movimiento de las palas de un helicóptero. Cuando éstas están en reposo, su peso hace que se deformen a flexión, produciéndose una flecha apreciable en el extremo. Cuando el rotor gira, la fuerza centrífuga compensa la flecha producida por el peso, produciéndose un fenómeno de rigidización. Matemáticamente esto representa otro efecto geoméricamente no lineal—adicional al debido a las rotaciones finitas de los elementos—, que ocurre cuando las deflexiones son lo suficientemente grandes para causar cambios significativos en la geometría del sistema. A lo largo de este trabajo a estas no linealidades se les denominará indistintamente no linealidades geométricas debidas a la deformación o no linealidades geométricas elásticas.

Es posible dividir las formulaciones del comportamiento dinámico de los sistemas multicuerpos flexibles actualmente existentes en dos grandes grupos, gráficamente mostrados en la Fig. 1.2: aquellas que expresan simultáneamente los desplazamientos de sólido rígido y los debidos a las

deformaciones, y las que los expresan por separado. El primer grupo de métodos (Simo y Vu-Quoc, 1986; Cardona y G eradin, 1988; Yang y Sadler, 1990; Avello, 1990) utiliza la teoría de grandes deformaciones y, por tanto, incorpora automáticamente el efecto de la no linealidad geométrica debida a la deformación. El segundo grupo de métodos (Song, 1979; Song y Haug, 1980; Shabana, 1982; Wu y Haug, 1988) se apoya en la técnica denominada Síntesis de Componentes. La principal ventaja de estos últimos reside en su aplicabilidad, ya que con un número moderado de grados de libertad se pueden modelar sistemas mecánicos complicados. Sin embargo, uno de los inconvenientes reside en que no consideran implícitamente la no linealidad geométrica debida a la deformación. En los últimos años se ha trabajado mucho para suplir esta carencia. Esta tesis se encuadra dentro de este esfuerzo para obtener una formulación general que permita simular correctamente el comportamiento dinámico de los sistemas multicuerpos flexibles.

## 1.2 Revisión bibliográfica de las formulaciones geométricamente no lineales para sistemas multicuerpos flexibles

Un gran número de problemas ingenieriles pertenecientes tanto al campo de la dinámica de estructuras como al de la dinámica de sistemas multicuerpos flexibles puede resolverse haciendo uso de la teoría elástica lineal bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones y desplazamientos.

Existe, sin embargo, una serie de situaciones prácticas en las que estas hipótesis no son aplicables: estudio de estabilidad de los componentes elásticos; aplicaciones en las que existen deflexiones elásticas grandes, aún con pequeñas deformaciones, como es el caso de elementos de gran esbeltez; o problemas de deformación por flexión (incluso pequeña) influenciada por fuerzas axiales presentes, por ejemplo, en componentes que giran a grandes velocidades. En este tipo de situaciones, las ecuaciones de equilibrio planteadas en la configuración deformada difieren grandemente de las establecidas en la configuración indeformada, por lo que, para simular correctamente el comportamiento del sistema, deben incluirse en el análisis los efectos de las no linealidades geométricas debidas a la deformación. La teoría geométricamente no lineal considera que las deformaciones son pequeñas y que no se supera el límite elástico del material, pero permite grandes desplazamientos relativos entre pun-

tos pertenecientes al mismo cuerpo. Esta última hipótesis es la responsable de la existencia de un fuerte acoplamiento entre los desplazamientos longitudinales y transversales. Por ejemplo, una fuerza axial cambia la rigidez transversal de una viga (la aumenta si es de tracción y la disminuye si es de compresión) y los desplazamientos transversales dan lugar a desplazamientos longitudinales para que se mantenga invariable la longitud de la misma.

En los problemas de dinámica de mecanismos flexibles este acoplamiento se acentúa. Las no linealidades geométricas pueden proceder tanto de los grandes desplazamientos elásticos como del cambio de orientación del cuerpo debido a las rotaciones finitas. Estas dos fuentes de no linealidades están acopladas y son responsables de la complejidad del sistema de ecuaciones del movimiento que gobierna el comportamiento de estos sistemas.

Matemáticamente, el acoplamiento debido a los grandes desplazamientos elásticos se representa mediante un tensor de deformaciones no lineal. Por ejemplo, para una viga en el plano, la única componente no nula del tensor es

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (1.1)$$

donde  $\varepsilon_{xx}$  es la deformación normal;  $u$  y  $v$ , los desplazamientos longitudinales y transversales, respectivamente; y  $x$  es la coordenada a lo largo de la viga. Si los desplazamientos son pequeños, los términos cuadráticos son despreciables frente al lineal, simplificándose la expresión anterior a

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.2)$$

La linealización de la deformación conduce a la pérdida del acoplamiento entre los desplazamientos transversales,  $v$ , y los longitudinales,  $u$ , originado por los grandes desplazamientos elásticos.

Las formulaciones que, usando la técnica de Síntesis de Componentes, incluyen los efectos de las no linealidades geométricas debidas a la deformación en las ecuaciones del movimiento no han de usar necesariamente



el tensor de deformaciones no lineal. De hecho, es posible separar los métodos encontrados en la bibliografía en dos grupos:

1. Los que dividen cada cuerpo flexible en subestructuras en las que es posible usar el tensor de deformaciones lineal.
2. Los que usan el tensor de deformaciones no lineal.

Se discutirán, en primer lugar, los pertenecientes al primer grupo. Entre los más representativos se encuentran el método de Song (1979), que utiliza coordenadas nodales, y el de Wu y Haug (1988), que reduce el número de grados de libertad usando la técnica de Síntesis de Componentes. Pero, incluso en este caso, el número de ecuaciones y coordenadas del problema es muy alto, lo que hace que estos métodos no sean computacionalmente muy eficientes.

### 1.2.1 Método de Song (1979)

Song formula las ecuaciones que describen el movimiento de un mecanismo plano usando el método de los elementos finitos. Para describir la posición de un punto cualquiera utiliza dos sistemas de coordenadas: uno es un sistema de referencia fijo, mientras que el otro está situado en el centro del elemento y se mueve solidariamente con él. Los desplazamientos longitudinales,  $u$ , y transversales,  $v$ , se miden con respecto a este último sistema de coordenadas.

Puede conseguirse que los desplazamientos  $u$  y  $v$  sean siempre pequeños, incluso en aquellas aplicaciones en las que existan grandes desplazamientos debidos a las deformaciones. Para ello, basta con dividir cada cuerpo flexible del mecanismo en elementos lo suficientemente pequeños para que sean aplicables las hipótesis de pequeños desplazamientos y pueda linealizarse el tensor de deformaciones sin que esto afecte a la respuesta. Este procedimiento se explica con la ayuda de la Fig. 1.3. Esta figura muestra la configuración deformada, y la posición indeformada suponiendo que ha experimentado el mismo desplazamiento y rotación de sólido rígido que el cuerpo deformado. La diferencia entre estas configuraciones representa los desplazamientos debidos a la deformación. Estos son tanto más pequeños cuanto menor sea el elemento. En la figura se observa la reducción del desplazamiento transversal al disminuir el tamaño del elemento a la mitad.

El principal inconveniente que presenta este método es la imposibilidad de disminuir el número de grados de libertad usando técnicas

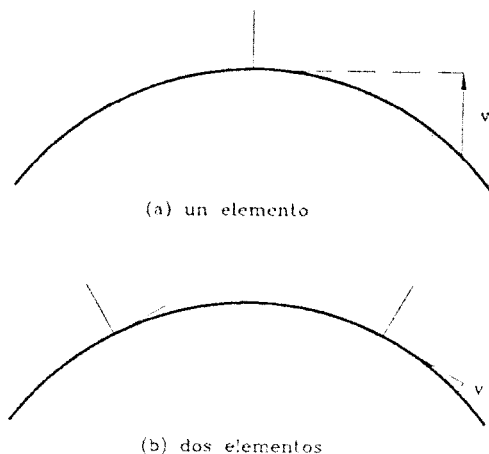


Figura 1.3: Desplazamiento debido a la deformación utilizando distintas discretizaciones en el método de Song

de Síntesis de Componentes. Estas sólo se aplican eficientemente a los cuerpos que componen el mecanismo, pero no a los elementos en que está discretizado ni al mecanismo completo. Por tanto, el número de coordenadas que describe la configuración del sistema mecánico es muy alto. También lo es el número de ecuaciones, puesto que las relaciones de compatibilidad entre elementos deben ser impuestas como ecuaciones de restricción. Ambas cosas conducen a que este procedimiento sea computacionalmente muy costoso.

### 1.2.2 Método de Wu y Haug (1988)

La forma de tener en cuenta los efectos de las no linealidades geométricas dentro de un cuerpo del mecanismo consiste en dividirlo en subestructuras y definir un sistema de referencia local que se mueva con cada una de ellas. Estas subestructuras se encuentran unidas mediante enlaces rígidos o *bracket joints*. Su número y tamaño se elige de forma que sea válida la hipótesis de pequeños desplazamientos dentro de cada una, por lo que éstos pueden ser expresados como una combinación lineal de modos. Estos modos, generados usando el método de los elementos fini-

tos, incluyen tanto a los modos de vibración de la subestructura como a los denominados modos de corrección estática. Estos últimos se usan para representar los desplazamientos debidos a las fuerzas y momentos transmitidos a través de las uniones entre subestructuras. Un modo de corrección estática no es más que la deformada de un cuerpo sometido a una fuerza o un momento unidad en la dirección de la fuerza de reacción.

La filosofía de este método es similar a la del método anterior, jugando las subestructuras el mismo papel que los elementos de Song: aunque cada subestructura sigue experimentando desplazamientos que se consideran pequeños, el conjunto de varias subestructuras unidas por *brackets* puede tener grandes desplazamientos elásticos. La principal diferencia radica en que Wu y Haug usan, además, la técnica de Síntesis de Componentes para reducir el número de grados de libertad del sistema. Pero incluso usando este procedimiento, el número de grados de libertad del sistema es muy elevado, requiriendo un tiempo computacional muy grande, por lo que son preferibles los métodos que aplican las técnicas de Síntesis de Componentes a los cuerpos del mecanismo y que necesitan usar el tensor de deformaciones no lineal para tener en cuenta el efecto de los grandes desplazamientos relativos al sistema de referencia local.

Muchos de estos métodos (Turcic y Midha, 1984; Thompson y Sung, 1984; Bakr y Shabana, 1986; Liou y Erdman, 1989; Ider y Amirouche, 1988 y 1989) incluyen las no linealidades geométricas elásticas mediante la incorporación en la ecuación del movimiento de una matriz de rigidez geométrica obtenida a partir de una expresión de la energía de deformación del cuerpo que tiene en cuenta los términos de orden superior del tensor de deformaciones. Otros métodos (Kane et al., 1987) las introducen mediante restricciones geométricas entre los desplazamientos longitudinales y transversales elásticos para cuerpos tipo viga. Estos autores estudiaron el caso particular de una viga en voladizo montada sobre un soporte con movimiento general. Banerjee y Kane (1989) generalizaron este análisis al estudio de placas delgadas. En estos procedimientos es difícil determinar que términos deben ser retenidos en la expresión de la energía de deformación con objeto de generar ecuaciones del movimiento consistentemente linealizadas.

### 1.2.3 Método de Bakr y Shabana (1986)

Estos autores expresan el movimiento de un cuerpo deformable del mecanismo como superposición de un movimiento de sólido rígido, con grandes

desplazamientos y rotaciones, definido por medio de un sistema de referencia móvil unido de alguna manera al cuerpo deformable, y un movimiento de deformación del cuerpo respecto a esos ejes móviles. Suponen que las deformaciones permanecen pequeñas, pero que los desplazamientos elásticos respecto a los ejes móviles pueden ser grandes. En este caso no es posible linealizar la expresión de la deformación despreciando sus términos cuadráticos, por lo que es posible escribir su expresión separándola en dos componentes:

$$\epsilon = \epsilon^l + \epsilon^{nl} \quad (1.3)$$

donde  $l$  y  $nl$ , denotan, respectivamente, las componentes lineal y no lineal.

Escribiendo el vector de deformaciones en el orden:

$$\epsilon^T = [\epsilon_{11} \ \epsilon_{22} \ \epsilon_{33} \ \epsilon_{12} \ \epsilon_{23} \ \epsilon_{13}] \quad (1.4)$$

se puede escribir

$$\epsilon = (D_1 + D_2)u = D^*u \quad (1.5)$$

donde  $D_1$  y  $D_2$  son operadores diferenciales dados por

$$D_1^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

y

$$D_2^T = \begin{pmatrix} u_{1,1} \frac{\partial}{\partial x_1} & u_{1,2} \frac{\partial}{\partial x_2} & u_{1,3} \frac{\partial}{\partial x_3} & 2u_{1,1} \frac{\partial}{\partial x_2} & 2u_{1,2} \frac{\partial}{\partial x_3} & 2u_{1,1} \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_{2,1} \frac{\partial}{\partial x_1} & u_{2,2} \frac{\partial}{\partial x_2} & u_{2,3} \frac{\partial}{\partial x_3} & 2u_{2,1} \frac{\partial}{\partial x_2} & 2u_{2,2} \frac{\partial}{\partial x_3} & 2u_{2,1} \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_{3,1} \frac{\partial}{\partial x_1} & u_{3,2} \frac{\partial}{\partial x_2} & u_{3,3} \frac{\partial}{\partial x_3} & 2u_{3,1} \frac{\partial}{\partial x_2} & 2u_{3,2} \frac{\partial}{\partial x_3} & 2u_{3,1} \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

El desplazamiento elástico de un punto del cuerpo  $i$  se puede expresar en función de un número finito de coordenadas, que constituyen los grados de libertad elásticos del problema. Esto se puede hacer en dos pasos. En primer lugar, usando una discretización de elementos finitos es posible escribir

$$u^{ij} = \bar{N}q^i \quad (1.8)$$

donde  $\bar{N}$  es una matriz de funciones de interpolación y  $q$  el vector de coordenadas locales de los nodos en la configuración deformada del elemento finito correspondiente. Como el número de nodos puede ser muy grande, con objeto de disminuir el número de variables elásticas, se aplica el método de la Síntesis de Componentes que transforma el espacio de las coordenadas generalizadas nodales (también llamadas físicas) al espacio de las coordenadas modales según

$$q^i = Wp_f^i \quad (1.9)$$

Usando las Ecs. 1.8 y 1.9, se puede escribir el vector de deformaciones expresado en la Ec. 1.5 como

$$\epsilon = D^* \bar{N} W p_f^i \quad (1.10)$$

La energía de deformación para un elemento  $j$  perteneciente al cuerpo  $i$  se puede escribir como

$$U^{ij} = \int_{V^{ij}} \sigma^{ijT} \epsilon^{ij} dV^{ij} \quad (1.11)$$

Para un material isótropo elástico lineal se verifica la siguiente relación tensión-deformación:

$$\sigma^{ij} = E^{ij} \epsilon^{ij} \quad (1.12)$$

donde  $E^{ij}$  es la matriz de coeficientes elásticos de Hook. La Ec. 1.11 se puede escribir como

$$U^{ij} = \int_{V^{ij}} \epsilon^{ijT} E^{ij} \epsilon^{ij} dV^{ij} \quad (1.13)$$

donde  $\epsilon^{ij}$  está definido en la Ec. 1.10. Usando esta definición la energía de deformación para el cuerpo completo se puede escribir como

$$U^i = \frac{1}{2} \mathbf{p}_f^{iT} \mathbf{K}^{i*} \mathbf{p}_f^i \quad (1.14)$$

donde  $\mathbf{K}^{i*}$  es la matriz de rigidez que se obtiene de ensamblar las matrices de rigidez elementales  $K^{ij*}$  dadas por

$$K^{ij*} = \mathbf{W}^{iT} \int_{V^{ij}} [\bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{D}^{*T} \mathbf{E} \mathbf{D}^* \bar{\mathbf{N}}]^{ij} dV^{ij} \mathbf{W}^i \quad (1.15)$$

En la Ec. 1.14,  $\mathbf{K}^{i*}$  representa la suma de la matriz de rigidez elástica convencional  $\mathbf{K}_E^i$  y de la matriz de rigidez geométrica  $\mathbf{K}_G^i$  resultante de incluir los términos cuadráticos de la deformación en la expresión de la energía de deformación para tener en cuenta los grandes desplazamientos elásticos.

En el método propuesto por estos autores, el único cambio en las ecuaciones del movimiento con respecto a la formulación de pequeños desplazamientos elásticos consiste simplemente en añadir la matriz de rigidez geométrica a la matriz de rigidez lineal. La matriz de rigidez geométrica, a diferencia de  $\mathbf{K}_E^i$ , no es constante, sino que depende de las coordenadas elásticas axiales, debiendo ser actualizada en cada paso de tiempo. Esta es la razón de que esta formulación sea computacionalmente muy ineficiente. La dependencia de la matriz de rigidez geométrica con los desplazamientos axiales elásticos ralentiza considerablemente la simulación, puesto que no es posible despreciar la vibración longitudinal, y, al tener ésta frecuencias muy altas, los pasos de tiempo del proceso de integración han de ser muy pequeños.

Algunos autores resuelven este problema considerando sólo las fuerzas axiales que aparecen debidas al movimiento como sólido rígido del mecanismo. Viscomi y Ayre (1971) estudiaron el comportamiento de un mecanismo de biela-manivela. Sadler y Sandor (1974) obtuvieron la respuesta para un mecanismo de cuatro barras. Yigit et al. (1988) examinaron el comportamiento dinámico de una viga girando sobre un soporte rígido, teniendo en cuenta el trabajo realizado por las fuerzas de inercia centrífugas, a cuyo efecto denominaron *rigidización centrífuga*. Recientemente ha aparecido un grupo de métodos que son capaces de modelar componentes generales (Banerjee y Dickens, 1990; Wallrapp y Schwertassek, 1991; Ryu, 1991) Estos procedimientos son computacionalmente muy eficientes porque, a diferencia de los anteriores, no necesitan considerar modos axiales. Pero mientras que en el caso de la matriz de rigidez geométrica la fuerza axial es introducida de una forma relativamente general, en estas investigaciones dicha fuerza es simplificada, con lo que se obtiene una forma lineal menos exacta que reemplaza a la matriz de rigidez geométrica no lineal.

#### 1.2.4 Método de Banerjee y Dickens (1990), Wallrapp y Schwertassek (1991)

Banerjee y Dickens introducen la idea de *motion stiffness* como la rigidez asociada con el movimiento más general de un sistema de coordenadas ligado al cuerpo flexible de alguna manera. Esta rigidez la reconocen como una forma de rigidez geométrica originada por un sistema de 12 fuerzas y 9 momentos de inercia distribuidos por todo el cuerpo flexible.

Con objeto de definir las matrices de rigidez tanto convencionales

como geométricas, se calcula el trabajo virtual realizado por las fuerzas internas, definido por

$$\delta U^{ij} = \int_{V^{ij}} \delta \varepsilon^{ij} \sigma^{ijT} dV^{ij} \quad (1.16)$$

El tensor de deformaciones virtual de Green-Lagrange se puede escribir como

$$\delta \varepsilon^{ij} = \delta \varepsilon_l^{ij} + \delta \varepsilon_{nl}^{ij} \quad (1.17)$$

donde

$$\delta \varepsilon_l^{ij} = \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) \quad (1.18)$$

$$\delta \varepsilon_{nl}^{ij} = \delta u_{k,i} u_{k,j} \quad (1.19)$$

El segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff se supone compuesto de tensiones incrementales resultantes de la deformación dinámica y de tensiones de referencia  $\sigma_r^{ij}$  inducidas por las cargas de inercia de D'Alembert que surgen del movimiento como sólido rígido del sistema de coordenadas ligado al cuerpo. Este tensor se puede expresar como

$$\sigma^{ij} = D^{ijkl} \varepsilon_l^{kl} + \sigma_r^{ij} \quad (1.20)$$

Sustituyendo el tensor de deformaciones virtual y el tensor de tensiones en la expresión del trabajo virtual interno se obtiene

$$\delta U^{ij} = \int_{V^{ij}} \delta \varepsilon_l^{ij} D^{ijkl} \varepsilon_l^{kl} dV^{ij} + \int_{V^{ij}} \delta \varepsilon_l^{ij} \sigma_r^{ij} dV^{ij} + \int_{V^{ij}} \delta \varepsilon_{nl}^{ij} \sigma_r^{ij} dV^{ij} \quad (1.21)$$

donde se ha despreciado el término cuadrático.



Usando técnicas de Síntesis de Componentes, estos autores suponen que el vector de desplazamientos elásticos  $\mathbf{u}$  se puede expresar como una combinación lineal de funciones de forma modales con coeficientes  $\mathbf{a}$  dependientes del tiempo. Usando esta transformación se llega a la siguiente expresión para el trabajo virtual interno

$$\delta U = \delta \mathbf{a}^T (\mathbf{K}_l + \mathbf{K}_{nl}) \mathbf{a} + \delta \mathbf{a}^T \mathbf{F}_r \quad (1.22)$$

donde  $\mathbf{K}_l$  es la matriz de rigidez lineal convencional expresada en términos de las coordenadas modales,  $\mathbf{K}_{nl}$  es una matriz de rigidez geométrica y  $\mathbf{F}_r$  es un vector de fuerzas adicional.

Banerjee y Dickens (1990) definen 21 matrices de rigidez geométricas asociadas con las cargas de inercia que surgen del movimiento de sólido rígido del sistema de coordenadas ligado al cuerpo. Estas matrices de rigidez geométricas se obtienen mediante análisis cuasi-estáticos para los que se usa un programa de análisis estructural de elementos finitos. Este procedimiento es sólo aplicable a un cuerpo flexible sin carga externa, ya que las tensiones de referencia no incluyen las tensiones inducidas por las cargas aplicadas externamente y por las reacciones en los pares cinemáticos en la configuración indeformada del cuerpo flexible.

El método propuesto por Wallrapp y Schwertassek (1991) es similar, pero su planteamiento inicial es distinto. Ellos no ven su método como una simplificación eficiente en la que se han despreciado las fuerzas axiales debidas a la propia deformación del cuerpo, sino como un método que resuelve una paradoja que se presenta en la mayoría de los métodos existentes actualmente. La paradoja es la siguiente: debido a las traslaciones y rotaciones de sólido rígido de los sistemas de coordenadas ligados a los cuerpos del mecanismo aparecen fuerzas de inercia que varían tanto en el tiempo como a lo largo del cuerpo. Estas fuerzas variables deben estar equilibradas en todo momento. Walrapp y Schwertassek defienden que la mayoría de las formulaciones de sistemas multicuerpos flexibles suponen que las tensiones son nulas en la configuración de referencia, por lo que las fuerzas de inercia variables estarían equilibradas mediante tensiones nulas. Para evitar esta paradoja, ellos suponen que las tensiones en la configuración de referencia o "indeformada" no son nulas, sino que varían de forma que puedan equilibrar fácilmente cualquier distribución de fuerzas de inercia. La variabilidad de las tensiones de referencia provoca que

la configuración de referencia cambie continuamente. Sin embargo, estos autores afirman que considerar la deformación de la configuración de referencia llevaría a un costo computacional excesivo comparado con la mejora de la respuesta. Por eso suponen que las tensiones de referencia son distintas de cero y variables, pero que la configuración de referencia no varía. Afirman que la ausencia de términos de rigidez geométrica en la ecuación del movimiento resulta de la hipótesis de tensiones nulas en la configuración de referencia, por lo que no puede satisfacerse el equilibrio entre las fuerzas externas e internas en la configuración de referencia, y la ecuación del movimiento no representa un conjunto de ecuaciones correctamente linealizadas alrededor de un estado de referencia en el cual todas las fuerzas nominales están en equilibrio.

En esta tesis no se comparte la opinión de estos autores. La configuración de referencia no es un estado de equilibrio, sino que es una configuración que se utiliza para describir la posición de los puntos del cuerpo más fácilmente, evitando los problemas asociados a las rotaciones finitas, y poder además disminuir el número de coordenadas usando técnicas de Síntesis de Componentes. Los únicos estados de equilibrio son los de las configuraciones deformadas, que son únicos en cada instante de tiempo. Las configuraciones de referencia pueden ser muchas distintas, y lo que sí es cierto es que cuando se usa la hipótesis de pequeños desplazamientos es necesario, para obtener respuestas aceptables, elegir el sistema de coordenadas ligado al cuerpo de forma que sea cierta esta hipótesis para poder linealizar a partir de ella (Agrawal y Shabana, 1985).

### 1.2.5 Método de Ryu (1991)

Este autor propone un método para incluir los efectos de las no linealidades geométricas debidas a la deformación, o, como él los denomina, los efectos de la rigidización por tensión, ya que los deriva a partir de las tensiones. Su formulación es similar a la anterior, pero aplicable a sistemas multicuerpos flexibles generales, ya que incluye los efectos de rigidización por tensiones inducidos por las fuerzas de inercia del movimiento de sólido rígido del sistema de coordenadas ligado al cuerpo, por las fuerzas aplicadas externamente y por las cargas de reacción en las uniones. No incluye los efectos debidos al movimiento del cuerpo con respecto al sistema de coordenadas ligado a él, y en este sentido se considera una aproximación de primer orden.

El método propuesto por este autor para calcular la matriz  $K^n$  con-

siste en obtenerla a través de una serie de análisis estructurales. Los coeficientes de influencia  $\widehat{K}_i^n$  asociados con los doce términos dependientes del tiempo ( $\ddot{r}_x, \ddot{r}_y, \ddot{r}_z, \dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z, \omega_x^2, \omega_y^2, \omega_z^2, \omega_x\omega_y, \omega_y\omega_z, \omega_z\omega_x$ ) se generan mediante análisis estructurales cuasi-estáticos, para los que se utiliza el método de los elementos finitos si las geometrías son complicadas. La matriz de rigidez geométrica  $\widetilde{K}_A^n$  se obtiene aplicando el principio de superposición:

$$\begin{aligned} \widetilde{K}_A^n &= \ddot{r}_x \widehat{K}_1^n + \ddot{r}_y \widehat{K}_2^n + \ddot{r}_z \widehat{K}_3^n + \dot{\omega}_x \widehat{K}_4^n + \dot{\omega}_y \widehat{K}_5^n + \dot{\omega}_z \widehat{K}_6^n + \omega_x^2 \widehat{K}_7^n \\ &+ \omega_y^2 \widehat{K}_8^n + \omega_z^2 \widehat{K}_9^n + \omega_x\omega_y \widehat{K}_{10}^n + \omega_y\omega_z \widehat{K}_{11}^n + \omega_z\omega_x \widehat{K}_{12}^n \quad (1.23) \end{aligned}$$

En caso de cargas aplicadas externamente o reacciones se calculan los coeficientes de influencia de forma análoga, obteniéndose una matriz de rigidez  $\widetilde{K}_B^n$ . La matriz de rigidez geométrica se obtiene combinando ambas matrices según la expresión

$$K^n = \Phi^T (\widetilde{K}_A^n + \widetilde{K}_B^n) \Phi \quad (1.24)$$

donde  $\Phi$  es la matriz modal en el espacio nodal. Tanto  $\widetilde{K}_A^n$  como  $\widetilde{K}_B^n$  dependen del estado de aceleraciones y reacciones, ambos desconocidos a priori, por lo que se aproximan usando los valores del paso de tiempo previo. Puede usarse un método iterativo para actualizar estos valores. El término  $F^r$  de la Ec. (1.22) se obtiene aplicando el principio de superposición de forma similar.

En la literatura de los sistemas multicuerpos flexibles, existe una discusión sobre la importancia práctica de los efectos de las no linealidades geométricas debidas a la deformación de sus componentes (London, 1989; Kane et al., 1989). La inclusión general de estos efectos no lineales en el sistema de ecuaciones del movimiento es difícil y computacionalmente costosa. Esto, unido al hecho de que no son siempre significativos, lleva a la necesidad de obtener un criterio para determinar, previamente a la simulación dinámica real, si es necesario introducir los términos de rigidez no lineales para analizar un mecanismo en unas condiciones de operación determinadas.

Ryu et al. (1992) presentan un criterio que se basa en un examen cuerpo a cuerpo de la variación del primer autovalor que resulta de añadir la matriz de rigidez geométrica modal a la matriz de rigidez lineal modal. Como la matriz de rigidez geométrica depende de magnitudes desconocidas a priori, como las aceleraciones y reacciones, sería necesario aplicar el criterio simultáneamente a la integración de las ecuaciones, por lo que no serviría para el propósito previsto. Para solventar este problema, se puede realizar una aproximación analizando los cuerpos como sólidos rígidos para generar las aceleraciones y reacciones desconocidas.

Estos autores concluyen que cambios significativos en la respuesta, usando o no la matriz de rigidez geométrica, se obtienen cuando la variación del primer autovalor de cualquier cuerpo del sistema es superior al 10%.

### 1.3 Resumen y objetivos

Esta tesis presenta dos nuevas formulaciones de las ecuaciones que gobiernan el comportamiento dinámico de los sistemas multicuerpos flexibles planos. Estas incluyen los efectos geoméricamente no lineales derivados de la existencia de grandes desplazamientos elásticos en los cuerpos que componen el mecanismo. Bajo condiciones de operación severas o cuando los cuerpos son muy flexibles, la importancia de las no linealidades geométricas elásticas puede ser muy grande, influyendo sustancialmente en la respuesta. A pesar de su importancia, no muchas de las formulaciones que se encuentran en la literatura incluyen estos efectos. Algunos métodos son simplificaciones que evitan la ineficacia computacional y los problemas numéricos que suelen llevar asociados. En el segundo capítulo de esta tesis se presentan, usando un planteamiento de medio continuo, las dos formulaciones geoméricamente no lineales propuestas en este trabajo. Con estos dos planteamientos se pretende mostrar como partiendo de las mismas hipótesis se puede llegar a formulaciones completamente diferentes, siendo una de ellas muy ineficiente y numéricamente inestable y presentando la otra un comportamiento opuesto. Esta última es comparable, en términos de eficiencia computacional, a los métodos simplificados, presentando, sin embargo, un grado de aproximación mayor.

Estas dos formulaciones geoméricamente no lineales se desarrollan usando el método de los elementos finitos en el tercer y cuarto capítulo,

respectivamente. Este método permite la simulación de sistemas más generales pero su formulación, aunque similar a la de medio continuo, conlleva un mayor número de transformaciones, por lo que se prefirió comenzar por este último para una mejor comprensión de las aproximaciones propuestas.

En el capítulo quinto se presentan los resultados numéricos obtenidos con los dos planteamientos: medio continuo y elementos finitos. Se comparan entre sí las formulaciones geoméricamente no lineales desarrolladas en esta tesis, así como con los resultados de otros autores.

En el capítulo sexto se analizan brevemente las formulaciones desarrolladas y las conclusiones derivadas de las mismas.

Por último, en los dos apéndices de esta tesis se presenta alguna información auxiliar. En el primero (A) se aplica a un elemento particular la primera de las formulaciones presentadas. En el segundo (B) se desarrolla la matriz de masa de la segunda de las formulaciones usando el método de los elementos finitos, ya que al tener una expresión muy compleja se ha preferido incluirla en un apéndice.

## Capítulo 2

# Formulación con Modos Supuestos de la Viga en el Caso Plano

En dinámica de los sistemas multicuerpos flexibles, dependiendo de cómo se elijan las coordenadas generalizadas que describen la configuración de los mismos, las técnicas de generación de las ecuaciones del movimiento pueden dividirse en dos grupos:

1. *Métodos Clásicos*, llamados también de los modos supuestos (Chu y Pan, 1975; Badlani y Midha, 1982): Estos métodos usan técnicas clásicas de aproximación, tales como los métodos de Rayleigh-Ritz, para describir la deformada de los cuerpos que componen un sistema multicuerpo flexible. Llevan a cabo, por tanto, un estudio directo como medio continuo que permite una comprensión más profunda de la física del problema, pero presentan la dificultad de ser de difícil sistematización y no generalizables al caso de cuerpos deformables con formas geométricas complejas.
2. *Método de los Elementos Finitos* (Song y Haug, 1980; Shabana, 1982; Cardona et al., 1988): El método de los elementos finitos (MEF) se puede visualizar como un caso especial de los métodos clásicos en donde el cuerpo deformable se divide en pequeñas regiones llamadas elementos. Los desplazamientos de los nodos son las incógnitas básicas del problema. Como resaltó Cook (1981), el uso del método de Rayleigh-Ritz tiene dos propiedades indeseables.

Primero, los campos de desplazamientos supuestos deben cumplir las condiciones de contorno. Y, en segundo lugar, las coordenadas carecen de un significado físico. El método de los elementos finitos resuelve ambos problemas usando como coordenadas los desplazamientos y giros de los nodos, y describiendo el campo de desplazamientos entre nodos mediante funciones de interpolación.

Este capítulo desarrolla la formulación de las ecuaciones del movimiento de un sistema multicuerpo flexible basada en una teoría geoméricamente no lineal elástica usando un planteamiento continuo de los pertenecientes al primer grupo. En los dos capítulos siguientes se formularán dichas ecuaciones usando el método de los elementos finitos.

En primer lugar, antes de entrar en la formulación propiamente dicha, se analiza el tensor de deformaciones, ya que, como se ha indicado en el capítulo primero, en su expresión radica la diferencia con las formulaciones que no incluyen los efectos de los grandes desplazamientos. Para formular las ecuaciones se presentan, en el segundo apartado, las coordenadas generalizadas que describen la configuración del sistema. En el tercero se habla del campo de desplazamientos supuestos para describir la deformada de los cuerpos. En el cuarto y quinto, se obtienen las expresiones de la energía cinética y potencial de cada cuerpo en función de sus coordenadas generalizadas. En el siguiente apartado se describen las ecuaciones de restricción cinemáticas para a, continuación, en el séptimo, obtener las ecuaciones de Lagrange del movimiento de un cuerpo del mecanismo. En los cuatro apartados siguientes se particularizan las ecuaciones del movimiento para cuatro aproximaciones distintas. La primera considera que los desplazamientos debidos a la deformación son pequeños y es, por tanto, la menos general. Las otras tres son formulaciones geoméricamente no lineales elásticas. La primera de estas tres se presenta por ser usada por muchos autores y se compara con las dos últimas que son las desarrolladas en esta tesis. Estas dos formulaciones parten de las mismas hipótesis pero difieren en las coordenadas generalizadas que utilizan. Esto hace que para una de ellas, la última que se presenta, sea preciso recalcular las expresiones de la energía cinética, energía potencial y ecuaciones de restricción, en función de las nuevas coordenadas, lo que se presenta en el undécimo apartado. En contraposición a este desarrollo adicional, la última formulación presentada es considerablemente más eficiente que la otra desarrollada en este trabajo, e incluso que las anteriores, aún siendo más general.

## 2.1 El tensor de deformaciones

Cuando se aplican fuerzas sobre los cuerpos, éstos se deforman, cambiando de configuración y de volumen. Si se consideran dos puntos situados entre sí a una distancia  $dl$ , tras la deformación la varía la distancia pasando a ser  $dl'$ . La variación de una longitud infinitesimal cuando el sólido se deforma viene dada por (Landau, 1969)

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \epsilon_{ik} dx_i dx_k \quad (2.1)$$

donde  $\epsilon_{ik}$  es el tensor de deformaciones y está definido como

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (2.2)$$

variando los índices entre 1 y 2 en el caso plano.

En la mayoría de las aplicaciones prácticas las deformaciones son pequeñas. Esto significa que la variación de una longitud, comparada con la longitud misma, es pequeña. Si un cuerpo está sujeto a pequeñas deformaciones, todos los componentes del tensor de deformaciones son pequeños ya que sus elementos representan las variaciones relativas de longitud en el cuerpo.

En muchos casos es también posible considerar que el vector desplazamiento correspondiente a una pequeña deformación es también pequeño. Si esto es así  $u_i$  es pequeño y se puede desprestigiar el último término de la Ec. (2.2), por ser un orden de magnitud menor que los anteriores. El tensor de deformaciones para pequeños desplazamientos se simplifica a

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (2.3)$$

Sin embargo, a veces, el vector de desplazamientos puede ser grande, aún para pequeñas deformaciones; es decir, el cuerpo puede deformarse de tal manera que algunas partes de él se muevan considerablemente sin que ocurran extensiones o compresiones importantes dentro del cuerpo.



Cuando los sistemas mecánicos operan a altas velocidades, en determinadas ocasiones, las deflexiones de sus elementos pueden ser lo suficientemente grandes como para causar cambios significativos en la geometría del sistema. Este efecto puede ser aún más acusado si además están fabricados con materiales ligeros, como es la tendencia actual en robótica y tecnología aeroespacial. En estas aplicaciones no es posible simplificar la formulación considerando pequeños desplazamientos. Es necesario suponer que existen grandes desplazamientos y trabajar con la expresión general del tensor de deformaciones de la Ec. (2.2).

Es posible, por tanto, dividir dicho tensor en una parte lineal y otra no lineal, según

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ik}^l + \epsilon_{ik}^{nl} \quad (2.4)$$

donde

$$\epsilon_{ik}^l = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (2.5)$$

y

$$\epsilon_{ik}^{nl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (2.6)$$

El tensor de deformaciones  $\epsilon_{ik}^l$  está formado por términos lineales en las derivadas de los desplazamientos. En aquellos problemas en los que tanto los desplazamientos como las deformaciones sean pequeños, este término es mucho mayor que el no lineal, por lo que  $\epsilon_{ik}^{nl}$  se desprecia, simplificándose la formulación. Cuando los desplazamientos son grandes, los términos cuadráticos en sus derivadas pueden ser del mismo orden que los lineales, debiendo ser tenidos en cuenta en el análisis.

Conocido el tensor de deformaciones es posible obtener la expresión de la energía de deformación para un cuerpo elástico lineal como

$$U = \frac{1}{2} \int_V \epsilon^T E \epsilon dV \quad (2.7)$$

donde  $U$  es la energía de deformación,  $\epsilon$  es un vector, de dimensión 3 en el caso plano, cuyos elementos son las componentes del tensor de deformaciones,  $\mathbf{E}$  es una matriz simétrica cuyos elementos dependen de las propiedades del material, y  $V$  es el volumen del cuerpo elástico. Usando la Ec. (2.4), la Ec. (2.7) se puede reescribir como

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon^{lT} \mathbf{E} \epsilon^l + 2 \epsilon^{lT} \mathbf{E} \epsilon^{nl} + \epsilon^{nlT} \mathbf{E} \epsilon^{nl}) dV \quad (2.8)$$

El primer término de esta expresión representa la energía de deformación de la formulación de pequeñas deformaciones y pequeños desplazamientos, mientras que los otros dos términos surgen de la contribución del componente no lineal  $\epsilon^{nl}$  de la relación deformación-desplazamiento. Estos dos términos adicionales tienen en cuenta el cambio en la geometría debido a la existencia de grandes desplazamientos, es decir, incluyen el efecto de las no linealidades geométricas.

A continuación se desarrollan las ecuaciones dinámicas que gobiernan el movimiento de los sistemas multicuerpos flexibles. Las formulaciones geoméricamente no lineales, basadas en la Ec. (2.2), presentadas en este trabajo, son una extensión de la formulación lineal desarrollada por Shabana (1989). Es importante aclarar que todas las formulaciones de sistemas multicuerpos son necesariamente geoméricamente no lineales, puesto que los cuerpos pueden experimentar rotaciones finitas. Cuando en este trabajo se habla de formulaciones lineales y no lineales, se hace referencia exclusivamente a si los desplazamientos debidos a la deformación de los cuerpos son grandes o pequeños. En el primer caso, la formulación se denominará no lineal, mientras que si los desplazamientos son pequeños se hablará de una formulación lineal. Por simplicidad, las formulaciones son aplicadas a vigas en el plano, aunque serían fácilmente generalizables a vigas y placas tanto en el plano como en el espacio. Aunque la formulación no sea aplicable a cualquier geometría, queda justificado su estudio ya que la mayoría de los mecanismos existentes pertenecen a alguno de los grupos antes mencionados.

## 2.2 Coordenadas generalizadas

La configuración de un cuerpo flexible  $i$  se puede describir usando dos conjuntos de coordenadas: las *coordenadas de referencia*  $\mathbf{q}_r^i$  que definen

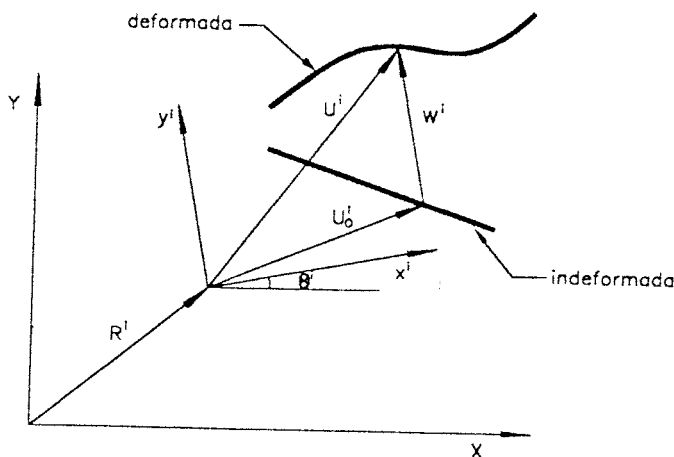


Figura 2.1: Coordenadas del cuerpo deformable

la localización  $R^i$  y la orientación  $\theta^i$  de un sistema de referencia asociado al cuerpo  $i$ , denominado  $X^i Y^i$ , con respecto al sistema de coordenadas global  $XY$ , como se muestra en la Fig. 2.1; y las *coordenadas elásticas*  $q_f^i$  que describen la deformación del cuerpo con respecto al sistema de referencia del cuerpo. El vector de coordenadas  $q^i$  del cuerpo  $i$  se puede escribir, entonces, como

$$q^i = \begin{pmatrix} q_r^i \\ q_f^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^i \\ \theta^i \\ q_f^i \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

En la notación empleada en este capítulo, los caracteres en **negrita** se usan para representar matrices y vectores expresados en el sistema de coordenadas global, y los caracteres en **negrita suprarayados** se usan para vectores definidos en el sistema de coordenadas local, es decir, en el sistema de referencia del cuerpo.

## 2.3 Campo de desplazamientos supuestos

Un cuerpo flexible es un sistema continuo y, por tanto, posee un número infinito de grados de libertad (el número de componentes de  $\mathbf{q}_f^i$  debería ser infinito). Sin embargo, se puede obtener una solución razonable aproximando el campo de desplazamientos debidos a la deformación mediante una serie finita de funciones de forma. El campo de desplazamientos supuestos  $\bar{\mathbf{w}}^i$  para el cuerpo flexible  $i$  se suele escribir usando la técnica de separación de variables como

$$\bar{\mathbf{w}}^i(x^i, y^i, t) = \mathbf{S}^i(x^i, y^i) \mathbf{q}_f^i(t) \quad (2.10)$$

donde  $\bar{\mathbf{w}}^i$  es el desplazamiento de un punto perteneciente al cuerpo  $i$  debido a la deformación,  $x^i$  e  $y^i$  son las variables espaciales,  $t$  es el tiempo, y  $\mathbf{S}^i$  es la matriz de funciones de forma.

Como se muestra en la Fig. 2.1, la posición global de un punto arbitrario perteneciente al cuerpo  $i$  puede escribirse como

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}^i \quad (2.11)$$

donde  $\bar{\mathbf{u}}^i$  es el vector de posición local del punto arbitrario, y  $\mathbf{A}^i$  es la matriz de transformación del sistema local del cuerpo al sistema de coordenadas global fijo, definida como

$$\mathbf{A}^i = \begin{pmatrix} \cos\theta^i & -\text{sen}\theta^i \\ \text{sen}\theta^i & \cos\theta^i \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

La hipótesis de sólido rígido de un cuerpo implica que la distancia entre dos puntos arbitrarios pertenecientes a dicho cuerpo permanece constante, lo que lleva a que la longitud del vector  $\bar{\mathbf{u}}^i$  permanezca constante y sus componentes con respecto al sistema de coordenadas ligado al cuerpo permanezcan invariantes. Sin embargo, cuando se consideran cuerpos deformables, la distancia entre dos puntos arbitrarios pertenecientes al cuerpo elástico no tiene necesariamente que mantenerse constante. El

vector  $\bar{\mathbf{u}}^i$  se puede dividir en dos vectores, como muestra la Fig. 2.1:

$$\bar{\mathbf{u}}^i = \bar{\mathbf{u}}_o^i + \bar{\mathbf{w}}^i \quad (2.13)$$

donde  $\bar{\mathbf{u}}_o^i$  representa el vector de posición de un punto arbitrario en el estado indeformado expresado en el sistema de coordenadas local, y  $\bar{\mathbf{w}}^i$  el desplazamiento debido a la deformación expresado en la Ec. (2.10). Es decir

$$\bar{\mathbf{u}}^i = \bar{\mathbf{u}}_o^i + \mathbf{S}^i \mathbf{q}_f^i \quad (2.14)$$

Usando la Ec. (2.14), la Ec. (2.11) se puede reescribir como

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i (\bar{\mathbf{u}}_o^i + \mathbf{S}^i \mathbf{q}_f^i) \quad (2.15)$$

donde se expresa el vector de posición de un punto cualquiera del cuerpo  $i$  en función de sus coordenadas de referencia y elásticas.

## 2.4 Energía cinética

La energía cinética se define como

$$T^i = \frac{1}{2} \int_{V^i} \rho^i \dot{\mathbf{r}}^{iT} \dot{\mathbf{r}}^i dV^i \quad (2.16)$$

donde  $\rho^i$  y  $V^i$  son, respectivamente, la densidad y el volumen del cuerpo  $i$ , y  $\dot{\mathbf{r}}^i$  es el vector velocidad de un punto del cuerpo  $i$ .

La velocidad,  $\dot{\mathbf{r}}^i$ , se puede de la Ec. (2.11) con respecto al tiempo:

$$\dot{\mathbf{r}}^i = \dot{\mathbf{R}}^i + \dot{\mathbf{A}}^i \bar{\mathbf{u}}^i + \mathbf{A}^i \dot{\bar{\mathbf{u}}}^i \quad (2.17)$$

donde el punto sobre cada símbolo representa derivada con respecto al tiempo. Interesa expresar los términos de esta ecuación en función de las coordenadas generalizadas del cuerpo y de sus derivadas temporales. Para ello, usando la Ec. (2.12), la derivada de la matriz de transformación  $A^i$  se puede escribir como

$$\dot{A}^i = A_{\theta}^i \dot{\theta}^i \quad (2.18)$$

donde  $A_{\theta}^i$  es la derivada con respecto a  $\theta$  de la matriz  $A^i$ , siendo, como ésta, una matriz ortogonal, cuya expresión es

$$A_{\theta}^i = \begin{pmatrix} -\text{sen}\theta^i & -\text{cos}\theta^i \\ \text{cos}\theta^i & -\text{sen}\theta^i \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Usando la Ec. (2.14), se obtiene la expresión de  $\dot{\bar{u}}^i$  en función de las derivadas temporales de las coordenadas elásticas del cuerpo  $i$  como

$$\dot{\bar{u}}^i = S^i \dot{q}_f^i \quad (2.20)$$

Sustituyendo las Ecs. (2.18) y (2.20) en la Ec. (2.17) se obtiene

$$\dot{\bar{r}}^i = \dot{R}^i + A_{\theta}^i \bar{u}^i \dot{\theta}^i + A^i S^i \dot{q}_f^i \quad (2.21)$$

En esta ecuación el vector  $\dot{R}^i$  representa la velocidad absoluta del origen del sistema de referencia asociado al cuerpo. El último término  $A^i S^i \dot{q}_f^i$  representa la velocidad del punto  $P$  debida a la deformación del cuerpo, definida con respecto a un observador estacionado en el sistema de referencia, por lo que, en caso de sólidos rígidos, dicho término sería nulo. El término central  $A_{\theta}^i \bar{u}^i \dot{\theta}^i$  depende de la rotación del sistema de referencia así como de la deformación elástica del cuerpo. Para poder interpretarlo correctamente son necesarias algunas transformaciones. Es posible representarlo como un producto vectorial si se opera de la siguiente forma:

$$A_{\theta}^i \bar{u}^i \dot{\theta}^i = \begin{pmatrix} -\text{sen}\theta^i & -\text{cos}\theta^i \\ \text{cos}\theta^i & -\text{sen}\theta^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_1^i \\ \bar{u}_2^i \end{pmatrix} \dot{\theta}^i$$

$$A_{\theta}^i \bar{u}^i \dot{\theta}^i = - \begin{pmatrix} \cos\theta^i & -\text{sen}\theta^i \\ \text{sen}\theta^i & \cos\theta^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_2^i \\ -\bar{u}_1^i \end{pmatrix} \dot{\theta}^i \quad (2.22)$$

Además se puede verificar fácilmente que

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_2^i \\ -\bar{u}_1^i \end{pmatrix} \dot{\theta}^i = \bar{u}^i \times \omega \quad (2.23)$$

donde  $\times$  representa un producto vectorial y  $\omega$  es el vector velocidad angular, que debido a que sólo se estudia el movimiento en el plano, su única componente no nula es la perpendicular a éste, es decir,  $\omega = [0 \ 0 \ \dot{\theta}^i]^T$ . Se puede escribir, por tanto, que

$$A_{\theta}^i \bar{u}^i \dot{\theta}^i = -A^i(\bar{u}^i \times \omega) = A^i(\omega \times \bar{u}^i) \quad (2.24)$$

A la vista de la Ec. (2.24) se puede interpretar el término central de la Ec. (2.21) como la velocidad debida a la rotación del sistema de referencia del cuerpo, cuyo módulo es igual al producto de la velocidad de giro por la distancia del punto  $P$  al origen del sistema de referencia, y cuya dirección es perpendicular a la línea que une el punto  $P$  con el origen de dicho sistema.

La Ec. (2.21) puede ser escrita matricialmente como

$$\dot{r}^i = \left( I_2 \quad A_{\theta}^i \bar{u}^i \quad A^i S^i \right) \begin{pmatrix} \dot{R}^i \\ \dot{\theta}^i \\ \dot{q}_f^i \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

donde  $I_2$  es la matriz identidad de dimensión  $2 \times 2$ . Esta ecuación se expresa de forma compacta como

$$\dot{r}^i = L^i \dot{q}^i \quad (2.26)$$

donde  $\dot{\mathbf{q}}^i = [\dot{\mathbf{q}}_r^{iT} \quad \dot{\mathbf{q}}_f^{iT}]^T = [\dot{\mathbf{R}}^{iT} \quad \dot{\theta}^i \quad \dot{\mathbf{q}}_f^{iT}]^T$  es el vector total de velocidades generalizadas del cuerpo  $i$  y  $\mathbf{L}^i$  es la matriz

$$\mathbf{L}^i = ( I_2 \quad \mathbf{A}_\theta^i \bar{\mathbf{u}}^i \quad \mathbf{A}^i \mathbf{S}^i ) \quad (2.27)$$

Sustituyendo la Ec. (2.26) en la Ec. (2.16) se puede escribir la energía cinética como

$$T^i = \frac{1}{2} \int_{V^i} \rho^i \dot{\mathbf{q}}^{iT} \mathbf{L}^{iT} \mathbf{L}^i \dot{\mathbf{q}}^i dV^i \quad (2.28)$$

En la expresión anterior es posible escribir fuera de la integral el vector de velocidades generalizadas, ya que éste es función exclusivamente del tiempo. El resto de las magnitudes presentes en la ecuación dependen de la posición que ocupe el punto  $P$  en el cuerpo, además de poder depender del tiempo. Por tanto, se puede escribir

$$T^i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^{iT} \left( \int_{V^i} \rho^i \mathbf{L}^{iT} \mathbf{L}^i dV^i \right) \dot{\mathbf{q}}^i \quad (2.29)$$

o de forma compacta como

$$T^i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^{iT} \mathbf{M}^i \dot{\mathbf{q}}^i \quad (2.30)$$

donde  $\mathbf{M}^i$  es la matriz de masa del cuerpo  $i$ , definida como

$$\mathbf{M}^i = \int_{V^i} \rho^i \mathbf{L}^{iT} \mathbf{L}^i dV^i \quad (2.31)$$



## 2.5 Energía potencial

En el cálculo de la energía de deformación  $U^i$  de una viga en el plano, es habitual despreciar la deformación por cortante de la viga. haciendo esta simplificación dicha energía se puede representar por

$$U^i = \int_{V^i} \left[ \int_0^{\varepsilon_{xx}^i} (\sigma_x^{iT} d\varepsilon_{xx}^i) \right] dV^i \quad (2.32)$$

En el caso de grandes desplazamientos pero pequeñas deformaciones, se utiliza la expresión general del tensor de deformaciones de la Ec. (2.4). Particularizándola para obtener la deformación normal, se tiene que

$$\varepsilon_{xx}^i = \varepsilon_{xx}^{il} + \varepsilon_{xx}^{inl} \quad (2.33)$$

donde

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{il} &= \frac{\partial u^i}{\partial x^i} \\ \varepsilon_{xx}^{inl} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^i}{\partial x^i} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^i} \right)^2 \end{aligned}$$

siendo  $x^i$  la coordenada espacial a lo largo del eje de la viga;  $u^i = u_1^i$  y  $v^i = u_2^i$ , los desplazamientos elásticos longitudinal y transversal, respectivamente, ambos medidos desde la posición indeformada.

La deformación no lineal está compuesta por dos términos que no son del mismo orden. Los desplazamientos transversales elásticos son mucho mayores que los longitudinales, por lo que  $(\partial u^i / \partial x^i)^2$  puede ser despreciado frente a  $(\partial v^i / \partial x^i)^2$ . Con ello, las componentes de la Ec.(2.33) pasan a ser

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{il} &= \frac{\partial u^i}{\partial x^i} \\ \varepsilon_{xx}^{inl} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^i} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.34)$$

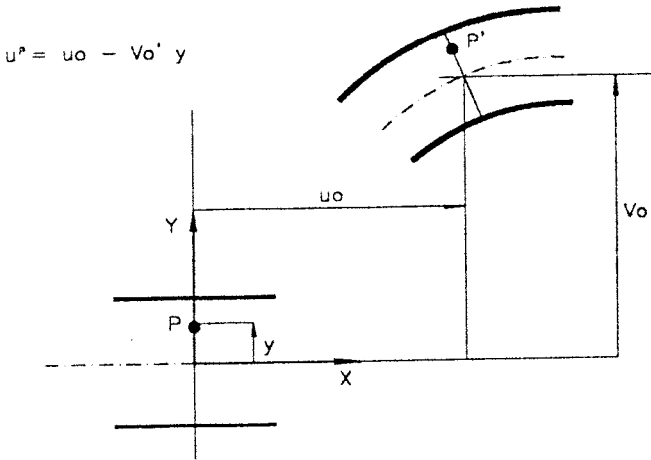


Figura 2.2: Desplazamientos de un punto no perteneciente al eje neutro

Suponiendo que las secciones planas permanecen planas tras ser deformadas, como se muestra en la Fig. 2.2, las componentes de la deformación de un punto situado a una distancia  $y^i$  del eje neutro de la viga se pueden escribir como (Przemieniecki, 1968)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^{il} &= \frac{\partial u_0^i}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 v_0^i}{\partial x^{i2}} y^i \\ \varepsilon_{xx}^{inl} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_0^i}{\partial x^i} \right)^2\end{aligned}\quad (2.35)$$

donde  $u_0^i$  y  $v_0^i$  son los desplazamientos  $u^i$  y  $v^i$  del eje neutro de la viga, es decir, para  $y^i = 0$ .

En el caso de un material con comportamiento isótropo lineal,

$$\sigma_x^i = E^i \varepsilon_{xx}^i \quad (2.36)$$

donde  $E^i$  es el módulo de elasticidad del material.

Sustituyendo la Ec. (2.36) en la Ec. (2.32) e integrando, se obtiene la expresión

$$U^i = \frac{1}{2} \int_0^{L^i} E^i A^i \varepsilon_{xx}^i{}^2 dx^i \quad (2.37)$$

en la que  $A^i$  es el área de una sección de la viga y  $L^i$  es su longitud.

Introduciendo la Ec. (2.35) en la Ec. (2.37) y operando se llega a

$$\begin{aligned} U^i &= \frac{1}{2} \int_0^{L^i} E^i A^i \left( \frac{\partial u^i}{\partial x^i} \right)^2 dx^i + \frac{1}{2} \int_0^{L^i} E^i I^i \left( \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^{i2}} \right)^2 dx^i \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{L^i} E^i A^i \frac{\partial u^i}{\partial x^i} \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^i} \right)^2 dx^i + \frac{1}{2} \int_0^{L^i} \frac{E^i A^i}{4} \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^i} \right)^4 dx^i \quad (2.38) \end{aligned}$$

donde  $I^i = \int_{A^i} y^{i2} dA^i$  es la inercia de la sección.

Comparando las Ecs. (2.8) y (2.38) es posible identificar términos. Las dos primeras integrales de la Ec. (2.38) corresponden al primer término de la Ec. (2.8), ya que contienen exclusivamente la componente lineal de la deformación. Estas dos integrales darán lugar a los términos lineales de rigidez axial y transversal, respectivamente. La tercera integral de (2.38) corresponde al segundo término de (2.8) y es un término de tercer orden que generará, por tanto, una fuerza elástica o término de rigidez de segundo orden que acople las deformaciones lineales y no lineales. Finalmente, la última integral de (2.38) se identifica con el último término de (2.8) y es función solamente de la deformación no lineal, siendo una integral de cuarto orden que conduce a una fuerza elástica o término de rigidez de tercer orden.

Todos los términos, lineales o no, expresados en la Ec. (2.38) son del mismo orden de magnitud cuando existen grandes desplazamientos debidos a la deformación en el sistema. Se pueden comparar, a modo de ejemplo, la primera y última integral de la expresión anterior. En la primera aparece el cuadrado de la derivada del desplazamiento longitudinal elástico, mientras que en la última aparece la derivada del desplazamiento transversal elástico a la cuarta potencia. Como las deflexiones de

la viga son generalmente mucho mayores que los desplazamientos longitudinales debidos a la deformación, ambos términos pueden ser del mismo orden.

Para la energía de deformación es posible hacer un desarrollo análogo al realizado para la energía cinética. Para ello hay que expresar los desplazamientos según el eje del cuerpo  $u^i$  y transversal a él,  $v^i$ , en función de las coordenadas elásticas del cuerpo. En la Fig. 2.3 se pone de manifiesto que las componentes del desplazamiento  $\bar{w}^i$  en el sistema de referencia del cuerpo son los desplazamientos  $u$  y  $v$ , solamente, si el eje  $X^i$  coincide con el eje de la viga en el estado indeformado. En este caso

$$\begin{pmatrix} u^i \\ v^i \end{pmatrix} = S^i q_f^j \tag{2.39}$$

Si éste no es el caso, el eje indeformado de la viga formará un ángulo constante  $\alpha^i$  con el eje de abscisas, y será posible obtener los desplazamientos  $u^i$  y  $v^i$  a partir del vector  $\bar{w}^i$  mediante una matriz de transformación constante. Es decir,

$$\begin{pmatrix} u^i \\ v^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha^i & \text{sen}\alpha^i \\ -\text{sen}\alpha^i & \cos\alpha^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_1^i \\ \bar{w}_2^i \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

En cualquier caso, usando la Ec. (2.10) puede escribirse la expresión general de la energía de deformación de la Ec. (2.38) en función de las coordenadas generalizadas del cuerpo  $i$  como

$$U^i = \frac{1}{2} q^i K^i q^i \tag{2.41}$$

donde  $K^i$  es la matriz de rigidez del cuerpo.

## 2.6 Restricciones cinemáticas

Los componentes de los sistemas multicuerpos flexibles no son libres, ya que están unidos entre sí mediante pares cinemáticos que permiten

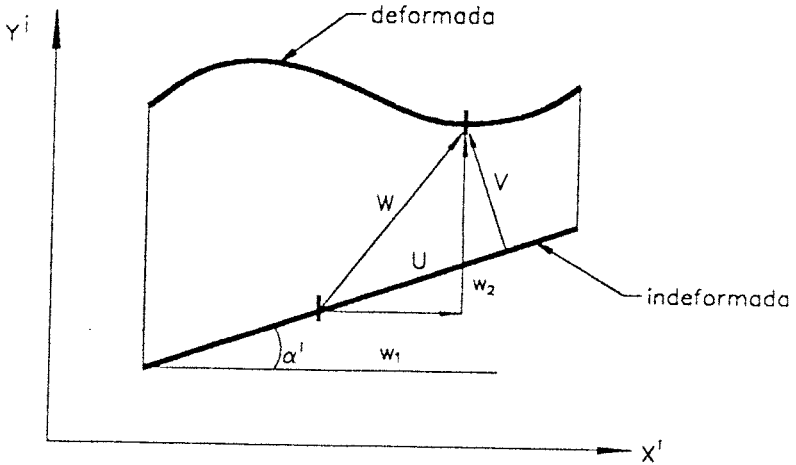


Figura 2.3: Desplazamientos  $u$  y  $v$  de un punto del cuerpo

el movimiento relativo entre ellos, o bien, algunos de sus puntos tienen especificada la trayectoria a seguir. Para un sistema formado por  $nb$  cuerpos y sujeto a  $m$  ecuaciones de restricción cinemáticas, éstas se pueden representar por el sistema de ecuaciones algebraicas no lineales siguiente:

$$\begin{aligned}
 C_1(\mathbf{q}, t) &= 0 \\
 C_2(\mathbf{q}, t) &= 0 \\
 &\vdots \\
 C_m(\mathbf{q}, t) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

donde  $\mathbf{q}$  es el vector de coordenadas del sistema completo definido por

$$\mathbf{q} = [q^1 T \quad q^2 T \quad \dots \quad q^{nb T}]^T$$

Supóngase, por ejemplo, un sistema formado por dos vigas unidas mediante un par de rotación, como se muestra en la Fig. 2.4. Esta

unión permite rotación relativa alrededor de un punto  $P$  común a los dos cuerpos. Es decir, las ecuaciones de restricción para este par cinemático se obtienen obligando a los puntos  $P^1$  y  $P^2$  a coincidir en todo momento.

$$\mathbf{r}_P^1 = \mathbf{r}_P^2 \tag{2.43}$$

o bien

$$\mathbf{r}_P^1 - \mathbf{r}_P^2 = \mathbf{0} \tag{2.44}$$

$$\mathbf{R}^1 + \mathbf{A}^1 \bar{\mathbf{u}}_P^1 - \mathbf{R}^2 - \mathbf{A}^2 \bar{\mathbf{u}}_P^2 = \mathbf{0} \tag{2.45}$$

$$\mathbf{R}^1 + \mathbf{A}^1 (\bar{\mathbf{u}}_{P^0}^1 + \mathbf{S}_P^1 \mathbf{q}_f^1) - \mathbf{R}^2 - \mathbf{A}^2 (\bar{\mathbf{u}}_{P^0}^2 - \mathbf{S}_P^2 \mathbf{q}_f^2) = \mathbf{0} \tag{2.46}$$

Ecuaciones vectoriales que equivalen, por tanto, a dos escalares. Es decir, un par de rotación genera dos ecuaciones de restricción, y por tanto, como es bien conocido, elimina dos grados de libertad del sistema. Ecuaciones similares a las anteriores se pueden encontrar en la literatura para cualquier tipo de restricción cinemática (Nikravesh, 1988; Shabana, 1989; Haug, 1989). El sistema de ecuaciones de restricción de la Ec. (2.42) se puede escribir de forma compacta como

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0} \tag{2.47}$$

Una vez obtenidas las expresiones de la energía cinética, de la energía potencial de deformación, y de las ecuaciones de restricción cinemáticas, en función de las coordenadas generalizadas del problema, se formularán, en el siguiente apartado, las ecuaciones del movimiento, usando un planteamiento energético.

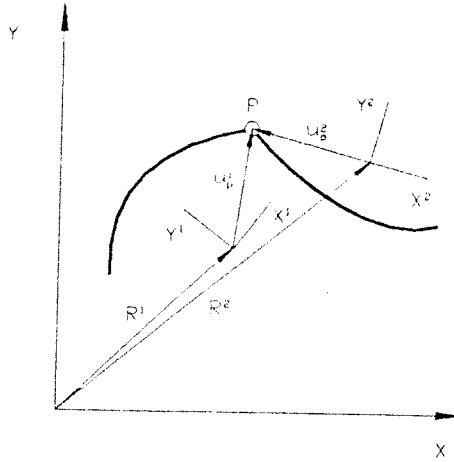


Figura 2.4: Par de rotación

## 2.7 Ecuaciones del movimiento

Las ecuaciones de Lagrange para cada cuerpo  $i$  del mecanismo con restricciones tienen la siguiente expresión :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^i}{\partial \dot{q}^i} \right)^T - \left( \frac{\partial T^i}{\partial q^i} \right)^T + \left( \frac{\partial U^i}{\partial q^i} \right)^T + C_{q^i}^T \lambda = Q_e^i \quad (2.48)$$

donde  $\lambda$  es el vector de multiplicadores de Lagrange,  $Q_e^i$  es el vector de fuerzas externas generalizadas, y  $C_{q^i}$  es la submatriz de la matriz jacobiana de las restricciones correspondiente a las coordenadas del cuerpo  $i$ . Las filas de la matriz jacobiana son las derivadas de cada una de las ecuaciones de restricción cinemáticas con respecto a las coordenadas del sistema:

$$C_q = \left( C_{q^1} \quad C_{q^2} \quad \dots \quad C_{q^{nb}} \right) \quad (2.49)$$

donde

$$\left(\mathcal{C} \mathbf{q}^i\right)_{jk} = \left(\frac{\partial C_j}{\partial q_k^i}\right) \quad j = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, n(i) \quad (2.50)$$

donde  $n(i)$  es el número de coordenadas del cuerpo  $i$ , suma de las tres coordenadas de referencia, las dos componentes de  $\mathbf{R}^i$  y  $\theta^i$ , más las coordenadas elásticas  $\mathbf{q}_f^i$  cuyo número puede ser distinto para cada cuerpo. El número de componentes de  $\mathbf{q}_f^i$  se elige dependiendo de la geometría y condiciones de carga de cada elemento elástico.

Usando la expresión general de la energía cinética de la Ec. (2.30), se pueden escribir los dos primeros términos del primer miembro de Ec. (2.48) como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^i}\right)^T - \left(\frac{\partial T^i}{\partial \mathbf{q}^i}\right)^T = \mathbf{M}^i \ddot{\mathbf{q}}^i + \dot{\mathbf{M}}^i \dot{\mathbf{q}}^i - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^i} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^{iT} \mathbf{M}^i \dot{\mathbf{q}}^i\right)\right)^T \quad (2.51)$$

o bien

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^i}\right)^T - \left(\frac{\partial T^i}{\partial \mathbf{q}^i}\right)^T = \mathbf{M}^i \ddot{\mathbf{q}}^i - \mathbf{Q}_v^i \quad (2.52)$$

donde se ha definido un vector  $\mathbf{Q}_v^i$  como

$$\mathbf{Q}_v^i = -\dot{\mathbf{M}}^i \dot{\mathbf{q}}^i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^i} \left(\dot{\mathbf{q}}^{iT} \mathbf{M}^i \dot{\mathbf{q}}^i\right)\right)^T \quad (2.53)$$

Este vector representa las fuerzas de inercia centrífugas y de Coriolis y es, por tanto, un vector de fuerzas de inercia dependientes de la velocidad, por lo que también se le conoce como vector de velocidades cuadráticas.

Usando la definición de la energía de deformación expresada en la Ec. (2.41), puede escribirse el vector de fuerzas elásticas generalizadas representado en el tercer término del primer miembro de la Ec. (2.48)



como

$$\left(\frac{\partial U^i}{\partial q^i}\right)^T = K^i q^i - Q_r^i \quad (2.54)$$

donde se ha definido  $Q_r^i$  como un vector de fuerzas elásticas no lineales, que solamente es distinto de cero cuando la matriz de rigidez  $K^i$  no es constante.

Sustituyendo las Ecs. (2.52) y (2.54) en la Ec. (2.48), se obtiene la siguiente ecuación matricial del movimiento de un cuerpo del sistema multicuerpo flexible.

$$M^i \ddot{q}^i + K^i q^i + C_{q^i}^T \lambda = Q_e^i + Q_v^i + Q_r^i \quad (2.55)$$

En los tres siguientes apartados se discutirán diferentes formulaciones de las fuerzas elásticas generalizadas.

## 2.8 Formulación lineal

La formulación lineal (**L**) supone que tanto los desplazamientos debidos a las deformaciones como estas mismas, permanecen pequeños, de forma que el término de segundo orden de la relación deformación-desplazamiento puede ser despreciado. Haciendo uso de esta hipótesis, la expresión de la energía de deformación puede escribirse como

$$U^i = \frac{1}{2} \int_0^{L^i} E^i A^i \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^i}\right)^2 dx^i + \frac{1}{2} \int_0^{L^i} E^i I^i \left(\frac{\partial^2 v^i}{\partial x^{i2}}\right)^2 dx^i \quad (2.56)$$

la cual, haciendo uso del campo de desplazamientos supuestos, puede reescribirse como

$$U^i = \frac{1}{2} (q^{iT} K_l^i q^i) \quad (2.57)$$

en la que  $K_l$  es la matriz de rigidez constante. Consecuentemente el vector de fuerzas elásticas no lineales  $Q_r$  es nulo, y el vector de fuerzas elásticas resultante es lineal como se muestra en la siguiente expresión:

$$\left(\frac{\partial U^i}{\partial q^i}\right)^T = K_l^i q^i \quad (2.58)$$

En el caso de la formulación lineal, el sistema de ecuaciones del movimiento se reduce a

$$M^i \ddot{q}^i + K_l^i q^i + C_q^T \lambda = Q_c^i + Q_v^i \quad (2.59)$$

## 2.9 Primera formulación no lineal

La formulación no lineal NL1 (Turcic y Midha, 1984; Bakr y Shabana, 1986; Liou y Erdman, 1989) retiene el término no lineal de tercer orden de la energía de deformación expresada en la Ec. (2.38). En este caso, la energía de deformación se puede escribir como

$$\begin{aligned} U^i &= \frac{1}{2} \int_0^{L^i} E^i A^i \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^i}\right)^2 dx^i + \frac{1}{2} \int_0^{L^i} E^i I^i \left(\frac{\partial^2 v^i}{\partial x^{i2}}\right)^2 dx^i \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{L^i} E^i A^i \frac{\partial u^i}{\partial x^i} \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^i}\right)^2 dx^i \end{aligned} \quad (2.60)$$

que puede escribirse de forma compacta como

$$U^i = \frac{1}{2} (q^{iT} K_l^i q^i + q^{iT} K_g^i q^i) \quad (2.61)$$

donde  $K_g^i$  es conocida en la literatura como *matriz de rigidez geométrica*, y depende linealmente de las coordenadas elásticas axiales.

Son dos las hipótesis básicas que se usan en el procedimiento presentado en este apartado. En primer lugar, se desprecia el término de cuarto-orden de la expresión de la energía de deformación. En segundo lugar, se desprecian las derivadas de la matriz de rigidez geométrica  $K_g^i$  con respecto a las coordenadas elásticas. A la vista de estas hipótesis, se tiene que

$$\left(\frac{\partial U^i}{\partial q^i}\right)^T = (K_l^i + K_g^i) q^i \quad (2.62)$$

Por tanto, la matriz de rigidez del cuerpo deformable consta de dos partes: la matriz constante  $K_l^i$  y la matriz de primer orden  $K_g^i$ . Las ecuaciones del movimiento que incluyen el efecto de las no linealidades geométricas elásticas se pueden obtener añadiendo simplemente la matriz de rigidez geométrica  $K_g^i$  a la matriz de rigidez lineal  $K_l^i$  en la Ec. (2.59), conduciendo a

$$M^i \ddot{q}^i + (K_l^i + K_g^i) q^i + C_{q^i}^T \lambda = Q_e^i + Q_v^i \quad (2.63)$$

Este procedimiento puede ser fácilmente desarrollado en un programa de análisis de multicuerpos flexibles. Para un gran número de aplicaciones los resultados que se obtienen son de una aproximación aceptable. Sin embargo, tiene dos graves inconvenientes:

1. Generalmente, los valores de las rigideces axiales son varios órdenes de magnitud mayores que los de las rigideces transversales. Consecuentemente, los desplazamientos elásticos en la dirección transversal tienen amplitudes mucho mayores y frecuencias mucho más bajas que los desplazamientos elásticos en la dirección longitudinal. Por esta razón, puede resultar aconsejable, en muchas aplicaciones prácticas, despreciar los desplazamientos longitudinales debidos a la deformación. Ello no modificaría sustancialmente la respuesta, pero sí aumentaría considerablemente la eficiencia computacional, ya que el paso de tiempo para la integración numérica está en relación inversa con las frecuencias más altas que intervienen en la respuesta. En el procedimiento presentado en este apartado, sin embargo, la matriz de rigidez geométrica depende de las coordenadas elásticas axiales, y por tanto se convertiría en la matriz

nula si se desprecian los desplazamientos axiales, reduciéndose la formulación a la presentada en el apartado anterior.

- Además, la aproximación usada en la formulación NL1 puede no ser suficiente conduciendo a respuestas erróneas para algunas aplicaciones prácticas, como se comprobará en el capítulo de resultados numéricos. Para estos casos es necesario una formulación con un mayor grado de aproximación, como los dos procedimientos que se presentan a continuación y que han sido desarrollados en esta tesis.

## 2.10 Segunda formulación no lineal

La formulación no lineal NL2 considera la expresión general para la energía de deformación mostrada en la Ec. (2.38), que puede reescribirse como

$$U^i = \frac{1}{2}(\mathbf{q}^{iT} \mathbf{K}_l^i \mathbf{q}^i + \mathbf{q}^{iT} \mathbf{K}_g^i \mathbf{q}^i + \mathbf{q}^{iT} \mathbf{K}_h^i \mathbf{q}^i) \quad (2.64)$$

donde  $\mathbf{K}_h^i$  es una matriz de rigidez no lineal de segundo orden. La ecuación anterior conduce a

$$\left(\frac{\partial U^i}{\partial \mathbf{q}^i}\right)^T = (\mathbf{K}_l^i + \mathbf{K}_g^i + \mathbf{K}_h^i) \mathbf{q}^i - \mathbf{Q}_r^i \quad (2.65)$$

donde

$$\bar{\mathbf{Q}}_r^i = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{q}^{iT} \left(\frac{\partial \mathbf{K}_{nl}^i}{\partial q_1^i}\right) \mathbf{q}^i \\ \vdots \\ \mathbf{q}^{iT} \left(\frac{\partial \mathbf{K}_{nl}^i}{\partial q_{m^i}^i}\right) \mathbf{q}^i \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

en la cual  $\mathbf{K}_{nl}^i = \mathbf{K}_g^i + \mathbf{K}_h^i$ , y  $m^i$  es el número de coordenadas elásticas del cuerpo que se esté considerando.

Este procedimiento, al igual que el anterior, puede ser desarrollado fácilmente en un programa comercial de multicuerpos flexibles. Se necesita, solamente, añadir la matriz de rigidez no lineal  $K_{nl}^i$  y el vector de fuerzas elásticas no lineales  $Q_r^i$  a la ecuación del movimiento de la formulación lineal definida en la Ec. (2.59). Ello conduce a

$$M^i \ddot{q}^i + (K_l^i + K_g^i + K_h^i) q^i + C_{q^i}^T \lambda = Q_e^i + Q_v^i + Q_r^i \quad (2.67)$$

Es importante resaltar que la diferencia entre la formulación no lineal NL2, presentada en este apartado, y la formulación no lineal NL1 del apartado anterior es debida a la inclusión de la matriz de rigidez de segundo-orden  $K_h^i$  y del vector no lineal de fuerzas elásticas  $Q_r^i$ . Esta diferencia conduce a que los desplazamientos longitudinales sean distintos para ambas formulaciones. En la formulación NL2 la vibración longitudinal tiene lugar debido a dos efectos; uno, las deformaciones causadas por las fuerzas axiales, que es el único considerado en la formulación NL1, y el otro el efecto del "acortamiento" por flexión, conocido en la literatura inglesa como *foreshortening*: cuando un cuerpo flexa, los puntos de dicho cuerpo tienden a desplazarse longitudinalmente, con objeto de no variar la longitud de la viga. Este desplazamiento por *foreshortening* sigue la expresión:

$$u_{fs}^i = -\frac{1}{2} \int_{x_o^i}^{x^i} \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^i} \right)^2 dx^i \quad (2.68)$$

donde  $x_o^i$  es el punto de la viga con desplazamiento longitudinal nulo que se haya tomado como referencia. Por tanto, las funciones de forma del desplazamiento longitudinal dependen de las funciones de forma del desplazamiento transversal, a través de la ecuación anterior. Para poder representar correctamente el desplazamiento longitudinal de los puntos de la viga se necesitan un gran número de funciones de forma axiales (Mayo y Domínguez, 1991a, 1991b, 1992). Este hecho hace que el proceso sea, no solamente muy costoso computacionalmente, sino también muy dependiente del tipo de funciones de forma axiales. Con objeto de resolver este problema, se propone una nueva formulación no lineal NL3 en el siguiente apartado.

## 2.11 Tercera formulación no lineal

Debido a los problemas asociados con la representación del desplazamiento longitudinal en la formulación no lineal NL2, se ha desarrollado un nuevo procedimiento que distingue entre el desplazamiento longitudinal debido a la deformación axial, denotado como  $s^i$ , y el desplazamiento longitudinal causado por la deflexión de la viga,  $u_{fs}^i$ . Los desplazamientos longitudinales y transversales,  $u^i$  and  $v^i$ , están relacionados a través de la expresión:

$$\begin{aligned} u^i &= s^i + u_{fs}^i \\ &= s^i - \frac{1}{2} \int_{x_0^i}^{x^i} \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^i} \right)^2 dx^i \end{aligned} \quad (2.69)$$

Las ecuaciones del movimiento se escriben en términos de  $s^i$  y  $v^i$ , en lugar de  $u^i$  y  $v^i$  ya que es más sencillo suponer un campo de desplazamiento para  $s^i$  que para  $u^i$ . En lo que sigue se supondrá, por simplificar la formulación y sin pérdida de generalidad, que el eje de abscisas del sistema de coordenadas asociado al cuerpo  $i$ ,  $X^i$ , coincide con el eje indeformado de la viga. Teniendo ésto en cuenta, se puede dividir el vector desplazamiento debido a la deformación en dos vectores desplazamientos:

$$\bar{w}^i(x^i, t) = \bar{w}^{*i} + \bar{w}_{fs}^i \quad (2.70)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{w}^{*i} &= \begin{pmatrix} s^i \\ v^i \end{pmatrix} \\ \bar{w}_{fs}^i &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \int_{x_0^i}^{x^i} \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^i} \right)^2 dx^i \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El primero de estos vectores se expresa fácilmente en función de las nuevas coordenadas elásticas generalizadas del cuerpo ya que el campo

de desplazamientos supuestos para  $\bar{w}^{*i}$  se puede expresar como

$$\bar{w}^{*i}(x^i, t) = S^i(x^i) q_f^i(t) \quad (2.71)$$

Para expresar el segundo vector,  $\bar{w}_{f,s}^i$ , hay que aislar el desplazamiento transversal  $v^i$ . Si  $S^i$  y  $q_f^i$  se separan en sus componentes axiales y transversales de acuerdo con

$$\bar{w}^{*i} = \begin{pmatrix} S_{,a}^i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S_{,t}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{f,a}^i \\ q_{f,t}^i \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

se puede escribir que

$$\int_{x_0^i}^{x^i} \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^i} \right)^2 dx^i = q_{f,t}^{i,T} \left( \int_{x_0^i}^{x^i} \left( \frac{\partial S_{,t}^i}{\partial x^i} \right)^T \left( \frac{\partial S_{,t}^i}{\partial x^i} \right) dx^i \right) q_{f,t}^i \quad (2.73)$$

Definiendo una nueva matriz  $H_t^i$  como

$$H_t^i = \int_{x_0^i}^{x^i} \left( \frac{\partial S_{,t}^i}{\partial x^i} \right)^T \left( \frac{\partial S_{,t}^i}{\partial x^i} \right) dx^i \quad (2.74)$$

se reescribe la Ec. (2.73) de forma compacta como

$$\int_{x_0^i}^{x^i} \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^i} \right)^2 dx^i = q_{f,t}^{i,T} H_t^i q_{f,t}^i \quad (2.75)$$

Llenando con ceros las filas y las columnas correspondientes a las coordenadas axiales, se puede escribir la expresión anterior en función del vector de coordenadas elásticas generalizadas del cuerpo:

$$\int_{x_0^i}^{x^i} \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^i} \right)^2 dx^i = q_f^{i,T} H^i q_f^i \quad (2.76)$$

Sustituyendo las Ecs. (2.71) y (2.76) en la Ec. (2.70) se obtiene

$$\bar{w}^i(x^i, t) = S^i q_f^i - \frac{1}{2} e_1 (q_f^{iT} H^i q_f^i) \quad (2.77)$$

donde  $e_1$  es el vector unidad  $[1 \ 0]^T$ . En la ecuación anterior se expresa el vector de desplazamientos debidos a la deformación en función de las coordenadas elásticas generalizadas del cuerpo  $i$ .

Si se reescribe la expresión general de la energía de deformación de la Ec. (2.38) en términos de  $s^i$  y  $v^i$ , se obtiene la siguiente expresión más simple:

$$U^i = \frac{1}{2} \int_0^{L^i} E^i A^i \left( \frac{\partial s^i}{\partial x^i} \right)^2 dx^i + \frac{1}{2} \int_0^{L^i} E^i I^i \left( \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^{i2}} \right)^2 dx^i \quad (2.78)$$

Comparando la Ec. (2.78), que representa la energía de deformación con todos los términos geoméricamente no lineales según la formulación NL3, con la Ec. (2.56) para la formulación lineal, se observa que tienen la misma forma pero con  $u^i$  reemplazado por  $s^i$ .

Usando la Ec. (2.71), la energía de deformación de la Ec. (2.78) se puede formular como

$$U^i = \frac{1}{2} (q^{iT} K_L^i q^i) \quad (2.79)$$

que tiene exactamente la misma forma que la formulación lineal aunque su significado es diferente, porque las coordenadas elásticas representan diferentes magnitudes físicas. Es muy importante resaltar que la Ec. (2.79) representa la energía de deformación expresada en la Ec. (2.38), es decir, tiene en cuenta las no linealidades geométricas, y lo consigue a través de una *matriz de rigidez constante*  $K_L^i$ .

Aunque se consigue simplificar la energía de deformación, esta formulación exige un nuevo planteamiento para la energía ciética, ya que el vector de posición de un punto arbitrario se puede escribir en términos



de  $s^i$  y  $v^i$ , o lo que es lo mismo de  $\bar{w}^{*i}$  y  $\bar{w}_{fs}^i$ , como

$$\begin{aligned} r^i &= R^i + A^i \bar{u}^i \\ &= R^i + A^i (\bar{u}_o^i + \bar{w}^{*i}) + A^i \bar{w}_{fs}^i \\ &= R^i + A^i (\bar{u}_o^i + S^i q_f^i) - \frac{1}{2} a^i (q_f^i{}^T H^i q_f^i) \end{aligned} \quad (2.80)$$

donde  $a^i$  es la primera columna de la matriz de transformación  $A^i$ . Derivando la expresión anterior con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{r}^i = \dot{R}^i + A_\theta^i \bar{u}^i \dot{\theta}^i + A^i S^i \dot{q}_f^i - a^i (q_f^i{}^T H^i \dot{q}_f^i) \quad (2.81)$$

que escrito matricialmente da lugar a

$$\begin{aligned} \dot{r}^i &= \left( I_2 \quad A_\theta^i (\bar{u}_o^i + S^i q_f^i) \quad A^i S^i \right) \begin{pmatrix} \dot{R}^i \\ \dot{\theta}^i \\ \dot{q}_f^i \end{pmatrix} \\ &+ \left( 0 \quad -\frac{1}{2} a_\theta^i (q_f^i{}^T H^i q_f^i) \quad -a^i q_f^i{}^T H^i \right) \begin{pmatrix} \dot{R}^i \\ \dot{\theta}^i \\ \dot{q}_f^i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.82)$$

o, de forma compacta, a

$$\dot{r}^i = L^i \dot{q}_f^i + L_{fs}^i \dot{q}_f^i \quad (2.83)$$

donde  $L^i$  tiene la misma expresión que en la Ec. (2.27) y

$$L_{fs}^i = \left( 0 \quad -\frac{1}{2} a_\theta^i (q_f^i{}^T H^i q_f^i) \quad -a^i q_f^i{}^T H^i \right) \quad (2.84)$$

Es evidente que tanto la expresión de la matriz de masa como del vector de velocidades cuadráticas serán diferentes de las de las formulaciones anteriores. La energía cinética se puede expresar como

$$T^i = \frac{1}{2} \dot{q}^{iT} \int_{V^i} \rho^i (L^{iT} + L_{f_s}^{iT}) (L^i + L_{f_s}^i) dV^i \dot{q}^i \quad (2.85)$$

o

$$T^i = \frac{1}{2} \dot{q}^{iT} M^{*i} \dot{q}^i \quad (2.86)$$

con

$$M^{*i} = M^i + M_{f_s}^i \quad (2.87)$$

donde  $M^i$  está expresada en la Ec. (2.31) y

$$M_{f_s}^i = \int_{V^i} \rho^i L_{f_s}^{iT} L_{f_s}^i dV^i + \int_{V^i} \rho^i L^{iT} L_{f_s}^i dV^i + \int_{V^i} \rho^i L_{f_s}^{iT} L^i dV^i \quad (2.88)$$

Las ecuaciones de restricción deben ser también expresadas en términos de las nuevas coordenadas generalizadas del problema. Considerando el mismo ejemplo de las dos vigas unidas mediante un par de rotación que se utilizó en el apartado 2.6, para la formulación NL3, la Ec. (2.45) se reescribe como

$$\begin{aligned} R^1 + A^1 (\bar{u}_{P_o}^1 + S_P^1 q_f^1) - \frac{1}{2} a^1 (q_f^{1T} H^1 q_f^1) - \\ R^2 - A^2 (\bar{u}_{P_o}^2 - S_P^2 q_f^2) + \frac{1}{2} a^2 (q_f^{2T} H^2 q_f^2) = 0 \end{aligned} \quad (2.89)$$

Esto, a su vez, da lugar a una expresión modificada de la matriz jacobiana de las restricciones.

La forma final de las ecuaciones del movimiento puede escribirse como

$$M^{*i}\ddot{q}^i + K_L^i q^i + C_{q^i}^{*T} \lambda = Q_c^i + Q_v^i \quad (2.90)$$

donde todas las no linealidades geométricas han sido transferidas desde los coeficientes de rigidez y fuerzas elásticas no lineales a las fuerzas de inercia y de reacción, que ya eran originalmente no lineales, mientras que la matriz  $K_L^i$  permanece constante y  $Q_r^i$  nulo.

Comparadas a las dos formulaciones no lineales anteriores, presentadas en los apartados 2.9 y 2.10, esta formulación apartado tiene un grado de aproximación mayor que la formulación NL1, y es equivalente a la formulación NL2 ya que ambas usan la misma expresión de la energía de deformación. La formulación propuesta en esta sección, sin embargo, es computacionalmente mucho más eficiente que las otras dos. El hecho de que su matriz de rigidez no depende de las funciones de forma axiales puede ser tremendamente ventajoso en la si-mu-la-ción dinámica de muchos sistemas mecánicos en los que, debido a las características del problema, se puedan despreciar los desplazamientos axiales.

## 2.12 Comentarios finales

El objetivo principal de este capítulo es presentar unas nuevas formulaciones que incluyan los efectos de las no linealidades geométricas elásticas. También se ha realizado una comparación entre las formulaciones desarrolladas en esta tesis y otros procedimientos propuestos por otros autores con diferentes grados de aproximación en la expresión del tensor de deformaciones. Las ecuaciones del movimiento se han formulado usando un planteamiento energético. A continuación se utiliza un planteamiento newtoniano, basado en el equilibrio de un elemento diferencial sujeto a las leyes de comportamiento y a las relaciones de compatibilidad de las deformaciones, para estudiar los esfuerzos implicados en cada una de las formulaciones.

La formulación lineal L plantea el equilibrio en la posición indeformada, como se muestra en la Fig. 2.5

$$m\ddot{x} - N^l = q_x \quad (2.91)$$

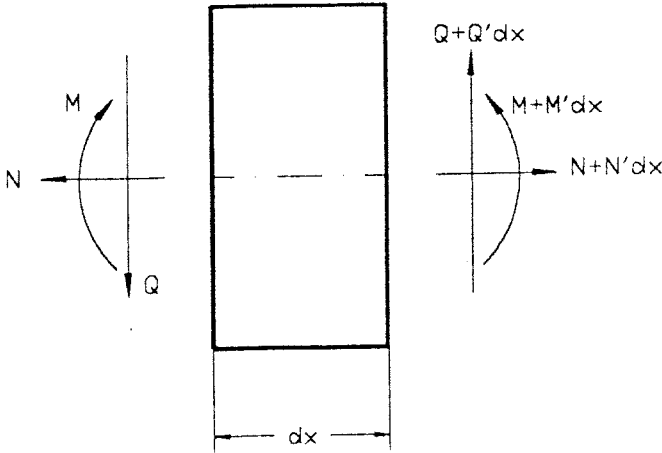


Figura 2.5: Fuerzas elásticas actuando sobre un elemento diferencial según la teoría lineal

$$m\ddot{y} - Q' = q_y \quad (2.92)$$

$$Q + M' = 0 \quad (2.93)$$

donde  $N$  son los esfuerzos axiales,  $Q$  los cortantes,  $M$  los flectores,  $m$  la masa por unidad de longitud,  $q_x$ ,  $q_y$  la carga distribuida y el símbolo “ $'$ ” indica derivada con respecto a la coordenada espacial  $x$ . La formulación lineal utiliza las leyes de comportamiento lineales

$$N = EAu' \quad (2.94)$$

$$M = EIv'' \quad (2.95)$$

Sustituyendo las leyes de comportamiento en las ecuaciones de equilibrio se llega a

$$m\ddot{x} - EAu'' = q_x \quad (2.96)$$

$$m\ddot{y} + EIv^{IV} = q_y \quad (2.97)$$

donde, debido a que el propósito de este apartado es solamente la comparación de términos, se admite por comodidad de escritura que  $E$ ,  $A$ , e  $I$  son independientes de la coordenada espacial.

Las formulaciones geoméricamente no lineales describen el comportamiento de aquellos sistemas en los que los desplazamientos son lo suficientemente grandes para que la variación de su geometría sea significativa, por lo que el equilibrio de fuerzas debe plantearse sobre la posición deformada de la rebanada, como se muestra en la Fig. 2.6.

$$m\ddot{x} - N' = q_x \quad (2.98)$$

$$m\ddot{y} - Q' = q_y \quad (2.99)$$

$$Q + M' - Nv' = 0 \quad (2.100)$$

En la primera formulación no lineal NL1 se considera el equilibrio en la posición deformada, aunque se siguen utilizando las leyes de comportamiento lineales. Con este procedimiento se obtienen las ecuaciones

$$m\ddot{x} - EAu'' = q_x \quad (2.101)$$

$$m\ddot{y} + EIv^{IV} - EA(u'v')' = q_y \quad (2.102)$$

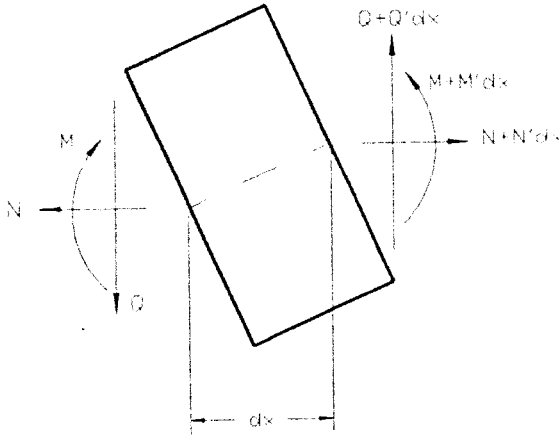


Figura 2.6: Fuerzas elásticas actuando sobre un elemento diferencial según la teoría no lineal

Esta formulación considera la influencia de la fuerza axial en la rigidez transversal, pero no tiene en cuenta el “acortamiento” por flexión. Desprecia la parte no lineal de la fuerza axial ya que desprecia los términos de segundo orden de la deformación, y el único término de rigidez no lineal que aparece es el debido al momento producido por el esfuerzo axial.

La segunda formulación no lineal NL2 además de considerar el equilibrio de fuerzas en la posición deformada, para que el planteamiento sea consistente utiliza las leyes de comportamiento que resultan de no despreciar los términos cuadráticos de la deformación:

$$N = EA(u' + \frac{1}{2}v'^2) \quad (2.103)$$

$$M = EIv'' \quad (2.104)$$

que sustituidas en las de equilibrio dan lugar a

$$m\ddot{x} - EAu'' - EA v'v'' = q_x \quad (2.105)$$

$$m\ddot{y} + EIv^{IV} - EA(u'v')' + \frac{3}{2}EA v'^2 v'' = q_y \quad (2.106)$$

donde se observan dos nuevos términos de rigidez no lineales debidos al esfuerzo axial no lineal.

Del desarrollo anterior se desprende que los desplazamientos longitudinales  $u$  usados en las formulaciones NL1 y NL2 representan distintas cantidades. Si un cuerpo del mecanismo flexa, en la formulación NL1 los puntos no se desplazan longitudinalmente por esta causa, mientras que la formulación NL2 sí contempla este desplazamiento. Esta diferencia hace que la formulación NL2 sea más general pero también que su deformada sea más difícil de representar mediante funciones de forma por el acoplamiento existente entre el desplazamiento longitudinal y transversal. Por esta causa surge la formulación NL3. Estas dos formulaciones, NL2 y NL3, se estudian en profundidad en los dos próximos capítulos.

## Capítulo 3

# Formulación con Elementos Finitos de la Viga en el Caso Plano: NL2

La teoría de vigas ha sido formulada por muchos autores usando el Método de los Elementos Finitos (MEF) (Desai y Abel, 1972; Bathe, 1982). Su aplicación a sistemas multicuerpos flexibles comenzó a ser objeto de estudio en 1979 (Song, 1979; Song y Haug, 1980). Desde entonces se han desarrollado diversas formulaciones para abordar este problema (Wehage y Haug, 1982; Kim y Vanderploeg, 1986; Cardona et al., 1988; Avello et al., 1991), algunas de las cuales han sido el origen de conocidos programas comerciales como DADS, ADAMS, MECANO, etc. Una de estas formulaciones es la propuesta por Shabana (1982, 1989), cuya principal ventaja es que usa un número muy pequeño de coordenadas para simular el comportamiento dinámico de los sistemas multicuerpos flexibles. Su principal inconveniente radica en ser solamente aplicable a problemas en los que sea válida la teoría de pequeños desplazamientos y deformaciones. Bakr y Shabana (1986) propusieron una ampliación de la formulación para tener en cuenta el efecto de las no linealidades geométricas causadas por deflexiones lo suficientemente grandes para ocasionar cambios significativos en la geometría de la viga. Sin embargo, como se ha expuesto en el capítulo anterior, este método realiza una serie de hipótesis simplificadoras.

Con objeto de hacer más general la formulación que predice el comportamiento de los sistemas multicuerpos flexibles, se ha desarrollado una



aproximación que incluye el efecto de otras fuerzas cuya contribución a la respuesta puede ser significativa cuando se producen grandes desplazamientos debidos a las deformaciones. En este capítulo y el siguiente se proponen dos variantes de esta aproximación, que se han denominado, como en el capítulo anterior, formulaciones NL2 y NL3.

La formulación NL2 es una extensión de la formulación de Bakr y Shabana (1986), consistente en la inclusión de una matriz de rigidez más general. Este procedimiento es fácilmente desarrollable en un programa de elementos finitos para sistemas mecánicos formados por cuerpos rígidos y flexibles. Teóricamente este procedimiento es correcto, sin embargo, numéricamente presenta una serie de problemas que conllevan la necesidad de utilizar un gran número de elementos y coordenadas, por lo que resulta computacionalmente muy costoso. Por ello, se ha desarrollado la formulación alternativa NL3, que simula el comportamiento de los sistemas multicuerpos flexibles con pequeñas deformaciones, pero grandes desplazamientos, con un número razonablemente pequeño de elementos y coordenadas. Este método utiliza unas coordenadas que trasladan las no linealidades geométricas desde los términos de rigidez a los términos de inercia y a las ecuaciones de restricción.

La presentación se ha dividido en dos capítulos, uno incluye la formulación NL2, y otro la NL3. En este primero se describe la NL2 usando el método de los elementos finitos. Se comienza presentando, en los tres primeros apartados, los elementos necesarios para describir adecuadamente la posición de cualquier punto de un cuerpo. Primero se presentan los cuatro sistemas de coordenadas necesarios para definir el problema. A continuación, en el punto 3.2, se muestra la forma de aplicar las transformaciones necesarias para llegar a definir la posición del punto en un sistema de coordenadas global de referencia, como la composición de la posición del origen de un sistema de coordenadas ligado al cuerpo y la posición con respecto a este sistema de coordenadas. En el tercer apartado se definen algunas condiciones, denominadas de referencia, que deben imponerse para que el campo de desplazamientos con respecto al sistema de coordenadas ligado al cuerpo sea único. Tras exponer estos conceptos y definiciones generales, se pasa a formular las ecuaciones del movimiento de la viga en el caso plano. Para ello se sigue un planteamiento energético. Se obtiene, en primer lugar, la energía cinética de un elemento, de la cual se derivan la matriz de masa elemental y el vector de fuerzas de inercia dependientes de la velocidad. En el siguiente apartado se obtienen, mediante ensamblado de las matrices y

vectores elementales, la matriz de masa y el vector de fuerzas de inercia para la viga completa. Aunque las expresiones de estos términos de inercia son idénticas a las correspondientes a la formulación L, recogidas en el trabajo de Shabana (1989), se reproducen en este capítulo para que exista continuidad en el desarrollo. No ocurre lo mismo con los términos de rigidez. Estos son completamente distintos y han sido desarrollados en este trabajo. Para ello se realiza un estudio de la energía potencial, análogo al de la energía cinética, obteniéndose el vector de fuerzas elásticas, primero para un elemento, y posteriormente para el cuerpo. De ello se trata en los apartados 3.6 y 3.7. Finalmente, se presentan las ecuaciones del movimiento del sistema cuyas componentes se han desarrollado en los apartados previos. Muchos de los conceptos presentados en este capítulo son comunes a las dos formulaciones geoméricamente no lineales, haciéndose referencia a ellos en el siguiente capítulo, cuando se desarrolle la formulación NL3 para elementos finitos.

### 3.1 Sistemas de coordenadas

La formulación con elementos finitos del análisis dinámico de cuerpos flexibles que experimentan grandes traslaciones y giros se puede realizar usando dos procedimientos conceptualmente diferentes. Ambos incorporan el uso de una teoría estándar de elementos finitos para la discretización del cuerpo flexible, pero difieren en el sistema de coordenadas elegido.

El primer procedimiento, conocido como la formulación Lagrangiana actualizada, usa un sistema de coordenadas rígidamente unido a cada elemento. El sistema de coordenadas se traslada y gira con el elemento, y por tanto, comparte su movimiento de sólido rígido. Esta formulación supone que el movimiento de sólido rígido puede ser descrito por las funciones de forma del elemento. Debido a que éstas pueden ser usadas solamente para describir pequeñas rotaciones, en el caso de vigas, placas y láminas, se requiere que en cada paso de tiempo la rotación del elemento sea pequeña. En caso contrario, la aproximación conduciría a resultados erróneos. El estado deformado en un instante de tiempo se usa como nuevo estado de referencia para el paso de tiempo siguiente. Ello exige la actualización de los sistemas de coordenadas elementales en cada incremento de tiempo. Esta formulación produce ecuaciones elementales simples.

A pesar de la sencillez de las ecuaciones elementales, el uso de la formulación Lagrangiana actualizada no es conveniente en el análisis de los sistemas multicuerpos flexibles por diversas razones. En primer lugar, la descripción de las rotaciones relativas entre dos cuerpos interconectados, especialmente en el análisis tridimensional, es muy difícil cuando se usan coordenadas nodales para describir el movimiento como sólido rígido. Además, el uso de coordenadas nodales para describir los grandes desplazamientos como sólido rígido conduce a una linealización, ya que las coordenadas nodales del elemento no pueden usarse para describir las rotaciones finitas. El grado de linealización depende del paso de tiempo usado en la integración numérica. Consecuentemente, este procedimiento requiere generalmente un paso de tiempo muy pequeño para obtener una solución aceptable, por lo que resulta computacionalmente ineficiente.

Por estas razones, la formulación más comúnmente empleada en el análisis de los sistemas multicuerpos flexibles es la conocida como formulación Lagrangiana total. En la formulación Lagrangiana total, conocida también como Lagrangiana estacionaria, se define un sistema de coordenadas global fijo, con respecto al cual se realizan la diferenciación y la integración de las ecuaciones del elemento finito. La configuración de cada elemento en el sistema de coordenadas global se define usando tres sistemas de coordenadas adicionales que se encuentran representados en la Fig. 3.1. Estos se conocen como: sistema de coordenadas del cuerpo, sistema de coordenadas elemental, y sistema de coordenadas elemental intermedio.

El *sistema de coordenadas del cuerpo*  $X^i Y^i$ , donde el superíndice  $i$  hace referencia al cuerpo al que pertenece, se traslada y gira con cada cuerpo o componente del mecanismo, y por tanto, comparte su movimiento de sólido rígido. Este sistema de coordenadas no ha de estar necesariamente unido a un punto del cuerpo. De hecho, se suelen utilizar sistemas de referencia flotantes como se discutirá en un apartado posterior.

El *sistema de coordenadas elemental*  $X^{ij} Y^{ij}$  sí se halla rígidamente unido a un punto de cada elemento finito. Consecuentemente, se traslada y gira con él. Los superíndices  $ij$  hacen referencia al elemento  $j$  perteneciente al cuerpo  $i$ .

En tercer lugar, se define el *sistema de coordenadas elemental intermedio*  $\bar{X}^{ij} \bar{Y}^{ij}$  de forma que su origen coincide con el origen del sistema de coordenadas del cuerpo  $X^i Y^i$  y la orientación de sus ejes se elige de manera que sean inicialmente paralelos a los ejes del sistema de coordena-

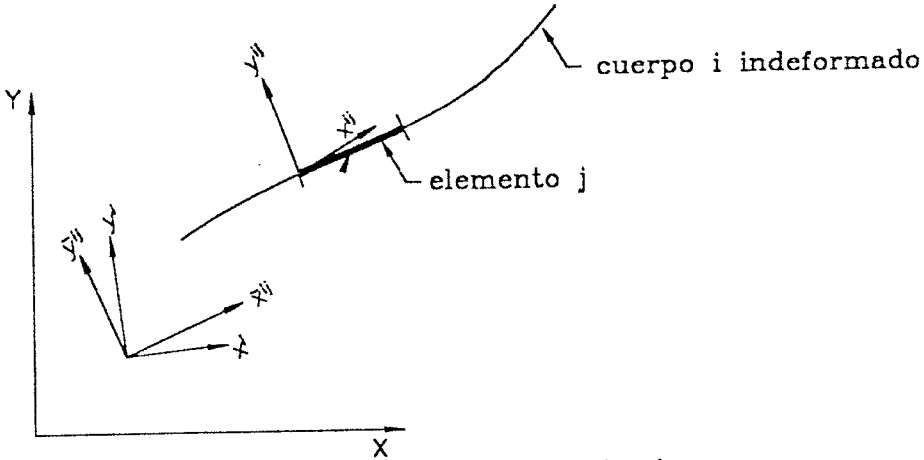


Figura 3.1: Sistemas de coordenadas

das elemental  $X^{ij}Y^{ij}$ , moviéndose posteriormente solidariamente con el sistema del cuerpo  $X^iY^i$ . Es decir, en todo momento el sistema de coordenadas elemental intermedio tiene una orientación fija con respecto al sistema de coordenadas del cuerpo. El ángulo entre ellos coincide con el formado inicialmente por el sistema de coordenadas elemental en relación al  $X^iY^i$ . La definición de este sistema permite relacionar fácilmente el sistema de coordenadas del elemento con el ligado al cuerpo.

### 3.2 Definición de la posición

Para representar la posición de un punto cualquiera de un elemento  $j$  del cuerpo  $i$  en el sistema de coordenadas global, es necesario realizar una serie de transformaciones de coordenadas, pasando la definición de la posición del punto del sistema elemental al global, a través de los sistemas intermedios. Estas transformaciones se representan en la Fig. 3.2 y se definen a continuación. Para una mejor comprensión de la nomenclatura, en la Tabla 3.1 se enumeran las denominaciones de algunas magnitudes en los distintos sistemas de coordenadas.

En primer lugar, en el sistema de coordenadas elemental  $X^{ij}Y^{ij}$ , la

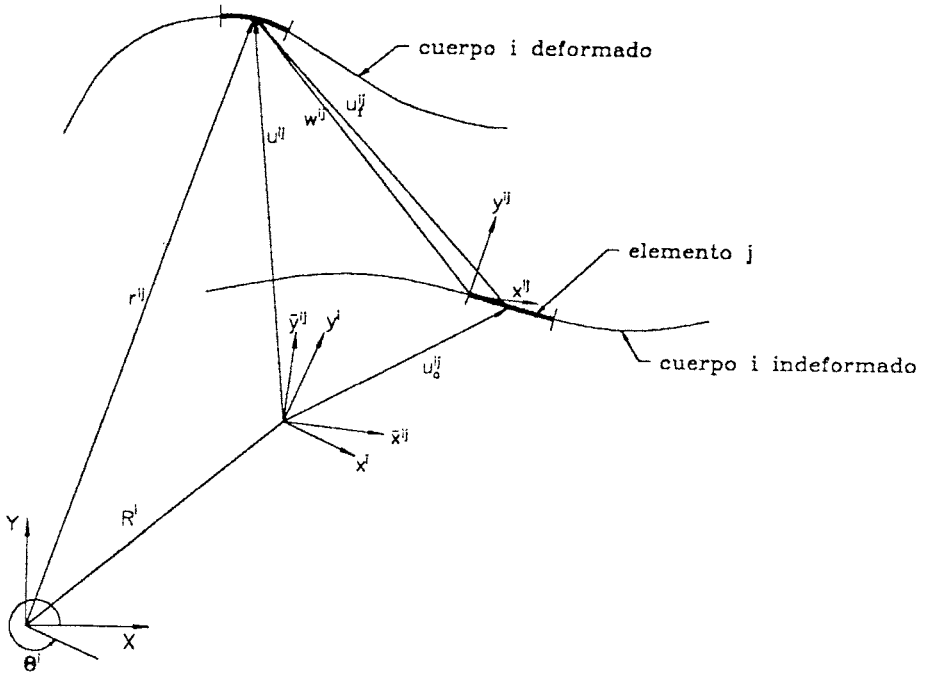


Figura 3.2: Posición de un punto

$XY$	$X^iY^i$	$\bar{X}^{ij}\bar{Y}^{ij}$	$X^{ij}Y^{ij}$
$u^{ij}$	$\bar{u}^{ij}$	$\bar{w}^{ij}$	
$u_o^{ij}$	$\bar{u}_o^{ij}$	$\bar{w}_o^{ij}$	
$u_f^{ij}$	$\bar{u}_f^{ij}$	$\bar{w}_f^{ij}$	$w_f^{ij}$

Tabla 3.1: Notación en los distintos sistemas de coordenadas

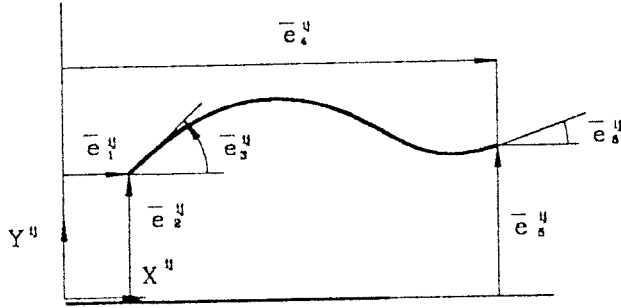


Figura 3.3: Coordenadas nodales del elemento viga en el sistema  $X^{ij}Y^{ij}$

posición  $w$  de un punto perteneciente al elemento  $j$  del cuerpo  $i$  puede expresarse en función de las coordenadas nodales del elemento a través de la expresión:

$$w^{ij} = S^{ij}e^{ij} \tag{3.1}$$

donde  $S^{ij}$  es la matriz de funciones de forma y  $e^{ij}$  es el vector de coordenadas nodales. La Fig. 3.3 muestra, como ejemplo, el vector de coordenadas nodales de un elemento viga, con seis componentes que representan los desplazamientos y el giro en cada nodo.

Las funciones de forma no pueden ser cualesquiera. El campo de desplazamientos supuestos a través de ellas debe satisfacer los requerimientos de convergencia que garanticen que la solución se aproximará a la exacta a medida que el número de elementos aumenta. Las condiciones de convergencia pueden resumirse en tres (Desai y Abel, 1972; Cook, 1981):

1. El campo de desplazamientos del elemento debe ser continuo. La condición de continuidad se consigue fácilmente usando polinomios

como funciones de interpolación.

2. *El campo de desplazamientos debe incluir los estados de deformación constante del elemento.* Básicamente, esta condición establece que deben existir combinaciones de las coordenadas generalizadas que hagan que todos los puntos del elemento experimenten la misma deformación. Tal combinación debe existir para cualquier deformación posible.
3. *El campo de desplazamientos debe incluir los desplazamientos de sólido rígido del elemento.* Un desplazamiento de sólido rígido es la deformación más elemental que puede experimentar un elemento. Este requerimiento se puede considerar como un caso especial de los requerimientos de deformación constante, en el cual la deformación es nula.

Por esta última razón, es decir, debido a que las funciones de forma elementales pueden describir grandes traslaciones como sólido rígido, es posible describir la posición del punto en el sistema de coordenadas elemental intermedio. Así, la Ec. (3.1) puede reescribirse como

$$\bar{w}^{ij} = S^{ij} \bar{e}^{ij} \quad (3.2)$$

donde  $\bar{w}^{ij}$  y  $\bar{e}^{ij}$  se definen con respecto al sistema de coordenadas  $\bar{X}^{ij} \bar{Y}^{ij}$ , como se muestra en la Fig. 3.4 para el elemento viga.

Como el sistema elemental intermedio tiene una orientación fija con respecto al sistema de coordenadas ligado al cuerpo, se puede expresar el vector de coordenadas nodales  $\bar{e}^{ij}$  como

$$\bar{e}^{ij} = \bar{C}^{ij} q_n^{ij} \quad (3.3)$$

donde  $\bar{C}^{ij}$  es una matriz de transformación ortogonal constante y  $q_n^{ij}$  es el vector de coordenadas nodales del elemento  $j$  definido con respecto al sistema de coordenadas del cuerpo  $i$ .

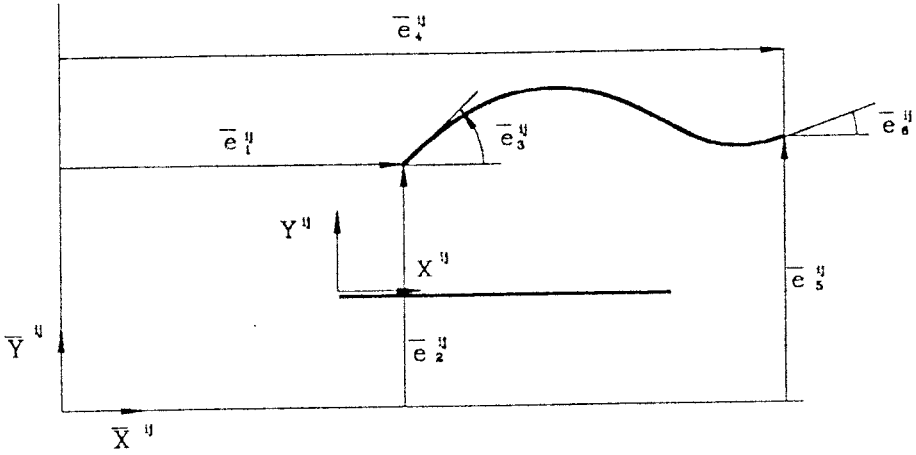


Figura 3.4: Coordenadas nodales con respecto al sistema de coordenadas elemental intermedio

A partir de las consideraciones anteriores el vector posición  $\bar{u}^{ij}$  se puede definir en el sistema de coordenadas del cuerpo  $i$  como

$$\begin{aligned}
 \bar{u}^{ij} &= C^{ij} \bar{w}^{ij} \\
 &= C^{ij} S^{ij} \bar{e}^{ij} \\
 &= C^{ij} S^{ij} \bar{C}^{ij} q_n^{ij}
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

donde se han hecho uso de las expresiones (3.2) y (3.3).

En el análisis bidimensional  $C^{ij}$  es una matriz de giro de  $2 \times 2$ , definida por

$$C^{ij} = \begin{pmatrix} \cos \beta^{ij} & -\text{sen} \beta^{ij} \\ \text{sen} \beta^{ij} & \cos \beta^{ij} \end{pmatrix}
 \tag{3.5}$$



Donde  $\beta^{ij}$  es el ángulo formado por los sistemas  $X^iY^i$  y  $\bar{X}^{ij}\bar{Y}^{ij}$ . La matriz de transformación  $\bar{C}^{ij}$  tiene una dimensión que es igual al número de coordenadas nodales del elemento. Para el elemento viga con dos nodos y tres grados de libertad por nodo, la matriz  $\bar{C}^{ij}$  está definida como

$$\bar{C}^{ij} = \begin{pmatrix} \cos\beta^{ij} & \text{sen}\beta^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\beta^{ij} & \cos\beta^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\beta^{ij} & \text{sen}\beta^{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}\beta^{ij} & \cos\beta^{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

El sistema de coordenadas  $X^iY^i$  del cuerpo  $i$  es único para todos los elementos de éste, y sirve, por tanto, para expresar la conectividad entre dichos elementos. El vector de coordenadas nodales del elemento  $q_n^{ij}$  se relaciona con las coordenadas nodales del cuerpo  $q_n^i$  a través de la expresión

$$q_n^{ij} = B_1^{ij} q_n^i \quad (3.7)$$

donde  $B_1^{ij}$  es una transformación booleana constante cuya misión es expresar la conectividad del elemento  $j$ .

En la Fig. 3.5 se muestra el ejemplo de un cuerpo  $i$  dividido en dos elementos viga que comparten un nodo, pudiéndose considerar esta unión rígida. En este ejemplo, los vectores  $q_n^{ij}$  contienen cada uno seis componentes, pudiéndose representar como

$$q_n^{ij} = [q_{n1}^{ij} \quad q_{n2}^{ij} \quad q_{n3}^{ij} \quad q_{n4}^{ij} \quad q_{n5}^{ij} \quad q_{n6}^{ij}]^T \quad (3.8)$$

mientras que el vector  $q_n^i$  tiene nueve componentes definidas como

$$q_n^i = [q_{n1}^i \quad q_{n2}^i \quad q_{n3}^i \quad q_{n4}^i \quad q_{n5}^i \quad q_{n6}^i \quad q_{n7}^i \quad q_{n8}^i \quad q_{n9}^i]^T \quad (3.9)$$

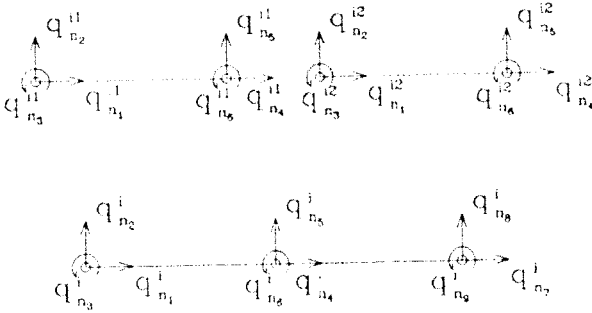


Figura 3.5: Relación entre las coordenadas nodales en el elemento y las coordenadas nodales en el cuerpo

La Ec. (3.7) puede particularizarse para el primer elemento como

$$\mathbf{q}_n^{i1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{q}_n^i \quad (3.10)$$

obteniéndose de forma similar la del segundo elemento.

Sustituyendo la Ec. (3.7) en la Ec. (3.4) se puede escribir el vector de posición de un punto del elemento  $j$  relativo al sistema ligado al cuerpo  $i$  en términos de las coordenadas nodales de dicho cuerpo como

$$\bar{\mathbf{u}}^{ij} = \mathbf{C}^{ij} \mathbf{S}^{ij} \bar{\mathbf{C}}^{ij} \mathbf{B}_1^{ij} \mathbf{q}_n^i \quad (3.11)$$

o de forma compacta como

$$\bar{\mathbf{u}}^{ij} = \mathbf{N}^{ij} \mathbf{q}_n^i \quad (3.12)$$

donde  $\mathbf{N}^{ij}$  está definida como

$$\mathbf{N}^{ij} = \mathbf{C}^{ij} \mathbf{S}^{ij} \bar{\mathbf{C}}^{ij} \mathbf{B}_1^{ij} \quad (3.13)$$

En dinámica de sistemas multicuerpos flexibles es conveniente separar el movimiento global de un punto en un movimiento como sólido rígido del cuerpo y el sistema ligado a él y un movimiento debido a la deformación con respecto a dicho sistema. Teniendo en cuenta esta separación se puede definir la posición de un punto arbitrario del elemento  $j$  perteneciente al cuerpo  $i$ , como se muestra en la Fig. 3.2, por

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{ij} &= \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}^{ij} \\ &= \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \mathbf{N}^{ij} \mathbf{q}_n^i \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde  $\mathbf{R}^i$  es el vector de posición del origen del sistema ligado al cuerpo, y  $\mathbf{A}^i$  es la matriz de giro que transforma un vectos del sistema ligado al cuerpo al sistema global de referencia, estando definida como:

$$\mathbf{A}^i = \begin{pmatrix} \cos\theta^i & -\text{sen}\theta^i \\ \text{sen}\theta^i & \cos\theta^i \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

siendo  $\theta^i$  la orientación del sistema de coordenadas ligado al cuerpo. Al conjunto de coordenadas formado por  $\theta^i$  y por las componentes del vector  $\mathbf{R}^i$ , que describen la posición del sistema ligado al cuerpo, se les denomina *coordenadas de referencia*:

$$\mathbf{q}_r^i = \left[ \mathbf{R}^{iT} \theta^i \right]^T \quad (3.16)$$

En la Ec. (3.14) están tratados conjuntamente el movimiento del punto debido al giro como sólido rígido del cuerpo indeformado y el movimiento generado por la deformación de dicho cuerpo. El proceso de separación se puede hacer dividiendo en dos el vector de coordenadas nodales:

$$\mathbf{q}_n^i = \mathbf{q}_o^i + \bar{\mathbf{q}}_f^i \tag{3.17}$$

donde  $\mathbf{q}_o^i$  es el vector de coordenadas nodales en el estado indeformado y  $\bar{\mathbf{q}}_f^i$  es el vector asociado a los desplazamientos debidos a la deformación. Sustituyendo la Ec. (3.17) en la Ec. (3.14) se puede escribir

$$\mathbf{r}^{ij} = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \mathbf{N}^{ij} (\mathbf{q}_o^i + \bar{\mathbf{q}}_f^i) \tag{3.18}$$

### 3.3 Condiciones de referencia

En principio, el sistema de coordenadas ligado al cuerpo puede definirse con diversos tipos de ligaduras entre cuerpo y sistema. Cada forma de ligar el sistema al cuerpo supondrá una posición relativa entre ellos y una forma de evolución de ésta a lo largo del tiempo. La ligadura más simple que se ocurre, que no por ello tiene que producir los mejores resultados, consiste en fijar el origen del sistema de coordenadas a un punto del cuerpo y obligarlo a moverse solidariamente con el mismo. Dependiendo de las condiciones de ligadura que se adopten, la solución será más o menos exacta o requerirá mayor o menor esfuerzo computacional. Por ello, es importante buscar aquellas que produzcan mejores resultados.

La definición de esta relación entre sistema y cuerpo se realiza mediante la imposición de ciertas condiciones, denominadas *condiciones de referencia*.

En general, de acuerdo con Agrawal y Shabana (1985), las condiciones de referencia pueden dividirse en tres grandes grupos:

1. *Ejes rígidamente unidos a un punto* del cuerpo deformable: Esta primera aproximación consiste en fijar materialmente los ejes a algún punto del componente. Esto implica que la traslación y la rotación de este punto relativa a los ejes de referencia son nulas.

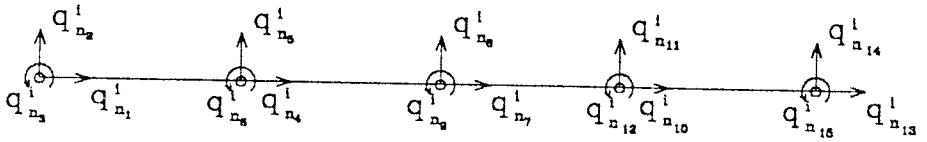


Figura 3.6: Discretización de la biela

A este tipo corresponde el caso de la Fig. 3.7(a), donde se ha considerado que la biela es el único elemento flexible del mecanismo. Si se considera ésta dividida en cuatro elementos viga, como se muestra en la Fig. 3.6, las condiciones de referencia son:

$$\bar{q}_{f7} = 0 \quad (3.19)$$

$$\bar{q}_{f8} = 0 \quad (3.20)$$

$$\bar{q}_{f9} = 0 \quad (3.21)$$

donde  $\bar{q}_{f7}$ ,  $\bar{q}_{f8}$  y  $\bar{q}_{f9}$  son las coordenadas nodales asociadas a la deformación del nodo central.

2. *Ejes principales del cuerpo deformable*: Son aquellos que resultan de minimizar la energía cinética relativa del cuerpo deformable con respecto a un observador estacionado en el cuerpo. Estos ejes no están ligados a ningún punto del cuerpo, sino que constituyen un sistema de referencia flotante.

La principal ventaja de este planteamiento radica en la simplificación de la matriz de masa del elemento, puesto que disminuye el acoplamiento entre los términos de sólido rígido y deformable de la misma.

3. *Otros ejes de referencia* Además de las dos anteriores existen otros muchos conjuntos de condiciones de referencia, que pueden ser más idóneos para determinadas aplicaciones. Por ejemplo, puede resultar más eficiente usar condiciones de contorno de viga simplemente apoyada, que tienen asociados, como en el caso anterior, un sistema de referencia flotante.

En la Fig. 3.7(c) se ha situado el sistema de referencia de forma que sean nulas las componentes transversales de  $\mathbf{q}_o^i$  de todos los nodos y la longitudinal del punto medio. Las condiciones de referencia se pueden escribir como:

$$\bar{q}_{f1} = 0 \tag{3.22}$$

$$\bar{q}_{f2} = 0 \tag{3.23}$$

$$\bar{q}_{f14} = 0 \tag{3.24}$$

En general, puede decirse que el conjunto de condiciones de referencia no es único, pero sí debe ser consistente con las restricciones cinemáticas impuestas en el contorno del cuerpo deformable.

La imposición de las condiciones de referencia implica una transformación de coordenadas en la que al vector de coordenadas nodales  $\bar{\mathbf{q}}_f^i$  se le hace cumplir dichas condiciones, transformándolo en  $\mathbf{q}_f^i$ . Estos están relacionados mediante:

$$\bar{\mathbf{q}}_f^i = \mathbf{B}_2^i \mathbf{q}_f^i \tag{3.25}$$

donde  $\mathbf{B}_2^i$  es una transformación lineal que surge de imponer las condiciones de referencia. A  $\mathbf{q}_f^i$  que está asociado a los desplazamientos por deformación, también se le denomina vector de *coordenadas nodales elásticas*.

Sustituyendo la Ec. (3.25) en la Ec. (3.18) se obtiene que

$$\mathbf{r}^{ij} = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \mathbf{N}^{ij} (\mathbf{q}_o^i + \mathbf{B}_2^i \mathbf{q}_f^i) \tag{3.26}$$

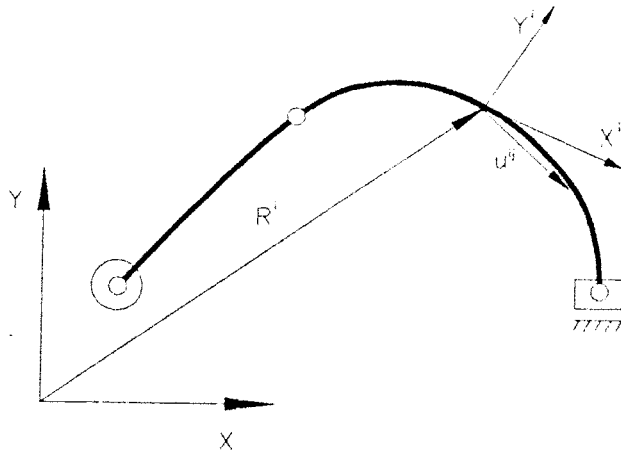


Figura 3.7: Condiciones de referencia

Ecuación que expresa en coordenadas globales de referencia el vector de posición de un punto arbitrario del elemento  $j$  perteneciente al cuerpo  $i$  en función de las coordenadas de referencia y de las coordenadas elásticas del cuerpo  $i$ .

Es importante notar que, en unos casos, las condiciones de referencia definen totalmente la posición inicial y la evolución del movimiento del sistema ligado al cuerpo, como ocurre cuando se usan los ejes principales del cuerpo deformable. En otros, sólo definen la evolución del movimiento, siendo necesario imponer alguna otra condición para definir totalmente la posición relativa del cuerpo con respecto al sistema de coordenadas ligado a él. Esta última condición suele quedar a elección del analista que sitúa el sistema de coordenadas ligado al cuerpo de forma que sea sencilla la descripción de la geometría del cuerpo. Distintas localizaciones iniciales del sistema hacen que los vectores  $\mathbf{q}_0^i$  que describen la posición de los puntos del cuerpo flexible en el estado indeformado varíen, pero no afectan a los vectores de deformaciones nodales  $\mathbf{q}_j^i$ .

La Ec. (3.26) tiene el inconveniente grave de que el número de nodos, y por tanto de coordenadas nodales, puede ser muy grande. Con objeto de disminuir el número de coordenadas, se usa el método de la *Síntesis de*

*Componentes.* Esta técnica, desarrollada inicialmente por Hurty (1965) para el estudio dinámico de subestructuras, consiste en representar el comportamiento dinámico de la subestructura por medio de algunos de sus modos de vibración. El conjunto de ecuaciones correspondiente está desacoplado y su solución se obtiene fácilmente. Esta idea fue aplicada por primera vez a la simulación dinámica de los mecanismos flexibles por Shabana (1982). Pero en este campo, los modos de vibración libre no desacoplan las ecuaciones del movimiento debido al acoplamiento entre los desplazamientos elásticos y los desplazamientos de sólido rígido. Además, los modos de vibración libre de un cuerpo del mecanismo dependen de la configuración del sistema, por lo que varían continuamente, siendo esta variación especialmente significativa cuando el sistema es de cadena abierta. Consecuentemente, no hay motivo para preferir los modos de vibración libre sobre otros campos de desplazamientos. Se supone que la deformación del componente  $i$  se puede expresar como una combinación lineal de vectores de Ritz, según

$$\mathbf{q}_f^i = \overline{\mathbf{B}}_m^i \mathbf{p}_f^i \quad (3.27)$$

donde  $\overline{\mathbf{B}}_m^i$  es una matriz cuyas columnas son los vectores de Ritz, y  $\mathbf{p}_f^i$  es el vector de coordenadas modales. La expresión (3.26) se transforma en:

$$\mathbf{r}^{ij} = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \mathbf{N}^{ij} \left( \mathbf{q}_o^i + \mathbf{B}_2^i \overline{\mathbf{B}}_m^i \mathbf{p}_f^i \right) \quad (3.28)$$

El número de componentes de  $\mathbf{p}_f^i$  debe ser seleccionado de forma que se pueda obtener una buena aproximación de la deformada. El resultado debe ser un número de componentes sensiblemente inferior al de  $\mathbf{q}_f^i$ .

Los vectores de Ritz son los modos estáticos y/o dinámicos calculados con las condiciones de contorno impuestas por las condiciones de referencia. En resumen, la selección de las coordenadas de referencia no es arbitraria, ya que su elección equivale a seleccionar el conjunto de modos de vibración del cuerpo. Mediante una buena elección es posible aproximar adecuadamente los desplazamientos del cuerpo usando un conjunto pequeño de vectores de Ritz. Por ejemplo, en la aplicación del mecanismo biela-manivela las condiciones de referencia de viga simplemente



apoyada conducen a un menor número de coordenadas que cualquiera de las otras opciones, pues las formas de sus modos de vibración se asemejan más a la deformada de la biela.

### 3.4 Energía cinética de un elemento

La energía cinética del cuerpo  $i$  se obtiene a partir de la energía cinética de cada uno de sus elementos.

$$T^{ij} = \frac{1}{2} \int_{V^{ij}} \rho^{ij} \dot{\mathbf{r}}^{ijT} \dot{\mathbf{r}}^{ij} dV^{ij} \quad (3.29)$$

donde  $\rho^{ij}$  y  $V^{ij}$  son, respectivamente, la densidad y el volumen del elemento  $j$ , y  $\dot{\mathbf{r}}^{ij}$  es la derivada con respecto al tiempo del vector de posición expresado en la Ec. (3.28):

$$\dot{\mathbf{r}}^{ij} = \dot{\mathbf{R}}^i + A_\theta^i \bar{\mathbf{u}}^{ij} \dot{\theta}^i + A^i N^{ij} B_2^i \bar{\mathbf{B}}_m^i \dot{\mathbf{p}}_f^i \quad (3.30)$$

siendo la matriz ortogonal  $A_\theta^i$  la derivada de  $A^i$  con respecto a la coordenada rotacional del cuerpo  $i$ :

$$A_\theta^i = \begin{pmatrix} -\text{scn}\theta^i & -\text{cos}\theta^i \\ \text{cos}\theta^i & -\text{sen}\theta^i \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Agrupando en un solo vector todas las coordenadas del cuerpo  $i$ , la Ec. (3.30) se puede expresar como

$$\dot{\mathbf{r}}^{ij} = \begin{pmatrix} I_2 & A_\theta^i N^{ij} (\mathbf{q}_\theta^i + B_2^i \bar{\mathbf{B}}_m^i \mathbf{p}_f^i) & A^i N^{ij} B_2^i \bar{\mathbf{B}}_m^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{R}}^i \\ \dot{\theta}^i \\ \dot{\mathbf{p}}_f^i \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

donde  $I_2$  es la matriz identidad de orden 2. La ecuación anterior se expresa de forma condensada como

$$\dot{r}^{ij} = L^{ij} \dot{q}^i \quad (3.33)$$

donde  $\dot{q}^i$  es la derivada temporal del vector de coordenadas generalizadas del cuerpo  $i$  definido como

$$q^i = \left[ R^{iT} \theta^{iT} p_f^{iT} \right]^T \quad (3.34)$$

Usando la Ec. (3.33), la energía cinética del elemento  $j$  se puede reescribir como:

$$T^{ij} = \frac{1}{2} \dot{q}^{iT} M^{ij} \dot{q}^i \quad (3.35)$$

donde  $M^{ij}$  es la matriz de masa del elemento  $j$  perteneciente al cuerpo  $i$ , expresada según

$$M^{ij} = \int_{V^{ij}} \rho^{ij} L^{ijT} L^{ij} dV^{ij} \quad (3.36)$$

Explícitamente,  $M^{ij}$  se representa como

$$M^{ij} = \int_{V^{ij}} \rho^{ij} \begin{pmatrix} I_2 & A_\theta^i \bar{u}^{ij} & A^i N^{ij} B_2^i \bar{B}_m^i \\ \bar{u}^{ijT} \bar{u}^{ij} & \bar{u}^{ijT} \tilde{I} N^{ij} B_2^i \bar{B}_m^i & \\ \text{simétrica} & \bar{B}_m^i{}^T B_2^i{}^T N^{ijT} N^{ij} B_2^i \bar{B}_m^i & \end{pmatrix} dV^{ij} \quad (3.37)$$

donde  $\tilde{I}$  se define como:

$$\tilde{I} = A_\theta^i{}^T A^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

La matriz de masa  $M^{ij}$  puede representarse condensadamente como

$$M^{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_{RR} & \mathbf{m}_{R\theta} & \mathbf{m}_{Rf} \\ & m_{\theta\theta} & \mathbf{m}_{\theta f} \\ \text{simétrica} & & \mathbf{m}_{ff} \end{pmatrix}^{ij} \quad (3.39)$$

Esta matriz pone de manifiesto la diferencias entre las propiedades inerciales de los sistemas deformables que experimentan grandes rotaciones y las propiedades inerciales de los mecanismos formados por elementos rígidos o los sistemas estructurales. De las submatrices que aparecen en la matriz de masa, solamente las dos submatrices  $\mathbf{m}_{RR}^{ij}$  y  $\mathbf{m}_{ff}^{ij}$  asociadas con las coordenadas traslacionales de referencia y las coordenadas elásticas, respectivamente, son invariantes. Las otras submatrices, sin embargo, dependen de las coordenadas generalizadas del sistema, y por tanto, son funciones implícitas del tiempo. La submatriz  $\mathbf{m}_{RR}^{ij}$  representa la matriz de masa asociada a las coordenadas traslacionales de referencia. Esta matriz es diagonal, y los elementos diagonales igualan la masa total del cuerpo, similarmente a lo que ocurre en dinámica de sólidos rígidos. La matriz  $\mathbf{m}_{\theta\theta}^{ij}$  está asociada a la coordenada rotacional de referencia y representa, por tanto, el tensor de inercia del cuerpo. Mientras que en dinámica de mecanismos rígidos el tensor de inercia, expresado en el sistema de coordenadas ligado al cuerpo, es constante, en dinámica de sistemas multicuerpos deformables el tensor de inercia depende de la deformación elástica, y es por tanto función implícita del tiempo. La submatriz  $\mathbf{m}_{R\theta}^{ij}$  y su traspuesta  $\mathbf{m}_{\theta R}^{ij}$  acoplan la traslación y la rotación de sólido rígido del sistema de coordenadas ligado al cuerpo. En dinámica de mecanismos rígidos este acoplamiento desaparece si el origen del sistema de coordenadas del cuerpo está rígidamente unido al centro de gravedad del mismo, reduciéndose, en este caso, la matriz de masa a una matriz diagonal. En dinámica de mecanismos flexibles la localización del origen del sistema de coordenadas ligado al cuerpo es indiferente a este respecto, ya que, debido a la deformación, la submatriz  $\mathbf{m}_{R\theta}^{ij}$  es siempre no nula. Las submatrices  $\mathbf{m}_{Rf}^{ij}$ ,  $\mathbf{m}_{\theta f}^{ij}$  y sus traspuestas acoplan el movimiento de sólido rígido del sistema de coordenadas ligado al cuerpo con la deformación elástica de los elementos. Estos términos son importantes y no pueden, en general, despreciarse, como hicieron algunos autores como primera aproximación a los problemas de mecanismos flexibles (Sunada y Dubowsky, 1981, 1983; Naganathan y Soni, 1988). Es importante

destacar que la submatriz  $\mathbf{m}_{\theta f}^{ij}$  no sólo acopla la rotación como sólido rígido con la deformación, sino que además acopla la deformación longitudinal con la deformación transversal y este acoplamiento se realiza a través de la rotación como sólido rígido. Matemáticamente es posible comprobar este hecho si se subdivide el vector  $\bar{\mathbf{u}}^{ij}$  en sus componentes longitudinal y transversal.

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{\theta f}^{ij T} &= \bar{\mathbf{B}}_m^i T \mathbf{B}_2^i T N^{ij T} \bar{\mathbf{I}}^T \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_l^{ij} \\ \bar{\mathbf{u}}_t^{ij} \end{pmatrix} \\ &= \bar{\mathbf{B}}_m^i T \mathbf{B}_2^i T N^{ij T} \begin{pmatrix} -\bar{\mathbf{u}}_l^{ij} \\ \bar{\mathbf{u}}_t^{ij} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.40)$$

En los resultados numéricos se comprobará que, para un gran número de aplicaciones, la influencia de este acoplamiento es despreciable. Por último, la submatriz  $\mathbf{m}_{ff}^{ij}$  es idéntica a la matriz de masa convencional que aparece en problemas de dinámica de sistemas estructurales.

Al ser los sistemas multicuerpos flexibles sistemas de inercia variable, la matriz de masa debe ser actualizada en cada paso de tiempo. Sin embargo, es posible escribir la matriz de masa en función de tres invariantes, los cuales haciendo uso de la Ec. 3.13 pueden escribirse como:

$$\bar{\mathbf{S}}^{ij} = \mathbf{C}^{ij} \left[ \int_{V^{ij}} \rho^{ij} \mathbf{S}^{ij} dV^{ij} \right] \bar{\mathbf{C}}^{ij} \mathbf{B}_1^{ij} \quad (3.41)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}^{ij} = \mathbf{B}_1^{ij T} \bar{\mathbf{C}}^{ij T} \left[ \int_{V^{ij}} \rho^{ij} \mathbf{S}^{ij T} \bar{\mathbf{I}} \mathbf{S}^{ij} dV^{ij} \right] \bar{\mathbf{C}}^{ij} \mathbf{B}_1^{ij} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{S}_{ff}^{ij} = \mathbf{B}_1^{ij T} \bar{\mathbf{C}}^{ij T} \left[ \int_{V^{ij}} \rho^{ij} \mathbf{S}^{ij T} \mathbf{S}^{ij} dV^{ij} \right] \bar{\mathbf{C}}^{ij} \mathbf{B}_1^{ij} \quad (3.43)$$

Estos tres invariantes pueden calcularse una vez al comienzo del programa, lo que agiliza sustancialmente el proceso de resolución. Usando

las Ecs. (3.41), (3.42) y (3.43) la matriz de masa toma la forma:

$$M^{ij} = \begin{pmatrix} M_2^{ij} & A_\theta^i \bar{S}^{ij} q_n^i & A^i \bar{S}^{ij} B_2^i \bar{B}_m^i \\ q_n^{iT} S_{ff}^{ij} q_n^i & q_n^{iT} \tilde{S}^{ij} B_2^i \bar{B}_m^i & \\ \text{simétrica} & \bar{B}_m^i B_2^i T S_{ff}^{ij} B_2^i \bar{B}_m^i & \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

donde

$$M_2^{ij} = \begin{pmatrix} m^{ij} & 0 \\ 0 & m^{ij} \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

siendo  $m^{ij}$  la masa del elemento  $j$ .

Los términos que aparecen en la ecuación del movimiento de Lagrange de un elemento, derivados de la energía cinética, pueden escribirse usando la expresión condensada de la energía de la Ec. (3.35) como

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^{ij}}{\partial \dot{q}^i} \right)^T - \left( \frac{\partial T^{ij}}{\partial q^i} \right)^T = M^{ij} \ddot{q}^i + \dot{M}^{ij} \dot{q}^i - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial q^i} (\dot{q}^{iT} M^{ij} \dot{q}^i) \right]^T \quad (3.46)$$

La variabilidad de la matriz de masa es la causante de que aparezca un vector de fuerzas de inercia dependientes de la velocidad  $Q_v^{ij}$  definido a partir de la ecuación anterior como

$$Q_v^{ij} = -\dot{M}^{ij} \dot{q}^i + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial q^i} (\dot{q}^{iT} M^{ij} \dot{q}^i) \right]^T \quad (3.47)$$

o bien

$$Q_v^{ij} = \begin{pmatrix} A^i \bar{S}^{ij} q_n^i (\dot{\theta}^i)^2 - 2A_\theta^i \bar{S}^{ij} B_2^i \bar{B}_m^i \dot{p}_f^i \dot{\theta}^i \\ -2q_n^{iT} S_{ff}^{ij} B_2^i \bar{B}_m^i \dot{p}_f^i \dot{\theta}^i \\ \bar{B}_m^i B_2^i T S_{ff}^{ij} q_n^i (\dot{\theta}^i)^2 + 2\bar{B}_m^i B_2^i T \tilde{S}^{ij} B_2^i \bar{B}_m^i \dot{p}_f^i \dot{\theta}^i \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

A este vector también se le conoce como vector de velocidades cuadráticas.

De acuerdo con esta definición la Ec. (3.46) se reescribe como

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^{ij}}{\partial \dot{q}^i} \right)^T - \left( \frac{\partial T^{ij}}{\partial q^i} \right)^T = M^{ij} \ddot{q}^i - Q_v^{ij} \quad (3.49)$$

### 3.5 Energía cinética de la viga

La energía cinética del cuerpo  $i$  se puede determinar sumando las energías cinéticas de sus elementos, es decir,

$$T^i = \sum_{j=1}^{ne} T^{ij} \quad (3.50)$$

donde  $ne$  es el número de elementos en el que se ha discretizado el cuerpo  $i$ .

Sustituyendo la Ec. (3.35) en la Ec. (3.50) se obtiene

$$T^i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{ne} \dot{q}^{iT} M^{ij} \dot{q}^i \quad (3.51)$$

$$T^i = \frac{1}{2} \dot{q}^{iT} \left( \sum_{j=1}^{ne} M^{ij} \right) \dot{q}^i \quad (3.52)$$

$$T^i = \frac{1}{2} \dot{q}^{iT} M^i \dot{q}^i \quad (3.53)$$

Los invariantes pueden redefinirse para el cuerpo completo como la suma de los invariantes para cada elemento según

$$\bar{S}^i = \sum_{j=1}^{ne} \bar{S}^{ij} \quad (3.54)$$

$$\tilde{S}^i = \sum_{j=1}^{nc} \tilde{S}^{ij} \quad (3.55)$$

$$S_{ff}^i = \sum_{j=1}^{nc} S_{ff}^{ij} \quad (3.56)$$

con lo que la matriz de masa para el cuerpo  $i$  se puede escribir como

$$M^i = \begin{pmatrix} M_2^i & A_0^i \bar{S}^i q_n^i & A^i \bar{S}^i B_2^i \bar{B}_m^i \\ q_n^{iT} S_{ff}^i q_n^i & q_n^{iT} \tilde{S}^i B_2^i \bar{B}_m^i \\ \text{simétrica} & \bar{B}_m^{iT} B_2^i T S_{ff}^i B_2^i \bar{B}_m^i \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

donde

$$M_2^i = \begin{pmatrix} m^i & 0 \\ 0 & m^i \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

siendo  $m^i$  la masa total del cuerpo  $i$ .

El otro término que aparece en la ecuación del movimiento derivado de la energía cinética, es decir, el vector de fuerzas generalizadas dependientes de la velocidad, para el cuerpo  $i$ , puede escribirse como

$$Q_v^i = -\dot{M}^i \dot{q}^i + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} (\dot{q}^{iT} M^i \dot{q}^i) \right]^T \quad (3.59)$$

$$Q_v^i = -\sum_{j=1}^{nc} \dot{M}^{ij} \dot{q}^i + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \left( \dot{q}^{iT} \sum_{j=1}^{nc} M^{ij} \dot{q}^i \right) \right]^T \quad (3.60)$$

$$Q_v^i = \sum_{j=1}^{nc} \left( -\dot{M}^{ij} \dot{q}^i + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} (\dot{q}^{iT} M^{ij} \dot{q}^i) \right]^T \right) \quad (3.61)$$

De esta expresión se deduce inmediatamente que

$$Q_v^i = \sum_{j=1}^{nc} Q_v^{ij} \tag{3.62}$$

que usando la expresión de los invariantes para el cuerpo completo puede escribirse como

$$Q_v^i = \begin{pmatrix} A^i \bar{S}^i q_n^i (\dot{\theta}^i)^2 - 2A_{\theta}^i \bar{S}^i B_2^i \bar{B}_m^i \dot{p}_f^i \dot{\theta}^i \\ -2q_n^{iT} S_{ff}^i B_2^i \bar{B}_m^i \dot{p}_f^i \dot{\theta}^i \\ \bar{B}_m^{iT} B_2^{iT} S_{ff}^i q_n^i (\dot{\theta}^i)^2 + 2\bar{B}_m^{iT} B_2^{iT} \bar{S}^i B_2^i \bar{B}_m^i \dot{p}_f^i \dot{\theta}^i \end{pmatrix} \tag{3.63}$$

### 3.6 Energía potencial de un elemento

En el capítulo anterior se obtuvo la Ec. (2.38) que representa la energía potencial para una viga en el plano. Dicha expresión puede

ser particularizada para el caso de un elemento  $j$  perteneciente al cuerpo  $i$  según

$$U^{ij} = \frac{1}{2} \int_0^{L^{ij}} E^{ij} A^{ij} \left( \frac{\partial u^{ij}}{\partial x^{ij}} \right)^2 dx^{ij} + \frac{1}{2} \int_0^{L^{ij}} E^{ij} I^{ij} \left( \frac{\partial^2 v^{ij}}{\partial x^{ij2}} \right)^2 dx^{ij} \\ + \frac{1}{2} \int_0^{L^{ij}} E^{ij} A^{ij} \frac{\partial u^{ij}}{\partial x^{ij}} \left( \frac{\partial v^{ij}}{\partial x^{ij}} \right)^2 dx^{ij} + \frac{1}{8} \int_0^{L^{ij}} E^{ij} A^{ij} \left( \frac{\partial v^{ij}}{\partial x^{ij}} \right)^4 dx^{ij} \tag{3.64}$$

donde  $U^{ij}$  es la energía potencial del elemento  $j$ ,  $E^{ij}$  su módulo de elasticidad,  $A^{ij}$  el área de una sección,  $I^{ij}$  la inercia de dicha sección,  $L^{ij}$  la longitud del elemento, y  $x^{ij}$  la coordenada espacial a lo largo de su eje. Los desplazamientos  $u^{ij}$  y  $v^{ij}$  que aparecen en la expresión anterior se refieren a los desplazamientos, debidos a la deformación, paralelos y transversales al elemento indeformado, respectivamente, como se muestra en la Fig. 3.8. En la notación que se viene utilizando a lo largo de este capítulo, al vector cuyas componentes son dichos desplazamientos



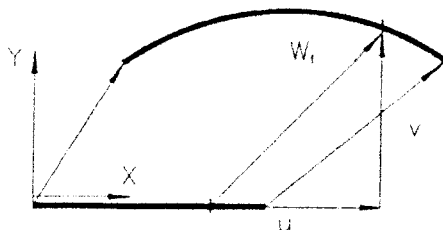


Figura 3.8: Desplazamientos en el elemento

se le denomina  $\bar{w}_f^{ij}$  y viene definido:

$$\bar{w}_f^{ij} = S^{ij} \bar{e}_f^{ij} \quad (3.65)$$

o en términos de las coordenadas modales del cuerpo  $i$  como:

$$\bar{w}_f^{ij} = S^{ij} \bar{C}^{ij} B_1^{ij} B_2^{ij} \bar{B}_m^i \mathcal{P}_f^i \quad (3.66)$$

La expresión de la energía potencial del elemento se va a dividir en tres términos. Ello permitirá posteriormente identificar tres de las formulaciones de sistemas multicuerpos flexibles que surgen dependiendo del grado de aproximación utilizado:

$$U^{ij} = U_l^{ij} + U_{nl1}^{ij} + U_{nl2}^{ij} \quad (3.67)$$

donde

$$U_l^{ij} = \frac{1}{2} \int_0^{L^{ij}} E^{ij} A^{ij} \left( \frac{\partial u^{ij}}{\partial x^{ij}} \right)^2 dx^{ij} + \frac{1}{2} \int_0^{L^{ij}} E^{ij} I^{ij} \left( \frac{\partial^2 v^{ij}}{\partial x^{ij2}} \right)^2 dx^{ij} \quad (3.68)$$

$$U_{nl1}^{ij} = \frac{1}{2} \int_0^{L^{ij}} E^{ij} A^{ij} \frac{\partial u^{ij}}{\partial x^{ij}} \left( \frac{\partial v^{ij}}{\partial x^{ij}} \right)^2 dx^{ij} \quad (3.69)$$

$$U_{nl2}^{ij} = \frac{1}{2} \int_0^{L^{ij}} \frac{1}{4} E^{ij} A^{ij} \left( \frac{\partial v^{ij}}{\partial x^{ij}} \right)^4 dx^{ij} \quad (3.70)$$

Para poder sustituir la expresión de los desplazamientos  $u^{ij}$  y  $v^{ij}$  en estas ecuaciones es necesario reescribir la Ec. 3.65 como

$$\bar{\mathbf{w}}_f^{ij} = \begin{pmatrix} u^{ij} \\ v^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_l^{ij} \\ S_t^{ij} \end{pmatrix} \bar{\mathbf{e}}_f^{ij} \quad (3.71)$$

donde  $S_l^{ij}$  y  $S_t^{ij}$  corresponden a la primera y segunda fila de la matriz  $S^{ij}$ .

### 3.6.1 Obtención de $U_l^{ij}$

Sustituyendo la Ec. (3.71) en la Ec. (3.68) se tiene

$$\begin{aligned} U_l^{ij} &= \frac{1}{2} \int_0^{L^{ij}} E^{ij} A^{ij} \bar{\mathbf{e}}_f^{ijT} \left( \frac{\partial S_l^{ij}}{\partial x^{ij}} \right)^T \left( \frac{\partial S_l^{ij}}{\partial x^{ij}} \right) \bar{\mathbf{e}}_f^{ij} dx^{ij} \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{L^{ij}} E^{ij} I^{ij} \bar{\mathbf{e}}_f^{ijT} \left( \frac{\partial^2 S_t^{ij}}{\partial x^{ij2}} \right)^T \left( \frac{\partial^2 S_t^{ij}}{\partial x^{ij2}} \right) \bar{\mathbf{e}}_f^{ij} dx^{ij} \quad (3.72) \end{aligned}$$

ecuación que puede reescribirse como

$$\begin{aligned} U_l^{ij} &= \frac{1}{2} \bar{\mathbf{e}}_f^{ijT} \left[ \int_0^{L^{ij}} E^{ij} A^{ij} \left( \frac{\partial S_l^{ij}}{\partial x^{ij}} \right)^T \left( \frac{\partial S_l^{ij}}{\partial x^{ij}} \right) dx^{ij} \right] \bar{\mathbf{e}}_f^{ij} \\ &+ \frac{1}{2} \bar{\mathbf{e}}_f^{ijT} \left[ \int_0^{L^{ij}} E^{ij} I^{ij} \left( \frac{\partial^2 S_t^{ij}}{\partial x^{ij2}} \right)^T \left( \frac{\partial^2 S_t^{ij}}{\partial x^{ij2}} \right) dx^{ij} \right] \bar{\mathbf{e}}_f^{ij} \quad (3.73) \end{aligned}$$

o, de forma compacta, como

$$U_l^{ij} = \frac{1}{2} \bar{e}_f^{ijT} \left( \bar{K}_{ff}^{ij} \right)_l \bar{e}_f^{ij} \quad (3.74)$$

donde  $\left( \bar{K}_{ff}^{ij} \right)_l$  es la bien conocida matriz de rigidez del análisis lineal definida como

$$\begin{aligned} \left( \bar{K}_{ff}^{ij} \right)_l &= \int_0^{L^{ij}} E^{ij} A^{ij} \left( \frac{\partial S_l^{ij}}{\partial x^{ij}} \right)^T \left( \frac{\partial S_l^{ij}}{\partial x^{ij}} \right) dx^{ij} \\ &+ \int_0^{L^{ij}} E^{ij} I^{ij} \left( \frac{\partial^2 S_l^{ij}}{\partial x^{ij2}} \right)^T \left( \frac{\partial^2 S_l^{ij}}{\partial x^{ij2}} \right) dx^{ij} \end{aligned} \quad (3.75)$$

En función de las coordenadas modales del cuerpo, La Ec. (3.74) se puede escribir como

$$U_l^{ij} = \frac{1}{2} p_f^{iT} \left( K_{ff}^{ij} \right)_l p_f^i \quad (3.76)$$

donde

$$\left( K_{ff}^{ij} \right)_l = \bar{B}_m^i{}^T B_2^i{}^T \left( B_1^{ijT} \bar{C}^{ijT} \left( \bar{K}_{ff}^{ij} \right)_l \bar{C}^{ij} B_1^{ij} \right) B_2^i \bar{B}_m^i \quad (3.77)$$

En función de las coordenadas del cuerpo se puede también escribir:

$$U_l^{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} R^i{}^T & \theta^i{}^T & p_f^i{}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left( K_{ff}^{ij} \right)_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^i \\ \theta^i \\ p_f^i \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

o de forma compacta como

$$U_l^{ij} = \frac{1}{2} q^i{}^T K_l^{ij} q^i \quad (3.79)$$

La matriz  $K_l^{ij}$  es la misma matriz de rigidez que aparece en la formulación de las ecuaciones del movimiento de los sistemas multicuerpos flexibles cuando sólo se admiten pequeñas deformaciones y desplazamientos.  $K_l^{ij}$  es una matriz constante y, por tanto, se verifica que

$$\left( \frac{\partial U_l^{ij}}{\partial q^i} \right)^T = K_l^{ij} q^i \quad (3.80)$$

### 3.6.2 Obtención de $U_{nl1}^{ij}$

Los términos cuadráticos de la ecuación de compatibilidad contribuyen a la energía de deformación  $U^{ij}$  con dos términos:  $U_{nl1}^{ij}$  y  $U_{nl2}^{ij}$ . El que se analiza en este apartado es el único que consideran muchos autores en sus formulaciones geoméricamente no lineales. La razón es que  $U_{nl1}^{ij}$  es un término de tercer orden que acopla los términos lineales y cuadráticos de la ecuación de compatibilidad, mientras que  $U_{nl2}^{ij}$  es un término de cuarto orden debido exclusivamente a los términos cuadráticos de la relación deformación-desplazamiento. La expresión de  $U_{nl1}^{ij}$  escrita en términos de los desplazamientos  $\bar{e}_f^{ij}$  de los nodos del elemento  $j$  es

$$U_{nl1}^{ij} = \frac{1}{2} \int_0^{l^{ij}} E^{ij} A^{ij} \left( \frac{\partial S_l^{ij}}{\partial x^{ij}} \right) \bar{e}_f^{ij} \bar{e}_f^{ijT} \left( \frac{\partial S_l^{ij}}{\partial x^{ij}} \right)^T \left( \frac{\partial S_l^{ij}}{\partial x^{ij}} \right) \bar{e}_f^{ij} dx^{ij} \quad (3.81)$$

Como el vector  $\bar{e}_f^{ij}$  depende sólo del tiempo, puede salir fuera de la integral, conduciendo a

$$U_{nl1}^{ij} = \frac{1}{2} \bar{e}_f^{ijT} \left( \int_0^{l^{ij}} E^{ij} A^{ij} \left( \frac{\partial S_l^{ij}}{\partial x^{ij}} \right) \bar{e}_f^{ij} \left( \frac{\partial S_l^{ij}}{\partial x^{ij}} \right)^T \left( \frac{\partial S_l^{ij}}{\partial x^{ij}} \right) dx^{ij} \right) \bar{e}_f^{ij} \quad (3.82)$$

que puede ser escrita matricialmente como

$$U_{nl1}^{ij} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{e}}_f^{ijT} \left( \bar{\mathbf{K}}_{ff}^{ij} \right)_g \bar{\mathbf{e}}_f^{ij} \quad (3.83)$$

donde  $\left( \bar{\mathbf{K}}_{ff}^{ij} \right)_g$  se conoce en la literatura como matriz de rigidez geométrica, y está definida por

$$\left( \bar{\mathbf{K}}_{ff}^{ij} \right)_g = \int_0^{l^{ij}} E^{ij} \Lambda^{ij} \left( \frac{\partial S_l^{ij}}{\partial x^{ij}} \right) \bar{\mathbf{e}}_f^{ij} \left( \frac{\partial S_l^{ij}}{\partial x^{ij}} \right)^T \left( \frac{\partial S_l^{ij}}{\partial x^{ij}} \right) dx^{ij} \quad (3.84)$$

Como la matriz  $\left( \bar{\mathbf{K}}_{ff}^{ij} \right)_g$  no es constante, al derivar la energía potencial para obtener los términos correspondientes de la ecuación del movimiento, la expresión usada por algunos autores (Bakr y Shabana, 1986)

$$\left( \frac{\partial U_{nl1}^{ij}}{\partial \bar{\mathbf{e}}_f^{ij}} \right)^T = \left( \bar{\mathbf{K}}_{ff}^{ij} \right)_g \bar{\mathbf{e}}_f^{ij} \quad (3.85)$$

es una simplificación, siendo la expresión completa:

$$\left( \frac{\partial U_{nl1}^{ij}}{\partial \bar{\mathbf{e}}_f^{ij}} \right)^T = \left( \bar{\mathbf{K}}_{ff}^{ij} \right)_g \bar{\mathbf{e}}_f^{ij} - \left( \bar{\mathbf{Q}}_{ff}^{ij} \right)_g \quad (3.86)$$

donde  $\left( \bar{\mathbf{Q}}_{ff}^{ij} \right)_g$  es un vector de fuerzas elásticas no lineales elemental, del que puede expresarse una componente genérica  $k$  como

$$\left[ \left( \bar{\mathbf{Q}}_{ff}^{ij} \right)_g \right]_k = \bar{\mathbf{e}}_f^{ijT} \frac{\partial \left( \bar{\mathbf{K}}_{ff}^{ij} \right)_g}{\partial \bar{\mathbf{e}}_{fk}^{ij}} \bar{\mathbf{e}}_f^{ij} \quad (3.87)$$

siendo  $\bar{c}_{fk}^{ij}$  la componente  $k$  del vector de coordenadas nodales elásticas del elemento. Las componentes de  $(\bar{Q}_{ff}^{ij})_g$  correspondientes a coordenadas que representen el desplazamiento transversal serán nulas ya que  $(\bar{K}_{ff}^{ij})_g$  depende exclusivamente de la deformación longitudinal del elemento.

Análogamente al desarrollo del término  $U_l^{ij}$ ,  $U_{nl1}^{ij}$  puede ser escrito en función de las coordenadas del cuerpo según

$$U_{nl1}^{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{iT} \mathbf{K}_g^{ij} \mathbf{q}^i \tag{3.88}$$

donde

$$\mathbf{K}_g^{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\bar{K}_{ff}^{ij})_g \end{pmatrix} \tag{3.89}$$

siendo

$$(\bar{K}_{ff}^{ij})_g = \bar{\mathbf{B}}_m^i{}^T \mathbf{B}_2^i{}^T \left( \mathbf{B}_1^{ijT} \bar{\mathbf{C}}^{ijT} (\bar{K}_{ff}^{ij})_g \bar{\mathbf{C}}^{ij} \mathbf{B}_1^{ij} \right) \mathbf{B}_2^i \bar{\mathbf{B}}_m^i \tag{3.90}$$

En la ecuación del movimiento, las fuerzas elásticas se obtienen derivando la energía potencial con respecto a las coordenadas del cuerpo, obteniéndose

$$\left( \frac{\partial U_{nl1}^{ij}}{\partial \mathbf{q}^i} \right)^T = \mathbf{K}_g^{ij} \mathbf{q}^i - \mathbf{Q}_g^{ij} \tag{3.91}$$

donde  $\mathbf{Q}_g^{ij}$  está definido por

$$\mathbf{Q}_g^{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\frac{1}{2} \bar{\mathbf{B}}_m^i{}^T \mathbf{B}_2^i{}^T \mathbf{B}_1^{ijT} \bar{\mathbf{C}}^{ijT} (\bar{Q}_{ff}^{ij})_g \end{pmatrix} \tag{3.92}$$

### 3.6.3 Obtención de $U_{nl2}^{ij}$

$U_{nl2}^{ij}$  es una energía de deformación debida exclusivamente a los términos cuadráticos de la ecuación de compatibilidad. Muchos autores desprecian esta componente de la energía frente a  $U_{nl1}^{ij}$  debido a que es de cuarto orden en las deformaciones mientras que  $U_{nl1}^{ij}$  es de un orden inferior. Pero, como ya se discutió en el capítulo anterior,  $U_{nl2}^{ij}$  depende sólo de las deformaciones transversales, que suelen ser varios órdenes de magnitud mayores que las deformaciones longitudinales. Por ello, las dos contribuciones no lineales a la energía de deformación pueden tener el mismo peso. Siguiendo un desarrollo análogo al de  $U_{nl1}^{ij}$ , se puede expresar  $U_{nl2}^{ij}$  como

$$U_{nl2}^{ij} = \frac{1}{2} \bar{e}_f^{ijT} \left( \bar{K}_{ff}^{ij} \right)_h \bar{e}_f^{ij} \quad (3.93)$$

donde  $\left( \bar{K}_{ff}^{ij} \right)_h$  es, al igual que  $\left( \bar{K}_{ff}^{ij} \right)_g$ , una matriz de rigidez geométrica elemental, y está definida por

$$\left( \bar{K}_{ff}^{ij} \right)_h = \frac{1}{4} \int_0^{l^{ij}} \left[ EA \left( \frac{\partial S_t}{\partial x} \right)^T \left( \frac{\partial S_t}{\partial x} \right) \bar{e}_f \bar{e}_f^T \left( \frac{\partial S_t}{\partial x} \right)^T \left( \frac{\partial S_t}{\partial x} \right) \right]^{ij} dx^{ij} \quad (3.94)$$

A diferencia de la primera matriz de rigidez geométrica  $\left( \bar{K}_{ff}^{ij} \right)_g$ , que está bien documentada en la bibliografía (Clough y Penzien, 1975), esta segunda matriz de rigidez geométrica  $\left( \bar{K}_{ff}^{ij} \right)_h$  ha sido desarrollada en esta tesis.

La contribución a los términos de rigidez elementales de esta parte de la energía potencial se puede escribir como

$$\left( \frac{\partial U_{nl2}^{ij}}{\partial \bar{e}_f^{ij}} \right)^T = \left( \bar{K}_{ff}^{ij} \right)_h \bar{e}_f^{ij} - \left( \bar{Q}_{ff}^{ij} \right)_h \quad (3.95)$$

donde  $(\overline{Q}_{ff}^{ij})_h$  es un vector de fuerzas elásticas no lineales elemental.

La expresión (3.93) puede reescribirse en términos de las coordenadas del cuerpo como

$$U_{nl2}^{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{iT} \mathbf{K}_h^{ij} \mathbf{q}^i \quad (3.96)$$

donde

$$\mathbf{K}_h^{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\overline{K}_{ff}^{ij})_h \end{pmatrix} \quad (3.97)$$

siendo

$$(\overline{K}_{ff}^{ij})_h = \overline{B}_m^i{}^T B_2^i{}^T \left( B_1^{ijT} \overline{C}^{ijT} (\overline{K}_{ff}^{ij})_h \overline{C}^{ij} B_1^i \right) B_2^i \overline{B}_m^i \quad (3.98)$$

La segunda matriz de rigidez geométrica,  $\mathbf{K}_h^{ij}$ , no es constante, al igual que  $\mathbf{K}_g^{ij}$ . Pero mientras que esta última dependía de la deformación longitudinal de la viga,  $\mathbf{K}_h^{ij}$  depende de la deflexión de la misma. En términos de las coordenadas del cuerpo, el vector de fuerzas elásticas no lineales,  $\mathbf{Q}_h^{ij}$ , se puede obtener derivando directamente la energía de deformación,  $U_{nl2}^{ij}$ :

$$\left( \frac{\partial U_{nl2}^{ij}}{\partial \mathbf{q}^i} \right)^T = \mathbf{K}_h^{ij} \mathbf{q}^i - \mathbf{Q}_h^{ij} \quad (3.99)$$

quedando  $\mathbf{Q}_h^{ij}$  definido por

$$\mathbf{Q}_h^{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\frac{1}{2} \overline{B}_m^i{}^T B_2^i{}^T B_1^{ijT} \overline{C}^{ijT} (\overline{Q}_{ff}^{ij})_h \end{pmatrix} \quad (3.100)$$



### 3.6.4 Vector de fuerzas elásticas

Teniendo en cuenta los estudios parciales anteriores, se puede escribir una expresión para la energía potencial total del elemento  $j$ , en términos de las coordenadas del cuerpo  $i$ , como

$$U^{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{iT} \mathbf{K}^{ij} \mathbf{q}^i \quad (3.101)$$

donde la matriz de rigidez elemental está compuesta por las tres matrices de rigidez desarrolladas en los apartados anteriores:

$$\mathbf{K}^{ij} = \mathbf{K}_l^{ij} + \mathbf{K}_g^{ij} + \mathbf{K}_h^{ij} \quad (3.102)$$

de las cuales solamente la primera es constante. Por tanto, el vector de fuerzas elásticas se puede expresar como

$$\left( \frac{\partial U^{ij}}{\partial \mathbf{q}^i} \right)^T = \mathbf{K}^{ij} \mathbf{q}^i - \mathbf{Q}_r^{ij} \quad (3.103)$$

donde se ha denominado con el subíndice  $r$  al vector de fuerzas elásticas no lineales, definido por

$$\mathbf{Q}_r^{ij} = \mathbf{Q}_g^{ij} + \mathbf{Q}_h^{ij} \quad (3.104)$$

Para su aplicación en la obtención numérica de las matrices de rigidez y vectores de fuerzas elásticas elementales, en el apéndice A se presentan las expresiones algebraicas de sus términos, para el caso particular de un elemento viga de seis grados de libertad.

### 3.7 Energía potencial de la viga

La energía potencial del cuerpo  $i$  se puede determinar sumando las energías potenciales de sus elementos, es decir,

$$U^i = \sum_{j=1}^{ne} U^{ij} \quad (3.105)$$

donde  $ne$  es el número de elementos en el que se ha discretizado el cuerpo  $i$ .

Sustituyendo la Ec. (3.101) en la Ec. (3.105) se obtiene

$$U^i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{ne} \mathbf{q}^{iT} K^{ij} \mathbf{q}^j \quad (3.106)$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{q}^{iT} \left( \sum_{j=1}^{ne} K^{ij} \right) \mathbf{q}^j \quad (3.107)$$

que se puede expresar:

$$U^i = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{iT} \mathbf{K}^i \mathbf{q}^i \quad (3.108)$$

Por tanto, la matriz de rigidez de la viga se obtiene sumando las matrices de rigidez de todos los elementos en los que se encuentre discretizada. Es decir,

$$\mathbf{K}^i = \sum_{j=1}^{ne} \mathbf{K}^{ij} \quad (3.109)$$

De igual forma, el vector de fuerzas elásticas no lineales, para el cuerpo  $i$ , se obtiene sumando los vectores elementales expresados en la

Ec. (3.104) según

$$Q_r^i = \sum_{j=1}^{nc} Q_r^{ij} \quad (3.110)$$

### 3.8 Ecuaciones de Lagrange de la viga

Las ecuaciones del movimiento que describen el comportamiento dinámico de los sistemas multicuerpos flexibles se derivan utilizando las ecuaciones de Lagrange. En los sistemas multicuerpos flexibles suelen existir restricciones cinemáticas, debidas a las uniones mecánicas entre los cuerpos o a las trayectorias especificadas. Por tanto, las coordenadas del sistema no son independientes, sino que se hallan relacionadas a través de las ecuaciones de restricción:

$$C(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0} \quad (3.111)$$

donde

$$C = [C_1(\mathbf{q}, t), C_2(\mathbf{q}, t), \dots, C_{n_c}(\mathbf{q}, t)]^T \quad (3.112)$$

es el vector de funciones de restricción y  $n_c$  es el número de ecuaciones de restricción. Se han propuesto diversos métodos para incluir las restricciones en las ecuaciones de Lagrange:

1. El más ampliamente utilizado es el de los *multiplicadores de Lagrange*. Consiste en expresar el vector de reacciones generalizadas como el producto de la matriz jacobiana de las restricciones por un vector desconocido de multiplicadores de Lagrange.
2. Otro método es el *método de los penalizadores* (Bayo, 1989), que consiste en definir un potencial equivalente que incluya una energía potencial ficticia asociada con la violación de las ecuaciones de restricción. Este potencial equivalente puede interpretarse suponiendo que las variables nodales disponen de unos muelles ficticios de constante igual al penalizador, que les impide dejar de cumplir la restricción. El inconveniente de este método reside en que no se

garantiza el cumplimiento exacto de las restricciones. En realidad, lo que se garantiza es el incumplimiento de las mismas. Valores muy grandes de los penalizadores harían que las ecuaciones de restricción se cumplieran con gran exactitud, pero podrían conducir a problemas numéricos con pérdidas de precisión por operar con términos de órdenes de magnitud muy diferentes.

3. Para mejorar el método anterior se utiliza un método mixto que introduce en las ecuaciones términos con multiplicadores de Lagrange y términos con penalizadores. Este procedimiento es denominado en la bibliografía *augmented Lagrangian* (Vanderplaats, 1984).
4. Los métodos anteriores formulan las ecuaciones del movimiento en función, tanto de las coordenadas independientes, como de las dependientes. Esto tiene la ventaja de su fácil implementación en un programa de propósitos generales para el análisis dinámico de sistemas multicuerpos flexibles, ya que, en este caso, las fuerzas externas e internas que dependen tanto de las coordenadas independientes como de las dependientes se pueden introducir en la formulación de una forma directa. Sin embargo, estos procedimientos conducen a un elevado número de ecuaciones y variables con el consecuente costo computacional en tiempo y precisión. Estos inconvenientes no están presentes en otro método comúnmente empleado que se basa en plantear las ecuaciones del movimiento en *coordenadas independientes*, es decir, utilizando un número de variables igual al número de grados de libertad que tenga el mecanismo. La solución de las ecuaciones del movimiento definen el sistema de coordenadas y velocidades generalizadas independientes. Las coordenadas y velocidades generalizadas dependientes se determinan usando las ecuaciones de restricción cinemáticas. Siguiendo este esquema, no hay posibilidad de violación de las ecuaciones de restricción cinemáticas, puesto que estas se utilizan para obtener las variables dependientes. Sin embargo, esto no significa que la solución obtenida sea exacta. Debido a errores numéricos en la integración numérica, las variables independientes no serán exactas y, por tanto, el error en las dependientes será, al menos, del mismo orden que el error en las variables independientes. Esta forma de plantear las ecuaciones es adecuada cuando existen muchas coordenadas dependientes y pocos grados de libertad, como ocurre con frecuencia en los mecanismos con elementos rígidos. Sin embargo

puede plantear el problema de que la elección de las coordenadas independientes que se haga al principio de la integración deje de ser adecuada en instantes de tiempo posteriores, siendo necesaria una nueva elección. Este procedimiento fue propuesto por Wehage (Wehage, 1980; Wehage y Haug, 1982).

Usando el método de los multiplicadores de Lagrange, para un cuerpo  $i$  del sistema, las ecuaciones de Lagrange toman la forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L^i}{\partial \dot{q}^i} \right)^T - \left( \frac{\partial L^i}{\partial q^i} \right)^T + C_{q^i}^T \lambda = Q_e^i \quad (3.113)$$

donde  $L^i = T^i - V^i$ ,  $\lambda$  es el vector de multiplicadores de Lagrange, incógnitas adicionales del problema,  $Q_e^i$  es el vector de fuerzas externas generalizadas asociado con las coordenadas del cuerpo  $i$  y  $C_{q^i}$  es la matriz jacobiana de las restricciones cuyos elementos están definidos como:

$$\left( C_{q^i} \right)_{jk} = \frac{\partial C_j}{\partial q_k^i} \quad j = 1, \dots, nc \quad k = 1, \dots, n \quad (3.114)$$

siendo  $n$  el número de coordenadas del cuerpo  $i$ . La matriz jacobiana de las restricciones del cuerpo  $i$  tiene, por tanto, tantas filas como ecuaciones de restricción y tantas columnas como coordenadas tenga el cuerpo.

Conocidas las energías cinética y potencial de cada cuerpo, las ecuaciones del movimiento del sistema se pueden reescribir como:

$$M^i \ddot{q}^i + K^i \dot{q}^i + C_{q^i}^T \lambda = Q_e^i + Q_v^i + Q_r^i, \quad i = 1, 2, \dots, nb \quad (3.115)$$

donde  $nb$  es el número total de cuerpos del sistema. La matriz de masa de la formulación geoméricamente no lineal NL2, expresada en la Ec. (3.57), es la misma que aparece en una formulación del comportamiento dinámico de los sistemas multicuerpos flexibles suponiendo pequeños desplazamientos y deformaciones. Igual ocurre con el vector de fuerzas de inercia dependientes de la velocidad  $Q_v^i$ , expresado en la Ec. (3.63). Diferente es el comportamiento de los términos de rigidez  $K^i$

y  $Q_r^i$  expresados en las Ecs. (3.109) y (3.110), respectivamente, que son completamente distintos a los de la formulación L y han sido desarrollados en este trabajo. En el primer miembro aparece, además, el vector de reacciones en las uniones cambiado de signo  $C_{q^i}^T \lambda$ , y, en el segundo, el vector de fuerzas generalizadas provenientes de las fuerzas externas  $Q_e^i$ . Ambos son idénticos a los de una formulación que no incluya los efectos de las no linealidades geométricas.

A las Ecs. (3.115) hay que añadirles las ecuaciones de restricción, Ecs. (3.111), con objeto de tener tantas ecuaciones como incógnitas. Estas ecuaciones constituyen un sistema mixto de ecuaciones diferenciales-algebraicas que debe integrarse numéricamente con algoritmos adecuados. Como los algoritmos de resolución de ecuaciones diferenciales-algebraicas (EDA) no son muy eficientes, un procedimiento generalizado consiste en añadir a las Ecs. (3.115) la segunda derivada de las ecuaciones de restricción, con lo que se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) que puede resolverse usando algoritmos muy eficientes.

$$\begin{pmatrix} M^i & C_{q^i}^T \\ C_{q^i} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}^i \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_e^i + Q_v^i + Q_r^i - K^i q^i \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (3.116)$$

La solución de este sistema de ecuaciones, con sus correspondientes condiciones iniciales de posición y velocidad, permite hallar el movimiento del mecanismo con respecto al tiempo.

El sistema de ecuaciones diferenciales (3.116) plantea algunos problemas en su integración, derivados del incumplimiento de las ecuaciones de restricción pues no han sido consideradas dichas ecuaciones sino su segunda derivada. Matemáticamente se puede demostrar que la solución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (3.116) coincide con la del sistema mixto de ecuaciones diferenciales-algebraicas (3.115) y (3.111). En la práctica, los errores de redondeo hacen que esto no sea cierto y la solución final puede ser muy diferente. Ello es debido a que el sistema de ecuaciones (3.116) no garantiza el cumplimiento de las ecuaciones de restricción, por lo que si, debido a errores numéricos, las variables dejasen de verificar dichas ecuaciones, el sistema (3.116) no garantiza que se vuelvan a cumplir en los instantes de tiempo posteriores. Debido a que se está integrando la segunda derivada de las ecuaciones de restricción, la violación de las ecuaciones puede crecer de forma lineal.

En la literatura se proponen varias técnicas para conseguir que el sistema de ecuaciones converja a la solución correcta:

- El *método de estabilización de Baumgarte* (1972) se basa en introducir unos términos estabilizadores en la segunda derivada de las ecuaciones de restricción:

$$C_{q^i} \ddot{q}^i = \gamma - 2\alpha_B \dot{C} - \beta^2 C \quad (3.117)$$

donde los valores de  $\alpha_B$  y  $\beta$  controlan la estabilidad de las ecuaciones del movimiento.

- Otro método consiste en identificar un conjunto de coordenadas generalizadas independientes, y aunque se integren las ecuaciones del movimiento tanto en coordenadas dependientes como en independientes, posteriormente se ajustan las coordenadas dependientes para que verifiquen las ecuaciones de restricción cinemáticas. De esta forma se consigue una mejor estimación de las coordenadas dependientes que integrando exclusivamente en coordenadas independientes y obteniendo las dependientes a partir de ellas, a través de las ecuaciones de restricción. Por razones obvias, con esta técnica no puede utilizarse una rutina de integración numérica que use la historia de las coordenadas y velocidades en el proceso de integración.

### 3.9 Comentarios finales

En este capítulo se ha presentado la formulación geoméricamente no lineal NL2 empleando el método de los elementos finitos. Se puede observar, comparándola con la formulación NL2 para modos supuestos presentada en el capítulo anterior, que la formulación de elementos finitos es más compleja que las teorías de aproximación clásicas. Esto se debe principalmente al hecho de que la descripción del campo de desplazamientos del elemento finito requiere más transformaciones entre los diferentes sistemas de coordenadas. Además, las matrices y vectores elementales tienen que ser ensamblados para obtener las matrices y vectores del cuerpo deformable. Sin embargo, todo lo que pierde en sencillez lo gana en generalidad.

Se ha resaltado a lo largo del capítulo que la formulación NL2 difiere tan sólo de la formulación L en el vector de fuerzas elásticas, que se

denominará  $Q_{fe}^i$ , definido por

$$Q_{fe}^i = \frac{\partial U^i}{\partial q^i} \quad (3.118)$$

Este vector, durante el desarrollo, ha sido separado en tres partes, correspondientes a las componentes de la energía potencial  $U_l^i$ ,  $U_{nl1}^i$  y  $U_{nl2}^i$ . La complejidad de las expresiones de los vectores asociados crece en el orden en que se han nombrado. Para algunas aplicaciones específicas no es necesario considerar todos los términos de la energía potencial. Es decir, el grado de aproximación usado en la formulación dependerá del problema que se esté analizando. En aquellos casos en los que sea posible admitir que tanto las deformaciones como los desplazamientos son pequeños, se obtiene una respuesta aceptable usando, para las fuerzas elásticas la siguiente aproximación

$$Q_{fe}^i = -K_l^i q^i \quad (3.119)$$

Sin embargo, cuando los desplazamientos no son pequeños, es necesario introducir nuevas fuerzas elásticas que tengan en cuenta las no linealidades geométricas. Para algunas aplicaciones, como se comprobará en los ejemplos numéricos, es suficiente con considerar que

$$Q_{fe}^i = -K_l^i q^i - K_g^i q^i \quad (3.120)$$

Pero para otros casos, en los que el efecto de las no linealidades geométricas es más acusado (grandes deflexiones o fuerzas axiales significativas), es necesario usar la formulación que se ha desarrollado en este capítulo, denominada NL2. Es decir,

$$Q_{fe}^i = -K_l^i q^i - K_g^i q^i - K_h^i q^i + Q_g^i + Q_h^i \quad (3.121)$$

La formulación NL2, debido al aumento sustancial del tiempo de cálculo que conlleva, debe usarse sólo en aquellas aplicaciones prácticas



en las que la mejora de la respuesta debida a la inclusión de las no linealidades geométricas es importante.

## Capítulo 4

# Formulación con Elementos Finitos de la Viga en el Caso Plano: NL3

En este capítulo se presenta la formulación NL3 usando el método de los elementos finitos. Esta formulación incluye los mismos términos de orden superior de la expresión de la energía de deformación que la NL2, pero difiere de ella en que incluye implícitamente el efecto del “acortamiento” por flexión.

En el primer apartado se define la posición de un punto en la que se distingue la contribución debida a dicho “acortamiento”. Esta se representa mediante funciones de forma a través de su relación con los desplazamientos transversales. A obtener esta expresión se dedica la mayor parte del capítulo, usándose a continuación las mismas transformaciones que en el capítulo anterior para definir la posición del punto en el sistema de coordenadas global de referencia.

En el segundo apartado se definen las condiciones de referencia para que el campo de desplazamientos con respecto al sistema de coordenadas ligado al cuerpo sea único.

Siguiendo el mismo orden que en el capítulo anterior se obtienen a continuación, en los apartados tercero y cuarto, la energía cinética de un elemento y la del cuerpo completo. Mientras que en los apartados quinto y sexto se desarrollan la energía potencial para el elemento y para el cuerpo. La formulación NL3, a diferencia de la NL2, da lugar a una matriz de rigidez constante, incluyendo todas la no linealidades

geométricas en los términos de inercia y en las fuerzas de reacción. Estas se describen a continuación, en el apartado séptimo, en el que se trata de las ecuaciones de restricción cinemáticas.

## 4.1 Definición de la Posición

Cuando un elemento se deforma, cada uno de los puntos de dicho elemento experimenta un desplazamiento  $w_j^{ij}$ , como se muestra en la Fig. 3.8. El desplazamiento del punto se puede dividir en una componente en la dirección del elemento indeformado,  $u^{ij}$ , y otra en dirección perpendicular,  $v^{ij}$ . Cuando los desplazamientos  $v^{ij}$  son grandes no puede despreciarse el acoplamiento existente entre ambos. Así, parte del desplazamiento longitudinal es debido a que cuando el cuerpo flexa los puntos del mismo tienden a desplazarse longitudinalmente para mantener invariable la longitud de dicho cuerpo. Este desplazamiento se denominará “acortamiento” por flexión (*foreshortening* en inglés), donde la palabra acortamiento va entre comillas porque no se trata de una disminución de la longitud real. En el caso de que el desplazamiento longitudinal no esté impedido, al flexar la viga la línea neutra no modifica su longitud, pero sí disminuye el valor de la proyección de la viga sobre la configuración indeformada, como se muestra en la Fig. 4.1(a). Por el contrario, en el caso de que el desplazamiento longitudinal esté impedido, la línea neutra se alarga para poder verificar las condiciones de contorno, como se esquematiza en la Fig. 4.1(b).

La diferencia entre las dos formulaciones geoméricamente no lineales desarrolladas en esta tesis reside en la manera de representar el desplazamiento mediante las funciones de forma. En el capítulo anterior se presentó la formulación NL2, en la que las funciones de forma se utilizan para representar la posición de un punto de un elemento  $j$  perteneciente a un cuerpo  $i$  con respecto al sistema de coordenadas elemental  $X^{ij}Y^{ij}$ . Así, se puede escribir de nuevo la Ec. (3.1) como

$$w^{ij} = S^{ij} e^{ij} \quad (4.1)$$

La posición  $w^{ij}$  expresada en esta ecuación se puede obtener como suma de la posición en el estado indeformado,  $w_o^{ij}$ , y el desplazamiento debido

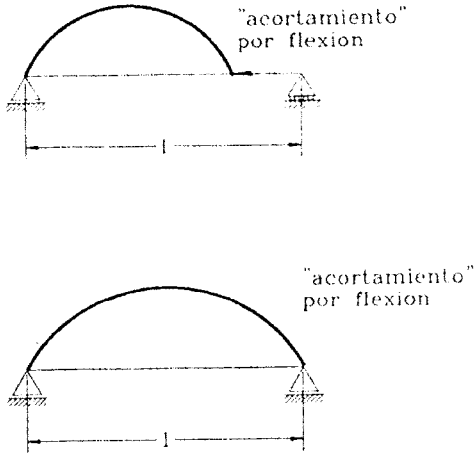


Figura 4.1: “Acortamiento” por flexión de una viga: (a) simplemente apoyada, (b) con desplazamientos impedidos en ambos extremos

a la deformación,  $w_f^{ij}$ , como se muestra en la Fig. 4.2(a). Es decir

$$w^{ij} = w_o^{ij} + w_f^{ij} \quad (4.2)$$

Esta ecuación puede particularizarse para las coordenadas nodales, puesto que éstas representan las posiciones de los nodos relativas al sistema de coordenadas elemental, dando lugar a

$$e^{ij} = e_o^{ij} + e_f^{ij} \quad (4.3)$$

Usando las expresiones anteriores se llega a que la formulación  $NL2$  representa el vector  $w_f^{ij}$ , cuyas componentes son los desplazamientos  $u^{ij}$

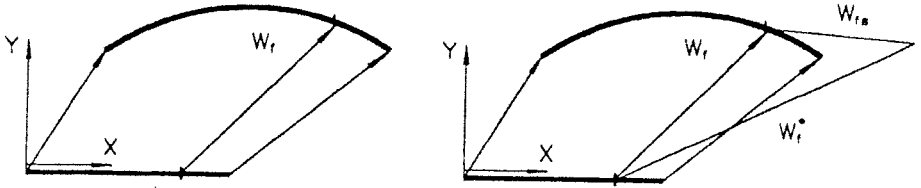


Figura 4.2: Representación de los desplazamientos en el elemento para las formulaciones (a) NL2 y (b) NL3.

y  $v^{ij}$  de cada punto del elemento, a través de la expresión

$$w_f^{ij} = S^{ij} e_f^{ij} \quad (4.4)$$

La formulación *NL3*, sin embargo, no representa mediante las funciones de forma la posición  $w^{ij}$  del punto, sino que separa el vector  $w^{ij}$  en tres partes, como se muestra en la Fig. 4.2(b), de las cuales las dos últimas provienen de una descomposición de  $w_f^{ij}$  y su significado se discutirá a continuación.

$$w^{ij} = w_o^{ij} + w_f^{*ij} + w_f^{ij_s} \quad (4.5)$$

De estos tres términos solamente los dos primeros son representados mediante funciones de forma. El primer término representa la posición en el estado indeformado con respecto al sistema de coordenadas elemental

$X^{ij}Y^{ij}$ , y puede expresarse como

$$\mathbf{w}_o^{ij} = \mathbf{S}^{ij} \mathbf{e}_o^{ij} \quad (4.6)$$

Este término es idéntico al de la formulación *NL2* que aparece en la Ec. (4.2). Sin embargo, el tratamiento del vector desplazamiento elástico de un punto,  $\mathbf{w}_f^{ij}$ , es diferente al de la formulación del capítulo anterior. En este vector desplazamiento es posible apreciar una parte debida al “acortamiento” por flexión, denominada  $\mathbf{w}_{fs}^{ij}$ . El desplazamiento elástico que no sea debido a esta causa se incluye en el vector  $\mathbf{w}_f^{*ij}$ . De estos dos términos sólo éste último se representa mediante las funciones de forma como

$$\mathbf{w}_f^{*ij} = \mathbf{S}^{ij} \mathbf{e}_f^{ij} \quad (4.7)$$

mientras que el otro, el desplazamiento debido al “acortamiento” por flexión,  $\mathbf{w}_{fs}^{ij}$ , está relacionado con el desplazamiento  $\mathbf{w}_f^*$  y, por tanto, no es necesario representarlo mediante funciones de forma, sino que es descrito indirectamente por ellas a través de su relación con  $\mathbf{w}_f^*$ .

La Ec. (4.5) se puede escribir como

$$\mathbf{w}^{ij} = \mathbf{w}_{ff}^{ij} + \mathbf{w}_{fs}^{ij} \quad (4.8)$$

donde el subíndice *ff* indica que este vector se describe directamente mediante las funciones de forma. Usando las Ec. (4.6) y Ec. (4.7),  $\mathbf{w}_{ff}^{ij}$  puede expresarse como

$$\mathbf{w}_{ff}^{ij} = \mathbf{w}_o^{ij} + \mathbf{w}_f^{*ij} = \mathbf{S}^{ij} \mathbf{e}^{ij} \quad (4.9)$$

En la Ec. (4.8), no sólo  $\mathbf{w}_{ff}^{ij}$  es función de las coordenadas nodales del cuerpo, sino que  $\mathbf{w}_{fs}^{ij}$  también lo es y su expresión en función de ellas será obtenida a lo largo de este apartado.

En resumen, como es sabido, las funciones de forma no son más que unas funciones de interpolación que sirven para obtener la posición de un

⊙ Debido al "acortamiento" por flexión

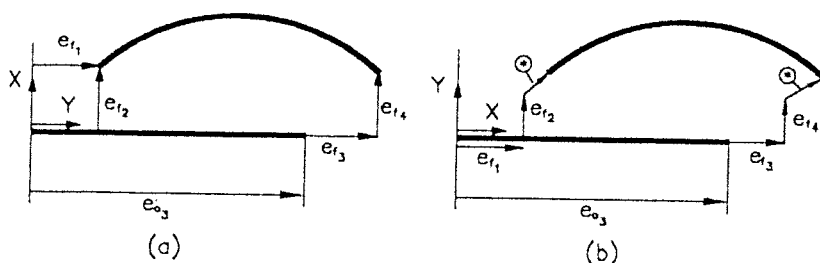


Figura 4.3: Coordenadas nodales para las formulaciones: (a) NL2, y (b) NL3

punto del elemento en función de la posición de los nodos del elemento, los cuales están expresados en el vector de coordenadas nodales,  $e^{ij}$ . Estas coordenadas representan distintas magnitudes físicas para las formulaciones NL2 y NL3. En la Fig. 4.3 se encuentran representadas para ambas formulaciones, en el caso de un elemento con dos nodos extremos y dos grados de libertad por nodo. En esta figura se observa que las coordenadas nodales en la formulación NL2 tienen un significado físico más intuitivo que en la formulación NL3. En la formulación NL2, representan la posición final de los nodos relativa al sistema de coordenadas elemental. Sin embargo, en la formulación NL3 representan la posición de los nodos sin considerar el desplazamiento debido al "acortamiento" por flexión. Para alcanzar la posición final, a dichas coordenadas hay que sumarle este desplazamiento. Es decir, las coordenadas nodales empleadas en ambas formulaciones difieren en el desplazamiento debido al "acortamiento" por flexión. Ambas lo consideran, pero mientras que la NL2 lo hace implícitamente, la NL3 lo tiene en cuenta explícitamente.

El desplazamiento por "acortamiento" por flexión, a su vez, puede

separarse en dos componentes

$$\mathbf{w}_{fs}^{ij} = \mathbf{n}_{fs}^{ij} + \Delta\mathbf{w}_{fs}^{ij} \quad (4.10)$$

La primera representa el desplazamiento  $\mathbf{w}_{fs}^{ij}$  de un nodo extremo del elemento. El nodo extremo corresponde al más cercano al punto que se ha tomado como referencia para medir el desplazamiento longitudinal relativo al sistema de coordenadas ligado al cuerpo. Esta magnitud se denomina  $\mathbf{n}_{fs}^{ij}$ , donde la letra  $n$  hace referencia a que está asociada a un nodo, el subíndice  $fs$  indica que representa un desplazamiento por "acortamiento" por flexión y los superíndices asocian la magnitud al elemento  $j$  perteneciente al cuerpo  $i$ . La segunda componente representa la contribución debida al "acortamiento" por flexión dentro del elemento, entre el nodo cuyo desplazamiento está representado por  $\mathbf{n}_{fs}^{ij}$  y el punto cuyo desplazamiento se desea conocer. Sustituyendo la Ec. (4.10) en la Ec. (4.8) se obtiene que la posición de un punto del elemento, relativa al sistema de coordenadas elemental, se puede expresar como

$$\mathbf{w}^{ij} = \mathbf{w}_{ff}^{ij} + \mathbf{n}_{fs}^{ij} + \Delta\mathbf{w}_{fs}^{ij} = \mathbf{S}^{ij} \mathbf{e}^{ij} + \mathbf{n}_{fs}^{ij} + \Delta\mathbf{w}_{fs}^{ij} \quad (4.11)$$

Esta ecuación representa la misma magnitud que la Ec. (4.1) para la formulación NL2.

En la Fig. 4.4 se representa un par de ejemplos para aclarar el significado de cada uno de los términos de esta ecuación. El primer ejemplo representa una viga biapoyada, discretizada en dos elementos, y sometida a una carga transversal estática. La posición del segundo nodo del primer elemento se puede representar mediante su posición en el elemento indeformado  $\mathbf{w}_o^1$ , más el desplazamiento transversal,  $\mathbf{w}_f^{*1}$ , ya que se ha supuesto que no existen fuerzas axiales, más el desplazamiento  $\mathbf{w}_{fs}^1$  debido al "acortamiento" por flexión. Este último se debe exclusivamente a la contribución del elemento 1, ya que el primer nodo tiene restringido su desplazamiento, es decir,  $\mathbf{n}_{fs}^1 = 0$  y  $\mathbf{w}_{fs}^1 = \Delta\mathbf{w}_{fs}^1$ . La posición del segundo nodo del segundo elemento se obtiene de forma similar, pero ahora  $\mathbf{w}_f^{*2} = 0$ , porque este nodo tiene restringido su desplazamiento transversal, y  $\mathbf{w}_{fs}^2$  está formado por el desplazamiento por "acortamiento" por



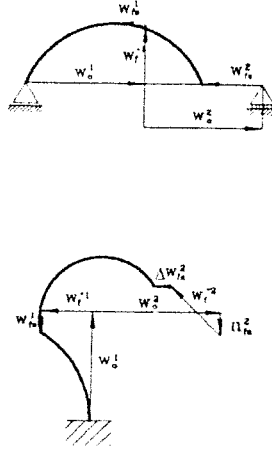


Figura 4.4: Desplazamientos para la formulación NL3

flexión del primer nodo de este elemento y la contribución del segundo elemento, es decir,  $w_{fs}^2 = n_{fs}^2 + \Delta w_{fs}^2$ , ó  $w_{fs}^2 = \Delta w_{fs}^1 + \Delta w_{fs}^2$ . El segundo ejemplo se presenta para ilustrar la influencia del desplazamiento por “acortamiento” por flexión cuando los elementos tienen distintas orientaciones. Se trata de un cuerpo formado por dos elementos situados a  $90^\circ$  y uno de ellos empotrado en un extremo. Se supone que la longitud de la línea neutra permanece invariable para que los desplazamientos  $w_f^*$  sean perpendiculares a los elementos. Los desplazamientos de los nodos de ambos elementos se representan de forma similar al del ejemplo anterior, pero con una modificación. Las componentes del desplazamiento por “acortamiento” por flexión tienen distinta dirección, resultando que el desplazamiento por “acortamiento” por flexión total del segundo nodo del segundo elemento no tiene la misma dirección del elemento.

A partir de ahora se seguirá un desarrollo análogo al utilizado en el capítulo anterior para la formulación NL2. Se intentará mantener, en lo posible, el mismo orden en las ecuaciones, de forma que sea fácil compararlas, sin tener que acudir a continuas referencias. No hay que olvidar que parten de las mismas hipótesis.

El siguiente paso es reescribir la Ec. (4.11), expresada en el sistema de

coordenadas elemental,  $X^{ij}Y^{ij}$ , en el sistema de coordenadas elemental intermedio. Esta toma la forma

$$\bar{\mathbf{w}}^{ij} = \bar{\mathbf{w}}_{ff}^{ij} + \bar{\mathbf{n}}_{fs}^{ij} + \Delta\bar{\mathbf{w}}_{fs}^{ij} \quad (4.12)$$

donde

$$\bar{\mathbf{w}}_{ff}^{ij} = S^{ij} \bar{\mathbf{e}}^{ij} \quad (4.13)$$

y se ha usado  $\bar{\mathbf{n}}_{fs}^{ij}$  y  $\Delta\bar{\mathbf{w}}_{fs}^{ij}$  para denotar los desplazamientos  $\mathbf{n}_{fs}^{ij}$  y  $\Delta\mathbf{w}_{fs}^{ij}$  en el sistema de coordenadas  $\bar{X}^{ij}\bar{Y}^{ij}$ , cuyos valores serán iguales, por tener la misma orientación los dos sistemas de coordenadas.

Para hacer compatible la Ec. (4.12) con la de los otros elementos del mismo cuerpo, debe estar expresada en el sistema de coordenadas de éste,  $X^iY^i$ . Ello se consigue a través de matrices de transformación ortogonales. Así, el vector de coordenadas nodales se transforma en

$$\bar{\mathbf{e}}^{ij} = \bar{\mathbf{C}}^{ij} \mathbf{q}_n^{ij} \quad (4.14)$$

o bien

$$\bar{\mathbf{e}}_0^{ij} = \bar{\mathbf{C}}^{ij} \mathbf{q}_0^{ij} \quad (4.15)$$

$$\bar{\mathbf{e}}_f^{ij} = \bar{\mathbf{C}}^{ij} \mathbf{q}_f^{ij} \quad (4.16)$$

y los vectores de posición y desplazamiento pasan a ser

$$\bar{\mathbf{u}}^{ij} = \mathbf{C}^{ij} \bar{\mathbf{w}}^{ij} \quad (4.17)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_{ff}^{ij} = \mathbf{C}^{ij} \bar{\mathbf{w}}_{ff}^{ij} \quad (4.18)$$

$$\bar{\mathbf{m}}_{fs}^{ij} = \mathbf{C}^{ij} \bar{\mathbf{n}}_{fs}^{ij} \quad (4.19)$$

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}_{fs}^{ij} = \mathbf{C}^{ij} \Delta \bar{\mathbf{w}}_{fs}^{ij} \quad (4.20)$$

Usando estas transformaciones, se llega a

$$\bar{\mathbf{u}}^{ij} = \bar{\mathbf{u}}_{ff}^{ij} + \bar{\mathbf{u}}_{fs}^{ij} \quad (4.21)$$

donde

$$\bar{\mathbf{u}}_{ff}^{ij} = \mathbf{C}^{ij} \mathbf{S}^{ij} \bar{\mathbf{C}}^{ij} \mathbf{q}_n^{ij} \quad (4.22)$$

y

$$\bar{\mathbf{u}}_{fs}^{ij} = \bar{\mathbf{m}}_{fs}^{ij} + \Delta \bar{\mathbf{u}}_{fs}^{ij} \quad (4.23)$$

La Ec. (4.21) está expresada en el sistema de coordenadas del cuerpo  $i$ . De los términos que la componen, no se conoce la expresión del debido al "acortamiento" por flexión,  $\bar{\mathbf{u}}_{fs}^{ij}$ , en función de las coordenadas del problema. A continuación se van a estudiar cada una de sus componentes por separado, comenzando con la última,  $\Delta \bar{\mathbf{u}}_{fs}^{ij}$ , que implica exclusivamente al elemento  $ij$ -ésimo.

**Obtención de  $\Delta \bar{\mathbf{u}}_{fs}^{ij}$ :** Este vector, expresado en el sistema de coordenadas del elemento  $j$ ,  $X^{ij}Y^{ij}$ , sólo tiene componente longitudinal, cuya expresión es

$$\Delta \mathbf{w}_{fs}^{ij} = -\frac{1}{2} \mathbf{e}_1 \int_{x_k^{ij}}^{x^{ij}} \left( \frac{\partial v^{ij}}{\partial x^{ij}} \right)^2 dx^{ij} \quad (4.24)$$

donde  $\mathbf{e}_1$  es el vector unitario  $[1 \ 0]^T$ . La integral se extiende entre las coordenadas del nodo  $k$ , cuyo desplazamiento por "acortamiento" por flexión se expresa en  $\mathbf{n}_{fs}^{ij}$ , y la coordenada del punto cuyo desplazamiento se desea conocer.

Para poder expresar el desplazamiento transversal,  $v^{ij}$ , en función de las coordenadas nodales, es necesario reescribir la Ec. (4.7) como

$$w_f^{*ij} = \begin{pmatrix} S_l^{ij} \\ S_t^{ij} \end{pmatrix} e_f^{ij} \quad (4.25)$$

donde se ha dividido la matriz  $S^{ij}$  en dos submatrices,  $S_l^{ij}$  y  $S_t^{ij}$ , que corresponden a la primera y segunda fila de la matriz, respectivamente.

De la Ec. (4.25) se sigue que

$$v^{ij} = S_t^{ij} e_f^{ij} \quad (4.26)$$

Usando esta expresión, la Ec. (4.24) se reescribe como

$$\Delta w_{fs}^{ij} = -\frac{1}{2} e_1 \left[ e_f^{ijT} \int_{x_k^{ij}}^{x^{ij}} \left( \frac{\partial S_l^{ij}}{\partial x^{ij}} \right)^T \left( \frac{\partial S_t^{ij}}{\partial x^{ij}} \right) dx^{ij} e_f^{ij} \right] \quad (4.27)$$

en la que se ha tenido en cuenta que el vector de desplazamientos nodales,  $e_f^{ij}$ , es independiente de la coordenada espacial  $x^{ij}$ .

Definiendo la matriz  $H^{ij}$  como

$$H^{ij} = \int_{x_k^{ij}}^{x^{ij}} \left( \frac{\partial S_l^{ij}}{\partial x^{ij}} \right)^T \left( \frac{\partial S_t^{ij}}{\partial x^{ij}} \right) dx^{ij} \quad (4.28)$$

la Ec. (4.27) puede escribirse de forma compacta como

$$\Delta w_{fs}^{ij} = -\frac{1}{2} e_1 \left( e_f^{ijT} H^{ij} e_f^{ij} \right) \quad (4.29)$$

Puede comprobarse que la matriz  $H^{ij}$  es una matriz elemental cuadrada simétrica, cuya dimensión coincide con el número de grados de libertad del elemento. Esta matriz, por su definición, tiene la propiedad de que las filas y las columnas asociadas a las coordenadas nodales que representan los desplazamientos longitudinales son nulas. Por ejemplo, para el elemento viga de seis grados de libertad, la matriz  $H^{ij}$  tiene la siguiente expresión

$$H^{ij} = \int_{x_k^{ij}}^{x^{ij}} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi'_2 \\ \psi'_3 \\ 0 \\ \psi'_5 \\ \psi'_6 \end{pmatrix} (0 \ \psi'_2 \ \psi'_3 \ 0 \ \psi'_5 \ \psi'_6)^{ij} dx^{ij} \quad (4.30)$$

o bien

$$H^{ij} = \int_{x_k^{ij}}^{x^{ij}} \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ 0 & \psi'_2 \psi'_2 & & & & & & \\ 0 & \psi'_2 \psi'_3 & \psi'_3 \psi'_3 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & \psi'_2 \psi'_5 & \psi'_3 \psi'_5 & 0 & \psi'_5 \psi'_5 & & & \\ 0 & \psi'_2 \psi'_6 & \psi'_3 \psi'_6 & 0 & \psi'_5 \psi'_6 & \psi'_6 \psi'_6 & & \end{pmatrix} dx^{ij} \quad (4.31)$$

Debido a esta propiedad, el desplazamiento longitudinal producido por la flexión dentro del elemento  $j$ , entre los puntos  $x_k^{ij}$  y  $x^{ij}$ , definido en la Ec. (4.29), depende exclusivamente de las coordenadas nodales que representan los desplazamientos transversales en el elemento  $j$ , como cabe esperar por su definición de la Ec. (4.24).

En el sistema de coordenadas elemental intermedio del elemento  $j$ ,  $\Delta w_{fs}^{ij}$  pasa a tener la forma

$$\Delta \bar{w}_{fs}^{ij} = -\frac{1}{2} \mathbf{e}_1 \left( \bar{\mathbf{e}}_f^{ijT} \mathbf{H}^{ij} \bar{\mathbf{e}}_f^{ij} \right) \quad (4.32)$$

y en el sistema de coordenadas del cuerpo

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}_{fs}^{ij} = -\frac{1}{2} \mathbf{C}^{ij} \mathbf{e}_1 \left( \bar{\mathbf{q}}_f^{ijT} \bar{\mathbf{C}}^{ijT} \mathbf{H}^{ij} \bar{\mathbf{C}}^{ij} \bar{\mathbf{q}}_f^{ij} \right) \quad (4.33)$$

Haciendo uso de la Ec. (4.33), la Ec. (4.23) se puede escribir como

$$\bar{\mathbf{u}}_{fs}^{ij} = \bar{\mathbf{m}}_{fs}^{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{C}^{ij} \mathbf{e}_1 \left( \bar{\mathbf{q}}_f^{ijT} \bar{\mathbf{C}}^{ijT} \mathbf{H}^{ij} \bar{\mathbf{C}}^{ij} \bar{\mathbf{q}}_f^{ij} \right) \quad (4.34)$$

donde se pone de manifiesto que el desplazamiento  $\bar{\mathbf{u}}_{fs}^{ij}$  de un punto arbitrario perteneciente al elemento  $j$  depende del desplazamiento debido al "acortamiento" por flexión de un nodo extremo de dicho elemento,  $\bar{\mathbf{m}}_{fs}^{ij}$ , y de las coordenadas nodales transversales del propio elemento.

**Obtención de  $\bar{\mathbf{m}}_{fs}^{ij}$ :** Para conocer el desplazamiento  $\bar{\mathbf{m}}_{fs}^{ij}$  de un nodo extremo perteneciente al elemento  $j$  del cuerpo  $i$ , hay que recorrer todos los elementos situados entre el elemento  $j$  y el elemento en el que se encuentre el punto de desplazamiento longitudinal nulo  $x_o$  y calcular en cada uno de ellos la contribución al desplazamiento por "acortamiento" por flexión. Como este desplazamiento involucra muchos elementos es más sencillo expresarlo en el sistema de coordenadas del cuerpo,  $X^i Y^i$ , que en el sistema de coordenadas del elemento  $j$ ,  $X^{ij} Y^{ij}$ . Es decir, es más fácil obtener la expresión de  $\bar{\mathbf{m}}_{fs}^{ij}$  que la del desplazamiento  $\bar{\mathbf{n}}_{fs}^{ij}$ , definido en la Ec. (4.10).

El punto de desplazamiento longitudinal nulo,  $x_o$ , depende de la elección de las condiciones de referencia. En la Fig. 4.5 se muestra una viga discretizada con condiciones de referencia de simplemente apoyada en el primer caso y de punto fijo en el segundo. Se han numerado consecutivamente los elementos con objeto de ilustrar más claramente la formulación, pero, en general, la numeración de éstos no tiene por que ser consecutiva.

Para el caso de condiciones de referencia de simplemente apoyada, el desplazamiento  $\bar{\mathbf{m}}_{fs}^{ij}$  se puede representar como la suma de las contribuciones debidas a todos los elementos completamente comprendidos entre

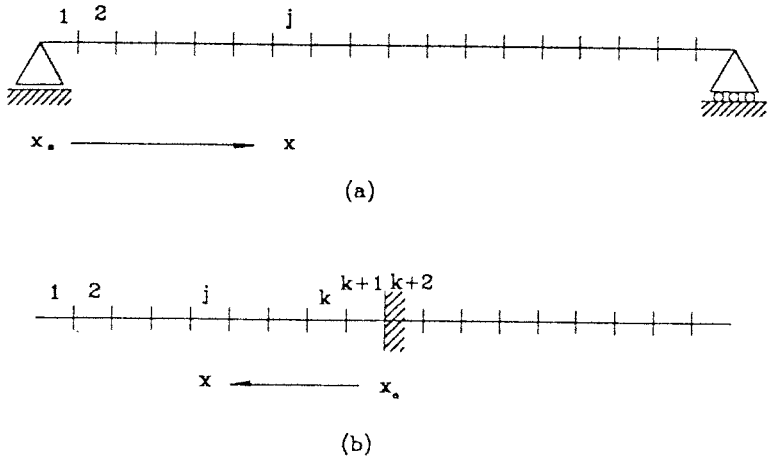


Figura 4.5: Conjuntos  $P^{ij}$  para las condiciones de referencia: (a) simplemente apoyada, y (b) punto fijo

$x_o$  y  $x$ :

$$\bar{m}_{fs}^{ij} = \Delta \bar{u}_{fs}^{i1} + \Delta \bar{u}_{fs}^{i2} + \dots + \Delta \bar{u}_{fs}^{i(j-2)} + \Delta \bar{u}_{fs}^{i(j-1)} \quad (4.35)$$

La contribución de cada elemento se puede escribir en el sistema de coordenadas ligado al cuerpo como

$$\Delta \bar{u}_{fs}^{im} = C^{im} \Delta \bar{w}_{fs}^{im} \quad (4.36)$$

expresión en la que  $\Delta \bar{w}_{fs}^{im}$  representa la contribución al desplazamiento por "acortamiento" por flexión de cada elemento en el sistema de coordenadas elemental intermedio  $\bar{X}^{im} \bar{Y}^{im}$ .

La Ec. (4.35) puede ser escrita en forma más compacta si se define un conjunto,  $P^{ij}$ , cuyos elementos sean todos los elementos finitos que se encuentren comprendidos entre el nodo de desplazamiento longitudinal

nulo y el nodo extremo del elemento  $j$  del cuerpo  $i$  más cercano al nodo anterior. Para el ejemplo que se está analizando el conjunto  $P^{ij}$  se define como

$$P^{ij} = \{1, 2, \dots, j-1\} \quad (4.37)$$

Haciendo uso de esta definición y de la Ec. (4.36) se puede escribir que

$$\bar{m}_{fs}^{ij} = \sum_{m \in P^{ik}} C^{im} \Delta \bar{w}_{fs}^{im} \quad (4.38)$$

La ecuación anterior se expresa en función de las coordenadas nodales del elemento de acuerdo con la Ec. (4.32) como

$$\bar{m}_{fs}^{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{m \in P^{ik}} C^{im} e_1 \left( \bar{e}_f^{imT} H_L^{im} \bar{e}_f^{im} \right) \quad (4.39)$$

donde la matriz  $H_L^{im}$  es un caso particular de la matriz  $H^{im}$  en el que la integral está extendida a toda la longitud del elemento, por lo que se convierte en una matriz constante. Para este ejemplo, suponiendo el origen de coordenadas del sistema elemental situado en el extremo izquierdo del elemento, se define como

$$H_L^{im} = \int_0^{L^{im}} \left( \frac{\partial S_t^{im}}{\partial x^{ij}} \right)^T \left( \frac{\partial S_t^{im}}{\partial x^{ij}} \right) dx^{ij} \quad (4.40)$$

Para el caso de condiciones de referencia de punto central fijo de la Fig. 4.5(b), se va a hacer un desarrollo análogo al anterior para obtener la expresión del desplazamiento  $\bar{m}_{fs}^{ij}$ . En este caso, el nodo de referencia para medir el desplazamiento longitudinal elástico se encuentra en el centro del elemento, y el punto cuyo desplazamiento se desea conocer a su izquierda, por lo que los elementos se recorren en el sentido del eje



$X^{ij}$  negativo. Definiendo, para este caso, el conjunto  $P^{ij}$  como

$$P^{ij} = \{j + 1, j + 2, \dots, k, k + 1\} \quad (4.41)$$

el desplazamiento  $\bar{m}_{fs}^{ij}$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} \bar{m}_{fs}^{ij} &= \Delta \bar{u}_{fs}^{i(k+1)} + \Delta \bar{u}_{fs}^{ik} + \dots + \Delta \bar{u}_{fs}^{i(j+2)} + \Delta \bar{u}_{fs}^{i(j+1)} \\ &= \sum_{m \in P^{ij}} (C^{im} \Delta \bar{w}_{fs}^{im}) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Escribiendo la contribución de cada elemento  $\Delta \bar{w}_{fs}^{im}$  en función de las coordenadas elásticas nodales elementales, se llega a la misma expresión que en el caso anterior (Ec. (4.39)) Pero la matriz  $H_L^{im}$  cambia de signo, pues los elementos se recorren en sentido contrario, quedando expresada como

$$H_L^{im} = \int_{L^{im}}^0 \left( \frac{\partial S_t^{im}}{\partial x^{ij}} \right)^T \left( \frac{\partial S_t^{im}}{\partial x^{ij}} \right) dx^{ij} \quad (4.43)$$

En general, la matriz  $H_L^{im}$  puede representarse por la siguiente ecuación:

$$H_L^{im} = \pm \int_0^{L^{im}} \left( \frac{\partial S_t^{im}}{\partial x^{ij}} \right)^T \left( \frac{\partial S_t^{im}}{\partial x^{ij}} \right) dx^{ij} \quad (4.44)$$

donde se empleará el signo positivo o negativo, dependiendo de que el elemento se recorra en el sentido del eje  $X^{im}$  positivo o negativo, respectivamente.

En el caso del elemento viga con tres grados de libertad por nodo, cuyas funciones de forma son los polinomios de Hermite, su expresión es

$$H_L^{im} = \frac{\pm 1}{30L^{im}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 & 36 \\ 0 & 3L & -1L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 36 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & -3L & 1L^2 \end{pmatrix}^{im} \quad (4.45)$$

Usando la Ec. (4.16) para pasar de las coordenadas nodales en el elemento a las coordenadas nodales en el cuerpo, la Ec. (4.39) se puede escribir como

$$\bar{m}_{fs}^{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{m \in P^{ij}} \left( C^{im} e_1 (\bar{q}_f^{imT} \bar{C}^{imT} H_L^{im} \bar{C}^{im} \bar{q}_f^{im}) \right) \quad (4.46)$$

Una vez obtenida la expresión del desplazamiento debido al “acortamiento” por flexión en un punto cualquiera perteneciente al elemento  $j$  del cuerpo  $i$  en función de las coordenadas nodales del cuerpo, se puede expresar la Ec. (4.21), que representa la posición de dicho punto con respecto al sistema de coordenadas del cuerpo  $i$ , en la forma

$$\bar{u}^{ij} = \bar{u}_{ff}^{ij} + \bar{m}_{fs}^{ij} + \Delta \bar{u}_{fs}^{ij} \quad (4.47)$$

donde

$$\bar{u}_{ff}^{ij} = C^{ij} S^{ij} \bar{C}^{ij} (\bar{q}_v^{ij} + \bar{q}_f^{ij}) \quad (4.48)$$

$$\bar{m}_{fs}^{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{m \in P^{ij}} \left( C^{im} e_1 (\bar{q}_f^{imT} \bar{C}^{imT} H_L^{im} \bar{C}^{im} \bar{q}_f^{im}) \right) \quad (4.49)$$

$$\Delta \bar{u}_{fs}^{ij} = -\frac{1}{2} C^{ij} e_1 (\bar{q}_f^{ijT} \bar{C}^{ijT} H^{ij} \bar{C}^{ij} \bar{q}_f^{ij}) \quad (4.50)$$

Al igual que en el capítulo anterior, se desea llegar a una expresión del vector de posición de un punto en función de las coordenadas generalizadas del problema. Para ello hay que realizar una serie de transformaciones para pasar del espacio de las coordenadas nodales en el elemento al de las coordenadas modales en el cuerpo, las cuales se describen a continuación.

**Condiciones de conectividad:** Mediante la matriz booleana  $B_1^{ij}$  se identifican las coordenadas nodales elementales  $q_n^{ij}$  con las coordenadas nodales del cuerpo  $q_n^i$  según

$$q_n^{ij} = B_1^{ij} q_n^i \quad (4.51)$$

ó

$$q_o^{ij} = B_1^{ij} q_o^i \quad (4.52)$$

$$\bar{q}_f^{ij} = B_1^{ij} \bar{q}_f^i \quad (4.53)$$

expresiones que, sustituidas en la Ec. (4.47), dan lugar a que sus componentes se puedan representar como

$$\bar{u}_{ff}^{ij} = C^{ij} S^{ij} \bar{C}^{ij} B_1^{ij} (q_o^i + \bar{q}_f^i) \quad (4.54)$$

$$\bar{m}_{fs}^{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{m \in P^{ij}} \left( C^{im} e_1 (\bar{q}_f^i)^T B_1^{imT} \bar{C}^{imT} H_L^{im} \bar{C}^{im} B_1^{im} \bar{q}_f^i \right) \quad (4.55)$$

$$\Delta \bar{u}_{fs}^{ij} = -\frac{1}{2} C^{ij} e_1 (\bar{q}_f^i)^T B_1^{ijT} \bar{C}^{ijT} H^{ij} \bar{C}^{ij} B_1^{ij} \bar{q}_f^i \quad (4.56)$$

Las expresiones anteriores pueden escribirse de forma más compacta si se definen las siguientes matrices:

$$N^{ij} = C^{ij} S^{ij} \bar{C}^{ij} B_1^{ij} \quad (4.57)$$

$$\mathbf{R}^{ij} = \mathbf{B}_i^{ijT} \overline{\mathbf{C}}^{ijT} \mathbf{H}^{ij} \overline{\mathbf{C}}^{ij} \mathbf{B}_i^{ij} \quad (4.58)$$

$$\mathbf{R}_L^{ij} = \mathbf{B}_i^{ijT} \overline{\mathbf{C}}^{ijT} \mathbf{H}_L^{ij} \overline{\mathbf{C}}^{ij} \mathbf{B}_i^{ij} \quad (4.59)$$

La primera ya se definió en la Ec. (3.13) para la formulación NL2, mientras que las otras dos surgen de la expresión explícita del “acortamiento” por flexión. Estas matrices son independientes del tiempo, siendo además  $\mathbf{R}_L^{ij}$  independiente de la coordenada espacial, es decir, constante para cada elemento. Usando las definiciones anteriores, las componentes del vector posición de un punto respecto al sistema ligado al cuerpo se reescriben como

$$\overline{\mathbf{u}}_{ff}^{ij} = \mathbf{N}^{ij}(\mathbf{q}_o^i + \overline{\mathbf{q}}_f^i) = \mathbf{N}^{ij} \mathbf{q}_n^i \quad (4.60)$$

$$\overline{\mathbf{m}}_{fs}^{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{m \in P^{\nu}} \left( \mathbf{C}^{im} \mathbf{e}_1(\overline{\mathbf{q}}_f^i{}^T \mathbf{R}_L^{im} \overline{\mathbf{q}}_f^i) \right) \quad (4.61)$$

$$\Delta \overline{\mathbf{u}}_{fs}^{ij} = -\frac{1}{2} \mathbf{C}^{ij} \mathbf{e}_1(\overline{\mathbf{q}}_f^i{}^T \mathbf{R}^{ij} \overline{\mathbf{q}}_f^i) \quad (4.62)$$

El vector de posición cuyas componentes se acaban de escribir se puede comparar con la Ec. (3.12) que representa el mismo vector para la formulación NL2. Ambas ecuaciones representan la misma magnitud,  $\overline{\mathbf{u}}^{ij}$ , pero mientras que en la formulación NL2, el desplazamiento debido al “acortamiento” por flexión se encuentra incluido en el vector de coordenadas nodales, en la formulación NL3 dicho desplazamiento se halla expresado en los términos  $\overline{\mathbf{m}}_{fs}^{ij}$  y  $\Delta \overline{\mathbf{u}}_{fs}^{ij}$ .

## 4.2 Condiciones de referencia

La posición de un punto del elemento  $j$  perteneciente al cuerpo  $i$ , en el sistema de referencia global, está definida por

$$\mathbf{r}^{ij} = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \overline{\mathbf{u}}^{ij} \quad (4.63)$$

o sustituyendo la Ec. (4.47), por

$$\begin{aligned} r^{ij} &= R^i + A^i(\bar{u}_{ff}^{ij} + \bar{m}_{fs}^{ij} + \Delta\bar{u}_{fs}^{ij}) \\ &= R^i + u_{ff}^{ij} + m_{fs}^{ij} + \Delta u_{fs}^{ij} \end{aligned} \quad (4.64)$$

donde  $u_{ff}^{ij}$ ,  $m_{fs}^{ij}$  y  $\Delta u_{fs}^{ij}$  están expresados en el sistema de coordenadas asociado al cuerpo.

Como se vió en el capítulo anterior, la representación de los desplazamientos de la Ec. (4.47) contiene el movimiento de sólido rígido del elemento con respecto al sistema de coordenadas del cuerpo. Para eliminarlo se imponen una serie de condiciones de referencia. Estas condiciones, que relacionan entre sí las componentes del vector de coordenadas elásticas nodales, se usan para expresar el vector de coordenadas elásticas nodales  $\bar{q}_f^i$  en función de un nuevo conjunto de coordenadas nodales elásticas independientes  $q_f^i$ , a través de la matriz  $B_2^i$ .

$$\begin{aligned} q_n^i &= q_o^i + \bar{q}_f^i \\ &= q_o^i + B_2^i q_f^i \end{aligned} \quad (4.65)$$

Si además se usa el método de la Síntesis de Componentes para reducir el número de coordenadas,  $q_f^i$  se puede expresar como

$$q_f^i = \bar{B}_m^i p_f^i \quad (4.66)$$

donde  $\bar{B}_m^i$  es una matriz cuyas columnas son los modos estáticos y/o dinámicos del cuerpo, obtenidos usando las condiciones de contorno impuestas por las condiciones de referencia expresadas en la matriz  $B_2^i$ , y  $p_f^i$  son las coordenadas modales elásticas, cuyo número debe ser significativamente inferior al de las componentes de  $q_f^i$ . La forma y número de los vectores de Ritz que forman la matriz  $\bar{B}_m^i$  se eligen dependiendo de la geometría del sistema y de sus condiciones de funcionamiento. Usando las Ecs. (4.65) y (4.66), es posible expresar los tres últimos términos del

vector de posición de la Ec. (4.64) en función de las coordenadas modales elásticas:

$$u_{ff}^{ij} = A^i N^{ij} (q_o^i + B_2^i \bar{B}_m^i p_f^i) \quad (4.67)$$

$$m_{fs}^{ij} = -\frac{1}{2} A^i \sum_{m \in P^U} \left( C^{im} e_1 (p_f^i T \bar{B}_m^i T B_2^i T R_L^{im} B_2^i \bar{B}_m^i p_f^i) \right) \quad (4.68)$$

$$\Delta u_{fs}^{ij} = -\frac{1}{2} A^i C^{ij} e_1 (p_f^i T \bar{B}_m^i T B_2^i T R^{ij} B_2^i \bar{B}_m^i p_f^i) \quad (4.69)$$

Usando estas expresiones se consigue representar el vector de posición de un punto, respecto al sistema de coordenadas global, en función de las coordenadas de referencia ( $R^i, \theta^i$ ) y de las coordenadas elásticas  $p_f^i$  del cuerpo  $i$ .

Para simplificar la escritura de las ecuaciones se definen unas nuevas matrices a partir de las definidas en las Ecs. (4.57), (4.58) y (4.59) como

$$N_m^{ij} = N^{ij} B_2^i \bar{B}_m^i \quad (4.70)$$

$$R_m^{ij} = \bar{B}_m^i T B_2^i T R^{ij} B_2^i \bar{B}_m^i \quad (4.71)$$

$$R_{Lm}^{ij} = \bar{B}_m^i T B_2^i T R_L^{ij} B_2^i \bar{B}_m^i \quad (4.72)$$

donde el subíndice  $m$  hace referencia a que son matrices modales ya que incluyen la matriz de vectores de Ritz,  $\bar{B}_m^i$ . Usando esta nueva notación, los tres últimos términos de la Ec. (4.64) pueden expresarse ahora como

$$u_{ff}^{ij} = A^i N^{ij} q_o^i + A^i N_m^{ij} p_f^i \quad (4.73)$$

$$m_{fs}^{ij} = -\frac{1}{2} A^i \sum_{m \in P^U} \left( C^{im} e_1 (p_f^i T R_{Lm}^{im} p_f^i) \right) \quad (4.74)$$

$$\Delta u_{fs}^{ij} = -\frac{1}{2} \mathbf{A}^i \mathbf{C}^{ij} \mathbf{e}_1 (\mathbf{p}_f^i{}^T \mathbf{R}_m^{ij} \mathbf{p}_f^i) \quad (4.75)$$

A continuación, al igual que se hizo en el capítulo anterior, se desarrollan las ecuaciones del movimiento de cada cuerpo usando un procedimiento energético. Las matrices de masa y rigidez y los vectores de fuerzas generalizadas, tanto externas como internas, para el cuerpo completo se obtienen por ensamblado de las matrices y vectores elementales. A estas ecuaciones hay que añadirles las ecuaciones de restricción, que definen el movimiento relativo entre los cuerpos, para obtener el sistema completo de ecuaciones que gobiernan el comportamiento dinámico de un sistema multicuerpo flexible.

### 4.3 Energía cinética de un elemento

La energía cinética de un elemento  $j$  perteneciente al cuerpo  $i$  se define como

$$T^{ij} = \frac{1}{2} \int_{V^{ij}} \rho^{ij} \dot{\mathbf{r}}^{ijT} \dot{\mathbf{r}}^{ij} dV^{ij} \quad (4.76)$$

La energía cinética depende, pues, de la derivada temporal del vector de posición. La expresión de  $\dot{\mathbf{r}}^{ij}$  para la formulación geoméricamente no lineal NL3 se obtiene derivando con respecto al tiempo la Ec. (4.64):

$$\dot{\mathbf{r}}^{ij} = \dot{\mathbf{R}}^i + \dot{\mathbf{u}}_{ff}^{ij} + \dot{\mathbf{m}}_{fs}^{ij} + \Delta \dot{\mathbf{u}}_{fs}^{ij} \quad (4.77)$$

donde

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{ff}^{ij} &= \mathbf{A}_\theta^i (N^{ij} \mathbf{q}_\theta^i + N_m^{ij} \mathbf{p}_f^i) \dot{\theta}^i + \mathbf{A}^i N_m^{ij} \dot{\mathbf{p}}_f^i \\ \dot{\mathbf{m}}_{fs}^{ij} &= -\frac{1}{2} \mathbf{A}_\theta^i \sum_{m \in P^{ij}} \left( \mathbf{C}^{im} \mathbf{e}_1 (\mathbf{p}_f^i{}^T \mathbf{R}_{L_m}^{im} \mathbf{p}_f^i) \right) \dot{\theta}^i \\ &\quad - \mathbf{A}^i \sum_{m \in P^{ij}} \left( \mathbf{C}^{im} \mathbf{e}_1 (\mathbf{p}_f^i{}^T \mathbf{R}_{L_m}^{im} \dot{\mathbf{p}}_f^i) \right) \end{aligned}$$

$$\Delta \dot{\mathbf{u}}_{fs}^{ij} = -\frac{1}{2} \mathbf{A}_\theta^i \mathbf{C}^{ij} \mathbf{e}_1 (\mathbf{p}_f^i)^T \mathbf{R}_m^{ij} \mathbf{p}_f^i \theta^i - \mathbf{A}^i \mathbf{C}^{ij} \mathbf{e}_1 (\mathbf{p}_f^i)^T \mathbf{R}_m^{ij} \dot{\mathbf{p}}_f^i$$

El vector velocidad  $\dot{\mathbf{r}}^{ij}$  se puede escribir como el producto de una matriz por un vector, siendo este vector la derivada temporal del vector de coordenadas generalizadas, o vector de velocidades generalizadas, del cuerpo  $i$ . Es decir,

$$\dot{\mathbf{r}}^{ij} = \mathbf{L}^{ij} \dot{\mathbf{q}}^i + \mathbf{L}_{fs}^{ij} \dot{\mathbf{q}}^i = (\mathbf{L}^{ij} + \mathbf{L}_{fs}^{ij}) \dot{\mathbf{q}}^i \quad (4.78)$$

donde el vector de velocidades generalizadas está definido como

$$\dot{\mathbf{q}}^i = [\dot{\mathbf{R}}^i \quad \dot{\theta}^i \quad \dot{\mathbf{p}}_f^i]^T \quad (4.79)$$

De las dos matrices que aparecen en la Ec. (4.78), la primera,  $\mathbf{L}^{ij}$ , es la misma definida en el apartado 3.4 del capítulo anterior para la formulación NL2, es decir,

$$\mathbf{L}^{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{A}_\theta^i (\mathbf{N}^{ij} \mathbf{q}_\theta^i + \mathbf{N}_m^{ij} \mathbf{p}_f^i) & \mathbf{A}^i \mathbf{N}_m^{ij} \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

y  $\mathbf{L}_{fs}^{ij}$  es una nueva matriz que aparece en la formulación NL3 para tener en cuenta la contribución explícita del “acortamiento” por flexión a través de  $\dot{\mathbf{m}}_{fs}^{ij}$  y  $\Delta \dot{\mathbf{u}}_{fs}^{ij}$  y que puede definirse como

$$\mathbf{L}_{fs}^{ij} = \begin{pmatrix} (\mathbf{L}_{fs}^{ij})_R & (\mathbf{L}_{fs}^{ij})_\theta & (\mathbf{L}_{fs}^{ij})_f \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

con

$$(\mathbf{L}_{fs}^{ij})_R = \mathbf{0}$$



$$\begin{aligned}
 (L_{f_s}^{ij})_0 &= -\frac{1}{2}A_\theta^i \left( \sum_{m \in I^{ij}} (C^{im} e_1 (p_f^i)^T R_{l,m}^{im} p_f^i) + C^{ij} e_1 (p_f^i)^T R_m^{ij} p_f^i \right) \\
 (L_{f_s}^{ij})_f &= -A^i \left( \sum_{m \in I^{ij}} (C^{im} e_1 p_f^i)^T R_{L_m}^{im} \right) + C^{ij} e_1 p_f^i)^T R_m^{ij}
 \end{aligned}$$

$L_{f_s}^{ij}$  es la matriz que multiplicada por el vector de velocidades generalizadas expresa explícitamente la velocidad de un punto debida al "acortamiento" por flexión.

Sustituyendo la expresión condensada del vector velocidad de un punto de la Ec. (4.78) en la definición de la energía cinética de la Ec. (4.76) se obtiene la expresión de ésta en función de dos matrices de masa:

$$T^{ij} = \frac{1}{2} \dot{q}^{iT} M^{ij} \dot{q}^i + \frac{1}{2} \dot{q}^{iT} M_{f_s}^{ij} \dot{q}^i \quad (4.82)$$

donde  $M^{ij}$  y  $M_{f_s}^{ij}$  están definidas por

$$M^{ij} = \int_{V^{ij}} \rho^{ij} L^{ijT} L^{ij} dV^{ij} \quad (4.83)$$

y

$$\begin{aligned}
 M_{f_s}^{ij} &= \int_{V^{ij}} \rho^{ij} L_{f_s}^{ijT} L_{f_s}^{ij} dV^{ij} \\
 &+ \int_{V^{ij}} \rho^{ij} L^{ijT} L_{f_s}^{ij} dV^{ij} \\
 &+ \int_{V^{ij}} \rho^{ij} L_{f_s}^{ijT} L^{ij} dV^{ij}
 \end{aligned} \quad (4.84)$$

Por su definición  $M^{ij}$  es idéntica a la matriz de masa definida para la formulación NL2, expresada en la Ec. (3.57). Sin embargo, la otra matriz de masa,  $M_{f_s}^{ij}$ , es propia de la formulación NL3. Escrita matricialmente

se puede expresar como

$$M_{fs}^{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{m}_{R\theta} & \mathbf{m}_{Rf} \\ & m_{\theta\theta} & \mathbf{m}_{\theta f} \\ \text{simétrica} & & \mathbf{m}_{ff} \end{pmatrix}_{fs}^{ij} \quad (4.85)$$

donde las distintas expresiones explícitas de las submatrices se encuentran desarrolladas en el apéndice B.

## 4.4 Energía cinética de la viga

La energía cinética del cuerpo  $i$  se puede determinar sumando las energías cinéticas de sus elementos, por lo que la matriz de masa del cuerpo se obtiene sumando las matrices de masa elementales. Es decir,

$$T^i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^{iT} M^{*i} \dot{\mathbf{q}}^i \quad (4.86)$$

donde

$$M^{*i} = \sum_{j=1}^{ne} M^{*ij} = \sum_{j=1}^{ne} (M^{ij} + M_{fs}^{ij}) \quad (4.87)$$

La definición de la matriz de masa elemental  $M^{ij}$  se realizó en el capítulo anterior, y la de la matriz elemental  $M_{fs}^{ij}$  debida a la contribución explícita del “acortamiento” por flexión se ha realizado en el apartado previo.

## 4.5 Energía potencial de un elemento

La expresión que representa la energía potencial para un elemento viga  $j$  perteneciente a un cuerpo  $i$  en el plano es, como se presentó en el capítulo

anterior:

$$\begin{aligned}
 U^{ij} = & \frac{1}{2} \int_0^{L^{ij}} E^{ij} A^{ij} \left( \frac{\partial u^{ij}}{\partial x^{ij}} \right)^2 dx^{ij} + \frac{1}{2} \int_0^{L^{ij}} E^{ij} I^{ij} \left( \frac{\partial^2 v^{ij}}{\partial x^{ij2}} \right)^2 dx^{ij} \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^{L^{ij}} E^{ij} A^{ij} \frac{\partial u^{ij}}{\partial x^{ij}} \left( \frac{\partial v^{ij}}{\partial x^{ij}} \right)^2 dx^{ij} + \frac{1}{8} \int_0^{L^{ij}} E^{ij} A^{ij} \left( \frac{\partial v^{ij}}{\partial x^{ij}} \right)^4 dx^{ij} \quad (4.88)
 \end{aligned}$$

Los desplazamientos  $u^{ij}$  y  $v^{ij}$  que aparecen en la expresión anterior, se refieren a los desplazamientos relativos al sistema de coordenadas elemental, o al elemental intermedio (son los mismos), en la dirección del elemento indeformado y perpendicular a él, respectivamente. En la notación que se viene utilizando a lo largo de este capítulo, estos desplazamientos están representados por

$$\begin{pmatrix} u^{ij} \\ v^{ij} \end{pmatrix} = \bar{w}_f^{*ij} + \bar{n}_{fs}^{ij} + \Delta \bar{w}_{fs}^{ij} \quad (4.89)$$

Para introducir ambos desplazamientos en la expresión de la energía potencial es necesario hallar su derivada con respecto a la coordenada espacial a lo largo del eje del elemento. Derivando la expresión anterior se obtiene

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u^{ij}}{\partial x^{ij}} \\ \frac{\partial v^{ij}}{\partial x^{ij}} \end{pmatrix} = \frac{\partial \bar{w}_f^{*ij}}{\partial x^{ij}} + \frac{\partial}{\partial x^{ij}} \Delta \bar{w}_{fs}^{ij} \quad (4.90)$$

donde se ha tenido en cuenta que el desplazamiento debido al “acortamiento” por flexión del nodo extremo del elemento es función del tiempo pero no de la coordenada espacial, puesto que está asociado a un nodo determinado.

Usando las expresiones (4.7) y (4.32) obtenidas en el primer apartado, se verifica que

$$\frac{\partial \bar{w}_f^{*ij}}{\partial x^{ij}} = \frac{\partial S^{ij}}{\partial x^{ij}} \bar{e}_f^{ij} \quad (4.91)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x^{ij}} \Delta \bar{w}_{fs}^{ij} = -\frac{1}{2} \mathbf{e}_1 \left( \bar{\mathbf{e}}_f^{ijT} \frac{\partial \mathbf{H}^{ij}}{\partial x^{ij}} \bar{\mathbf{e}}_f^{ij} \right) \quad (4.92)$$

Para obtener las expresiones explícitas de las derivadas de los desplazamientos  $u^{ij}$  y  $v^{ij}$ , se particiona la matriz  $\mathbf{S}^{ij}$  en dos submatrices,  $\mathbf{S}_t^{ij}$  y  $\mathbf{S}_l^{ij}$ , que representan su primera y segunda fila, respectivamente. Además, si se desea escribir también la matriz  $\mathbf{H}^{ij}$  en términos de las funciones de forma, de su definición de la Ec. (4.28) se desprende que

$$\frac{\partial \mathbf{H}^{ij}}{\partial x^{ij}} = \left( \frac{\partial \mathbf{S}_t^{ij}}{\partial x^{ij}} \right)^T \left( \frac{\partial \mathbf{S}_l^{ij}}{\partial x^{ij}} \right) \quad (4.93)$$

Usando las ecuaciones anteriores, la Ec. (4.90) se puede expresar como

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u^{ij}}{\partial x^{ij}} \\ \frac{\partial v^{ij}}{\partial x^{ij}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{S}^{ij}}{\partial x^{ij}} \bar{\mathbf{e}}_f^{ij} - \frac{1}{2} \left( \bar{\mathbf{e}}_f^{ijT} \left( \frac{\partial \mathbf{S}_t^{ij}}{\partial x^{ij}} \right)^T \left( \frac{\partial \mathbf{S}_l^{ij}}{\partial x^{ij}} \right) \bar{\mathbf{e}}_f^{ij} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{S}_l^{ij}}{\partial x^{ij}} \bar{\mathbf{e}}_f^{ij} \end{pmatrix} \quad (4.94)$$

Una vez conocidas las expresiones de las derivadas de los desplazamientos en función de las coordenadas nodales elásticas del elemento, se sustituyen en la expresión de la energía de deformación de la Ec. (4.88). En la expresión resultante es posible cancelar muchos términos, llegándose a la simple representación siguiente

$$\begin{aligned} U^{ij} &= \frac{1}{2} \int_0^{L^{ij}} E^{ij} A^{ij} \bar{\mathbf{e}}_f^{ijT} \left( \frac{\partial \mathbf{S}_l^{ij}}{\partial x^{ij}} \right)^T \left( \frac{\partial \mathbf{S}_l^{ij}}{\partial x^{ij}} \right) \bar{\mathbf{e}}_f^{ij} dx^{ij} \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{L^{ij}} E^{ij} I^{ij} \bar{\mathbf{e}}_f^{ijT} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{S}_l^{ij}}{\partial x^{ij2}} \right)^T \left( \frac{\partial^2 \mathbf{S}_l^{ij}}{\partial x^{ij2}} \right) \bar{\mathbf{e}}_f^{ij} dx^{ij} \quad (4.95) \end{aligned}$$

La ecuación anterior es idéntica a la Ec. (3.72) que definía la energía potencial lineal  $U_l^{ij}$  para la formulación NL2. Por tanto, haciendo uso

de las mismas transformaciones, es posible reescribirla como

$$U^{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{iT} \mathbf{K}_l^{ij} \mathbf{q}^i \quad (4.96)$$

estando definida  $\mathbf{K}_l^{ij}$  en el apartado 3.6.1.

Se observa, pues, que mientras que la expresión de la matriz de masa para la formulación NL3 es mucho más complicada que para la formulación NL2 (se ha definido una matriz de masa adicional,  $\mathbf{M}_{f_s}^{ij}$ ), ocurre lo contrario con la expresión de la matriz de rigidez (para la formulación NL2 se definen dos matrices de rigidez adicionales,  $\mathbf{K}_g^{ij}$  y  $\mathbf{K}_h^{ij}$ ). Es decir, las no linealidades geométricas se trasladan desde las fuerzas elásticas generalizadas en la formulación NL2, a las fuerzas de inercia generalizadas en la formulación NL3.

## 4.6 Energía potencial de la viga

La energía potencial del cuerpo  $i$  se puede determinar sumando las energías de deformación de todos sus elementos, por lo que la matriz de rigidez del cuerpo se obtiene sumando las matrices de rigidez elementales. Es decir,

$$U^i = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{iT} \mathbf{K}_l^i \mathbf{q}^i \quad (4.97)$$

donde

$$\mathbf{K}_l^i = \sum_{j=1}^{nl} \mathbf{K}_l^{ij} \quad (4.98)$$

## 4.7 Restricciones cinemáticas

Una restricción cinemática entre dos cuerpos impone condiciones sobre el movimiento relativo entre ambos. Las restricciones pueden representarse mediante ecuaciones algebraicas de restricción de la forma

$$\mathbf{C}^*(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (4.99)$$

que han de añadirse al sistema de ecuaciones diferenciales del movimiento para obtener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, y poder simular el comportamiento dinámico de los sistemas multicuerpos flexibles.

Las ecuaciones de restricción algebraicas se escriben en función de las coordenadas generalizadas  $q$  que describen la configuración del sistema. Como estas coordenadas son diferentes para las formulaciones NL2 y NL3, también lo serán las expresiones de las ecuaciones de restricción y de la matriz jacobiana de las restricciones. Se va a desarrollar, como ejemplo, las ecuaciones que caracterizan a un par de rotación. Los cuerpos  $i$  y  $j$  unidos por el par de rotación son dos cuerpos flexibles, siendo  $l$  y  $n$  los elementos de dichos cuerpos ligados a través del par. La condición de que el punto  $P$  sea siempre común a ambos cuerpos puede escribirse como

$$r_P^{il} = r_P^{jn} \tag{4.100}$$

o, usando la definición del vector de posición de un punto de la Ec. (4.64), como

$$R^i + u_{fs}^{il} + m_{fs}^{il} + \Delta u_{fs}^{il} - R^j - u_{fs}^{jn} - m_{fs}^{jn} - \Delta u_{fs}^{jn} = 0 \tag{4.101}$$

Es interesante resaltar que esta ecuación podría reducirse a la expresión del par de rotación para la formulación NL2 haciendo nulos todos los términos que representan explícitamente el desplazamiento por “acortamiento” por flexión, es decir,

$$m_{fs}^{il} = \Delta u_{fs}^{il} = m_{fs}^{jn} = \Delta u_{fs}^{jn} = 0 \tag{4.102}$$

La Ec. (4.101) puede escribirse explícitamente como

$$C_{rot}^*(q) = R^i + A^i N^{il} q_v^i + A^i N_m^{il} p_f^i - \frac{1}{2} A^i \sum_{m \in P^{il}} \left( C^{im} e_1 \left( p_f^i{}^T R_{l,m}^{im} p_f^i \right) \right) - \frac{1}{2} A^i C^{il} e_1 \left( p_f^i{}^T R_m^{il} p_f^i \right)$$

$$\begin{aligned}
& -R^j A^j N^{jn} q_o^j - A^j N_m^{jn} p_f^j \\
& + \frac{1}{2} A^j \sum_{m \in P^{jn}} \left( C^{jm} e_1 \left( p_f^{jT} R_{L\ m}^{jm} p_f^j \right) \right) + \frac{1}{2} A^j C^{jn} e_1 \left( p_f^{jT} R_m^{jn} p_f^j \right) = 0
\end{aligned} \tag{4.103}$$

Derivando con respecto a cada una de las coordenadas generalizadas del cuerpo se obtienen los elementos de la matriz jacobiana de las restricciones  $C_{q^i}^*$ . La contribución a esta matriz debida al par de rotación en la formulación NL3 es:

$$\frac{\partial C_{rot}^*}{\partial R^i} = I_2 \tag{4.104}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_{rot}^*}{\partial \theta^i} &= A_\theta^i N^{il} q_o^i + A_\theta^i N_m^{il} p_f^i - \frac{1}{2} A_\theta^i \left( \sum_{m \in P^{il}} C^{im} e_1 \left( p_f^{iT} R_{L\ m}^{im} p_f^i \right) \right) \\
& - \frac{1}{2} A_\theta^i C^{il} e_1 \left( p_f^{iT} R_m^{il} p_f^i \right)
\end{aligned} \tag{4.105}$$

$$\frac{\partial C_{rot}^*}{\partial p_f^i} = A^i N^{il} - A^i \left( \sum_{m \in P^{il}} C^{im} e_1 p_f^{iT} R_{L\ m}^{im} \right) - A^i C^{il} e_1 p_f^{iT} R_m^{il} \tag{4.106}$$

$$\frac{\partial C_{rot}^*}{\partial R^j} = -I_2 \tag{4.107}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_{rot}^*}{\partial \theta^j} &= -A_\theta^j N^{jn} q_o^j - A_\theta^j N_m^{jn} p_f^j + \frac{1}{2} A_\theta^j \left( \sum_{m \in P^{jn}} C^{jm} e_1 \left( p_f^{jT} R_{L\ m}^{jm} p_f^j \right) \right) \\
& + \frac{1}{2} A_\theta^j C^{jn} e_1 \left( p_f^{jT} R_m^{jn} p_f^j \right)
\end{aligned} \tag{4.108}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_{rot}^*}{\partial p_f^j} &= -A^j N^{jn} + A^j \left( \sum_{m \in P^{jm}} C^{jm} e_1 p_f^{jT} R_{L\ m}^{jm} \right) \\
& + A^j C^{jn} e_1 p_f^{jT} R_m^{jn}
\end{aligned} \tag{4.109}$$

### 4.8 Ecuaciones de Lagrange de la viga

Las ecuaciones de Lagrange para un cuerpo con restricciones, como son los que componen los sistemas multicuerpos flexibles se pueden escribir como

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^i}{\partial \dot{q}^i} \right)^T - \left( \frac{\partial T^i}{\partial q^i} \right)^T + \left( \frac{\partial U^i}{\partial q^i} \right)^T + C_{q^i}^{*T} \lambda = Q_e^{*i} \quad (4.110)$$

$$C^*(q, t) = 0 \quad (4.111)$$

donde se utiliza el asterisco para señalar las matrices y vectores que difieren de las que constituyen la ecuación del movimiento en la formulación lineal o formulación de pequeños desplazamientos elásticos. Se puede recordar que la ecuación del movimiento para la formulación NL2 tan sólo difería en la inclusión de dos matrices de rigidez geométrica  $K_g^i$  y  $K_h^i$  y un vector de fuerzas elásticas no lineales  $Q_r^i$ .

La contribución de la energía cinética a la ecuación del movimiento se puede explicitar como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^i}{\partial \dot{q}^i} \right)^T - \left( \frac{\partial T^i}{\partial q^i} \right)^T &= M^{*i} \ddot{q}^i - \dot{M}^{*i} \dot{q}^i + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial q^i} (\dot{q}^{iT} M^{*i} \dot{q}^i) \right]^T \\ &= M^{*i} \ddot{q}^i - Q_v^i \end{aligned} \quad (4.112)$$

donde  $M^{*i} = M^i + M_{fs}^i$ , y la de la energía potencial de deformación como

$$\left( \frac{\partial U^i}{\partial q^i} \right)^T = K_l^i q^i \quad (4.113)$$

Por lo que la ecuación del movimiento de un cuerpo  $i$  del sistema se



puede expresar como

$$M^{*i}\ddot{q}^i + K_l^i q^i + C_{\dot{q}^i}^{*T} \lambda = Q_e^{*i} + Q_v^i \quad (4.114)$$

En la ecuación anterior se observa que el único término que permanece idéntico al de la formulación de pequeños desplazamientos elásticos es la matriz de rigidez, exactamente todo lo contrario a lo que ocurre en la formulación NL2.

## 4.9 Comentarios finales

En este capítulo se ha desarrollado una formulación que incluye las no linealidades geométricas elásticas en las ecuaciones del movimiento, manteniendo la eficiencia computacional debido a dos factores principalmente:

1. La inclusión de los términos de orden superior del tensor de deformaciones se manifiesta en la ecuación del movimiento en una forma más compleja de las matrices y vectores que ya eran originalmente no lineales debido a las rotaciones finitas de sólido rígido. Sin embargo, preserva la constancia de la matriz de rigidez.
2. Al expresar explícitamente el “acortamiento” debido a la flexión, es capaz de incluir las no linealidades geométricas elásticas aún despreciando las vibraciones longitudinales de los elementos. Esto hace posible obtener una respuesta que incluya la rigidización por tensión prescindiendo de la contribución de los modos de frecuencias altas, lo que agiliza sustancialmente el proceso de resolución.

## Capítulo 5

# Resultados Numéricos

En este capítulo se presentan algunos resultados numéricos que permitirán validar y mostrar la eficiencia de los métodos propuestos en los capítulos anteriores. El capítulo se divide en dos partes. En la primera se discuten resultados de las formulaciones usando modos supuestos expuestas en el segundo capítulo. En esta parte se trata de contestar dos preguntas: (1) ¿En qué aplicaciones es necesario incluir términos de orden superior en la expresión de la energía de deformación?, y (2) ¿Cuál es el costo computacional asociado a la inclusión de estos términos? En la segunda parte del capítulo se presentan simulaciones realizadas con las formulaciones de elementos finitos discutidas en los capítulos tercero y cuarto. En ella se estudian varios ejemplos diferentes para analizar la validez de la teoría y la influencia de las no linealidades geométricas debidas a la deformación en diferentes situaciones, por ejemplo, cuando hay más de un cuerpo flexible.

### 5.1 Resultados numéricos con modos supuestos

El ejemplo elegido en este estudio numérico es el mecanismo biela-manivela mostrado en la Fig. 5.1. Este mecanismo ha sido usado en muchas investigaciones (Bakr y Shabana, 1986; Koppens, 1989) y, por lo tanto, es un buen modelo de referencia en dinámica de multicuerpos flexibles. El mecanismo está formado por una manivela rígida de longitud  $a = 0.15 \text{ m}$ , una biela elástica de longitud  $b = 0.3 \text{ m}$  y sección circular  $A$  de diámetro  $d = 0.006 \text{ m}$ , y una corredera rígida de masa  $m_{sb}$ . El mecanismo está fabricado de acero con módulo de elasticidad  $E = 0.2 \times 10^{12} \text{ Pa}$  y densidad

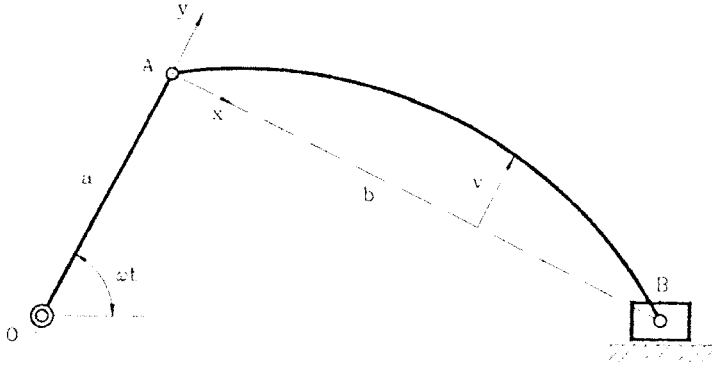


Figura 5.1: Mecanismo biela-manivela

$\rho = 7878 \text{ kg/m}^3$ . La manivela da vueltas con velocidad angular constante  $\omega$ . El efecto de la gravedad no se considera en la simulación numérica. La posición inicial del mecanismo corresponde al punto muerto superior de éste, y se supone que tanto los desplazamientos elásticos como sus derivadas son nulos. Comenzando desde esta configuración inicial, se examina la deflexión adimensional  $v/b$  del punto medio de la biela durante cuatro ciclos.

El primer paso en el modelado de la biela flexible es seleccionar el sistema de coordenadas ligado al cuerpo, y seleccionar el número y forma de las funciones que describen el campo de desplazamientos con respecto a este sistema de coordenadas. Una elección errónea puede dar lugar a una solución muy lejana a la exacta. Usando una aproximación con elementos finitos, Agrawal y Shabana (1985) examinaron la dinámica del mecanismo biela-manivela con el eje de la manivela girando a  $\omega = 150 \text{ rad/s}$ . La masa de la corredera se supuso la misma que la de la manivela, por lo que la razón entre la masa de la corredera y la masa de la biela,  $rm = m_{sb}/\rho Ab$ , tenía un valor igual a  $1/2$ . Uno de los sistemas de coordenadas ligado al cuerpo seleccionados por Agrawal y Shabana (1985) cumplía las condiciones de referencia de viga simplemente apoyada. Es-

tos autores demostraron, que para estas condiciones de funcionamiento y referencia, los dos primeros modos transversales eran suficientes para representar con una aproximación aceptable la solución bajo hipótesis de pequeños desplazamientos (formulación denominada L). De hecho, se puede demostrar que la mayor contribución procede del modo fundamental. Bakr y Shabana (1986) examinaron la dinámica del mismo mecanismo biela-manivela, introduciendo los efectos de las no linealidades geométricas debidas a la deformación, haciendo uso de la formulación denominada en esta tesis NL1. Usaron las mismas condiciones de referencia y mostraron que al menos seis modos de vibración de la viga simplemente apoyada debían ser usados en el análisis. La razón radicaba en que el sexto modo era el primer modo axial, y por tanto, si se usaban menos de seis la matriz de rigidez geométrica se transformaba en la matriz nula, reduciéndose la formulación a la lineal L. Para obtener una respuesta aproximada usando la formulación NL1 se debe introducir al menos una función de forma axial. Como los modos de vibración axiales, en general, tienen frecuencias mucho más altas que los transversales, su inclusión implica una disminución importante del paso de tiempo en el proceso de integración.

La discusión anterior pone de manifiesto que el tipo de formulación y el conjunto de funciones de forma para describir el campo de desplazamientos elásticos están relacionados entre sí. Los resultados numéricos que se presentan a continuación están obtenidos usando condiciones de referencia de simplemente apoyada. Uno de los aspectos que se discutirán en profundidad es el número de modos necesarios para converger a la solución del problema en el caso de las formulaciones no lineales de orden superior desarrolladas en esta tesis: NL2 y NL3.

### Primer caso estudiado:

El primer caso considerado en este estudio numérico es el mecanismo biela-manivela con la manivela girando a  $\omega = 180 \text{ rad/s}$ . La masa de la corredera se supone la mitad que la masa de la biela ( $rm = 1/2$ ). La respuesta del mecanismo se obtiene usando las cuatro formulaciones presentadas en el segundo capítulo.

La Fig. 5.2 muestra la solución con tres modelos distintos empleando la formulación L. En ella se representa la deflexión adimensional del punto medio de la biela versus el ángulo de la manivela. El primer modelo usa sólo el primer modo de vibración transversal de la viga simplemente apoyada; el segundo modelo usa el primer modo axial y el

primero transversal para comprobar si la inclusión de un modo axial mejora la respuesta; mientras que el tercer modelo añade a los anteriores el segundo modo transversal para ver si modos transversales superiores tienen alguna aportación significativa a la solución. De los resultados presentados en la Fig. 5.2 se deduce que los tres modelos conducen a la misma solución. En este mecanismo y con las condiciones consideradas sólo el primer modo transversal de la simplemente apoyada contribuye significativamente a la respuesta para la formulación L. La solución converge con un modo, como comprobaron Agrawal y Shabana (1985). La no contribución de modos axiales a la respuesta transversal debe analizarse más detalladamente.

El acoplamiento entre los desplazamientos elásticos axiales y transversales en un sistema multicuerpo flexible se atribuye a tres fuentes: primeramente, existe acoplamiento en los términos de inercia causado por la rotación como sólido rígido del sistema de coordenadas ligado al cuerpo; en segundo lugar, hay acoplamiento debido a que las condiciones de contorno de cada cuerpo son no concordantes; y finalmente, existe acoplamiento originado por las no linealidades geométricas debidas a los grandes desplazamientos elásticos. La formulación L desprecia éste último, pero tiene en consideración los otros dos. Sin embargo, los resultados numéricos presentados en la Fig. 5.2 demuestran que el efecto del acoplamiento debido a las dos primeras fuentes también puede ser despreciado, al menos en este caso.

Bakr y Shabana (1986) demostraron que al menos un modo axial era necesario para converger a la solución cuando se usa la formulación NL1. Este resultado se muestra en la Fig. 5.3. Cuando se usa un solo modo transversal, la respuesta es la misma que la obtenida mediante la formulación L. Sin embargo, cuando se añade el primer modo axial de la viga simplemente apoyada la respuesta cambia, lo que demuestra la importancia del acoplamiento entre los desplazamientos elásticos axiales y transversales debido a las no linealidades geométricas elásticas. Mientras que añadir más modos transversales no cambia significativamente la respuesta, se encuentra que la inclusión de una segunda función de forma axial lineal para tener en cuenta el efecto de la masa concentrada de la corredera, denominada por algunos autores como modo de corrección estática, mejoraba ligeramente la respuesta.

La Fig. 5.4 muestra la respuesta del mecanismo usando la formulación de orden superior NL2, durante aproximadamente el primer ciclo. Para esta figura se ha usado una escala diferente que para las figuras anteriores

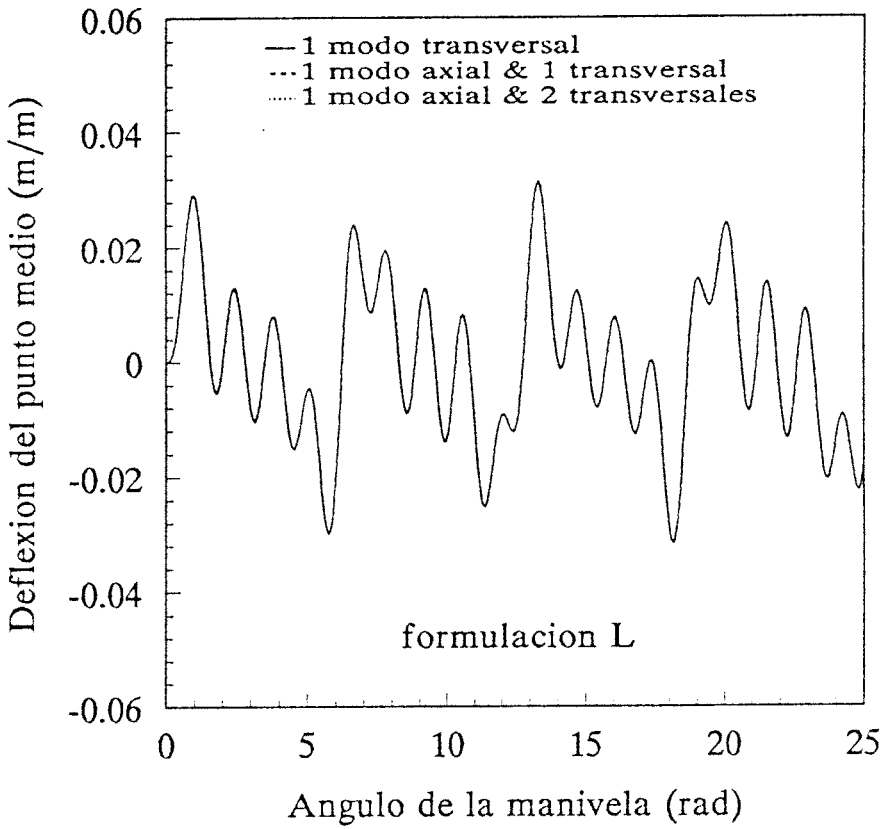


Figura 5.2: Solución con modos supuestos para  $\omega = 180 \text{ rad/s}$  y  $rm = 1/2$  usando tres conjuntos diferentes de funciones de forma

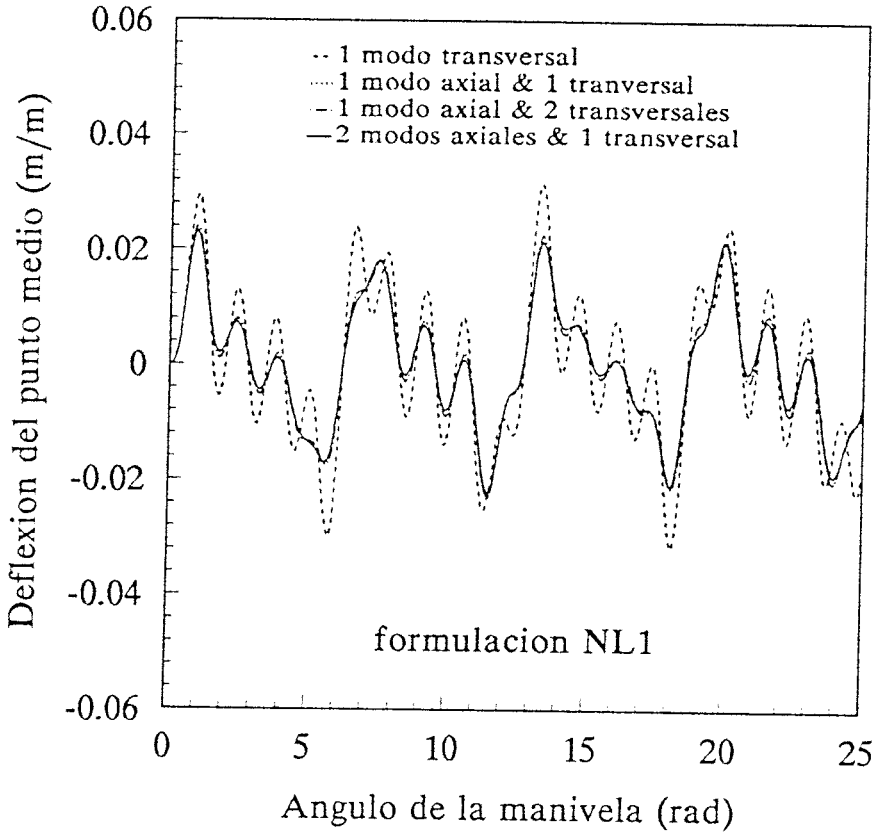


Figura 5.3: Solución con modos supuestos para  $\omega = 180 \text{ rad/s}$  y  $rm = 1/2$  usando cuatro conjuntos diferentes de funciones de forma

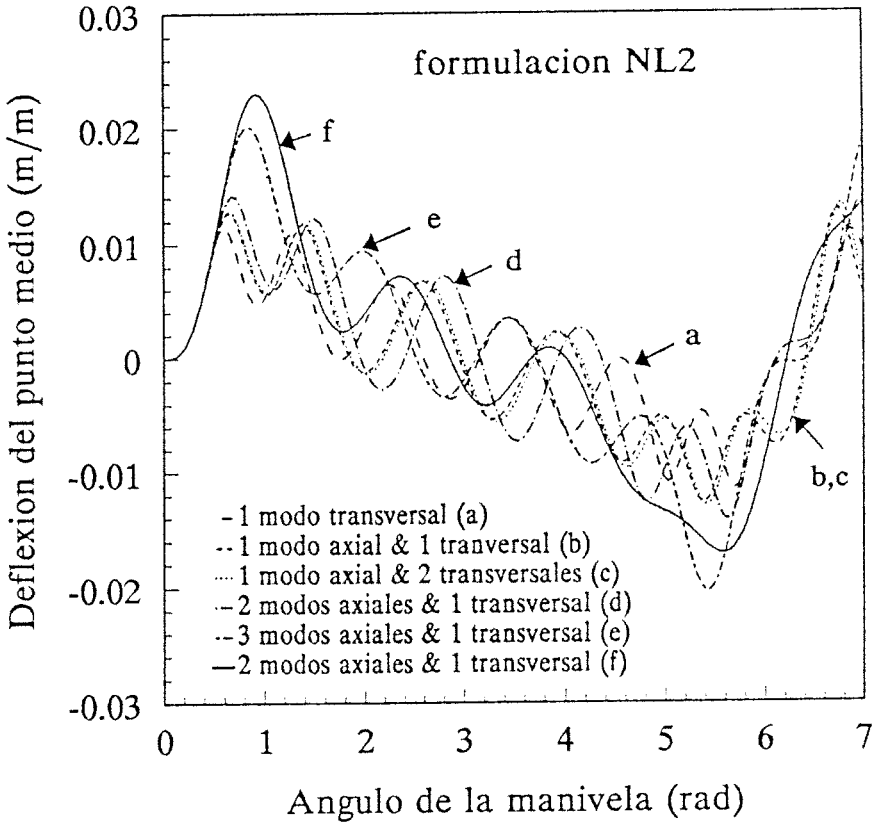


Figura 5.4: Solución con modos supuestos para  $\omega = 180 \text{ rad/s}$  y  $rm = 1/2$  usando seis conjuntos diferentes de funciones de forma



por motivos de claridad en el dibujo ya que se presentan muchas curvas. En la figura se observa que cuando se añade un modo axial al transversal (curva b) la respuesta se modifica sustancialmente, mientras que al añadir un nuevo modo transversal (curva c) esta no varía con respecto a la anterior. Si se continúa añadiendo modos axiales de vibración de la viga con un apoyo fijo de frecuencias más altas, éstos introducen modificaciones importantes en la respuesta (curvas d y e). Esto muestra el fuerte acoplamiento entre los desplazamientos elásticos axiales y transversales para esta formulación no lineal. De los resultados numéricos presentados en la Fig. 5.4 se extrae una observación interesante: la solución no parece converger al aumentar el número de modos axiales. La razón se explica a continuación. Esta formulación, como se discutió en el segundo capítulo, toma en consideración los términos de orden superior de la expresión de la energía de deformación de la Ec. (2.38). Consecuentemente, está implícitamente establecido en esta formulación que un desplazamiento transversal elástico de la viga produce un movimiento longitudinal de los puntos de la viga definido en la Ec. (2.68). Por ejemplo, si de los modos transversales sólo se excita el primero, como ocurre en el ejemplo que se está estudiando, el desplazamiento transversal elástico de los puntos de la biela se pueden escribir como

$$v(x, t) = \left( \text{scn} \pi \frac{x}{b} \right) g(t) \quad (5.1)$$

donde  $g$  representa la coordenada generalizada elástica asociada con la amplitud del primer modo. Siguiendo la Ec. (2.68), este desplazamiento transversal da lugar al siguiente desplazamiento longitudinal:

$$u_{fs} = \left( \frac{x}{b} + \frac{1}{2\pi} \text{scn} 2\pi \frac{x}{b} \right) h(t) \quad (5.2)$$

donde  $h$  es una función del tiempo que depende cuadráticamente de  $g$ . La interpretación de este desplazamiento se muestra gráficamente en la Fig. 5.5. Usando como funciones de forma los modos axiales de la viga con un apoyo fijo, se requiere un número muy elevado de modos para representar con exactitud  $u_{fs}$ . Si  $u_{fs}$  no está bien representado, existirá un error grande en el esfuerzo axial  $N = EA(u' + 1/2 v'^2)$ , conduciendo a una rigidización por deformación inexacta. Si se usan el primer modo de vibración transversal y dos funciones de forma axiales: primer modo de vibración axial y la función de forma descrita en la Ec. (5.2), se converge a la respuesta del mecanismo (curva f de la Fig. 5.4), ya que la inclusión de nuevos modos no varía la respuesta.

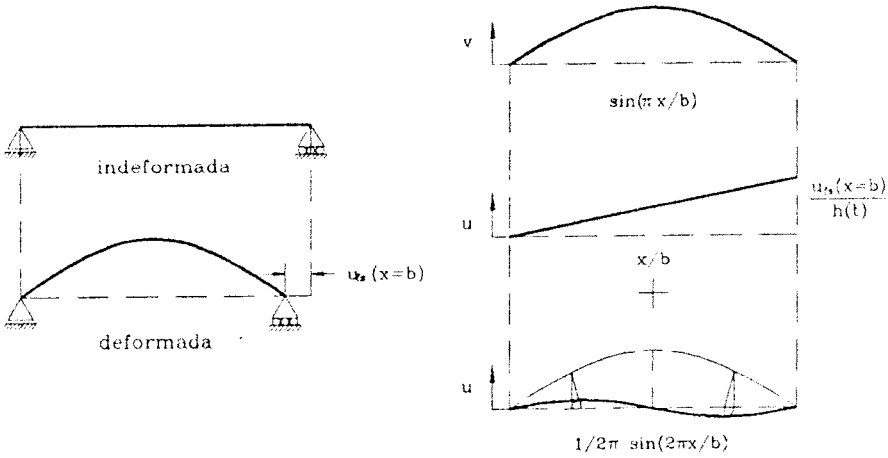


Figura 5.5: Interpretación de la función de forma axial para representar el "acortamiento" por flexión

La respuesta del mecanismo usando la formulación NL3 se muestra en la Fig. 5.6. En este caso, se alcanza la solución usando sólo el primer modo de vibración transversal, a pesar de ser una formulación no lineal como NL1 y NL2. Difiere, sin embargo, de ellas en que no requiere ninguna función de forma axial para obtener una respuesta aceptablemente aproximada a la real. Por ello, la formulación NL3 es computacionalmente muy eficiente.

La Fig. 5.7 compara las respuestas obtenidas usando las cuatro formulaciones. La Tabla 5.1 resume las funciones de forma usadas en cada análisis. Estas funciones están representados gráficamente en la Fig. 5.9. La función de forma  $a$  es el primer modo de vibración transversal para la viga simplemente apoyada; las  $b$  y  $c$  son, respectivamente, el primer y segundo modo de vibración axial para una viga con un apoyo fijo; la  $d$  representa una función de forma axial lineal; y la  $e$  es la función de forma descrita en la Ec. (5.2). Se observa que las no linealidades geométricas tienen un efecto significativo, siendo la respuesta lineal muy diferente de las no lineales. En este ejemplo las tres formulaciones no lineales conducen a la misma solución, pero no son igualmente eficientes. La Fig. 5.8

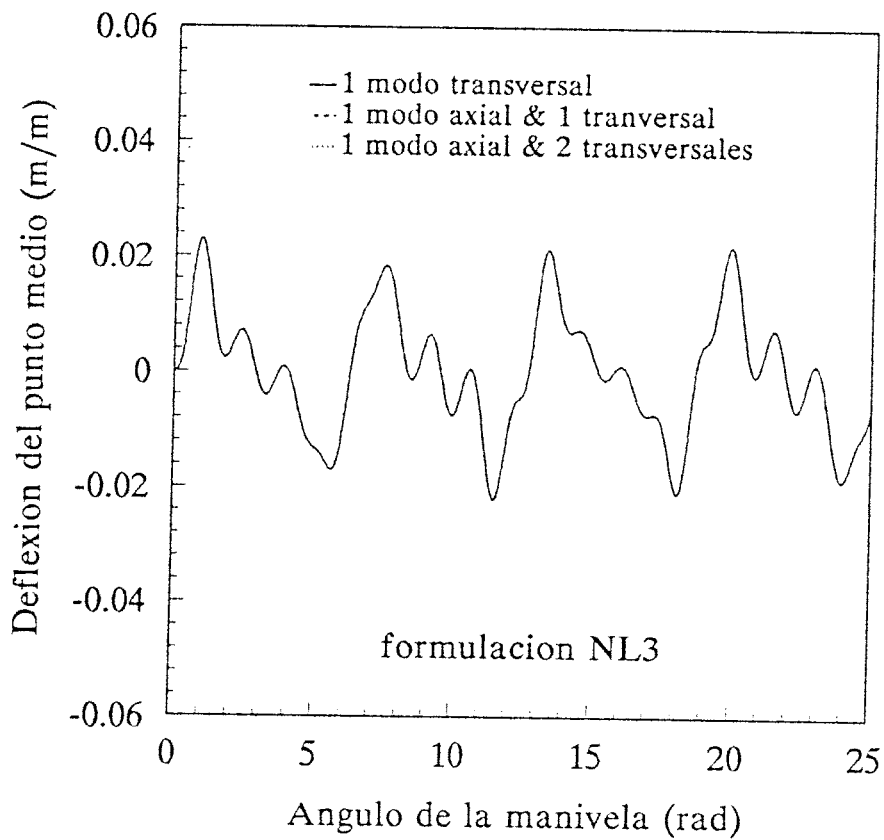


Figura 5.6: Solución con modos supuestos para  $\omega = 180 \text{ rad/s}$  y  $rm = 1/2$  usando tres conjuntos diferentes de funciones de forma

<i>rm</i>	Form.	a	b	c	d	e
1/2	L	×				
	NL1	×	×		×	
	NL2	×	×			×
	NL3	×				
3	L	×				
	NL1	×	×	×	×	
	NL2	×	×		×	×
	NL3	×	×			

Tabla 5.1: Funciones de forma usadas en la representación del campo de desplazamientos elásticos

muestra, como una medida de la eficiencia computacional, el número de evaluaciones de las funciones necesario para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. La formulación NL2 es la más ineficiente seguida de NL1. La aproximación NL3 es muy eficiente, casi tanto como la formulación lineal L. Este comportamiento se puede explicar en virtud de las funciones de forma requeridas en cada formulación para converger a la solución. La razón por la que NL3 es la más eficiente de las formulaciones no lineales es porque sólo requiere un modo transversal, ya que considera implícitamente el “acortamiento” por flexión a través de su relación con los desplazamientos transversales elásticos. Sin embargo, las formulaciones NL1 y NL2 necesitan uno transversal y dos axiales para converger a la misma solución.

**Segundo caso estudiado:**

En el ejemplo anterior se ha demostrado que una formulación de orden superior (NL3) puede ser tan eficiente como una lineal, y mucho más que algunas de las formulaciones no lineales existentes (NL1). La pregunta que surge inmediatamente es: ¿Producen todas las formulaciones no lineales siempre el mismo resultado? Para contestar esta pregunta se ha analizado otro modelo del mecanismo biela-manivela ligeramente diferente del considerado en el primer caso estudiado. Los datos del nuevo modelo son los mismos del anterior, salvo el correspondiente a la masa de la corredera, que se ha aumentado a tres veces la masa de la

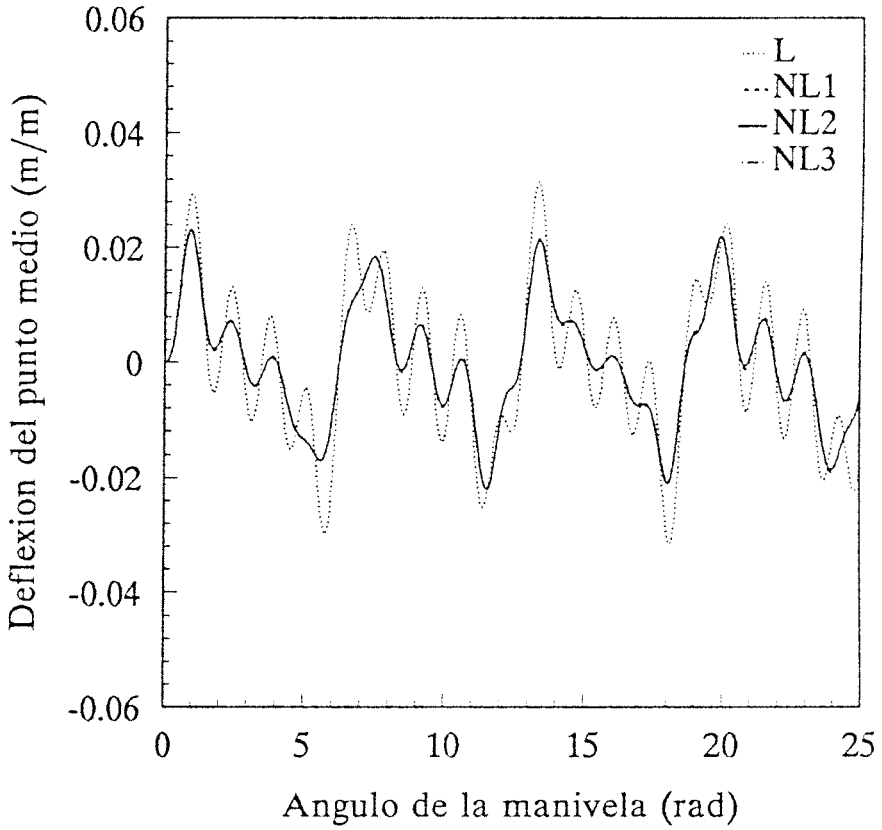


Figura 5.7: Comparación de las respuestas con modos supuestos para  $\omega = 180 \text{ rad/s}$  y  $\mu = 1/2$  usando cuatro formulaciones distintas

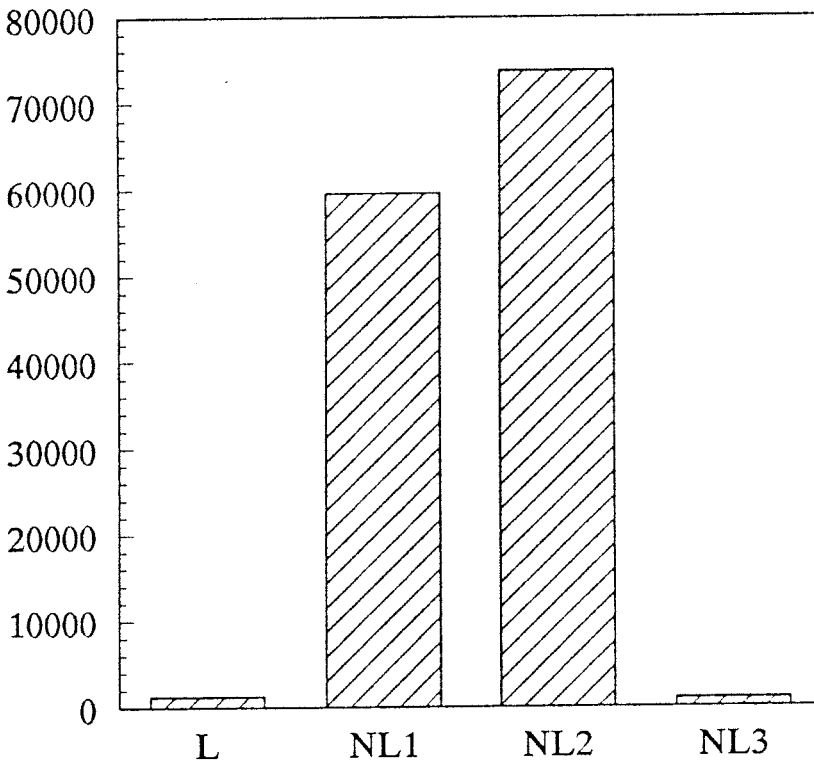


Figura 5.8: Comparación del número de las evaluaciones de las funciones necesario para resolver el sistema de ecuaciones del movimiento para  $\omega = 180 \text{ rad/s}$  y  $rm = 1/2$  usando cuatro formulaciones distintas

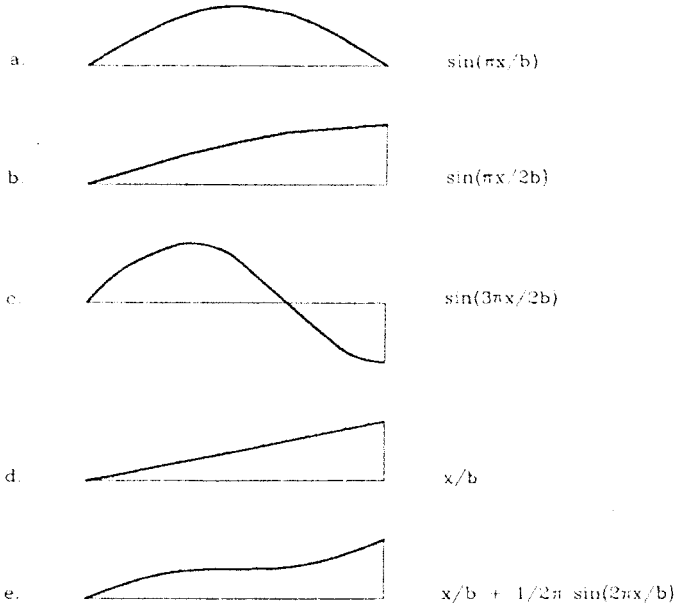


Figura 5.9: Funciones de forma usadas en las simulaciones

biela, esto es,  $rm = 3$ , con objeto de aumentar la magnitud de las fuerzas axiales. La Fig. 5.10 muestra las respuestas obtenidas usando las cuatro formulaciones, empleando en cada una de ellas las funciones de forma indicadas en la Tabla 5.1. Se observa que las respuestas no lineales no son las mismas para las tres formulaciones. Las NL2 y NL3 conducen a la misma respuesta puesto que parten de las mismas hipótesis y se han usado, además, funciones de forma apropiadas para describir el campo de desplazamientos elásticos de la NL2. Sin embargo la formulación NL3 sigue siendo mucho más eficiente que la NL2 como se comprueba observando la Fig. 5.11. La respuesta obtenida usando la formulación NL1 es diferente de las anteriores. Esto indica que los términos de la expresión de la energía de deformación no considerados en la formulación NL1 no son siempre despreciables.

### Estudio paramétrico:

Para investigar algunos factores que influyen en el comportamiento geoméricamente no lineal elástico, se ha realizado un estudio paramétrico. Se han obtenido las respuestas de la biela para distintos valores de la velocidad angular de la manivela y de la masa de la corredera. Se ha simulado el problema con valores para la velocidad de la manivela de 160, 180 y 200  $rad/s$ . Para cada una de estas velocidades, se estudian dos valores distintos de la masa de la corredera. Estos valores corresponden a las razones de masas:  $rm = 1/2$  y  $rm = 3$ . Las funciones de forma utilizadas son las mismas que se resumen en la Tabla 5.1. Las figuras desde la 5.12 hasta la 5.15 muestran el desplazamiento transversal del punto medio de la biela relativo al sistema de coordenadas ligado al cuerpo, adimensionalizado con respecto a la longitud de la biela, frente al ángulo de giro de la manivela. En este estudio paramétrico solamente se comparan las formulaciones no lineales. Los resultados de la formulación NL2 no se muestran porque esta formulación, dando lugar a las mismas soluciones que la NL3, es más ineficiente, por lo que se ha preferido trabajar con la NL3. Las Figs. 5.12 y 5.13 presentan los resultados para  $\omega = 160 rad/s$ . Para esta velocidad, las dos respuestas no lineales son muy parecidas para los dos valores de la masa de la corredera. Si la velocidad se aumenta a  $\omega = 180 rad/s$ , la situación cambia. Para  $rm = 1/2$ , ambas respuestas no lineales permanecen iguales, pero difieren considerablemente para  $rm = 3$ , como se ha visto en las Figs. 5.7 y 5.10. Resulta interesante comparar los resultados de ambos gráficos. Se observa que las respuestas para los dos valores de la razón de masas, usando la formulación



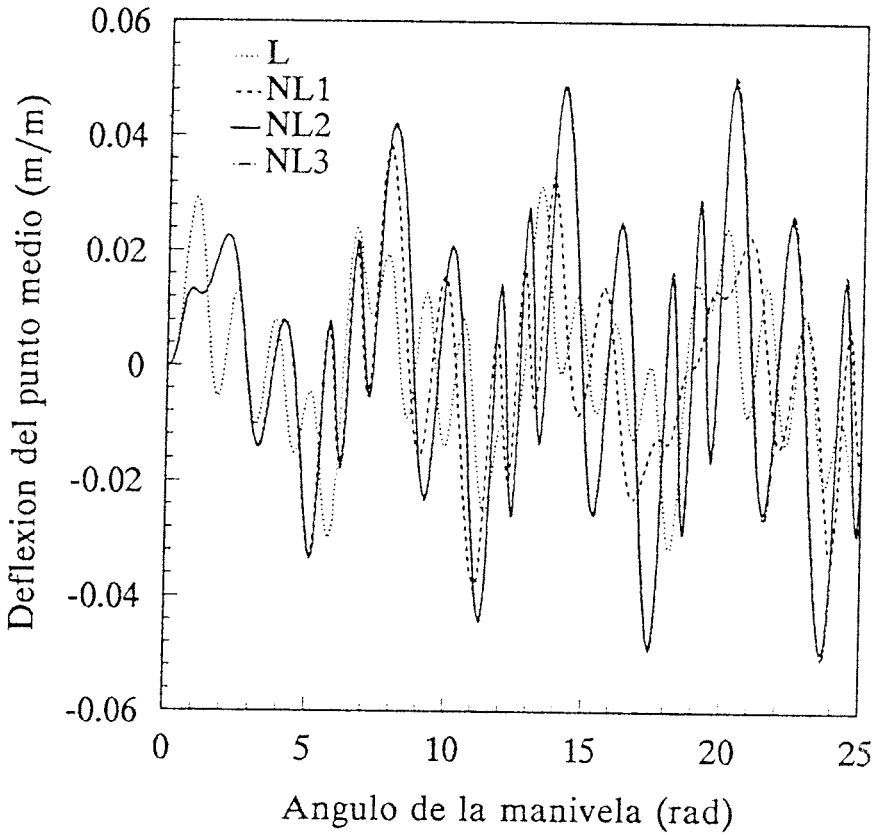


Figura 5.10: Comparación de las respuestas con modos supuestos para  $\omega = 180 \text{ rad/s}$  y  $rm = 3$  usando cuatro formulaciones distintas

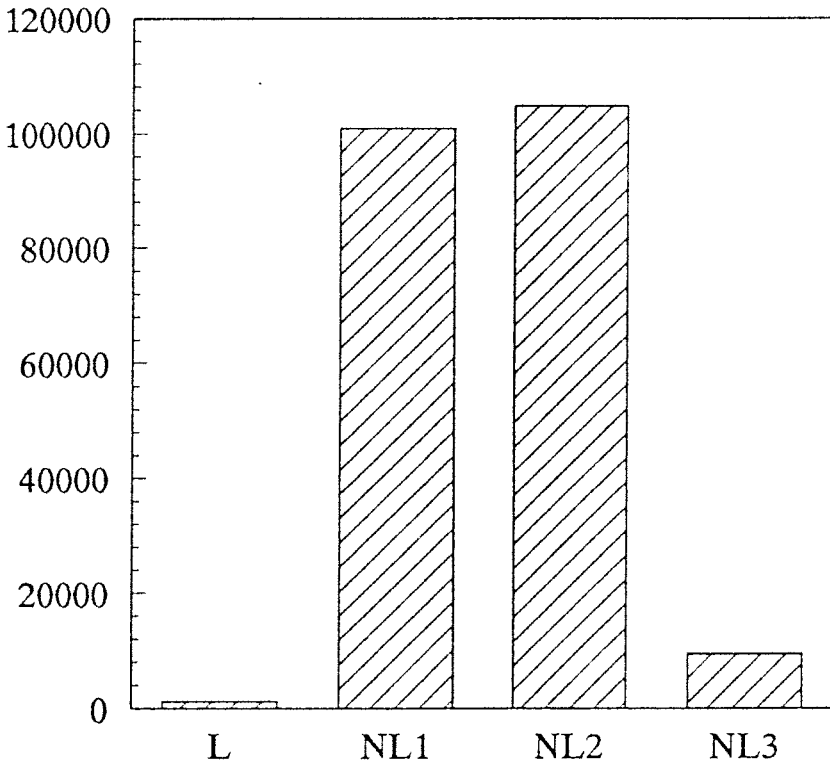


Figura 5.11: Comparación del número de las evaluaciones de las funciones necesario para resolver el sistema de ecuaciones del movimiento para  $\omega = 180 \text{ rad/s}$  y  $rm = 3$  usando cuatro formulaciones distintas

lineal, son idénticas. Sin embargo, para la formulación NL3 la máxima deflexión para  $rm = 3$  es más del doble de la deflexión en el caso en el que  $rm = 1/2$ . Esta diferencia se debe, por tanto, exclusivamente al efecto de las no linealidades geométricas elásticas. Aumentando la velocidad de giro de la manivela a  $200 \text{ rad/s}$  se obtiene una situación similar. La Fig. 5.14 muestra que, para  $rm = 1/2$ , los términos de orden superior de la expresión de la energía de deformación de la Ec (2.38) se pueden despreciar. Sin embargo, estos términos adquieren una gran importancia para valores mayores de la masa de la corredera, como se muestra en la Fig. 5.15.

## 5.2 Resultados numéricos con elementos finitos

El análisis numérico de un sistema multicuerpo con elementos finitos se ha dividido en dos pasos:

1. En primer lugar, se usa un preprocesador de elementos finitos para generar la matriz de vectores de Ritz cuya función es reducir el número de coordenadas elásticas del problema. Estos vectores de Ritz son los modos de vibración libre del cuerpo flexible con las condiciones de contorno impuestas por las condiciones de referencia. Esta es la forma general de funcionamiento, sin embargo, en algunas aplicaciones puede no ser interesante el uso de las coordenadas modales, siendo preferible el de las coordenadas nodales. En este caso la matriz de vectores de Ritz sería la matriz unidad. La salida del preprocesador de elementos finitos contiene además la matriz lineal de rigidez y los invariantes de la matriz de masa.
2. La salida del preprocesador junto con los parámetros que definen la configuración del sistema multicuerpo se introducen en el procesador principal del programa de análisis, el cual genera la respuesta del sistema.

En este apartado se analizan tres aplicaciones distintas. En primer lugar se estudia el mismo ejemplo utilizado en el análisis numérico con modos supuestos con objeto de validar las formulaciones de elementos finitos. En segundo lugar se presenta un ejemplo clásico de las formulaciones geoméricamente no lineales elásticas de sistemas multicuerpo

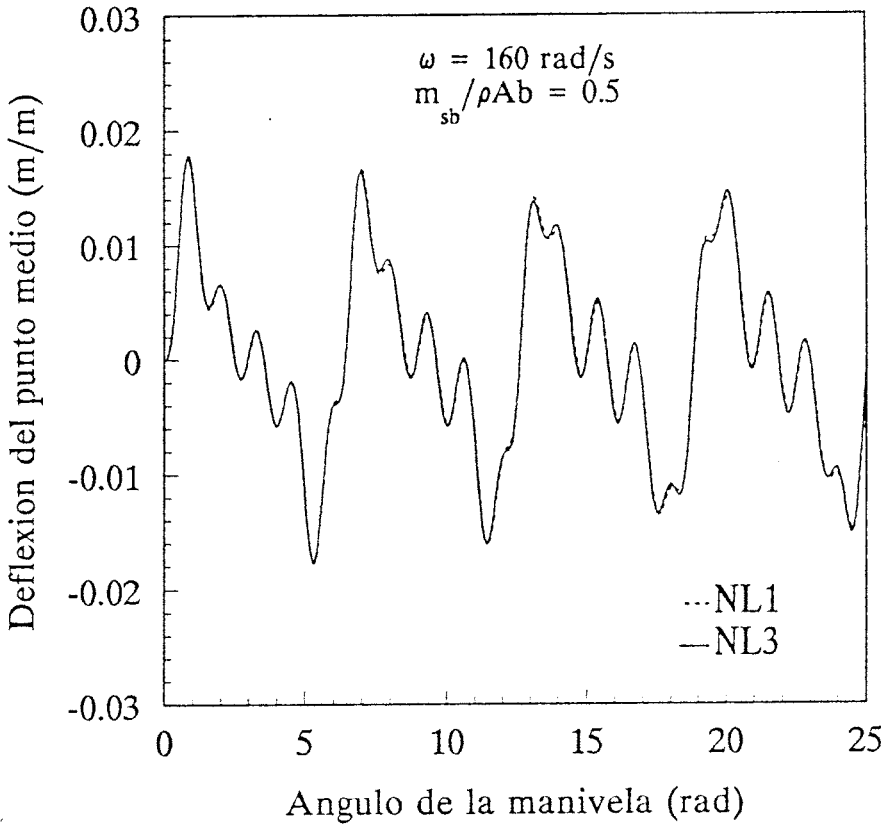


Figura 5.12: Comparación de las respuestas con modos supuestos usando dos formulaciones que incluyen las no linealidades geométricas elásticas

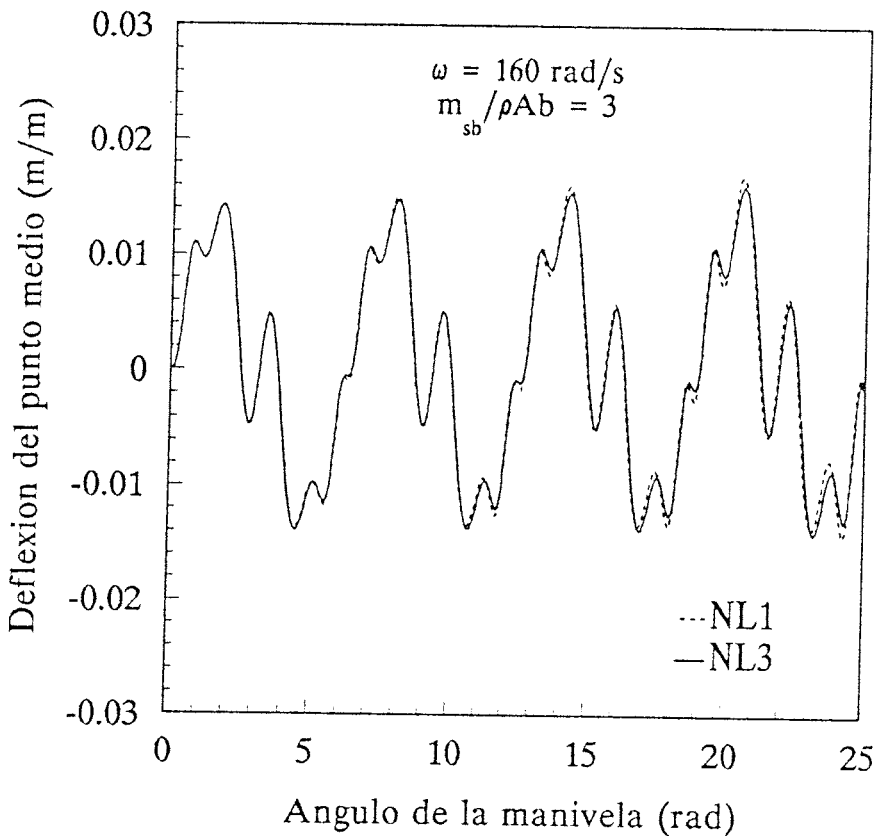


Figura 5.13: Comparación de las respuestas con modos supuestos usando dos formulaciones que incluyen las no linealidades geométricas elásticas

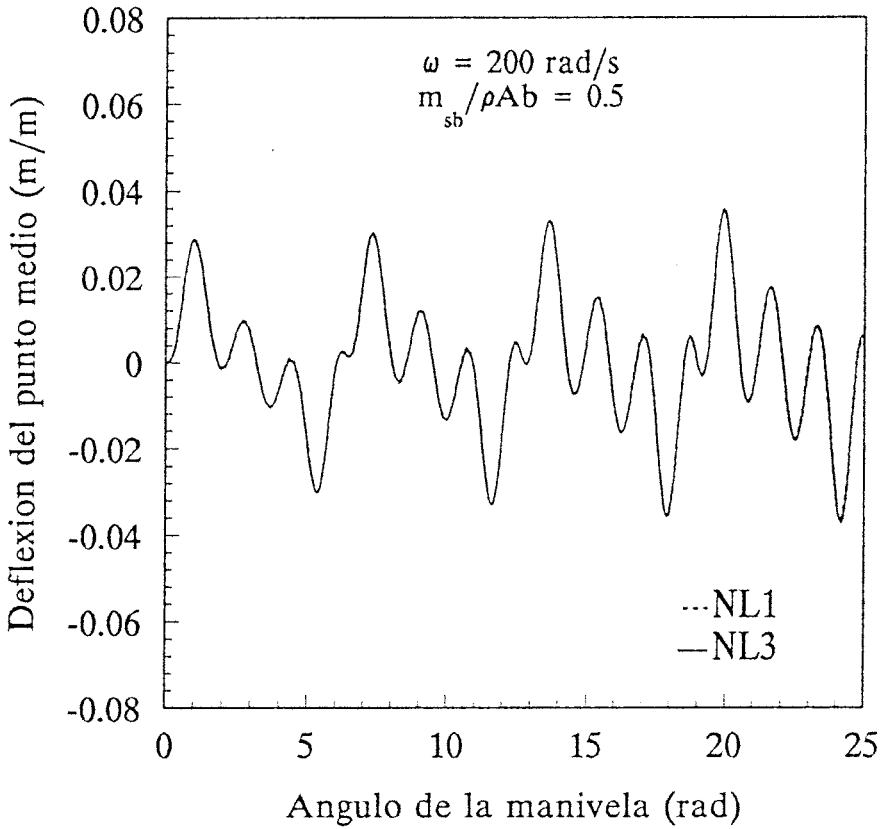


Figura 5.14: Comparación de las respuestas con modos supuestos usando dos formulaciones que incluyen las no linealidades geométricas elásticas

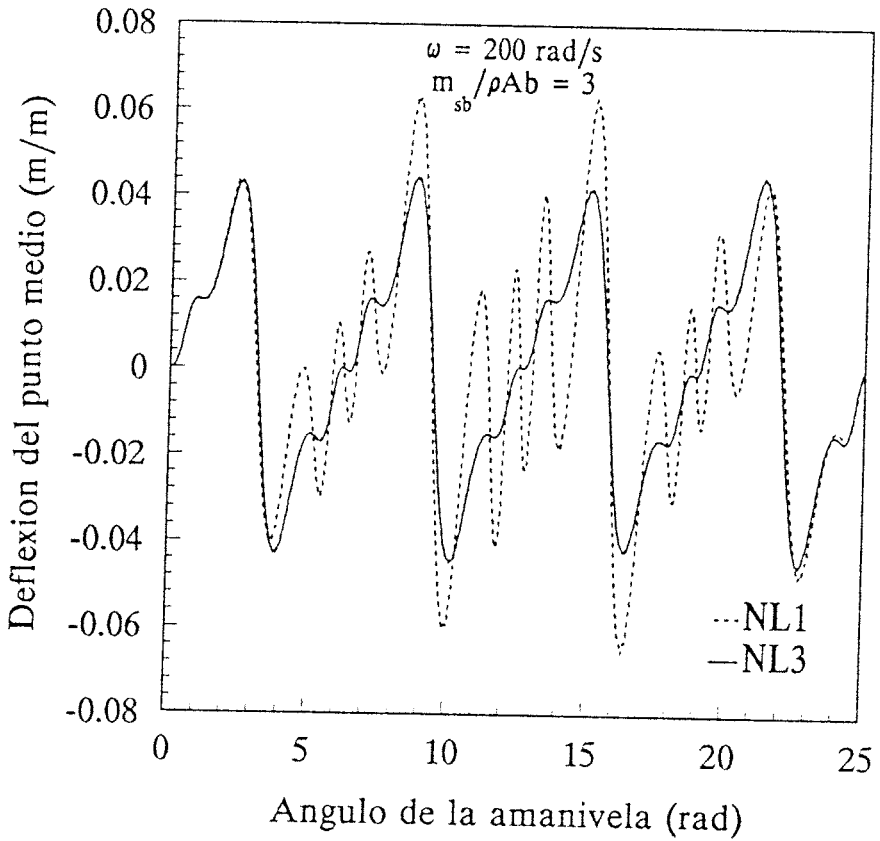


Figura 5.15: Comparación de las respuestas con modos supuestos usando dos formulaciones que incluyen las no linealidades geométricas elásticas

(Kane et al., 1987; Wu y Haug, 1988; Ider y Amirouche, 1989; Banerjee y Dickens, 1990; Ryu, 1991). Se trata del modelo de una viga en voladizo con movimiento de rotación. Hasta aquí, todos los modelos analizados en este capítulo constan tan sólo de un cuerpo flexible. Con objeto de estudiar la influencia de la existencia de más de un cuerpo flexible se analiza, en último lugar, un mecanismo de cuatro barras en el que tanto el acoplador como el balancín son flexibles.

### 5.2.1 Mecanismo biela-manivela

Para validar las formulaciones NL2 y NL3 con elementos finitos desarrolladas en el segundo y tercer capítulos, se elige un caso en el que las respuestas lineal y no lineal sean muy diferentes. Se toma, por ejemplo, el caso del mecanismo biela-manivela del apartado anterior con la manivela girando con velocidad angular constante  $\omega = 180 \text{ rad/s}$  y siendo la masa de la corredera tres veces la masa de la biela ( $rm = 3$ ). La biela flexible se discretiza usando elementos vigas con dos nodos y tres grados de libertad por nodo, cuyas funciones de forma son los polinomios de Hermite.

En el primer caso analizado se ha discretizado la biela en cuatro elementos, por lo que el número de coordenadas del mecanismo completo asciende a 24 (12 de referencia y 12 nodales elásticas), y se han impuesto condiciones de referencia de simplemente apoyada. Para disminuir el número de coordenadas se podría usar el método de la Síntesis de Componentes, tomando como coordenadas elásticas las amplitudes de un conjunto truncado de los 12 modos de vibración generados por el preprocesador. Este método pierde su eficacia cuando se aplica a la formulación NL2 puesto que son necesarios muchos modos axiales para representar correctamente la rigidización por tensión, por ello se utilizan coordenadas nodales en lugar de modales. La respuesta obtenida usando las 12 coordenadas nodales elásticas se compara con la solución del método de los modos supuestos en la Fig. 5.16. Se observa que las discrepancias son enormes. Esto no significa, sin embargo, que la formulación NL2 para elementos finitos sea errónea, sino que las diferencias son debidas a que utiliza distintas funciones de forma que la formulación para modos supuestos. Si se usa una discretización más fina, 8 elementos en lugar de 4, el número de coordenadas elásticas se incrementa al doble, 24, por lo que es posible representar mejor los desplazamientos longitudinales y la respuesta se aproxima a la de modos asumidos aunque aún



las diferencias son importantes, como se muestra en la Fig. 5.17, donde sólo se ha representado los primeros 10 radianes de giro de la manivela ya que existen problemas numéricos debidos a la disminución del tamaño del elemento y su consecuente aumento de la rigidez elemental.

El mal comportamiento de la formulación NL2 en el método de los elementos finitos usando el elemento viga se puede explicar fácilmente. Esta formulación tiene en cuenta ímplicitamente el "acortamiento" por flexión, es decir, las funciones de forma longitudinales deben ser capaces de reproducir los desplazamientos longitudinales producidos por la flexión. Pero mientras que las funciones de forma longitudinales son lineales, las transversales son cúbicas, por lo que es necesario una discretización muy fina, para poder representar mediante funciones lineales otras funciones de grado superior.

Sin embargo, las respuestas obtenidas usando la formulación NL3 con modos supuestos y con elementos finitos concuerdan perfectamente, como se muestra en la Fig. 5.18. La respuesta con elementos finitos se ha obtenido usando 4 elementos y 6 coordenadas modales elásticas, lo que hace un total de 18 coordenadas para el sistema completo. El número de coordenadas modales se ha elegido de acuerdo al estudio efectuado con modos supuestos recogido en la Tabla 5.1. Además como se vió en el análisis numérico con modos supuestos esta formulación es computacionalmente muy eficiente.

Vistas las dificultades e ineficiencias de la formulación NL2, se prescindirá de ella para el resto de los resultados numéricos que se presentan en este trabajo.

## 5.2.2 Viga en voladizo con movimiento de rotación

En la Fig. 5.19 se esquematiza el ejemplo que se estudia a continuación. Se trata del modelo de una viga con base giratoria que puede aplicarse al estudio del comportamiento de las palas de los helicópteros o de algunas antenas aereoespaciales. La viga se encuentra situada en el plano horizontal, está articulada en el origen y rota con una ley de movimiento

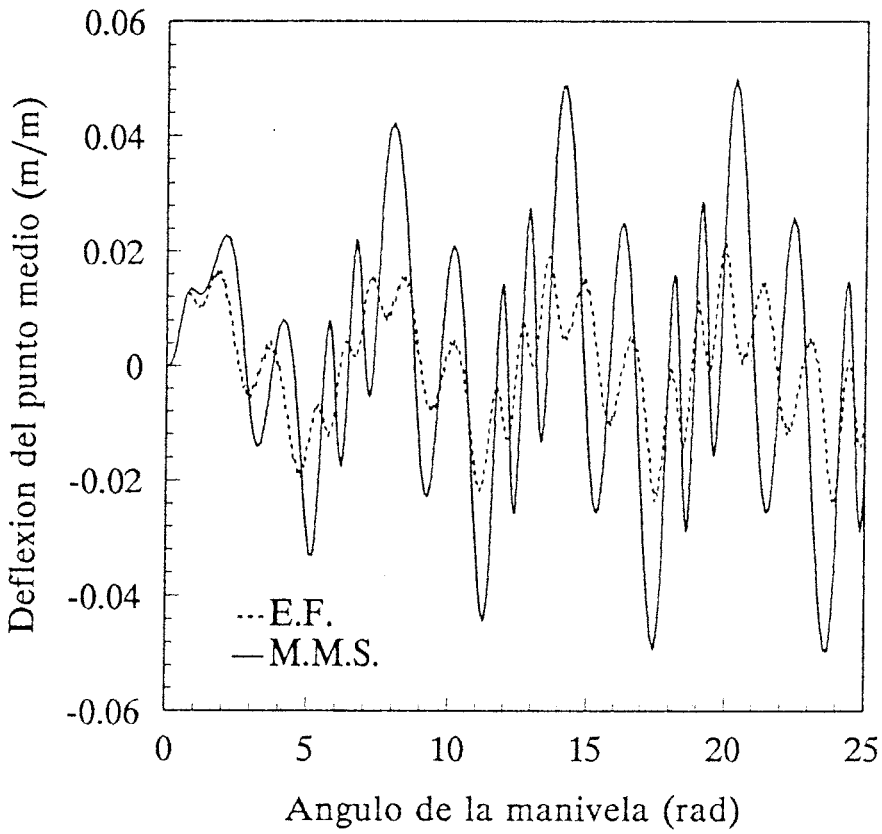


Figura 5.16: Comparación del método de los modos supuestos y de los elementos finitos para la formulación NL2

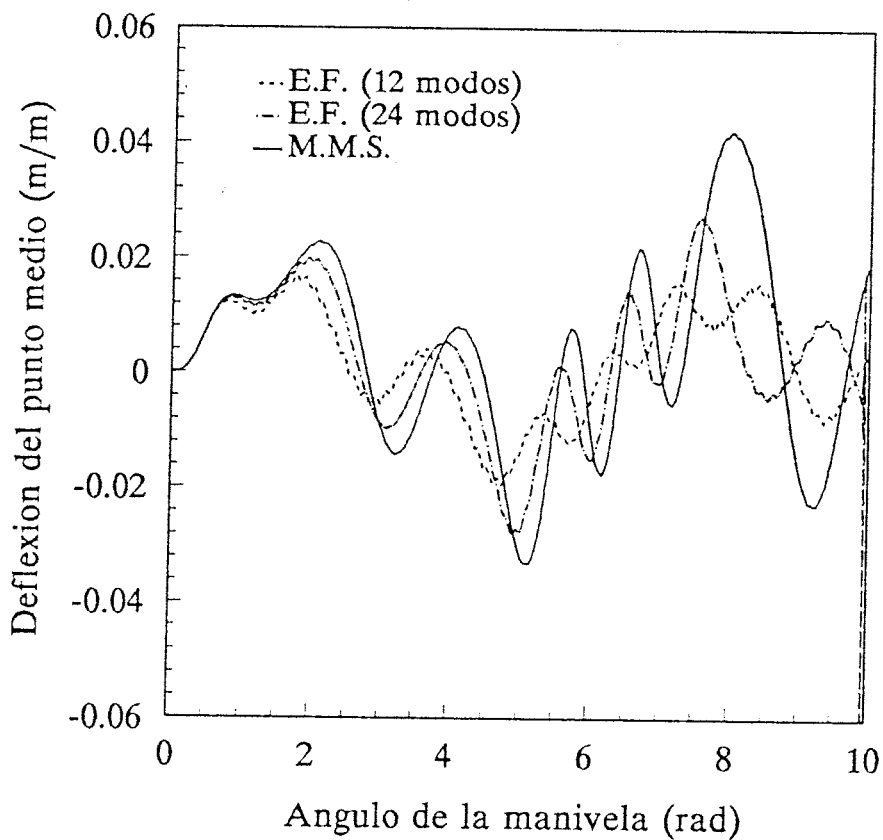


Figura 5.17: Comparación del método de los modos supuestos y de los elementos finitos para la formulación NL2

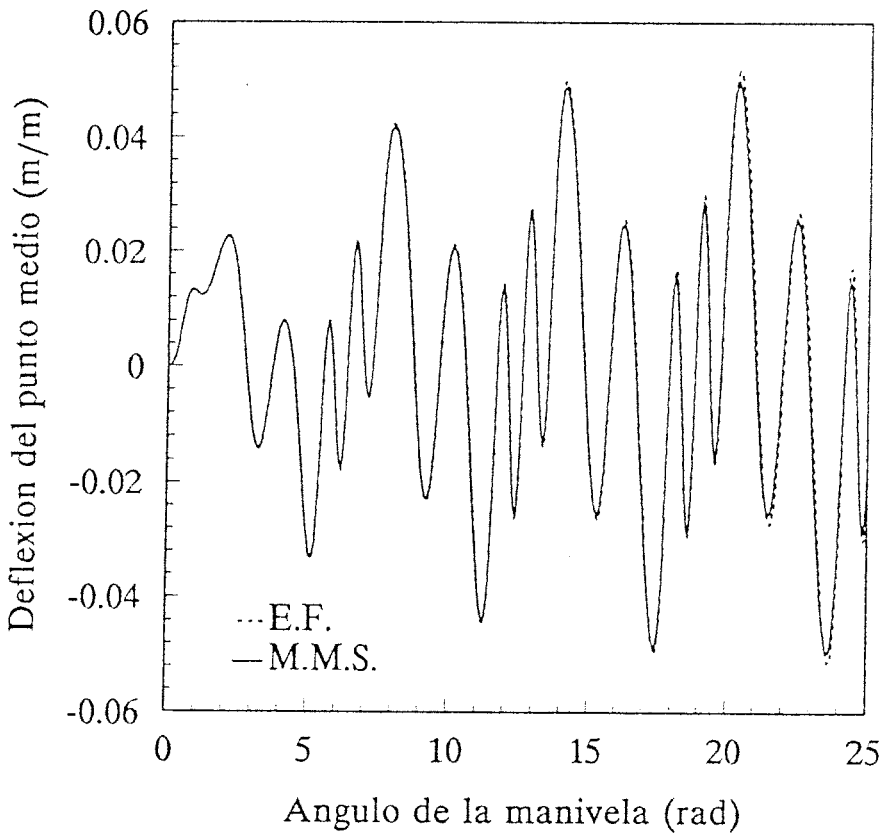


Figura 5.18: Comparación del método de los modos supuestos y de los elementos finitos para la formulación NL3

dada por la expresión:

$$\theta(t) = \begin{cases} \left( \frac{\omega_s}{T_s} \right) \left[ \left( \frac{t^2}{2} \right) + \left( \frac{T_s}{2\pi} \right)^2 \left( \cos \left( \frac{2\pi t}{T_s} \right) - 1 \right) \right] & 0 \leq t \leq T_s \\ \omega_s \left( t - \frac{T_s}{2} \right) & T_s \leq t \end{cases}$$

donde  $\omega_s$  y  $T_s$  son la velocidad angular de régimen y el tiempo de arranque, respectivamente. En esta simulación se toma  $T_s = 15$  s, y se varía la velocidad de giro desde  $\omega = 0.5$  rad/s hasta 8 rad/s. Los datos geométricos y de material son los siguientes:

Módulo de elasticidad: $E$	=	$6.895 \times 10^{10}$ Pa
Densidad: $\rho$	=	$2766.67$ kg/m <sup>3</sup>
Longitud: $L$	=	8 m
Area de la sección: $A$	=	$7.3 \times 10^{-5}$ m <sup>2</sup>
Momento de inercia de la sección: $I$	=	$8.218 \times 10^{-9}$ m <sup>4</sup>

Se ha discretizado el cuerpo en 4 elementos y simulado el comportamiento del sistema durante 20 s mediante las formulaciones L, NL1 y NL3. Se han elegido como condiciones de referencia las de una viga empotrada en su extremo izquierdo. Para cada una de las formulaciones se ha utilizado un número diferente de modos de vibración. Para las L y NL3 ha sido suficiente con considerar los 2 primeros modos, mientras que, con objeto de introducir un modo axial en la simulación, con la NL1 ha sido necesario usar al menos 9 modos de vibración.

La respuesta se ha caracterizado por la deflexión del extremo de la viga definida como se ha representado en la Fig. 5.20. Las Figs. 5.21, 5.22 y 5.23 muestran esta deflexión, para valores de la velocidad angular  $\omega$  de 0.5, 4 y 6 rad/s, respectivamente, usándose escalas diferentes para cada una de las figuras puesto que los rangos de desplazamientos elásticos son muy diferentes. Se observa que cuando la velocidad es pequeña, los desplazamientos elásticos son también pequeños, por lo que la formulación lineal y las no lineales conducen a la misma respuesta (Fig. 5.21). Cuando se aumenta la velocidad a 4 rad/s, los resultados de la simulación que no incluye los efectos de las no linealidades geométricas elásticas divergen, como se muestra en la Fig. 5.22, no comportándose así la respuesta física

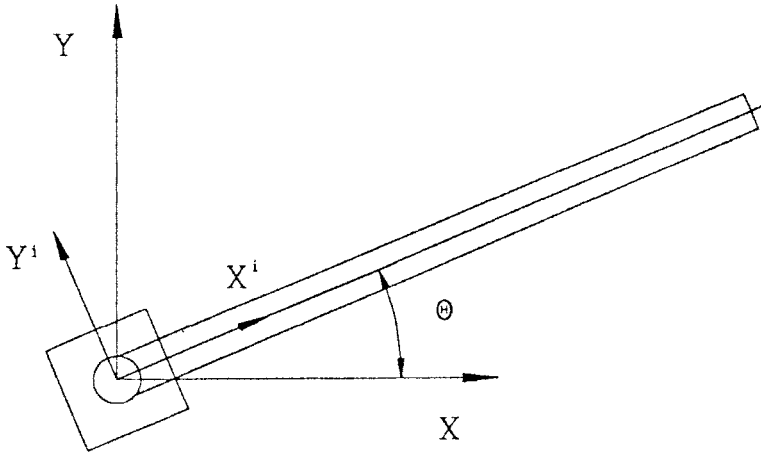


Figura 5.19: Viga en voladizo con movimiento de rotación

real. Para esta velocidad las dos formulaciones no lineales generan los mismos resultados, y concuerdan muy bien con los resultados de otros autores (Wu y Haug, 1988; Ryu, 1991). Sin embargo, si la velocidad se aumenta aún más, por ejemplo a  $6 \text{ rad/s}$ , empiezan a existir discrepancias entre las dos formulaciones no lineales. La tendencia descrita es la misma observada para el ejemplo del mecanismo biela-manivela. Al aumentar la velocidad de giro, aumenta las fuerzas axiales centrífugas y aumenta la amplitud de los desplazamientos debidos a la flexión de la viga, comenzando a no ser despreciables las fuerzas elásticas no consideradas por la formulación NL1.

La Fig. 5.24 muestra las deflexiones máximas de los extremos normalizadas con la longitud de la viga, frente a varias velocidades de rotación normalizadas con la primera frecuencia natural de vibración transversal de la viga con condiciones de contorno de empotramiento en un extremo, cuyo valor es de  $2.91 \text{ rad/s}$ . La figura muestra claramente la influencia de las no linealidades geométricas elásticas a medida que la velocidad de rotación aumenta. Cuando ésta se aproxima a la primera frecuencia natural de flexión, la deflexión del extremo obtenida con la formulación lineal crece muy rápidamente, alcanzándose valores en los que no es válida la

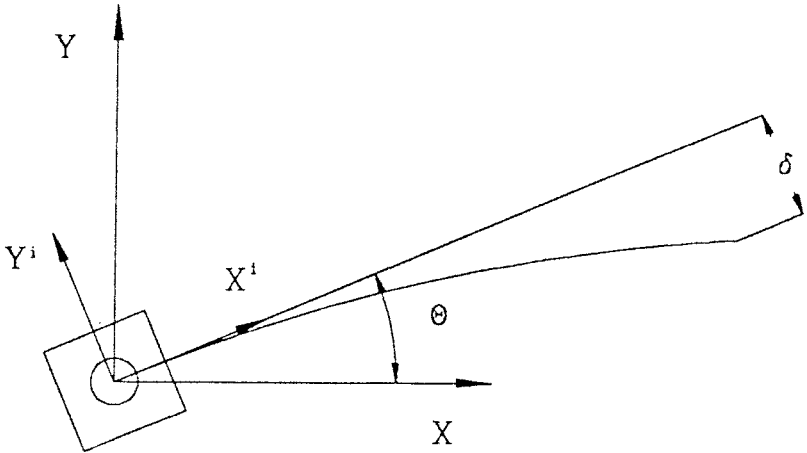


Figura 5.20: Definición de la deflexión del extremo de la viga en voladizo

teoría elástica lineal. Estos resultados muestran que para obtener respuestas aproximadas en la simulación de una viga de naturaleza muy flexible o con velocidad de trabajo cercana a la primera frecuencia natural de flexión es necesario incluir el efecto de las no linealidades geométricas.

### 5.2.3 Mecanismo de cuatro barras

Este ejemplo se presenta para investigar la influencia de las no linealidades geométrica cuando hay más de un cuerpo flexible. En la Fig. 5.25 se muestra un mecanismo plano de cuatro barras que consta de una manivela rígida y dos elementos flexibles idénticos: el acoplador y el balancín.

En la Tabla 5.2 se presentan los datos geométricos y del material que definen al sistema. La manivela comienza a girar desde la posición vertical a velocidad angular constante de  $300 \text{ rpm}$ , siendo los desplazamientos y velocidades elásticas nulos al comienzo de la simulación, es decir, tanto el acoplador como el balancín son vigas rectas en el instante inicial. No se considera el peso en el análisis. Para el estudio del comportamiento

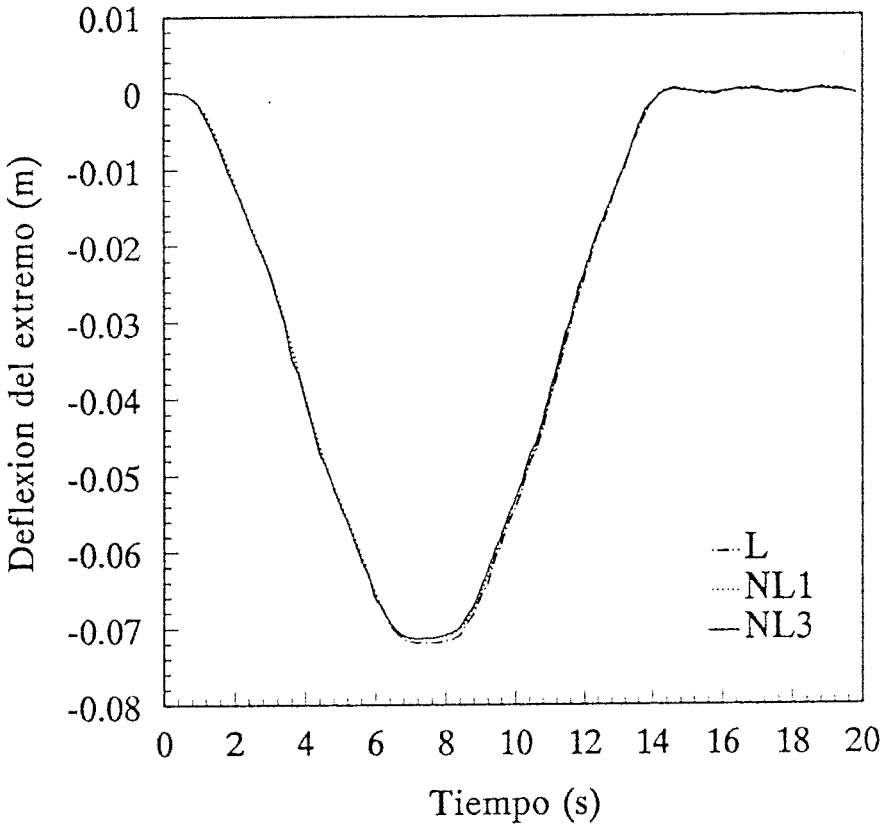


Figura 5.21: Deflexión del extremo de la viga en voladizo con movimiento de rotación para  $\omega = 0.5 \text{ rad/s}$



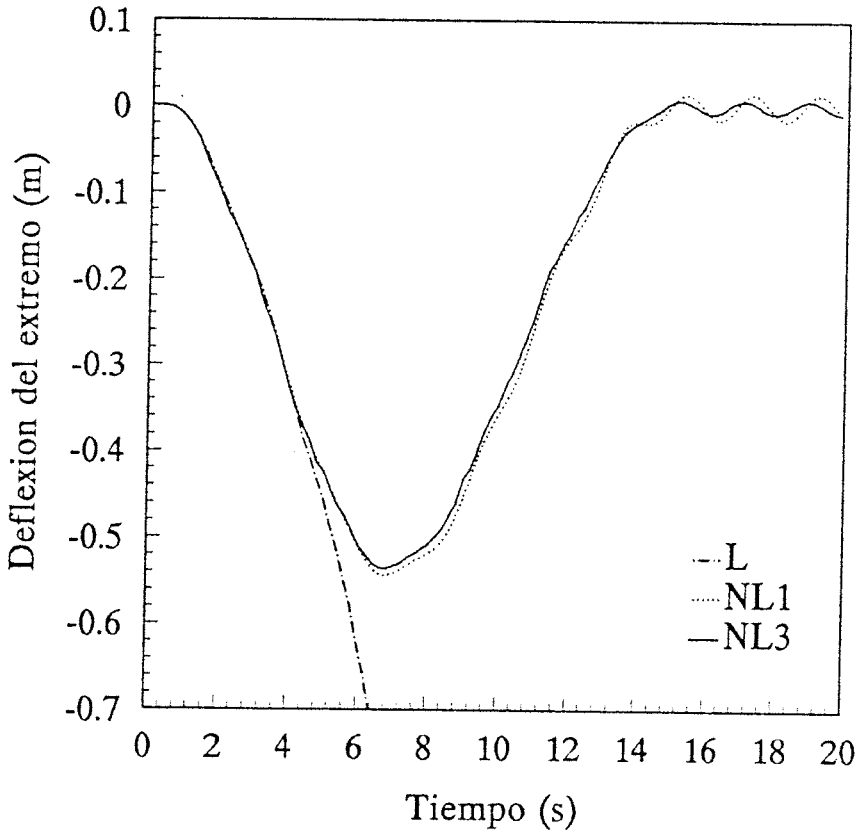


Figura 5.22: Deflexión del extremo de la viga en voladizo con movimiento de rotación para  $\omega = 1 \text{ rad/s}$

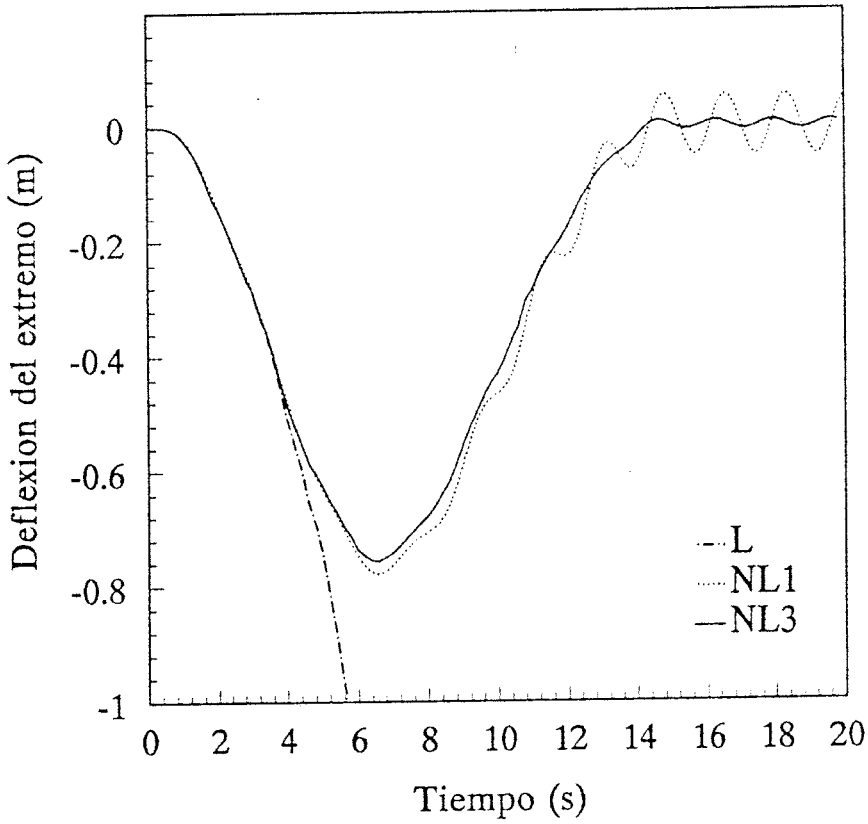


Figura 5.23: Deflexión del extremo de la viga en voladizo con movimiento de rotación para  $\omega = 6 \text{ rad/s}$

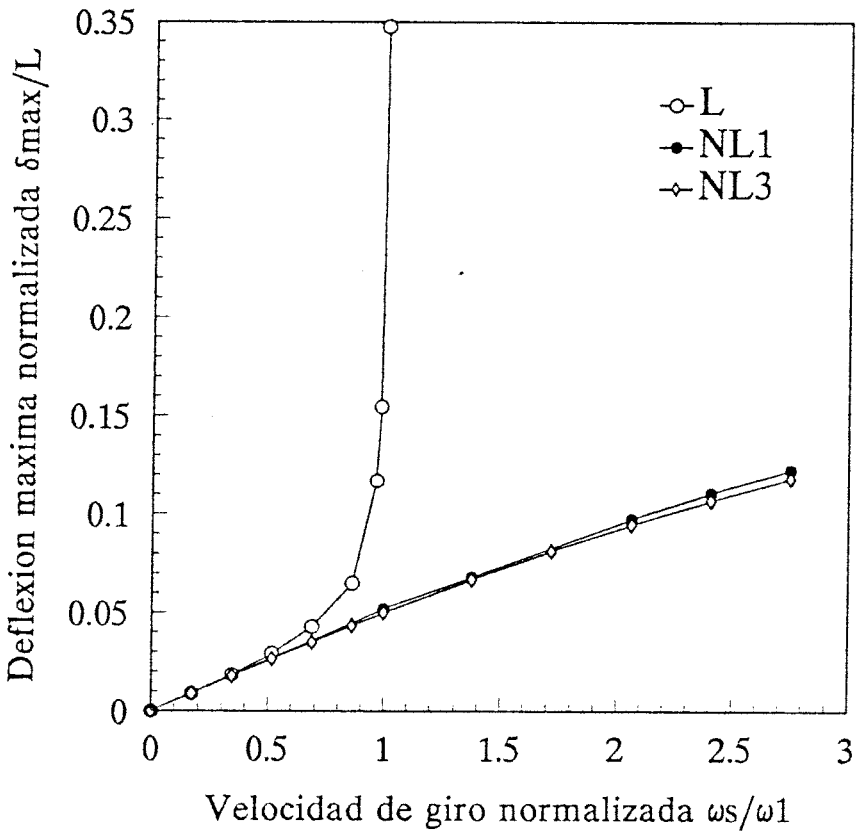


Figura 5.24: Deflexión máxima del extremo vs. velocidad de rotación

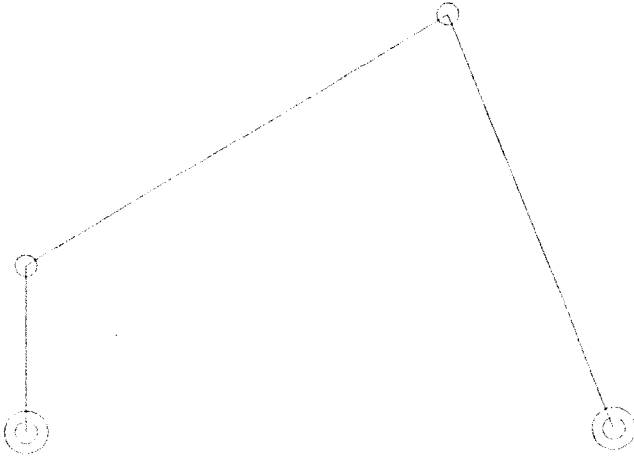


Figura 5.25: Mecanismo de cuatro barras plano

dinámico se discretizan el balancín y el acoplador en 4 elementos viga cada uno y se disminuye el número de coordenadas tomando para cada cuerpo flexible tres modos de vibración libre. Estos modos se obtienen imponiendo condiciones de referencia de simplemente apoyada a la viga, y los tres corresponden a modos transversales.

Las figuras 5.26 y 5.27 presentan la componente vertical del desplazamiento del punto medio del acoplador y del balancín, respectivamente, respecto a los sistemas de coordenadas ligados a los cuerpos, cuando la manivela da dos vueltas completas. Los desplazamientos representados se encuentran normalizados con respecto a la longitud de los cuerpos flexibles correspondientes. Se ha simulado el comportamiento dinámico del mecanismo usando las formulaciones L y NL3. Las curvas muestran claramente la importancia de las no linealidades geométricas para esta velocidad de trabajo. Estos resultados son comparables a los presentados por Ryu (1991), pues aunque en su trabajo se incluye la aceleración de la gravedad, el efecto del peso es despreciable en la respuesta global. Se observa una perfecta concordancia en las respuestas.

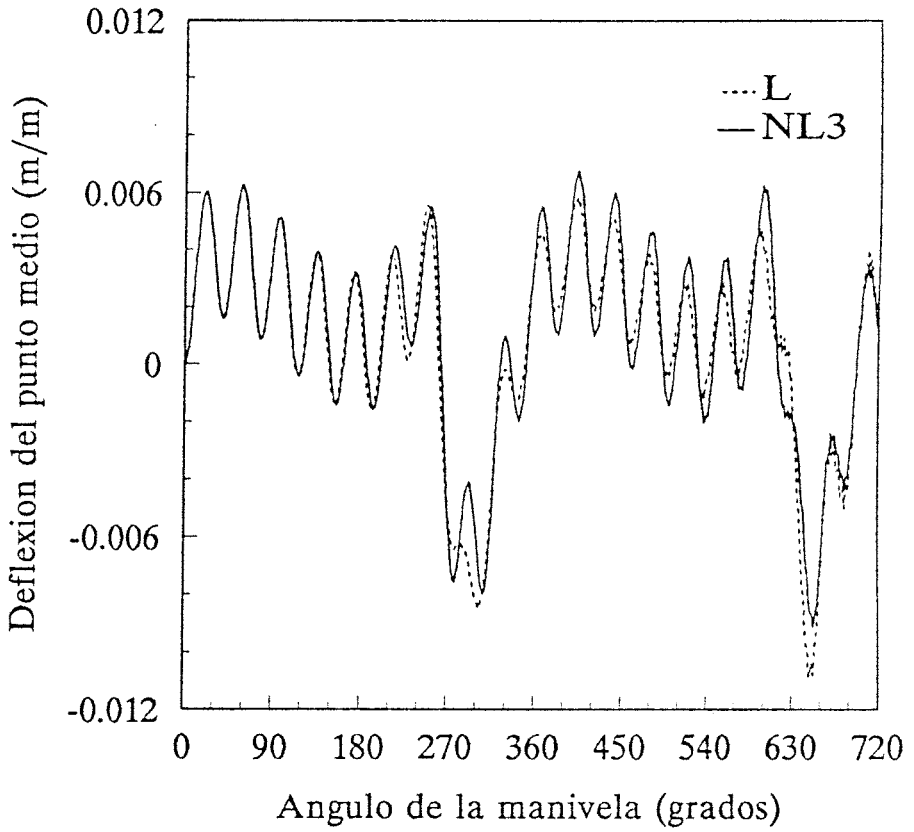


Figura 5.26: Deflexión del punto medio del acoplador a 300 rpm

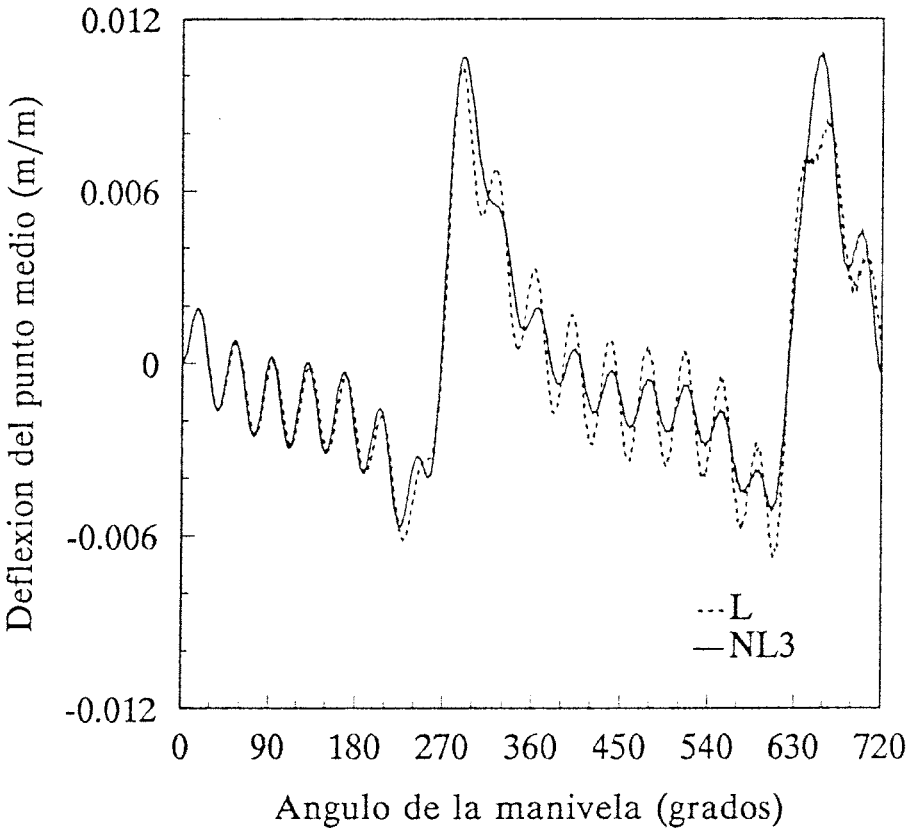


Figura 5.27: Deflexión del punto medio del balancín a 300 rpm

Parámetros	<i>Manivela</i> rígido	<i>Acoplador y balancín</i> flexibles
área	$6.452 \times 10^{-4} m^2$	$4.065 \times 10^{-5} m^2$
longitud	$1.080 \times 10^{-1} m$	$2.794 \times 10^{-1} m$
masa	$1.889 \times 10^{-1} kg$	$3.080 \times 10^{-2} kg$
momento de inercia de la sección	$3.469 \times 10^{-8} m^4$	$8.673 \times 10^{-12} m^4$
momento de inercia másico respecto al centro	$1.936 \times 10^{-4} kg m^2$	$2.004 \times 10^{-4} kg m^2$
Distancia entre apoyos = $0.254 m$		
Densidad = $2.712 \times 10^3 kg/m^3$		
Módulo de elasticidad = $7.10 \times 10^{10} Pa$		

Tabla 5.2: Parámetros del mecanismo de cuatro barras

## Capítulo 6

# Resumen y Conclusiones

En esta tesis se han desarrollado dos nuevas formulaciones para el análisis dinámico de mecanismos flexibles, introduciendo en las ecuaciones del movimiento términos no lineales, procedentes a su vez, de términos de orden superior en la expresión de la energía de deformación.

Se ha comprobado que estos términos añadidos pueden tener un efecto significativo en la respuesta dinámica de los sistemas mecánicos. Los resultados presentados demuestran que el uso exclusivo de la matriz de rigidez geométrica clásica o del método de las tensiones de referencia, utilizados por diversos autores, que no incluyen algunos de los términos incorporados en estas formulaciones, pueden conducir a soluciones poco aproximadas.

En la primera formulación, denominada NL2, se han definido los desplazamientos elásticos de los cuerpos con respecto a la configuración indeformada. Usando esta definición, se ha llegado a la definición de una matriz de rigidez geométrica más general que la clásica y a un vector de fuerzas elásticas, ambos no lineales.

Esta primera formulación, aunque puede producir buenos resultados, presenta un inconveniente. Para considerar el efecto del “acortamiento” por flexión representado por los nuevos términos, es necesaria la inclusión de funciones de forma axiales que representen correctamente los desplazamientos por deformación. Ello lleva consigo la necesidad de incluir un número alto de funciones de forma o que éstas sean tales que incluyan el acoplamiento entre los desplazamientos por flexión y los longitudinales. En conclusión, debido a la gran dependencia de esta formulación con el número y forma de las funciones de forma axiales, en la práctica se obtienen respuestas menos aproximadas que con otras formulaciones que



parten de hipótesis más restrictivas.

En la segunda formulación, denominada NL3, el efecto del "acortamiento" por flexión está implícitamente incluido en la formulación a través de su relación con los desplazamientos transversales elásticos, sin que sea necesario incorporar modos axiales. En este caso, se obtiene una matriz de rigidez constante y todas las no linealidades geométricas están incluidas en los términos de inercia y en las fuerzas de reacción, que son originalmente funciones no lineales de las coordenadas generalizadas del sistema.

La formulación resultante es muy eficiente ya que no necesita modos axiales para incluir las no linealidades geométricas, y por tanto no existen componentes de alta frecuencia en la respuesta, que fuercen a pasos de integración pequeños. Comparada con otras formulaciones geoméricamente no lineales que no necesiten modos axiales, como las basadas en las tensiones de referencia, conducen a respuestas con un grado de aproximación mayor. En relación a otras, de este tipo, que usan modos axiales, no sólo produce mejores resultados, sino que, además, es más eficiente.

Los resultados numéricos muestran que si se usan modos apropiados para la formulación NL2, ésta produce la misma respuesta que la NL3, aunque comparada con ella sea mucho más ineficiente.

Ambas formulaciones se han desarrollado empleando, tanto el método clásico, de los modos supuestos, como el de los elementos finitos. El primero, por la forma de aproximación empleada, permite una mejor visualización de la física del problema, mientras que el segundo, es de gran generalidad.

De todo lo anterior, como resumen, puede concluirse que la principal contribución de esta tesis es la presentación de la formulación NL3, de gran eficiencia y aplicabilidad, puesto que con muy pocos grados de libertad es capaz de modelar sistemas complejos introduciendo el efecto de las no linealidades geométricas elásticas de orden superior.

## Apéndice A

# Definición de los Términos Derivados de la Energía Potencial para un Elemento Viga

En este apéndice se aplica el desarrollo presentado en el apartado 3.6, a un elemento viga. Se obtienen así las expresiones algebraicas de las componentes de las matrices y vectores asociados a la energía potencial en ese tipo de elemento. El conocimiento de estas expresiones permitirá una fácil obtención numérica de dichas matrices y vectores elementales para pasar posteriormente a los correspondientes al cuerpo.

El elemento viga empleado corresponde al elemento  $j$  del cuerpo  $i$  y se representa en la Fig. A.1. Este elemento posee dos nodos, teniendo cada uno tres grados de libertad. Se considera, además, que el módulo de elasticidad del material y la sección de la viga son constantes a lo largo del elemento. Las funciones de forma elementales son los polinomios de Hermite, representados en la matriz  $S^{ij}$  como

$$S^{ij} = \begin{pmatrix} 1 - \xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) & 0 & 3\xi^2 - 2\xi^3 & L(\xi^3 - \xi^2) \end{pmatrix}^{ij} \quad (\text{A.1})$$

donde el superíndice  $ij$  sobre el paréntesis grande afecta a todos los



$$\left( \overline{K}_{ff}^{ij} \right)_g = \frac{E^{ij} A^{ij}}{L^{ij2}} \Delta u^{ij} \quad (A.4)$$

$$\begin{pmatrix}
 0 \\
 0 & \frac{6}{5} \\
 0 & \frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} \\
 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15}
 \end{pmatrix}^{ij}$$

donde  $\Delta u^{ij} = \left( \bar{e}_{f4}^{ij} - \bar{e}_{f1}^{ij} \right)$  es la deformación total de la viga en la dirección axial.

La energía de deformación  $U_{nd1}^{ij}$  da lugar, además, a un vector, no tan conocido, de fuerzas elásticas no lineales, cuya expresión, para este elemento particular es

$$\left( \overline{Q}_{ff}^{ij} \right)_g = \begin{pmatrix}
 \bar{e}_f^{ijT} \frac{\partial \left( \overline{K}_{ff}^{ij} \right)_g}{\partial \bar{e}_{f1}^{ij}} \bar{e}_f^{ij} \\
 0 \\
 0 \\
 \bar{e}_f^{ijT} \frac{\partial \left( \overline{K}_{ff}^{ij} \right)_g}{\partial \bar{e}_{f4}^{ij}} \bar{e}_f^{ij} \\
 0 \\
 0
 \end{pmatrix} \quad (A.5)$$

o explícitamente

$$(\mathbf{Q}_{ff}^{ij})_g = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{E^{ij} A^{ij}}{L^{ij2}} \left( \frac{6}{5}(\bar{e}_{f2} - \bar{e}_{f5})^2 + \frac{L}{5}(\bar{e}_{f2} - \bar{e}_{f5})(\bar{e}_{f3} + \bar{e}_{f6}) \right. \\ \left. + \frac{L^2}{30}((\bar{e}_{f3} - \bar{e}_{f6})^2 + 3(\bar{e}_{f3}^2 + \bar{e}_{f6}^2)) \right)^{ij} \quad (\text{A.6})$$

Para la obtención de la segunda matriz de rigidez geométrica  $(\bar{\mathbf{K}}_{ff}^{ij})_h$ , la matriz de funciones de forma, representada en la Ec. (A.1), se va a expresar como

$$\mathbf{S}^{ij} = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & \psi_4 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_2 & \psi_3 & 0 & \psi_5 & \psi_6 \end{pmatrix}^{ij} \quad (\text{A.7})$$

Usando esta notación,  $(\bar{\mathbf{K}}_{ff}^{ij})_h$  puede ser expresada como

$$(\bar{\mathbf{K}}_{ff}^{ij})_h = \frac{1}{4} \frac{E^{ij} A^{ij}}{(L^{ij})^3} \left( \int_0^1 (\psi'_2 \bar{e}_{f2} + \psi'_3 \bar{e}_{f3} + \psi'_5 \bar{e}_{f5} + \psi'_6 \bar{e}_{f6})^2 (\mathbf{S}'_t^T \mathbf{S}'_t) d\xi \right)^{ij} \quad (\text{A.8})$$

siendo

$$(\mathbf{S}'_t^T \mathbf{S}'_t)^{ij} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 & \psi'_2 \psi'_2 \\ 0 & \psi'_2 \psi'_3 & \psi'_3 \psi'_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi'_2 \psi'_5 & \psi'_3 \psi'_5 & 0 & \psi'_5 \psi'_5 \\ 0 & \psi'_2 \psi'_6 & \psi'_3 \psi'_6 & 0 & \psi'_5 \psi'_6 & \psi'_6 \psi'_6 \end{pmatrix}^{ij} \quad (\text{A.9})$$

donde  $(\prime)$  indica derivada con respecto a la coordenada espacial adimensional; es decir,  $\psi'_k = \partial \psi_k / \partial \xi$

Desarrollando la Ec. (A.8), se llega a una expresión de  $\left(\overline{K}_{ff}^{ij}\right)_h$ :

$$\left(\overline{K}_{ff}^{ij}\right)_h = \frac{1}{4} \frac{E^{ij} A^{ij}}{(L^{ij})^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 & k_{h22} \\ 0 & k_{h32} & k_{h33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_{h22} & -k_{h32} & 0 & k_{h22} \\ 0 & k_{h62} & k_{h63} & 0 & -k_{h62} & k_{h66} \end{pmatrix}^{ij} \quad (A.10)$$

donde

$$\begin{aligned} k_{h22}^{ij} &= \frac{3}{35} [24 \bar{e}_{f_2}^2 + 6 \bar{e}_{f_2} (\bar{e}_{f_3} L - 8 \bar{e}_{f_5} + \bar{e}_{f_6} L) + \bar{e}_{f_3}^2 L^2 \\ &- 6 \bar{e}_{f_3} \bar{e}_{f_5} L + 24 \bar{e}_{f_5}^2 - 6 \bar{e}_{f_5} \bar{e}_{f_6} L + \bar{e}_{f_6}^2 L^2]^{ij} \end{aligned} \quad (A.11)$$

$$\begin{aligned} k_{h32}^{ij} &= \frac{L^{ij}}{140} [36 \bar{e}_{f_2}^2 + 24 \bar{e}_{f_2} (\bar{e}_{f_3} L - 3 \bar{e}_{f_5}) - \bar{e}_{f_3}^2 L^2 \\ &+ 2 \bar{e}_{f_3} L (\bar{e}_{f_6} L - 12 \bar{e}_{f_5}) + 36 \bar{e}_{f_5}^2 + \bar{e}_{f_6}^2 L^2]^{ij} \end{aligned} \quad (A.12)$$

$$\begin{aligned} k_{h62}^{ij} &= \frac{L^{ij}}{140} [36 \bar{e}_{f_2}^2 + 24 \bar{e}_{f_2} (\bar{e}_{f_6} L - 3 \bar{e}_{f_5}) + \bar{e}_{f_3}^2 L^2 \\ &+ 2 \bar{e}_{f_6} L (\bar{e}_{f_3} L - 12 \bar{e}_{f_5}) + 36 \bar{e}_{f_5}^2 - \bar{e}_{f_6}^2 L^2]^{ij} \end{aligned} \quad (A.13)$$

$$\begin{aligned} k_{h33}^{ij} &= \frac{L^{ij^2}}{210} [18 \bar{e}_{f_2}^2 - 3 \bar{e}_{f_2} (\bar{e}_{f_3} L + 12 \bar{e}_{f_5} - \bar{e}_{f_6} L) + 12 \bar{e}_{f_3}^2 L^2 \\ &+ 3 \bar{e}_{f_3} L (\bar{e}_{f_5} - \bar{e}_{f_6} L) + 18 \bar{e}_{f_5}^2 - 3 \bar{e}_{f_5} \bar{e}_{f_6} L + \bar{e}_{f_6}^2 L^2]^{ij} \end{aligned} \quad (A.14)$$

$$\begin{aligned}
 k_{h63}^{ij} &= \frac{L^{ij3}}{420} [6 \bar{e}_{f2} (\bar{e}_{f3} + \bar{e}_{f6}) - \bar{e}_{f3}^2 L + 2 \bar{e}_{f3} (2 \bar{e}_{f6} L - 3 \bar{e}_{f5}) \\
 &\quad - 3 \bar{e}_{f6} (2 \bar{e}_{f5} + \bar{e}_{f6} L)]^{ij} \quad (\text{A.15})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{h66} &= \frac{L^{ij2}}{210} [18 \bar{e}_{f2}^2 + 3 \bar{e}_{f2} (\bar{e}_{f3} L - 12 \bar{e}_{f5} - \bar{e}_{f6} L) + \bar{e}_{f3}^2 L^2 \\
 &\quad - 3 \bar{e}_{f3} L (\bar{e}_{f5} + \bar{e}_{f6} L) + 18 \bar{e}_{f5}^2 + 3 \bar{e}_{f5} \bar{e}_{f6} L + 4 \bar{e}_{f6}^2 L^2]^{ij} \quad (\text{A.16})
 \end{aligned}$$

El segundo vector de fuerzas elásticas no lineales elemental  $(\mathbf{Q}_{ff}^{ij})_h$ , para este elemento particular, tiene la expresión

$$(\mathbf{Q}_{ff}^{ij})_h = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{e}_f^{ijT} \frac{\partial (\bar{K}_{ff}^{ij})}{\partial \bar{e}_{f2}^{ij}} \bar{e}_f^{ij} \\ \bar{e}_f^{ijT} \frac{\partial (\bar{K}_{ff}^{ij})}{\partial \bar{e}_{f3}^{ij}} \bar{e}_f^{ij} \\ 0 \\ \bar{e}_f^{ijT} \frac{\partial (\bar{K}_{ff}^{ij})}{\partial \bar{e}_{f5}^{ij}} \bar{e}_f^{ij} \\ \bar{e}_f^{ijT} \frac{\partial (\bar{K}_{ff}^{ij})}{\partial \bar{e}_{f6}^{ij}} \bar{e}_f^{ij} \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

Comparando esta expresión con la Ec. (A.5) se observa que los componentes no nulos de este vector son los nulos de aquel y viceversa. Para obtener la expresión (A.17) de  $(\mathbf{Q}_{ff}^{ij})_h$  es necesario conocer la derivada de

la segunda matriz de rigidez geométrica  $(\overline{K}_{ff}^{ij})_h$  con respecto a cada una de las coordenadas nodales elementales. La expresión de esta derivada con respecto a la coordenada nodal elemental  $k$  se puede escribir como,

$$\frac{\partial(\overline{K}_{ff}^{ij})_h}{\partial \bar{e}_{f_k}^{ij}} = \frac{1}{2} \frac{E^{ij} A^{ij}}{(L^{ij})^3} \left( \int_0^1 (\psi_2' \bar{e}_{f_2} + \psi_3' \bar{e}_{f_3} + \psi_5' \bar{e}_{f_5} + \psi_6' \bar{e}_{f_6}) \psi_k' (S_i^T S_l') d\xi \right)^{ij} \quad (\text{A.18})$$

Las Ecs. (A.18) se introducen en la Ec. (A.17), e integrando se llega a la expresión:

$$(\overline{Q}_{ff}^{ij})_h = \frac{1}{2} \frac{E^{ij} A^{ij}}{(L^{ij})^3} \begin{pmatrix} 0 \\ q_{h2} \\ q_{h3} \\ 0 \\ q_{h2} \\ q_{h6} \end{pmatrix}^{ij} \quad (\text{A.19})$$

donde

$$\begin{aligned} q_{h2}^{ij} &= \frac{1}{70} (288 \bar{e}_{f_2}^3 + 108 \bar{e}_{f_2}^2 (\bar{e}_{f_3} L - 8 \bar{e}_{f_5} + \bar{e}_{f_6} L) \\ &+ 36 \bar{e}_{f_2} (\bar{e}_{f_3}^2 L^2 - 6 \bar{e}_{f_3} \bar{e}_{f_5} L + 24 \bar{e}_{f_5}^2 - 6 \bar{e}_{f_5} \bar{e}_{f_6} L + \bar{e}_{f_6}^2 L^2) \\ &- \bar{e}_{f_3}^3 L^3 + 3 \bar{e}_{f_3}^2 L^2 (\bar{e}_{f_6} L - 12 \bar{e}_{f_5}) + 3 \bar{e}_{f_3} L (36 \bar{e}_{f_5}^2 + \bar{e}_{f_6}^2 L^2) \\ &- 288 \bar{e}_{f_5}^3 + \bar{e}_{f_6} L (108 \bar{e}_{f_5}^2 - 36 \bar{e}_{f_5} \bar{e}_{f_6} L - \bar{e}_{f_6}^2 L^2) )^{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned} q_{h3}^{ij} &= \frac{L^{ij}}{70} (36 \bar{e}_{f_2}^3 + 36 \bar{e}_{f_2}^2 (\bar{e}_{f_3} L - 3 \bar{e}_{f_5}) \\ &- 3 \bar{e}_{f_2} (\bar{e}_{f_3}^2 L^2 + 2 \bar{e}_{f_3} L (12 \bar{e}_{f_5} - \bar{e}_{f_6} L) - 36 \bar{e}_{f_5}^2 - \bar{e}_{f_6}^2 L^2) \\ &+ 8 \bar{e}_{f_3}^3 L^3 + 3 \bar{e}_{f_3}^2 L^2 (\bar{e}_{f_5} - \bar{e}_{f_6} L) + 2 \bar{e}_{f_3} L (18 \bar{e}_{f_5}^2 - 3 \bar{e}_{f_5} \bar{e}_{f_6} L + \bar{e}_{f_6}^2 L^2) \end{aligned}$$



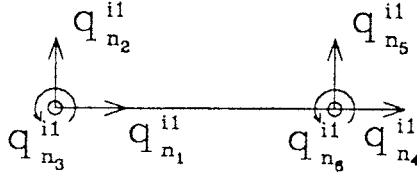


Figura A.1: Elemento viga

$$- 36 \bar{e}_{f_5}^3 - \bar{e}_{f_6}^2 L^2 (3 \bar{e}_{f_5} + \bar{e}_{f_6} L) )^{ij} \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} q_{h_6}^{ij} &= \frac{L^{ij}}{70} (36 \bar{e}_{f_2}^3 + 36 \bar{e}_{f_2}^2 (\bar{e}_{f_6} L - 3 \bar{e}_{f_5}) \\ &+ 3 \bar{e}_{f_2} (\bar{e}_{f_3}^2 L^2 + 2 \bar{e}_{f_6} L (\bar{e}_{f_3} L - 12 \bar{e}_{f_5}) + 36 \bar{e}_{f_5}^2 - \bar{e}_{f_6}^2 L^2) \\ &- \bar{e}_{f_3}^3 L^3 + \bar{e}_{f_3}^2 L^2 (2 \bar{e}_{f_6} L - 3 \bar{e}_{f_5}) + \bar{e}_{f_6} L (36 \bar{e}_{f_5}^2 + 3 \bar{e}_{f_5} \bar{e}_{f_6} L + 8 \bar{e}_{f_6}^2 L^2) \\ &- 36 \bar{e}_{f_5}^3 - 3 \bar{e}_{f_3} \bar{e}_{f_6} L^2 (2 \bar{e}_{f_5} + \bar{e}_{f_6} L) )^{ij} \quad (\text{A.22}) \end{aligned}$$

## Apéndice B

# Definición de los Términos de la Matriz de Masa $M_{fs}^{ij}$ en la Formulación NL3

En este apéndice se desarrollan las expresiones de las submatrices que componen la matriz de masa elemental  $M_{fs}^{ij}$  definida en el apartado 4.3. Esta matriz de masa sumada a la matriz  $M^{ij}$  forman la matriz de masa de un elemento en la formulación NL3. Su aparición se debe a la expresión explícita del “acortamiento” por flexión en el vector de posición de un punto. Debido a la complejidad de sus expresiones, puesto que implica muchas matrices de transformación, se ha preferido incluirlas en un apéndice por no perder continuidad en el desarrollo del capítulo 4.

Recordando la definición de la matriz de masa  $M_{fs}^{ij}$  de la Ec. (4.84):

$$\begin{aligned} M_{fs}^{ij} &= \int_{V^{ij}} \rho^{ij} L_{fs}^{ijT} L_{fs}^{ij} dV^{ij} \\ &+ \int_{V^{ij}} \rho^{ij} L^{ijT} L_{fs}^{ij} dV^{ij} \\ &+ \int_{V^{ij}} \rho^{ij} L_{fs}^{ijT} L^{ij} dV^{ij} \end{aligned} \quad (B.1)$$

donde  $L^{ij}$  y  $L_{fs}^{ij}$  están definidas en las Ecs. (4.80) y (4.81) como

$$L^{ij} = \left( I_2 \quad A_\theta^i (N^{ij} q_o^i + N_m^{ij} p_f^i) \quad A^i N_m^{ij} \right) \quad (B.2)$$

$$L_{fs}^{ij} = \left( (L_{fs}^{ij})_R \quad (L_{fs}^{ij})_\theta \quad (L_{fs}^{ij})_f \right) \quad (B.3)$$

con

$$(L_{fs}^{ij})_R = \mathbf{0}$$

$$(L_{fs}^{ij})_\theta = -\frac{1}{2} A_\theta^i \left( \sum_{m \in P^{ij}} \left( C^{im} e_1 (p_f^{iT} R_{L_m}^{im} p_f^i) \right) + C^{ij} e_1 (p_f^{iT} R_m^{ij} p_f^i) \right)$$

$$(L_{fs}^{ij})_f = -A^i \left( \sum_{m \in P^{ij}} \left( C^{im} e_1 p_f^{iT} R_{L_m}^{im} \right) + C^{ij} e_1 p_f^{iT} R_m^{ij} \right)$$

Desarrollando la expresión (B.1) se puede escribir la matriz de masa en forma compacta como

$$M_{fs}^{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & m_{R\theta} & m_{Rf} \\ & m_{\theta\theta} & m_{\theta f} \\ \text{simétrica} & & m_{ff} \end{pmatrix}_{fs}^{ij} \quad (B.4)$$

donde las distintas expresiones explícitas de las submatrices se escriben a continuación:

$$\begin{aligned} (m_{R\theta})_{fs}^{ij} = & \\ & -\frac{1}{2} \int_{V^{ij}} \rho^{ij} dV^{ij} A_\theta^i \sum_{m \in P^{ij}} C^{im} e_1 (p_f^{iT} R_{L_m}^{im} p_f^i) \end{aligned} \quad (B.5)$$

$$-\frac{1}{2} A_\theta^i C^{ij} e_1 (p_f^{iT} \int_{V^{ij}} \rho^{ij} R_m^{ij} dV^{ij} p_f^i)$$

$$\begin{aligned}
(m_{Rf})_{fs}^{ij} = & \\
& - \int_{V_{ij}} \rho^{ij} dV^{ij} A^i \sum_{m \in P^{ij}} C^{im} e_1 p_f^{iT} R_{L_m}^{im} \\
& - A^i C^{ij} e_1 p_f^{iT} \int_{V_{ij}} \rho^{ij} R_m^{ij} dV^{ij}
\end{aligned} \tag{B.6}$$

$$\begin{aligned}
(m_{\theta\theta})_{fs}^{ij} = & \\
& - q_o^{iT} \int_{V_{ij}} \rho^{ij} N^{ijT} dV^{ij} \sum_{m \in P^{ij}} C^{im} e_1 (p_f^{iT} R_{L_m}^{im} p_f^i) \\
& - q_o^{iT} \int_{V_{ij}} \rho^{ij} N^{ijT} C^{ij} e_1 p_f^{iT} R_m^{ij} dV^{ij} p_f^i \\
& - p_f^{iT} \int_{V_{ij}} \rho^{ij} N_m^{ijT} dV^{ij} \sum_{m \in P^{ij}} C^{im} e_1 (p_f^{iT} R_{L_m}^{im} p_f^i) \\
& - p_f^{iT} \int_{V_{ij}} \rho^{ij} N_m^{ijT} C^{ij} e_1 p_f^{iT} R_m^{ij} dV^{ij} p_f^i \\
& + \frac{1}{4} p_f^{iT} \int_{V_{ij}} \rho^{ij} R_m^{ij} p_f^i p_f^{iT} R_m^{ij} dV^{ij} p_f^i \\
& + \frac{1}{4} \int_{V_{ij}} \rho^{ij} dV^{ij} \sum_{m,s \in P^{ij}} (p_f^{iT} R_{L_m}^{im} p_f^i e_1^T C^{imT} C^{is} e_1 p_f^{iT} R_{L_m}^{is} p_f^i) \\
& + \frac{1}{2} [ \sum_{m \in P^{ij}} (p_f^{iT} R_{L_m}^{im} p_f^i) e_1^T C^{imT} ] C^{ij} e_1 p_f^{iT} \int_{V_{ij}} \rho^{ij} R_m^{ij} dV^{ij} p_f^i
\end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}
(m_{\theta f})_{fs}^{ij} = & \\
& -q_o^{iT} \int_{V^{ij}} \rho^{ij} N^{ijT} dV^{ij} \tilde{I} \sum_{m \in P^{ij}} C^{im} e_1 p_f^{iT} R_{L,m}^{im} \\
& -q_o^{iT} \int_{V^{ij}} \rho^{ij} N^{ijT} \tilde{I} C^{ij} e_1 p_f^{iT} R_m^{ij} dV^{ij} \\
& -p_f^{iT} \int_{V^{ij}} \rho^{ij} N_m^{ijT} dV^{ij} \tilde{I} \sum_{m \in P^{ij}} C^{im} e_1 p_f^{iT} R_{L,m}^{im} \\
& -p_f^{iT} \int_{V^{ij}} \rho^{ij} N_m^{ijT} \tilde{I} C^{ij} e_1 p_f^{iT} R_m^{ij} dV^{ij} \\
& -\frac{1}{2} \left[ \sum_{m \in P^{ij}} (p_f^{iT} R_{L,m}^{im} p_f^i) e_1^T C^{imT} \right] \tilde{I} \int_{V^{ij}} \rho^{ij} N_m^{ij} dV^{ij} \\
& -\frac{1}{2} p_f^{iT} \int_{V^{ij}} \rho^{ij} R_m^{ij} p_f^i e_1^T C^{ijT} \tilde{I} N_m^{ij} dV^{ij} \\
& +\frac{1}{2} \int_{V^{ij}} \rho^{ij} dV^{ij} \sum_{\substack{m,s \in P^{ij} \\ m \neq s}} \left( (p_f^{iT} R_{L,m}^{im} p_f^i) (e_1^T C^{imT} \tilde{I} C^{is} e_1) p_f^{iT} R_{L,m}^{is} \right) \\
& +\frac{1}{2} \left[ \sum_{m \in P^{ij}} (p_f^{iT} R_{L,m}^{im} p_f^i) e_1^T C^{imT} \right] \tilde{I} C^{ij} e_1 p_f^{iT} \int_{V^{ij}} \rho^{ij} R_m^{ij} dV^{ij} \\
& +\frac{1}{2} (p_f^{iT} \int_{V^{ij}} \rho^{ij} R_m^{ij} dV^{ij} p_f^i) e_1^T C^{ijT} \tilde{I} \sum_{m \in P^{ij}} C^{im} e_1 p_f^{iT} R_{L,m}^{im}
\end{aligned} \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}
(m_{ff})_{fs}^{ij} = & \\
& - \int_{V^{ij}} \rho^{ij} N^{ijT} dV^{ij} \sum_{m \in P^{ij}} C^{im} e_i p_f^{iT} R_{Lm}^{im} \\
& - \int_{V^{ij}} \rho^{ij} N^{ijT} C^{ij} e_i p_f^{iT} R_m^{ij} dV^{ij} \\
& - \left( \sum_{m \in P^{ij}} R_{Lm}^{im} p_f^i e_i^T C^{imT} \right) \int_{V^{ij}} \rho^{ij} N_m^{ij} dV^{ij} \\
& - \int_{V^{ij}} \rho^{ij} R_m^{ij} p_f^i e_i^T C^{ijT} N_m^{ij} dV^{ij} \\
& + \int_{V^{ij}} \rho^{ij} R_m^{ij} p_f^i p_f^{iT} R_m^{ij} dV^{ij} \\
& + \int_{V^{ij}} \rho^{ij} dV^{ij} \sum_{m,s \in P^{ij}} R_{Lm}^{im} p_f^i e_i^T C^{imT} C^{is} e_i p_f^{iT} R_{Lm}^{is} \\
& + \left[ \sum_{m \in P^{ij}} R_{Lm}^{im} p_f^i e_i^T C^{imT} \right] C^{ij} e_i p_f^{iT} \int_{V^{ij}} \rho^{ij} R_m^{ij} dV^{ij} \\
& + \int_{V^{ij}} \rho^{ij} R_m^{ij} dV^{ij} p_f^i e_i^T C^{ijT} \sum_{m \in P^{ij}} C^{im} e_i p_f^{iT} R_{Lm}^{im}
\end{aligned} \tag{B.9}$$

donde se ha hecho uso de la propiedad de ortogonalidad de las matrices de transformación y de las siguientes relaciones:

$$A_\theta^{iT} A^i = \tilde{I} \tag{B.10}$$

$$C^{ijT} \tilde{I} C^{ij} = \tilde{I} \tag{B.11}$$

$$e_i^T \tilde{I} e_i = 0 \tag{B.12}$$

Las submatrices anteriores pueden escribirse de forma más condensada usando relaciones previamente definidas y definiendo algunas nuevas. Entre las ya definidas se encuentran:

$$\int_{V^{ij}} \rho^{ij} dV^{ij} = m^{ij} \quad (\text{B.13})$$

donde  $m^{ij}$  es la masa del elemento.

$$\int_{V^{ij}} \rho^{ij} N^{ij} dV^{ij} = C^{ij} \int_{V^{ij}} \rho^{ij} S^{ij} dV^{ij} \bar{C}^{ij} B_1^{ij} = \bar{S}^{ij} \quad (\text{B.14})$$

donde  $\bar{S}^{ij}$  es un invariante definido en el capítulo 3.

$$\int_{V^{ij}} \rho^{ij} N_m^{ij} dV^{ij} = \int_{V^{ij}} \rho^{ij} N^{ij} dV^{ij} B_2^i \bar{B}_m^i = \bar{S}^{ij} B_2^i \bar{B}_m^i \quad (\text{B.15})$$

Las nuevas son:

$$\bar{H}^{ij} = \int_{V^{ij}} \rho^{ij} R_m^{ij} dV^{ij} \quad (\text{B.16})$$

que es un nuevo invariante, y otras tres que no son invariantes puesto que dependen del vector de coordenadas nodales, y se definen simplemente por comodidad de escritura por:

$$H_{ff}^{ij} = \int_{V^{ij}} \rho^{ij} R_m^{ij} p_f^i p_f^{i T} R_m^{ij} dV^{ij} \quad (\text{B.17})$$

$$\widehat{H}^{ij} = \int_{V^{ij}} \rho^{ij} N^{ij T} C^{ij} e_1 p_f^i p_f^{i T} R_m^{ij} dV^{ij} \quad (\text{B.18})$$

$$\widetilde{H}^{ij} = \int_{V^{ij}} \rho^{ij} N^{ij T} \tilde{I} C^{ij} e_1 p_f^i p_f^{i T} R_m^{ij} dV^{ij} \quad (\text{B.19})$$

Operando en las cuatro matrices anteriores con objeto de expresarlas en función de las matrices elementales más simples, éstas se transforman según

$$\overline{H}^{ij} = \overline{B}_m^i{}^T B_2^i{}^T B_1^{ij}{}^T \overline{C}^{ij}{}^T \int_{V^{ij}} \rho^{ij} H^{ij} dV^{ij} B_1^{ij} B_2^i \overline{B}_m^i \quad (B.20)$$

$$H_{ff}^{ij} = \overline{B}_m^i{}^T B_2^i{}^T B_1^{ij}{}^T \overline{C}^{ij}{}^T \int_{V^{ij}} \rho^{ij} H^{ij} \overline{e}_f^{ij} \overline{e}_f^{ij}{}^T H^{ij} dV^{ij} \overline{C}^{ij} B_1^{ij} B_2^i \overline{B}_m^i \quad (B.21)$$

$$\widehat{H}^{ij} = B_1^{ij}{}^T \overline{C}^{ij}{}^T \int_{V^{ij}} \rho^{ij} S_l^{ij}{}^T \overline{e}_f^{ij}{}^T H^{ij} dV^{ij} \overline{C}^{ij} B_1^{ij} B_2^i \overline{B}_m^i \quad (B.22)$$

$$\widetilde{H}^{ij} = -B_1^{ij}{}^T \overline{C}^{ij}{}^T \int_{V^{ij}} \rho^{ij} S_l^{ij}{}^T \overline{e}_f^{ij}{}^T H^{ij} dV^{ij} \overline{C}^{ij} B_1^{ij} B_2^i \overline{B}_m^i \quad (B.23)$$

que pueden ser escritas como

$$\overline{H}^{ij} = \overline{B}_m^i{}^T B_2^i{}^T B_1^{ij}{}^T \overline{C}^{ij}{}^T \left( \overline{H}^{ij} \right)_e \overline{C}^{ij} B_1^{ij} B_2^i \overline{B}_m^i \quad (B.24)$$

$$H_{ff}^{ij} = \overline{B}_m^i{}^T B_2^i{}^T B_1^{ij}{}^T \overline{C}^{ij}{}^T \left( H_{ff}^{ij} \right)_e \overline{C}^{ij} B_1^{ij} B_2^i \overline{B}_m^i \quad (B.25)$$

$$\widehat{H}^{ij} = B_1^{ij}{}^T \overline{C}^{ij}{}^T \left( \widehat{H}^{ij} \right)_e \overline{C}^{ij} B_1^{ij} B_2^i \overline{B}_m^i \quad (B.26)$$

$$\widetilde{H}^{ij} = -B_1^{ij}{}^T \overline{C}^{ij}{}^T \left( \widetilde{H}^{ij} \right)_e \overline{C}^{ij} B_1^{ij} B_2^i \overline{B}_m^i \quad (B.27)$$

donde  $\left( \overline{H}^{ij} \right)_e$ ,  $\left( H_{ff}^{ij} \right)_e$ ,  $\left( \widehat{H}^{ij} \right)_e$  y  $\left( \widetilde{H}^{ij} \right)_e$  son matrices elementales cuadradas cuya dimensión es igual al número de grados de libertad del elemento.



Haciendo uso de las definiciones anteriores, los términos de la matriz de masa  $M_{fs}^{ij}$  se pueden reescribir como

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{m}_{R\theta})_{fs}^{ij} = & \\
 & -\frac{1}{2}m^{ij}A_{\theta}^i \sum_{m \in P^{\nu j}} C^{im} e_1 (\mathbf{p}_f^i{}^T \mathbf{R}_{Lm}^{im} \mathbf{p}_f^i) \\
 & -\frac{1}{2}A_{\theta}^i C^{ij} e_1 (\mathbf{p}_f^i{}^T \overline{\mathbf{H}}^{ij} \mathbf{p}_f^i)
 \end{aligned} \tag{B.28}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{m}_{Rf})_{fs}^{ij} = & \\
 & -m^{ij}A^i \sum_{m \in P^{\nu j}} C^{im} e_1 \mathbf{p}_f^i{}^T \mathbf{R}_{Lm}^{im} \\
 & -A^i C^{ij} e_1 \mathbf{p}_f^i{}^T \overline{\mathbf{H}}^{ij}
 \end{aligned} \tag{B.29}$$

$$\begin{aligned}
 (m_{\theta\theta})_{fs}^{ij} = & \\
 & -\mathbf{q}_n^{i{}^T} \widehat{\mathbf{S}}^{ij{}^T} \sum_{m \in P^{\nu j}} C^{im} e_1 (\mathbf{p}_f^i{}^T \mathbf{R}_{Lm}^{im} \mathbf{p}_f^i) \\
 & -\mathbf{q}_n^{i{}^T} \widehat{\mathbf{H}}^{ij} \mathbf{p}_f^i + \frac{1}{4} \mathbf{p}_f^i{}^T \mathbf{H}_{ff}^{ij} \mathbf{p}_f^i \\
 & + \frac{1}{4} m^{ij} \sum_{m,s \in P^{\nu j}} (\mathbf{p}_f^i{}^T \mathbf{R}_{Lm}^{im} \mathbf{p}_f^i e_1{}^T C^{im}{}^T C^{is} e_1 \mathbf{p}_f^i{}^T \mathbf{R}_{Lm}^{is} \mathbf{p}_f^i) \\
 & + \frac{1}{2} \left[ \sum_{m \in P^{\nu j}} (\mathbf{p}_f^i{}^T \mathbf{R}_{Lm}^{im} \mathbf{p}_f^i) e_1{}^T C^{im}{}^T \right] C^{ij} e_1 \mathbf{p}_f^i{}^T \overline{\mathbf{H}}^{ij} \mathbf{p}_f^i
 \end{aligned} \tag{B.30}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{m}_{\theta f})_{fs}^{ij} = & \\
& -\mathbf{q}_n^T \bar{\mathbf{S}}^{ijT} \tilde{\mathbf{I}} \sum_{m \in P^{ij}} \mathbf{C}^{im} \mathbf{e}_1 \mathbf{p}_f^i{}^T \mathbf{R}_{L_m}^{im} \\
& -\mathbf{q}_n^T \tilde{\mathbf{H}}^{ij} \\
& -\frac{1}{2} \left[ \sum_{m \in P^{ij}} (\mathbf{p}_f^i{}^T \mathbf{R}_{L_m}^{im} \mathbf{p}_f^i) \mathbf{e}_1^T \mathbf{C}^{imT} \right] \tilde{\mathbf{I}} \bar{\mathbf{S}}^{ij} \mathbf{B}_2^i \bar{\mathbf{B}}_m^i \\
& -\frac{1}{2} \mathbf{p}_f^i{}^T \tilde{\mathbf{H}}^{ij} \mathbf{B}_2^i \bar{\mathbf{B}}_m^i \tag{B.31} \\
& +\frac{1}{2} m^{ij} \sum_{\substack{m, s \in P^{ij} \\ m \neq s}} \left( (\mathbf{p}_f^i{}^T \mathbf{R}_{L_m}^{im} \mathbf{p}_f^i) (\mathbf{e}_1^T \mathbf{C}^{imT} \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{C}^{is} \mathbf{e}_1) \mathbf{p}_f^i{}^T \mathbf{R}_{L_m}^{is} \right) \\
& +\frac{1}{2} \left[ \sum_{m \in P^{ij}} (\mathbf{p}_f^i{}^T \mathbf{R}_{L_m}^{im} \mathbf{p}_f^i) \mathbf{e}_1^T \mathbf{C}^{imT} \right] \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{C}^{ij} \mathbf{e}_1 \mathbf{p}_f^i{}^T \bar{\mathbf{H}}^{ij} \\
& +\frac{1}{2} (\mathbf{p}_f^i{}^T \bar{\mathbf{H}}^{ij} \mathbf{p}_f^i) \mathbf{e}_1^T \mathbf{C}^{ijT} \tilde{\mathbf{I}} \sum_{m \in P^{ij}} \mathbf{C}^{im} \mathbf{e}_1 \mathbf{p}_f^i{}^T \mathbf{R}_{L_m}^{im}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{m}_{ff})_{fs}^{ij} = & \\
& -\bar{\mathbf{B}}_m^i{}^T \mathbf{B}_2^i{}^T \bar{\mathbf{S}}^{ij}{}^T \sum_{m \in P^{ij}} \mathbf{C}^{im} \mathbf{e}_1 \mathbf{p}_f^i{}^T \mathbf{R}_{L,m}^{im} \\
& -\bar{\mathbf{B}}_m^i{}^T \mathbf{B}_2^i{}^T \widehat{\mathbf{H}}^{ij} \\
& -\left( \sum_{m \in P^{ij}} \mathbf{R}_{L,m}^{im} \mathbf{p}_f^i \mathbf{e}_1{}^T \mathbf{C}^{im}{}^T \right) \bar{\mathbf{S}}^{ij} \mathbf{B}_2^i \bar{\mathbf{B}}_m^i \\
& -\widehat{\mathbf{H}}^{ij} \mathbf{B}_2^i \bar{\mathbf{B}}_m^i \\
& +\mathbf{H}_{ff}^{ij} \\
& +m^{ij} \sum_{m,s \in P^{ij}} \mathbf{R}_{L,m}^{im} \mathbf{p}_f^i \mathbf{e}_1{}^T \mathbf{C}^{im}{}^T \mathbf{C}^{is} \mathbf{e}_1 \mathbf{p}_f^i{}^T \mathbf{R}_{L,m}^{is} \\
& +\left[ \sum_{m \in P^{ij}} \mathbf{R}_{L,m}^{im} \mathbf{p}_f^i \mathbf{e}_1{}^T \mathbf{C}^{im}{}^T \right] \mathbf{C}^{ij} \mathbf{e}_1 \mathbf{p}_f^i{}^T \bar{\mathbf{H}}^{ij} \\
& +\bar{\mathbf{H}}^{ij} \mathbf{p}_f^i \mathbf{e}_1{}^T \mathbf{C}^{ij}{}^T \sum_{m \in P^{ij}} \mathbf{C}^{im} \mathbf{e}_1 \mathbf{p}_f^i{}^T \mathbf{R}_{L,m}^{im}
\end{aligned} \tag{B.32}$$

# Bibliografía

- [1] O.P. Agrawal and A.A. Shabana. Dynamic analysis of multi-body systems using component modes. *Computers and Structures*, 21(6):1303–1312, 1985.
- [2] A. Avello. *Dinámica de Mecanismos Flexibles con Coordenadas Cartesianas y Teoría de Grandes Deformaciones*. PhD thesis, The University of Navarra, 1990.
- [3] M. Badlani and A. Midha. Member initial curvature effects on the elastic slider crank mechanism response. *ASME Journal of Mechanical Design*, 104:159–167, 1982.
- [4] E.M. Bakr and A.A. Shabana. Geometrically nonlinear analysis of multibody systems. *Computers and Structures*, 23(6):739–751, 1986.
- [5] A.K. Banerjee and J.M. Dickens. Dynamics of an arbitrary flexible body in large rotation and translation. *Journal of Guidance and Control*, 13(2):221–227, 1990.
- [6] A.K. Banerjee and T.R. Kane. Dynamics of a plate in large overall motion. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 56:887–892, 1989.
- [7] K.J. Bathe. *Finite Elements Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, 1982.
- [8] J. Baumgarte. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamic systems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1:1–16, 1972.
- [9] E. Bayo and M.A. Serna. Penalty formulations for the dynamic analysis of elastic mechanisms. *ASME Journal of Mechanisms, Transmission, and Automation in Design*, 111:321–327, 1989.

- [10] R. Beyer. *The Kinematic Synthesis of Mechanisms*. McGraw-Hill, 1963.
- [11] A. Cardona and M. Géradin. A beam finite element non-linear theory with finite rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26:2403–2438, 1988.
- [12] A. Cardona, M. Géradin, D. Granville, and V. Raeymaekers. *Module d'analyse de mécanismes flexibles MECANO - Manuel d'utilisation*. ITAS report. Université de Liège, 1988.
- [13] S.C. Chu and K.C. Pan. Dynamic response of a high-speed slider-crank mechanism with an elastic connecting rod. *ASME Journal of Engineering for Industry*, 97(6):542–550, 1975.
- [14] R.W. Clough and J. Penzien. *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill, 1975.
- [15] R.D. Cook. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. Wiley, New York, second edition, 1981.
- [16] C.S. Desai and J.F. Abel. *Introduction to the Finite Element Method*. VNR, 1972.
- [17] E.J. Haug, R.A. Wehage, and N.C. Barman. Dynamic analysis and design of constrained mechanical systems. *ASME Journal of Mechanical Design*, 103:560–570, 1981.
- [18] J. Hirschhorn. *Kinematics and Dynamics of Plane Mechanisms*. McGraw-Hill, 1962.
- [19] W.W. Hooker and G. Margulies. The dynamical attitude equations for a n-body satellite. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 12(4):123–128, 1965.
- [20] W.C. Hurty. Dynamic analysis of structural systems using component modes. *AIAA Journal*, 3(4):678–685, 1965.
- [21] I. Imam, G.N. Sandor, and S.N. Kramer. Deflection and stress analysis in high speed planar mechanisms with elastic links. *ASME Journal of Engineering for Industry*, 95(2):541–548, 1973.

- [22] T.R. Kane, R.R. Ryan, and A.K. Banerjee. Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base. *Journal of Guidance and Control*, 10(2):139–151, 1987.
- [23] W. P. Koppens. *The Dynamics of Systems of Deformable Bodies*. PhD thesis, Eindhoven University of Technology, 1989.
- [24] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Teoría de la Elasticidad*. Ed. Reverté, 1969.
- [25] F.W. Liou and A.G. Erdman. Analysis of a high-speed flexible four-bar linkage: Part I—formulation and solution. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 111:35–47, 1989.
- [26] J. Mayo and J. Domínguez. Dinámica de mecanismos flexibles: No-linealidades geométricas. In *Anales de Ingeniería Mecánica*, number 5, pages 197–200, 1992.
- [27] J. Mayo and J. Domínguez. Geometrically nonlinear coupling between axial and flexural modes of deformation of multibody systems. In *Dynamics of Flexible Multibody Systems: Theory and Experiment*, ASME, AMD-Vol. 142, DSC-Vol. 37, pages 95–103, 1992.
- [28] J. Mayo, J. Domínguez, and J. García Lomas. Continuous modelling of flexible mechanisms: Geometrically nonlinear analysis. In *Proceedings of the Eighth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, volume 6, pages 79–82, 1991.
- [29] G. Naganathan and A.H. Soni. Nonlinear modeling of kinematic and flexibility effects in manipulator design. *ASME Journal of Mechanisms, Transmission, and Automation in Design*, 110:243–254, 1988.
- [30] N. Orlandea, M.A. Chace, and D.A. Calahan. A sparsity-oriented approach to dynamic analysis and design of mechanical systems. *ASME Journal of Engineering for Industry*, 99:773–784, 1977.
- [31] B. Paul. *Kinematics and Dynamic of Planar Machinery*. Prentice-Hall, 1979.
- [32] J.S. Przemieniecki. *Nonlinear Structural Analysis*. McGraw-Hill, 1968.

- [33] R.E. Roberson and J. Wittenburg. A dynamical formalism for an arbitrary number of interconnected rigid bodies, with reference to the problem of satellite attitude control. In *Proceedings of the Third Congress of the International Federation of Automatic Control*, London. Paper 46 D., 1966.
- [34] J. Ryu. *Computational Dynamics of High-Speed Flexible Multibody Systems*. PhD thesis, The University of Iowa, 1991.
- [35] J.P. Sadler and G.N. Sandor. A lumped parameter approach to vibration and stress analysis of elastic linkages. *ASME Journal of Engineering for Industry*, 95(2):549-557, 1973.
- [36] J.P. Sadler and G.N. Sandor. Nonlinear vibration analysis of elastic four-bar linkages. *ASME Journal of Engineering for Industry*, pages 411-419, 1974.
- [37] A.A. Shabana. *Dynamic Analysis of Large Scale Inertia-Variant Flexible Systems*. PhD thesis, The University of Iowa, 1982.
- [38] A.A. Shabana. *User's Guide to DAMS (Dynamic Analysis of Multi-body Systems)*. University of Illinois at Chicago, 1986.
- [39] A.A. Shabana. *Dynamics of Multibody Systems*. Wiley, 1989.
- [40] J.C. Simo and L. Vu-Quoc. On the dynamics of flexible beams under large overall motion - the plane case: Part i and ii. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 53:849-863, 1986.
- [41] J.O. Song. *Dynamic Analysis of Flexible Mechanisms*. PhD thesis, The University of Iowa, 1979.
- [42] J.O. Song and E.J. Haug. Dynamic analysis of planar flexible mechanisms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 21:359-381, 1980.
- [43] W. Sunada and S. Dubowsky. The application of the finite element methods to the dynamic analysis of flexible spatial and co-planar linkage systems. *ASME Journal of Mechanical Design*, 103(3):643-651, 1981.
- [44] W. Sunada and S. Dubowsky. On the dynamic analysis and behavior of industrial robotic manipulator with elastic members. *ASME*

*Journal of Mechanisms, Transmission, and Automation in Design*, 105(1):42–51, 1983.

- [45] D.A. Turcic and A. Midha. Dynamic analysis of elastic mechanism systems. part i: Applications. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 106:249–254, 1984.
- [46] G.N. Vanderplaats. *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: with Applications*. McGraw-Hill, New York, 1984.
- [47] B.V. Viscomi and R.S. Ayre. Nonlinear dynamic response of elastic slider-crank mechanism. *ASME Journal of Engineering for Industry*, pages 251–262, 1971.
- [48] O. Wallrapp and R. Schwertassek. Representation of geometric stiffening in multibody system simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(8):1833–1850, 1991.
- [49] R.A. Wehage. *Generalized Coordinate Partitioning in Dynamic Analysis of Mechanical Systems*. PhD thesis, The University of Iowa, 1980.
- [50] R.A. Wehage and E.J. Haug. Generalized coordinate partitioning for dimension reduction in analysis of constrained dynamic systems. *ASME Journal of Mechanical Design*, 104:247–255, 1982.
- [51] R.C. Winfrey. Elastic link mechanism dynamics. *ASME Journal of Engineering for Industry*, 93(1):268–272, 1971.
- [52] S.C. Wu and E.J. Haug. Geometric non-linear substructuring for dynamics of flexible mechanical systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26:2211–2226, 1988.
- [53] Z. Yang and J.P. Sadler. Large-displacement finite element analysis of flexible linkages. *ASME Journal of Mechanical Design*, 112:175–182, 1990.
- [54] A.S. Yigit, R.A. Scott, and A.G. Ulsoy. Flexural motion of a radially rotating beam attached to a rigid body. *Journal of Sound and Vibration*, 121(2):201–210, 1988.



# Indice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Definición e interés del problema . . . . .	1
1.2	Revisión bibliográfica de las formulaciones geoméricamente no lineales para sistemas multicuerpos flexibles . . . . .	5
1.2.1	Método de Song (1979) . . . . .	7
1.2.2	Método de Wu y Haug (1988) . . . . .	8
1.2.3	Método de Bakr y Shabana (1986) . . . . .	9
1.2.4	Método de Banerjee y Dickens (1990), Wallrapp y Schwertassek (1991) . . . . .	13
1.2.5	Método de Ryu (1991) . . . . .	16
1.3	Resumen y objetivos . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Formulación con Modos Supuestos de la Viga en el Caso Plano</b>	<b>21</b>
2.1	El tensor de deformaciones . . . . .	23
2.2	Coordenadas generalizadas . . . . .	25
2.3	Campo de desplazamientos supuestos . . . . .	27
2.4	Energía cinética . . . . .	28
2.5	Energía potencial . . . . .	32
2.6	Restricciones cinemáticas . . . . .	35
2.7	Ecuaciones del movimiento . . . . .	38
2.8	Formulación lineal . . . . .	40
2.9	Primera formulación no lineal . . . . .	41
2.10	Segunda formulación no lineal . . . . .	43
2.11	Tercera formulación no lineal . . . . .	45
2.12	Comentarios finales . . . . .	50

<b>3</b>	<b>Formulación con Elementos Finitos de la Viga en el Caso Plano: NL2</b>	<b>55</b>
3.1	Sistemas de coordenadas . . . . .	57
3.2	Definición de la posición . . . . .	59
3.3	Condiciones de referencia . . . . .	67
3.4	Energía cinética de un elemento . . . . .	72
3.5	Energía cinética de la viga . . . . .	77
3.6	Energía potencial de un elemento . . . . .	79
3.6.1	Obtención de $U_l^{ij}$ . . . . .	81
3.6.2	Obtención de $U_{nl1}^{ij}$ . . . . .	83
3.6.3	Obtención de $U_{nl2}^{ij}$ . . . . .	86
3.6.4	Vector de fuerzas elásticas . . . . .	88
3.7	Energía potencial de la viga . . . . .	89
3.8	Ecuaciones de Lagrange de la viga . . . . .	90
3.9	Comentarios finales . . . . .	94
<b>4</b>	<b>Formulación con Elementos Finitos de la Viga en el Caso Plano: NL3</b>	<b>97</b>
4.1	Definición de la Posición . . . . .	98
4.2	Condiciones de referencia . . . . .	115
4.3	Energía cinética de un elemento . . . . .	118
4.4	Energía cinética de la viga . . . . .	121
4.5	Energía potencial de un elemento . . . . .	121
4.6	Energía potencial de la viga . . . . .	124
4.7	Restricciones cinemáticas . . . . .	124
4.8	Ecuaciones de Lagrange de la viga . . . . .	127
4.9	Comentarios finales . . . . .	128
<b>5</b>	<b>Resultados Numéricos</b>	<b>129</b>
5.1	Resultados numéricos con modos supuestos . . . . .	129
5.2	Resultados numéricos con elementos finitos . . . . .	146
5.2.1	Mecanismo biela-manivela . . . . .	151
5.2.2	Viga en voladizo con movimiento de rotación . . . . .	152
5.2.3	Mecanismo de cuatro barras . . . . .	158
<b>6</b>	<b>Resumen y Conclusiones</b>	<b>167</b>
<b>A</b>	<b>Definición de los Términos Derivados de la Energía Potencial para un Elemento Viga</b>	<b>169</b>

B Definición de los Términos de la Matriz de Masa  $M_{fs}^{ij}$  en  
la Formulación NL3 177