

MODELADO DINÁMICO EN 3D: CONSTRUCCIONES ARQUITECTÓNICAS.

Raúl Manuel Falcón Ganfornina.

Escuela Universitaria de Arquitectura Técnica.

Universidad de Sevilla.

rafalgan@us.es

RESUMEN

En la presente comunicación se muestran ejemplos de reconstrucción y modelado 3D de diversas construcciones arquitectónicas elaboradas en el contexto de la asignatura *Matemática Aplicada a la Edificación II*, correspondiente al título de Grado de Ingeniería de Edificación, el cual ha sido implantado durante el presente curso académico en la Universidad de Sevilla.

1. INTRODUCCIÓN.

En los estudios universitarios de Arquitectura y Arquitectura Técnica se hace un uso continuado de herramientas informáticas CAD (Computer Aided Design), asociados al diseño asistido por ordenador. Este tipo de software no suele ser capaz de representar curvas o superficies a partir de su correspondiente ecuación, sino que el usuario debe definir macros específicas o bien crear una tabla de puntos que el programa convertirá en los nodos de una polilínea.

Por su parte, las herramientas informáticas de tipo CAS (Computer Algebra System) que suelen usarse en las asignaturas correspondientes al área de Matemáticas, sí permiten la representación gráfica de curvas y superficies a partir de sus ecuaciones paramétricas. En contrapartida, existe una gran limitación por parte de estos programas en cuanto al desarrollo dinámico de las correspondientes construcciones gráficas.

En este sentido, la complementación de las herramientas algebraicas y de geometría dinámica incluidas en Geogebra hace que este software se postule como una alternativa atractiva a la hora de diseñar y modelar matemáticamente curvas y cuerpos rígidos tridimensionales. El uso de deslizadores asociados a los ángulos de Euler y la posibilidad de generar herramientas que permiten proyectar 3D en 2D, facilitan dicho modelado [1, 2].

2. MODELIZACIÓN 3D.

Fijado un origen de coordenadas O , sean $OXYZ$ y $OX'Y'Z'$ dos sistemas de referencia tridimensionales de ejes ortogonales y sea l la recta intersección de los planos OXY y $OX'Y'$. La orientación del segundo sistema de referencia respecto al primero viene unívocamente determinada por los **ángulos de Euler**:

- α : Ángulo formado por las rectas OZ y OZ' .
- β : Ángulo formado por las rectas OX' y l .
- γ : Ángulo formado por las rectas l y OX .

La variación de estos tres ángulos conlleva una movilidad del segundo sistema de referencia respecto al primero, que heredará cualquier objeto rígido tridimensional cuyas coordenadas queden fijadas respecto a dicho sistema móvil. En concreto, α determina el **ángulo de inclinación** del objeto respecto al sistema fijo $OXYZ$, mientras que β constituye su **ángulo de rotación** dentro del plano $OX'Y'$. Como consecuencia, toda proyección ortográfica que se realice desde un foco suficientemente alejado y que contemple una dependencia respecto a los ángulos de Euler, permitirá una visualización virtual en dos dimensiones del objeto tridimensional. Una posible proyección [1, 2, 3] es la siguiente:

$$P = (a, b, c) \rightarrow \pi(P) = (a \cdot \sin(\beta) + b \cdot \cos(\beta), -a \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) + b \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha) + c \cdot \cos(\alpha)).$$

En caso de querer establecer una determinada escala, deben multiplicarse ambas componentes de $\pi(P)$ por el correspondiente escalar r , dando lugar a una proyección escalada π_r . Esta proyección punto a punto puede extenderse de forma natural a curvas tridimensionales y a superficies, entendidas estas últimas como mallas de curvas. En nuestro caso trabajaremos con dos tipos de superficies:

A. Aquéllas de la forma:

$$S(u, v) = f(u) \cdot g(v) = (f_1(u) \cdot g_1(v), f_2(u) \cdot g_2(v), f_3(u) \cdot g_3(v)).$$

B. Superficies regladas:

$$S(u, v) = f(u) + v \cdot g(u) = (f_1(u) + v \cdot g_1(u), f_2(u) + v \cdot g_2(u), f_3(u) + v \cdot g_3(u)).$$

3. CONSTRUCCIÓN EN GEOGEBRA.

Para llevar a cabo las ideas planteadas en la sección anterior, necesitamos definir en Geogebra mediante deslizadores el escalar r y los ángulos α y β . Posteriormente, seguimos los siguientes pasos:

1) Construcción del sistema de referencia móvil:

- i. Fijar el origen de coordenadas O .
- ii. Determinar el sistema de referencia móvil $OX'Y'Z'$, mediante la construcción de tres vectores con origen en O y extremos en:

$$\pi_r(1,0,0) = (r \cdot \sin(\beta), -r \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha)).$$

$$\pi_r(0,1,0) = (r \cdot \cos(\beta), r \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha)).$$

$$\pi_r(0,0,1) = (0, r \cdot \cos(\alpha)).$$

- iii. Definir una nueva herramienta **Ejes3d** con salida los tres vectores anteriores y entrada O , r , α y β .

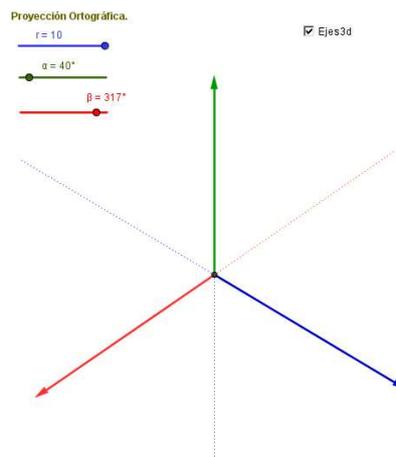


Figura 1: Ejes tridimensionales.

2) Definición de la Proyección Ortográfica Escalada:

- i. Definir un punto cualquiera tridimensional como una lista de 3 elementos.
Ej: $P = \{1,2,3\}$.

- ii. Determinar la proyección π_r del punto anterior¹:

$$P' = (r/10(\text{Elemento}[P,1]\sin(\beta) + \text{Elemento}[P,2]\cos(\beta)), r/10(-\text{Elemento}[P,1]\cos(\beta)\sin(\alpha) + \text{Elemento}[P,2]\sin(\beta)\sin(\alpha) + \text{Elemento}[P,3]\cos(\alpha))).$$

- iii. Definir una nueva herramienta **POE** con salida P' y entrada P , r , α y β .

¹ En todas las proyecciones dividiremos la escala entre diez para lograr un mejor efecto con el eje tridimensional creado.

3) Proyección de una curva espacial $C(u) = (c_1(u), c_2(u), c_3(u))$ con u en un intervalo (u_0, u_1) :

- i. Definir como números o mediante deslizadores los valores u_0 y u_1 .
- ii. Definir las componentes de la curva como tres funciones en x .
Ej: $c_1(x) = \sin(x)\cos(x)$; $c_2(x) = \cos(x)$; $c_3(x) = \sin(x)$.
- iii. Determinar la proyección π_r de la curva C en el intervalo (u_0, u_1) :
 $C = \text{Curva}[r/10(c_1(u)\sin(\beta) + c_2(u)\cos(\beta)), r/10(-c_1(u)\cos(\beta)\sin(\alpha) + c_2(u)\sin(\beta)\sin(\alpha) + c_3(u)\cos(\alpha)), u, u_0, u_1]$.
- iv. Definir una nueva herramienta **Curva3d** con salida C y entrada $r, \alpha, \beta, c_1(x), c_2(x), c_3(x), u_0$ y u_1 .

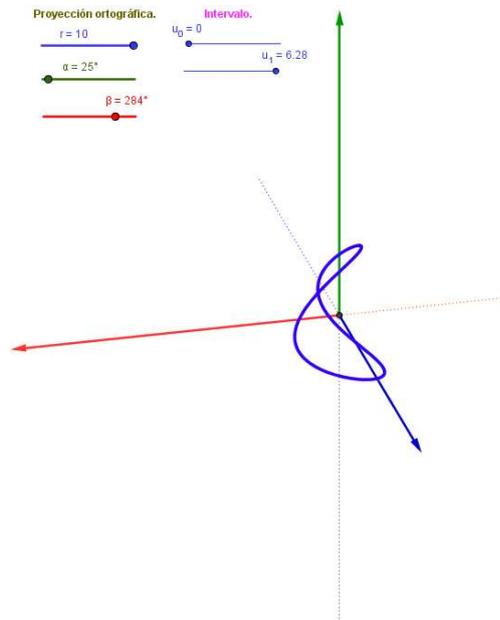


Figura 2: Curva tridimensional en Geogebra.

4) Proyección de una superficie $S(u, v) = (f_1(u) \cdot g_1(v), f_2(u) \cdot g_2(v), f_3(u) \cdot g_3(v))$ con u y v en intervalos (u_0, u_1) y (v_0, v_1) , respectivamente, haciendo uso de n curvas u -paramétricas y v -paramétricas:

- i. Definir como números o mediante deslizadores los valores u_0, u_1, v_0, v_1 y n .
- ii. Definir las componentes de la curva como seis funciones en x .
Ej: $f_1(x) = \cos(x)$; $f_2(x) = \cos(x)$; $f_3(x) = \sin(x)$; $g_1(x) = \cos(x)$; $g_2(x) = \sin(x)$; $g_3(x) = 1$.
- iii. Determinar la proyección π_r de la curva u -paramétrica de S asociada al valor v_0 y la curva v -paramétrica de S asociada al valor u_0 :
 $C_u = \text{Curva}[r/10(f_1(u)g_1(v_0)\sin(\beta) + f_2(u)g_2(v_0)\cos(\beta)), r/10(-f_1(u)g_1(v_0)\cos(\beta)\sin(\alpha) + f_2(u)g_2(v_0)\sin(\beta)\sin(\alpha) + f_3(u)g_3(v)\cos(\alpha)), u, u_0, u_1]$.

$$C_v = \text{Curva}[r/10(f_1(u_0)g_1(v)\sin(\beta) + f_2(u_0)g_2(v)\cos(\beta)), r/10(-f_1(u_0)g_1(v)\cos(\beta)\sin(\alpha) + f_2(u_0)g_2(v)\sin(\beta)\sin(\alpha) + f_3(u_0)g_3(v)\cos(\alpha)), v, v_0, v_1].$$

iv. Definir una nueva herramienta **UCurva** con salida C_u y entrada $r, \alpha, \beta, n, f_1(x), f_2(x), f_3(x), u_0, u_1, g_1(x), g_2(x), g_3(x)$ y v_0 . Definir una nueva herramienta **VCurva** con salida C_v y entrada $r, \alpha, \beta, n, f_1(x), f_2(x), f_3(x), u_0, g_1(x), g_2(x), g_3(x), v_0$ y v_1 .

v. Definir cuatro funciones $U_0(x), U_1(x), V_0(x)$ y $V_1(x)$, que posibiliten una dependencia entre los parámetros u y v en la definición de los extremos de los intervalos (u_0, u_1) y (v_0, v_1) . Si no existe tal dependencia, bastaría definir:

$$U_0(x)=u_0; U_1(x)=u_1; V_0(x)=v_0; V_1(x)=v_1.$$

vi. Determinar la proyección π_r de las n curvas u -paramétricas y v -paramétricas asociadas a S :

$$S_u = \text{Secuencia}[UCurva[r, \alpha, \beta, n, f_1(x), f_2(x), f_3(x), U_0(v), U_1(v), g_1(x), g_2(x), g_3(x), v)], v, v_0, v_1, (v_1-v_0)/n].$$

$$S_v = \text{Secuencia}[VCurva[r, \alpha, \beta, n, f_1(x), f_2(x), f_3(x), u, g_1(x), g_2(x), g_3(x), V_0(u), V_1(u)]], u, u_0, u_1, (u_1-u_0)/n].$$

vii. Definir una nueva herramienta **UCurvas** con salida S_u y entrada $r, \alpha, \beta, n, f_1(x), f_2(x), f_3(x), U_0(x), U_1(x), g_1(x), g_2(x), g_3(x), v_0$ y v_1 . Definir una nueva herramienta **VCurvas** con salida S_v y entrada $r, \alpha, \beta, n, f_1(x), f_2(x), f_3(x), u_0, u_1, g_1(x), g_2(x), g_3(x), V_0(x)$ y $V_1(x)$.

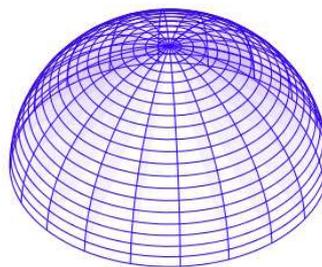
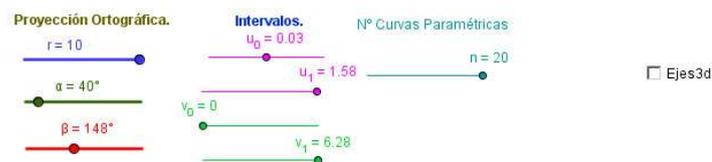


Figura 3: Cúpula esférica.

5) Proyección de una superficie reglada $SR(u,v) = (f_1(u)+v\cdot g_1(u), f_2(u)+v\cdot g_2(u), f_3(u)+v\cdot g_3(u))$ con u y v en intervalos (u_0, u_1) y (v_0, v_1) , respectivamente, haciendo uso de n curvas u -paramétricas y v -paramétricas (generatrices):

i. Definir como números o mediante deslizadores los valores u_0, u_1, v_0, v_1 y n .

ii. Definir las componentes de la curva como seis funciones en x .

Ej: $f_1(x) = x; f_2(x) = x; f_3(x) = \sin(x); g_1(x) = \sin(x); g_2(x) = 1; g_3(x) = 1$.

iii. Determinar la proyección π_r de la curva u -paramétrica de S asociada al valor v_0 y la curva v -paramétrica de S asociada al valor u_0 :

$$CR_u = \text{Curva}[r((f_1(u)+v_0\cdot g_1(u))\sin(\beta) + (f_2(u)+v_0\cdot g_2(u))\cos(\beta)), r(-(f_1(u)+v_0\cdot g_1(u))\cos(\beta)\sin(\alpha) + (f_2(u)+v_0\cdot g_2(u))\sin(\beta)\sin(\alpha) + (f_3(u)+v_0\cdot g_3(u))\cos(\alpha)), u, u_0, u_1].$$

$$CR_v = \text{Curva}[r((f_1(u_0)+v\cdot g_1(u_0))\sin(\beta) + (f_2(u_0)+v\cdot g_2(u_0))\cos(\beta)), r(-(f_1(u_0)+v\cdot g_1(u_0))\cos(\beta)\sin(\alpha) + (f_2(u_0)+v\cdot g_2(u_0))\sin(\beta)\sin(\alpha) + (f_3(u_0)+v\cdot g_3(u_0))\cos(\alpha)), v, v_0, v_1].$$

iv. Definir una nueva herramienta **UCurvaR** con salida CR_u y entrada $r, \alpha, \beta, n, f_1(x), f_2(x), f_3(x), u_0, u_1, g_1(x), g_2(x), g_3(x)$ y v_0 . Definir una nueva herramienta **VCurvaR** con salida CR_v y entrada $r, \alpha, \beta, n, f_1(x), f_2(x), f_3(x), u_0, g_1(x), g_2(x), g_3(x), v_0$ y v_1 .

v. Definir cuatro funciones $U_0(x), U_1(x), V_0(x)$ y $V_1(x)$, que posibiliten una dependencia entre los parámetros u y v en la definición de los extremos de los intervalos (u_0, u_1) y (v_0, v_1) . Si no existe tal dependencia, bastaría definir:

$$U_0(x)=u_0; U_1(x)=u_1; V_0(x)=v_0; V_1(x)=v_1.$$

vi. Determinar la proyección π_r de las n curvas u -paramétricas y v -paramétricas asociadas a SR :

$$SR_u = \text{Secuencia}[UCurvaR[r, \alpha, \beta, n, f_1(x), f_2(x), f_3(x), U_0(v), U_1(v), g_1(x), g_2(x), g_3(x), v)], v, v_0, v_1, (v_1-v_0)/n].$$

$$SR_v = \text{Secuencia}[VCurvaR[r, \alpha, \beta, n, f_1(x), f_2(x), f_3(x), u, g_1(x), g_2(x), g_3(x), V_0(u), V_1(u)]], u, u_0, u_1, (u_1-u_0)/n].$$

viii. Definir una nueva herramienta **UCurvasR** con salida SR_u y entrada $r, \alpha, \beta, n, f_1(x), f_2(x), f_3(x), U_0(x), U_1(x), g_1(x), g_2(x), g_3(x), v_0$ y v_1 . Definir una nueva herramienta **VCurvasR** con salida SR_v y entrada $r, \alpha, \beta, n, f_1(x), f_2(x), f_3(x), u_0, u_1, g_1(x), g_2(x), g_3(x), V_0(x)$ y $V_1(x)$.

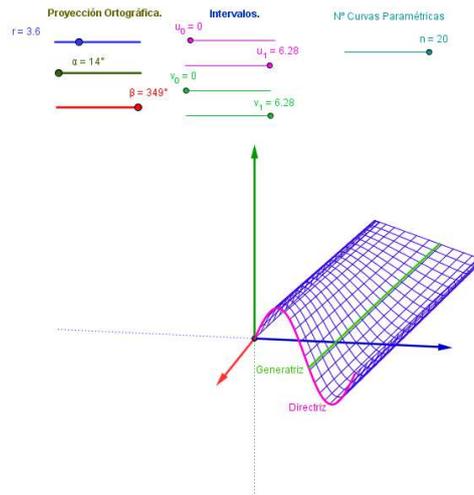


Figura 4: Superficie reglada.

4. CONSTRUCCIÓN DE SUPERFICIES.

Las herramientas **UCurvas** y **VCurvas** creadas en el Apartado 4 de la sección anterior permiten la construcción de superficies conocidas, a partir de sus respectivas familias de curvas u y v -paramétricas. En la Tabla 1 se indican las seis funciones que hay que definir a la hora de construir cada una de dichas superficies, mostrando además las familias de curvas obtenidas.

Por otra parte, las herramientas **UCurvasR** y **VCurvasR** permiten la construcción de distintos tipos de superficies regladas (véase Tabla 2), entre las que se encuentran los siguientes:

- Superficies cilíndricas: Basta imponer que las funciones g_1 , g_2 y g_3 sean constantes.

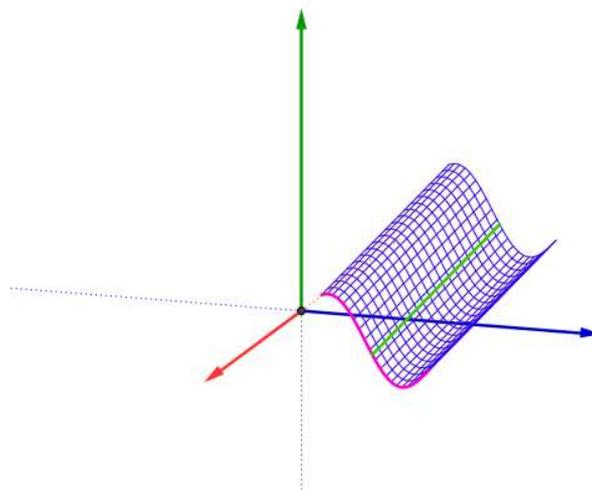


Figura 5: Superficie cilíndrica.

- b) Superficies cónicas: Si todas las generatrices deben pasar por el punto $P=(a,b,c)$, basta imponer la siguiente condición:

$$\frac{a - f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{b - f_2(x)}{g_2(x)} = \frac{c - f_3(x)}{g_3(x)}.$$

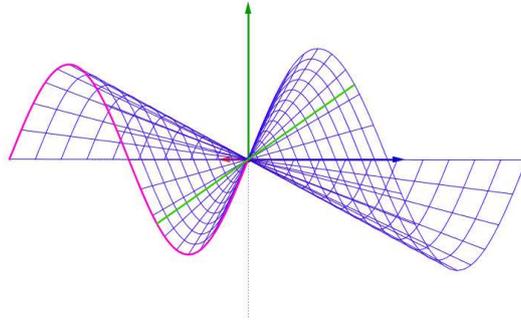


Figura 6: Superficie cónica.

- c) Conoides.

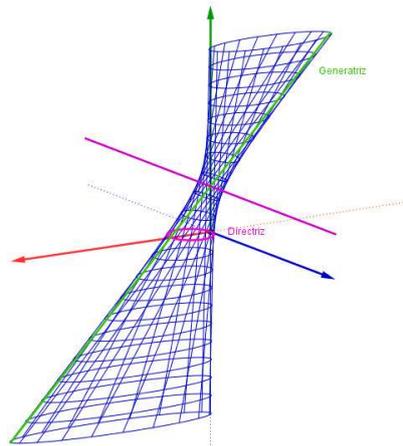


Figura 7: Conoide.

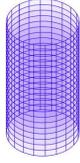
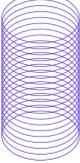
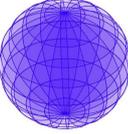
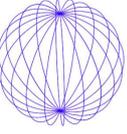
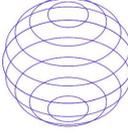
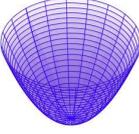
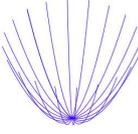
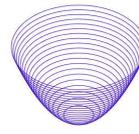
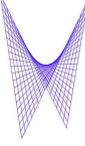
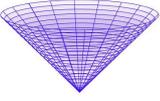
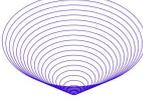
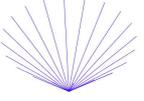
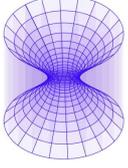
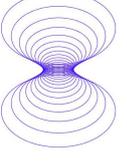
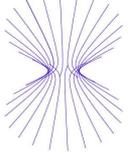
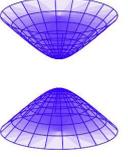
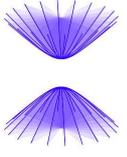
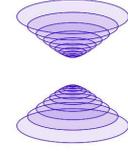
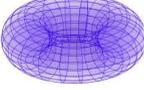
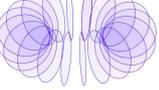
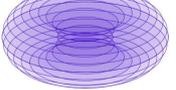
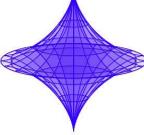
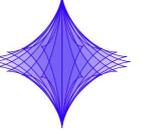
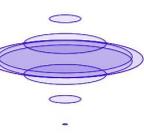
Superficie	S	S _u	S _v
<p>Cilindro</p> $f_1(x)=\cos(x); f_2(x)=\sin(x); f_3(x)=1;$ $g_1(x)=1; g_2(x)=1; g_3(x)=x.$			
<p>Esfera</p> $f_1(x)=\cos(x); f_2(x)=\cos(x); f_3(x)=\sin(x);$ $g_1(x)=\cos(x); g_2(x)=\sin(x); g_3(x)=1.$			
<p>Paraboloide elíptico</p> $f_1(x)=\sqrt{x}; f_2(x)=\sqrt{x}; f_3(x)=x;$ $g_1(x)=\cos(x); g_2(x)=\sin(x); g_3(x)=1.$			
<p>Paraboloide hiperbólico</p> $f_1(x)=x; f_2(x)=1; f_3(x)=x;$ $g_1(x)=1; g_2(x)=x; g_3(x)=x.$			
<p>Cono</p> $f_1(x)=\cos(x); f_2(x)=\sin(x); f_3(x)=1;$ $g_1(x)=x; g_2(x)=x; g_3(x)=x.$			
<p>Hiperboloide de una hoja</p> $f_1(x)=\cos(x); f_2(x)=\cos(x); f_3(x)=\sin(x);$ $g_1(x)=\cosh(x); g_2(x)=\sinh(x); g_3(x)=1.$			
<p>Hiperboloide de dos hojas²</p> $f_1(x)=\sinh(x); f_2(x)=\sinh(x); f_3(x)=\cosh(x);$ $g_1(x)=\cos(x); g_2(x)=\sin(x); g_3(x)=1.$			
<p>Toro</p> <p>Ej: $f_1(x)=2+\cos(x); f_2(x)=2+\cos(x);$ $f_3(x)=\sin(x);$ $g_1(x)=\cos(x); g_2(x)=\sin(x); g_3(x)=1.$ </p>			
<p>Astroide de revolución</p> <p>Ej: $f_1(x)=\cos^3(x); f_2(x)=\cos^3(x); f_3(x)=\sin^3(x);$ $g_1(x)=\cos(x); g_2(x)=\sin(x); g_3(x)=1.$ </p>			

Tabla 1: Construcción de superficies a partir de sus curvas u y v -paramétricas.

² Para conseguir la hoja inferior hay que hacer uso de la función $f_3(x) = -\cosh(x)$.

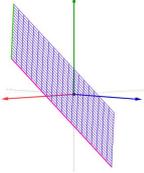
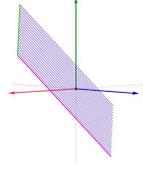
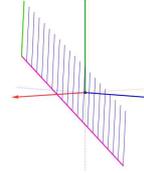
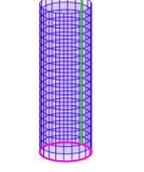
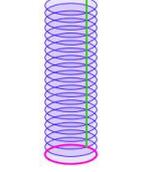
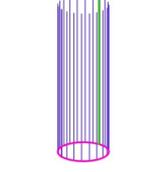
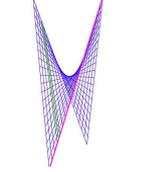
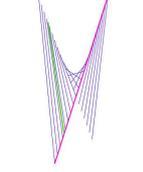
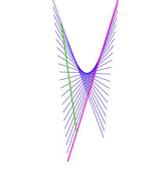
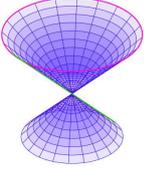
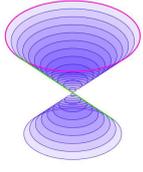
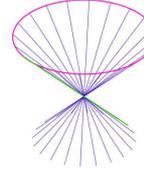
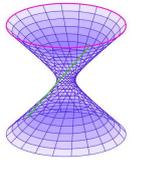
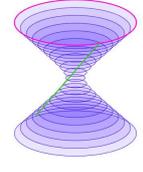
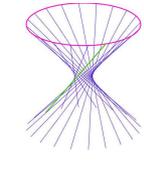
Superficie reglada	S	S _u	S _v
<p>Plano</p> $f_1(x)=ax+b; f_2(x)=cx+d; f_3(x)=ex+f;$ $g_1(x)=g; g_2(x)=h; g_3(x)=i.$			
<p>Cilindro</p> $f_1(x)=\cos(x); f_2(x)=\sin(x); f_3(x)=1;$ $g_1(x)=0; g_2(x)=0; g_3(x)=1.$			
<p>Paraboloide hiperbólico</p> $f_1(x)=x; f_2(x)=x; f_3(x)=0;$ $g_1(x)=1; g_2(x)=-1; g_3(x)=4x.$			
<p>Cono</p> $f_1(x)=\cos(x); f_2(x)=\sin(x); f_3(x)=1;$ $g_1(x)=\cos(x); g_2(x)=\sin(x); g_3(x)=1.$			
<p>Hiperboloide de una hoja</p> $f_1(x)=\cos(x); f_2(x)=\cos(x); f_3(x)=\sin(x);$ $g_1(x)=\cosh(x); g_2(x)=\sinh(x); g_3(x)=1.$			

Tabla 2: Construcción de superficies regladas.

5. CONSTRUCCIONES ARQUITECTÓNICAS.

Las herramientas creadas en la Sección 3 pueden complementarse con deslizadores asociados a cada uno de los elementos arquitectónicos que intervengan a la hora de modelar diversas construcciones: altura, diámetro, distancia, semiejes, etc. Estos deslizadores permiten acoplar de una manera sencilla e intuitiva las distintas superficies que componen la estructura final.

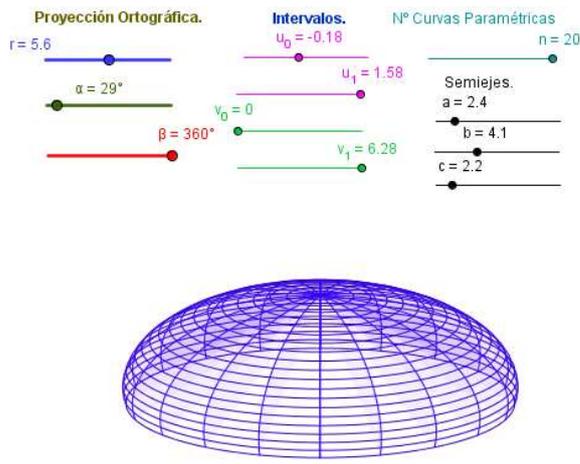


Figura 8: Cúpula elipsoidal (Teatro de Beijing).

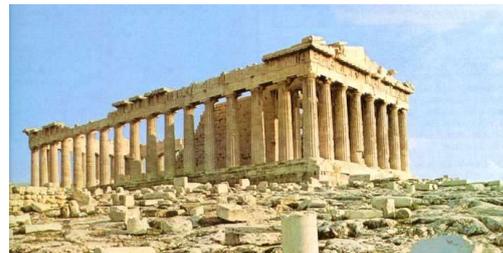
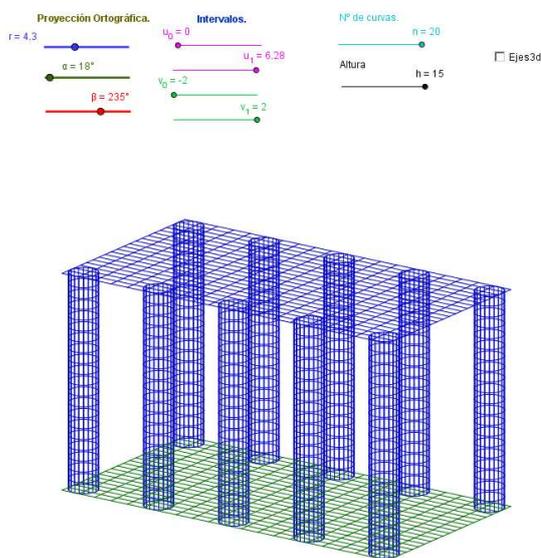


Figura 9: Columnata.

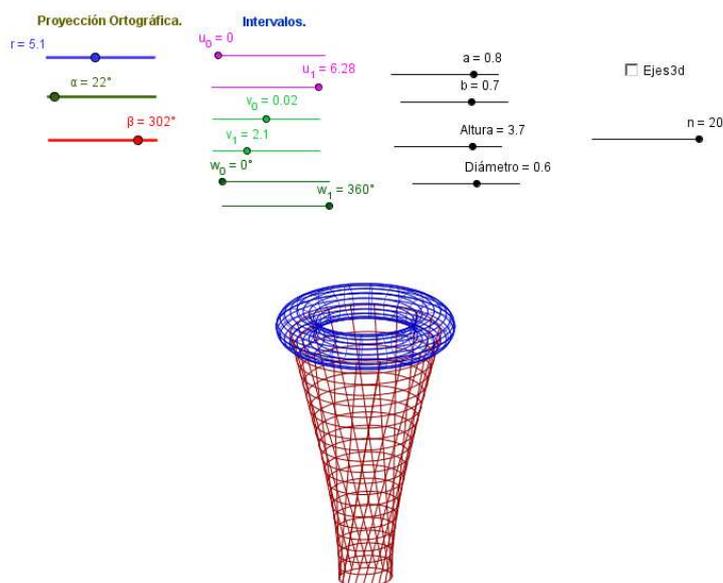


Figura 10: Tanque de agua (hiperboloide elíptico + toro) (Ciechanow, Polonia).

No obstante, si bien una construcción basada en deslizadores puede resultar útil en algunos casos, en general no basta una dependencia numérica, sino que se precisa de una dependencia paramétrica en los extremos de los intervalos de definición.

Podemos ver ejemplos concretos de este hecho en la construcción de cubiertas arquitectónicas. Así por ejemplo, en la construcción de una **bóveda vaída o de pañuelo**, basta tomar en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ aquellos puntos (x,y,z) tales que z es no negativo y x e y pertenecen al intervalo $[-1,1]$, es decir, basta cortar la semiesfera superior con cuatro planos verticales paralelos dos a dos y perpendiculares a los otros dos. Estos cortes originan cuatro pilares (**pechinas**) con forma de triángulo esférico que sostienen la bóveda y que, como elemento arquitectónico, sirven para pasar de una base cuadrada a una forma circular superior. En nuestro caso, las pechinas se obtendrían cortando la bóveda vaída con el plano $z=1$.

Para poder realizar esta construcción en Geogebra, definimos en primer lugar las seis funciones asociadas a la esfera indicada:

$$f_1(x)=\sqrt{2}\cos(x); f_2(x)=\sqrt{2}\cos(x); f_3(x)=\sqrt{2}\sin(x); \\ g_1(x)=\cos(x); g_2(x)=\sin(x); g_3(x)=1.$$

A continuación es preciso definir, tanto para la bóveda superior como para cada pechina, las correspondientes familias de curvas u y v -paramétricas, atendiendo a las condiciones de dependencia de los parámetros. Damos como ejemplo las definiciones de las familias correspondientes a una de las cuatro pechinas:

$$U_0(x)=\arccos(1/(\sqrt{2}\sin(x))); U_1(x)=\pi/4; v_0=\pi/4; v_1=3\pi/4. \\ UCurvas[r,\alpha,\beta,n,f_1(x),f_2(x),f_3(x),U_0(x),U_1(x),g_1(x),g_2(x),g_3(x),v_0, v_1].$$

$$u_0=0; u_1=\pi/2; V_0(x)=\arccos(1/(\sqrt{2}\cos(x))); V_1(x)=\arcsin(1/(\sqrt{2}\cos(x))). \\ VCurvas[r,\alpha,\beta,n,f_1(x),f_2(x),f_3(x),u_0,u_1,g_1(x),g_2(x),g_3(x),V_0(x),v_1(x)].$$

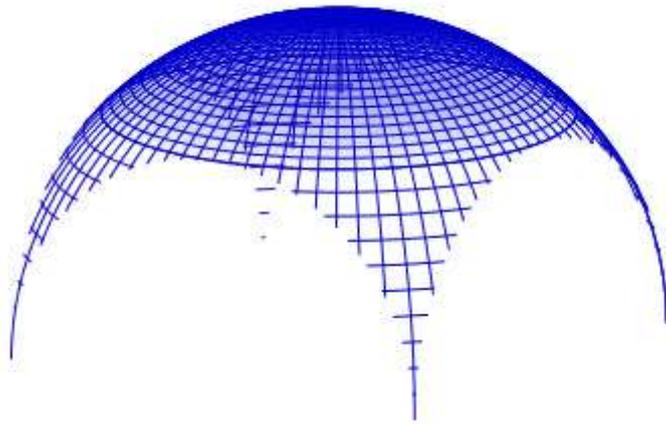


Figura 11: Bóveda vaída.

Si eliminamos la bóveda superior, obtenemos las cuatro pechinas que sirven como base para construir otras bóvedas arquitectónicas.

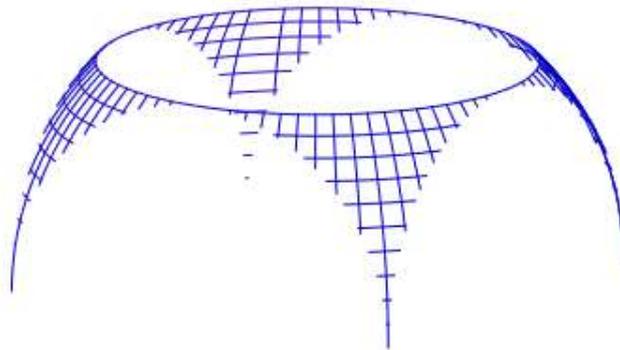


Figura 12: Base formada por cuatro pechinas.

Es usual colocar entonces una cúpula semiesférica sobre la base anterior, que, en caso de querer conseguir una mayor altura, puede apoyarse sobre un tambor cilíndrico:

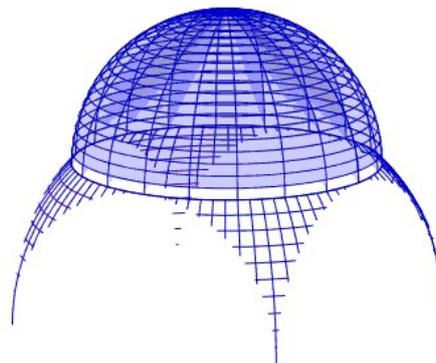


Figura 13: Cúpula sobre cuatro pechinas.

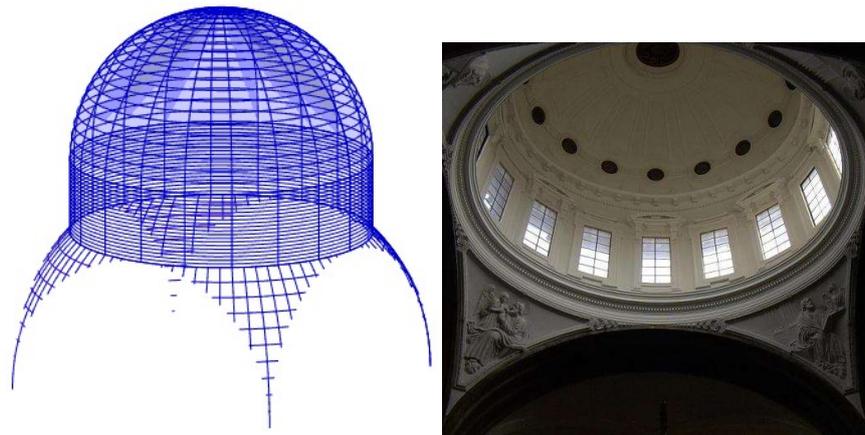


Figura 14: Tambor y cúpula sobre cuatro pechinas.

La modelización de la pechina puede completarse por ejemplo con cuatro pórticos cilíndricos, tal y como puede observarse en la Figura 15.

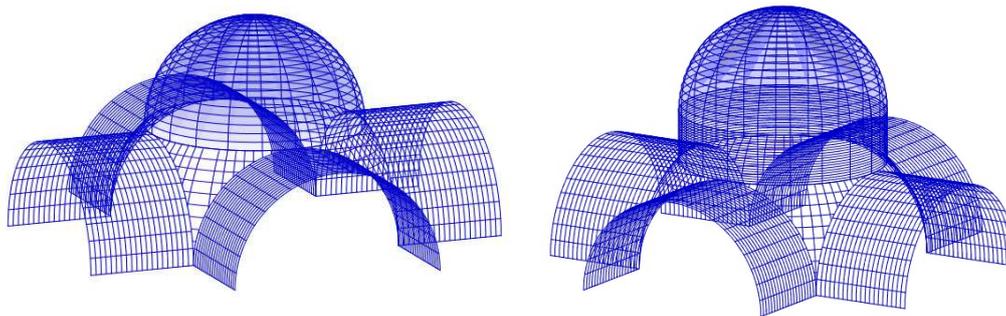


Figura 15: Construcciones arquitectónicas basadas en pechinas.

6. CONCLUSIONES FINALES.

Geogebra permite modelar de forma dinámica diversas construcciones arquitectónicas acoplando los distintos elementos que componen las mismas mediante adecuados deslizadores. Por otra parte, la vertiente algebraica del programa da la posibilidad de usar la dependencia paramétrica necesaria a la hora de realizar construcciones más complejas. A diferencia de los programas CAD, Geogebra permite además el uso de las ecuaciones exactas de las superficies a utilizar.

Como contrapartida, cabe observar que el motor de cálculo usado a la hora de proyectar ortogonalmente una superficie tridimensional, visualizada como un mallado de curvas paramétricas, provoca una importante ralentización del programa, que impide un manejo fluido en una herramienta tan fundamental en modelización como pueden ser las distintas rotaciones de la figura final.

Si bien es previsible que la futura versión de Geogebra 3D mejore este aspecto, puede ser interesante analizar otras proyecciones que permitan realizar un estudio comparativo de las mismas.

REFERENCIAS.

[1] <http://www.geometriadinamica.cl/2007/04/construcciones-3d/> . Consultado el día 28 de febrero de 2010.

[2] R. Losada (2009). “*Geogebra avanzado*”. Seminario Intergeo/GeoGebra (Castro-Urdiales, Cantabria).

[3] J. M. Arranz, R. Losada, J. A. Mora, T. Recio, M. Sada. *Geogebra on the rocks*. Model-centered Learning with GeoGebra: Theory and Practice in Mathematics Education. International GeoGebra Institute, 2010.