



**Universidad de Sevilla**

Facultad de Matemáticas

**Trabajo Fin de Grado:**

**Soluciones explícitas de las  
ecuaciones de los fluidos y  
consecuencias**

Autor: Manuel Garzón Martínez

Tutor: Francisco Gancedo García

13 de septiembre de 2017



# Índice general

<b>1. Introducción a las ecuaciones de los fluidos. Primeras soluciones exactas.</b>	<b>13</b>
1.1. Breve introducción a las ecuaciones de los fluidos. . . . .	13
1.2. Vorticidad, matriz de deformación. . . . .	17
1.3. Primeros ejemplos de soluciones exactas. . . . .	24
1.4. Algunos resultados fundamentales de las ecuaciones del Calor y Poisson. . .	29
<b>2. Convección, estiramiento de vórtice y difusión.</b>	<b>35</b>
<b>3. Soluciones exactas y estacionarias de Euler 2D.</b>	<b>43</b>
3.1. Formulación Corriente-Vorticidad para fluidos 2D. . . . .	43
3.2. Un método general para construir soluciones exactas estacionarias para Euler 2D. . . . .	48
3.2.1. Soluciones radiales para las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes. Remolinos. . . . .	51
3.2.2. Formulación corriente-vorticidad y soluciones exactas para flujos periódicos. . . . .	54
<b>4. Flujos 3D con vórtices dinámicos no triviales.</b>	<b>65</b>
4.1. Flujos de dimensión dos y media. . . . .	65
4.2. Flujos de Beltrami 3D. . . . .	68
4.3. Flujos 3D axisimétricos. . . . .	76
4.3.1. Coordenadas cilíndricas. Primeras definiciones. . . . .	77
4.3.2. Flujos axisimétricos sin remolinos. . . . .	84
4.3.3. Flujos axisimétricos con remolino. . . . .	88

5. Un resultado sobre el mal planteamiento de las ecuaciones de Euler en espacios de Hölder.	101
--	-----

# Resumen

Entender el movimiento de los líquidos, gases y plasmas forma la parte central de la Mecánica de Fluidos, que es de gran importancia para la Química, Física o Ingeniería. Estos problemas están planteados en lenguaje matemático mediante Ecuaciones en Derivadas Parciales, o EDPs, tales como las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes. Considerando flujos incompresibles, estas ecuaciones son difíciles de entender debido a su no linealidad, entre otras razones. En particular, se conocen pocas soluciones explícitas o exactas.

En este trabajo se han calculado algunas de las soluciones exactas más importantes de las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes para fluidos incompresibles, a través de las cuales se ilustran los distintos tipos de movimientos que tienen este tipo de fluidos, dando también algunas consecuencias.

El primer capítulo introduce las ecuaciones de los fluidos así como los elementos que las forman con el objetivo de empezar a ganar intuición sobre sus posibles comportamientos. La diferencia entre el planteamiento de las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes es la inclusión del término de viscosidad  $\nu$  en las mismas, siendo nulo para el caso Euler. Debido a ello, se hablará de *fluidos viscosos* cuando se trabaje en las ecuaciones de Navier-Stokes mientras que al hacerlo en Euler se denominarán *fluidos ideales o no viscosos*. A continuación, se analiza el comportamiento de un flujo cualquiera a nivel local, observándose que su composición se divide en rotaciones, traslaciones y deformaciones del mismo. De esta manera, se calculan las primeras soluciones exactas que ilustran estos efectos tanto por separado como en conjunto. Además, se considera la *vorticidad*, responsable de las rotaciones del fluido, y su correspondiente ecuación, cuyo estudio ocupará gran parte de nuestro análisis. Por último, se ha incluido una sección de resultados necesarios sobre las ecuaciones de Poisson y el calor al final del capítulo.

El segundo capítulo comienza con el análisis de la estructura que posee ecuación de la vor-

ticidad. Esta consta de 3 términos, correspondientes a efectos de convección, estiramiento de vórtice y difusión, estando este último ligado a la viscosidad  $\nu$  del fluido. Con el fin de ilustrarlos, se considera un flujo irrotacional visto en el capítulo anterior y se añade una componente al campo de velocidades de manera que la vorticidad deje de ser nula y así el fluido empiece a rotar. Para que esto se cumpla, las ecuaciones de Navier-Stokes para el nuevo flujo se reducen a una ecuación lineal difusiva que debe verificar la componente añadida. Mediante su resolución, se ven 4 ejemplos de soluciones explícitas, los cuales se dividen en grupos de 2 de la siguiente manera. En el primer ejemplo se considera el caso Euler y en el siguiente Navier-Stokes (añadiendo el término de difusión). Una vez estudiados, vemos la convergencia entre ambos cuando la viscosidad  $\nu \searrow 0$ . Este tipo de análisis se repite frecuentemente en los ejemplos de los capítulos 3 y 4.

El tercer capítulo estudia soluciones estacionarias en el plano. En la primera sección se realiza la reformulación *Corriente-Vorticidad* de las ecuaciones de Navier-Stokes bajo ciertas condiciones de regularidad y decaimiento en el infinito. Para ello, mediante el lema de Poincaré, o descomposición de Helmholtz, se introduce la *función de corriente*, que nos permite expresar el campo de velocidades en función de la vorticidad. De este modo, nuestro problema se reduce a la resolución de la ecuación de la vorticidad y una ecuación de Poisson. A partir de esta reformulación, en la segunda sección se tratan dos tipos de flujos. En primer lugar, se calculan soluciones radiales, es decir, remolinos bidimensionales, y luego flujos periódicos con respecto de las dos direcciones principales del plano, lo cual es equivalente a estudiarlos en el toro  $\mathbb{T}^2$ . Para ambos flujos, se consideran los casos viscoso e ideal para el posterior estudio de la convergencia entre éstos cuando  $\nu \searrow 0$ . Por último, se ven los llamados *flujos de ojos de Gato de Kelvin-Stuart*, que poseen periodicidad con respecto de una de las dos direcciones del plano.

Sobre los efectos que conlleva la ecuación de la vorticidad, se analiza que el estiramiento del vórtice y la deformación de un fluido en el espacio son dos efectos dependientes, de manera que no se produce uno sin el otro. Esta es una de las principales diferencias entre los fluidos de dimensiones 2 y 3. De esta manera, en 2D la vorticidad se mantiene constante al no haber deformación con respecto del espacio.

El cuarto capítulo, a partir de flujos bidimensionales ya calculados en capítulos anteriores, presenta soluciones 3D que sufran estiramiento de vórtice y los efectos que esto conlleva.

En primer lugar, partiendo de una solución en el plano, se añade una tercera componente dependiente de las variables 2D del mismo, obteniéndose los llamados *flujos de dimensión dos y media*. A continuación, nos interesamos en generar soluciones estacionarias 3D para las ecuaciones de Euler a partir de un flujo estacionario ideal 2D. Partiendo de algunos flujos periódicos y estacionarios del capítulo 3, los ejemplos que se ven son una extensión de los mismos a  $\mathbb{R}^3$  mediante la *condición de Beltrami*, que consiste en la consideración de paralelismo entre velocidad y vorticidad en todo punto. Este tipo de flujos reciben el nombre de *flujos de Beltrami*. Por último, calculamos soluciones con simetría respecto de algún eje, es decir, tratamos *flujos axisimétricos*. Cuando roten, por lo que su velocidad angular será no nula, se denominarán *remolinos*. Para tratar este tipo de flujos, previamente se reformulan las ecuaciones de Navier-Stokes y la vorticidad en coordenadas cilíndricas. Aunque se traten de manera teórica las ecuaciones, sólo se ven ejemplos de remolinos debido al interés y complejidad que poseen. Más concretamente, a partir de una solución axisimétrica cuya vorticidad es perpendicular al plano sobre el que gira, se sobrepone otro flujo con dependencia del plano radial. De esta manera se genera una solución explícita axisimétrica para la cual su vorticidad no es perpendicular a dicho plano, lo que provoca que el remolino sufra inclinaciones. Cabe comentar que, tanto para los flujos de dimensión dos y media como en este último ejemplo, el razonamiento seguido en sus respectivas deducciones posee similitudes con el realizado en el capítulo 2 sobre el flujo irrotacional. De este modo, las ecuaciones de Navier-Stokes para los flujos generados se reducen a una ecuación de difusión sobre la componente añadida.

Como se ha comentado al principio del resumen, no son pocos los problemas que a día de hoy existen a la hora de entender y tratar las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes. Por ejemplo, no se sabe si, dada una solución 3D cuya condición inicial posee una cierta regularidad, ésta va a mantenerse regular o se generarán singularidades en tiempo finito. Para finalizar, el capítulo 5 prueba mediante un ejemplo explícito de solución cómo las ecuaciones de Euler en los espacios de Hölder  $C^\alpha$ , con  $0 < \alpha < 1$ , pierden regularidad para todo tiempo positivo. Lo que indica el mal planteamiento de las ecuaciones de Euler en este tipo de espacios.



# Abstract

Understanding the dynamics of liquids, gases and plasmas is the central part of Fluid Mechanics, which have a huge importance for Chemistry, Physics and Engineering. These problems are written in a mathematical language by partial differential equations (PDE), as Euler and Navier-Stokes Equations. Considering incompressible flows, these equations are difficult to understand because, among other reasons, they are nonlinear. In particular, just a few exact solutions are known.

In this work we shall compute some of the most important exact or explicit solutions for the Euler and Navier-Stokes Equations for incompressible fluids. Through these solutions are illustrated the different kind of dynamics that these fluids have, also giving some consequences.

The first chapter introduces the equations of fluids and their components with the aim of starting to gain intuition about their possible behaviors. Vorticity is considered, making the fluids rotate, together with its equation. We shall see that, locally, a fluid's movement is composed by rotations, translations and deformations. So, we shall calculate the first exact solutions which illustrate those effects one by one and together. The chapter two also includes a section of propositions used throughout this manuscript about the heat and Poisson equations.

In the second chapter, firstly, we shall analyse the structure of the vorticity equation. This is formed by three elements which correspond to convection, vortex stretching and diffusion. The latter is related with the viscosity of the fluid  $\nu$ . To illustrate these effects, we add to an irrotational fluid a component that makes vorticity be nonzero and the fluid starts to rotate. We see 4 examples, which we divide on pairs. We first study the Euler case and then Navier-Stokes (adding diffusion). Then we shall analyse the convergence between both when  $\nu \searrow 0$ . This analysis will be frequently repeated in the examples of

chapters 3 and 4.

In the third chapter we shall study steady solutions through the plane. For that, by the Poincaré's lemma or Helmholtz decomposition, we shall introduce the stream function, which we shall use for the Vorticity-Stream formulation of our equations under some conditions of regularity and vanishing sufficiently rapidly as  $|x| \nearrow \infty$ . In this way we shall write the velocity depending on the vorticity, which it is possible to calculate solving the equation. Then our problem becomes only a Poisson equation. In this chapter we shall also study two kinds of fluids. First we shall look for radial solutions, that is, swirls, and then fluids with periodicity on the two principal directions of the plane, which is the same that study it in the Torus  $\mathbb{T}^2$ . In both of them it is considered viscous and not viscous cases to study later the convergence when  $\nu \searrow 0$ . Finally we shall consider the so called Cat Eyes Fluids of Kelvin-Stuart, which possess periodicity with respect to one of the two directions.

Vortex stretching and the deformation of a fluid in the space are two effects which are linked, one does not take place without the other one. In this way, in dimension 2, there are no deformation in relation to the space and the vorticity remains constant. This is one of the most important differences between 2 and 3 dimensional fluids.

In the fourth chapter we shall construct 3D solutions which show the vortex stretching and the consequences based on some bidimensional solutions already calculated in previous chapters. In the first place, based on a 2D solution, we shall add a third component which depends on 2D, obtaining two and a half dimensional fluid. Next we shall focus in obtaining 3D steady solutions of Euler based on a 2D steady flow and study the Beltrami fluids. Based on periodic and steady flows of the third chapter, the examples that we shall see are an extension of the same ones to  $\mathbb{R}^3$  by the Beltrami's condition. Finally we shall calculate solutions with symmetry in relation with some axis, that is, we shall consider axisymmetric flows. When these solutions rotate, they are called swirls. For that it is necessary to reformulate the Navier-Stokes equations and the vorticity for these types of fluids. Although we shall treat it in a theoretical way, we will only study some examples for the case with swirl velocity because of its own interest. These solutions are complex, because the swirl velocity and the vorticity stop being perpendicular to the plane on which they rotate and this makes that the swirl bend.

Like it have been mentioned at the beginning of the abstract, nowadays there are a lot of problems to be understood for Euler and Navier-Stokes equations. For example, it is not known if, given a 3D solution with smooth initial data, the regularity is preserved in time or, if on the contrary, there is finite time blow-up. Finally, in chapter five we shall prove by an exact solution that Euler equations in Hölder spaces  $C^\alpha$ , with  $0 < \alpha < 1$ , are ill-posed.



# Capítulo 1

## Introducción a las ecuaciones de los fluidos. Primeras soluciones exactas.

### 1.1. Breve introducción a las ecuaciones de los fluidos.

Los fluidos en  $\mathbb{R}^3$  se estudian como un medio continuo. Consideramos lo siguiente:

- $\rho(x, t) \equiv$  densidad de masa del fluido en cada punto  $x$  e instante de tiempo  $t$ . ( $\rho \geq 0$ ).
- $u(x, t) \equiv$  velocidad del fluido en cada punto  $x$  e instante de tiempo  $t$ .

A lo largo del trabajo se considerarán funciones que sean regulares, sobre todo en condiciones iniciales, sin entrar en detalle sobre su regularidad, sino que lo serán tanto como haga falta para nuestros propósitos. De este modo,  $u$  será tan regular como se requiera a lo largo del mismo.

**Notación:** Dado un campo regular  $f$ , escribiremos los operadores divergencia y rotacional como  $\text{div}(f)$  y  $\text{rot}(f)$  respectivamente. Las derivadas parciales se notarán mediante subíndices o bien como fracciones. Por ejemplo, la derivada de  $f$  respecto del tiempo será,  $f_t$  o  $(\partial f / \partial t)$ . No obstante, si la función  $f$  depende de una única variable también se denotará a la derivada mediante  $f'$ . Como es usual,  $\nabla$  y  $\Delta$  representan a los operadores gradiente y laplaciano respecto del espacio. Por último, al tratar matrices y vectores, el jacobiano de una cierta matrix  $M$  se notará  $\text{Jac}(M)$  y los elementos traspuestos llevarán el supertérmino  $T$ .

**Definición 1.1:** Las curvas características asociadas al campo  $u$  son aquellas funciones  $X(t)$  tales que:

$$\frac{\partial X}{\partial t}(t) = u(X(t), t). \quad (1.1)$$

La velocidad con la que  $X$  se mueve en cada punto coincide con la velocidad del fluido en el mismo. Es decir, las curvas  $X$  se están moviendo con el fluido de igual manera a este. Por lo que se interpreta que las curvas características coinciden con las trayectorias de las partículas del fluido. Así, dado el par  $(\alpha, t_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$  como posición y tiempo iniciales de una partícula, denotaremos por  $X(t; \alpha, t_0)$  a su posición pasado un tiempo  $t$ , es decir, la solución de (1.1) con dato inicial  $(\alpha, t_0)$ .

**Definición 1.2:** Dados  $t, t_0 \in \mathbb{R}$  y un punto  $x \in \mathbb{R}^N$ , definimos la siguiente función  $F_{t_0 \rightarrow t} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ , cuyos valores llamaremos flujos característicos, tal que  $F_{t_0 \rightarrow t}(x) = X(t; x, t_0)$ .

Si se considera un abierto  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$  como la posición de las partículas del fluido en el instante inicial  $t_0$ , éstas se moverán para todo tiempo  $t > t_0$  mediante los flujos característicos, obteniéndose el conjunto  $\Omega(t) = \{X(t; \alpha, t_0) : \alpha \in \Omega_0\}$ . De manera que estas aplicaciones también actúan sobre conjuntos, pudiendo hacer variar sus volúmenes. Para ello tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 1.1:** Si la divergencia del campo  $u$  es nula, entonces los flujos característicos preservan la medida sobre los conjuntos.

**Demostración:** Para estudiar cómo afectan los flujos característicos sobre los conjuntos, nos interesa conocer el Jacobiano respecto del espacio de los flujos:

$$\begin{cases} J(t; x, t_0) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial X_1}{\partial x_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial X_N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial X_N}{\partial x_N} \end{pmatrix} (t; x, t_0), \\ J(t_0; x, t_0) = 1. \end{cases} \quad (1.2)$$

Veamos que ecuación cumple  $J'(t) = \frac{\partial}{\partial t} J(t; x, t_0)$ .

Conocemos que la derivada del determinante de una matriz  $A = (A_i)$ , siendo  $A_i$  cada una de sus filas, debido a la multilinealidad del mismo, sigue la siguiente expresión:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\det(A)) = \det(A'_1(t), A_2(t), \dots, A_N(t)) + \dots + \det(A_1(t), A_2(t), \dots, A'_N(t)).$$

Consideremos el primer término del sumatorio. Definiendo  $a_{ij}(t) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(X(t; x, t_0), t)$  se tiene:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial X_1}{\partial x_N} \right) \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial X_2}{\partial x_N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial X_N}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial X_N}{\partial x_N} \end{vmatrix} \stackrel{(1,2)}{=} \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^N a_{1k} \frac{\partial X_k}{\partial x_1} & \dots & \sum_{k=1}^N a_{1k} \frac{\partial X_k}{\partial x_N} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial X_2}{\partial x_N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial X_N}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial X_N}{\partial x_N} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^N (a_{1k}) \begin{vmatrix} \frac{\partial X_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial X_k}{\partial x_N} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial X_2}{\partial x_N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial X_N}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial X_N}{\partial x_N} \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) J(t).$$

El último paso viene justificado ya que si  $k \neq 1$ , se repiten fila en los determinantes y se anulan. Razonando de igual manera sobre los N sumandos de la derivada del determinante obtenemos:

$$\begin{cases} J'(t; x, t_0) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial u_k}{\partial x_k} J(t; x, t_0) = J(t; x, t_0) \operatorname{div}(u)[X(t; x, t_0), t], \\ J(t_0; x, t_0) = 1. \end{cases} \quad (1.3)$$

De donde, claramente  $J(t) = 1 \forall t \Leftrightarrow \operatorname{div}(u) = 0$ .

□

**Nota 1.2:** La nulidad de la divergencia del campo de velocidades es equivalente a la incompresibilidad del fluido. A lo largo de todo el trabajo se considerarán fluidos incom-

presibles. Es decir, dado  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$  y siendo  $\Omega(t) = \{X(t; \alpha, t_0), \alpha \in \Omega_0\}$ , usando el cambio de variables  $\Omega(t) = X(t; \Omega_0, t_0)$ , dónde el Jacobiano es  $J(t)$ , tenemos:

$$|\Omega(t)| = \int_{\Omega(t)} dx = \int_{X(t; \Omega_0, t_0)} dx = \int_{\Omega_0} J(t) dy = \int_{\Omega_0} dy = |\Omega_0|, \quad \forall t.$$

**Definición 1.3:** Un fluido se dice *incompresible* cuando una misma porción del mismo ocupa siempre volúmenes iguales en su evolución. Es decir, dado un abierto  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$  con frontera regular, entonces  $|\Omega_0| = |\Omega(t)| \forall t$ . Siendo  $\Omega(t) = \{X(t; \alpha, t_0), \alpha \in \Omega_0\}$ .

Nos centramos ahora en la aceleración del fluido. Para ello simplemente derivaremos la velocidad y usaremos la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} X''(t) &= \frac{\partial}{\partial t} [u(X(t), t)] = \sum_{i=1}^3 u_{x_i}(X(t), t) X'_i(t) + u_t(X(t), t) \\ &= \sum_{i=1}^3 u_{x_i}(X(t), t) u_i(X(t), t) + u_t(X(t), t) = \left[ \left( \partial_t + \sum_{i=1}^3 u_i \partial_{x_i} \right) u \right] (X(t), t) \\ &= (\partial_t + (u \cdot \nabla)) u(X(t), t) = \frac{Du}{Dt}(X(t), t). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Dicho operador se conoce como *Derivada material*. Aplicado a cualquier función  $f(x, t)$  del fluido mide cómo evoluciona ésta al moverse con el fluido. Es decir,

$$\frac{\partial}{\partial t} [f(X(t), t)] = (\partial_t + (u \cdot \nabla)) f(X(t), t) = \frac{Df}{Dt}(X(t), t).$$

Llegados a este punto es natural preguntarse qué fuerzas provocarán el movimiento de los fluidos que vamos a considerar. Una de nuestras hipótesis de partida, debido a la intuición natural que dan las observaciones, será que el fluido "está compuesto" por una superposición de capas de distinta presión  $p$ . Así, el flujo vendrá originado por estas diferencias desde las zonas de mayor a las de menor presión. Es decir, en el sentido  $-\nabla p$ . Este tipo de fuerzas se denominan normales. Si, además, estimamos que el fluido posee una cierta "viscosidad"  $\nu$ , entonces aparecen las llamadas fuerzas laminares de difusión  $\Delta u$ . No obstante, se pueden añadir las fuerzas exteriores al modelo según el caso en que intervinieran.

Tenemos todos los ingredientes para escribir las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes. Las

hipótesis a considerar serán las siguientes:

- El fluido es homogéneo de densidad constante 1, ( $\rho = 1$ ).
- El fluido es incompresible ( $\text{div}(u) = 0$ ).
- Hay ausencia de fuerzas exteriores.

Así, aplicando la segunda ley de Newton llegamos a las conocidas *Ecuaciones de Navier-Stokes*:

$$\begin{cases} \frac{Du}{Dt} = -\nabla p + \nu \Delta u, & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty), \\ \text{div}(u) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty). \end{cases} \quad (1.5)$$

Para fluidos no viscosos, obtenemos las *Ecuaciones de Euler para fluidos ideales*:

$$\begin{cases} \frac{Du}{Dt} = -\nabla p, & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty), \\ \text{div}(u) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty). \end{cases} \quad (1.6)$$

Considerando un dato inicial  $u(x, 0) = u_0(x)$  en los sistemas anteriores se tienen los problemas de Cauchy correspondientes.

## 1.2. Vorticidad, matriz de deformación.

Como hemos comentado en la sección anterior, se tratarán los flujos incompresibles. Para empezar a ganar intuición, como primera aproximación, acerca de sus posibles comportamientos, lo primero que haremos será analizarlos de manera local en  $\mathbb{R}^3$ . Para ello se estudia el campo de velocidades  $u(x, t)$  en un entorno de  $(x_0, t_0)$ .

Haciendo el desarrollo de Taylor de primer orden en el punto tenemos:

$$u(x_0 + h, t_0) = u(x_0, t_0) + \nabla u(x_0, t_0) \cdot h + \Theta(h^2), \quad h \in \mathbb{R}^3.$$

La matriz 3x3  $\nabla u$  puede descomponerse en su parte simétrica y no simétrica, es decir,  $\nabla u = S + \Omega$ , donde:

$$S = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T), \quad (1.7)$$

$$\Omega = \frac{1}{2} (\nabla u - \nabla u^T). \quad (1.8)$$

$S$  y  $\Omega$  son conocidas como *matriz de deformación* y *matriz de rotación* respectivamente.

**Observación 1.1:** Al ser  $\text{div}(u) = 0$ , la traza de la matriz  $S$  es nula.

**Definición 1.4:** Dado el campo de velocidades  $u(x, t)$  se define la *vorticidad*  $\omega$  del fluido como  $\omega = \text{rot}(u)$ ,

$$\omega = (u_{x_2}^3 - u_{x_3}^2, u_{x_3}^1 - u_{x_1}^3, u_{x_1}^2 - u_{x_2}^1)^T. \quad (1.9)$$

**Proposición 1.2:** Sean respectivamente  $\omega$ ,  $\Omega$ , la vorticidad y la matriz de deformación de un fluido en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces se cumple:

$$\Omega \cdot h = \frac{1}{2} \omega \wedge h, \quad \forall h \in \mathbb{R}^3.$$

**Demostración:** Es simplemente operar. Sea  $h \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\Omega = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & u_{x_2}^1 - u_{x_1}^2 & u_{x_3}^1 - u_{x_1}^3 \\ u_{x_1}^2 - u_{x_2}^1 & 0 & u_{x_3}^2 - u_{x_2}^3 \\ u_{x_1}^3 - u_{x_3}^1 & u_{x_2}^3 - u_{x_3}^2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con lo que:

$$\Omega \cdot h = \frac{1}{2} (\omega_2 h_3 - \omega_3 h_2, \omega_3 h_1 - \omega_1 h_3, \omega_1 h_2 - \omega_2 h_1)^T = \frac{1}{2} \omega \wedge h.$$

□

Reunimos la información anterior en el siguiente lema.

**Lema 1.1:** A nivel local en  $(|x - x_0|)$ , el campo de velocidades  $u(x, t)$  de un fluido incompresible es la suma siguiente:

$$u(x, t) = u(x_0, t) + \frac{1}{2} \omega \wedge (x - x_0) + S(x - x_0).$$

Además, dicha suma es única.

Para ver que tipo de movimiento implica cada uno sobre el fluido, estudiamos las curvas características en cada caso:

- Sea  $u(x, t) = u(x_0, t_0)$ , considerando la ecuación (1.1) resulta:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = u(x_0, t_0) \Rightarrow X(t; \alpha, t_0) = \alpha + u(x_0, t_0)(t - t_0).$$

Lo cual es una traslación infinitesimal en la dirección  $u(x_0, t_0)$ .

- Sea  $u(x, t) = \frac{1}{2}\omega \wedge (x - x_0)$ .

Sin pérdida de generalidad, mediante una rotación de ejes podemos asumir que  $\omega = (0, 0, \omega)^T$ . Para simplificar cálculos supondremos  $x_0 = t_0 = 0$ . (1.1) es en este caso:

$$\begin{cases} \frac{\partial X_1}{\partial t} = -\frac{\omega}{2}X_2, \\ \frac{\partial X_2}{\partial t} = \frac{\omega}{2}X_1, \\ \frac{\partial X_3}{\partial t} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_3(t; \alpha, 0) = \alpha_3, \\ \frac{\partial^2 X_i}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{4}X_i, \quad i = 1, 2. \end{cases} \quad (1.10)$$

Las soluciones de (1,10) son de la forma :

$$\begin{aligned} X_1(t) &= c_1 \cos\left(\frac{\omega}{2}t\right) + c_2 \text{sen}\left(\frac{\omega}{2}t\right), \\ X_2(t) &= c_3 \cos\left(\frac{\omega}{2}t\right) + c_4 \text{sen}\left(\frac{\omega}{2}t\right). \end{aligned}$$

Imponiendo  $\frac{\partial X_1}{\partial t} = -\frac{\omega}{2}X_2$ , junto con las condiciones iniciales hallamos los valores de las constantes:

$$c_1 = c_4 = \alpha_1, \quad c_3 = -c_2 = \alpha_2.$$

Así, las soluciones resultan:

$$\begin{aligned} X_3(t; \alpha, 0) &= \alpha_3, \\ (X_1, X_2)^T(t; \alpha, 0) &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega}{2}t\right) & -\text{sen}\left(\frac{\omega}{2}t\right) \\ \text{sen}\left(\frac{\omega}{2}t\right) & \cos\left(\frac{\omega}{2}t\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matriz resultante es de rotación sobre el plano  $x_1 - x_2$  en sentido antihorario. Al ser la componente  $x_3$  constante, representa un giro infinitesimal sobre el eje  $\omega$  con velocidad angular  $\frac{|\omega|}{2}$ .

- Sea  $u(x, t) = S(x - x_0)$ .

Al igual que en el caso anterior, supondremos  $t_0 = x_0 = 0$ . Por otra parte, como  $S$  es simétrica y de traza nula, podemos diagonalizarla mediante un cambio de coordenadas tal que  $S = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, -(\lambda_1 + \lambda_2))$ , con  $\lambda_i \in \mathbb{R}^3$ ,  $i = 1, 2$ . Así el sistema (1.1) resulta:

$$\begin{cases} \frac{\partial X_1}{\partial t} = \lambda_1 X_1 \\ \frac{\partial X_2}{\partial t} = \lambda_2 X_2 \\ \frac{\partial X_3}{\partial t} = -(\lambda_1 + \lambda_2) X_3 \end{cases} \Rightarrow X(t; \alpha, 0) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \end{pmatrix} \alpha.$$

Si, por ejemplo, las constantes  $\lambda_i$  fuesen negativas, las componentes  $x_1, x_2$  decrecen a cero de manera exponencial mientras que la componente vertical crece de igual manera. Esto indicaría que el fluido se va comprimiendo en el plano  $x_1 - x_2$  a lo largo de las dos direcciones del eje  $x_3$ , formando un chorro en cada una de ellas. Es decir, el fluido se deforma sobre el espacio.

Resumimos la información anterior en el siguiente corolario.

**Corolario 1.1:** En el entorno de un punto cualquiera, el campo de velocidades  $u(x, t)$  de un fluido incompresible está compuesto por las velocidades de una traslación, rotación y deformación infinitesimales del mismo.

Nos disponemos ahora a deducir una extensa clase de soluciones exactas de Euler y Navier-Stokes que ilustran la interacción entre vorticidad y deformación del fluido.

**Proposición 1.3:** Sea  $S(t)$  una matriz real, simétrica y 3x3 con traza nula. Obteniendo la vorticidad  $\omega(t)$  mediante la resolución de la EDO:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} = S(t)\omega, \\ \omega(0) = \omega_0, \quad \omega_0 \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (1.11)$$

y la matriz antisimétrica  $\Omega(t)$  dada por la fórmula:

$$\Omega \cdot h = \frac{1}{2} \omega \wedge h, \quad \forall h \in \mathbb{R}^3.$$

Entonces,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \omega(t) \wedge x + S(t) \cdot x, \tag{1.12}$$

$$p(x, t) = -\frac{1}{2} [S_t(t) + S^2(t) + \Omega^2(t)] x \cdot x,$$

son soluciones explícitas de Euler (1.6) y Navier-Stokes (1.5).

Cabe decir que estas soluciones poseen energía infinita, es decir,  $\|u\|_{L^2}(t) = \infty$ , con lo que físicamente son irrelevantes y sólo se entienden de manera local en espacio y tiempo.

**Demostración:** Podemos escribir (N-S) en forma vectorial en función de sus componentes donde  $i$  representa la fila del vector:

$$\frac{Du}{Dt} = (u^i)_t + \left( \sum_{j=1}^3 u^j u_{x_j}^i \right) = -(p_{x_i}) + \nu (\Delta u^i).$$

Derivando respecto de  $x_k$  tenemos:

$$(u_{x_k}^i)_t + \left( \sum_{j=1}^3 u_{x_k}^j u_{x_j}^i + \sum_{j=1}^3 u^j u_{x_j x_k}^i \right) = -(p_{x_i})_{x_k} + \nu (\Delta u_{x_k}^i). \tag{1.13}$$

Sean  $V$  el gradiente de  $u$  y  $P$  la hessiana de la presión  $p$ . Vamos a escribir matrices donde  $i$  representará a las filas y  $k$  a las columnas. Así:

$$V = (u_{x_k}^i) \Rightarrow \begin{cases} \frac{DV}{Dt} &= (u_{x_k}^i)_t + \left( \sum_{j=1}^3 u^j u_{x_k x_j}^i \right), \\ V^2 &= \left( \sum_{j=1}^3 u_{x_k}^j u_{x_j}^i \right), \\ \Delta V &= (\Delta u_{x_k}^i), \end{cases} \quad P = (p_{x_i x_k}).$$

Computando las derivadas restantes a (1.13) y ordenándolas por columnas obtenemos la ecuación matricial:

$$\frac{DV}{Dt} + V^2 = -P + \nu\Delta V. \quad (1.14)$$

Si queremos ver cómo interactúan las componentes rotacionales y de deformación, es natural descomponer  $V$  en su parte simétrica y antisimétrica,

$$V = S + \Omega \Rightarrow V^2 = (S + \Omega)^2 = (S^2 + \Omega^2) + (\Omega S + S\Omega),$$

donde la parte simétrica corresponde a los cuadrados. Por simetría de la matriz hessiana y lo anterior, dividimos así la ecuación (1.14) en las dos siguientes ecuaciones:

$$\frac{DS}{Dt} + (S^2 + \Omega^2) = -P + \nu\Delta S, \quad (1.15)$$

$$\frac{D\Omega}{Dt} + (\Omega S + S\Omega) = \nu\Delta\Omega. \quad (1.16)$$

Desarrollando (1.16) término a término se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{D\Omega}{Dt} &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_t^3 & \omega_t^2 \\ \omega_t^3 & 0 & -\omega_t^1 \\ -\omega_t^2 & \omega_t^1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -(u \cdot \nabla)\omega^3 & (u \cdot \nabla)\omega^2 \\ (u \cdot \nabla)\omega^3 & 0 & -(u \cdot \nabla)\omega^1 \\ -(u \cdot \nabla)\omega^2 & (u \cdot \nabla)\omega^1 & 0 \end{pmatrix}. \\ \Omega S + S\Omega &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_2 & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_2 & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\omega^3 s_{12} + \omega^2 s_{13} & -\omega^3 s_2 + \omega^2 s_{23} & -\omega^3 s_{23} + \omega^2 s_3 \\ \omega^3 s_1 - \omega^1 s_{13} & \omega^3 s_{12} - \omega^1 s_{23} & \omega^3 s_{13} - \omega^1 s_3 \\ -\omega^2 s_1 + \omega^1 s_{12} & -\omega^2 s_{12} + \omega^1 s_2 & -\omega^2 s_{13} + \omega^1 s_{23} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \omega^3 s_{12} - \omega^2 s_{13} & -\omega^3 s_1 + \omega^1 s_{13} & \omega^2 s_1 - \omega^1 s_{12} \\ \omega^3 s_2 - \omega^2 s_{23} & -\omega^3 s_{12} + \omega^1 s_{23} & \omega^2 s_{12} - \omega^1 s_2 \\ \omega^3 s_{23} - \omega^2 s_3 & \omega^1 s_3 - \omega^3 s_{13} & \omega^2 s_{13} - \omega^1 s_{23} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por hipótesis de incompresibilidad,  $\text{div}(u) = \text{tr}(A) = 0 \Rightarrow s_1 + s_2 + s_3 = 0$ . Por otra parte,

$$S\omega = \begin{pmatrix} \omega^1 s_1 + \omega^2 s_{12} + \omega^3 s_{13} \\ \omega^1 s_{12} + \omega^2 s_2 + \omega^3 s_{23} \\ \omega^1 s_{13} + \omega^2 s_{23} + \omega^3 s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^1 \\ d^2 \\ d^3 \end{pmatrix},$$

usando esto en  $\Omega S + S\Omega$  y sumando tenemos:

$$\Omega S + S\Omega = \begin{pmatrix} 0 & d^3 & -d^2 \\ -d^3 & 0 & d^1 \\ d^2 & -d^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por último,

$$\nu\Delta\Omega = \nu \begin{pmatrix} 0 & -\Delta\omega^3 & \Delta\omega^2 \\ \Delta\omega^3 & 0 & -\Delta\omega^1 \\ -\Delta\omega^2 & \Delta\omega^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Al ser matrices antisimétricas, observando los elementos superdiagonales obtenemos una ecuación vectorial equivalente a (1.16):

$$\frac{D\omega}{Dt} = S\omega + \nu\Delta\omega. \quad (1.17)$$

Esta es conocida como *Ecuación de la vorticidad* y será una herramienta fundamental para calcular soluciones a lo largo del trabajo. Consideramos ahora el campo de velocidades  $u(x, t)$  cómo en (1.12):

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\omega(t) \wedge x + S(t) \cdot x$$

Supongamos que  $\omega = \text{rot}(u)$  (es decir, que está bien definida, lo comprobaremos al final de la prueba). Cómo  $\omega$  no tiene dependencia espacial, sus derivadas respecto de este se anula y (1.17) se reduce a:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = S\omega.$$

Constituye un sistema diferencial lineal, el cual, conocida  $S(t)$ , podemos resolver y así obtener la velocidad.

Probaremos ahora que la parte simétrica (1.15) nos determina la presión  $p$ . Como  $S$  sólo tiene dependencia temporal, las derivadas espaciales se anulan nuevamente y (1.15) se reduce a:

$$-P = S_t + S^2 + \Omega^2.$$

Al ser  $P(t)$  el Hessiano de una función escalar, podemos escribir  $p$  de la siguiente forma:

$$p(x, t) = \frac{1}{2}P(t)x \cdot x.$$

De esta manera,  $p$  y  $u$  satisfacen Euler y N-S.

Para finalizar, comprobemos la buena definición de  $u$ :

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\omega \wedge x + S(t)x = \begin{pmatrix} x_1 s_1 + x_2 \left( s_{12} - \frac{\omega^3}{2} \right) + x_3 \left( s_{13} + \frac{\omega^2}{2} \right) \\ x_1 \left( s_{12} + \frac{\omega^3}{2} \right) + x_2 s_2 + x_3 \left( s_{23} - \frac{\omega^1}{2} \right) \\ x_1 \left( s_{13} - \frac{\omega^2}{2} \right) + x_2 \left( s_{23} + \frac{\omega^1}{2} \right) + x_3 s_3 \end{pmatrix},$$

de donde obtenemos:

$$\text{rot}(u) = \omega.$$

□

**Observación 1.2:** Nótese que la velocidad que hemos construido es lineal respecto del espacio en cada componente, de modo que su laplaciano se anula y, por tanto, el término de viscosidad en las ecuaciones de N-S es nulo siempre. Es decir, se reduce al caso Euler.

### 1.3. Primeros ejemplos de soluciones exactas.

A continuación, estudiamos varios ejemplos mediante la proposición 1.3 en los que se ilustrará la interacción entre rotación y deformación del fluido. Nos centraremos únicamente en estudiar el campo de velocidades para plantear el sistema característico y ver así cual es su dinámica.

- *Ejemplo 1.1:* Flujos de chorro.

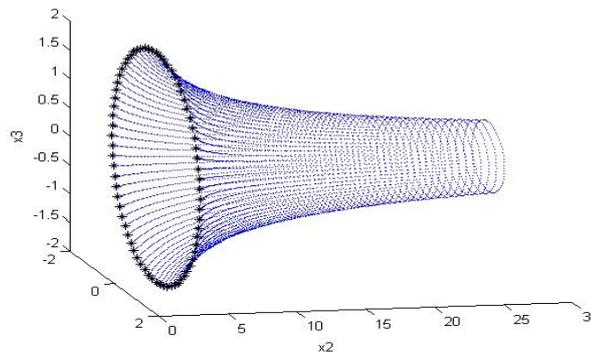
Sean  $\omega_0 = 0$  y  $S = \text{diag}(-\gamma_1, \gamma_1 + \gamma_2, -\gamma_2)$  con  $\gamma_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ . Por (1.11) tenemos que  $\omega \equiv 0$ . A continuación, calculamos el flujo mediante (1.12) quedando:

$$u(x, t) = (-\gamma_1 x_1, (\gamma_1 + \gamma_2)x_2, -\gamma_2 x_3)^T.$$

Planteamos el sistema característico para hallar las trayectorias del fluido. Dado  $\alpha \in \mathbb{R}^3$  se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t}(t; \alpha, 0) &= u(X(t; \alpha, 0), t) = (-\gamma_1 X_1, (\gamma_1 + \gamma_2) X_2, -\gamma_2 X_3)^T \\ \Rightarrow X(t; \alpha, 0) &= (e^{-\gamma_1 t} \alpha_1, e^{(\gamma_1 + \gamma_2)t} \alpha_2, e^{-\gamma_2 t} \alpha_3)^T. \end{aligned}$$

Los efectos de este flujo son equivalentes a lo explicado cuando ilustramos los efectos del término de deformación sobre el fluido. En este caso, se iría comprimiendo a lo largo del eje  $x_2$  a ritmo exponencial formando un chorro infinito sobre este en el sentido que marque el semiespacio donde se encuentre la condición inicial. Este tipo de flujo es un ejemplo de los denominados axisimétrico sin remolino, en los cuáles se profundiza en el último punto del capítulo 4.



Flujo de chorro con datos:  $\gamma_1 = 1$ ,  $\gamma_2 = 1,2$ ,  $t = 1$ .

▪ *Ejemplo 1.2:* Flujo de deformación.

Sean  $\omega_0 = 0$  y  $S = \text{diag}(0, -\gamma, \gamma)$  con  $\gamma > 0$  constante. En primer lugar, como hemos visto en el ejemplo anterior, la condición inicial y la forma de  $S$  nos implican que el flujo es irrotacional. Es decir,  $\omega(t) = 0$ ,  $\forall t$ . Por (1.12) el flujo queda:

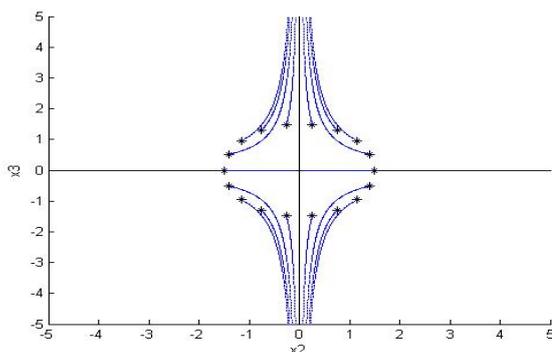
$$u(x, t) = (0, -\gamma x_2, \gamma x_3)^T.$$

Dada la condición inicial  $\alpha \in \mathbb{R}^3$ , planteando el sistema característico y resolviendo cómo en el ejemplo anterior tenemos que las trayectorias son:

$$X(t; \alpha, 0) = (\alpha_1, \alpha_2 e^{-\gamma t}, \alpha_3 e^{\gamma t})^T.$$

La componente  $x_1$  permanece constante, luego el fluido se mueve sobre el plano  $x_1 = \alpha_1$ . Mientras que en la dirección  $x_2$  el flujo tiende a cero, sobre  $x_3$  crece (o decrece) a  $\pm\infty$  según el signo de  $\alpha_3$ . Ambas tendencias son exponenciales.

**Observación 1.3:** Este flujo está generalizado por el anterior, considerando una de las constantes  $\gamma_i = 0$ . De este modo, su gráfica es equivalente a la sección de el plano  $x_1 = \alpha_1$  sobre el mismo. Además, queda claro que la matriz  $S$  indica cómo se deforman en el espacio, por lo que podemos considerar ambos como flujos de deformación.



Flujo de deformación con datos:  $\gamma = 1$ ,  $t = 3$ .

■ *Ejemplo 1.3:* Vórtice.

Sean  $S = 0$ ,  $\omega_0 = (0, \omega_0, 0)^T$ . Es inmediato, por (1.11), que  $\omega(t) = \omega_0 \forall t$ . Luego dado  $\alpha \in \mathbb{R}^3$ , calculamos el campo de velocidades y planteamos el sistema característico:

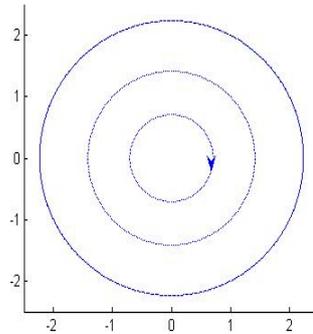
$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\omega(t) \wedge x) = \frac{1}{2} (\omega_0 x_3, 0, -\omega_0 x_1)^T,$$

$$\begin{cases} \frac{\partial X_1}{\partial t} = \frac{1}{2} \omega_0 X_3, \\ \frac{\partial X_2}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial X_3}{\partial t} = -\frac{1}{2} \omega_0 X_1, \\ X(0; \alpha, 0) = \alpha. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 X_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{4} \omega_0^2 X_1, \\ \frac{\partial^2 X_3}{\partial t^2} = -\frac{1}{4} \omega_0^2 X_3, \\ X_2(t; \alpha, 0) = \alpha_2. \end{cases}$$

Dicho sistema es equivalente a (1.10), que apareció en la sección anterior cuando planteamos (1.1) al estudiar los efectos de rotación del fluido. Entonces su solución viene dada por:

$$(X_1, X_3)(t; \alpha, t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega_0}{2}t\right) & \text{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}t\right) \\ -\text{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}t\right) & \cos\left(\frac{\omega_0}{2}t\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad X_2(t; \alpha, t) = \alpha_2.$$

En este caso, tenemos un vórtice en la dirección  $x_2 = \alpha_2$  alrededor del cual el fluido va rotando en sentido horario en el plano  $x_3 - x_1$ . La única diferencia a lo visto en la sección anterior es el sentido de giro, que viene determinado por los signos de las derivadas primeras del sistema.



Vórtice con datos:  $\omega = 10$ ,  $t = 100$ .

En los ejemplos anteriores se ha estudiado por separado los efectos de deformación y rotación. En contraste, el siguiente flujo ilustra cómo interactúan mediante la superposición de un flujo de chorro y un vórtice.

■ *Ejemplo 1.4:* Chorro con rotación.

Sean  $S = \text{diag}(-\gamma_1, \gamma_1 + \gamma_2, -\gamma_2)$  y  $\omega_0 = (0, \omega_0, 0)^T$ . En primer lugar, calculamos la vorticidad por (1.11):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ (\gamma_1 + \gamma_2)\omega_0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \omega(t) = (0, e^{(\gamma_1 + \gamma_2)t}\omega_0, 0)^T.$$

**Observación 1.4:** La matriz  $S$  tiene por autovectores los vectores unitarios  $e_i$  de la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ . Cuando  $\omega$  se alinea con alguno de ellos, según el signo del autovalor

correspondiente,  $\omega$  crece o decrece exponencialmente en tiempo. Todo esto se estudiará con más detalle en el capítulo 2.

Calculamos la velocidad mediante (1.12):

$$u(x, t) = \left[ -\gamma_1 x_1 + \frac{e^{(\gamma_1 + \gamma_2)t}}{2} \omega_0 x_3, x_2(\gamma_1 + \gamma_2), -\gamma_2 x_3 - \frac{e^{(\gamma_1 + \gamma_2)t}}{2} \omega_0 x_1 \right]^T.$$

Dado  $\alpha \in \mathbb{R}^3$ , planteamos el sistema característico, donde es inmediato lo siguiente:

$$\begin{aligned} X_2(t; \alpha, 0) &= e^{(\gamma_1 + \gamma_2)t} \alpha_2, \\ \frac{\partial(X_1, X_3)}{\partial t}(t; \alpha, 0) &= \begin{pmatrix} -\gamma_1 & \frac{1}{2} e^{(\gamma_1 + \gamma_2)t} \\ -\frac{1}{2} e^{(\gamma_1 + \gamma_2)t} & -\gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En este caso, lo más sencillo será acotar las trayectorias  $(X_1, X_3)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial(X_1^2 + X_3^2)}{\partial t}(t; \alpha, 0) &= 2(X_1 X_1' + X_3 X_3') = 2(-\gamma_1 X_1^2 - \gamma_2 X_3^2) \\ \Rightarrow -2 \max\{\gamma_1, \gamma_2\} (X_1^2 + X_3^2) &\leq -2(\gamma_1 X_1^2 + \gamma_2 X_3^2) \leq -2 \min\{\gamma_1, \gamma_2\} (X_1^2 + X_3^2) \end{aligned}$$

Con lo que podemos resolver para  $(X_1^2 + X_3^2)$  en cada cota obteniendo:

$$e^{-2 \max\{\gamma_1, \gamma_2\}t} (\alpha_1^2 + \alpha_3^2) \leq (X_1^2 + X_3^2)(t; \alpha, 0) \leq e^{-2 \min\{\gamma_1, \gamma_2\}t} (\alpha_1^2 + \alpha_3^2).$$

Lo primero que hemos visto es que la tendencia del fluido en la componente  $x_2$  crece de manera exponencial hacia infinito con signo el del valor inicial  $\alpha_2$ . En cuanto a las trayectorias en el plano  $x_3 - x_1$  hemos observado que están acotadas por circunferencias cuyo radio tiende de manera exponencial a cero. De modo que nuevamente tenemos un fluido que se comprime a lo largo del eje  $x_2$  formando un chorro, el cual en este caso rota respecto de este eje debido a los efectos del vórtice.

## 1.4. Algunos resultados fundamentales de las ecuaciones del Calor y Poisson.

Muchas de las soluciones que se van a tratar en el trabajo consisten en transformaciones sobre las ecuaciones para reducirlas a una del calor o van a ser deducidas a través de reformulaciones en las que interviene la ecuación de Poisson. Con lo que se ha considerado oportuno dedicar una sección a todos los resultados a los que recurriremos en el devenir de nuestro estudio.

En primer lugar, consideramos el problema de Cauchy asociado a la ecuación del calor con dato inicial  $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ :

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (1.18)$$

Sabemos que la única solución es la siguiente,

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} H(x - y, t) u_0(y) dy, \quad (1.19)$$

siendo  $H$  el núcleo de Gauss de dimensión  $N$ ,

$$H(x, t) = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}. \quad (1.20)$$

**Nota 1.3:** Es natural que al reducir nuestras ecuaciones obtengamos la ecuación del calor con el término de viscosidad  $\nu$  multiplicando al laplaciano. En ese caso, mediante el cambio  $u(x, t) = g(x, \nu t)$  obtenemos (1.18) y en cada resultado habría que tomar tiempos  $\nu t$ .

**Proposición del Calor 1.4:** Sean  $M \in \mathbb{R}^+$  una constante y  $u(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ , una solución del problema de valores iniciales (1.18). Si el dato inicial  $u_0$  verifica:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} \{|u_0| + |\nabla u_0|\} \leq M,$$

entonces existe una constante  $c > 0$  tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} \{|u(\cdot, t) - u_0(\cdot)|\} \leq cMt^{\frac{1}{2}}.$$

**Demostración:** Consideramos los siguientes cambio de variables:

$$\begin{cases} z = y - x, \\ z = t^{\frac{1}{2}}\xi. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dz = dy, \\ dz = t^{\frac{1}{2}}d\xi. \end{cases}$$

Los cuales usaremos sobre (1.19) para realizar la siguiente transformación:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} H(x - y, t)u_0(y)dy = \int_{\mathbb{R}} H(z, t)u_0(x + z)dz \\ &= (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|z|^2}{4t}} u_0(x + z)dz = (4\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4}} u_0(x + \xi t^{\frac{1}{2}})d\xi. \end{aligned}$$

Así, usando el teorema del valor medio en la segunda desigualdad tenemos:

$$\begin{aligned} |u(x, t) - u_0(x)| &\leq (4\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4}} |u_0(x + \xi t^{\frac{1}{2}}) - u_0(x)|d\xi \\ &\leq (4\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4}} t^{\frac{1}{2}}|\xi| \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\nabla u_0(x)|d\xi \\ &\leq (4\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4}} |\xi|d\xi]t^{\frac{1}{2}}M = cMt^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Dónde, claramente la constante  $c$  es finita al ser integrable el término al que reemplaza. □

**Proposición del Calor 1.5:** Sea  $u(x, t)$  una solución de la ecuación del calor N-dimensional:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = \nu \Delta u(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Si  $u_0$  es radialmente simétrica, entonces  $u(x, t)$  lo es.

**Demostración:** En primer lugar, sabemos que por ser solución de la ecuación del calor,  $u$  es de la forma:

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} H(x - y, \nu t)u_0(y)dy,$$

donde  $H$  es el núcleo de Gauss  $N$ -dimensional. Por otro lado, una función  $f(x)$  es radialmente simétrica si, y sólo si,  $f(Ux) = f(x)$  para cualquier matriz de giro propio  $U$ . Como es isometría, tenemos:

$$\begin{aligned} u(Ux, t) &= \int_{\mathbb{R}^N} H(Ux - y, \nu t) u_0(y) dy = \int_{\mathbb{R}^N} H(U(x - z), \nu t) u_0(Uz) d(Uz) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} H(x - z, \nu t) u_0(z) \det(U) dz = u(x, t). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Y se concluye la prueba. □

**Proposición del Calor 1.6:** Sea  $u(x, t)$  solución del siguiente problema del calor con dato inicial  $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ :

$$\begin{cases} u_t(x, t) = \nu \Delta u(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Entonces, para  $x, \nu$  fijados,  $x \neq 0$ , se tiene:

$$u(x, t) \sim (4\pi\nu t)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) dy + \Theta[(\nu t)^{\frac{N}{2}}], \quad t \gg 1.$$

**Demostración:** Como  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{|x|^2}{4\nu t}} = 1$  y está acotada, usando el teorema de la convergencia dominada cuando  $t \rightarrow \infty$  en la solución se tiene:

$$(\nu t)^{-\frac{N}{2}} u(x, t) = (4\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\frac{|x-y|^2}{4\nu t}} u_0(y) dy \longrightarrow (4\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) dy. \quad \square$$

El signo  $\sim$  significa aproximación entre los dos términos que asocia, referido en este caso a cuando el tiempo tiende a infinito. El error de dicha aproximación está controlado por  $\Theta[(\nu t)^{\frac{N}{2}}]$ , el cual indica que éste es del orden de su argumento.

**Proposición del Calor 1.7:** Sea  $u(x, t)$  una solución del siguiente problema:

$$\begin{cases} u_t - \gamma(t)x \cdot \nabla u = \nu \Delta u, & x \in \mathbb{R}^N, t \in (0, \infty), \\ u(x, 0) = u^0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

donde  $u^0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$ ,  $\gamma \in C^1(0, \infty)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Entonces se tiene unicidad de la solución y

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} H(xK_1(t) - y, K_2(t))u^0(y)dy, \quad (1.22)$$

siendo  $H$  el núcleo de Gauss de dimensión  $N$  y  $K_i$  las siguientes funciones:

$$K_1(t) = e^{\int_0^t \gamma(\xi)d\xi}, \quad K_2(t) = \nu \int_0^t e^{2 \int_0^\xi \gamma(\xi')d\xi'} d\xi. \quad (1.23)$$

**Demostración:** Consideremos los siguientes cambios de variables:

$$\begin{cases} \hat{x} = x e^{\int_0^t \gamma(\xi)d\xi}, \\ \hat{t} = \nu \int_0^t e^{2 \int_0^\xi \gamma(\xi')d\xi'} d\xi. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} = \nu e^{2 \int_0^t \gamma(\xi)d\xi}, \\ \frac{\partial \hat{t}}{\partial \hat{x}} = x \gamma(t) e^{\int_0^t \gamma(\xi)d\xi}, \\ \frac{\partial \hat{t}}{\partial \hat{x}} = I_d e^{\int_0^t \gamma(\xi)d\xi}, \end{cases}$$

donde  $I_d$  representa a la matriz identidad en dimensión  $N$ . Sea ahora  $u(x, t) = g(\hat{x}, \hat{t})$ , comprobamos que ambos verifican la misma condición inicial:

$$u_0(x) = u(x, 0) = g(x, 0).$$

Por otro lado, mediante la regla de la cadena se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} u_t &= \nabla_{\hat{x}} g \frac{\partial \hat{x}}{\partial t} + g_{\hat{t}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} = (\nabla_{\hat{x}} g \cdot x) \gamma(t) e^{\int_0^t \gamma(\xi)d\xi} + g_{\hat{t}} \nu e^{2 \int_0^t \gamma(\xi)d\xi}, \\ -\gamma(t)x \cdot \nabla_x u &= -\gamma(t)(x \cdot \nabla_{\hat{x}} g) \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} = -\gamma(t)(x \cdot \nabla_{\hat{x}} g) e^{\int_0^t \gamma(\xi)d\xi}, \\ \nu \Delta_x u &= \nu \Delta_{\hat{x}} g \left( \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \right)^2 = \nu \Delta_{\hat{x}} g e^{2 \int_0^t \gamma(\xi)d\xi}. \end{aligned}$$

Luego nuestro problema se reduce a la ecuación del calor  $N$ -dimensional,

$$g_{\hat{t}} = \Delta_{\hat{x}} g.$$

con condición inicial  $u^0$  y se obtiene el resultado.

□

Por último, planteamos la ecuación de Poisson en  $\mathbb{R}^N$ :

$$-\Delta u = f. \tag{1.24}$$

Sabemos que las soluciones de la ecuación de Poisson vienen generadas por la convolución de  $f$  con la siguiente función, llamada *Solución Fundamental del Laplaciano*:

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln(|x|), & N = 2, \\ \frac{-1}{(N-2)\sigma_N|x|^{N-2}}, & N > 2, \end{cases}$$

donde  $\sigma_N$  es la medida de la esfera de dimensión  $N - 1$ . Además, es claro que:

$$\nabla\phi(x) = \frac{1}{\sigma_n} \frac{x}{|x|^N}, \quad \forall N \geq 2.$$

Nos interesa que  $u = \phi * f$  esté en  $C^2(\mathbb{R}^N)$ . Para ello, en los libros de Evans, [2], y Gilbarg y Trudinger, [3], sobre EDPs se prueba que si  $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap C^1(\mathbb{R}^N)$  entonces tenemos que  $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ . Para el caso  $N = 2$ , además se exige que  $\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)| \ln|x| dx < \infty$  para obtener el resultado.

**Proposición de Poisson 1.8:** Sea  $f$  una campo tal que  $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap C^1(\mathbb{R}^N)$ . Además, si  $N = 2$ ,  $\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)| \ln|x| dx < \infty$ . Bajo estas condiciones, el problema (1.24) posee solución única  $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$  dada por la convolución  $f * \phi$ , donde  $\phi$  es la Solución Fundamental del Laplaciano en dimensión  $N$ .

Para finalizar, en el capítulo 3 trataremos con flujos periódicos en el plano. Entonces, será equivalente a estudiarlo sobre el toro  $\mathbb{T}^2$  y para ello usaremos el siguiente resultado.

**Proposición de Poisson 1.9:** Sea  $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ . Consideramos la ecuación de Poisson :

$$-\Delta u = f, \quad x \in \mathbb{T}^2.$$

Entonces existe una solución  $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$  si, y sólo si,

$$\int_{\mathbb{T}^2} f(x) dx = 0.$$

Además, por métodos de transformada de Fourier sabemos que la solución es de la forma:

$$u(x) = \sum_{k \neq 0} e^{2\pi i k \cdot x} (4\pi^2 |k|^2)^{-1} \hat{f}(k).$$

## Capítulo 2

# Convección, estiramiento de vórtice y difusión.

Recuperamos la *ecuación de la vorticidad* (1.17) que deducimos en la demostración de la proposición 1.3:

$$\frac{D\omega}{Dt} = S\omega + \nu\Delta\omega. \quad (2.1)$$

Gran parte de nuestro análisis sobre las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes se centra el estudio de dicha ecuación y los efectos que implica sobre el fluido en cuestión. Ya vimos en el *Ejemplo 1.4* (chorro con rotación) cómo cuando  $\omega$  se alinea con un vector propio de  $S$  crece o decrece según el signo del valor propio asociado. Así, el término  $S\omega$  es el responsable del *estiramiento (o compresión) del vórtice*. Además, sabemos que el laplaciano es un operador que implica difusión, por lo que el término de viscosidad produce este tipo de efectos sobre fluido. Por otro lado, ya comentamos que la derivada material sobre una propiedad del fluido marcaba su evolución al moverse con el mismo. Ésto se conoce como convección, con lo que  $D\omega/Dt$  indicará la referida a la vorticidad.

Para ilustrar estos efectos, procedemos a la construcción de una extensa clase de soluciones exactas llamadas *soluciones laminares* de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Sea  $v$  el flujo irrotacional de deformación del *Ejemplo 1.2*:

$$v(x, t) = (0, -\gamma x_2, \gamma x_3)^T, \quad (2.2)$$

donde  $\gamma$  es una constante positiva. Por la expresión (1.12) de la proposición 1.3, procedemos a calcular la presión correspondiente:

$$\begin{aligned} \blacksquare S = \text{diag}(0, -\gamma, \gamma) &\Rightarrow \begin{cases} S^2 = \text{diag}(0, \gamma^2, \gamma^2), \\ S_t = 0. \end{cases} \\ \blacksquare \omega = 0 &\Rightarrow \Omega = 0. \end{aligned}$$

Entonces,

$$p(x, t) = -\frac{1}{2}S^2x \cdot x = -\frac{1}{2}\gamma^2(x_2^2 + x_3^2). \quad (2.3)$$

Queremos admitir una tercera componente no nula  $u^1(x_2, t)$  de la velocidad de manera que el par  $(u, p)$ , siendo  $u = v + (u^1, 0, 0)^T = (u^1(x_2, t), -\gamma x_2, \gamma x_3)^T$ , sea solución de Navier-Stokes y así su vorticidad no sea nula. Es claro que las ecuaciones para la segunda y tercera componentes de  $u$  no varían con respecto de las de  $v$ , luego se verifican por ser  $v$  solución. Por otra parte, que la única dependencia espacial de  $u^1$  sea con respecto de la variable  $x_2$  implica que la condición de incompresibilidad se siga cumpliendo. De modo que, dada  $u_0^1(x_2)$  una función regular con decaimiento a cero en el infinito,  $u$  será solución de Navier-Stokes si  $u^1$  verifica la siguiente ecuación lineal de difusión:

$$\begin{cases} u_t^1 - \gamma x_2 u_{x_2}^1 = \nu u_{x_2 x_2}^1, & (x_2, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u^1(x_2, 0) = u_0^1(x_2), & x_2 \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.4)$$

donde no aparece término de presión al no tener dependencia de  $x_1$ .

La vorticidad correspondiente es:

$$\omega = \text{rot}(u) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_{x_1} & \partial_{x_2} & \partial_{x_3} \\ u^1(x_2, t) & -\gamma x_2 & \gamma x_3 \end{vmatrix} = (0, 0, -u_{x_2}^1(x_2, t))^T.$$

**Observación 2.1:** Al haber añadido una componente  $u^i$  que depende de una variable  $x_j$ ,  $j \neq i$ , entonces aparecen efectos de vorticidad y el fluido gira.

**Observación 2.2:** Velocidad y vorticidad están relacionadas mediante el operador integral:

$$u^1(x_2, t) = - \int_{-\infty}^{x_2} \omega^3(\xi_2, t) d\xi_2. \quad (2.5)$$

Derivando (2.4) respecto de  $x_2$  obtenemos la tercera componente de la ecuación de la vorticidad (2.1). Las otras dos componentes de la ecuación de la vorticidad son claramente nulas. Tenemos entonces la ecuación:

$$\begin{cases} \omega_t^3 - \gamma x_2 \omega_{x_2}^3 &= \gamma \omega^3 + \nu \omega_{x_2 x_2}^3, & (x_2, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ \omega^3(x_2, 0) &= -\frac{\partial u_0^1}{\partial x_2}(x_2), & x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.6)$$

En este caso,  $-\gamma x_2 \omega_{x_2}^3$  es la velocidad de convección y  $\gamma \omega^3$  marca el estiramiento del vórtice. Se observa que la vorticidad va a crecer en tiempo al estar alineada con el vector propio  $e_3 = (0, 0, 1)^T$  asociado al autovalor positivo  $\gamma$  de  $S$ . Por último, la difusión viene representada mediante  $\nu \omega_{x_2 x_2}^3$ . A continuación, lo primero que se hará será mostrar los efectos de convección mediante (2.4)-(2.6). Una vez hecho, se añade el término viscoso de difusión para ver qué comportamiento supone.

- *Ejemplo 2.1:* Flujo laminar básico.

Tomando como nulas las constantes  $\gamma$  y  $\nu$  en (2.6) nos queda:

$$\omega_t^3 = 0 \Rightarrow \omega(x_2, t) = (0, 0, \omega_0^3(x_2))^T, \quad x_2 \in \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

donde  $\omega_0^3(x_2) = -\frac{\partial u_0^1}{\partial x_2}(x_2)$ . Mediante (2.5), o (2.4), calculamos la velocidad:

$$u(x_2, t) = (u_0^1(x_2), 0, 0)^T, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

La velocidad se reduce a una función en su primera componente que toma valores respecto de  $x_2$ .

- *Ejemplo 2.2:* Flujo laminar con viscosidad.

Incorporamos los efectos difusivos a la solución (2.8). Sean ahora las constantes  $\gamma = 0$  y  $\nu > 0$ . La ecuación (2.6) se reduce a la del calor en dimensión 1:

$$\omega_t^3 = \nu \omega_{x_2 x_2}^3,$$

cuya solución viene dada por (1.19):

$$\omega^3(x_2, t) = \int_{\mathbb{R}} H(x_2 - y, \nu t) \omega_0^3(y) dy, \quad x_2 \in \mathbb{R}, \quad (2.9)$$

siendo  $H$  el núcleo de Gauss 1-D. Por (2.4), la velocidad es:

$$u^1(x_2, t) = \int_{\mathbb{R}} H(x_2 - y, \nu t) u_0^1(y) dy, \quad x_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

Así, debido al comportamiento de  $H$ , la difusión disipa los campos  $\omega$  y  $u$ , es decir, las variaciones en las velocidades laminares y la vorticidad se suavizan con el tiempo.

La convergencia de la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes a la de las de Euler cuando el término de viscosidad  $\nu$  tiende a cero es una cuestión fundamental que se trata a lo largo del trabajo siempre que se estudian flujos ideales y luego se incorpora el término de viscosidad a los mismos. Los dos ejemplos anteriores permiten una buena ilustración de esto. Para responderla, recurrimos a los resultados del Calor vistos al final del capítulo anterior, más concretamente, las proposiciones del Calor 1.4 y 1.6 implican el resultado siguiente.

**Proposición 2.1:** Sea  $u_0^1(x_2)$  una función con decrecimiento suficientemente rápido tal que  $\sup_{x \in \mathbb{R}} \{|u_0^1| + |\nabla u_0^1|\} \leq M$  para una cierta constante  $M$ . Sean  $u^E$  la solución laminar de (2.8) y  $u^\nu$  el flujo viscoso correspondiente de (2.10). Entonces:

$$|u^E(x_2, t) - u^\nu(x_2, t)| \leq c(\nu t)^{\frac{1}{2}}, \quad x_2 \in \mathbb{R}, \quad (2.11)$$

$$u^\nu(x_2, t) \sim (4\pi\nu t)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} u_0^1(y) dy, \quad x_2 \in \mathbb{R}, t \gg 1. \quad (2.12)$$

**Observación 2.3:** De (2.11) concluimos que el flujo ideal aproxima al viscoso cuando  $\nu \searrow 0$ . No obstante, si fijamos  $\nu$ , esta aproximación se deteriora conforme el tiempo crece. Por otra parte, el resultado (2.12) indica que para  $t \gg 1$ , la solución viscosa solo depende del valor inicial. Esto se debe a que la viscosidad del fluido va disipando las variaciones, en términos de gradiente, sobre la condición inicial.

Pasamos a estudiar soluciones explícitas que muestren el estiramiento de vórtice.

- *Ejemplo 2.3:* Soluciones laminares no viscosas con deformación.

Sean ahora las constantes  $\gamma > 0$  y  $\nu = 0$ . (2.6) resulta:

$$\begin{cases} \omega_t^3 - \gamma x_2 \omega_{x_2}^3 = \gamma \omega^3, & (x_2, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ \omega^3(x_2, 0) = \omega_0^3(x_2) & x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Es una EDP lineal de primer orden, luego resolvemos mediante curvas características.

**Nota 2.1:** A partir de ahora, a la hora de hacer cálculos, consideramos  $u = u^1$ ,  $x = x_2$  y  $\omega = \omega^3$  para simplificar la notación.

Sean  $t(0) = 0$ ,  $x(0) = \alpha$  y  $\omega(0) = \omega_0(\alpha)$ .

$$\begin{cases} t'(s) = 1, \\ x'(s) = -\gamma x, \\ \omega'(s) = \gamma \omega. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t(s) = s, \\ x(s) = e^{-\gamma s} \alpha, \\ \omega(s) = \omega_0(\alpha) e^{\gamma s}. \end{cases}$$

Las curvas características son de la forma:

$$X_2(t; \alpha, 0) = e^{-\gamma t} \alpha \Rightarrow \omega^3(x_2, t) = \omega_0(x_2 e^{\gamma t}) e^{\gamma t}, \quad x_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

Entonces la componente  $\omega^3$  se comprime en la dirección  $x_2$  y se estira en la de  $x_3$ .

Por (2.5), la velocidad correspondiente es:

$$u^1(x_2, t) = u_0^1(x_2 e^{\gamma t}), \quad (x_2, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty). \quad (2.15)$$

Añadimos nuevamente los efectos de difusión a nuestra solución.

- *Ejemplo 2.4:* Soluciones laminares viscosas con deformación.

Sean las constantes  $\gamma, \nu > 0$ . (2.6) queda:

$$\begin{cases} \omega_t - \gamma x \omega_x = \gamma \omega + \nu \omega_{xx}, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ \omega(x, 0) = \omega_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.16)$$

Mediante el cambio  $\omega(x, t) = e^{\gamma t} \hat{\omega}(x, t)$ , (2.16) se reduce a:

$$\begin{cases} \hat{\omega}_t - \gamma x \hat{\omega} &= \nu \hat{\omega}_{xx}, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ \hat{\omega}(x, 0) &= \omega_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Para la cual conocemos su solución por la proposición del Calor 1.7. Así,

$$\omega^3(x, t) = e^{\gamma t} \int_{\mathbb{R}} H(xe^{\gamma t} - y, K(t)) \omega_0(y) dy, \quad (2.17)$$

siendo  $H$  el núcleo de Gauss 1-D y  $K(t) = \frac{\nu}{2\gamma} [e^{2\gamma t} - 1]$ .

Para el flujo laminar viscoso del *Ejemplo 2.2* conocíamos su convergencia en tiempo infinito mediante un resultado del calor. En este flujo vamos a estudiarla directamente. Nos preguntamos si la vorticidad (2.17) podría tender a alguna solución estacionaria cuando  $t \nearrow \infty$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \omega^3(x_2, t) &= \frac{\sqrt{\gamma} e^{\gamma t}}{\sqrt{2\nu\pi} \sqrt{e^{2\gamma t} - 1}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\gamma |x_2 e^{\gamma t} - y|^2}{2\nu [e^{2\gamma t} - 1]}} \omega_0(y) dy \\ &= \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{2\nu\pi} \sqrt{1 - e^{-2\gamma t}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\gamma |x_2 - ye^{-\gamma t}|^2}{2\nu [1 - e^{-2\gamma t}]}} \omega_0(y) dy. \end{aligned}$$

Al ser funciones acotadas e integrables, podemos tomar límite por el teorema de la convergencia dominada tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega^3(x_2, t) = \omega^3(x_2) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi\nu}} e^{-\frac{x_2^2 \gamma}{2\nu}} \int_{\mathbb{R}} \omega_0(y) dy. \quad (2.18)$$

Por (2.5), la velocidad correspondiente es:

$$u^1(x_2) = -\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi\nu}} \int_{\mathbb{R}} \omega_0(y) dy \int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{\xi^2 \gamma}{2\nu}} d\xi. \quad (2.19)$$

Este equilibrio se conoce como *Solución laminar de Burgers*.

**Observación 2.4:**  $u^1(x)$  es la *función error* con una dilatación del orden  $\Theta(\nu/\gamma)$ .

Para finalizar, volvemos a hacer el análisis sobre cómo la solución no viscosa (2.15) aproxima a (2.17) cuando  $\nu \ll 1$ . En este caso, comparamos las vorticidades mientras que en los ejemplos anteriores hicimos el estudio sobre las velocidades. Sean  $\omega^E$  y  $\omega^\nu$  las soluciones

correspondientes para las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes. Entonces:

$$|\omega^E(x, t) - \omega^\nu(x, t)| = e^{\gamma t} \left| \omega_0(xe^{\gamma t}) - \frac{\sqrt{2\gamma}}{\sqrt{4\pi\nu[e^{2\gamma t} - 1]}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-\gamma|xe^{\gamma t} - y|^2}{2\nu[e^{2\gamma t} - 1]}} \omega_0(y) dy \right|.$$

Mediante el cambio de variables,

$$\nu = \frac{y - xe^{\gamma t}}{\sqrt{\nu[e^{2\gamma t} - 1]}} \sqrt{2\gamma} \Rightarrow d\eta = \frac{\sqrt{2\gamma}}{\sqrt{\nu[e^{2\gamma t} - 1]}} dy,$$

se tiene:

$$|\omega^E(x, t) - \omega^\nu(x, t)| = e^{\gamma t} \left| \omega_0(xe^{\gamma t}) - (4\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-\eta^2}{4}} \omega_0 \left( xe^{\gamma t} + \frac{\eta\sqrt{2\gamma}}{\sqrt{\nu[e^{2\gamma t} - 1]}} \right) d\eta \right|.$$

Como

$$(4\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-\eta^2}{4}} d\eta = (4\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} 2e^{-z^2} dz = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{4\pi}} = 1,$$

podemos reagrupar términos tal que:

$$\begin{aligned} |\omega^E(x, t) - \omega^\nu(x, t)| &= e^{\gamma t} \left| (4\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-\eta^2}{4}} \left( \omega_0(xe^{\gamma t}) - \omega_0 \left( xe^{\gamma t} + \frac{\eta\sqrt{2\gamma}}{\sqrt{\nu[e^{2\gamma t} - 1]}} \right) \right) d\eta \right| \\ &\leq \frac{e^{\gamma t}}{(4\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-\eta^2}{4}} \left| \omega_0(xe^{\gamma t}) - \omega_0 \left( xe^{\gamma t} + \frac{\eta\sqrt{2\gamma}}{\sqrt{\nu[e^{2\gamma t} - 1]}} \right) \right| d\eta \\ &\leq \frac{e^{\gamma t} \sqrt{2\gamma}}{\sqrt{\nu[e^{2\gamma t} - 1]}} K \sup_{x \in \mathbb{R}} |\nabla \omega_0| \int_{\mathbb{R}} |\eta| e^{\frac{-\eta^2}{4}} d\eta, \end{aligned}$$

donde  $K$  es una cierta constante y en la última desigualdad se ha usado el teorema del valor medio. Calculamos la integral, debido a que  $\left| \eta e^{\frac{-\eta^2}{4}} \right|$  es una función par se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}} |\eta| e^{\frac{-\eta^2}{4}} d\eta = 2 \int_0^{\infty} \eta e^{\frac{-\eta^2}{4}} d\eta = -4 \int_0^{\infty} \frac{\partial e^{\frac{-\eta^2}{4}}}{\partial \eta} d\eta = 4.$$

Finalmente obtenemos:

$$|\omega^E(x, t) - \omega^\nu(x, t)| \leq K(\omega_0) e^{\gamma t} \sqrt{\frac{\nu}{2\gamma} [e^{2\gamma t} - 1]},$$

siendo  $K(\omega_0)$  una cierta constante que depende de  $\omega_0$ . Hemos probado el siguiente resultado.

**Proposición 2.2:** Sean  $M > 0$  una constante y  $\omega_0$  una función con decaimiento a 0 en los extremos suficientemente rápido tal que  $\sup_{x \in \mathbb{R}} \{|\omega_0| + |\nabla \omega_0|\} \leq M$ . Llamamos  $\omega^E$  y  $\omega^\nu$  a las soluciones laminares de Euler (2.14) y Navier-Stokes (2.17) respectivamente. Entonces, para una cierta constante  $K$  que depende de  $M$  se cumple:

$$|\omega^E(x, t) - \omega^\nu(x, t)| \leq K(M)e^{\gamma t} \sqrt{\frac{\nu}{2\gamma} [e^{2\gamma t} - 1]}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.20)$$

Con respecto a la velocidad, para el caso no viscoso tenemos la solución  $u^E$  por (2.15). En este ejemplo, planteando (2.4) obtenemos la correspondiente solución al igual que hemos hecho para la vorticidad mediante la proposición del calor 1.7. Esta queda:

$$u^\nu(x, t) = \int_{\mathbb{R}} H(xe^{\gamma t} - y, K(t))u_0(y)dy, \quad (2.21)$$

siendo  $H$  el núcleo de Gauss 1-D y  $K(t) = \frac{\nu}{2\gamma}[e^{2\gamma t} - 1]$ .

Si observamos, tanto las expresiones velocidad y vorticidad viscosas, (2.21) y (2.17), son equivalentes salvo por el producto con  $e^{\gamma t}$  en el caso de la vorticidad. Lo mismo pasa con las no viscosas (2.14) y (2.15). Por lo que repitiendo todo el proceso hecho hasta (2.20), obtenemos si  $\sup_{x \in \mathbb{R}} \{|u_0| + |\nabla u_0|\} \leq M$  para una cierta constante  $M$ , entonces:

$$|u^E(x, t) - u^\nu(x, t)| \leq K(M) \sqrt{\frac{\nu}{2\gamma} [e^{2\gamma t} - 1]}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.22)$$

siendo  $K$  una constante que depende de  $M$ .

# Capítulo 3

## Soluciones exactas y estacionarias de Euler 2D.

### 3.1. Formulación Corriente-Vorticidad para fluidos 2D.

En primer lugar, vamos a reescribir la ecuación de la vorticidad (1.17) para el caso de fluidos bidimensionales:

$$\frac{D\omega}{Dt} = S\omega + \nu\Delta\omega.$$

Como  $\nabla u = \Omega + S$ , por la proposición 1.2, podemos sustituir  $S\omega$  por  $(\nabla u)\omega$ , que es equivalente a  $(\omega \cdot \nabla)u$ . Así, expresamos la ecuación de la vorticidad de la siguiente manera:

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\omega \cdot \nabla)u + \nu\Delta\omega. \quad (3.1)$$

Para flujos 2D, se tiene  $u = u(x)$ , con  $x \in \mathbb{R}^2$  y  $\omega = (0, 0, \omega)^T$ , por lo que el término de deformación es nulo. De modo que (3.1) se reduce a la *ecuación escalar de la vorticidad*:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu\Delta\omega. \quad (3.2)$$

Por lo general, para los fluidos 3D el término de deformación de la ecuación de la vorticidad no va anularse. Esta variación de las ecuaciones indica que la vorticidad debe tener distintos comportamientos según la dimensión del fluido. Para el caso de Euler (fluidos ideales o no viscosos), se ilustra en los dos siguientes resultados.

**Proposición 3.1.** (*Transporte de la vorticidad*)

Sean  $X(t; \alpha, 0), \alpha \in \mathbb{R}^3$  las curvas características asociadas al campo de velocidad  $u$  suficientemente regular de un flujo no viscoso. Dado  $\omega_0$  un campo regular en  $\mathbb{R}^3$ , la vorticidad a través de  $X(t; \alpha, 0)$  tiene la siguiente expresión:

$$\omega(X(t; \alpha, 0), t) = \nabla X(t; \alpha, 0)\omega_0(\alpha). \quad (3.3)$$

**Demostración:** En primer lugar, la ecuación de la vorticidad (3.1) para Euler resulta:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}(X(t; \alpha, 0), t) = (\omega \cdot \nabla)u(X(t; \alpha, 0), t).$$

Recordamos que las trayectorias del fluido cumplen  $\frac{\partial X}{\partial t}(t; \alpha, 0) = u(X(t; \alpha, 0), t)$ . Derivando respecto del espacio se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla X(t; \alpha, 0)) = \nabla u(X(t; \alpha, 0), t)\nabla X(t; \alpha, 0) = (\nabla X(t; \alpha, 0) \cdot \nabla)u(X(t; \alpha, 0), t).$$

Dado  $\omega(X(0; \alpha, 0), 0) = \omega_0(\alpha)$ , tenemos entonces que  $\nabla X(t; \alpha, 0)$  y  $\omega(X(t; \alpha, 0), t)$  verifican una ecuación similar, ya que una es matricial y la otra vectorial, para distinta condición inicial.

Por otra parte, cómo vimos en la introducción a las ecuaciones de Euler y N-S, la matriz jacobiana de las curvas características es igual a la identidad en el instante inicial,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} X_i(0) = \delta_{ij}, \forall i, \forall j \Rightarrow \nabla X(0; \alpha, 0) = I_d.$$

Luego, si multiplicamos  $\nabla X(t; \alpha, 0)$  por el vector  $\omega_0(\alpha)$  ambas son ahora ecuaciones vectoriales y, además, verifican la misma condición inicial. Por lo que obtenemos el resultado debido a que la regularidad de  $u$  implica unicidad de solución del problema de valores iniciales.

□

**Lema 3.1:** Para Euler 2D, dado un campo regular  $\omega_0$ , la vorticidad se conserva a través de las curvas características. Es decir,

$$\omega(X(t; \alpha, 0), t) = \omega_0(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}^2. \quad (3.4)$$

**Demostración:** Si eliminamos el término de viscosidad de (3.2), la ecuación queda:

$$\omega_t + u^1 \omega_{x_1} + u^2 \omega_{x_2} = 0.$$

Por el método de las características obtenemos

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}(X(t; \alpha, 0), t) = 0,$$

y, por tanto, el resultado queda probado.

□

Esta propiedad distingue los fluidos no viscosos en 2D de los no viscosos en 3D. Que la vorticidad en los fluidos ideales 2D sea constante en las trayectorias ocurre debido a la relación que existe entre el estiramiento de vórtice y la deformación del mismo. Por eso, al no haber deformación del fluido la vorticidad permanece constante en éstas. En contraste, cómo hemos comentado antes, para fluidos no viscosos en dimensión 3 el término de deformación no se anula por lo general y la vorticidad puede ir variando a lo largo de las curvas características.

En los flujos de deformación (*Strain flows*) del capítulo anterior vimos que podíamos hallar la velocidad a partir de la vorticidad mediante un operador integral no local (2.5). En este capítulo probaremos que para el caso bidimensional podemos sustituir la velocidad en la ecuación escalar de la vorticidad (3.2) para obtener una ecuación autónoma de  $\omega$ . Antes de ello, es necesario definir los términos función de corriente y líneas de corriente.

**Definición 3.1:** Sea  $u(x, t)$  el campo de velocidades de un fluido. Fijado  $t \in \mathbb{R}$ , se definen

las *líneas de corriente* del fluido en el instante  $t$  cómo las curvas:

$$\phi(\tau) : \phi'(\tau) = u(\phi(\tau), t), \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

**Nota 3.1:** Las líneas de corriente indican cómo se está moviendo el fluido en un instante  $t$  fijo. Se observa que estas coinciden con las curvas características si, y sólo si, el fluido es estacionario, es decir, si  $u(x, t) = u(x) \forall t$ .

Por el lema de Poincaré, o descomposición de Helmholtz, sabemos que un campo regular  $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ , puede escribirse como la suma del rotacional de un solenoidal y el gradiente de un potencial. Al ser  $\text{div}(u) = 0$ , podemos suponer  $u = (-\psi_{x_2}, \psi_{x_1})$  para una cierto campo suficientemente regular, único salvo constante aditiva al que llamaremos *función de corriente*,  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

**Proposición 3.2:** *Relación entre función y curvas de corriente.*

Las líneas de corriente son las curvas de nivel de la función de corriente.

**Demostración:** Dada  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , se define el conjunto de nivel  $N(r)$  de  $\psi$  de la siguiente manera:

$$N(r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \psi(x) = r\}.$$

Consideremos una función  $\phi : I \rightarrow N(r)$ ,  $I \subset \mathbb{R}$ . Al ser,

$$\psi(\phi(\tau)) = r \Leftrightarrow \nabla\psi(\phi(\tau))\phi'(\tau) = 0,$$

por ortogonalidad se tiene:

$$\phi'(\tau) = (-\psi_{x_2}, \psi_{x_1})(\phi(\tau)) = u(\phi(\tau), t).$$

□

**Nota 3.2:** En un abuso de notación, usaremos  $\text{rot}(\psi) = \text{rot}(0, 0, \psi)$  y  $\text{rot}(u) = \text{rot}(u^1, u^2, 0)$ .

**Proposición 3.3:** *La formulación corriente-vorticidad para flujos en  $\mathbb{R}^2$*

Para flujos que decrezcan a cero lo suficientemente rápido cuando  $|x| \nearrow \infty$ , las ecuaciones de Navier-Stokes (1.5) son equivalentes a la siguiente formulación:

$$\begin{cases} \omega_t + (u \cdot \nabla)\omega = \nu \Delta \omega, & (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty), \\ \omega(x, 0) = \omega_0(x), & x \in \mathbb{R}^2, \\ u = K * \omega, & (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty), \\ -\Delta p = \sum_{i,j}^2 u_{x_j}^i u_{x_i}^j, & (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty). \end{cases} \quad (3.5)$$

siendo  $K(x) = \frac{(-x_2, x_1)}{2\pi|x|^2}$ .

**Demostración:** Tomando rotacional en  $u$  y usando la función de corriente tenemos la siguiente ecuación de Poisson 2D:

$$\omega = -\Delta \psi. \quad (3.6)$$

Por la proposición de Poisson 1.8, sabemos que si  $\omega \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap C^1(\mathbb{R}^2)$ , entonces existe una solución  $C^2$  dada por la convolución del potencial newtoniano 2D con  $\omega$ ,

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln|x-y| \omega(y, t) dy. \quad (3.7)$$

Como  $u = \text{rot}(\psi)$ , derivando obtenemos:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(y_2 - x_2, x_1 - y_1)}{|x-y|^2} \omega(y, t) dy.$$

Tomando  $K(x) = \frac{(-x_2, x_1)}{2\pi|x|^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , podemos sustituir en  $u$  quedando la convolución:

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^2} K(x-y) \omega(y, t) dy, \quad (3.8)$$

luego  $u = K * \omega$ .

Hemos obtenido una expresión de  $u$  en función de  $\omega$ , la cual podemos hallar resolviendo la ecuación de la vorticidad (3.2). Esta expresión es conocida como *ley de Biot-Savart*.

Lo único que falta expresar la presión en términos de algo conocido. En la ecuación

matricial (1.14) obtuvimos:

$$\frac{DV}{Dt} + V^2 = -P + \nu \Delta V.$$

Siendo  $P$  la matriz hessiana de la presión y  $V$  el gradiente de  $u$ . Como  $tr(V) = \text{div}(u)$ , tomando traza tenemos:

$$\frac{D(\text{div}(u))}{Dt} + tr(V^2) = -\Delta p + \nu \Delta(\text{div}(u)).$$

Usamos que  $\text{div}(u) = 0$  hallando:

$$-\Delta p = tr(V^2) = \sum_{i,j}^2 u_{x_j}^i u_{x_i}^j.$$

Y se concluye la prueba.

□

## 3.2. Un método general para construir soluciones exactas estacionarias para Euler 2D.

En este punto mostraremos que la relación existente entre la función de corriente y la vorticidad da lugar a una colección de soluciones exactas estacionarias de la ecuación de Euler. Una de las utilidades de estas soluciones es que nos facilitan el estudio sobre cómo de bien aproxima Euler a Navier-Stokes cuando la viscosidad  $\nu \searrow 0$ .

Si  $\nu = 0$ , la ecuación de la vorticidad (3.2) resulta:

$$\omega_t + v^1 \omega_{x_1} + v^2 \omega_{x_2} = 0.$$

Sustituimos usando la función de corriente:

$$\omega_t + \psi_{x_1} \Delta \psi_{x_2} - \psi_{x_2} \Delta \psi_{x_1} = 0.$$

Lo cual es equivalente a:

$$\omega_t + \text{Jac}(\psi, \Delta\psi) = 0. \quad (3.9)$$

Para obtener una solución estacionaria no viscosa necesitamos  $\text{Jac}(\psi, \Delta\psi) = 0$ . Esta condición implica que sus gradientes son paralelos entre sí y, por tanto, poseen las mismas curvas de nivel. Luego  $\psi$  y  $\Delta\psi$  deben ser funciones dependientes. Es decir, si  $\Delta\psi = F(\psi)$  para una cierta función  $F$  regular, entonces

$$(\Delta\psi)_{x_i} = F'(\psi)\psi_{x_i}, \quad i = 1, 2.$$

Lo que implica que  $\text{Jac}(\psi, \Delta\psi) = 0$ . Resumimos toda esta información en la siguiente proposición.

**Proposición 3.4:** Una función de corriente  $\psi$  en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  define una solución  $\omega$  estable y no viscosa de (3.2) si, y sólo si, se cumple

$$\Delta\psi = F(\psi)$$

para alguna función regular  $F$ .

**Observación 3.1:** En general,  $F$  es una función no lineal.

**Observación 3.2:** Para un flujo estacionario bidimensional, el sistema característico se convierte en el siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial t} &= -\psi_{x_2}(X(t; \alpha, 0)), \\ \frac{\partial X_2}{\partial t} &= \psi_{x_1}(X(t; \alpha, 0)). \end{aligned} \quad (3.10)$$

De este modo, al ser estacionario, las curvas características coinciden con las líneas de corriente, siendo la función de corriente  $\psi$  constante a través de éstas.

En este caso, los puntos de equilibrio del sistema y, por tanto, del fluido coinciden con los puntos críticos de  $\psi$ . Si estos son máximos o mínimos locales, son estables y el fluido rota alrededor de ellos de manera local. Si, por el contrario, son puntos de silla, el fluido se comporta como un flujo de deformación 2D. Ilustramos esta clasificación mediante al-

gunos ejemplos.

- *Ejemplos 3.1:* Puntos de deformación y puntos de rotación.

Consideramos las siguientes funciones de corriente con puntos críticos en el origen.

1.  $\psi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ .

El origen es un mínimo, global de hecho, ya que dicha función representa un paraboloides convexo.

El campo de velocidades del fluido originado por  $\psi$  es

$$u(x, t) = (-2x_2, 2x_1)^T.$$

Es similar al vórtice del ejemplo 1.3. En este caso, rota en el plano  $x_2 - x_1$  alrededor del origen en sentido antihorario.

Si cambiamos el signo de  $\psi$ , el origen es un máximo y obtenemos el mismo flujo pero girando en sentido opuesto.

2.  $\psi(x_1, x_2) = x_1x_2$ .

El origen es un punto de silla pues, al estudiar sus derivadas, según por la dirección en que nos aproximemos  $\psi_{x_i x_i}$ ,  $i = 1, 2$ , tiene un signo u otro. Por ejemplo, en las direcciones

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \psi_{x_i x_i} = 2,$$

$$x_1 = -x_2 \Rightarrow \psi_{x_i x_i} = -2.$$

El campo de velocidades que implica  $\psi$  es:

$$u(x, t) = (-x_1, x_2)^T,$$

el cual tiene una estructura similar al *flujo de deformación* del ejemplo 1.2 estudiado en el capítulo anterior.

3.  $\psi(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ .

Claramente, el origen es un punto de silla ya que, si estudiamos sus derivadas,

en la dirección  $x_1 = 0$  supondría un mínimo mientras que en la dirección  $x_2 = 0$  sería un máximo.

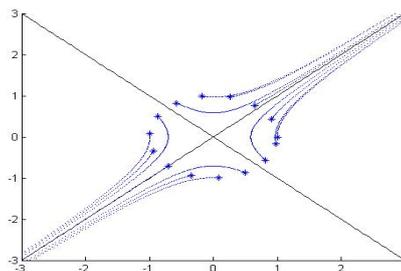
Resolvemos el sistema característico (3.10) obteniendo:

$$\begin{aligned} X_1(t; \alpha, 0) &= \frac{1}{2} [(e^{2t} + e^{-2t})\alpha_1 + (e^{2t} - e^{-2t})\alpha_2], \\ X_2(t; \alpha, 0) &= \frac{1}{2} [(e^{2t} - e^{-2t})\alpha_1 + (e^{2t} + e^{-2t})\alpha_2]. \end{aligned}$$

Sea  $k \in (0, 1)$ , si consideramos el punto inicial tal que  $\alpha_1 = -\alpha_2 = k$ , entonces, cuando  $t \nearrow \infty$ ,  $X_i(t; \alpha, 0) \rightarrow 0$  para  $i = 1, 2$ . En la dirección opuesta el resultado es idéntico.

Si tomamos ahora  $\alpha_1 = \alpha_2 = k$ , entonces, cuando  $t \nearrow \infty$ ,  $X_i(t; \alpha, 0) \rightarrow \infty$ , siendo el resultado el mismo en sentido opuesto.

El plano de fase es el siguiente:



Flujo de deformación a tiempo  $t=2$ .

Observamos que el fluido se comporta de manera similar al flujo de deformación 1.2 mediante un giro de los ejes  $\frac{\pi}{4}$ .

Nos disponemos ahora a estudiar soluciones no viscosas y estacionarias cuya vorticidad es radial.

### 3.2.1. Soluciones radiales para las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes. Remolinos.

En esta sección vamos a buscar flujos bidimensionales de tipo remolino. Para ello trabajaremos con funciones radialmente simétricas, es decir, funciones  $f$  tal que  $f(x) = f(r)$ , siendo  $r = |x|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^2$ .

- Ejemplo 3.2: Remolinos estacionarios y no viscosos.

Consideremos a  $\omega_0$  una función radialmente simétrica. Como el laplaciano es un operador invariante por rotaciones, la solución  $\psi_0$  de la ecuación (3.6),  $\omega_0 = -\Delta\psi_0$ , es radialmente simétrica. Debido a ello se tiene:

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial x_i}(r) = \frac{x_i}{r}\psi'_0(r), \quad \frac{\partial(\Delta\psi_0)}{\partial x_i}(r) = \frac{x_i}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\psi''_0 + \psi'}{r^3}\right)(r),$$

y, por tanto, se tiene que  $\text{Jac}(\psi_0, \Delta\psi_0) \equiv 0$ . De modo que cualquier vorticidad radialmente simétrica  $\omega_0(r)$  define una solución estacionaria para Euler 2D que también es radialmente simétrica. Calculamos las derivadas primera y segunda de  $\psi(r)$  respecto de  $x_i, i = 1, 2$ :

$$\psi(x) = \psi(r) \Rightarrow \begin{cases} \psi_{x_i} &= \psi'(r)\left(\frac{x_i}{r}\right), \\ \psi_{x_i x_i} &= \frac{x_i^2}{r^2}\psi''(r) + \psi'(r)\left(\frac{r^2 - x_i^2}{r^3}\right). \end{cases}$$

Como  $u = (-\psi_{x_2}, \psi_{x_1})$ , la velocidad queda:

$$u_0(x) = \left(\frac{-x_2}{r}, \frac{x_1}{r}\right)^T \psi'_0(r).$$

Desarrollando el laplaciano, la ecuación de Poisson (3.6) y la siguiente EDO son equivalentes:

$$\psi''_0(r) + \frac{1}{r}\psi'_0(r) = -\omega_0(r). \quad (3.11)$$

Resolviéndola obtenemos:

$$\begin{aligned} \psi'_0(r) &= \frac{-1}{r} \int_0^r s\omega_0(s)ds. \\ u_0(x) &= \left(\frac{x_2}{r^2}, \frac{-x_1}{r^2}\right)^T \int_0^r s\omega_0(s)ds. \end{aligned} \quad (3.12)$$

La expresión del campo de velocidades nos indica que las líneas de corriente describen circunferencias y el fluido rota en un sentido u otro según el signo de  $\omega_0$ .

Ahora añadimos los efectos de viscosidad a la solución estacionaria (3.12) para hallar el flujo de Navier-Stokes correspondiente.

- *Ejemplo 3.3:* Remolinos viscosos no estacionarios.

En primer lugar, la proposición del calor 1.5 nos dice que si el dato inicial de un problema de valores iniciales asociado a la ecuación del calor es radialmente simétrico, entonces su solución conserva dicha simetría radial. Por otra parte, por el ejemplo anterior sabemos que si  $\omega(x, t)$  es radialmente simétrica, entonces lo es la función de corriente y  $\text{Jac}(\psi, \Delta\psi) = 0$ . De modo que para vorticidades iniciales  $\omega_0$  que sean radialmente simétricas la ecuación de la vorticidad se reduce a la del calor 1-dimensional:

$$\begin{cases} \omega_t(r, t) &= \nu \Delta \omega(r, t), \\ \omega(r, 0) &= \omega_0(r), \end{cases}$$

cuya solución es:

$$\omega(x, t) = \frac{1}{4\pi\nu t} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\nu t}} \omega_0(|y|) dy. \quad (3.13)$$

Haciendo los mismos cálculos que en el ejemplo anterior, como  $u = (-\psi_{x_2}, \psi_{x_1})$ , la velocidad queda:

$$u(x, t) = \left( \frac{x_2}{r^2}, \frac{-x_1}{r^2} \right)^T \int_0^r s \omega(s, t) ds. \quad (3.14)$$

**Observación 3.3:** El campo de velocidades del fluido nuevamente describe movimiento circulares. En este caso, la aparición del término viscoso hace que las soluciones dejen de ser estacionarias y tengan dependencia temporal.

Como venimos haciendo a lo largo del trabajo, usaremos las soluciones de estos dos ejemplos para obtener más información sobre cómo se aproximan las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes cuando el término viscosidad  $\nu \searrow 0$ . Mediante la proposición del calor 1.6, tenemos que el comportamiento asintótico de la solución  $\omega^\nu$  cuando  $t \nearrow \infty$  es:

$$\omega^\nu(r, t) \sim \frac{1}{4\pi\nu t} \int_{\mathbb{R}^2} \omega_0(|y|) dy + \Theta\left(\frac{1}{\nu t}\right), \quad t \gg 1.$$

Claramente las soluciones viscosa  $\omega^\nu$  y no viscosa  $\omega^E$  con mismo dato inicial difieren cuando  $t \nearrow \infty$  ya que  $\omega^\nu$  tiende a cero. Para tiempos finitos, sin embargo, podemos usar

la proposición del calor 1.4 al igual que hicimos en el capítulo anterior obteniendo:

$$|\omega^\nu(r, t) - \omega_0(r)| \leq c(\nu t)^{\frac{1}{2}}.$$

Usando esta estimación, para las velocidades (3.12) y (3.14) tenemos:

$$\begin{aligned} |u^\nu(r, t) - u_0(r)| &= \left| \left( \frac{x_2}{r^2}, \frac{-x_1}{r^2} \right)^T \int_0^r s [\omega^\nu(s, t) - \omega_0(s)] ds \right| \\ &\leq \frac{1}{r} \int_0^r s |\omega^\nu(s, t) - \omega_0(s)| ds \leq cr(\nu t)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Por tanto, hemos probado la siguiente proposición.

**Proposición 3.5:** Sean  $\omega_0(r), u_0(r)$  una función de vorticidad radialmente simétrica tal que  $\sup_{r \in \mathbb{R}} \{|\omega_0| + |\nabla \omega_0|\} \leq M$ , para una cierta constante  $M$ , y la velocidad inducida por esta en el caso de un remolino estacionario no viscoso. Sean también  $\omega^\nu(r, t), u^\nu(r, t)$  las soluciones radiales de remolinos viscosos con el mismo dato inicial  $\omega_0(r)$ . Entonces se tienen las siguientes estimaciones:

$$|\omega^\nu(r, t) - \omega_0(r)| \leq c(\nu t)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.15)$$

$$|u^\nu(r, t) - u_0(r)| \leq cr(\nu t)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.16)$$

**Observación 3.4:** Si fijamos  $r$ , para intervalos de tiempo finitos las soluciones viscosas convergen a las no viscosas uniformemente en norma infinito cuando  $\nu \searrow 0$ .

### 3.2.2. Formulación corriente-vorticidad y soluciones exactas para flujos periódicos.

Otra familia de soluciones exactas de Euler 2D surge al plantearse una geometría periódica del fluido.

Vamos a suponer flujos periódicos con respecto al espacio. Para simplificar cálculos supondremos que poseen periodicidad 1 en ambas direcciones del plano, es decir:

$$u(x, t) = u(x + e_i, t), \quad i = 1, 2. \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

siendo  $e_i$  el vector unitario en la dirección  $i$ , lo cual es similar a estudiar flujos en el toro plano  $\mathbb{T}^2$  con lados de longitud 1. Si recurrimos a la proposición de Poisson 1.9, tenemos que dada una vorticidad  $\omega$  periódica, la ecuación (3.6),  $-\Delta\psi = \omega$ , posee una solución periódica  $\psi$  sobre el toro  $\mathbb{T}^2$  si se satisface lo siguiente:

$$\int_{\mathbb{T}^2} \omega(x, t) dx = 0.$$

Al ser  $\omega$  un rotacional 1-periódico en el plano, se cumple dicha condición. Por lo que, mediante métodos de transformada de Fourier, tenemos la siguiente función de corriente periódica:

$$\psi(x, t) = \sum_{k \neq 0} e^{2\pi i k \cdot x} (4\pi^2 |k|^2)^{-1} \widehat{\omega}(k).$$

Por consiguiente, es claro que la periodicidad de la función de corriente y la condición  $u = \text{rot}(\psi)$  implican:

$$\int_{\mathbb{T}^2} u(x, t) dx = 0.$$

Como queremos estudiar flujos sobre  $\mathbb{T}^2$  cuyas velocidades no tengan un significado nulo en el mismo, mediante el lema de Poincaré, o descomposición de Helmholtz, expresamos la velocidad como  $u = \bar{u} + \tilde{u}$ , siendo  $\bar{u} = \int_{\mathbb{T}^2} u dx$  una constante del campo de velocidades y  $\int_{\mathbb{T}^2} \tilde{u} dx = 0$ . Es decir, consideramos  $\tilde{u} = \text{rot}(\psi)$ . Derivando la solución  $\psi$ , obtenemos:

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{k \neq 0} (-k_2, k_1)^T e^{2\pi i k \cdot x} (2i\pi |k|^2)^{-1} \widehat{\omega}(k). \quad (3.17)$$

**Observación 3.5:** Podemos interpretar la anterior expresión como una versión 1-periódica de la *ley de Biot-Savart* (3.8).

**Nota 3.3:** Al integrar  $u$  sobre el toro  $\mathbb{T}^2$ , tenemos que  $\int_{\mathbb{T}^2} u dx = \int_{\mathbb{T}^2} \bar{u} dx$ . Al estar integrando sobre el cuadrado unidad y ser  $\bar{u}$  una constante, el valor de su integral es ella misma, de ahí que  $\bar{u} = \int_{\mathbb{T}^2} u dx$ .

Estamos en condiciones de enunciar la siguiente reformulación de Navier-Stokes para flujos periódicos con respecto del espacio.

**Proposición 3.6:** *Formulación corriente-vorticidad para flujos periódico-espaciales.*

Sea  $u_0 = \bar{u}_0 + \tilde{u}_0$ , con  $\bar{u}_0 = \int_{\mathbb{T}^2} u_0 dx$ ,  $\text{div}(u_0) = 0$ , un campo de velocidades con periodicidad 1 con respecto del espacio sobre el toro  $\mathbb{T}^2$ . Entonces las ecuaciones de Navier-Stokes (1.5) son equivalentes a la siguiente formulación:

$$\begin{cases} \omega_t + (\bar{u}_0 + \tilde{u}) \cdot \nabla \omega = \nu \Delta \omega, & (x, t) \in \mathbb{T}^2 \times [0, \infty), \\ \omega(x, 0) = \omega_0(x), & x \in \mathbb{T}^2, \\ -\Delta p = \sum_{i,j} u_{x_j}^i u_{x_i}^j, & (x, t) \in \mathbb{T}^2 \times [0, \infty). \end{cases} \quad (3.18)$$

siendo  $\omega = \text{rot}(\tilde{u})$ , con  $\tilde{u}$  expresado en función de la vorticidad:

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{k \neq 0} (-k_2, k_1)^T e^{2\pi i k \cdot x} (2i\pi |k|^2)^{-1} \hat{\omega}(k).$$

**Demostración:** Análoga a la prueba de la proposición 3.3 usando la construcción para la  $u$  realizadas este subcapítulo. □

Esta formulación nos da lugar a construir soluciones que representen flujos periódicos. Nos disponemos a ello.

Por la proposición (3.4), para hallar flujos no viscosos y estacionarios necesitamos una función de corriente  $\psi$  que cumpla:

$$\Delta \psi = F(\psi), \quad x \in \mathbb{T}^2, \quad (3.19)$$

para una cierta  $F$ . Por ejemplo, cualquier función propia  $\psi_k$  del operador laplaciano sobre  $\mathbb{T}^2$ ,  $\Delta \psi_k = \lambda_k \psi_k$ , satisface lo anterior con  $F(\psi_k) = \lambda_k \psi_k$ . Estas son de la forma:

$$\begin{aligned} \psi_k(x) &= a_k \cos(2\pi k \cdot x) + b_k \text{sen}(2\pi k \cdot x), \quad k \in \mathbb{Z}^2, \\ \Delta \psi_k &= -4\pi^2 |k|^2 \psi_k, \end{aligned}$$

y, por tanto, definen una solución periódica para Euler 2D. Sea ahora  $l \in \mathbb{Z}^+$ , podemos tomar una combinación de las funciones propias  $\psi_k$  asociadas al mismo valor propio, es de-

circ, siendo  $|k|^2 = l \forall k$  y  $F(x) = -4\pi^2 lx$ . De esta manera tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 3.7:** *Soluciones periódico-espaciales y estacionarias de Euler 2D.*

Dado  $l \in \mathbb{Z}^+$ , se define la función de corriente con periodicidad 1 en las direcciones del plano como:

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k|^2=l} [a_k \cos(2\pi k \cdot x) + b_k \text{sen}(2\pi k \cdot x)], \quad (3.20)$$

donde  $a_k$  y  $b_k$  son coeficientes reales arbitrarios y  $k \in \mathbb{Z}^2$ . Entonces  $\psi$  define un flujo  $u$  periódico y estacionario para Euler 2D mediante  $u = \text{rot}(\psi)$  :

$$u(x) = \sum_{|k|^2=l} \begin{bmatrix} a_k k_2 \text{sen}(2\pi k \cdot x) - b_k k_2 \cos(2\pi k \cdot x) \\ -a_k k_1 \text{sen}(2\pi k \cdot x) + b_k k_1 \cos(2\pi k \cdot x) \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

**Nota 3.4:** Para el caso  $l = 1$  obtenemos flujos laminares periódicos simples. No obstante, para  $l = 2$  aparecen flujos estacionarios más interesantes con una estructura más compleja.

- *Ejemplo 3.4:* Soluciones estacionarias no viscosas y periódico-espaciales.

Para el caso  $l = 2$  consideremos  $b_k = \frac{1}{2}$  para  $k \in \{(1, 1), (1, -1)\}$  y que el resto de coeficientes  $a_k, b_k$  son nulos. Usando la identidad

$$2\text{sen}(a) \cos(b) = \text{sen}(a + b) + \text{sen}(a - b),$$

obtenemos la siguiente función de corriente periódica según (3.20):

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \text{sen}(2\pi x_1) \cos(2\pi x_2), x \in \mathbb{T}^2. \quad (3.22)$$

El campo de velocidades correspondiente es:

$$u(x) = \begin{bmatrix} \text{sen}(2\pi x_1) \text{sen}(2\pi x_2) \\ \cos(2\pi x_1) \cos(2\pi x_2) \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Cómo comentamos al principio del capítulo, al tratarse de un fluido estacionario, las curvas características coinciden con las líneas de corriente y los equilibrios del sistema coinciden

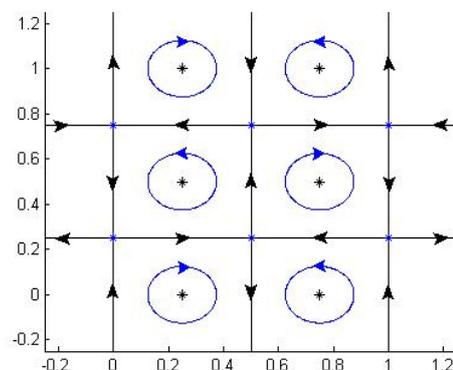
con los puntos críticos de  $\psi$ . Procedemos al cálculo de estos:

$$\begin{aligned}\psi_{x_1}(x_1, x_2) = 0 &\Leftrightarrow x_i \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}, \\ \psi_{x_2}(x_1, x_2) = 0 &\Leftrightarrow x_i \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}.\end{aligned}$$

Al ser  $\psi_{x_1x_1} = \psi_{x_2x_2}$ , cuando no se anulen tendremos máximos o mínimos locales. En cuanto al resto de puntos, es decir, en los que  $\psi_{x_ix_i}$  se hace cero, comprobamos que son hiperbólicos. Si consideramos, por ejemplo, el punto  $(1/2, 1/4)$ , según por dónde nos aproximemos a él, el signo de  $\psi_{x_ix_i}$  varía. Así, dado  $\varepsilon \ll 1$ ,  $\psi_{x_ix_i}(1/2 - \varepsilon, 1/4 + \varepsilon) < 0 < \psi_{x_ix_i}(1/2 - \varepsilon, 1/4 - \varepsilon)$ , luego es un punto de silla. Se puede razonar de igual manera en los restantes, por lo que nos quedan dos conjuntos  $E_1, E_2$  correspondientes a los extremos locales y los puntos de silla respectivamente:

$$\begin{aligned}E_1 &= \left\{(i, j) : i \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}, j \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}\right\}, \\ E_2 &= \left\{(i, j) : i \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}, j \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}\right\}.\end{aligned}$$

Mientras que en el entorno de un punto silla el fluido se comporta como un flujo de deformación, alrededor de los máximos o mínimos locales, el fluido rota en circunferencias con sentido de rotación según el signo de  $\omega$ . Luego, en nuestro ejemplo, el plano queda dividido en celdas de lado  $\frac{1}{2}$  con rotaciones alrededor de los centros y flujos de deformación en los vértices.



Flujo estacionario y periódico de datos:  $\omega = 35$ .

Al igual que para los remolinos, incorporamos los efectos de viscosidad a nuestra solución periódica. Tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 3.8:** *Soluciones viscosas periódico-espaciales*

Sea el par  $p_0 \in C^1(\mathbb{T}^2)$  y  $u_0(x)$  como en (3.23) una solución estacionaria de Euler 2D:

$$u_0(x) = \sum_{|k|^2=l} \begin{bmatrix} a_k k_2 \text{sen}(2\pi k \cdot x) - b_k k_2 \text{cos}(2\pi k \cdot x) \\ -a_k k_1 \text{sen}(2\pi k \cdot x) + b_k k_1 \text{cos}(2\pi k \cdot x) \end{bmatrix}.$$

Entonces la solución 1-periódica de Navier-Stokes con dato inicial  $u_0$  es:

$$\begin{aligned} u^\nu(x, t) &= e^{-4\pi^2 \nu t} u_0(x), & x \in \mathbb{T}^2, \\ p^\nu(x, t) &= e^{-8\pi^2 \nu t} p_0(x), & x \in \mathbb{T}^2. \end{aligned} \tag{3.24}$$

**Demostración:** En primer lugar, como  $u^0$  es estacionario, las ecuaciones de Euler resultan:

$$\begin{cases} (u^0 \cdot \nabla) u^0 &= -\nabla p^0, \\ \text{div}(u^0) &= 0. \end{cases} \tag{3.25}$$

Por otro lado, planteamos las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\begin{cases} \frac{Du}{Dt}(x, t) &= -\nabla p(x, t) + \nu \Delta u, & x \in \mathbb{T}^2, t \geq 0, \\ \text{div}(u) &= 0, & x \in \mathbb{T}^2, t \geq 0, \\ u(x, 0) &= u^0(x), & x \in \mathbb{T}^2. \end{cases} \tag{3.26}$$

Consideremos  $u$  y  $p$  de la siguiente forma:

$$u^\nu(x, t) = e^{-at} u^0(x), \quad p^\nu(x, t) = e^{-bt} p^0(x),$$

donde  $a, b \in \mathbb{R}$  son constantes a determinar. Veamos qué deben verificar para ser solución de Navier-Stokes. En primer lugar, el cumplimiento de la condición inicial y la hipótesis de incompresibilidad son triviales ya que  $u^\nu(x, 0) = u^0(x)$  y  $\text{div}(u^\nu) = e^{-at} \text{div}(u^0) = 0$ . Por otro lado, la primera ecuación resulta:

$$-a u^\nu + (u^\nu \cdot \nabla) u^\nu = -\nabla p^\nu + \nu \Delta u^\nu.$$

Escribiéndola en función de  $u^0$  y  $p^0$  tenemos:

$$-ae^{-at}u^0 + e^{-2at}(u^0 \cdot \nabla)u^0 = -e^{-bt}\nabla p^0 + \nu e^{-at}\Delta u^0.$$

Si  $b = 2a$ , por (3.25) la reducimos. A continuación desarrollando el laplaciano se obtiene:

$$-ae^{-at}u^0 = \nu e^{-at}\Delta u^0 = \nu e^{-at}(-4\pi^2)|k|^2 u^0.$$

Por último, usamos que  $|k|^2 = l$  y despejamos para hallar los valores de  $a$  y  $b$ :

$$a = 4\pi^2 l\nu, \quad b = 8\pi^2 l\nu,$$

verificando así (3.26) y obteniéndose el resultado. □

**Observación 3.6:** El flujo (3.24) proporciona una muy buena ilustración sobre cómo el efecto de viscosidad se opone al movimiento del fluido. Es decir, las distintas capas viscosas del fluido friccionan entre sí provocando que sus velocidades vayan reduciéndose. De hecho, si planteamos el sistema característico (1.1):

$$\frac{\partial X}{\partial t}(t; \alpha, 0) = e^{-4\pi^2 l\nu t} u_0(X(t; \alpha, 0)),$$

es claro que la velocidad del fluido decrece a cero en tiempo a ritmo exponencial.

En este caso, la comparación de las soluciones de Navier-Stokes y Euler cuando la viscosidad tiende a cero es muy sencilla. Se tiene:

$$|u_0(x) - u^\nu(x, t)| \leq |u_0(x)| \left| 1 - e^{-4\pi^2 l\nu t} \right| \leq cl\nu t. \quad (3.27)$$

Para finalizar el capítulo, introducimos un flujo estacionario 2D con periodicidad en una de sus direcciones. Se denominan ojos de gato por la forma que representan las líneas de corriente. Según el libro de Madja y Bertozzi [1], estos tipos de fluidos aparecen al estudiar flujos laminares con fuertes efectos de deformación. Además, son útiles para modelar fluidos cuyas capas se entremezclan.

- *Ejemplo 3.5:* Flujo Ojos de Gato de Kelvin-Stuart.

Sea  $\psi$  una función de corriente  $2\pi$ -periódica respecto de la variable  $x_1$  tal que  $F(\cdot) = -e^{2(\cdot)}$ . Es decir,

$$\Delta\psi = -e^{2\psi}. \quad (3.28)$$

Una familia paramétrica de soluciones de (3.28) fue dada por el matemático J.T. Stuart en 1971 [4]. Siendo  $c \geq 1$ , la solución es la siguiente:

$$\psi(x) = -\ln \left[ c \cosh(x_2) + \sqrt{c^2 - 1} \cos(x_1) \right], \quad x \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}, \quad (3.29)$$

donde  $\cosh$  es la función coseno hiperbólico. Calculamos sus derivadas:

$$\begin{aligned} \psi_{x_1} &= \frac{\sqrt{c^2 - 1} \operatorname{sen}(x_1)}{c \cosh(x_2) + \sqrt{c^2 - 1} \cos(x_1)} = u^2, \\ \psi_{x_2} &= \frac{-c \operatorname{senh}(x_2)}{c \cosh(x_2) + \sqrt{c^2 - 1} \cos(x_1)} = -u^1. \end{aligned}$$

Así, el flujo queda:

$$u(x) = \left( \frac{c \operatorname{senh}(x_2)}{c \cosh(x_2) + \sqrt{c^2 - 1} \cos(x_1)}, \frac{\sqrt{c^2 - 1} \operatorname{sen}(x_1)}{c \cosh(x_2) + \sqrt{c^2 - 1} \cos(x_1)} \right)^T. \quad (3.30)$$

Diferenciamos casos según  $c$ .

- i) Para  $c = 1$  el flujo queda:

$$u(x) = c[\tanh(x_2), 0]^T.$$

Este es un flujo básico de deformación como los vistos en el *Ejemplo 2.1*, donde la velocidad posee una única componente no nula, la cual es una función dependiente de una de las variables espaciales.

- ii) Sea  $c > 1$ . Como el flujo es periódico en  $x_1$ , estudiaremos la convergencia cuando  $x_2 \nearrow \infty$ . En primer lugar, es claro que  $u^2 \rightarrow 0$  al ser una función acotada dividida por otra que se va a infinito. Por otra parte, también es claro que  $u^1$  tiene un

comportamiento equivalente a la tangente hiperbólica cuando  $|x_2| \gg 0$ . Esta tiende a uno con mismo signo que  $x_2$ . Luego  $u^1 \rightarrow \pm 1$  cuando  $x_2 \nearrow \pm\infty$ . Por último, los puntos críticos de la función de corriente son:

$$\begin{aligned} u^1 = 0 &\Leftrightarrow \sinh(x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0, \\ u^2 = 0 &\Leftrightarrow \sin(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = k\pi, \quad k \in \{0, 1, 2\}. \end{aligned}$$

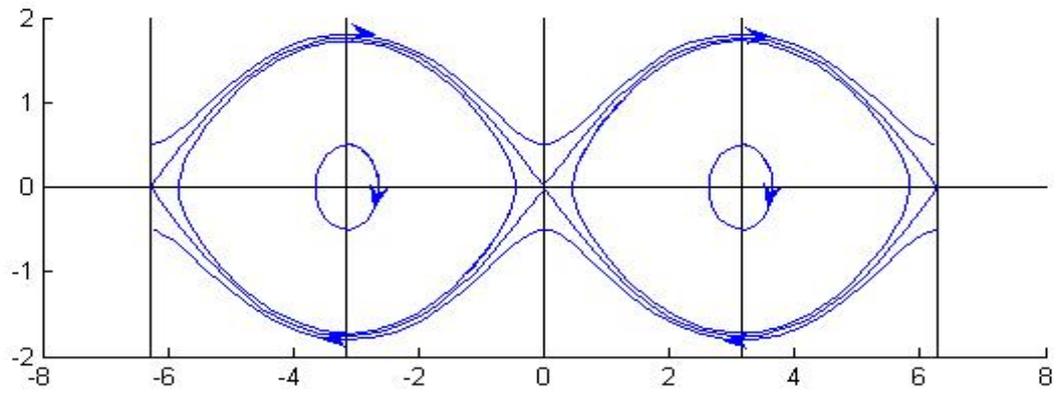
Nuevamente, para ver su comportamiento estudiamos las derivadas segundas de  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \psi_{x_1x_1} &= \frac{c^2 - 1 + c\sqrt{c^2 - 1} \cos(x_1) \cosh(x_2)}{(c \cosh(x_2) + \sqrt{c^2 - 1} \cos(x_1))^2}, \\ \psi_{x_2x_2} &= \frac{-c^2 - c\sqrt{c^2 - 1} \cos(x_1) \cosh(x_2)}{(c \cosh(x_2) + \sqrt{c^2 - 1} \cos(x_1))^2}. \end{aligned}$$

Al ser el denominador positivo en ambos, estudiamos el signo de sus numeradores en cada punto crítico:

- $c^2 - 1 - c\sqrt{c^2 - 1} = \sqrt{c^2 - 1}(\sqrt{c^2 - 1} - c) < \sqrt{c^2 - 1}(\sqrt{c^2} - c) = 0$   
 $\Rightarrow \psi_{x_1x_1}(\pi, 0) < 0.$
- $c^2 - 1 + c\sqrt{c^2 - 1} > c^2 - 1 > 0 \Rightarrow \psi_{x_1x_1}(0, 0) = \psi_{x_1x_1}(2\pi, 0) > 0.$
- $-c^2 - c\sqrt{c^2 - 1} < -c^2 + c\sqrt{c^2 - 1} < -c^2 + c\sqrt{c^2} = 0,$   
 $\Rightarrow \psi_{x_2x_2}(\pi, 0) < 0, \psi_{x_2x_2}(0, 0) = \psi_{x_2x_2}(2\pi, 0) < 0.$

En los puntos  $(0, 0)$ ,  $(2\pi, 0)$  los signos de las derivadas segundas difieren y, por tanto, son puntos hiperbólicos, con lo que alrededor de ellos el fluido se comportará como un flujo de deformación. Por el contrario, el punto  $(\pi, 0)$  es un máximo, alrededor del cual el fluido rota según el signo de  $\omega$ .



Flujo *Ojos de Gato* con  $c = 1,01$ .



# Capítulo 4

## Flujos 3D con vórtices dinámicos no triviales.

En el capítulo anterior vimos que el término de deformación  $\omega \cdot \nabla u$  de la ecuación de la vorticidad (3.1) es nulo en dimensión 2, por lo que no puede producirse estiramiento de vórtice. De hecho probamos que para el caso Euler la vorticidad se mantiene constante en las trayectorias de las partículas del fluido.

Para flujos 3D, sin embargo, dicho término no se anula por lo general y la vorticidad puede incrementarse a lo largo de las curvas características. En efecto, ya observamos en el *Ejemplo 1.4* que la vorticidad  $\omega$  crece al alinearse de manera aproximada con los vectores propios asociados a los autovalores positivos de la matriz de deformación  $S$ . Con el fin de obtener una visión más geométrica de estos sucesos, nos disponemos a hallar más soluciones exactas que ilustren los efectos tridimensionales que conlleva el crecimiento de la vorticidad.

### 4.1. Flujos de dimensión dos y media.

En esta sección mostraremos que todo fluido 2D genera una extensa familia de flujos 3D con estiramiento de vórtice. Los llamaremos *dos y medio dimensionales*, ( $2\frac{1}{2}$ D), ya que su comportamiento en la dirección  $x_3$  vendrá predeterminado por el flujo bidimensional.

**Nota 4.1:** Como trabajaremos simultáneamente con operadores y elementos de  $\mathbb{R}^2$  y de

$\mathbb{R}^3$ , para diferenciarlo añadiremos la tilde  $\sim$  a los primeros. Por ejemplo,  $\tilde{x} = (x_1, x_2)$ ,  $x = (\tilde{x}, x^3)$ ,  $(\tilde{D}/Dt) = (\partial/\partial t) + (\tilde{u} \cdot \nabla_{\tilde{x}})$ .

Supongamos que el par  $(\tilde{u}, \tilde{p})$  es solución de las siguientes ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\begin{cases} \frac{\tilde{D}\tilde{u}}{Dt} = -\tilde{\nabla}\tilde{p} + \nu\tilde{\Delta}\tilde{u}, & (\tilde{x}, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty), \\ \operatorname{div}(\tilde{u}) = 0, & (\tilde{x}, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty), \\ \tilde{u}(\tilde{x}, 0) = \tilde{u}_0(\tilde{x}), & \tilde{x} \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (4.1)$$

Por otra parte, dada la función escalar  $u_0^3(\tilde{x})$ , podemos considerar y resolver las ecuaciones de Navier-Stokes 3D para el dato inicial  $u_0(x) = (\tilde{u}_0, u_0^3)(\tilde{x})$  y presión  $p(x) = \tilde{p}(\tilde{x})$ , es decir:

$$\begin{cases} \frac{Du}{Dt} = -\nabla\tilde{p} + \nu\Delta u, & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \\ \operatorname{div}(u) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (4.2)$$

Antes que nada, observamos que  $\nabla\tilde{p} = (\tilde{\nabla}\tilde{p}, 0)^T$ . Acorde a los tipos de flujos que queremos tratar, buscamos una solución de la forma  $u = (\tilde{u}, u^3)$ . Al ser  $\tilde{u}$  solución de (4.1), es claro que verificaría (4.2) para las dos primeras componentes, con lo que sólo nos falta conocer las condiciones sobre  $u^3$  para que  $u$  sea solución de (4.2). En primer lugar, veamos que  $u^3$  no puede depender de la tercera componente espacial:

$$0 = \operatorname{div}(u) = \operatorname{div}(\tilde{u}) + u_{x_3}^3 \Rightarrow u_{x_3}^3 = 0.$$

Usando esto y que la tercera componente del vector  $\nabla\tilde{p}$  es cero, tenemos que la ecuación del sistema (4.2) correspondiente a  $u^3$  se reduce a la siguiente ecuación escalar y lineal de difusión:

$$\begin{cases} \frac{\tilde{D}u^3}{Dt} = \nu\tilde{\Delta}u^3, & (\tilde{x}, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty), \\ u^3(\tilde{x}, 0) = u_0^3(\tilde{x}), & \tilde{x} \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (4.3)$$

Si  $u^3$  la verifica, entonces el par  $(u, \tilde{p})$ , con  $u = (\tilde{u}, u^3)^T$ , es solución de Navier-Stokes 3D. Nos queda el siguiente resultado.

**Proposición 4.1:** *Flujos 3D originados por flujos bidimensionales*

Sean  $\tilde{u}(\tilde{x}, t)$ ,  $\tilde{p}(\tilde{x}, t)$ ,  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$  soluciones de la ecuaciones de Navier-Stokes 2D (4.1) y sea  $u^3(\tilde{x}, t)$  solución del problema de valores iniciales (4.3). Entonces  $u = (\tilde{u}, u^3)^T$  es solución de Navier-Stokes 3D (4.2).

De modo que cualquier solución exacta 2D, como las vistas en el capítulo anterior, genera una nueva colección explícita de flujos 3D. Con respecto a la vorticidad tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 4.2:** Sea  $u = (\tilde{u}, u^3)^T$  la solución anterior y sea  $\omega = \text{rot}(u)$  su vorticidad. Es decir,  $\omega = (u^3_{x_2}, -u^3_{x_1}, u^2_{x_1} - u^1_{x_2})^T$ . Entonces la vorticidad surgida a raíz de la tercera componente del flujo 2½D,  $\tilde{\omega} = (u^3_{x_2}, -u^3_{x_1})^T$ , cumple la siguiente ecuación:

$$\frac{\tilde{D}\tilde{\omega}}{Dt} = (\tilde{\omega} \cdot \tilde{\nabla})\tilde{u} + \nu\tilde{\Delta}\tilde{\omega}. \quad (4.4)$$

**Demostración:** Como  $u = u(\tilde{x})$ , entonces  $\omega = \omega(\tilde{x})$ . Luego  $x_3$  no juega ningún papel en la ecuación de la vorticidad (3.1) y podemos sustituir los operadores tridimensionales por los bidimensionales ( $\tilde{D}/Dt$ ) y  $\tilde{\Delta}$  más el término  $(\omega \cdot \nabla)$  por  $(\tilde{\omega} \cdot \tilde{\nabla})$ . Quedando así:

$$\frac{\tilde{D}\omega}{Dt} = (\tilde{\omega} \cdot \tilde{\nabla})u + \nu\tilde{\Delta}\omega.$$

Es claro que las dos primeras componentes de esta ecuación se corresponden con la ecuación (4.4) para  $\tilde{\omega}$ .

□

**Observación 4.1:** Si nos fijamos en la ecuación anterior, vemos que la componente 2D  $\tilde{\omega}$  de la vorticidad  $\omega$  crece cuando se alinea de forma aproximada con los vectores propios asociados a los valores propios positivos de la matriz  $\tilde{\nabla}\tilde{u}$ . Lo que nos indica que una diferencia entre un flujo general 3D y uno 2½D es que el estiramiento de vórtice de este último depende del flujo bidimensional que lo origina. De esta forma, la interacción global entre la vorticidad y la deformación del fluido se reduce al comportamiento local de  $\tilde{\nabla}\tilde{u}$  en  $\tilde{\omega}$ .

Para ilustrarlo, damos un ejemplo sencillo con estiramiento de vórtice  $\tilde{\omega}$ .

▪ *Ejemplo 4.1:*

Sea  $\nu = 0$ , consideramos el flujo laminar no viscoso bidimensional siguiente:

$$\tilde{u}(\tilde{x}, t) = (u^1(x_2), 0)^T. \quad (4.5)$$

La ecuación de la vorticidad (4.4) resulta:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_t^1 &= u_{x_2}^1 \tilde{\omega}^2, \\ \tilde{\omega}_t^2 &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema característico obtenemos:

$$\tilde{\omega}(\tilde{X}(t; \tilde{\alpha}, 0), t) = \begin{bmatrix} 1 & u_{x_2}^1(\alpha_2)t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{\omega}_0(\tilde{\alpha}),$$

siendo las curvas características:

$$\tilde{X}(t; \tilde{\alpha}, 0) = (\alpha_1 + u^1(\alpha_2)t, \alpha_2)^T.$$

**Observación 4.2:** Se cumple, como vimos en la proposición 3.1, que la vorticidad a través de las curvas características es de la forma:

$$\tilde{\omega}(\tilde{X}(t; \tilde{\alpha}, 0), t) = \nabla \tilde{X}(t; \tilde{\alpha}, 0) \tilde{\omega}_0(\tilde{\alpha}).$$

## 4.2. Flujos de Beltrami 3D.

Los experimentos indican que cuando en los flujos se alinean de manera aproximada vorticidad y velocidad se generan inestabilidades interesantes, ver Madja y Bertozzi [1]. Por consiguiente, construiremos soluciones estacionarias en las cuales la velocidad y la vorticidad son colineales en todo el espacio. Este tipo de fluidos se conocen como *flujos de Beltrami*.

**Definición 4.1:** Un flujo estacionario 3D se llama flujo de Beltrami, o B 3D, si, para todo  $x \in \mathbb{R}^3$ , la vorticidad  $\omega$  satisface la siguiente condición:

$$\omega(x) = \lambda(x)u(x), \quad (4.6)$$

para alguna función escalar  $\lambda(x)$  no nula en todo el espacio. Esta se conoce como *condición de Beltrami*.

Como consecuencia directa de la definición, tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 4.3:** Sea  $u$  un campo de velocidades estacionario, con  $\text{div}(u) = 0$  en  $\mathbb{R}^3$  que cumpla:

$$\text{rot}(u(x)) = \lambda(x)u(x),$$

para alguna función escalar  $\lambda$  no nula en todo el espacio. Entonces  $u$  es solución de Euler 3D.

**Demostración:** Sea  $\omega = \text{rot}(u)$ , entonces:

$$\text{div}(\omega) = \text{div}(\lambda u) = u \cdot \nabla \lambda + \lambda \text{div}(u) = 0 \Rightarrow u \cdot \nabla \lambda = 0.$$

Para que  $u$  sea solución estacionaria de Euler 3D debe verificarse la ecuación de la vorticidad (3.1) para fluidos no viscosos, que en nuestro caso se reduce a:

$$(u \cdot \nabla)\omega = (\omega \cdot \nabla)u.$$

Sustituyendo mediante la condición de Beltrami se tiene:

$$(u \cdot \nabla \lambda)u + \lambda(u \cdot \nabla)u = (\lambda u \cdot \nabla)u.$$

El primer término se anula y los dos restantes son equivalentes, luego se cumple el resultado.

□

Por otra parte, la siguiente proposición nos permite generar soluciones estacionarias de las ecuaciones Euler 3D a partir de una solución estacionaria 2D dada.

**Proposición 4.4:** Sea  $\tilde{\psi}(\tilde{x})$  una función de corriente que produce una solución estacionaria de Euler 2D  $\tilde{u}(\tilde{x})$ . Entonces, para cualquier función  $G(\tilde{\psi})$  de clase  $C^1$ , el campo

$$u = \left( -\tilde{\psi}_{x_2}, \tilde{\psi}_{x_1}, G(\tilde{\psi}) \right)^T \quad (4.7)$$

es una solución estacionaria para las ecuaciones de Euler 3D.

**Demostración:**

Por la proposición 4.1, para que  $u$  sea solución  $u^3 = G(\tilde{\psi})$  debe verificar la ecuación (4.3). Imponemos que es un flujo estacionario y no viscoso, de esa manera la ecuación (4.3) es la siguiente:

$$-\tilde{\psi}_{x_2} u_{x_1}^3 + \tilde{\psi}_{x_1} u_{x_2}^3 = 0.$$

Calculamos las derivadas de  $u^3$  mediante la regla de la cadena:

$$u_{x_i}^3 = G'(\tilde{\psi}) \tilde{\psi}_{x_i}.$$

De forma que se verifica la ecuación y, por tanto,  $u$  es solución estacionaria de Euler 3D.

□

Relacionando las dos proposiciones anteriores obtenemos un resultado para construir flujos de Beltrami 3D a partir de funciones de corriente para flujos 2D.

Antes que nada, recordamos por la proposición (3.4) que una función de corriente  $\psi$  define una solución estacionaria de Euler 2D  $u = (-\psi_{x_2}, \psi_{x_1})^T$  si, y sólo si,

$$\Delta\psi = F(\psi), \quad (4.8)$$

para una cierta función regular  $F$ . Además, por la proposición 4.4, sabemos que cualquier función de corriente  $\psi$  genera una solución estacionaria para las ecuaciones de Euler 3D mediante la expresión (4.7),  $u = (-\psi_{x_2}, \psi_{x_1}, G(\psi))^T$ , dónde  $G$  es una función  $C^1$ . Tomando

rotacional, la vorticidad correspondiente es:

$$\omega = (G'(\psi)\psi_{x_2}, -G'(\psi)\psi_{x_1}, F(\psi))^T.$$

Para que nuestra solución  $u$  sea un flujo de Beltrami debe cumplirse la condición (4.6)  $\omega = \lambda u$ . Para ello  $G$  debe verificar la EDO:

$$G'(\psi)G(\psi) = -F(\psi),$$

donde el coeficiente de Beltrami correspondiente es:

$$\lambda(x) = -G'(\psi).$$

Así, hemos probado el siguiente resultado.

**Proposición 4.5:** Sea  $\psi$  una función de corriente que genera una solución estacionaria de Euler 2D. Es decir, existe una cierta función  $F \in C^1$  tal que  $\Delta\psi = F(\psi)$ . Entonces el campo de velocidades (4.7),  $u = (-\psi_{x_2}, \psi_{x_1}, G(\psi))^T$ , es un flujo de Beltrami 3D no viscoso si, y sólo si, la función  $G$  cumple la EDO:

$$G'(\psi)G(\psi) = -F(\psi), \tag{4.9}$$

siendo el coeficiente de Beltrami  $\lambda(x) = -G'(\psi)$ .

Procedemos ahora a la construcción y clasificación de algunos flujos de Beltrami.

■ *Ejemplo 4.2:* Flujos periódicos de Beltrami-3D

Mediante la proposición 3.7 construimos soluciones periódicas de Euler 2D usando las siguientes funciones propias del laplaciano sobre el toro  $\mathbb{T}^2$  :

$$\psi(x) = \sum_{|k|^2=l} [a_k \cos(2\pi k \cdot x) + b_k \text{sen}(2\pi k \cdot x)].$$

Dichas funciones de corriente satisfacen la ecuación (4.8) siendo  $F$  la función  $F(\psi) = -4\pi^2|k|^2\psi$ . Así, la EDO (4.9) queda:

$$G'(\psi)G(\psi) = 4\pi^2|k|^2\psi \Rightarrow \begin{aligned} G(\psi) &= 2\pi|k|\psi, \\ \lambda &= -2\pi|k|. \end{aligned}$$

Mediante (4.7) el flujo de Beltrami-3D resulta:

$$u = (-\psi_{x_2}, \psi_{x_1}, 2\pi|k|\psi)^T. \quad (4.10)$$

Claramente es un flujo periódico ya que las tres componentes del campo de velocidades son funciones periódicas sobre el plano  $x_1 - x_2$ . Además, observamos que el coeficiente de Beltrami  $\lambda(x)$  es una constante, este tipo de fluidos se denominan *flujos fuertes de Beltrami*.

- *Ejemplo 4.3:* El flujo Ojos de Gato, Beltrami 3D.

En el ejemplo 3.5 estudiamos los flujos llamados *Ojos de Gato de Kelvin-Stuart*, los cuales eran soluciones estacionarias de Euler 2D con periodicidad  $2\pi$  respecto de la variable  $x_1$ . La función de corriente correspondiente satisface  $\Delta\psi = F(\psi) = -e^{2\psi}$ . Resolvemos la EDO (4.9) obteniendo:

$$G(\psi) = e^\psi, \quad \lambda(x) = -e^{\psi(x)}.$$

Luego el correspondiente flujo de Beltrami 3D es:

$$u = (-\psi_{x_2}, \psi_{x_1}, e^\psi)^T. \quad (4.11)$$

En contraste con el ejemplo anterior, aquí el coeficiente de Beltrami es una función. No obstante, si fijamos un coeficiente  $\lambda(x) = \lambda$ , tenemos que los flujos de Beltrami asociados a la constante  $\lambda$  constituyen un espacio lineal de soluciones debido a la linealidad del operador rotacional. El siguiente resultado se sigue de manera inmediata.

**Proposición 4.6:** Sean  $\psi^k(x_i, x_j)$ , con  $k \neq i \neq j$ ,  $k = 1, 2, 3$ , funciones propias del operador laplaciano 2D de las variables  $(x_i, x_j)$  sobre el toro  $\mathbb{T}^2$  asociados a la misma

constante, es decir:

$$\Delta\psi^k = \eta\psi^k.$$

Como  $\eta < 0$ , sea  $\lambda = \sqrt{-\eta}$ . De esta manera el siguiente campo:

$$u = \begin{bmatrix} \lambda\psi^1 \\ -\psi_{x_3}^1 \\ \psi_{x_2}^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_{x_3}^2 \\ \lambda\psi^2 \\ -\psi_{x_1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\psi_{x_2}^3 \\ \psi_{x_1}^3 \\ \lambda\psi^3 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

es un flujo de Beltrami 3D con coeficiente constante  $\lambda$ .

**Demostración:** Cada función de corriente  $\psi^k$  genera un flujo de Beltrami 3D  $u_k$  asociado al coeficiente  $\lambda$ . Al ser  $u = \sum_k u_k$ , por linealidad del rotacional se tiene el resultado.

□

Estos fluidos tienen una estructura bastante compleja incluso para las funciones propias más simples. Lo mostramos en el siguiente ejemplo.

- *Ejemplo 4.4:* Flujos periódicos ABC (Arnold-Beltrami-Childress)

Dados  $A, B, C \in \mathbb{R}$ . Consideremos 3 flujos periódicos laminares generados por las siguientes funciones de corriente

$$\psi^1(x) = A\text{sen}(x_3),$$

$$\psi^2(x) = B\text{sen}(x_1),$$

$$\psi^3(x) = C\text{sen}(x_2).$$

Al ser  $\Delta\psi^k = -\psi^k$  tenemos que  $\eta = -1$ , luego el flujo B 3D correspondiente por (4.12) es:

$$u(x) = \begin{pmatrix} A\text{sen}(x_3) - C \cos(x_2) \\ B\text{sen}(x_1) - A \cos(x_3) \\ C\text{sen}(x_2) - B \cos(x_1) \end{pmatrix}$$

Si observamos, es sencillo comprobar que  $-u(-x)$  es también un flujo B 3D. Como  $u$  es combinación lineal de los flujos  $u_k$ , bastará probarlo para uno de ellos. Por ejemplo:

$$u_1(x) = (A \operatorname{sen}(x_3), -A \operatorname{cos}(x_3), 0)^T.$$

Por la imparidad y paridad de seno y coseno respectivamente tenemos:

$$-u_1(-x) = (A \operatorname{sen}(x_3), A \operatorname{cos}(x_3), 0)^T.$$

En este caso, la función de corriente es  $-\psi_1(x) = A \operatorname{cos}(x_3)$ . De modo que podemos generalizar para obtener la expresión de los llamados *flujos ABC*:

$$u(x) = \begin{pmatrix} A \operatorname{sen}(x_3) + C \operatorname{cos}(x_2) \\ B \operatorname{sen}(x_1) + A \operatorname{cos}(x_3) \\ C \operatorname{sen}(x_2) + B \operatorname{cos}(x_1) \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Estos fueron introducidos de manera independiente por Arnold(1965) y Childress(1970) y constituyen una clase de flujos de Beltrami muy interesante. Los flujos ABC fueron analizados en [5] en 1986.

Para finalizar la sección, vamos a estudiar los *flujos fuertes de Beltrami*, que ya aparecieron en el Ejemplo 4.2. Recordamos que estos cumplen:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(u) &= \lambda u, \\ \operatorname{div}(u) &= 0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

siendo  $\lambda$  una constante real.

Consideremos  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $|z| = 1$  y un campo  $\varphi(z)$ . Buscamos flujos con coeficientes de Beltrami  $\lambda$  de la forma

$$u(x) = e^{i\lambda x \cdot z} \varphi(z).$$

Imponiendo (4.14) sabremos qué debe verificar  $\varphi$  para ello. En primer lugar, por la hipótesis de incompresibilidad tenemos:

$$0 = \operatorname{div}(u) = i\lambda e^{i\lambda x \cdot z} \sum_{j=1}^3 \varphi_j z_j \Rightarrow \varphi \cdot z = 0.$$

De modo que  $\varphi(z) \cdot z = 0$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$  tal que  $|z| = 1$ . Imponemos ahora la condición de Beltrami:

$$\lambda u = \operatorname{rot}(u) = e^{i\lambda x \cdot z} i\lambda (\varphi_3 z_2 - \varphi_2 z_3, \varphi_1 z_3 - \varphi_3 z_1, \varphi_2 z_1 - \varphi_1 z_2)^T = e^{i\lambda x \cdot z} i\lambda (z \wedge \varphi).$$

Despejando nos queda  $iz \wedge \varphi(z) = \varphi(z)$ ,  $\forall z$  tal que  $|z| = 1$ . Si observamos ambas condiciones desde un punto de vista geométrico, un vector perteneciente al plano tangente a la esfera en un punto  $z$  va a verificar, por ortogonalidad, que el producto escalar de ambos sea nulo y que el producto vectorial sea también tangente a la esfera en  $z$ . Sea entonces  $N(z)$  un vector tangente unitario a la esfera y  $A(z)$  una función escalar cualquiera. Consideremos el campo  $\varphi(z) = A(z)[N(z) + iz \wedge N(z)]$ . Veamos que verifica las dos condiciones:

- Por ortogonalidad, es claro que  $\varphi(z) \cdot z = 0 \forall z$ .
- Separaremos  $iz \wedge \varphi(z)$  en sus dos sumandos y veremos que es igual a  $\varphi(z) \forall z$ :
  - $iz \wedge N(z) = i(z_2 N_3 - z_3 N_2, z_3 N_1 - z_1 N_3, z_1 N_2 - z_2 N_1)^T$ .
  - En el término  $iz \wedge (iz \wedge N(z))$  se estudiará para la primera componente y las restantes serán análogas. Así, esta queda:

$$-(z_2 z_1 N_2 - z_2^2 N_1 - z_3^2 N_1 + z_3 z_1 N_3).$$

Sumamos y restamos  $z_1^2 N_1$ . Usando ortogonalidad y que  $|z| = 1$  obtenemos:

$$-(-N_1(z) + z_1(z \cdot N(z))) = N_1(z).$$

De forma análoga, sumando y restando  $z_j^2 N_j$  en la componente  $j$  del vector obtenemos que el segundo término es igual al vector tangente  $N(z)$ . Agrupando

ambos términos se sigue el resultado.

De modo que nuestro campo  $u(x) = e^{i\lambda x \cdot z} \varphi(z)$  verifica las condiciones de los *flujos fuertes de Beltrami*. Integrando sobre la esfera unidad compleja tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 4.7:** *Flujos fuertes de Beltrami*

Sea  $\mu$  una medida compleja sobre la esfera unidad  $S^2$  y sea  $N(z)$  un vector tangente unitario a  $S^2$   $\mu$ -medible. Entonces para cualquier función  $A(z)$ , el campo de velocidades:

$$u(x) = \int_{S^2} e^{i\lambda x \cdot z} A(z) [N(z) + iz \wedge N(z)] d\mu(z) + \int_{S^2} e^{i\lambda x \cdot z} A(z) [N(z) + iz \wedge N(z)] d\mu(z), \quad (4.15)$$

es un flujo fuerte de Beltrami.

Por último, extendemos nuestra solución a Navier-Stokes.

**Proposición 4.8** Dadas una función regular  $p^0(x)$  y un flujo fuerte de Beltrami  $u^0$  con coeficiente constante  $\lambda \in \mathbb{R}$  tales que  $(u^0, p^0)$  verifican Euler-3D. Entonces la solución correspondiente para las ecuaciones de Navier-Stokes con dato inicial  $u^0$  es el par

$$u^\nu(x, t) = e^{-\lambda^2 \nu t} u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0, \\ p^\nu(x, t) = e^{-2\lambda^2 \nu t} p^0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0.$$

**Demostración:** El procedimiento es análogo al realizado en la proposición 3.8, donde calculábamos una flujo periódico viscoso a partir de una solución estacionaria y periódica las ecuaciones de Euler.

□

### 4.3. Flujos 3D axisimétricos.

En esta sección, estudiamos fluidos de dimensión 3 cuya estructura puede expresarse mediante coordenadas cilíndricas con independencia del ángulo debido a la simetría que

ésta posee con respecto de algún eje.

Lo primero que se hace es definir qué se considera por flujo axisimétrico e introducir el cambio a coordenadas cilíndricas así como las ecuaciones de Euler, Navier-Stokes y las correspondientes a la vorticidad respecto del nuevo sistema de referencia ya que es necesario para el posterior análisis. Una vez finalizado, se estudian algunos ejemplos de flujos axisimétricos, dónde aparecen nuevas reformulaciones de Euler y Navier-Stokes según la naturaleza del fluido.

### 4.3.1. Coordenadas cilíndricas. Primeras definiciones.

Mediante el cambio a coordenadas cilíndricas

$$x_1 = r \cos(\theta), \quad x_2 = r \sin(\theta), \quad (4.16)$$

introducimos el sistema de referencia  $R$ :

$$e_r = \left( \frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, 0 \right)^T, \quad e_\theta = \left( -\frac{x_2}{r}, \frac{x_1}{r}, 0 \right)^T, \quad e_3 = (0, 0, 1)^T. \quad (4.17)$$

**Definición 4.2:** Un campo de velocidades  $u$  se dice axisimétrico si es independiente de  $\theta$ . Es decir, si puede ser expresado de la forma

$$u = u^r(r, x_3, t)e_r + u^\theta(r, x_3, t)e_\theta + u^3(r, x_3, t)e_3. \quad (4.18)$$

**Observación 4.3:** En este caso, las simetrías se tienen respecto del eje  $x_3$ , podría generalizarse a cualquier eje  $x_j$  sustituyéndolo por  $x_3$  en el cambio de variable. Estos flujos guardan similitudes con los  $2\frac{1}{2}$ D ya que ambos son flujos tridimensionales que dependen sólo de dos variables.

**Definición 4.3:** A la función  $u^\theta$  se le llama *velocidad angular* o *velocidad del remolino*. Aplicando el rotacional en coordenadas cilíndricas sobre  $u$  obtenemos la correspondiente vorticidad:

$$\text{rot}(u) = \left( \frac{1}{r}u_\theta^3 - u_3^\theta \right) e_r + (u_{x_3}^r - u_r^3) e_\theta + \frac{1}{r}((ru^\theta)_r - u_\theta^r) e_3,$$

donde, al no haber dependencia de  $\theta$ , la vorticidad queda

$$\omega = \omega^r e_r + \omega^\theta e_\theta + \omega^3 e_3, \quad (4.19)$$

siendo  $\omega^\theta = u_{x_3}^r - u_r^3$ ,  $\omega^r = -u_{x_3}^\theta$  y  $\omega^3 = \frac{1}{r}(ru^\theta)_r$ .

Respecto del sistema de referencia  $R$  (4.17) velocidad y vorticidad se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{cases} u^1(x, t) = \frac{x_1}{r}u^r(r, x_3, t) - \frac{x_2}{r}u^\theta(r, x_3, t), \\ u^2(x, t) = \frac{x_2}{r}u^r(r, x_3, t) + \frac{x_1}{r}u^\theta(r, x_3, t), \\ u^3(x, t) = u^3(r, x_3, t). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega^1(x, t) = -\frac{x_1}{r}u_{x_3}^\theta(r, x_3, t) - \frac{x_2}{r}(u_{x_3}^r - u_r^3)(r, x_3, t), \\ \omega^2(x, t) = -\frac{x_2}{r}u_{x_3}^\theta(r, x_3, t) + \frac{x_1}{r}(u_{x_3}^r - u_r^3)(r, x_3, t), \\ \omega^3(x, t) = \frac{(ru^\theta)_r}{r}(r, x_3, t). \end{cases}$$

Así, el término  $\frac{Du^1}{Dt}$  resulta:

$$\begin{aligned} \frac{Du^1}{Dt} &= \frac{D\left(\frac{x_1}{r}u^r(r, x_3, t) - \frac{x_2}{r}u^\theta(r, x_3, t)\right)}{Dt} = \left[\frac{x_1}{r}u^r(r, x_3, t) - \frac{x_2}{r}u^\theta(r, x_3, t)\right]_t \\ &+ \left[\frac{x_1}{r}u^r(r, x_3, t) - \frac{x_2}{r}u^\theta(r, x_3, t)\right]_{x_1} \left[\frac{x_1}{r}u^r(r, x_3, t) - \frac{x_2}{r}u^\theta(r, x_3, t)\right]_{x_1} \\ &+ \left[\frac{x_2}{r}u^r(r, x_3, t) + \frac{x_1}{r}u^\theta(r, x_3, t)\right]_{x_2} \left[\frac{x_1}{r}u^r(r, x_3, t) - \frac{x_2}{r}u^\theta(r, x_3, t)\right]_{x_2} \\ &+ u^3 \left[\frac{x_1}{r}u^r(r, x_3, t) - \frac{x_2}{r}u^\theta(r, x_3, t)\right]_{x_3}. \end{aligned}$$

Vamos a desarrollar las derivadas, luego usando la regla de la cadena y que  $(\partial r/\partial x_i) = (x_i/r)$  para  $i = 1, 2$  obtenemos:

- $\left[\frac{x_1}{r}u^r - \frac{x_2}{r}u^\theta\right]_{x_1} = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{x_1^2}{r}(ru_r^r - u^r) + u^r r + \frac{x_1 x_2}{r}(u^\theta - ru_r^\theta) \right].$
- $\left[\frac{x_1}{r}u^r - \frac{x_2}{r}u^\theta\right]_{x_2} = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{x_1 x_2}{r}(ru_r^r - u^r) - u^\theta r + \frac{x_2^2}{r}(u^\theta - ru_r^\theta) \right].$

$$\blacksquare \left[ \frac{x_1}{r} u^r - \frac{x_2}{r} u^\theta \right]_{x_3} = \frac{x_1}{r} u_{x_3}^r - \frac{x_2}{r} u_{x_3}^\theta.$$

Sustituimos en la ecuación anterior y reagrupamos términos quedando:

$$\begin{aligned} \frac{D \left( \frac{x_1}{r} u^r - \frac{x_2}{r} u^\theta \right)}{Dt} &= \frac{x_1}{r} \left[ u_t^r + u^r u_r^r - u^\theta \frac{u^\theta}{r} + u^3 u_{x_3}^r \right] \\ &+ \left( \frac{-x_2}{r} \right) \left[ u^r u_r^\theta + \frac{u^\theta u^r}{r} + u^3 u_{x_3}^\theta \right]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

De manera análoga, para  $i = 2, 3$ ,  $(Du^i/Dt)$  resulta:

$$\begin{aligned} \frac{D \left( \frac{x_2}{r} u^r + \frac{x_1}{r} u^\theta \right)}{Dt} &= \frac{x_2}{r} \left[ u_t^r + u^r u_r^r - u^\theta \frac{u^\theta}{r} + u^3 u_{x_3}^r \right] \\ &+ \frac{x_1}{r} \left[ u^r u_r^\theta + \frac{u^\theta u^r}{r} + u^3 u_{x_3}^\theta \right]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\frac{Du^3}{Dt} = u_t^3 + u^r u_r^3 + u^3 u_{x_3}^3. \quad (4.22)$$

Por otra parte, para  $i = 1, 2$ ,  $j = r, \theta$ , podemos desarrollar los siguientes términos igual que venimos haciendo obteniendo:

$$\frac{D \left( \frac{x^i}{r} u^j \right)}{Dt} = \frac{x^i}{r} \frac{Du^j}{Dt}.$$

A continuación, sustituyéndolos en las expresiones (4.20)-(4.21) y definiendo el operador:

$$\frac{\tilde{D}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u^r \frac{\partial}{\partial r} + u^3 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad (4.23)$$

podemos simplificarlas gracias a nuestro sistema de referencia  $R$  observando los términos que van en cada una de sus direcciones principales. De esta forma, el sistema (4.20)-(4.22) es equivalente al siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{Du^r}{Dt} &= \frac{\tilde{D}u^r}{Dt} - \frac{(u^\theta)^2}{r}, \\ \frac{Du^\theta}{Dt} &= \frac{\tilde{D}u^\theta}{Dt} + \frac{u^\theta u^r}{r}, \\ \frac{Du^3}{Dt} &= \frac{\tilde{D}u^3}{Dt}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Nuevamente, operando de la misma manera mediante la regla de la cadena obtenemos las siguientes expresiones para el término de difusión  $\Delta u$ :

$$\begin{aligned}\Delta u^1 &= \frac{x_1}{r} \left( u_{rr}^r + \frac{u_r^r}{r} - \frac{u^r}{r^2} + u_{x_3 x_3}^r \right) + \left( \frac{-x_2}{r} \right) \left( u_{rr}^\theta + \frac{u_r^\theta}{r} - \frac{u^\theta}{r^2} + u_{x_3 x_3}^\theta \right), \\ \Delta u^2 &= \frac{x_2}{r} \left( u_{rr}^r + \frac{u_r^r}{r} - \frac{u^r}{r^2} + u_{x_3 x_3}^r \right) + \left( \frac{x_1}{r} \right) \left( u_{rr}^\theta + \frac{u_r^\theta}{r} - \frac{u^\theta}{r^2} + u_{x_3 x_3}^\theta \right), \\ \Delta u^3 &= u_{rr}^3 + \frac{u_r^3}{r} + u_{x_3 x_3}^3.\end{aligned}\quad (4.25)$$

Como estamos tratando con flujos que no dependen de  $\theta$ , es claro que la presión no puede depender de dicha variable ya que una de nuestras hipótesis de partida es que el fluido se mueve debido a las diferencias de presión. Si ésta dependiese del ángulo  $\theta$  el campo de velocidades debería de hacerlo también. Por lo que podemos escribir  $\nabla p$  de la siguiente manera:

$$\nabla p = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{r} p_r \\ r \\ \frac{x_2}{r} p_r \\ r \\ p_{x_3} \end{pmatrix}.\quad (4.26)$$

Lo único que falta es escribir la condición de incompresibilidad del fluido y agrupar términos para reescribir las ecuaciones de Navier-Stokes. Usando la regla de la cadena se tiene lo siguiente:

$$0 = \operatorname{div}(u) = \left[ \frac{x_1}{r} u^r - \frac{x_2}{r} u^\theta \right]_{x_1} + \left[ \frac{x_2}{r} u^r + \frac{x_1}{r} u^\theta \right]_{x_2} + u_{x_3}^3 = \frac{u^r}{r} + u_r^r + u_{x_3}^3.\quad (4.27)$$

Por último, agrupando términos según las direcciones principales de  $R$  en (4.25) tal como hicimos para llegar a (4.24) e igualando a éste último, tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 4.9:** *Ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos axisimétricos.*

Sea  $R$  el sistema de referencia (4.17) hallado mediante el cambio de variables (4.16) y sea  $u$  un campo de velocidades axisimétrico, es decir, de la forma

$$u = u^r(r, x_3, t)e_r + u^\theta(r, x_3, t)e_\theta + u^3 e_3.$$

Entonces las ecuaciones de Navier-Stokes (1.5) para  $u$  y las siguientes son equivalentes:

$$\begin{cases} \frac{\tilde{D}u^r}{Dt} = \frac{(u^\theta)^2}{r} - p_r + \nu \left( \Delta_c u^r - \frac{u^r}{r^2} \right), \\ \frac{\tilde{D}u^\theta}{Dt} = -\frac{u^\theta u^r}{r} + \nu \left( \Delta_c u^\theta - \frac{u^\theta}{r^2} \right), \\ \frac{\tilde{D}u^3}{Dt} = -p_{x_3} + \nu \Delta_c u^3. \end{cases} \quad (4.28)$$

$$(ru^r)_r + (ru^3)_{x_3} = 0. \quad (4.29)$$

donde  $\Delta_c$  es el siguiente operador:

$$\Delta_c = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

**Observación 4.4:** Para  $\nu = 0$  se tienen las correspondientes ecuaciones de Euler. Por otro lado, para nuestro sistema el operador  $\Delta_c$  es equivalente al operador laplaciano en coordenadas cilíndricas al no haber dependencia respecto de  $\theta$ .

A continuación, haremos lo propio con la ecuación la vorticidad (1.17) para flujos 3D axisimétricos. De igual manera, analizaremos por separado cada término expresándolo en coordenadas cilíndricas para posteriormente reagruparlos en un nuevo sistema de ecuaciones. Así,

$$\frac{D \left( \frac{x_1}{r} (-u_{x_3}^\theta) - \frac{x_2}{r} \omega^\theta \right)}{Dt} = \frac{x_1}{r} \left[ (-u_{x_3}^\theta)_t + u^r (-u_{x_3 r}^\theta) - u^\theta \frac{\omega^\theta}{r} + u^3 (-u_{x_3 x_3}^\theta) \right] \quad (4.30)$$

$$- \frac{x_2}{r} \left[ \omega_t^\theta + u^r \omega_r^\theta - u^\theta \frac{u_{x_3}^\theta}{r} + u^3 \omega_{x_3 x_3}^\theta \right],$$

$$\frac{D \left( \frac{x_2}{r} (-u_{x_3}^\theta) + \frac{x_1}{r} \omega^\theta \right)}{Dt} = \frac{x_2}{r} \left[ (-u_{x_3}^\theta)_t + u^r (-u_{x_3 r}^\theta) - u^\theta \frac{\omega^\theta}{r} + u^3 (-u_{x_3 x_3}^\theta) \right] \quad (4.31)$$

$$+ \frac{x_1}{r} \left[ \omega_t^\theta + u^r \omega_r^\theta - u^\theta \frac{u_{x_3}^\theta}{r} + u^3 \omega_{x_3 x_3}^\theta \right],$$

$$\frac{D\omega^3}{Dt} = \omega_t^3 + u^r \omega_r^3 + u^3 \omega_{x_3}^3. \quad (4.32)$$

De manera análoga a lo hecho anteriormente con la velocidad, simplificamos las ecuaciones (4.30)-(4.31) gracias a  $R$  para obtener un sistema equivalente a (4.30)-(4.32):

$$\begin{aligned}\frac{D\omega^r}{Dt} &= \frac{\tilde{D}\omega^r}{Dt} - \frac{u^\theta\omega^\theta}{r}, \\ \frac{D\omega^\theta}{Dt} &= \frac{\tilde{D}\omega^\theta}{Dt} - \frac{u^\theta u_{x_3}^\theta}{r}, \\ \frac{D\omega^3}{Dt} &= \frac{\tilde{D}\omega^3}{Dt}.\end{aligned}\tag{4.33}$$

Por otro lado, estudiamos cada componente del vector  $(\omega \cdot \nabla)u$ . Haremos los cálculos únicamente para la primera al ser las restantes análogas:

$$\begin{aligned}\omega^1 u_{x_1}^1 &= \left[ \omega^r \frac{x_1}{r} - \omega^\theta \frac{x_2}{r} \right] \left[ \frac{x_1}{r} u^r - \frac{x_2}{r} u^\theta \right]_{x_1} \\ &= \frac{1}{r^2} \left[ \omega^r \frac{x_1}{r} - \omega^\theta \frac{x_2}{r} \right] \left[ \frac{x_1^2}{r} (r u_r^r - u^r) + u^r r + \frac{x_1 x_2}{r} (u^\theta - r u_r^\theta) \right]. \\ \omega^2 u_{x_2}^1 &= \left[ \omega^r \frac{x_2}{r} + \omega^\theta \frac{x_1}{r} \right] \left[ \frac{x_1}{r} u^r - \frac{x_2}{r} u^\theta \right]_{x_2} \\ &= \frac{1}{r^2} \left[ \omega^r \frac{x_2}{r} + \omega^\theta \frac{x_1}{r} \right] \left[ \frac{x_1 x_2}{r} (r u_r^r - u^r) - u^\theta r + \frac{x_2^2}{r} (u^\theta - r u_r^\theta) \right]. \\ \omega^3 u_{x_3}^1 &= \omega^3 \left[ \frac{x_1}{r} u^r - \frac{x_2}{r} u^\theta \right]_{x_3} = \omega^3 \left[ \frac{x_1}{r} u_{x_3}^r - \frac{x_2}{r} u_{x_3}^\theta \right].\end{aligned}$$

Desarrollando los productos y agrupando términos obtenemos:

$$(\omega \cdot \nabla)u^1 = \frac{x_1}{r} \left[ -\frac{u^\theta\omega^\theta}{r} + \frac{u^r\omega^r}{r} + u_{x_3}^r\omega^3 \right] - \frac{x_2}{r} \left[ \frac{\omega^\theta u^r}{r} - \frac{\omega^r u^\theta}{r} \right].\tag{4.34}$$

Con respecto a las dos componentes restantes de  $(\omega \cdot \nabla)u$  se tiene:

$$(\omega \cdot \nabla)u^2 = \frac{x_2}{r} \left[ -\frac{u^\theta\omega^\theta}{r} + \frac{u^r\omega^r}{r} + u_{x_3}^r\omega^3 \right] + \frac{x_1}{r} \left[ \frac{\omega^\theta u^r}{r} - \frac{\omega^r u^\theta}{r} \right].\tag{4.35}$$

$$(\omega \cdot \nabla)u^3 = \omega^r u_r^3 + \omega^3 u_{x_3}^3.\tag{4.36}$$

De modo que el sistema (4.34)-(4.36), el cual corresponde al término de deformación en la ecuación de la vorticidad (1.17), respecto de  $R$  queda:

$$\begin{aligned}
 (\omega \cdot \nabla)u &= \left[ -\frac{u^\theta \omega^\theta}{r} + \frac{u^r \omega^r}{r} + u_{x_3}^r \omega^3 \right] e_r \\
 &+ \left[ \frac{\omega^\theta u^r}{r} - \frac{\omega^r u^\theta}{r} \right] e_\theta + [\omega^r u_r^3 + \omega^3 u_{x_3}^3] e_3.
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Llegados a este punto, solamente queda desarrollar el término de viscosidad para poder reescribir la ecuación de la vorticidad (1.17). Como venimos haciendo en las construcciones anteriores, se harán los cálculos para la primera componente y las restantes serán análogas. En este caso es el término  $\Delta\omega^1 = \sum_i \left( \omega^r \frac{x_1}{r} - \omega^\theta \frac{x_2}{r} \right)_{x_i x_i}$ . Desarrollando cada sumando se tiene:

$$\begin{aligned}
 \omega_{x_1 x_1}^1 &= \frac{x_1}{r} \left[ \omega_{rr}^r \frac{x_1^2}{r^2} + \omega_r^r \left( \frac{3}{r} - \frac{3x_1^2}{r^3} \right) + \omega^r \left( \frac{3x_1^2}{r^4} - \frac{3}{r^2} \right) \right] \\
 &- \frac{x_2}{r} \left[ \omega_{rr}^\theta \frac{x_1^2}{r^2} + \omega_r^\theta \left( \frac{1}{r} - \frac{3x_1^2}{r^3} \right) + \omega^\theta \left( \frac{3x_1^2}{r^4} - \frac{1}{r^2} \right) \right], \\
 \omega_{x_2 x_2}^1 &= \frac{x_1}{r} \left[ \omega_{rr}^r \frac{x_2^2}{r^2} + \omega_r^r \left( \frac{1}{r} - \frac{3x_2^2}{r^3} \right) + \omega^r \left( \frac{3x_2^2}{r^4} - \frac{1}{r^2} \right) \right] \\
 &- \frac{x_2}{r} \left[ \omega_{rr}^\theta \frac{x_2^2}{r^2} + \omega_r^\theta \left( \frac{3}{r} - \frac{3x_2^2}{r^3} \right) + \omega^\theta \left( \frac{3x_2^2}{r^4} - \frac{3}{r^2} \right) \right], \\
 \omega_{x_3 x_3}^1 &= \frac{x_1}{r} \omega_{x_3 x_3}^r - \frac{x_2}{r} \omega_{x_3 x_3}^\theta.
 \end{aligned}$$

Sumamos y obtenemos:

$$\Delta\omega^1 = \frac{x_1}{r} \left[ \omega_{rr}^r + \frac{\omega_r^r}{r} - \frac{\omega^r}{r^2} + \omega_{x_3 x_3}^r \right] - \frac{x_2}{r} \left[ \omega_{rr}^\theta + \frac{\omega_r^\theta}{r} - \frac{\omega^\theta}{r^2} + \omega_{x_3 x_3}^\theta \right]. \tag{4.38}$$

Las componentes restantes son:

$$\Delta\omega^2 = \frac{x_2}{r} \left[ \omega_{rr}^r + \frac{\omega_r^r}{r} - \frac{\omega^r}{r^2} + \omega_{x_3 x_3}^r \right] + \frac{x_1}{r} \left[ \omega_{rr}^\theta + \frac{\omega_r^\theta}{r} - \frac{\omega^\theta}{r^2} + \omega_{x_3 x_3}^\theta \right]. \tag{4.39}$$

$$\Delta\omega^3 = \omega_{rr}^3 + \frac{\omega_r^3}{r} + \omega_{x_3 x_3}^3. \tag{4.40}$$

Para finalizar, agrupamos términos nuevamente según las direcciones principales de  $R$  en (4.38)-(4.40) e igualamos a (4.33) junto con (4.37) obteniendo el siguiente resultado:

**Proposición 4.10** *Ecuación de la vorticidad para fluidos axisimétricos*

Sean  $R$  el sistema de referencia (4.17) hallado mediante el cambio de variables (4.16),  $u$  un campo de velocidades axisimétrico y  $\omega$  su correspondiente vorticidad,  $\omega = \text{rot}(u)$  es decir,

$$\begin{aligned} u &= u^r(r, x_3, t)e_r + u^\theta(r, x_3, t)e_\theta + u^3e_3, \\ \omega &= \omega^r e_r + \omega^\theta e_\theta + \omega^3 e_3, \end{aligned}$$

siendo  $\omega^r = -u_{x_3}^\theta$ ,  $\omega^\theta = u_{x_3}^r - u_r^3$  y  $\omega^3 = \frac{1}{r}(ru^\theta)_r$ . Entonces la ecuación de la vorticidad (1.17) del fluido es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{D}\omega^r}{Dt} &= \frac{u^r\omega^r}{r} + u_{x_3}^r\omega^3 + \nu \left( \Delta_c\omega^r - \frac{\omega^r}{r^2} \right), \\ \frac{\tilde{D}\omega^\theta}{Dt} &= \frac{\omega^\theta u^r}{r} - 2\frac{\omega^r u^\theta}{r} + \nu \left( \Delta_c\omega^\theta - \frac{\omega^\theta}{r^2} \right), \\ \frac{\tilde{D}\omega^3}{Dt} &= \omega^r u_r^3 + \omega^3 u_{x_3}^3 + \nu \Delta_c\omega^3. \end{aligned} \tag{4.41}$$

**Observación 4.5:** Al igual que en la proposición 4.9, para  $\nu = 0$  se tiene la ecuación de la vorticidad para fluidos ideales. Nuevamente,  $\Delta_c$  es equivalente al operador laplaciano en coordenadas cilíndricas al no haber dependencia respecto de  $\theta$ .

### 4.3.2. Flujos axisimétricos sin remolinos.

Los flujos axisimétricos que estudiamos en esta sección son aquellos en los que la velocidad del remolino es nula en (4.18), es decir,

$$u = u^r(r, x_3, t)e_r + u^3(r, x_3, t)e_3. \tag{4.42}$$

Al ser  $u^\theta = 0$ , tomando rotacional respecto de  $R$  tenemos la vorticidad:

$$\omega(r, x_3, t) = (u_{x_3}^r - u_r^3)e_\theta = \omega^\theta e_\theta. \tag{4.43}$$

En primer lugar, queremos ver cómo varía el ángulo  $\theta$  a lo largo de las curvas características. Para ello, invertimos el cambio de variables (4.16),

$$\theta = \arccos\left(\frac{x_1}{r}\right) = \arcsen\left(\frac{x_2}{r}\right),$$

y calculamos la derivada material sobre  $\theta$ :

$$\frac{D\theta}{Dt} = \theta_t + \sum_i u^i \theta_{x_i} = u^1 \frac{-\sqrt{r^2 - x_1^2}}{r^2} + u^2 \frac{\sqrt{r^2 - x_2^2}}{r^2}.$$

Sustituyendo  $u^i$  en función de nuestro sistema de referencia (4.17) obtenemos:

$$\frac{D\theta}{Dt} = -\left(u^r \frac{x_1}{r} - u^\theta \frac{x_2}{r}\right) \frac{x_2}{r^2} + \left(u^r \frac{x_2}{r} + u^\theta \frac{x_1}{r}\right) \frac{x_1}{r^2} = \frac{u^\theta}{r}.$$

En nuestro caso, al ser flujo sin remolino,  $u^\theta = 0$ . Con lo que se conserva y  $(D\theta/Dt) = 0$ . Por otra parte, tenemos el siguiente resultado.

**Lema 4.1:** Dado un campo de velocidades  $u(x, t)$  en  $\mathbb{R}^N$ . Sea  $h(x, t)$  un campo  $C^1$  tal que

$$\frac{Dh}{Dt} = (h \cdot \nabla)u,$$

y  $f(x, t)$  un campo escalar cumpliendo:

$$\frac{Df}{Dt} = 0.$$

Entonces,

$$\frac{D}{Dt}(\nabla f \cdot h) = 0.$$

**Demostración:** En primer lugar, se tiene:

$$\frac{D}{Dt}(\nabla f \cdot h) = \frac{D(\nabla f)}{Dt} \cdot h + (\nabla f) \cdot \frac{Dh}{Dt}.$$

Desarrollamos ambos términos y veamos cómo reagruparlos:

$$\begin{aligned}\frac{D(\nabla f)}{Dt} \cdot h &= (\nabla(f_t) + (\nabla(\nabla f))u) \cdot h = (\nabla(f_t + (u \cdot \nabla)f)) \cdot h - (\nabla f \nabla u) \cdot h. \\ (\nabla f) \cdot \frac{Dh}{Dt} &= \sum_j f_{x_j} \left[ \sum_i h_i u_{x_i}^j \right] = \sum_i h_i \left[ \sum_j f_{x_j} u_{x_i}^j \right] = (\nabla f \nabla u) \cdot h.\end{aligned}$$

Por último, reagrupamos términos quedando:

$$\frac{D}{Dt}(\nabla f \cdot h) = (\nabla(f_t + (u \cdot \nabla)f)) \cdot h = \left( \nabla \frac{Df}{Dt} \right) \cdot h = 0.$$

□

**Nota 4.1:** El resultado anterior es general para todo campo de velocidades, no necesariamente ha de ser de divergencia nula.

Si consideramos fluidos ideales, es obvio que  $\omega$  verifica la ecuación  $\frac{D\omega}{Dt} = (\omega \cdot \nabla)u$ . Luego estamos en condiciones de aplicar el lema para  $\nabla\theta \cdot \omega$ . Antes de ello, simplificaremos tanto la expresión:

$$\nabla\theta \cdot \omega = \left( -\frac{x_2}{r^2}, \frac{x_1}{r^2}, 0 \right) \cdot \left( -\frac{x_2}{r}\omega^\theta, \frac{x_1}{r}\omega^\theta, 0 \right) = \frac{\omega^\theta}{r} \equiv \xi, \quad (4.44)$$

como la derivada material:

$$\begin{aligned}u^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u^2 \frac{\partial}{\partial x_2} &= u^1 \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1} + u^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_2} = \left( u^r \frac{x_1}{r} - u^\theta \frac{x_2}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} \frac{x_1}{r} \\ &\quad + \left( u^r \frac{x_2}{r} + u^\theta \frac{x_1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} \frac{x_2}{r} = u^r \frac{\partial}{\partial r}.\end{aligned}$$

Así, obtenemos el operador (4.23)  $(\tilde{D}/Dt)$ . Finalmente, mediante el lema 4.1 hemos construido la llamada *Ecuación de la dinámica del vórtice*:

$$\frac{\tilde{D}\xi}{Dt} = 0. \quad (4.45)$$

De modo que, para flujos ideales axisimétricos sin remolinos, la cantidad  $\xi$  se conserva a lo largo de las trayectorias del fluido. Este hecho se corresponde con la conservación de la vorticidad para fluidos ideales bidimensionales estudiada en el capítulo anterior. Al igual que hicimos con estos flujos, podemos hallar una formulación corriente vorticidad de las

ecuaciones de Euler mediante una función de corriente axisimétrica  $\psi$  y el término  $\xi$ .

La función de corriente  $\psi(r, x_3, t)$  debe implicar que el campo de velocidades que origina verifique la condición de incompresibilidad del fluido. Recordemos, por (4.29), que para flujos axisimétricos esta es equivalente a:

$$(ru^r)_r + (ru^3)_{x_3} = 0. \quad (4.46)$$

Por lo que nos basta tomar:

$$u^r = \frac{\psi_{x_3}}{r}, \quad u^3 = \frac{-\psi_r}{r}. \quad (4.47)$$

Por consiguiente, al ser  $\xi = \frac{u^r_{x_3} - u^3_r}{r}$ , lo reescribimos en función de  $\psi$ :

$$\frac{\psi_{x_3 x_3}}{r^2} + \frac{\psi_{rr}r - \psi_r}{r^3} = \xi.$$

Lo cual, si observamos bien, no es más que aplicar el siguiente operador sobre  $\psi$ ,

$$L = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}. \quad (4.48)$$

Así, tenemos la ecuación

$$L\psi = \xi. \quad (4.49)$$

**Observación 4.6:** Si resolvemos (4.49) para  $\psi$  en función de  $\xi$  y sustituimos en (4.47), podemos hallar las componentes  $u^r$  y  $u^3$ , también en función de  $\xi$ . De ese modo, la ecuación de la dinámica del vórtice (4.45) se convierte en una EDP que sólo depende de  $\xi$ . A lo largo de esta construcción hemos estado tratando con flujos axisimétricos sin remolino. Luego podemos reescribir las ecuaciones de Euler para estos mediante una formulación corriente-vorticidad.

**Proposición 4.11:** *Formulación corriente-vorticidad de las ecuaciones de Euler para flujos axisimétricos sin remolino*

Sea  $u(r, x_3, t)$  un flujo ideal axisimétrico sin remolino, es decir,

$$u = u^r e_r + u^3 e_3$$

con su correspondiente vorticidad  $\omega = \omega^\theta e_\theta$ . Se define la cantidad  $\xi = \frac{\omega^\theta}{r}$ . Entonces para este tipo de flujos las ecuaciones de Euler 3D admiten la siguiente reformulación:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{D}\xi}{Dt} &= 0, \\ L\psi &= \xi, \\ u^r &= \frac{\psi_{x_3}}{r}, u^3 = \frac{-\psi_r}{r}. \end{aligned}$$

donde  $L$  y  $\frac{\tilde{D}}{Dt}$  son los operadores (4.48) y (4.23) respectivamente.

### 4.3.3. Flujos axisimétricos con remolino.

Sea  $u$  un flujo axisimétrico general

$$u = u^r(r, x_3, t)e_r + u^\theta(r, x_3, t)e_\theta + u^3(r, x_3, t)e_3,$$

con su correspondiente vorticidad  $\omega$

$$\omega = \omega^r e_r + \omega^\theta e_\theta + \omega^3 e_3,$$

siendo  $\omega^\theta = u_{x_3}^r - u_r^3$ ,  $\omega^r = -u_{x_3}^\theta$  y  $\omega^3 = \frac{1}{r}(ru^\theta)_r$ .

Por la proposición 4.9, para  $\nu = 0$ , tenemos que la componente  $e_\theta$  de las ecuaciones de Euler es:

$$\frac{\tilde{D}u^\theta}{Dt} = -\frac{u^\theta u^r}{r}. \quad (4.50)$$

A partir de (4.50) se deduce el siguiente lema.

**Lema 4.2:** Sea  $u$  un flujo axisimétrico con velocidad de remolino  $u^\theta$ . Entonces la cantidad

$ru^\theta$  se conserva a través de las curvas características. Es decir,

$$\frac{\tilde{D}}{Dt}(ru^\theta) = 0. \quad (4.51)$$

**Demostración:** Es simplemente operar. Calculamos la derivada material de  $ru^\theta$ .

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{D}}{Dt}(ru^\theta) &= (ru^\theta)_t + u^r(ru^\theta)_r + u^3(ru^\theta)_{x_3} \\ &= ru_t^\theta + u^r(ru_r^\theta + u^\theta) + u^3ru_{x_3}^\theta \\ &= r\frac{\tilde{D}u^\theta}{Dt} + u^\theta u^r = 0. \end{aligned}$$

Donde la última igualdad se halla sustituyendo por (4.50).

□

Entonces, para flujos axisimétricos, dado un punto inicial sobre una circunferencia de radio  $r$  respecto del eje de simetría con velocidad angular  $u^\theta$ , se tiene que la cantidad  $ru^\theta$  se mantiene constante a través de las curvas características. De modo que a mayor radio en la trayectoria menor será la velocidad a la que giren y viceversa.

Por otra parte, para  $\nu = 0$ , por la proposición (4.10) tenemos que la componente  $e^\theta$  de la ecuación de la vorticidad es:

$$\frac{\tilde{D}\omega^\theta}{Dt} = \frac{\omega^\theta u^r}{r} - 2\frac{\omega^r u^\theta}{r}. \quad (4.52)$$

**Lema 4.3:** Sea  $u$  un flujo axisimétrico con velocidad de remolino  $u^\theta$  con vorticidad  $\omega$ . Definiendo  $\xi$  como en (4.44) se cumple:

$$\frac{\tilde{D}\xi}{Dt} = -2\frac{\omega^r u^\theta}{r^2}. \quad (4.53)$$

**Demostración:** Nuevamente, es simplemente operar. Calculamos la derivada material de  $\xi$  quedando:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{D}}{Dt} \left( \frac{\omega^\theta}{r} \right) &= \left( \frac{\omega^\theta}{r} \right)_t + u^r \left( \frac{\omega^\theta}{r} \right)_r + u^3 \left( \frac{\omega^\theta}{r} \right)_{x_3} \\ &= \frac{\omega_t^\theta}{r} + u^r \left( \frac{r\omega_r^\theta - \omega^\theta}{r^2} \right) + u^3 \frac{\omega_{x_3}^\theta}{r} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\tilde{D}\omega^\theta}{Dt} - \frac{\omega^\theta u^r}{r^2} = -2 \frac{\omega^r u^\theta}{r^2}. \end{aligned}$$

□

**Observación 4.7:** En contraste con lo visto para los flujos ideales axisimétricos sin remolino, la cantidad  $(\omega^\theta/r)$  no se conserva a través de las curvas características. Cómo la derivada material sólo actúa en los planos axiales, este hecho es debido a la interacción en éstos entre la velocidad de giro  $u^\theta$ , antes nula, con las velocidades  $u^r, u^3$ .

Al igual que para los flujos sin remolino, introducimos la función de corriente  $\psi(r, x_3, t)$  para definir las velocidades  $u^r$  y  $u^3$ ,

$$u^r = \frac{\psi_{x_3}}{r}, \quad u^3 = -\frac{\psi_r}{r},$$

la cual verifica la ecuación (4.49)  $L\psi = \xi$ , siendo  $L$  nuevamente el operador elíptico lineal (4.48).

**Nota 4.2:** Llegados a este punto, se puede realizar una reformulación de tipo corriente-vorticidad de las ecuaciones de Euler tal y como hicimos en la sección anterior para los flujos sin remolinos. En este caso, al haber velocidad angular, añadiríamos la ecuación (4.51), la cual corresponde al término  $u^\theta$ . No obstante, vamos a hacer una reformulación de ese tipo para las ecuaciones de Navier-Stokes englobando así a las de Euler. Lo único que queda por hacer es generalizar los lemas 4.2 y 4.3 para flujos viscosos.

**Lema 4.4:** Sea  $u$  un flujo axisimétrico de viscosidad  $\nu$  y velocidad de remolino  $u^\theta$ . Definiendo la cantidad  $\Gamma$  como  $\Gamma = ru^\theta$  se cumple:

$$\frac{\tilde{D}\Gamma}{Dt} = \nu \left( \Gamma_{rr} - \frac{\Gamma_r}{r} + \Gamma_{x_3x_3} \right). \quad (4.54)$$

**Demostración:** En primer lugar, es fácil comprobar que:

$$\Gamma_r = ru_r^\theta + u^\theta, \quad \Gamma_{rr} = ru_{rr}^\theta + 2u_r^\theta, \quad \Gamma_{x_3x_3} = ru_{x_3x_3}^\theta.$$

Por la prueba del lema 4.2 tenemos que:

$$\frac{\tilde{D}}{Dt}(ru^\theta) = r \frac{\tilde{D}u^\theta}{Dt} + u^\theta u^r,$$

luego sustituyendo el término  $\frac{\tilde{D}u^\theta}{Dt}$  por (4.28) obtenemos:

$$\frac{\tilde{D}}{Dt}(ru^\theta) = \nu \left( ru_{rr}^\theta + u_r^\theta - \frac{u^\theta}{r} + u_{x_3x_3}^\theta \right) = \nu \left( \Gamma_{rr} - \frac{\Gamma_r}{r} + \Gamma_{x_3x_3} \right).$$

□

**Lema 4.5:** Sea  $u$  un flujo axisimétrico de viscosidad  $\nu$ , velocidad de remolino  $u^\theta$  y vorticidad  $\omega$ . Definiendo la cantidad  $\xi$  como  $\xi = \frac{\omega^\theta}{r}$ , se cumple:

$$\frac{\tilde{D}\xi}{Dt} = -2 \frac{\omega^r u^\theta}{r^2} + \nu \left( \xi_{rr} + \frac{3}{r} \xi_r + \xi_{x_3x_3} \right). \quad (4.55)$$

**Demostración:** La demostración es análoga a la anterior. Primero calculamos las derivadas parciales de  $\xi$ :

$$\begin{aligned} \xi_r &= \frac{r\omega_r^\theta - \omega^\theta}{r} = \omega_r^\theta - \frac{\omega^\theta}{r}, & \xi_{x_3x_3} &= \frac{\omega_{x_3x_3}^\theta}{r}, \\ \xi_{rr} &= \frac{r^3\omega_{rr}^\theta - 2r^2\omega_r^\theta + 2r\omega^\theta}{r^4} = \frac{\omega_{rr}^\theta}{r} - 2\frac{\omega_r^\theta}{r^2} + 2\frac{\omega^\theta}{r^3}. \end{aligned}$$

Por la prueba del lema 4.3 tenemos:

$$\frac{\tilde{D}}{Dt} \left( \frac{\omega^\theta}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\tilde{D}\omega^\theta}{Dt} - \frac{u^r \omega^\theta}{r^2},$$

donde sustituimos el término  $\frac{\tilde{D}\omega^\theta}{Dt}$  mediante (4.41) obteniendo:

$$\frac{\tilde{D}\xi}{Dt} = -2 \frac{u^\theta \omega^r}{r^2} + \frac{\nu}{r} \left[ \omega_{rr}^\theta + \frac{\omega_r^\theta}{r} - \frac{\omega^\theta}{r^2} + \omega_{x_3x_3}^\theta \right] = -2 \frac{u^\theta \omega^r}{r^2} + \nu \left[ \xi_{rr} + 3 \frac{\xi_r}{r} + \xi_{x_3x_3} \right].$$

□

Estos dos resultados, junto con lo explicado en la nota 4.2, nos permiten enunciar la siguiente proposición.

**Proposición 4.12:** *Formulación corriente-vorticidad de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujos axisimétricos*

Sea  $u(r, x_3, t)$  un flujo axisimétrico,  $u = u^r e_r + u^\theta e_\theta + u^3 e_3$ , con su correspondiente vorticidad  $\omega = \omega^r e_r + \omega^\theta e_\theta + \omega^3 e_3$ . Se definen las cantidades  $\xi = \frac{\omega^\theta}{r}$  y  $\Gamma = ru^\theta$ . Entonces para este tipo de flujos las ecuaciones de Navier-Stokes 3D admiten la siguiente reformulación:

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{D}\xi}{Dt} &= -2\frac{\omega^r u^\theta}{r^2} + \nu \left( \xi_{rr} + \frac{3}{r}\xi_r + \xi_{x_3 x_3} \right), \\ \frac{\tilde{D}\Gamma}{Dt} &= \nu \left( \Gamma_{rr} - \frac{\Gamma_r}{r} + \Gamma_{x_3 x_3} \right), \\ L\psi &= \xi, \\ u^r &= \frac{\psi_{x_3}}{r}, u^3 = \frac{-\psi_r}{r}.\end{aligned}$$

donde  $L$  y  $\frac{\tilde{D}}{Dt}$  son los operadores (4.48) y (4.23) respectivamente.

Pasamos ahora a estudiar algunos ejemplos.

■ *Ejemplo 4.6:* Remolino con viscosidad

Dado  $\gamma \in \mathbb{R}$ , sean  $v^1$  el flujo de chorro siguiente:

$$v^1 = \left( -\frac{\gamma}{2}x_1, -\frac{\gamma}{2}x_2, \gamma x_3 \right)^T = -\frac{\gamma}{2}r e_r + \gamma x_3 e_3,$$

y  $v^2$  un remolino con viscosidad como en la expresión (3.14) del Ejemplo 3.3:

$$v^2 = \left( -\frac{x_2}{r^2}, \frac{x_1}{r^2}, 0 \right)^T \int_0^r s \bar{\omega}(s, t) ds = \left[ \frac{1}{r} \int_0^r s \bar{\omega}(s, t) ds \right] e_\theta.$$

Tomando  $u = v^1 + v^2$  obtenemos un flujo axisimétrico con remolino:

$$u = -\frac{\gamma}{2}r e_r + \left[ \frac{1}{r} \int_0^r s \bar{\omega}(s, t) ds \right] e_\theta + \gamma x_3 e_3. \quad (4.56)$$

Lo primero que podemos obtener es la función de corriente  $\psi$ . Así:

$$\begin{cases} u^r = -\frac{\gamma}{2}r = \frac{\psi_{x_3}}{r} \\ u^3 = \gamma x_3 = \frac{-\psi_r}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_{x_3} = -\frac{\gamma}{2}r^2 \\ \psi_r = -\gamma r x_3 \end{cases} \Rightarrow \psi = -\frac{\gamma}{2}r^2 x_3. \quad (4.57)$$

Por consiguiente, calculamos la vorticidad a partir de  $\psi$ :

$$\omega^r = -u_{x_3}^\theta = 0, \quad \omega^\theta = u_{x_3}^r - u_r^3 = 0, \quad \omega^3 = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \int_0^r s \bar{\omega}(s, t) ds \right).$$

Por el teorema fundamental del cálculo, tenemos que  $\omega^3 = \bar{\omega}(r, t)$ . Con lo que la vorticidad sólo tiene componente con respecto al eje de simetría, es decir,  $\omega = \bar{\omega}(r, t)e_3$ . Esto nos indica que el fluido gira siempre de manera perpendicular al plano  $x_1 - x_2$ . Por otra parte, es inmediata la implicación,  $\omega^\theta = 0 \Rightarrow \xi = 0$ . Luego, definiendo  $\Gamma = r u^\theta = \int_0^r s \bar{\omega}(s, t) ds$ , las ecuaciones de la proposición 4.12 se reducen a la siguiente ecuación escalar:

$$\Gamma_t - \frac{\gamma}{2} r \Gamma_r = \nu \left( \Gamma_{rr} - \frac{\Gamma_r}{r} \right). \quad (4.58)$$

Para resolverla vamos a reescribirla en términos de  $\bar{\omega}$ . Nuevamente, calculamos las siguientes derivadas usando el teorema fundamental del cálculo y la derivación bajo el signo integral:

$$\Gamma_r = r \bar{\omega}(r, t), \quad \Gamma_t = \int_0^r s \bar{\omega}_t(s, t) ds, \quad \Gamma_{rr} = \bar{\omega}(r, t) + r \bar{\omega}_r(r, t).$$

Derivamos la ecuación (4.58) respecto de  $r$  obteniendo:

$$\bar{\omega}_t - \frac{\gamma}{2} r \bar{\omega}_r = \gamma \bar{\omega} + \nu \left( \bar{\omega}_{rr} + \frac{\bar{\omega}_r}{r} \right).$$

Si observamos, el término de viscosidad acompaña al operador laplaciano 2D respecto de las variables  $x_1, x_2$  en coordenadas cilíndricas. Por otra parte, gracias a la simetría radial de  $\bar{\omega}$  se tiene:

$$x \cdot \begin{pmatrix} \bar{\omega}_{x_1} \\ \bar{\omega}_{x_2} \end{pmatrix} = \sum_i x_i \bar{\omega}_{x_i} = \sum_i \frac{x_i^2}{r} \bar{\omega}_r = r \bar{\omega}_r, \quad (4.59)$$

con lo que reescribimos la ecuación en coordenadas cartesianas, quedando:

$$\bar{\omega}_t - \frac{\gamma}{2}x \cdot \nabla_x \bar{\omega} = \gamma \bar{\omega} + \nu \Delta_x \bar{\omega}. \quad (4.60)$$

Mediante el cambio  $\hat{\omega}e^{\gamma t} = \bar{\omega}$ , (4.62) se reduce a:

$$\hat{\omega}_t - \frac{\gamma}{2}x \cdot \nabla_x \hat{\omega} = \nu \Delta_x \hat{\omega},$$

así, mediante la proposición del calor 1.7 tenemos que dada la condición inicial  $\omega^0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$  radialmente simétrica la solución es:

$$\bar{\omega}(x, t) = e^{\gamma t} \int_{\mathbb{R}^2} H \left( xe^{\frac{\gamma}{2}t} - y, \frac{\nu}{\gamma}(e^{\gamma t} - 1) \right) \omega^0(|y|) dy, \quad (4.61)$$

donde  $H$  es el núcleo de Gauss 2D.

$$H(x, t) = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Por último, vamos a estudiar la expresión (4.61) para ver si admite algún equilibrio y podemos tomar límite cuando  $t \nearrow \infty$ . De esa manera obtendríamos soluciones estacionarias para la ecuación de la vorticidad correspondientes a la compensación entre sí de los términos de convección  $-\frac{\gamma}{2}x \cdot \nabla_x \bar{\omega}$ , estiramiento de vórtice  $\gamma \bar{\omega}$  y difusión  $\nu \Delta_x \bar{\omega}$  en la ecuación (4.60).

Vemos que el término,

$$e^{\gamma t} H \left( xe^{\frac{\gamma}{2}t} - y, \frac{\nu}{\gamma}(e^{\gamma t} - 1) \right) = \frac{\gamma e^{\gamma t}}{4\pi(e^{\gamma t} - 1)} e^{-\frac{\gamma|x|^2 - 2xy + \nu|y|^2}{4\nu(e^{\gamma t} - 1)}},$$

es una expresión acotada en  $t$  debido a que las exponenciales se compensan, por lo que podemos tomar límite cuando  $t \nearrow \infty$ . Antes de ello, como nuestra función es radialmente simétrica, hacemos el cambio  $s = |y|$  de donde  $dy = s ds$  y  $r = |x|$  pasando de una integral en  $\mathbb{R}^2$  a una integral en  $(0, \infty)$ . Así, tomando límite obtenemos la solución conocida como *Vórtice de Burger*:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\omega}(r, t) = \omega_\infty(r) = \frac{\gamma}{4\pi\nu} e^{-\frac{\gamma r^2}{4\nu}} \int_0^\infty s \omega^0(s) ds, \quad (4.62)$$

con su correspondiente velocidad de remolino, siendo  $u^\theta(r, t) = (1/r) \int_0^r \xi \bar{\omega}(\xi)(s, t) d\xi$ :

$$\frac{1}{r} \int_0^r \frac{\gamma}{4\pi\nu} e^{\frac{\gamma\xi^2}{4\nu}} \xi \left[ \int_0^\infty s\omega^0(s) ds \right] d\xi = \frac{1}{2\pi r} \left[ 1 - e^{\frac{\gamma r^2}{4\nu}} \right] \int_0^\infty s\omega^0(s) ds.$$

Luego,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u^\theta(r, t) = \frac{1}{2\pi r} \left[ 1 - e^{\frac{\gamma r^2}{4\nu}} \right] \int_0^\infty s\omega^0(s) ds. \quad (4.63)$$

- *Ejemplo 4.7:* Remolino viscoso con inclinación.

En este ejemplo seguimos una idea parecida a la que hemos usado al principio del capítulo para generar los flujos  $2\frac{1}{2}$ D. Dada una función escalar real  $\gamma(t)$ , a la que llamaremos *coeficiente de deformación del fluido*, consideramos el flujo  $u$ :

$$u(r, x_3, t) = -\frac{\gamma(t)}{2} r e_r + u^\theta(r, t) e_\theta + \gamma(t) x_3 e_3. \quad (4.64)$$

Se trata de un remolino viscoso similar al del ejemplo anterior, salvo que en este el coeficiente de deformación no es constante, por lo que su estudio es análogo. En primer lugar, sabemos que la vorticidad correspondiente a (4.64) es :

$$\omega(r, t) = \frac{1}{r} (r u^\theta)_r e_3. \quad (4.65)$$

Por lo que  $\omega^\theta = 0$  y, nuevamente,  $\xi = 0$ .

Por otro lado, la ecuación para  $\Gamma = r u^\theta$  es igual a (4.58) sustituyendo la constante  $\gamma$  por la función  $\gamma(t)$ . De modo que se reduce de manera análoga a lo hecho en (4.60) llegando a su equivalente:

$$\omega_t - \frac{\gamma(t)}{2} x \cdot \nabla_x \omega = \gamma(t) \omega + \nu \Delta_x \omega. \quad (4.66)$$

Mediante el cambio  $\omega = e^{\int_0^T \gamma(s) ds} \hat{\omega}$  nuevamente tenemos:

$$\hat{\omega}_t - \frac{\gamma(t)}{2} x \cdot \nabla_x \hat{\omega} = \nu \Delta_x \hat{\omega}.$$

Dónde, dado un campo axisimétrico  $\omega_0(r) \in L^p$ , con  $1 \leq p \leq \infty$ , podemos aplicar la proposición del calor 1.7 obteniendo:

$$\omega(x, t) = K_1^2(t) \int_{\mathbb{R}^2} H(xK_1(t) - y, K_2(t)) \omega_0(|y|) dy, \quad (4.67)$$

siendo  $H$  el núcleo de Gauss de dimensión 2 y  $K_i$  las funciones

$$K_1(t) = e^{\frac{1}{2} \int_0^t \gamma(\xi) d\xi}, \quad K_2(t) = \nu \int_0^t e^{\int_0^\xi \gamma(\xi') d\xi'} d\xi.$$

De este modo, por (4.65), despejando e integrando sobre  $r$  hallamos la velocidad angular:

$$u^\theta(r, t) = \frac{K_1^2(t)}{r} \int_0^r s \left[ \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(xK_1(t) - y, K_2(t)) \omega_0(|y|) dy \right] ds. \quad (4.68)$$

Hasta aquí tan solo hemos repetido los pasos del ejemplo anterior para fluidos con coeficiente de deformación no constante.

Volvamos a la expresión de  $u$  (4.64). Tanto la componente radial como la de giro no tienen dependencia de  $x_3$ , de modo que la suma de estas dos, la notamos por  $\tilde{u}$ , es solución de Navier-Stokes 2D por serlo  $u$ :

$$\tilde{u}(r, t) = -\frac{\gamma(t)}{2} r e_r + u^\theta(r, t) e_\theta. \quad (4.69)$$

Ahora, tal como hicimos en los flujos  $2\frac{1}{2}D$ , añadimos una función  $u^3(x_1, x_2, t)$ , dependiente del plano radial, en la tercera componente de (4.64) y, considerando el flujo  $v = u + u^3 e_3$ , estudiaremos cuándo es ahora  $v$  solución de las ecuaciones de Navier-Stokes en dimensión 3. De esta manera,  $v$  es de la forma:

$$v = \tilde{u}(x_1, x_2, t) + [\gamma(t)x_3 + u^3(x_1, x_2, t)] e_3. \quad (4.70)$$

Al no haber dependencia de  $\tilde{u}$  respecto de la variable  $x_3$ , tenemos que las dos primeras ecuaciones de Navier-Stokes, las cuales actúan sobre las dos primeras componentes de la velocidad, es decir, sobre  $\tilde{u}(r, t)$ , son equivalentes a las ecuaciones de Navier-Stokes 2D y, como ya hemos comentado,  $\tilde{u}$  las verifica. Además, al ser también  $u^3$  independiente de  $x_3$ , se tiene que  $\text{div}(v) = \text{div}(u) = 0$ , con lo que la hipótesis de incompresibilidad se sigue

cumpliendo. De modo que únicamente tenemos que centrarnos en la tercera ecuación de Navier-Stokes. Esta es:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(u^3 + \gamma(t)x_3) &= u_t^3 + \gamma'(t)x_3 + u_{x_1}^3 v^1 + u_{x_2}^3 v^2 + \gamma(t)[u^3 + \gamma(t)x_3] \\ &= -p_{x_3} + \nu \Delta_{(x_1, x_2)} u^3. \end{aligned}$$

Como  $u$  es solución de Navier-Stokes, sabemos que se verifica:

$$\frac{D}{Dt}(\gamma(t)x_3) = \gamma'(t)x_3 + \gamma(t)^2 x_3 = -p_{x_3},$$

de modo que podemos suprimir dichos términos. Finalmente, dado el dato inicial  $u_0^3$ , llegamos a que  $v$  será solución de Navier-Stokes si, y sólo si,  $u^3$  satisface la siguiente ecuación de convección-difusión:

$$\begin{cases} \frac{\tilde{D}u^3}{Dt} = -\gamma(t)u^3 + \nu \tilde{\Delta}u^3, & (\tilde{x}, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty), \\ u^3(\tilde{x}, 0) = u_0^3(\tilde{x}), & \tilde{x} \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (4.71)$$

donde recordamos que los operadores con la tilde  $\sim$  actúan únicamente sobre las variables  $x_1, x_2$ . Veamos si (4.71) admite soluciones radiales. En primer lugar,

$$u_{x_1}^3 u^1 + u_{x_2}^3 u^2 = u_r^3 \frac{x_1}{r} \left[ -\frac{\gamma(t)}{2} x_1 - u \frac{x_2}{r} \right] + u_r^3 \frac{x_2}{r} \left[ -\frac{\gamma(t)}{2} x_2 + u \frac{x_1}{r} \right] = -r \frac{\gamma(t)}{2} u_r^3.$$

Tal como se hizo en (4.59),  $ru_r^3 = \tilde{x} \cdot \tilde{\nabla}u^3$ . Con lo que (4.71) se reduce a:

$$\begin{cases} u_t^3 - \frac{\gamma(t)}{2} \tilde{x} \cdot \tilde{\nabla}u^3 = -\gamma(t)u^3 + \nu \tilde{\Delta}u^3, & (\tilde{x}, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty), \\ u^3(\tilde{x}, 0) = u_0^3(\tilde{x}), & \tilde{x} \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (4.72)$$

Se resuelve de manera equivalente a (4.60). Consideramos a  $u_0^3 \in L^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , radialmente simétrica, reducimos y aplicamos la proposición del calor 1.7 obteniendo:

$$u^3(r, t) = \frac{1}{K_1(t)} \int_{\mathbb{R}^2} H(xK_1(t) - y, K_2(t)) u_0^3(|y|) dy, \quad (4.73)$$

siendo  $H$  el núcleo de Gauss de dimensión 2 y  $K_i$  las funciones:

$$K_1(t) = e^{\frac{1}{2} \int_0^t \gamma(\xi) d\xi}, \quad K_2(t) = \nu \int_0^t e^{\int_0^\xi \gamma(\xi') d\xi'} d\xi.$$

En resumen, hemos construido de forma explícita flujos de remolinos que satisfacen Navier-Stokes 3D con la siguiente estructura:

$$u(r, t) = -\frac{\gamma(t)}{2} r e_r + u^\theta(r, t) e_\theta + [u^3(r, t) + \gamma(t) x_3] e_3, \quad (4.74)$$

donde, dados los datos iniciales, la velocidad de giro viene dada por (4.68) y  $u^3$  por (4.73). Cómo ahora la componente vertical del flujo sí depende de  $r$ , tenemos que la vorticidad correspondiente al remolino es

$$\omega(r, t) = -u_r^3 e_r + \frac{1}{r} (r u^\theta)_r e_3. \quad (4.75)$$

**Observación 4.8:** En contraste con el ejemplo anterior, donde la vorticidad sólo tenía componente vertical, al añadir el término  $u^3 e_3$  con dependencia respecto del plano  $x_1 - x_2$  aparece una componente radial de la misma. Esto significa que los vectores de la vorticidad van a sufrir inclinaciones respecto del plano radial y, por consiguiente, también el remolino. Con lo que los giros ahora son más complejos al no estar la vorticidad necesariamente alineado con el eje de simetría.

Para finalizar el capítulo, estudiamos el caso de Euler en el ejemplo anterior. Para  $\nu = 0$ , las ecuaciones de (4.58) y (4.72) para la velocidad de giro y la componente vertical  $u^3$  respectivamente quedan

$$\begin{aligned} \Gamma_t - \frac{\gamma(t)}{2} r \Gamma_r &= 0, \\ u_t^3 - \frac{\gamma(t)}{2} \tilde{x} \cdot \tilde{\nabla} u^3 &= -\gamma(t) u^3. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Dadas las condiciones iniciales  $u_0^\theta, u_0^3 \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $r_0 > 0$ , planteamos el sistema característico:

$$\begin{cases} t'(s) = 1 \\ r'(s) = -\frac{\gamma(t)}{2}r \\ t(0) = 0 \\ r(0) = r_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = s \\ r = r_0 e^{\frac{1}{2} \int_0^t \gamma(\xi) d\xi} \end{cases}$$

Distinguimos según la ecuación de (4.76):

$$\begin{cases} \Gamma'(s) = 0 \\ \Gamma(0) = u_0^\theta(r_0)r_0 \\ u^3(s) = -\Gamma(t)u^3(s) \\ u^3(0) = u_0^3(r_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma(s) = \Gamma(0) = u_0^\theta \left( r e^{\frac{1}{2} \int_0^t \gamma(\xi) d\xi} \right) r e^{\frac{1}{2} \int_0^t \gamma(\xi) d\xi} \\ u^3(s) = e^{-\int_0^t \gamma(\xi) d\xi} u_0^3 \left( r e^{\frac{1}{2} \int_0^t \gamma(\xi) d\xi} \right) \end{cases}$$

Así, las velocidades para Euler resultan:

$$\begin{aligned} u^\theta(r, t) &= u_0^\theta \left[ r e^{\frac{1}{2} \int_0^t \gamma(\xi) d\xi} \right] e^{\frac{1}{2} \int_0^t \gamma(\xi) d\xi}. \\ u^3(r, t) &= u_0^3 \left[ r e^{\frac{1}{2} \int_0^t \gamma(\xi) d\xi} \right] e^{-\int_0^t \gamma(\xi) d\xi}. \end{aligned}$$



# Capítulo 5

## Un resultado sobre el mal planteamiento de las ecuaciones de Euler en espacios de Hölder.

En este capítulo vamos a mostrar cómo hay soluciones regulares en el instante inicial para las ecuaciones de Euler que pierden regularidad instantáneamente. Vamos a trabajar en los llamados *espacios de Hölder*, por lo que primero se darán nociones básicas sobre éstos para luego pasar al resultado que nos interesa. Esta pérdida de regularidad en ciertas soluciones implica que las ecuaciones de Euler no están bien propuestas en estos espacios de funciones.

Nuestro análisis se va a centrar en el siguiente flujo:

$$u(x, t) = (u_1(x_2), 0, u_3(x_1 - tu_1(x_2)))^T \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \quad (5.1)$$

el cual fue estudiado por primera vez por los matemáticos Majda y DiPerna [6]. Nuestro resultado deriva de una publicación de Titis y Bardos sobre el mismo [7].

Sea  $\Omega = \mathbb{R}^3$ , considerando que la presión es nula,  $u$  va a ser solución de Euler 3D. Que  $u$  cumple la condición de incompresibilidad es trivial pues  $\partial u_i / \partial x_i = 0 \forall i$ . Por otra parte, la ecuación para  $u_1$  es claramente nula ya que ésta únicamente depende de  $x_2$  y  $u_2$  es cero, con lo que la derivada material de  $u_1$  también lo será. Queda pues, la ecuación para

la tercera componente:

$$\frac{Du_3}{Dt} = -u_1u_3' + u_3'u_1 = 0,$$

con lo que el par  $(u, 0)$  es solución de Euler 3D en  $\mathbb{R}^3$ .

Supongamos ahora que  $u$  es un campo periódico respecto de cada componente espacial.

Es decir, podemos considerar que trabajamos en  $\Omega = \mathbb{T}^3$ . Se define entonces la energía de  $u$  como:

$$\int_{\mathbb{T}^3} |u(x, t)|^2 dx. \quad (5.2)$$

Vamos a comprobar que esta es constante para nuestro flujo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{T}^3} |u(x, t)|^2 dx &= \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\partial}{\partial t} [(u_1(x_2))^2 + (u_3(x_1 - tu_1(x_2)))^2] dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^3} 2u_3(x_1 - tu_1(x_2))u_3'(x_1 - tu_1(x_2))(-u_1(x_2)) dx \\ &= - \int_{\mathbb{T}^3} u_1(x_2) \left[ \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_1} [u_3(x_1 - tu_1(x_2))]^2 dx_1 \right] dx_2 dx_3 = 0, \end{aligned}$$

donde la integral se anula debido a la periodicidad de  $u^3$ .

Antes de continuar, definimos los *espacios de Hölder*:

**Definición 5.1:** Una función  $f$  pertenece al espacio de Hölder  $C^\alpha$  con  $0 < \alpha < 1$  si, y sólo si,

$$|f(x + h) - f(x)| \leq c|h|^\alpha, \quad \forall x, \quad |h| < 1, \quad (5.3)$$

para una cierta constante positiva  $c$ . La expresión (5.3) se conoce como *condición de Hölder*. Del mismo modo,  $f$  pertenece al espacio de Hölder  $C^{1,\alpha}$  con  $\alpha \in (0, 1)$  si  $f \in C^1$  y  $f' \in C^\alpha$ . Además, se tiene que los espacios de Hölder son Banach con las siguientes

normas:

$$\begin{aligned} \|f\|_{C^\alpha} &= \|f\|_{L^\infty} + \|f\|_{\dot{C}^\alpha}, \\ \|f\|_{C^{1,\alpha}} &= \|f\|_{L^\infty} + \sup_i \|f_{x_i}\|_{L^\infty} + \sup_i \|f_{x_i}\|_{\dot{C}^\alpha}, \\ \text{siendo } \|f\|_{\dot{C}^\alpha} &= \sup_{x,h,|h|<1} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|^\alpha}. \end{aligned}$$

**Lema 5.1:** Sea  $f$  una función en  $C^\alpha$ . Entonces,  $f \in C^\beta \forall \beta < \alpha$ .

**Demostración:** Veamos si  $f \in C^\beta$ , con  $\beta < \alpha$ . Para ello, dado  $x \in \Omega$  cualquiera,  $f$  debe verificar la condición de Hölder (5.3). Como  $|h| < 1$  tenemos:

$$\frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|^\beta} \leq \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|^\alpha} \leq \|f\|_{\dot{C}^\alpha}.$$

Lo cual implica el resultado. □

Finalizada esta breve introducción sobre los espacios de Hölder, pasamos al resultado que nos interesa:

**Teorema 5.1:** Sea el campo  $u(x, t) = (u_1(x_2), 0, u_3(x_1 - tu_1(x_2)))^T$ . Entonces:

- a) si  $u_i \in C^{1,\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 1] \Rightarrow u$  es solución de las ecuaciones de Euler en  $C^{1,\alpha} \forall t$ .
- b) si  $u_i \in C^\alpha$ ,  $\alpha \in (0, 1) \Rightarrow u \in C^{\alpha^2} \forall t$ .
- c) Existen flujos  $u : u(x, 0) \in C^\alpha$  con  $\alpha \in (0, 1)$  y  $u \notin C^\beta \forall t > 0, \forall \beta > \alpha^2$ . En particular,  $u \notin C^\alpha \forall t > 0$ .

**Demostración:**

- a) En primer lugar, para que  $u$  esté en  $C^{1,\alpha}$ , es suficiente probar que las derivadas  $u_{x_i}$  verifiquen la condición (5.3) componente a componente respecto de cada variable ya que la condición de Hölder implica continuidad. Por tanto, tendríamos que  $u \in C^1$  y además  $u_{x_i} \in C^\alpha$ . Las derivadas de  $u$  son las siguientes:

$$\begin{aligned} u_{x_1}(x, t) &= (0, 0, u'_3(x_1 - tu_1(x_2)))^T, \\ u_{x_2}(x, t) &= (u'_1(x_2), 0, u'_3(x_1 - tu_1(x_2))(-tu'_1(x_2)))^T, \\ u_{x_3}(x, t) &= 0. \end{aligned}$$

Al tener  $u'_i \in C^\alpha$ , sólo hay que estudiar los casos en que el incremento  $x_i + h$  es en la variable  $x_2$ , con  $h \in \mathbb{R}$ ,  $|h| < 1$ , ya que es el único caso en que no es inmediato que se cumpla la condición de Hölder al no corresponderse los incrementos en argumento y denominador. Para  $u_{x_1}$  tenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{|u'_3(x_1 - tu_1(x_2 + h)) - u'_3(x_1 - tu_1(x_2))|}{|h|^\alpha} = \\ & = \frac{|u'_3(x_1 - tu_1(x_2 + h)) - u'_3(x_1 - tu_1(x_2))|}{|tu_1(x_2 + h) - tu_1(x_2)|^\alpha} \left( \frac{|u_1(x_2 + h) - u_1(x_2)|}{|h|} \right)^\alpha |t|^\alpha \\ & \leq |t|^\alpha \|u'_3\|_{\dot{C}^\alpha} \|u'_1\|_{L^\infty}^\alpha, \end{aligned}$$

dónde se ha usado que, al ser  $u_1 \in C^1$ , entonces es lipschitziana. Con respecto a  $u_{x_2}$  se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{|u'_3(x_1 - tu_1(x_2 + h))tu'_1(x_2 + h) - u'_3(x_1 - tu_1(x_2))tu'_1(x_2)|}{|h|^\alpha} \\ & = |t| \frac{|u'_3(x_1 - tu_1(x_2 + h))u'_1(x_2 + h) - u'_3(x_1 - tu_1(x_2))u'_1(x_2)|}{|h|^\alpha}. \end{aligned}$$

Sumando y restando en el numerador el término  $u'_3(x_1 - tu_1(x_2))u'_1(x_2 + h)$  y usando la desigualdad triangular se tiene:

$$\begin{aligned} & \leq |t| \left( \frac{|u'_1(x_2 + h)| |u'_3(x_1 - tu_1(x_2 + h)) - u'_3(x_1 - tu_1(x_2))|}{|h|^\alpha} \right. \\ & \quad \left. + \frac{|u'_3(x_1 - tu_1(x_2))| |u'_1(x_2 + h) - u'_1(x_2)|}{|h|^\alpha} \right) \\ & \leq |t| (\|u'_1\|_{L^\infty} |t|^\alpha \|u'_3\|_{\dot{C}^\alpha} \|u'_1\|_{L^\infty}^\alpha + \|u'_1\|_{\dot{C}^\alpha} \|u'_3\|_{L^\infty}) \\ & = |t| (|t|^\alpha \|u'_3\|_{\dot{C}^\alpha} \|u'_1\|_{L^\infty}^{1+\alpha} + \|u'_1\|_{\dot{C}^\alpha} \|u'_3\|_{L^\infty}). \end{aligned}$$

Arriba se ha usado el resultado del caso anterior en el primer sumando y la condición de Hölder en los restantes.

- b) Para probarlo hay que razonar al igual que en el apartado anterior pero en referencia a las componentes  $u_i$  en vez de a sus derivadas. En primer lugar, por el lema 5.1,  $u_i \in C^\alpha \Rightarrow u_i \in C^\beta \forall \beta < \alpha$ . Nuevamente tenemos que estudiar el incremento

respecto de  $x_2$ :

$$\begin{aligned} & \frac{|u_3(x_1 - tu_1(x_2 + h)) - u_3(x_1 - tu_1(x_2))|}{|h|^{\alpha^2}} \\ & \leq \frac{|u_3(x_1 - tu_1(x_2 + h)) - u_3(x_1 - tu_1(x_2))|}{|tu_1(x_2 + h) - tu_1(x_2)|^\alpha} \left( \frac{|tu_1(x_2 + h) - tu_1(x_2)|}{h^\alpha} \right)^\alpha \\ & \leq |t|^\alpha \|u_3\|_{\dot{C}^\alpha} \|u_1\|_{\dot{C}^\alpha}^\alpha. \end{aligned}$$

- c) Dado  $\varepsilon > 0$ , consideremos que  $u_i$  son funciones periódicas tales que en la bola  $B(0, \varepsilon)$  coinciden con la función  $g(x) = |x|^\alpha$ . Entonces,  $\forall t, \forall x_1, x_2$  tales que  $x_1 - tu_1(x_2) \in B(0, \varepsilon)$  se tiene:

$$u_3(x_1 - tu_1(x_2)) = |x_1 - t|x_2|^\alpha|^\alpha.$$

Tomemos  $x_1 = 0$ , entonces:

$$u_3(-tu_1(x_2)) = |t|^\alpha |x_2|^{\alpha^2}.$$

A tiempo cero, la función se anula y, por tanto, es  $C^\infty$ ,  $\forall x_2 \in B(0, \varepsilon)$ ,  $x_1 = 0$ . No obstante, suponiendo  $t > 0$  y siendo  $x_2 = 0$ , veamos si  $u$  verifica la condición de Hölder para algún  $\beta \in (0, 1)$ :

$$\frac{|u(h) - u(0)|}{|h|^\beta} = \frac{|t|^\alpha |h|^{\alpha^2}}{|h|^\beta} = |t|^\alpha |h|^{\alpha^2 - \beta}. \quad (5.4)$$

La expresión (5.4) tiende a infinito cuando  $h \rightarrow 0$  si, y sólo si,  $\beta > \alpha^2$ , con lo que  $u \notin C^\beta \forall \beta > \alpha^2$ .

□



# Bibliografía

- [1] A.J. MADJA, A.L. BERTOZZI, *Vorticity and Incompressible Flows*. Cambridge texts in applied mathematics, 27. Cambridge University Press, Cambridge, New York, 2001.
- [2] L.C. EVANS, *Partial differential equations* Providence, R.I. : American Mathematical Society, 1998.
- [3] D. GILBARG, N.S. TRUDINGER *Elliptic partial differential equations of second order*. Berlin : Springer, 2001.
- [4] STUART, J. T., *Stability problems in fluids*. Mathematical Problems in the Geophysical Sciences, Vol. 13 of Lectures in Applied Mathematics Series, American Mathematical Society, Providence, RI, (1971), 139-155.
- [5] T. DOMBRE, U. FRISCH, J. GREENE, M. HENON, A. MEHR, AND A.J. SOWARD, *Chaotic streamlines in the ABC flows*. J. Fluid Mech. 167, (1986), 353-391.
- [6] R. DIPERNA AND A. MAJDA, *Oscillations and concentrations in weak solutions of the incompressible fluid equations*. Comm. Math. Phys., 108 (1987), 667-689.
- [7] C.BARDOS AND E.S.TITI, *Loss of smoothness and energy conserving rough weak solutions for the 3D Euler equations*. Discrete and continuous dynamical systems series, vol 3, n°2, (2010), 185-197.