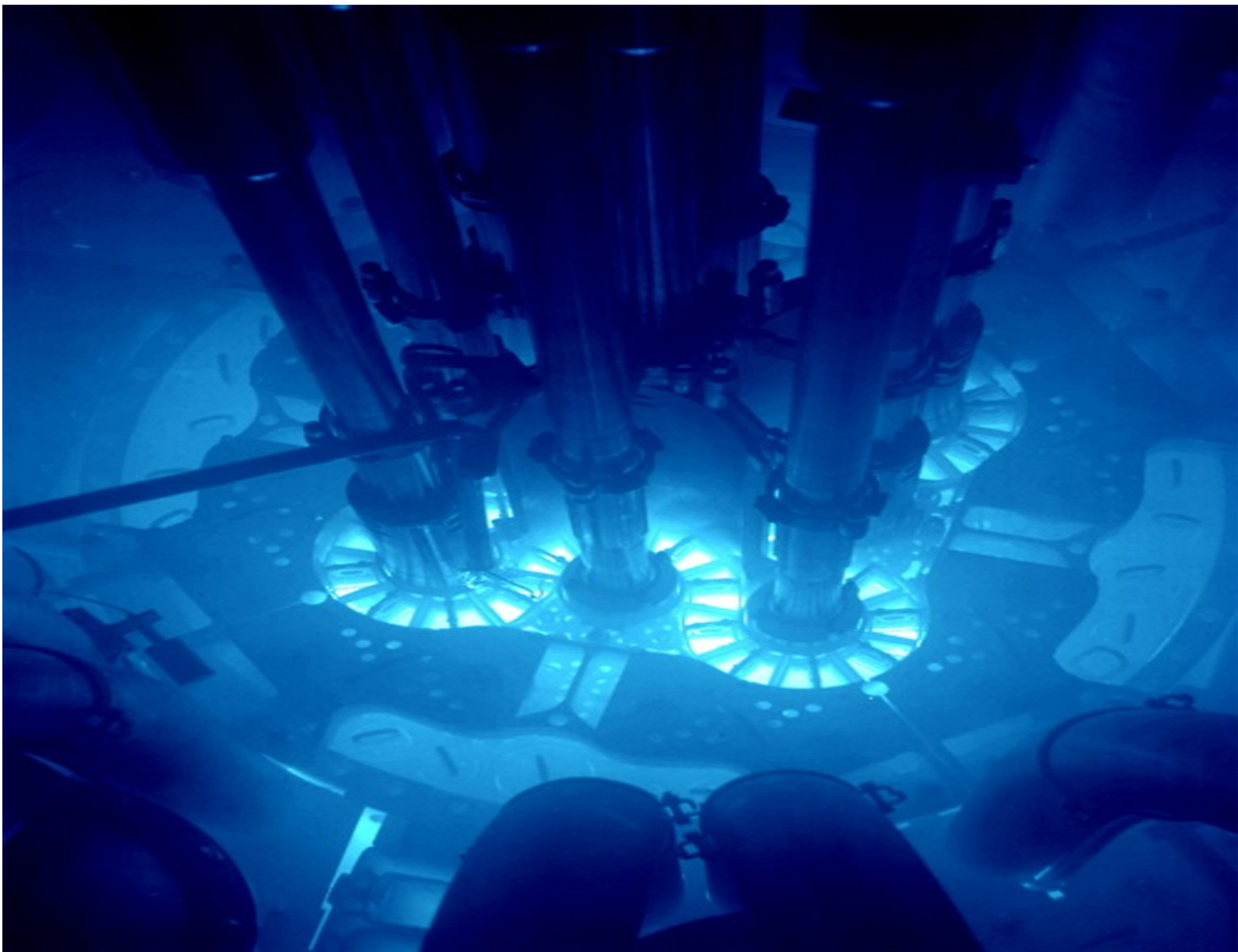


APLICACIONES DE LA RADIACIÓN CHERENKOV

Antonio Ganfornina Andrades

Tutor: D. Alberto Pérez Izquierdo



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Universidad de Sevilla, Facultad de Física 2016-2017
Departamento de Electrónica y Electromagnetismo



Índice general

1. Introducción histórica	1
2. Fundamento teórico	7
2.1. Descripción cualitativa	7
2.2. Problema original de Frank-Tamm	11
2.2.1. Consideraciones previas	11
2.2.2. Resolución analítica	12
2.2.3. Campos y potenciales electromagnéticos	17
2.2.4. Fórmula de Frank-Tamm	20
2.3. Medios dispersivos	26
2.3.1. Modelo dispersivo	27
2.3.2. Influencia de la parte imaginaria	28
2.3.3. Difracción y dispersión	31
2.4. Correcciones de la teoría cuántica	32
3. Resultados numéricos	35
3.1. Índice de refracción constante y β variable	35
3.2. Índice de refracción dependiente de la frecuencia y β constante	36
3.3. Frenado de partículas por radiación Cherenkov	38
4. Aplicaciones	41
4.1. Experimento original de Cherenkov	41
4.2. Detectores de radiación Cherenkov	42
4.3. Efecto Smith-Purcell	45
4.4. Radiación de Cherenkov inversa	46
Bibliografía	51

Dedicado a mis padres, que me acompañaron en las horas de soledad necesarias para realizar este proyecto. A Don Alberto Pérez Izquierdo, por haberme dado la magnífica oportunidad de llevarlo a cabo. Y en especial para quienes recuerdo gratamente con el siguiente poema:

*“Aunque mucho se ha gastado, mucho queda aún;
y, a pesar de que no tenemos ahora el vigor que
movía la tierra y los cielos, lo que somos, somos:
un espíritu ecuánime de corazones heroicos, debilitados
por el tiempo y el destino, pero con una voluntad decidida
para esforzarse, buscar, encontrar y no rendirse.”*

Ulysses - Lord Tennyson

Capítulo 1

Introducción histórica

La radiación de Cherenkov, también conocida como radiación de Vavilov-Cherenkov, es uno de los fenómenos más destacados que se descubrieron en el siglo XX y su historia aún llena de orgullo a los físicos rusos, ya que en este país fue descubierta, estudiada y explicada. Esta tiene lugar cuando una partícula cargada se mueve en un medio con una velocidad v mayor que la velocidad de la luz en dicho medio c_n , donde $c_n = c/n$ siendo c la velocidad de la luz en el vacío y n el índice de refracción del medio material considerado.

En la tarea de formar una imagen mental de dicho fenómeno, resulta conveniente señalar su análogo acústico, que ya era conocido desde mediados del siglo XIX y que fue descrito y captado en una serie de hermosas fotografías por el científico austriaco Ernst Mach. En efecto, un proyectil a una velocidad superior a la velocidad del sonido en el aire da lugar a una onda choque cónica, denominada cono de Mach, con su vértice situado aproximadamente en la posición del proyectil.

Sin embargo, la historia de la radiación de Cherenkov comienza propiamente a finales del siglo XIX. Momento en el que, a raíz de las ecuaciones de Maxwell, se establecen los cimientos de la teoría electromagnética. Estas ecuaciones predicen que una carga eléctrica con aceleración emite radiación, es decir, ondas electromagnéticas que se propagan a la velocidad luz, lo cual fue corroborado por Heinrich Hertz en 1886, desencadenando una revolución en las comunicaciones con el diseño de antenas y el estudio del envío y recepción de señales inalámbricas, cuyo legado continúa hasta nuestros días. Tanto las ecuaciones de Maxwell como los experimentos de Hertz se mostraron muy concluyentes, para generar radiación una carga eléctrica debe experimentar un cambio en su velocidad.

Y es aquí donde tiene lugar el primer punto de inflexión de nuestra historia. En 1889, Oliver Heaviside, físico, erudito, matemático y caballero de la Royal Society, se planteó (tras reformular en la notación vectorial actual las ecuaciones de Maxwell) si una carga eléctrica podría emitir radiación sin acelerar, esto es, desplazándose a velocidad constante [1]:

La pregunta que ahora se sugiere es: ¿Cuál es el estado de las cosas cuando $u > v$? Es evidente, en primer lugar, que no puede haber, en absoluto, perturbación alguna delante de la carga en movimiento. En segundo lugar, teniendo en cuenta que las ondas esféricas emitidas por una carga en su movimiento a lo largo del eje z se propagan con una velocidad v , el lugar geométrico de sus frentes es una superficie cónica con vértice en la misma partícula cargada, cuyo eje es el eje z y cuyos semiángulo θ viene dado por $\text{sen}(\theta) = v/u$.

Donde u y v son las velocidades de la partícula cargada y la velocidad de la luz en el medio, respectivamente. Sin embargo, estas ideas fueron expuestas antes del advenimiento de la relatividad especial, en una época donde el electrón ni siquiera había sido descubierto. Por estos motivos, la idea de Heaviside, junto con su contribución al estudio de este problema, cayó injustamente en el olvido (de hecho sus avances no volvieron a aparecer hasta 1974 tras una extensa labor de búsqueda de manos de Kaiser y Tyapkin).

Años mas tarde (1901), Lord Kelvin, en su artículo *Nineteenth Century Clouds over the Dynamical Theory of Heat and Light* [2] escribió:

Si la velocidad uniforme final del átomo excede la velocidad de la luz, por pequeño que sea este exceso, se produce una onda cónica no periódica equi-volumétrica de acuerdo a los mismos principios que para el sonido, tal como se ilustran en las hermosas fotografías de Mach [...]. El semiángulo vertical del cono, ya sea en aire o en éter, es igual al ángulo cuyo seno es el cociente entre la velocidad de la onda y la velocidad del objeto en movimiento.

Con las investigaciones de Heaviside olvidadas y la sugerencia de Kelvin ignorada, el panorama no era nada esclarecedor. Pese a sus contribuciones, y sin caer en la falacia propia un argumento de autoridad, ¿cómo pudo ser esto posible? ¿Cómo pudo la comunidad científica ignorar estas contribuciones? Si bien a día de hoy sabemos que es posible establecer una cierta analogía entre el efecto Vavilov-Cherenkov y el cono de Mach mencionado

previamente, a principios del siglo pasado esto resultaba realmente difícil de justificar, puesto que se consideraba que la luz se propagaba en un medio llamado éter al cual se le atribuían una serie de propiedades elásticas bastante peculiares. Dicho en otros términos, cabía dentro de la naturalidad del pensamiento científico de la época tratar de buscar una analogía entre las ondas en el éter y las ondas elásticas en un medio material, pero no había razón alguna para analizar el movimiento de las partículas en un medio denso, en tanto que el movimiento de un átomo en dichas circunstancias no parecía físicamente realista.

Mientras tanto, el físico alemán Arnold Sommerfeld, supervisor doctoral de figuras tan ilustres como Heisenberg, Pauli o Bethe, se planteó qué ocurriría si una partícula cargada pudiese moverse más rápido que la luz. Fue entonces, en el año 1904, cuando encontró que un electrón superlumínico emitiría radiación [3], incluso a velocidad constante, tal y como había planteado Heaviside años atrás. Y no fue hasta 1905, el famoso año maravilloso de Einstein, en el que la conclusión de este problema siguió los mismos cauces que antaño con la llegada de la teoría de la relatividad especial que estableció que nada puede moverse más rápido que la luz. Los estudios de Sommerfeld y Heaviside acabaron compartiendo la misma estancia en el olvido.

Sin embargo, hay un asunto mucho más intrigante en esta historia. En plena revolución de la física teórica, los laboratorios se encontraban inmersos en una apasionante época de descubrimientos. Y es aquí donde el afamado matrimonio Curie entra en escena. Tanto Marie como Pierre observaron desde principios de siglo un brillo azulado en botellas con sales de radio. Entonces, la pregunta que aquí se plantea es la siguiente: ¿Por qué este tipo de radiación no fue descubierta antes de 1934 a pesar de que la emisión inducida había sido observada por Pierre y Marie Curie? Y si se permite la pregunta ¿por qué este radiante matrimonio no consideró este hecho fascinante? Lo cierto es que el fenómeno de la radioactividad mantuvo a ambos demasiado ocupados como para adentrarse en un estudio más profundo de este extraño y misterioso brillo azulado que atribuyeron, erróneamente, al fenómeno de la luminiscencia [3]. Llegados a este punto, pudiera parecer que cualquier atisbo de esperanza por comprender ese enigmático brillo azul estaba perdido, pues algunos estudios posteriores fueron perdiendo interés en dicho fenómeno. Pero con el amanecer llegan los primeros rayos de luz y como se cita en la obra magna de Tolkien: *El amanecer es siempre una esperanza para el hombre.*

Y así, el mismo año que Sommerfeld imaginaba partículas mas rápidas que la luz, nacía con la llegada del alba, en la pequeña villa rural de Nízhniaya Chiglá, en la óblast de Vorónezh, Pável Cherenkov. Sin más detalles sobre su infancia y etapa adulta, se licenció en Física y Matemáticas en la Universidad de Voronezh, ejerció como profesor hasta que se trasladó en 1930 a Leningrado, donde comenzó su tesis doctoral sobre la luminiscencia activada por rayos γ en líquidos, bajo la supervisión de Sergei Vavilov. A partir de aquí la carrera de ambos siguió un ritmo ascendente. Vavilov era conocido por sus compañeros como un genio introvertido, pero al cual todos deseaban escuchar debido a su inmanente intuición física con la que era capaz de reconocer cuando un fenómeno tenía suma importancia. En 1934, se estableció el Instituto de Física Pyotr Lebedev en Moscú y Sergei Vavilov fue elegido director de dicha institución. Entre su equipo se encontraba el joven Cherenkov, un estudiante promedio, sin experiencia pero con una paciencia formidable y con una enorme capacidad de análisis, un profundo espíritu de autocrítica y una estricta rigurosidad con sus experimentos. Una combinación determinante para dejar su huella en la historia de la física.

Pasó el tiempo y Pável comentó a su supervisor la existencia de un resplandor azul al cual no daba explicación y que, al igual que el matrimonio Curie, atribuyó a la luminiscencia, pero algo en él indicaba que no estaba del todo satisfecho con esa conclusión, en tanto que le expresó a Vavilov que había algo extraño y cautivador en este tenue brillo azulado. Sergei, intrigado, comprobó que dicho fenómeno había sido observado años antes, pero nadie lo había estudiado en profundidad. Por lo que tras ello, guiado por la intuición que tanto lo caracterizaba, pidió a su estudiante determinar todas las propiedades de esa luz azul. Con paciencia, la más estricta rigurosidad y el formidable apoyo de Vavilov, Cherenkov llevó a cabo varios experimentos para caracterizar este tipo de radiación. Las jornadas de trabajo experimental se desarrollaron junto con arduas y acaloradas discusiones con su supervisor y varios físicos teóricos del Instituto Lebedev. En concreto con sus compañeros Ilya Tamm e Igor Frank, quienes también se interesaron por las observaciones de Cherenkov. Combinando sus esfuerzos y trabajando al unísono, emprendieron un largo camino para tratar de desentrañar y dar una interpretación del efecto medido por Cherenkov. Tras años de trabajo, Frank y Tamm desarrollaron una fórmula, que lleva sus nombres y que describía la radiación de Vavilov-Cherenkov.

La interpretación que dieron al fenómeno fue la siguiente: cuando una partícula eléctricamente cargada se mueve más rápido que la luz en un medio material y pierde energía, emite radiación. ¿Contradecía esto el postulado básico de la relatividad especial? En absoluto, puesto que el límite impuesto por esta es la velocidad de la luz en el vacío y este es el detalle que suele olvidarse cuando se habla de la velocidad límite de una partícula, pero resulta crucial. Tras un diseño experimental adecuado por parte de Pável Cherenkov, las características predichas por Ilya Frank e Igor Tamm fueron confirmadas. Dicha fórmula, les permitió calcular la frecuencia a la cual la radiación era más intensa y resultó estar en el rango ultravioleta y azul del espectro, explicando así el tenue brillo observado en las botellas tanto por el matrimonio Curie como por Cherenkov. El éxito de dicha colaboración entre la teoría por parte de Frank y Tamm, y la experimentación de Vavilov y Cherenkov, fue celebrado con júbilo por parte de la comunidad rusa. Sin embargo, era necesario redactar el artículo en inglés.

Por aquel entonces, Vavilov tenía 46 años y gozaba de un gran prestigio y una posición destacada, pese a ello, salvaguardó el reconocimiento de su estudiante y le propuso, en un gesto de humildad sin parangón, que escribiese el artículo en inglés como único autor explicando los experimentos realizados. Este honorable gesto siempre ha sido elogiado por parte de la comunidad científica rusa. Tal fue la magnitud del éxito, que en Rusia se sigue conociendo a dicho efecto como el efecto Vavilov-Cherenkov. Motivado por su supervisor, Cherenkov escribió un breve artículo *Visible radiation produced by electrons moving in a medium with velocities exceeding that of light* [4] y lo envió a la revista Nature. Pero este fue recibido con escepticismo y rechazo. Triste y desolado, Cherenkov encontró, como no podría haber sido de otra manera, nuevamente el apoyo en Vavilov, quien lo animó para no rendirse, pues las ideas innovadoras suelen encontrar obstáculos, y en este caso la intuición de Sergei parecía indicar que estaban en presencia de una bastante grande. Volvió a intentarlo y envió su artículo a la revista Physical Review, explicando sus experimentos y observaciones, así como la confirmación de la fórmula de sus compañeros del Instituto Lebedev.

Tras publicarse dicho artículo en 1937, varios laboratorios a lo largo del mundo confirmaron sus resultados, catapultando hacia un amplio reconocimiento a Cherenkov, Frank

y Tamm. Además, Pável propuso que la fórmula de Frank-Tamm podía invertirse para determinar la velocidad de una partícula cargada en un material al medir la radiación de Cherenkov. Debido al enorme impacto de su trabajo, Cherenkov, Frank y Tamm recibieron el Premio Nobel de Física en 1958 por el descubrimiento y la interpretación del efecto Cherenkov. El noble acto de Vavilov aseguró que su estudiante recibiera el merecido crédito por su titánico esfuerzo, evitando alguna que otra complicación al Comité Nobel (ya que no más de tres personas pueden recibir el mismo premio). En su discurso, Tamm destacó el importante rol de Vavilov en el estudio y comprensión del efecto que sólo en Rusia lleva su apellido. El mismo Cherenkov siempre incluyó el nombre de su supervisor al describirlo como efecto Vavilov-Cherenkov y llamó a sus colaboradores a hacer lo mismo. No obstante, Vavilov nunca aceptó este ofrecimiento y hasta su lecho de muerte, siempre se refirió, con orgullo por su estudiante, a dicho fenómeno como el efecto o la radiación de Cherenkov.

En los años siguientes, este descubrimiento revolucionó el mundo de la física de partículas, ocupó su lugar en la rama de la astrofísica, se consideró para ciertos fenómenos ópticos y quedó plasmado en diversos métodos y aplicaciones que fueron arrojando algo de luz sobre las nuevas líneas de investigación que comenzaron a abrirse. Una luz tenue, sin duda, pero igual de extraña y cautivadora que esa otrora inexplicable luz azulada que atrajo y captó la atención (con la misma admiración que Herman Melville habla, en *Moby Dick*, en favor de los aventureros de todas las épocas y meridianos) de cuatro mentes brillantes agitadas por una atracción permanente por las cosas remotas y que adoraban surcar por mares prohibidos.



Figura 1.1: De izquierda a derecha: Pável Alekséyevich Cherenkov, Iliá Mijáilovich Frank, Ígor Yevguénievich Tamm y Serguéi Ivánovich Vavilov.

Capítulo 2

Fundamento teórico

2.1. Descripción cualitativa

El problema de la radiación producida por una única partícula cargada desplazándose a una velocidad arbitraria fue formulado por Lienard y Wiechert [5] antes del advenimiento de la teoría de la relatividad especial. Aunque suele optarse por abordar este problema desde el completo formalismo matemático, nunca resulta inapropiado hacer una introducción descriptiva [6].

Supóngase un electrón en movimiento rectilíneo uniforme a través de un medio transparente, tal que en la vecindad de su recorrido, los átomos del medio adoptarán una disposición en torno a este debido a su trayectoria. Ahora bien, en la región próxima al electrón en movimiento (punto P en el instante t), el campo eléctrico creado por la partícula deformará los átomos. Las cargas negativas de los electrones serán desplazadas hacia las cargas con mayor carga positiva del núcleo de estos átomos. El medio habrá sido, por tanto, polarizado en torno al punto P . Cuando el electrón se desplace hacia otro punto P' , los átomos recuperarán su forma original. Mientras los átomos son deformados se comportarán como dipolos elementales, con los polos de carga opuesta a la partícula en movimiento orientados radialmente y con sentido hacia afuera a la trayectoria realizada por esta. Así, cada región del medio a lo largo de la trayectoria recibe un breve pulso electromagnético. Debido a la completa simetría del campo de polarización circundante al electrón, no tendremos un campo resultante para largas distancias y por ende, no tendremos radiación. Hay, sin embargo, simetría tanto azimutal como a lo largo del eje.

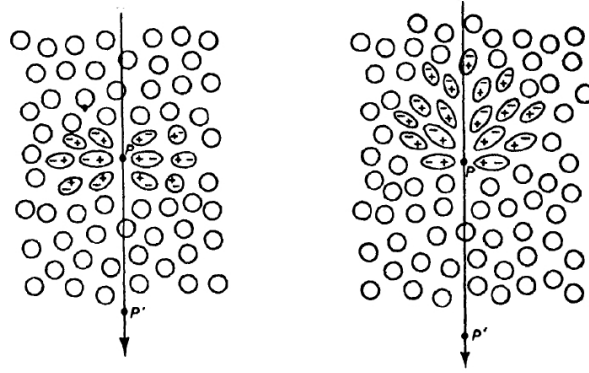


Figura 2.1: La polarización en un dieléctrico ante el paso de una partícula cargada (electrón). (a) Partícula cargada más lenta que la luz en el medio material (b) Partícula cargada más rápida que la luz en el medio material.

No obstante, si el electrón se desplaza rápidamente; esto es, a una velocidad similar a la de la luz en el medio, la imagen de nuestro fenómeno es bastante diferente a lo comentado previamente. En este caso, a lo largo del eje tendremos un campo dipolar a mayor distancia de la trayectoria de nuestra partícula, emitiéndose un breve pulso de radiación que se extenderá sobre una banda de frecuencias correspondiente a las componentes de Fourier del pulso.

De forma general, las ondículas radiadas desde cualquier punto de la trayectoria de la partícula interfieren destructivamente. Por tanto, en un punto distante, el campo se anulará. No obstante, si la velocidad de la partícula es mayor que la velocidad de fase de la luz en dicho medio cabe la posibilidad de que las ondículas estén en fase, tal que en un punto de observación lo suficientemente lejano tendremos un campo resultante. Esta radiación solo será observada bajo un ángulo θ . Empleando la construcción de Huygens, el fenómeno de la coherencia tiene lugar cuando la partícula se desplaza desde el punto inicial al final de la trayectoria en el mismo tiempo que la luz viaja desde el mismo punto inicial al punto resultante de la intersección de la recta tangente al frente de ondas y el segmento perpendicular a esta que pasa por el punto inicial. En un tiempo Δt la partícula habrá viajado una distancia $OO' = \beta c \cdot \Delta t$, siendo $\beta = v/c$ la velocidad relativa a la de la luz en el vacío. Mientras que para la luz tendremos una distancia $OO'' = (c/n) \cdot \Delta t$. De esto deducimos que:

$$\cos(\theta_c) = \frac{1}{\beta n} \quad (2.1)$$

Esta expresión se conoce como relación de Cherenkov o ángulo de Cherenkov, de la cual es posible extraer una serie de conclusiones:

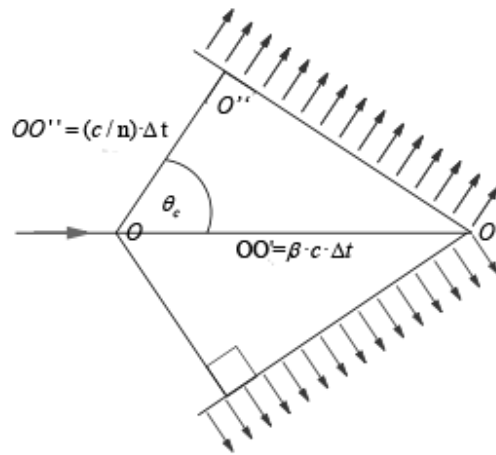


Figura 2.2: Construcción de Huygens para mostrar el ángulo de Cherenkov

- (i) Para un medio de índice de refracción n , existe una velocidad umbral $\beta_{\min} = 1/n$ por debajo de la cual no observamos radiación.
- (ii) Para una partícula ultra relativista, $\beta = 1$, el ángulo máximo de emisión viene dado por $\theta_{c,\max} = \arccos(1/n)$.
- (iii) La radiación de Cherenkov tiene lugar principalmente en el espectro visible y en las regiones próximas a este, en las cuales $n > 1$. Para regiones donde $n < 1$, como en la banda de rayos X o en la ionosfera¹, la ecuación (2.1) no puede ser satisfecha. Llegados a este punto debemos hacer notar al lector que en todo el proceso hemos supuesto un índice de refracción constante, esto es, independiente de la frecuencia.

Si extendemos las condiciones de simetría estudiadas en un solo plano a lo largo del eje en el que se desplaza la partícula, la luz originada por cada elemento del recorrido se propaga a lo largo de la superficie de un cono cuyo vértice es dicho elemento, cuyo eje coincide con la trayectoria y su semi-ángulo con esta es θ_c . Como puede verse, este fenómeno guarda cierta analogía con la onda de choque que se forma cuando un objeto sobrepasa la barrera del sonido, siendo la cantidad βn el equivalente electrodinámico al número Mach en aerodinámica.

¹Al tratarse de un gas ionizado, el índice de refracción de la ionosfera se aproxima mediante la expresión $n^2 = 1 - \omega_L^2/\omega^2$. Para frecuencias mayores que la de plasma el medio se comporta como un dieléctrico con $n < 1$. En el caso de los rayos-X, podemos escribir $n^* = 1 - \delta - i\beta$, con $0 < \delta \ll 1$.

Retomando el fenómeno óptico, deben cumplirse dos condiciones adicionales para lograr la coherencia. La primera es que la longitud de la trayectoria de la partícula en el medio debe ser grande en comparación con la longitud de onda λ de la radiación emitida, de otro modo los efectos de la difracción dominarían y la luz emitida no aparecería distribuida bajo un ángulo de Cherenkov. La segunda condición implica que la velocidad de la partícula en movimiento debe permanecer constante durante su recorrido por el medio o, para que nuestro argumento sea más consistente, la diferencia de tiempo que toma la partícula para atravesar distancias sucesivas λ , debe ser pequeña comparada con el periodo (λ/c) de la onda emitida.

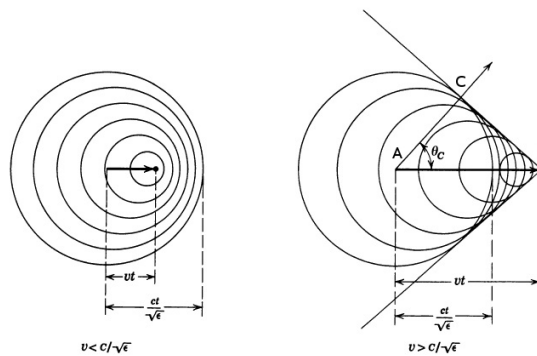


Figura 2.3: Construcción de Huygens en un dieléctrico ante el paso de una partícula cargada. A la izquierda, la radiación emitida en cada punto interfiere destructivamente y no llega a apreciarse en distancias lejanas. A la derecha, la radiación emitida interfiere constructivamente en cada punto a lo largo de la trayectoria, creándose un frente de ondas (onda de choque).

Para terminar esta introducción cualitativa que sirve a su vez de aproximación a la descripción teórica, es conveniente poner énfasis en que la radiación de Cherenkov no guarda relación con la radiación de recombinación asociada a procesos de ionización, así como tampoco debe confundirse con la radiación de frenado (Bremsstrahlung), que tiene lugar si una partícula entra en el área de influencia del campo electrostático de un núcleo atómico.

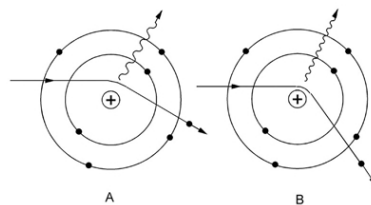


Figura 2.4: Bremsstrahlung. (a) Al pasar el electrón cerca del núcleo sufre una desviación en su trayectoria emitiendo radiación a una cierta longitud de onda (b) Cuanto menor es la distancia electrón-núcleo, la interacción es mayor y, por tanto, mayor es la desviación y la energía radiada.

2.2. Problema original de Frank-Tamm

2.2.1. Consideraciones previas

En el planteamiento original del problema de la radiación de un electrón moviéndose uniformemente en un medio dieléctrico, Ilya Frank e Igor Tamm (1937) partieron de una serie de suposiciones con el propósito de simplificar dicha tarea [6]:

- (i) El medio es considerado como un continuo, por lo tanto la estructura microscópica de este es ignorada; la constante dieléctrica es el único parámetro utilizado para describir el comportamiento de este.
- (ii) Los fenómenos de dispersión no se tendrán en cuenta, al menos en primera aproximación.
- (iii) No tenemos en cuenta la fuerza de Abraham-Lorentz.
- (iv) Se asume que el medio es un dieléctrico perfecto e isótropo, por lo que la conductividad es cero, la permeabilidad magnética $\mu = \mu_0$ y no se absorbe la radiación emitida. El índice de refracción es por tanto $n^2 = \varepsilon/\varepsilon_0$.
- (v) El electrón se mueve a velocidad constante; esto es, no se tienen en cuenta el frenado debido a la ionización y las múltiples dispersiones coulombianas.
- (vi) Tanto el medio como la longitud del trayecto son infinitos.

Bajo estas consideraciones, vamos a obtener las expresiones de las componentes de los campos electromagnéticos para deducir la fórmula de Frank-Tamm mediante el mismo procedimiento² por el cual obtuvieron, junto con Pável Cherenkov, el Nobel en Física en 1958. Pero para ello, debemos recordar una serie de conceptos básicos. En el seno de un medio material, los campos electromagnéticos producen una serie de efectos que modifican, a su vez, a estos. En términos macroscópicos, el estado de excitación electromagnética de un medio material viene dado por la polarización eléctrica \vec{P} y la magnetización \vec{M} .

²Nota al lector: Uno de los aspectos más fascinantes de la ciencia es la intrínseca posibilidad que ofrece de plantear y abordar un mismo problema desde múltiples formas alternativas. Debido a la extensión establecida para este trabajo, nos hemos ceñido, no sin comezón alguna, a resolverlo planteando las ecuaciones de Maxwell y expresar los resultados en términos de las funciones modificadas de Bessel. Si desea estudiarlo desde el formalismo de las funciones de Green [7], a través métodos de la mecánica analítica [8], mediante el desarrollo de potenciales retardados [9] o incluso ceñirse al procedimiento original de 1937 [10], le recomiendo encarecidamente consultar las referencias bibliográficas.

Por ello, es conveniente emplear campos auxiliares:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \vec{E} \quad (2.2)$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu} \quad (2.3)$$

A su vez, tendremos cargas de polarización equivalente $\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ y una corriente equivalente de imanación $\vec{j}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M}$. Si hay variación temporal tendremos una corriente de polarización $\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$. Con todo esto, estamos en condición de proceder en la resolución del problema.

2.2.2. Resolución analítica

Partimos de las ecuaciones de Maxwell en medios materiales en base a todo lo explicado:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.4)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (2.6)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.7)$$

Incluso podemos reducirlas a una forma más elegante usando las relaciones entre los campos y los potenciales:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.8)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad (2.9)$$

Cumpléndose la condición del gauge de Lorentz:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\varepsilon\mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (2.10)$$

Si aplicamos el operador gradiente a (2.10) y hacemos la derivada temporal en (2.8), cumpliéndose la propiedad conmutativa de la derivada, tenemos que:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\varepsilon\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\Phi) \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\Phi) - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad (2.12)$$

Si combinamos estos resultados, obtenemos que:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon\mu_0}\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad (2.13)$$

Multiplicando por ε y haciendo los cambios pertinentes tenemos que:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad (2.14)$$

Sustituyendo (2.9) en (2.7):

$$\frac{1}{\mu_0}[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})] = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.15)$$

Y aplicando la siguiente identidad:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (2.16)$$

Llegamos a una primera ecuación en derivadas parciales inhomogénea de segundo orden:

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} \quad (2.17)$$

Para obtener una segunda ecuación diferencial, realizamos la derivada respecto al tiempo de (2.10) y calculamos la divergencia de la ecuación (2.8):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\varepsilon\mu_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (2.18)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\nabla^2 \Phi - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \quad (2.19)$$

Combinando estos resultados y escribiéndolos en término de \vec{D} :

$$\frac{1}{\varepsilon}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = -\nabla^2 \Phi + \varepsilon\mu_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (2.20)$$

Llegamos a la segunda ecuación diferencial:

$$\nabla^2\Phi - \varepsilon\mu_0\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (2.21)$$

Con el propósito de describir un espectro de frecuencias, recurrimos a las propiedades de las transformadas de Fourier. Con todo ello, las ecuaciones de Maxwell pueden reescribirse, introduciendo el cambio $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega$, como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}_\omega = \rho \quad (2.22)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_\omega = -i\omega\vec{B}_\omega \quad (2.23)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_\omega = 0 \quad (2.24)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_\omega = \vec{j}_\omega + i\omega\vec{D}_\omega \quad (2.25)$$

Análogamente, la condición de gauge de Lorentz puede escribirse como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_\omega = -i\omega\varepsilon\mu_0\Phi_\omega \quad (2.26)$$

Y lo mismo para las ecuaciones que relacionan los campos electromagnéticos con los potenciales:

$$\vec{E}_\omega = -\vec{\nabla}\Phi_\omega - i\omega\vec{A}_\omega \quad (2.27)$$

$$\vec{H}_\omega = \frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla} \times \vec{A}_\omega) \quad (2.28)$$

Para nuestra conveniencia en el cálculo de las expresiones de los campos electromagnéticos, escribimos las ecuaciones (2.8) y (2.9) en función de \vec{A}_ω :

$$\vec{E}_\omega = -i\frac{1}{\varepsilon\mu_0\omega}\nabla(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_\omega) - i\omega\vec{A}_\omega \quad (2.29)$$

$$\vec{H}_\omega = \frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla} \times \vec{A}_\omega) \quad (2.30)$$

Recordando la suposición (iv), las ecuaciones (2.17) y (2.21) pueden escribirse finalmente como:

$$\boxed{\nabla^2\vec{A}_\omega + \varepsilon\mu_0\omega^2\vec{A}_\omega = -\mu_0\vec{j}_\omega} \quad (2.31)$$

$$\boxed{\nabla^2\Phi_\omega + \varepsilon\mu_0\omega^2\Phi_\omega = -\frac{\rho}{\varepsilon}} \quad (2.32)$$

Consideramos ahora el caso más sencillo posible. Si un electrón de carga e se mueve a través de un medio dieléctrico e isótropo a lo largo del eje z con una velocidad constante v , la densidad de corriente \vec{j} solo tendrá componente en la dirección del eje z y será igual a:

$$\vec{j}_z = ev\delta(x)\delta(y)\delta(z - vt)\vec{u}_z \quad (2.33)$$

donde δ es la función delta de Dirac. Que puede reescribirse en términos de coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) como:

$$\vec{j}_z = \frac{ev}{2\pi r}\delta(r)\delta(z - vt)\vec{u}_z \quad (2.34)$$

Calculamos la transformada de Fourier de esta expresión teniendo en cuenta que $\delta(az) = \frac{1}{|a|}\delta(z)$, por tanto:

$$\vec{j}_\omega = \frac{e}{2\pi r}\delta(r)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(\frac{z}{v} - t\right)e^{-i\omega t}dt\vec{u}_z \quad (2.35)$$

Con lo que llegamos a:

$$\vec{j}_\omega = \frac{e}{2\pi r}\delta(r)e^{\frac{-i\omega z}{v}}\vec{u}_z \quad (2.36)$$

Sustituyendo este resultado en (2.31), tenemos la siguiente relación:

$$\nabla^2\vec{A}_\omega + \varepsilon\mu_0\omega^2\vec{A}_\omega = -\frac{e}{2\pi r}\delta(r)e^{\frac{-i\omega z}{v}}\vec{u}_z \quad (2.37)$$

Tal y como hemos definido la densidad de corriente \vec{j} (y por tanto su transformada en el dominio de las frecuencias \vec{j}_ω), la expresión del potencial vector \vec{A}_ω solo va a tener componente z , dirección en la que viaja el electrón en el sistema de referencia empleado con simetría cilíndrica y va a depender de las coordenadas (r, z, ω) . Esto es:

$$A_r(r, z, \omega) = A_\phi(r, z, \omega) = 0 \quad (2.38)$$

Y tomamos como propuesta de solución para el potencial vector:

$$A_z(r, z, \omega) = u(r)e^{\frac{-i\omega z}{v}} \quad (2.39)$$

Donde $u(r)$ es una función que depende de la distancia radial de un punto P del espacio al eje z . Así pues, pasamos de tener una ecuación diferencial de segundo orden inhomogénea

en tres componentes a una única:

$$\nabla^2 A_z(\omega) + \varepsilon\mu_0\omega^2 A_z(\omega) = -\frac{e\mu_0}{2\pi r}\delta(r)e^{\frac{-i\omega z}{v}} \quad (2.40)$$

Sustituyendo la solución propuesta en (2.40), llegamos a:

$$\nabla^2(u(r)e^{\frac{-i\omega z}{v}}) + \varepsilon\mu_0\omega^2 u(r)e^{\frac{-i\omega z}{v}} = -\frac{e\mu_0}{2\pi r}\delta(r)e^{\frac{-i\omega z}{v}} \quad (2.41)$$

Sabiendo que el operador laplaciano en coordenadas cilíndricas se define como:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (2.42)$$

Obtenemos la siguiente ecuación diferencial de segundo orden inhomogénea para la componente z del potencial vector:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 n^2) u(r) = -\frac{e\mu_0}{2\pi r} \delta(r) \quad (2.43)$$

Donde hemos tenido en cuenta que $\beta = v/c$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío y hemos hecho uso de la relación $(c_n/c)^2 = n^2$, siendo $c_n^2 = 1/\varepsilon\mu_0$ la velocidad de la luz en el medio material dieléctrico. Si denotamos como k_r^2 al término:

$$\boxed{k_r^2 = \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 n^2)} \quad (2.44)$$

Llegamos finalmente a una expresión que se corresponde con una ecuación de Bessel modificada inhomogénea:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - k_r^2 u(r) = -\frac{e\mu_0}{2\pi r} \delta(r)} \quad (2.45)$$

Lo que sigue a continuación fue la genialidad que les valió el premio Nobel [11]. En lugar de encontrar una solución particular de la ecuación inhomogénea y emplear las condiciones iniciales para encontrar una solución general, multiplicaron (2.45) por r e integraron, obteniendo:

$$\int_0^\infty \left(r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} - r k_r^2 u \right) dr = -\frac{e\mu_0}{2\pi} \int_0^\infty \delta(r) dr$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \left(-\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial r} - rk_r^2 u \right) dr + \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_0^\infty = -\frac{e\mu_0}{2\pi} \\
& -k_r^2 \int_0^\infty ru(r) dr + \lim_{r \rightarrow \infty} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \lim_{r \rightarrow 0} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{e\mu_0}{2\pi} \\
& \lim_{r \rightarrow 0} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{e\mu_0}{2\pi}
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Las soluciones a la ecuación (2.45) que satisfacen (2.46) son:

$$u(r) = \frac{e\mu_0}{2\pi} K_0(k_r r) \tag{2.47}$$

Donde $K_0(k_r r)$ es la función modificada de Bessel de segunda especie de orden cero.

2.2.3. Campos y potenciales electromagnéticos

Tras resolver la ecuación de Bessel modificada, obtenemos la expresión para el potencial escalar y vector en el dominio de las frecuencias:

$$A_z(r, z, \omega) = \frac{e\mu_0}{2\pi} K_0(k_r r) e^{-\frac{i\omega z}{v}} \tag{2.48}$$

Despejando de (2.26) el potencial escalar:

$$\Phi_\omega = i \frac{1}{\varepsilon \mu_0 \omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_\omega \tag{2.49}$$

Obtenemos la expresión de éste:

$$\Phi(r, z, \omega) = \frac{e\mu_0}{2\pi v \varepsilon} K_0(k_r r) e^{-\frac{i\omega z}{v}} \tag{2.50}$$

En virtud de estos resultados, ya estamos en disposición de calcular los campos electromagnéticos (realmente nos hubiera bastado con \vec{A}_ω):

$$\vec{E}_\omega = -i \frac{1}{\varepsilon \mu_0 \omega} \nabla (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_\omega) - i\omega \vec{A}_\omega \tag{2.51}$$

$$\vec{H}_\omega = \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_\omega) \tag{2.52}$$

Empleando (2.38), (2.39) y (2.48), por la definición del rotacional:

$$H_\omega^\phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} \vec{u}_r - \frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{u}_\phi \quad (2.53)$$

Llegamos a la expresión para el campo magnético:

$$H_\omega^\phi = \frac{e|\omega|}{2\pi v} \sqrt{1 - \beta^2 n^2} K_1(k_r r) e^{-\frac{i\omega z}{v}} \quad (2.54)$$

En donde hemos empleado las propiedades de las funciones de Bessel modificadas de segunda especie. Para llegar a las expresiones del campo eléctrico desarrollamos la expresión (2.49):

$$E_\omega^r = \frac{e|\omega|}{2\pi\epsilon v^2} \sqrt{1 - \beta^2 n^2} K_1(k_r r) e^{-\frac{i\omega z}{v}} \quad (2.55)$$

$$E_\omega^z = \frac{-|\omega|e}{2\pi\epsilon v^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) K_0(k_r r) e^{-\frac{i\omega z}{v}} \quad (2.56)$$

Como estamos interesados en conocer el comportamiento en distancias lejanas, es conveniente introducir la forma asintótica de la función $K_\nu(k_r r)$ [8]:

$$K_\nu(k_r r) \propto \sqrt{\frac{\pi}{2k_r r}} e^{-k_r r} \left(1 + O\left(\frac{1}{k_r r}\right)\right) \quad (2.57)$$

Llegados a este punto es importante distinguir dos posibles casos:

- (i) Si $\beta n < 1$, entonces k_r es un número real y, por tanto, el potencial vector representa una onda evanescente en la dirección radial.
- (ii) Si $\beta n > 1$, entonces k_r es un número imaginario. Por consiguiente, el potencial vector es una onda que se propaga en la dirección radial.

Este último caso es el que nos interesa, pues se corresponde con la condición necesaria para que se dé la radiación de Cherenkov, que a su vez coincide con la condición para la cual el ángulo de Cherenkov toma valores reales. Por tanto, podemos reescribir las expresiones de los campos electromagnéticos anteriormente obtenidos:

$$E_\omega^r = \frac{e}{2\pi\epsilon v} \sqrt{\frac{i\pi|k_r|}{2r}} e^{-i(|k_r|r + \frac{\omega z}{v})} \quad (2.58)$$

$$E_{\omega}^z = \frac{-e}{2\pi\epsilon v} \sqrt{\frac{i\pi|k_r|(\beta^2 n^2 - 1)}{2r}} e^{-i(|k_r|r + \frac{\omega z}{v})} \quad (2.59)$$

$$H_{\omega}^{\phi} = \frac{e}{2\pi} \sqrt{\frac{i\pi|k_r|}{2r}} e^{-i(|k_r|r + \frac{\omega z}{v})} \quad (2.60)$$

Las ondas electromagnéticas representadas por estas tres últimas expresiones tienen, localmente, las mismas propiedades que las ondas planas. De forma más específica, tal y como se muestra en la siguiente figura, en el frente de ondas, los vectores del campo eléctrico y magnético son perpendiculares entre si y al vector de onda \vec{k} , en la dirección en la que se propaga la onda.

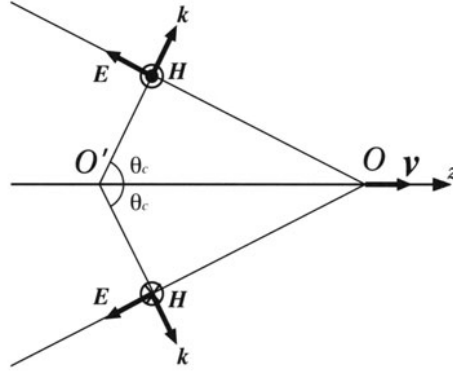


Figura 2.5: Propiedades locales de los campos electromagnéticos producidos por la radiación de Cherenkov.

Donde la dirección de la onda vendrá dada por el vector de onda \vec{k} , siendo esta perpendicular a \vec{E} y \vec{B} , coincidiendo con la expresión (2.1) obtenida mediante la descripción cualitativa del fenómeno.

$$\cos(\theta_c) = \frac{|E_r|}{|E|} = \frac{E_r}{\sqrt{E_r^2 + E_z^2}} = \frac{1}{((\beta^2 n^2 - 1) + 1)^{1/2}} = \frac{1}{\beta n} \quad (2.61)$$

2.2.4. Fórmula de Frank-Tamm

Para concluir el propósito inicial de este apartado vamos a calcular la energía total radiada por una partícula cargada moviéndose uniformemente por unidad de longitud, despreciando los efectos de la refracción y la difracción. La radiación, para una frecuencia dada, emitida por una partícula cargada viajando una distancia d se propaga en el espacio existente entre dos conos cuyos vértices están localizados en los puntos O y O' , con el correspondiente ángulo de Cherenkov θ_c .

Por tanto [7], la energía total radiada para una frecuencia concreta se puede calcular gracias al vector de Poynting que pasa a través de la superficie anular S_0 perpendicular al correspondiente haz de Cherenkov. A su vez, esta energía es igual a la energía total que pasa a través de la superficie anular S_1 normal al eje-z. Dicho en otros términos, equivale a la que pasa a través de una superficie cilíndrica S_2 de radio r , respecto al eje-z, y de longitud l :

$$U = 2rl \int_0^\infty S_\rho d\omega = -2rl \int_0^\infty E_z^\omega H_\phi^{\omega*} d\omega \quad (2.62)$$

Donde obtenemos el integrando a partir de las ecuaciones (2.57) y (2.58):

$$\begin{aligned} & -E_z^\omega H_\phi^{\omega*} = \\ & = - \left(\frac{-e}{2\pi\epsilon v} \sqrt{\frac{i\pi|k_r|(\beta^2 n^2 - 1)}{2r}} e^{-i(|k_r|r + \frac{\omega z}{v})} \right) \left(\frac{e}{2\pi} \sqrt{\frac{-i\pi|k_r|}{2r}} e^{+i(|k_r|r + \frac{\omega z}{v})} \right) = \\ & = \frac{e^2}{4\pi\epsilon r} \left(\frac{1}{v} \sqrt{\frac{|k_r|^2(\beta^2 n^2 - 1)}{4r^2}} \right) = \frac{e^2 \omega \mu_0}{8\pi n^2 r \epsilon_0 \mu_0} \left(\frac{\beta^2 n^2 - 1}{v^2} \right) = \frac{e^2 \mu_0 \omega}{8\pi r} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) \end{aligned}$$

Llegando así a la expresión obtenida originalmente por Frank-Tamm³:

$$\boxed{U = \frac{e^2 \mu_0 l}{4\pi} \int_0^\infty \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) d\omega} \quad (2.63)$$

La fórmula de Frank-Tamm nos da cuenta de la cantidad total de energía radiada U por un electrón a través de la superficie de un cilindro de longitud l , cuyo eje está contenido en la dirección de movimiento del electrón. Siendo n el índice de refracción del medio, β es el cociente entre la velocidad de la partícula y la velocidad de la luz en el vacío y ω la frecuencia. A continuación, vamos a introducir una serie de puntos importantes que no hemos considerado, de manera intencionada, y que nos permitirán cimentar las bases necesarias para ahondar en ciertos aspectos de la naturaleza de la radiación de Cherenkov.

³En el artículo original está escrita en unidades del sistema CGS.

Permeabilidad magnética

Pese a que hemos considerado un medio dieléctrico perfecto e isótropo, de permeabilidad magnética $\mu = \mu_0$, podemos considerar el caso más general en la expresión (2.63), obteniendo así una mas completa:

$$\frac{dU}{dz} = \frac{\mu e^2}{4\pi} \int_0^\infty \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) d\omega \quad (2.64)$$

Distribución espectral

A pesar de la importancia de la expresión (2.63), la distribución espectral de la radiación puede ser expresada de diferentes maneras. Dado que la intensidad de la luz, de frecuencia $\nu = \omega/2\pi$, puede ser escrita como $U = Nh\nu$, la distribución de nuestro espectro puede escribirse como:

$$\frac{d^2U}{dzd\omega} = \frac{\mu e^2}{4\pi} \cdot \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n(\omega)^2}\right) \propto \omega \quad (2.65)$$

$$\frac{d^2U}{dzd\lambda} = \frac{\mu e^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{\lambda^3} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n(\lambda)^2}\right) \propto \frac{1}{\lambda^3} \quad (2.66)$$

$$\frac{d^2N}{dzd\omega} = \frac{\mu e^2}{4\pi\hbar} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \propto cte. \quad (2.67)$$

$$\frac{d^2N}{dzd\lambda} = \frac{\mu e^2}{2\hbar} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \propto \frac{1}{\lambda^2} \quad (2.68)$$

De todas ellas, es frecuentemente más útil expresar la intensidad de la radiación en términos del número de fotones. Por tanto, de (2.68) se deduce que:

$$N = \frac{\mu e^2 l}{2\hbar} \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right) \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \quad (2.69)$$

O bien podemos aplicar la condición de coherencia para la radiación de Cherenkov, esto es, $1/\beta n = \cos(\theta_c)$ y realizar el cambio al sistema cgs, con $\mu = 4\pi/c$, para obtener una expresión en términos más usuales dentro del campo de las múltiples aplicaciones:

$$N = \frac{2\pi e^2 l}{\hbar c^2} \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right) \text{sen}^2(\theta_c) \quad (2.70)$$

A continuación, vamos a ilustrar estos últimos resultados con un ejemplo. Consideramos un electrón con una energía de 500 keV moviéndose a través de un espesor de 1 mm

de agua. De (2.68) obtenemos que para longitudes de onda comprendidas en el rango visible del espectro electromagnético (entre 400 y 600 nm), se emiten aproximadamente 10 fotones para un electrón con dicha energía, para la cuál $\beta^2 = 3/4$. Siendo $n=1.33$, el índice de refracción del agua y el factor $e^2/\hbar c^2 = 1/137$, la constante de estructura fina.

Duración del destello

Para medios no dispersivos, el frente de ondas es infinitamente delgado y, por tanto, el pulso de luz en cualquier punto dado dentro del cono de Cherenkov tiene una duración ínfima. No obstante, en medios dispersivos, el ángulo de Cherenkov es diferente para diferentes frecuencias (longitudes de onda), por lo que la duración del destello, Δt descrito en la siguiente figura, es una función dependiente de la propagación del frente de ondas y la posición de observación con respecto a la trayectoria.

La duración del destello luminoso Δt observado a lo largo de la línea paralela al eje por el que se mueve la partícula, a una distancia r de este, viene dada por:

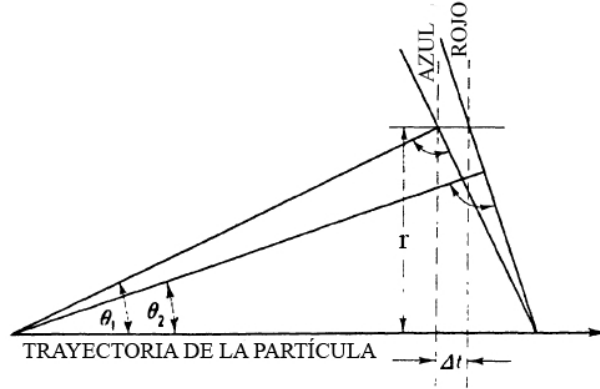


Figura 2.6: Duración del pulso de luz en un medio dispersivo

$$\Delta t = \frac{r}{\beta c} \left(\sqrt{\beta^2 n(\omega_2)^2 - 1} - \sqrt{\beta^2 n^2(\omega_1) - 1} \right) \quad (2.71)$$

Que puede reformularse como:

$$\Delta t = \frac{r}{\beta c} (\tan(\theta_2) - \tan(\theta_1)) \quad (2.72)$$

Donde ω_1 y ω_2 son las frecuencias observadas a una distancia r paralela a la trayectoria del electrón, siendo θ_1 y θ_2 los correspondientes ángulos de Cherenkov.

Por mostrar una cifra, Jelley (1958) [6] obtuvo una duración $\Delta t = 5 \cdot 10^{-12} s$ para un destello producido en el agua, para los límites del espectro visible, a una distancia de 10 cm de la trayectoria de un electrón rápido ($\beta \simeq 1$), considerando un índice de refracción promedio $\bar{n} = 1,33$ y un ángulo máximo $\theta = 41^\circ$ dado por la condición umbral para este en el agua.

Energía umbral

Para facilitar la integración de la Fórmula de Frank-Tamm, Cherenkov substituyó β y dz por los términos V y dV , que representan la energía cinética del electrón (en keV) y las pérdidas de energía de este en una sección de la trayectoria de longitud dz [12]. Para ello, empleó la relación entre la energía cinética de una partícula como la diferencia entre la total y en reposo.

$$E = V + m_0c^2 = \gamma m_0c^2 \quad (2.73)$$

Donde:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.74)$$

Por tanto, (2.70) puede escribirse como:

$$V = m_0c^2(\gamma - 1) = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) \quad (2.75)$$

Si despejamos β :

$$\beta^2 = 1 - \left[\frac{1}{(V/m_0c^2) + 1} \right]^2 \quad (2.76)$$

Obtenemos que para un electrón (o partícula beta), cuya masa en reposo es $m_0 = 511keV/c^2$:

$$\beta = \left[1 - \left[\frac{1}{(V/511) + 1} \right]^2 \right]^{1/2} \quad (2.77)$$

Por consiguiente, el valor de β dependerá de la energía cinética de los electrones, es decir, tendremos partículas más veloces cuanto mayor sea su energía.

Como se ha comentado anteriormente, la velocidad de fase de la partícula es un parámetro crítico en la producción de fotones de Cherenkov en un medio de índice de refracción n . Volviendo a la condición necesaria para tener radiación de Cherenkov, esta tendrá lugar

cuando $\beta n > 1$. Consecuentemente la energía de la partícula, dependiente de su velocidad de fase, es un factor crítico. Por tanto, existe una energía umbral (mínima) que debe alcanzarse en un medio material antes de que se produzca la radiación de Cherenkov. Si imponemos el valor crítico $\beta = 1/n$ y despejamos V de la expresión (2.77):

$$E_{th} = 511keV \left[\left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^{-1/2} - 1 \right] \quad (2.78)$$

De forma más general, para cualquier partícula:

$$E_{th} = m_0c^2 \left[\left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^{-1/2} - 1 \right] \quad (2.79)$$

En la siguiente tabla se ilustra como la energía umbral para una partícula concreta disminuye al incrementar el índice de refracción del medio material, así como la dependencia proporcional de esta con la masa de la partícula. Por tanto, es posible caracterizar partículas de diferentes energías (o masas) mediante la selección adecuada de un medio material de índice de refracción n . Algunas aplicaciones prácticas relacionadas con este punto serán discutidas más adelante en el capítulo dedicado a estas.

Medio material	Índice de refracción n	Energía umbral (MeV)		
		Electrón	Protón	Muón
Aire	1,0002926	20,62	37857,5	4260,6
Agua	1,3330	0,262	480,7	54,1
Vidrio	1,52	0,168	307,6	34,6
Cuarzo	1,544	0,160	293,2	33,0
Diamante	2,42	0,050	92,1	10,4

Cuadro 2.1: Energía umbral en MeV para la producción de emisión de radiación de Cherenkov en medios materiales de diferente índice de refracción.

Límites del espectro de energía

Sin embargo, hemos dejado (de manera intencionada) para concluir esta sección el que quizás es el detalle más interesante de todos. Si uno examina con un poco de detenimiento, tanto la fórmula (2.63) como la (2.64), consideran un índice de refracción constante, esto es n es independiente de la frecuencia ω . Esto nos conduce a que el integrando no converge.

$$U = \frac{e^2\mu_0 l}{4\pi} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) \int_0^\infty \omega d\omega \quad (2.80)$$

Este contratiempo puede solucionarse invocando el argumento físico de que un medio real siempre es dispersivo, es decir, $n = n(\omega)$. No obstante, esta condición es necesaria pero no suficiente para que se produzca la emisión de radiación aquí estudiada. Dado que estamos operando para el caso $\beta n > 1$, la radiación de Cherenkov estará restringida a aquellas bandas de frecuencia para las cuales se cumpla la condición de una cota para la cual:

$$\boxed{n(\omega) > \frac{1}{\beta}} \quad (2.81)$$

Nótese que para $\beta \simeq 1$ (partículas ultra relativistas) la región en donde se verifica esta desigualdad es más amplia. Dicho en otros términos:

$$\boxed{v > \frac{c}{n(\omega)}} \quad (2.82)$$

Siendo esta es la demostración formal de que la velocidad de una partícula debe ser mayor que la velocidad de fase de los campos electromagnéticos a una frecuencia ω para tener emisión de radiación de Cherenkov.

Este hecho no constituye, en absoluto, una violación del segundo postulado de la teoría especial de la relatividad, propuesta por Einstein (1905), por dos motivos:

- (i) La desigualdad (2.82) hace referencia a la velocidad de la luz en el medio, no a la del vacío.
- (ii) El segundo postulado se restringe a la velocidad de grupo, responsable de la propagación de la información.

Un detalle importante a comentar es que habríamos obtenido la misma expresión para el espectro de radiación (2.63) si hubiésemos calculado la energía total radiada por un electrón que, partiendo del reposo, se mueve con una velocidad v , a través de una distancia l y se detiene otra vez. En este caso, la validez de la fórmula de Frank-Tamm se restringe a la condición de que la longitud del trayecto l debe ser grande en comparación con la longitud de onda λ de la radiación emitida.

Pero ante todo, no debemos pasar por alto el hecho fundamental de que una partícula que emite radiación, pierde energía y con ello su velocidad disminuye y, por tanto, el

ángulo de Cherenkov θ_c variará a lo largo del recorrido de la partícula. Así pues, la fórmula de Frank-Tamm solo será válida, como ya se ha dicho anteriormente, para aquellas secciones, de longitud l , de la trayectoria en las cuales la velocidad permanece aproximadamente constante. Sobre los aspectos aquí citados, discutiremos con mayor extensión y detalle en apartados y capítulos venideros.

2.3. Medios dispersivos

Como hemos visto anteriormente, Frank y Tamm consideraron el movimiento de una carga puntual en un medio con una permitividad eléctrica constante para, finalmente, demostrar que esta debía radiar cuando su velocidad excede la velocidad de la luz en el medio. No obstante, para una permitividad eléctrica independiente de la frecuencia, los campos electromagnéticos tienen singularidades del tipo δ en la superficie del denominado cono de Cherenkov y consecuentemente, la expresión integral para el flujo total de los campos electromagnéticos diverge. Para soslayar este problema, Frank y Tamm hicieron las transformadas de Fourier de los campos electromagnéticos e integraron el flujo de energía hasta una frecuencia máxima ω_0 .

En esta sección, una de las que más aporta al estudio teórico de la radiación de Cherenkov, examinaremos las consecuencias resultantes del movimiento uniforme de una partícula cargada en un medio dieléctrico descrito por su permitividad $\varepsilon_r(\omega)$. La radiación de Cherenkov, por tanto, estará restringida a aquellas bandas de frecuencia⁴ para las cuales $n(\omega) > 1/\beta$.

2.3.1. Modelo dispersivo

Consideremos un primer modelo [13]:

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\omega_L^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (2.83)$$

Donde ω_L es la frecuencia de plasma, siendo $\omega_L^2 = N_e e^2 / m \varepsilon_0$ (N_e es el número de electrones por unidad de volumen, m es la masa del electrón) y ω_0 la frecuencia natural (o

⁴Estas bandas de absorción son transparentes a ciertas longitudes de onda, correspondiente al visible, tales como para limitar la radiación mas allá del UV cercano. En la región de rayos X o en la ionosfera, $n(\omega)$ siempre es menor que la unidad y, en consecuencia, la radiación de Cherenkov queda descartada en este rango, mientras que para radiofrecuencias tendremos una banda pasante como en el espectro visible.

de resonancia). Esta expresión se corresponde con el modelo de Lorentz con una sola frecuencia de resonancia sin amortiguamiento y es válida cuando las longitudes de onda de los campos electromagnéticos son mucho más largas que la distancia entre las partículas del medio en el que la luz se dispersa. Llegados a este punto, resulta conveniente, estudiar el siguiente parámetro:

$$\beta_c = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_L^2/\omega_0^2}} \quad (2.84)$$

Pues desempeña un papel importante incluso teniendo en cuenta la dependencia con la frecuencia de ε . En ausencia de fenómenos de dispersión, coincide con la velocidad de la luz en el medio. Puede verse que β_c toma valores comprendidos entre $\beta_c = 0$ (para $N_e \gg 1$) y $\beta_c = 1$ (para $N_e = 0$). Estos casos límite corresponden a medios densos y enrarecidos, respectivamente. Distinguimos entonces dos regiones:

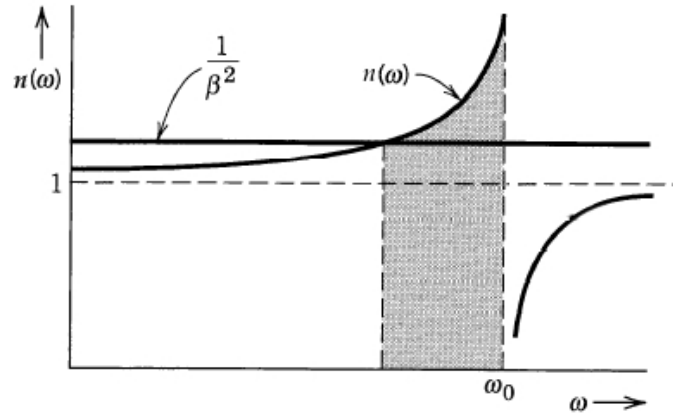


Figura 2.7: Banda de radiación de Cherenkov. La radiación es emitida solo en la banda de frecuencias sombreada, donde $\beta n > 1$.

(I) Para $\beta < \beta_c$, ($\beta^{-2} > \beta_c^{-2}$ en el gráfico siguiente), la condición para la radiación de Cherenkov se verifica para aquellas frecuencias comprendidas entre ω_x , resultado de la intersección de la condición límite $n^2 = 1/\beta^2$ y n^2 , y la frecuencia de resonancia. Es decir, $\omega_x < \omega < \omega_0$, con $\omega_x = (\omega_0^2 + \omega_L^2 \beta^2 / (\beta^2 - 1))^{1/2}$.

(II) Para $\beta > \beta_c$ ($\beta^{-2} < \beta_c^{-2}$ en el gráfico siguiente) la condición de radiación se cumple para todas las frecuencias menores que la frecuencia de resonancia. Es decir, $0 < \omega < \omega_0$.

No obstante, el modelo dado por (2.83) constituye, una propuesta un tanto simplificada de la realidad. Por ello, vamos a introducir otro, un tanto más completo [6]:

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \sum_i \frac{\omega_{L_i}^2}{\omega_{0,i}^2 - \omega^2} \quad (2.85)$$

Esta ecuación es la expresión general para un medio dispersivo con varias frecuencias naturales. Si consideramos únicamente las dos primeras frecuencias de resonancia $\omega_{0,1}$ y $\omega_{0,2}$, la ecuación (2.85) puede escribirse como:

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\omega_{L_1}^2}{\omega_{0,1}^2 - \omega^2} + \frac{\omega_{L_2}^2}{\omega_{0,2}^2 - \omega^2} \quad (2.86)$$

Para la cual se sigue un razonamiento análogo a la hora de describir las regiones en las que se presenta la radiación de Cherenkov. Considerando ahora el parámetro β_c con otra frecuencia natural $\omega_{0,2}$ y un rango de frecuencias adicional que se corresponde con las regiones clásicas (para el agua) en la que esta radiación es más intensa, es decir, en el rango del ultravioleta y el azul visible.

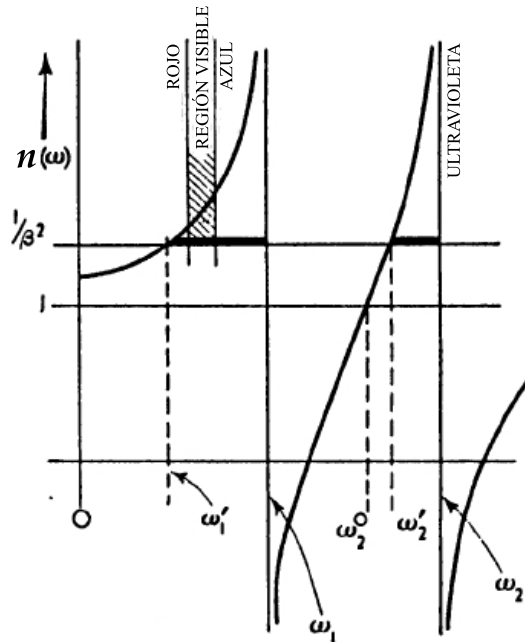


Figura 2.8: Radiación de Cherenkov con la variación del índice de refracción de un medio dieléctrico en la zona de dispersión anómala.

2.3.2. Influencia de la parte imaginaria

Hasta aquí hemos evaluado las pérdidas energéticas por unidad de longitud y su distribución a lo largo del eje z para una expresión de la permitividad eléctrica dependiente de la frecuencia que tomaba valores puramente reales. Consideremos ahora la interacción de una onda electromagnética y un átomo con una única frecuencia de resonancia ω_0 debida a los electrones ligados. Si modelamos el desplazamiento de los dipolos atómicos como osciladores armónicos amortiguados, este será consecuencia de que los dipolos oscilantes pueden perder energía debido a colisiones. El término de amortiguamiento tiene el efecto de reducir el pico del coeficiente de absorción y ensanchar la línea de absorción.

Consideremos el desplazamiento $\vec{x}(t)$ del electrón dentro del átomo sometido a una oscilación forzada por el campo externo y amortiguada, entonces tenemos que:

$$m \frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2} + m\gamma \frac{d\vec{x}(t)}{dt} + m\omega_0 \vec{x} = e\vec{E}(\vec{r}, t) \quad (2.87)$$

Este modelo se denomina *oscilador de Lorentz*, donde γ es la tasa de amortiguamiento (damping). Asumimos fuerzas isótropas y que el amortiguamiento se incluye a través de fuerzas de roce proporcionales a la velocidad del electrón. Aplicando las transformadas de Fourier a la ecuación diferencial, obtenemos que:

$$m\vec{x}(\omega)[- \omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2] = e\vec{E}(\omega) \quad (2.88)$$

Entonces

$$\vec{x}(\omega) = \frac{e\vec{E}(\omega)}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} \quad (2.89)$$

Conociendo que el momento dipolar inducido por el electrón es $\vec{p}(\omega) = e\vec{x}(\omega)$, podemos deducir la expresión de la polarización $\vec{P}(\omega)$ y con ello el vector de desplazamiento eléctrico $\vec{D}(\omega)$:

$$D = \varepsilon_0 + \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \quad (2.90)$$

Conociendo la relación $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$, llegamos al siguiente modelo:

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\omega_L^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \quad (2.91)$$

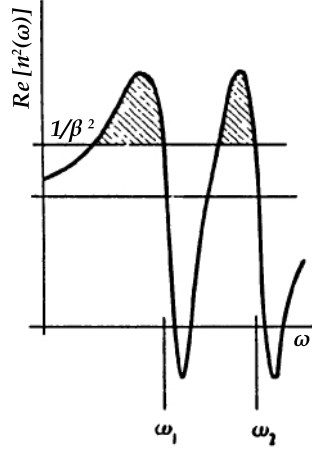


Figura 2.9: Banda de radiación de Cherenkov con amortiguamiento.

A continuación, vamos a descomponer la expresión anterior en términos de su parte real y su parte imaginaria:

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = \varepsilon_1(\omega) + i\varepsilon_2(\omega) \quad (2.92)$$

Para el desarrollo que sigue, hemos tenido en cuenta que el principio de causalidad requiere que γ tome valores reales y positivos. De donde distinguimos la parte real e imaginaria, respectivamente, de ε_r :

$$\varepsilon_1 = 1 + \frac{\omega_L^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad \varepsilon_2 = \frac{\gamma\omega\omega_L^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad (2.93)$$

En un medio dispersivo ideal en el cual $\gamma = 0$, esto es, no tiene pérdidas, la radiación de Cherenkov tendrá lugar tal hasta una cierta frecuencia de resonancia del medio, tal y como se ha descrito previamente. Así pues, la fórmula de Frank-Tamm podrá escribirse, en términos mucho más generales, como:

$$U = \frac{e^2\mu_0 l}{4\pi} \int \left(1 - \frac{Re[\varepsilon_r(\omega)]}{\beta^2|\varepsilon_r(\omega)|^2} \right) \omega d\omega \quad (2.94)$$

Esto nos conduce exactamente a la misma expresión que obtuvieron Frank y Tamm (2.63) en su trabajo original. No obstante, como ya se ha señalado, ningún medio material está ausente de fenómenos de amortiguamiento responsable de la absorción (*damping*). Por consiguiente, la curva para $\varepsilon(\omega)$ ahora no tendrá una asíntota vertical en la frecuencia de resonancia y, por tanto, la energía total radiada para la condición de radiación de

Cherenkov se extenderá a un intervalo mayor y vendrá dada por [6]:

$$U = \frac{e^2 \mu_0 l}{4\pi} \int \exp \left[-\frac{\omega}{v} \beta^2 r \cdot \text{Im}[\varepsilon_r(\omega)] \right] \left(1 - \frac{\text{Re}[\varepsilon_r(\omega)]}{\beta^2 |\varepsilon_r(\omega)|^2} \right) \omega d\omega \quad (2.95)$$

El primer factor en el integrando contiene el término de absorción, por lo que la radiación a una frecuencia ω solo se apreciará, a una distancia r , si la condición $\frac{\omega}{v} \beta^2 r \cdot \text{Im}[\varepsilon_r(\omega)] \ll 1$ se satisface.

2.3.3. Difracción y dispersión

A lo largo de este capítulo se ha ido poniendo especial énfasis en la condición necesaria para tener radiación de Cherenkov. En vista de lo explicado en este apartado correspondiente a medios dispersivos, para distintas frecuencias tendremos radiación emitida en direcciones diferentes. Para entender esto con mayor detalle, tomemos los valores n_{max} y n_{min} que satisfacen la condición $\beta n > 1$, con sus correspondientes ángulos $\theta_{c,max}$ y $\theta_{c,min}$. Por tanto, en un medio dispersivo, la radiación de Cherenkov estará confinada en la región acotada por estos dos ángulos.

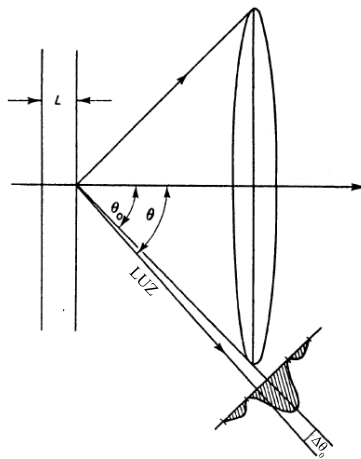


Figura 2.10: Efectos de la difracción en la distribución angular de la radiación de Cherenkov.

Llegados a este punto resulta conveniente remarcar que en todo nuestro análisis, la velocidad de la partícula se ha asumido constante. No obstante, a medida que esta emite radiación, su velocidad se reducirá gradualmente, cesando de radiar cuando la condición $\beta n \leq 1$ se satisfaga. Sin embargo, lo realmente interesante aquí es que, incluso en ausencia de este hecho, la resolución de las principales aplicaciones (contadores) viene limitada por los efectos de la difracción y la dispersión.

Para el caso idealizado de trayectorias infinitas, la anchura del cono de luz será cero. Pero si esta no lo es, el cono de radiación tendrá un espesor finito dado por un ancho de difracción $\Delta\theta \sim \lambda/L \text{sen}(\theta_c)$, siendo L la longitud finita de la trayectoria y λ la longitud de onda efectiva de la radiación⁵. Por otro lado, en su recorrido a través del medio, la partícula se ve sometida a múltiples interacciones coulombianas en el entorno de los átomos que distan de ella en un parámetro de impacto lo suficientemente pequeño, afectando a la distribución angular de la radiación, tal que para partículas ligeras la dispersión se hace mucho más notable que para partículas pesadas.

2.4. Correcciones de la teoría cuántica

En el desarrollo clásico de la teoría de la radiación Cherenkov presentado hasta esta sección, los efectos debido a la repercusión de la radiación emitida en el movimiento de la partícula han sido ignorados. Pero, cuando estos se tienen en cuenta las expresiones para la condición de radiación y la producción de energía tienen formas que difieren ligeramente de las obtenidas en la teoría original. Las modificaciones introducidas en este planteamiento son, como naturalmente cabría esperar, pequeñas comparadas con la energía cinética de la partícula. No obstante, resulta factible llegar a estas mediante el argumento de la conservación del momento y la energía, de forma similar a la descripción del efecto Compton.

Sea una partícula cargada de masa en reposo m_0 viajando a través de un medio a una velocidad constante u . Supongamos ahora que en algún punto, a lo largo de su recorrido, emite un fotón de energía $h\nu$ con un ángulo θ con respecto a la dirección original de la trayectoria. La validez de estas ecuaciones, por tanto, yace en el hecho de asumir que el momento lineal de un fotón en el medio es $nh\nu/c$ y no $h\nu/c$ (siendo n el índice de refracción). Este último experimenta una pérdida de energía, pasando a tener una velocidad v que formará un ángulo ϕ con respecto a su dirección original. De la conservación del momento tenemos que:

$$\frac{mu}{\sqrt{(1 - u^2/c^2)}} = \frac{mv}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}} \cos(\phi) + \frac{h}{\lambda} \cos \theta \quad (2.96)$$

⁵Para una descripción mucho más completa de ambos fenómenos, consulte el apartado 3.8 Diffraction and scattering effects de [6].

$$0 = \frac{mv}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}} \text{sen } \phi - \frac{h}{\lambda} \text{sen } \theta \quad (2.97)$$

A su vez, de la conservación de la energía obtenemos que:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + h\nu \quad (2.98)$$

Despejando ϕ , ν y escribiendo $\nu = c/n\lambda$, donde n es el índice de refracción del medio, llegamos a la siguiente ecuación:

$$\cos(\theta) = \frac{c}{nu} + h \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}(n^2 - 1)}{2mun^2\lambda} \quad (2.99)$$

Que puede escribirse en una forma más elegante como:

$$\boxed{\cos(\theta_c) = \frac{1}{\beta n} + \frac{\Lambda}{\lambda} \cdot \frac{n^2 - 1}{2n^2}} \quad (2.100)$$

De donde, siendo $\lambda_0 = h/mc$, se define Λ como la longitud de onda de Broglie de la partícula:

$$\Lambda = \frac{h\sqrt{1 - \beta^2}}{mu} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} \lambda_0 \quad (2.101)$$

Como puede observarse, la ecuación (2.98) difiere de la condición clásica para la radiación de Cherenkov en un valor muy pequeño para cualquier caso práctico. Utilizando los resultados del cuadro 2.1 para electrones en agua, en la condición de energía umbral de 0.262 MeV, ($\beta = 0.75$), obtenemos un valor de $\Lambda \approx 0.0021$ nm y $(\Lambda/\lambda) \approx 5 \cdot 10^{-6}$.

Mientras que se ha tenido en cuenta el cambio en el momento lineal del fotón, tal modificación no ha sido asumida para el electrón. La justificación de esto reside en el hecho de que la longitud de onda de los fotones (en la región óptica) son tan grandes, comparadas con las distancias interatómicas, que la radiación se ve influenciada por las propiedades macroscópicas del medio y además el valor de la longitud de onda de Broglie es menor que las distancias interatómicas. Por todo ello, se utilizan las expresiones relativistas ordinarias.

Llegados a este punto, resulta conveniente hablar sobre el fenómeno de la coherencia en la representación cuántica de la radiación de Cherenkov. Uno puede plantearse la siguiente pregunta ¿Cómo se definen las fases de cada cuanto tal que la coherencia se conserva? La

respuesta a este interrogante está en la incertidumbre de la fase ϕ , la cual está relacionada con una correspondiente incertidumbre con el número de cuantos N de la onda, por la expresión $\Delta N \cdot \Delta \Phi \sim 1$. Por tanto, las fases pueden ser definidas como nos plazca, en cuyo caso el número de ondículos estará completamente indeterminado. Es decir, si conocemos la intensidad total no podremos afirmar nada acerca de la posición de los cuantos de energía (ni del frente de ondas).

Empleando (2.99), Ginzburg [6], introdujo la corrección cuántica en la ecuación (2.63):

$$\frac{dU}{dz} = \frac{e^2 \mu_0}{4\pi} \int \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)} \left[1 + \frac{n^2}{4} \left(\frac{\hbar \omega}{mc^2} \right)^2 + n^2 \left(\frac{\hbar \omega}{mc^2} \right) \right] \right) \omega d\omega \quad (2.102)$$

Posteriormente, mediante la ecuación de Dirac, extendió este tratamiento cuántico a la radiación emitida por electrones no-relativistas con un momento magnético μ asociado polarizado en la dirección del eje la trayectoria, llegando a una expresión con dos términos:

$$\frac{dU}{dz} = \frac{e^2 \mu}{4\pi} \int n^2(\omega) \omega^3 \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)} \right) \left[1 + \frac{n^2}{4} \left(\frac{\hbar \omega}{mc^2} \right) + n^2 \left(\frac{\hbar \omega}{mc^2} \right) \right] d\omega \quad (2.103)$$

Donde el primero de ellos es idéntico a la ecuación anterior y el segundo aparece debido al momento magnético. Estrictamente hablando, las ecuaciones (2.102) y (2.103) solo son válidas para casos no-relativistas, si bien es posible extrapolar, con buena aproximación, este resultado a altas velocidades en medios ópticamente densos. Es interesante notar que, a diferencia del resultado clásico, en el tratamiento cuántico para medios no dispersivos, la expresiones anteriores no divergen. Asimismo, para los casos límite en los que $v \rightarrow c$, el efecto de retroceso en fotones se vuelve despreciable y la radiación emitida es idéntica a la obtenida en la teoría clásica para el caso de electrones no magnéticos. El estudio de la influencia del espín de la partícula en la polarización, la condición umbral y la radiación emitida [6], quedan fuera del propósito de este estudio.

Capítulo 3

Resultados numéricos

En este capítulo se aplicarán los conceptos desarrollados en el apartado teórico, con el propósito de representar la condición de radiación de Cherenkov para una partícula que atraviesa un medio material y estudiar la dependencia del parámetro β con la distancia recorrida por esta.

3.1. Índice de refracción constante y β variable

En las aplicaciones prácticas de la física nuclear, se trabaja con frecuencias por encima de los 10^{16} Hz, superiores a los 484-789 THz del espectro visible. Es frecuente, para este rango, tomar el índice de refracción como constante. Podemos deducir fácilmente que, para medios de índice de refracción mayor, la energía umbral necesaria para la emisión de radiación Cherenkov disminuye. Es decir, la velocidad mínima (de una partícula) que se requerirá para obtener este fenómeno se reduce.

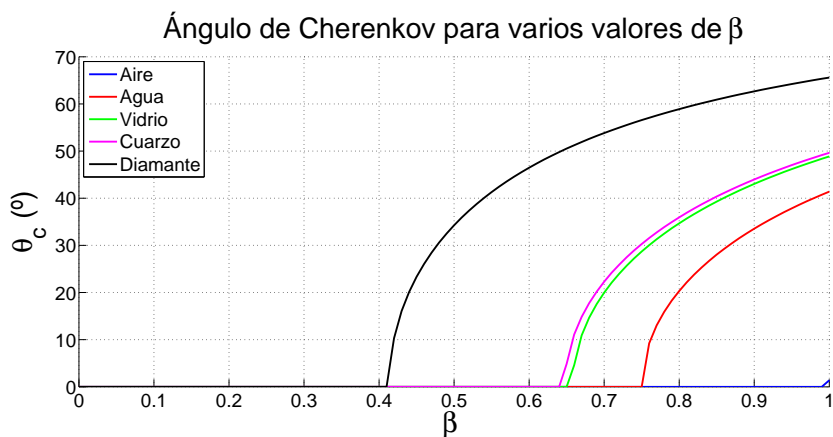


Figura 3.1: Ángulo de Cherenkov para distintos valores de β en aire ($n=1.0002926$), agua ($n=1.333$), vidrio ($n=1.520$), cuarzo ($n=1.544$) y diamante ($n=2.420$).

3.2. Índice de refracción dependiente de la frecuencia y β constante

Si nos centramos ahora en el campo de aplicaciones de la óptica electromagnética, la variación del índice de refracción con la frecuencia adquiere una especial importancia. La permitividad eléctrica relativa del medio describe un espectro para un amplio rango de frecuencias donde tienen lugar los procesos de relajación dipolar e iónica, además de la polarización atómica y electrónica en altas energías. Es en este último caso en el que vamos a centrarnos para nuestro estudio.

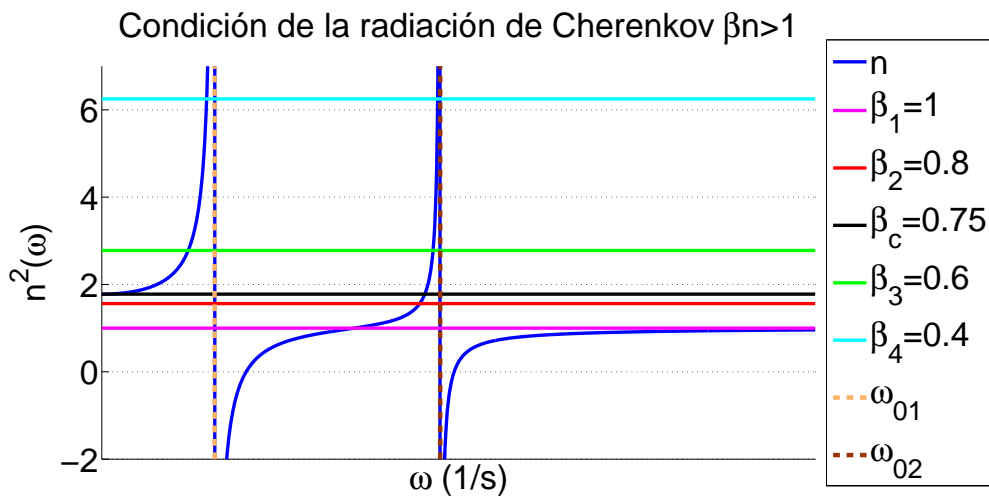


Figura 3.2: Condición de Cherenkov para distintas velocidades en un modelo sin amortiguamiento con dos frecuencias de resonancia ω_{01} y ω_{02} .

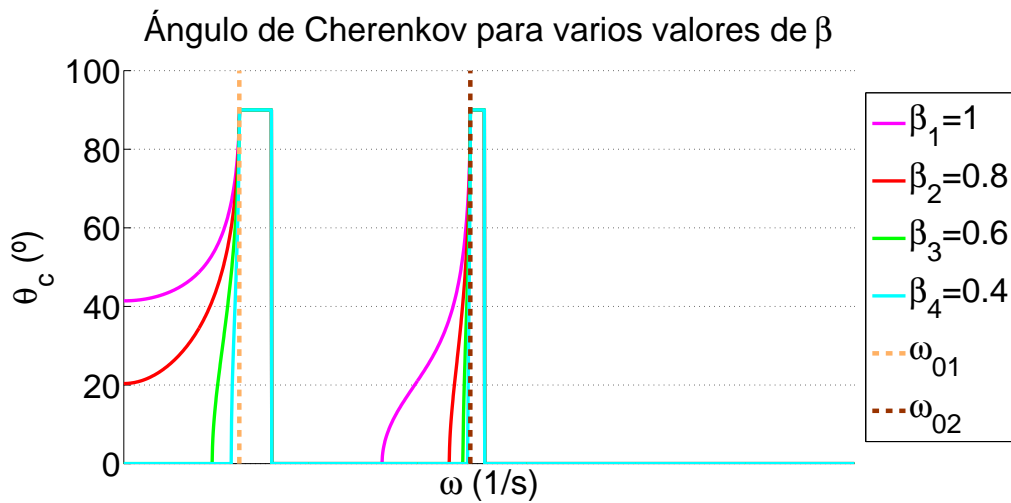


Figura 3.3: Ángulo de Cherenkov para un modelo sin amortiguamiento con dos frecuencias de resonancia ω_{01} y ω_{02} .

Si consideramos un modelo sin amortiguamiento, tanto para una como dos frecuencias de resonancia, el índice de refracción tiene un comportamiento asintótico en las frecuencias de resonancia, por lo que el ángulo de Cherenkov alcanzará un valor de $\pi/2$, esto es, los frentes de onda se desplazarán perpendiculares a la trayectoria de la partícula. No obstante, si seguimos el modelo de Lorentz teniendo en cuenta un factor de amortiguamiento, responsable de los fenómenos de absorción en un ancho de frecuencias próximos a las de resonancia, el comportamiento asintótico desaparecerá.

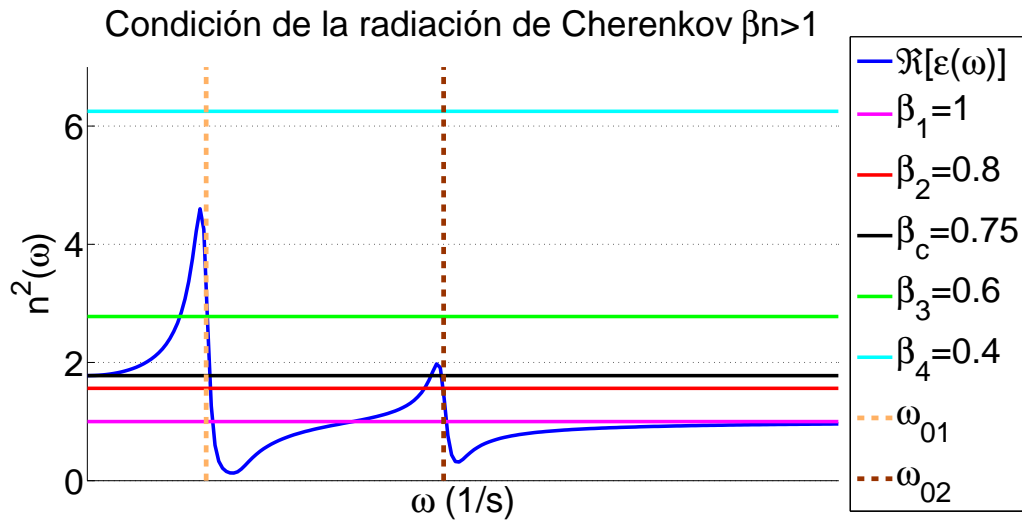


Figura 3.4: Condición de Cherenkov para distintas velocidades en un modelo con amortiguamiento con dos frecuencias de resonancia ω_{01} y ω_{02} .

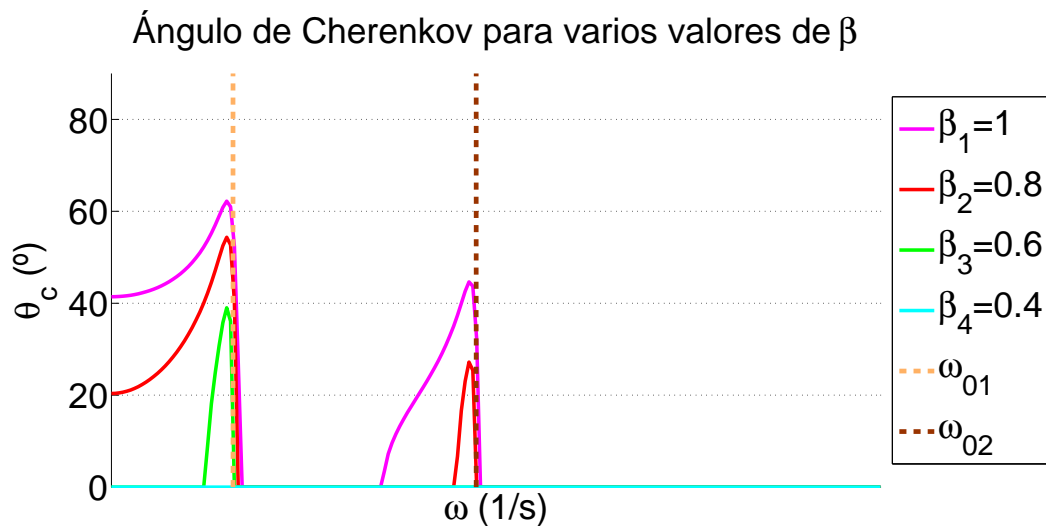


Figura 3.5: Ángulo de Cherenkov para un modelo sin amortiguamiento con dos frecuencias de resonancia ω_{01} y ω_{02} .

Y es aquí donde se observa el que es tal vez el cambio más interesante respecto al modelo anterior. Para $\omega \ll \omega_0$ y $\omega \gg \omega_0$, el medio material se puede considerar prácticamente transparente. Mientras que para $\omega \approx \omega_0$, la absorción será intensa y el ángulo de Cherenkov decaerá, de forma más o menos abrupta en función del parámetro amortiguamiento, hasta cero en las proximidades de la frecuencia de resonancia, ya que el medio tendrá un comportamiento próximo a la reflexión total, es decir, será prácticamente opaco. Limitando, así mismo, el rango de velocidades para el cual se producirá el estampido lumínico propio de este fenómeno.

Esto respondería, para el caso del agua, por qué la radiación de Cherenkov tiene ese brillo azulado. Esto es debido a que la luz emitida a la frecuencia de rayos-X o rayos γ es más penetrante que la UV, la cual cae dentro de los límites de la absorción molecular y puede ser bloqueada por ciertos materiales. En el caso del agua, existe un pico de atenuación para algún valor de la región de luz UV y dada la dependencia lineal de (2.63) con la frecuencia (y sobre todo porque el ojo humano está limitado a la región visible del espectro¹), podemos encontrar este máximo en el azul.

3.3. Frenado de partículas por radiación Cherenkov

Para concluir este capítulo, realizamos una simulación empleando un algoritmo de integración Runge-Kutta, integrado en la librería de funciones de MATLAB. Para esta tarea, hemos tomado la siguiente expresión:

$$U = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{(1 - \beta^2)}} \quad (3.1)$$

Derivando con respecto a z e igualando con la Fórmula de Frank-Tamm para la energía radiada por unidad de longitud dz , obtenemos:

$$\frac{dU}{dz} = \frac{m_0 c^2}{(1 - \beta^2)^{3/2}} \cdot \beta \frac{d\beta}{dz} = -\frac{e^2 \mu_0}{4\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n(\omega)^2}\right) d\omega \quad (3.2)$$

¹Un tema transversal de discusión bastante interesante relacionado con nuestro estudio es el hecho de que la mayoría de las formas de vida, cuyos ojos siguieron un proceso de adaptación evolutivo en el agua y fuera de ella, carecen (existen casos excepcionales, como el de la majestuosa *Odontodactylus scyllarus* o mantis marina) de visión infrarroja y ultravioleta.

Despejando $d\beta/dz$, llegamos a la siguiente expresión que utilizaremos en nuestra simulación:

$$\frac{d\beta}{dz} = -\frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{\beta m_0 c^2} \cdot \frac{e^2 \mu_0}{4\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n(\omega)^2}\right) d\omega \quad (3.3)$$

Para el caso sin amortiguamiento, se aprecia que la partícula se frena totalmente debido al comportamiento asintótico en la frecuencia de resonancia, donde el medio se vuelve *infinitamente* denso. Mientras que para el caso amortiguado, se frenan hasta una cierta velocidad y, al no verificarse la condición para la obtención de radiación de Cherenkov, continúan desplazándose con movimiento uniforme.

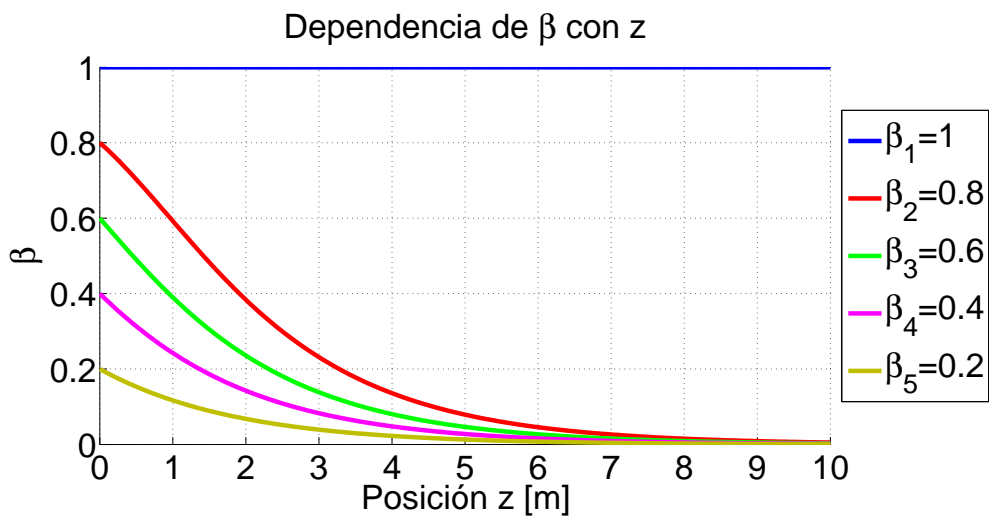


Figura 3.6: Frenado de una partícula en un medio material con una frecuencia de resonancia sin amortiguamiento para distintas velocidades iniciales.

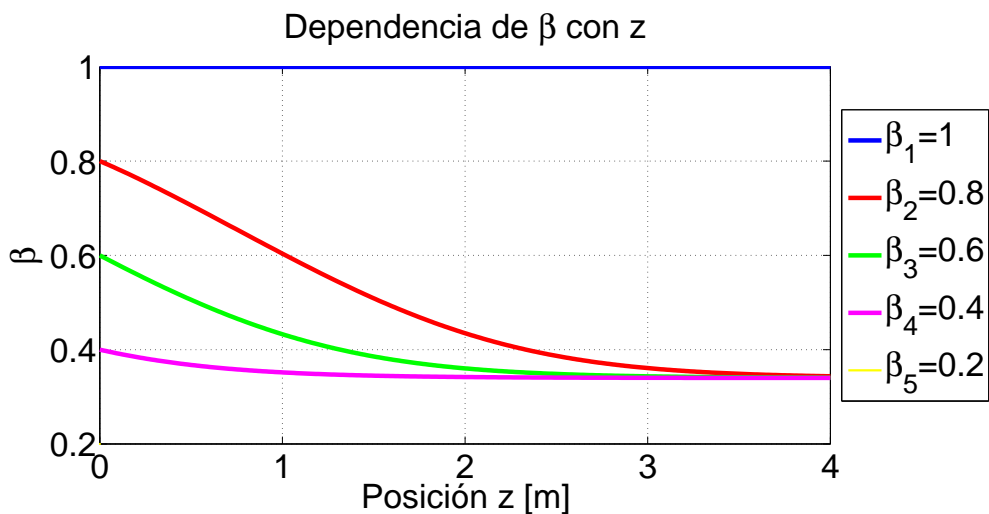


Figura 3.7: Atenuación de β con la distancia recorrida en un medio material con amortiguamiento para distintas velocidades iniciales.

Cabría hacer una serie de comentarios acerca de estas simulaciones:

(i) Las representaciones muestran cómo varía la velocidad de una sola partícula. En un reactor nuclear sumergido en agua tendrían lugar varias reacciones en cascada.

(ii) El factor m_0c^2 permite discriminar entre diversos tipos de partículas cargadas o que interaccionan con el medio material. Por lo que diseñar un experimento teniendo en cuenta este fenómeno resulta útil a la hora de detectarlas, siendo el caso más conocido el de los neutrinos².

(iii) Para frecuencias más bajas, el espectro del índice de refracción adquiere un comportamiento distinto que para altas energías. No obstante, es posible la producción de radiación Cherenkov en frecuencias de infrarrojo, e incluso para ondas de radio o microondas³.

(iv) Para el rango de frecuencias estudiado, los resultados simulados se corresponden con los esperados de un análisis dimensional de la inversa de la expresión (3.3):

$$L \sim \frac{4\pi\epsilon_0c^2}{e^2} \frac{\hbar cm_0c^2}{\hbar c\omega\Delta\omega} \sim 1\text{m} \quad (3.4)$$

Por lo que la aproximación $\beta = cte$, ampliamente usada en la bibliografía [12] para el orden de centímetros, se vuelve válida.

(v) Las pérdidas energéticas que experimenta una partícula relativista al interaccionar con la materia vienen dadas por procesos como la radiación de frenado (Bremsstrahlung), diversos procesos de ionización, la radiación de Cherenkov y ciertas reacciones nucleares (aunque estas son muy poco probables para estos casos). Todo ello es descrito por la fórmula de Bethe-Bloch [14], donde las pérdidas por radiación Cherenkov están consideradas en un término de corrección, que da cuenta de la polarización y el apantallamiento de átomos distantes de la partícula cargada, importante para altas energías y materiales densos. No obstante, la contribución a las pérdidas energéticas por radiación de Cherenkov son del orden de 1% del valor típico de las pérdidas totales para fases condensadas.

²Existen varios proyectos a largo plazo para la detección de neutrinos en la actualidad. El Super-Kamiokande consiste en un gran volumen de agua rodeado de células fotoeléctricas que detectan la radiación de Cherenkov emitida cuando un neutrino crea un electrón o un muón en el agua. De forma similar, el Observatorio de neutrinos de Sudbury (Ontario, Canadá) emplea agua pesada.

³El efecto Askaryan es similar al efecto Cherenkov, pero está restringido a ondas de radio o microondas. Es de gran interés en el estudio de materiales para detectar neutrinos de alta energía. El experimento ANITA emplea un sistema de antenas conectadas a un globo aerostático que sobrevuela la Antártida para detectar radiación de Askaryan producida por neutrinos cósmicos que viajan a través del hielo. También se ha empleado la Luna como parte del proceso de detección de neutrinos mediante la radiación de Askaryan.

Capítulo 4

Aplicaciones

En este capítulo presentaremos diversas líneas de investigación y aplicaciones prácticas de interés y, como no podría ser de otra manera, haremos especial mención al experimento original llevado a cabo por Cherenkov (1934), a partir del cuál se desarrollaron todas estas.

4.1. Experimento original de Cherenkov

En su primer experimento [15], Cherenkov empleó un montaje sencillo. Para ello insertó un pequeño frasco con 104 mg de radio en un bloque de madera con un recipiente de platino. El líquido a investigar se situó sobre la fuente radiactiva. Por otra parte, el sistema óptico consistía en un colimador, un prisma reflector y un telescopio. Permitiendo así, observar el tenue brillo cerca de la fuente. El campo de visión estaba definido por un diafragma y otros elementos ópticos tales como un prisma graduado (para medir intensidades relativas), distintos filtros para un análisis espectral y un prisma de Nicol para estudiar la polarización de la radiación.

Con el ojo acomodado en la oscuridad, Cherenkov midió las intensidades relativas de la luz emitida para varios líquidos puros, obteniendo como principal conclusión que la distribución espectral variaba poco de un líquido a otro y que la luz estaba concentrada en el azul y el violeta. Además, la luz no se atenuaba al añadir compuestos que producían tal efecto en caso de fluorescencia y la temperatura no afectaba a la intensidad de la luz radiada. Asimismo, se observó una polarización parcial que parecía indicar que el vector del campo eléctrico estaba orientado en la misma dirección de radiación γ .

Algún tiempo después, Cherenkov sugirió que estos efectos podía deberse a la radiación de frenado emitida por electrones, o Bremsstrahlung, pero esta idea fue desechada rápidamente, por lo que comenzó una serie de nuevos experimentos. En 1936 tras investigar la influencia del campo magnético en la radiación usando una fuente de rayos γ y agua, llegó a la conclusión de que debía estar relacionada con la cascada de electrones secundarios producidos en el medio por la radiación γ . Un año después, se comprobó que dicho fenómeno podía ser observado con rayos β y se corroboró experimentalmente la predicción teórica de Frank y Tamm, ese tenue brillo azul presentaba una asimetría con respecto a la dirección de la radiación que excitaba el medio.

Empleando una fuente γ de colimación pobre y un medio extenso, se dedujo la relación experimental $\cos(\theta_c) = 1/\beta n$. Para ello se empleó una fuente de radiación γ equivalente a 794 mg de radio dispuesta sobre el lado de un espejo cónico que contenía una lámina delgada de vidrio rellena con agua o benceno. La luz emitida a través de los lados de la lámina, se reflejaba y enfocaba gracias a una serie de lentes sobre una placa fotográfica. Cherenkov concluyó su trabajo con una serie de experimentos de una naturaleza más completa con el objetivo deliberado de comprobar la teoría de sus compañeros.

4.2. Detectores de radiación Cherenkov

Los contadores Cherenkov [16] son unos dispositivos que se basan en la radiación de Cherenkov para detectar partículas cargadas o rayos γ .

Como hemos visto, si una partícula cargada se desplaza en un medio con una velocidad v mayor que la velocidad de fase de la luz en el medio, se dará la condición para la emisión de la radiación de Cherenkov. La cantidad de fotones emitidos viene dada por la relación (2.70):

$$N = \frac{2\pi e^2 l}{\hbar c^2} \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \text{sen}^2(\theta_c)$$

A diferencia del contador de centelleo (el cual detecta las partículas con cualquier velocidad y la radiación observada es isotrópica y tiene un retardo), la luz en el contador de Cherenkov solo se observa para partículas con $v \geq c/n$, esto es $\beta \geq 1/n$. Esta emisión de radiación tiene lugar al mismo tiempo que el paso de las partículas, formando un ángulo θ con la trayectoria.

Este ángulo y la cantidad de radiación emitida aumentará por encima de cierta velocidad umbral β_c (como se ha visto en el fundamento teórico). A modo de comparativa, la cantidad de luz emitida en un contador de Cherenkov es un pequeño porcentaje de un pulso de luz obtenidos en un contador de centelleo.

Los componentes básicos de un contador de Cherenkov son:

- (i) Una sustancia transparente (medio material) de índice de refracción n .
- (ii) Un sistema óptico formado por lentes que focalizan la luz.
- (iii) Uno o más fotomultiplicadores, que convierten un pulso de luz en una señal eléctrica.

El medio material puede ser un sólido, líquido o un gas, pero debe ser transparente y tener un nivel bajo de centelleo, debido al ruido de fondo que introduce. Para experimentos convencionales se utilizan vidrios orgánicos ($n = 1.5$), vidrios de plomo ($n = 1.5$) y agua ($n = 1.33$).

Los contadores de Cherenkov son ampliamente usados en experimentos con acelerado-

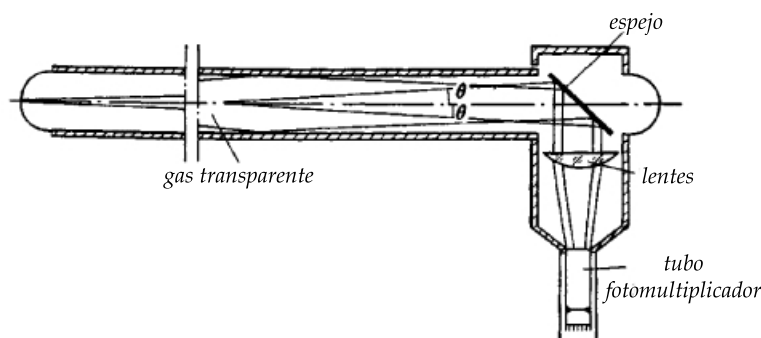


Figura 4.1: Esquemático de un contador de gas Cherenkov de umbral utilizado con el acelerador de partículas de 70 GeV en el Instituto de Física de altas energías (Protvino, Rusia).

res de partículas, pues permiten seleccionar aquellas con una velocidad específica. Con el avance tecnológico, el rango de energías empleadas ha aumentado en las últimas décadas con lo que los contadores de gas Cherenkov, para detectar partículas ultra-relativistas, han cobrado especial importancia. Para un gas, tanto el ángulo θ_c como la intensidad de la energía radiada (por unidad de longitud) es pequeña. No obstante, la duración del destello luminoso es suficiente como para detectar partículas en un medio gaseoso, para

ello es necesario incrementar la longitud del tubo del contador unos 10 metros o más, pudiendo variar el índice de refracción dentro de un rango determinando en función de la presión de este.

Dentro de los contadores de radiación Cherenkov podemos distinguir tres tipos: de umbral, diferencial y de absorción total. Las características principales de los dos primeros son la eficiencia de detección y la resolución. Otra muy destacable es la enorme capacidad para distinguir dos partículas que se desplazan con velocidades similares. Un contador de umbral debería detectar las partículas con velocidades superiores a cierto valor umbral. Por lo tanto, el sistema óptico de un contador de umbral, el cual está formado por una colección de lentes y espejos, debería (si fuese posible) ser capaz de recoger toda la luz emitida en el cátodo del fototubo multiplicador.

Los contadores diferenciales detectan partículas con velocidad comprendida en un cierto rango. En su construcción convencional, se utiliza un sistema óptico para seleccionar la luz que se emite en un ángulo que se extiende entre dos ángulos θ_1 y θ_2 . Una lente o un espejo esférico colocado en la trayectoria de la radiación de Cherenkov enfoca la luz que se emite en un ángulo θ en un anillo de radio $R = f\theta$, donde f es la distancia focal de la lente o el espejo. Si un diafragma de ranura anular se coloca en el foco del sistema óptico y uno o más tubos fotomultiplicadores se colocan detrás del diafragma, se detectará la luz sólo para las partículas que se irradian en un ángulo comprendido entre ciertos límites dando lugar a una imagen sobre una placa fotográfica denominada anillos de Cherenkov. Este contador, en combinación con un sistema óptico preciso permite singularizar partículas cuyas velocidades difieren en un orden de 10^{-6} de otras. Tales contadores requieren un control estricto de la presión del gas y la formación de un haz de partículas paralelo.

Los contadores de absorción total están destinados a la detección y la espectrometría de electrones y rayos γ . En contraste con los contadores de umbral y diferenciales, en los que una partícula pierde una insignificante fracción de su energía en el medio material. Un contador de absorción total contiene una gruesa placa de material transparente, en el que un electrón o un rayo γ produce una avalancha de electrones y fotones, perdiendo la totalidad o gran parte de su energía. Como característica general, la losa es de vidrio con un alto contenido en plomo. Por hacernos una idea de ello, un electrón con una energía

de 10 GeV se detiene por completo en una losa de vidrio de plomo de un espesor de 40 cm . La cantidad de luz que es emitida en un contador de absorción total es proporcional a la energía del electrón o rayo γ iniciales. La resolución en energías, por tanto, será dependiente de la energía y viene dada por $E \sim (10\sqrt{E})$, siendo E la energía del electrón en GeV.

4.3. Efecto Smith-Purcell

La radiación Smith-Purcell, en consideración con otros fenómenos, puede entenderse como un efecto Cherenkov, dado que puede obtenerse como una generalización de este. Una prueba analítica puede verse en *On the theory of some Cherenkovian effects* [17]. Sin embargo, aquí nos remitiremos a una representación intuitiva de ello.

Cuando un electrón se desplaza paralelo a la superficie de una rejilla metálica, bajo ciertas direcciones, la radiación producida tiene ciertas similitudes con la radiación de Cherekov en cuanto a condiciones de coherencia e intensidad. Esto fue descrito por primera vez por Smith y Purcell cuando observaron luz coherente en una rejilla óptica situada en un intenso haz de electrones de un generador de Van der Graff.

La radiación es producida por el movimiento periódico de la carga inducida en la superficie de la rejilla. Cuando un electrón, en una posición x_1 , se encuentra sobre la cresta de la rejilla, tendremos un dipolo formado por él mismo y su carga imagen. En una posición x_2 , coincidente con el valle de la estructura periódica, la carga imagen estará en una posición distinta, el dipolo habrá cambiado. Las fluctuaciones en este momento dipolar solo serán apreciables si el electrón se mueve muy próximo a la rejilla metálica. Dicho en otros términos, si la distancia a la superficie es mucho menor que el espacio periódico de la estructura.

La condición de coherencia puede deducirse directamente de la construcción de Huygens. Supongamos que el electrón recorre la distancia d , entre dos puntos A y B a la misma altura, en un tiempo Δt_1 , mientras que la radiación emitida desde A alcanza un punto C en un tiempo Δt_2 para el cual el ángulo es $BAC = \theta$. Siendo la velocidad del electrón βc , tenemos que:

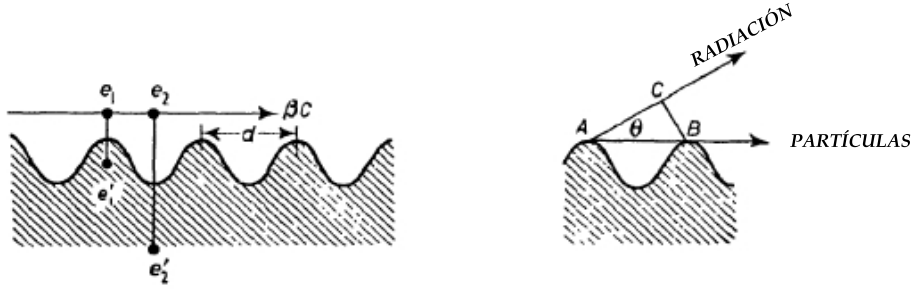


Figura 4.2: (a) Sistema de rejilla/electrón interpretado como una matriz de emisores periódicamente espaciados a una distancia L y excitados sucesivamente por el electrón. (b) Construcción para obtener la condición de coherencia.

$$\Delta t_1 = d/\beta c \quad \Delta t_2 = d \cdot \cos(\theta_c)/c \quad (4.1)$$

Para que se dé la condición de coherencia, esto es, para que BC sea un frente de ondas común a todos los ondúculos emitidos a lo largo de la trayectoria, la diferencia de tiempo debe ser un múltiplo N del periodo de una oscilación de longitud de onda λ . Por tanto:

$$\Delta t_1 - \Delta t_2 = \frac{d}{\beta c} - \frac{d \cos(\theta)}{c} = \frac{N\lambda}{c} \quad (4.2)$$

O lo que es lo mismo:

$$\lambda = \left(\frac{d}{N} \right) \left[\frac{1}{\beta} - \cos(\theta) \right] \quad (4.3)$$

Con este resultado en mente, se ha desarrollado instrumental que permite medir la energía de las partículas con haces intensos y colimados, fijando una longitud de onda λ (empleando distintos filtros de interferencia) puede obtener la velocidad β a partir del ángulo θ medio experimentalmente.

4.4. Radiación de Cherenkov inversa

Hasta hace unas décadas atrás, se había asumido que el índice de refracción de un material era siempre positivo. No fue hasta 1968 cuando un científico ruso, llamado Veselago [18], sugirió que un índice de refracción negativo podría ser posible e investigó el comportamiento de ciertos fenómenos ante un cambio de signo en ε , en μ como en ambos. Así pues, desarrolló un artículo teórico relacionado con fenómenos como la refracción, el efecto Doppler, el problema de la focalización y, por supuesto, la radiación de Cherenkov, motivo por el cual incluimos esta interesante aplicación.

Pese a la expectación, el artículo original recibió muy poca acogida por parte de la comunidad científica. Esto no fue ninguna sorpresa, dado que la ciencia de materiales se encontraba en sus primeros estadios y no había llegado lo suficientemente lejos como para construir materiales con índices de refracción negativos. No fue hasta el año 2000, cuando Pendry [19] sugirió que una pieza de material de índice negativo no solo podía usarse como una lente, sino como una lente perfecta. Tras ello se desencadenó una tormenta de controversia y con el tiempo ocupó su lugar entre las ramas de la física el estudio de los metamateriales.

Volviendo a la radiación de Cherenkov, si sustituimos, bajo cierta ingenuidad, un índice de refracción negativo en la ecuación para el ángulo de Cherenkov, esto es $n = -|n|$, encontramos que:

$$\cos(\theta_c) = -\frac{1}{\beta|n|} \quad (4.4)$$

Es decir, el signo menos indica que el ángulo con el que se propagaría la onda de choque aumentaría en 180° .

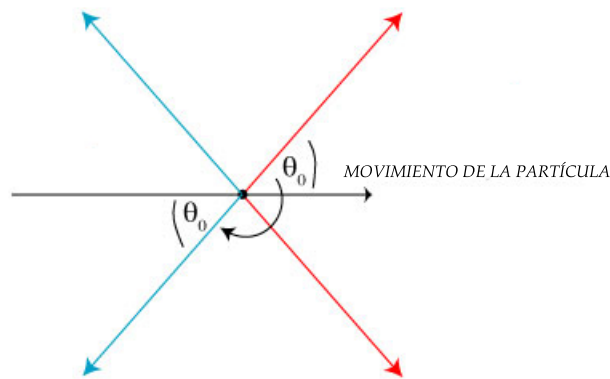


Figura 4.3: En rojo: La dirección del frente de ondas en medios de índice de refracción positivos. En azul: La dirección del frente de ondas para índices de refracción negativos.

La imagen anterior sugiere que la radiación de Cherenkov viaja hacia atrás cuando tiene lugar en un material de índice negativo. Para dar explicación a esto, partimos de la velocidad de fase. Si esta es negativa, los ondas esféricas no se extienden hacia el exterior desde las fuentes puntuales, sino que convergen hacia estas. El resultado es un conjunto de frentes de ondas viajando en la dirección opuesta a la descrita para un material de índice positivo.

Como resultado de esta construcción, obtenemos un frente de ondas viajando hacia delante. De hecho, esto parecería indicar que la radiación de Cherenkov en un medio zurdo se propagaría en la misma dirección que un medio diestro y he aquí la diferencia crucial del asunto, que reside en que de acuerdo a las ecuaciones de Maxwell, el flujo de energía en estos medios está orientado en la dirección opuesta a la del movimiento de los frentes de fase. Así pues, al menos teóricamente, esta interpretación es bastante acertada.

Frecuencia a frecuencia, como resultado para un índice de refracción negativo obtenemos la formación de ondas planas que transportan energía en un sentido opuesto. Siempre que la dispersión del índice de refracción no sea demasiado grande, la radiación de Cherenkov viajará en la dirección opuesta al movimiento de la partícula. Con esto en mente y centrándonos en la cuestión experimental de observar tal efecto, nos encontramos con el problema de que la radiación de Cherenkov inversa no es trivial por dos motivos:

- (i) Es difícil construir un material con un índice de refracción que sea realmente negativo.
- (ii) Otros materiales pueden, bajo ciertas circunstancias, producir efectos similares a los esperados en medios de índice negativo, *falseando* el valor de este.

Si se nos permite examinar estos problemas por el final, este segundo punto es difícil de abordar por su complejidad tanto experimental como por la profunda carga filosófica que subyace bajo el mismo, ya que la refracción negativa ha sido demostrada en materiales plasmónicos y en cristales fotónicos en ausencia de un índice de refracción negativo [18], así como el efecto Cherenkov. Por tanto, uno debe ir un paso más allá ya que no es suficiente con demostrar estos fenómenos experimentalmente, también debe obtenerse una prueba teórica de todo ello.

Además, el primer punto conduce a un gran desafío experimental. De hecho, todavía no ha sido posible hacer una muestra de un metamaterial para frecuencias ópticas. La longitud de onda de la luz visible es muy corta y la construcción de un metamaterial requiere que este sea manipulado a escalas mucho menores que la longitud de onda. Por ello, se opera en las frecuencias de microondas, donde la longitud de onda (~ 3.5 cm) es mucho

más factible para montajes experimentales. Pero eso nos arroja el siguiente interrogante ¿Qué deberíamos usar como fuente para la radiación de Cherenkov en estos experimentos? Ya que, como se ha visto, las partículas que se mueven a velocidades relativistas producen radiación de Cherenkov en la región azul del visible, y a día de hoy no somos capaz de fabricar metamateriales de dimensiones tales que operen en dicha región.

Para abordar esta problemática, los experimentales recurren a una idea muy inteligente similar al modelo de una fuente puntual monocromática. Para ello, supongamos una guía de ondas rectangular, con ranuras cortadas en la cara superior de la misma, a intervalos regulares, tal y como muestra la siguiente figura:

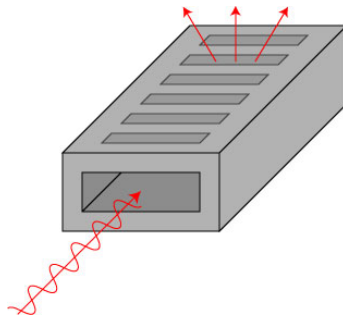


Figura 4.4: Guía de ondas con ranuras separadas a una distancia periódica.

A continuación se inyectan, por un extremo de la guía, microondas de una sola frecuencia y se emiten a través de las ranuras imitando, de manera similar, a una fuente puntual. Estas ondas emitidas a través de las ranuras tienen un retardo de fase debido a que las microondas requieren un tiempo mayor para viajar a las ranuras más distantes. El resultado de todo esto es, en efecto, una fuente de Cherenkov monocromática. Al colocar un metamaterial en la parte superior de la guía de ondas, se puede observar el comportamiento de estas ondas de Cherenkov monocromáticas en un material de índice negativo.

Otro reto abordado experimentalmente consiste en colocar una losa maciza de metamaterial en la parte superior de la guía de ondas y tratar de detectar la radiación de Cherenkov (en el caso de que tuviere lugar) propagándose en la dirección contraria, la cual cabría esperar que se refractase (en el sentido negativo) cuando sale del metamaterial y terminase viajando en la misma dirección que la radiación de Cherenkov en un medio ordinario. Para resolver esto, los físicos experimentales emplean un *prisma* metamaterial en la parte superior de la guía de ondas. La radiación de Cherenkov inversa y

ordinaria inciden en la superficie superior del prisma con ángulos diferentes, refractándose en direcciones diferentes. Debido al prisma, la radiación de Cherenkov inversa se refracta con un ángulo mayor al de la refracción ordinaria tal que pueden distinguirse.

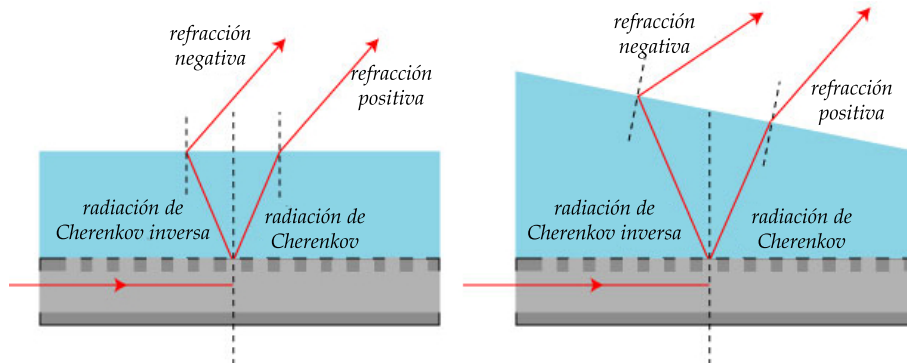


Figura 4.5: (a) Haces indistinguibles (b) Prisma metamaterial

Empleando una versión modificada de las estructuras SRR¹, con la que se predijo un índice de refracción negativo para frecuencias menores a 10 GHz y positivo para aquellas por encima de 11 GHz, encontraron evidencias de la radiación de Cherenkov inversa para el primer rango de frecuencias y el fenómeno ordinario para el segundo, corroborando la predicción teórica [20].

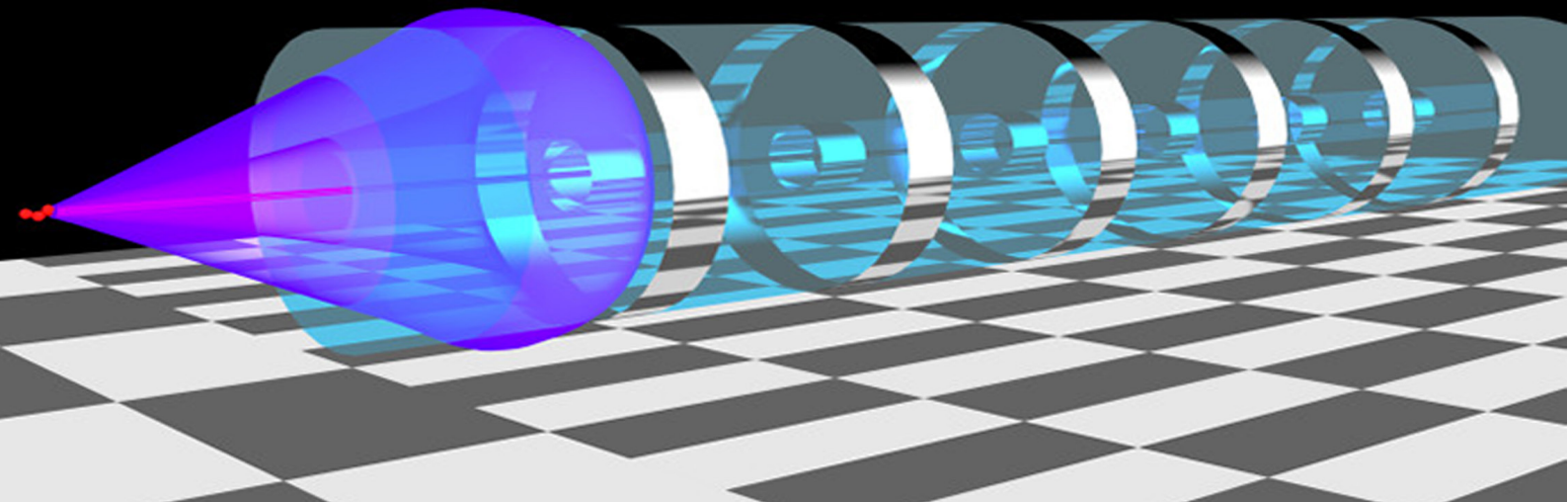
¿Son por tanto estos experimentos una prueba concluyente de la radiación de Cherenkov inversa? Asegurarlo sería precipitado, y negar la posibilidad de falsar dicha evidencia contraproducente, puesto que son muchas las sutilezas y dificultades que se presentan en la definición de los materiales para índice de refracción negativo. No obstante, revertir la radiación de Cherenkov es un planteamiento que podría tener, a largo plazo, importantes aplicaciones en la física de partículas, puesto que la radiación de Cherenkov ordinaria se propaga en la misma dirección que las partículas altamente energéticas, dificultando la tarea de separar la radiación útil del *ruido energético* provocado por estas y la de escudar a los detectores de la radiación. Un detector de radiación de Cherenkov inversa se encontraría fuera del alcance de la trayectoria ordinaria de la radiación, mejorando la calidad de la señal detectada y el tiempo de vida de los detectores.

¹SSR (Split-Ring Resonator) son las siglas de una estructura artificial diseñada con el objetivo de obtener una susceptibilidad magnética deseada en diversos tipos de metamateriales hasta frecuencias de 200 THz. Estos medios son capaces de generar un fuerte acoplamiento magnético a un campo aplicado, que de otro modo no estaría presente en medios convencionales. [25]

Bibliografía

- [1] Oliver Heaviside. Xxxix. on the electromagnetic effects due to the motion of electrification through a dielectric. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 27(167):324–339, 1889.
- [2] Lord Kelvin. I. nineteenth century clouds over the dynamical theory of heat and light. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 2(7):1–40, 1901.
- [3] Boris Mikhailovich Bolotovskii. Vavilov-cherenkov radiation: its discovery and application. *Physics-Uspekhi*, 52(11):1099–1110, 2009.
- [4] PA Čerenkov. Visible radiation produced by electrons moving in a medium with velocities exceeding that of light. *Physical Review*, 52(4):378, 1937.
- [5] David Jeffrey Griffiths and Reed College. *Introduction to electrodynamics*, volume 3. prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 1999.
- [6] John V Jelley. *Čerenkov radiation, and its applications*. Pergamon, 1958.
- [7] Toshiyuki Shiozawa. *Classical relativistic electrodynamics: theory of light emission and application to free electron lasers*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [8] Ian Flower. *Deep Blue: Examining Čerenkov Radiation Through Non-traditional Media*. PhD thesis, Reed College, 2013.
- [9] Akira Hirose. Radiation by moving charges. 2011.
- [10] I Frank and Ig Tamm. Coherent visible radiation of fast electrons passing through matter. In *Selected Papers*, pages 29–35. Springer, 1991.
- [11] BJ Wogoland. Čerenkov radiation. 2006.

- [12] Michael F L'Annunziata. *Radioactivity: introduction and history*. Elsevier, 2007.
- [13] GN Afanasiev, VG Kartavenko, and EN Magar. Vavilov–cherenkov radiation in dispersive medium. *Physica B: Condensed Matter*, 269(1):95–113, 1999.
- [14] Mark C. Chen. Energy loss by electrons.
- [15] Alan A Watson. The discovery of cherenkov radiation and its use in the detection of extensive air showers. *Nuclear Physics B-Proceedings Supplements*, 212:13–19, 2011.
- [16] *Great Soviet Encyclopedia, 3rd. Edition*. The Gale Group Inc., 1969-1978.
- [17] G Toraldo Di Francia. On the theory of some Cerenkovian effects. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 16(1):61–77, 1960.
- [18] VG Veselago. Electrodynamics of substa simultaneously negative electrical and magnetic properties. *Soviet Physics Uspekhi*, 10(4):509–517, 1968.
- [19] John Brian Pendry. Negative refraction makes a perfect lens. *Physical review letters*, 85(18):3966, 2000.
- [20] Sheng Xi, Hongsheng Chen, Tao Jiang, Lixin Ran, Jiangtao Huangfu, Bae-Ian Wu, Jin Au Kong, and Min Chen. Experimental verification of reversed cherenkov radiation in left-handed metamaterial. *Physical review letters*, 103(19):194801, 2009.



El segundo postulado de la Teoría de la Relatividad Especial ha sido desde tiempo atrás objeto de fascinación. No obstante, cuando el problema se traslada a medios materiales, la situación no hace sino volverse mucho más interesante.

Aplicaciones de la radiación Cherenkov, se enfrenta a la tarea de realizar un recorrido histórico del fenómeno, desde las ecuaciones de Maxwell hasta la obtención del premio Nobel (1958) por el descubrimiento e interpretación del efecto Cherenkov. A continuación, se resuelven analíticamente las ecuaciones de Maxwell para el caso de una partícula cargada viajando a una velocidad de fase superior a la de la luz en un medio material, describiendo las consecuencias que se derivan de ello, haciendo especial énfasis en medios dispersivos e introduciendo la corrección cuántica a la teoría clásica. Todo ello con el propósito de asentar la base teórica que respalda al fenómeno y, posteriormente, haciendo uso de herramientas de cálculo numérico, representar y comentar la condición de radiación de Cherenkov y sus consecuencias para diversos casos inspirados en el modelo de Drude-Lorentz. Finalmente, se detallan algunas aplicaciones prácticas de interés en el campo de la óptica electromagnética y la reciente rama dedicada al estudio de los metamateriales.

“Pavel Alekseyevich Cherenkov proyecta una larga sombra (o luz en realidad) a lo largo de la historia y el futuro de la física de la radiación.” - John Hubbel

