

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

MÁSTER UNIVERSITARIO EN MATEMÁTICAS



TRABAJO FIN DE MÁSTER:

**PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN
CON BARRERAS**

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN
OPERATIVA, FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Presentado por:

MOISÉS RODRÍGUEZ MADRENA

Dirigido por:

JUSTO PUERTO ALBANDOZ

Sevilla

Junio 2017

Abstract

In location problems, the distance functions that model the travel distance between the elements of the problem play a fundamental role in the adequacy or fidelity of the theoretical problem to the real problem considered. Think, for example, of problems in the design of connective networks (to this type of problems belongs, to mention some real-world problem, the routing of pipelines on ships), often the sections of these networks must obey a particular structure or pattern, the distance functions are then convenient for calculating the distance between the nodes of the network. Another real feature of location problems, which is of great importance in achieving good modeling, is the constraint of the feasible solution space. This restriction is due to the presence in the environment where the problem is considered of bodies or obstacles, called barriers in the literature, that do not allow travelling or passing through them. The barrier distance functions are, in this case, the way to obtain the adequacy of the theoretical problem to the real problem. The object of study of the present End of Master Project are the mentioned barrier distance functions and their application to the location problems.

The first chapter gives a brief summary of the elementary distance measures used in the modeling of location and transport problems, as well as their basic properties.

The barriers distances, central concept of this End of Master Project, appear in the second chapter, where special attention is paid to the case of polyhedral barriers and where the main known results in the art are shown. More precisely, these distances are introduced in the chapter to address the problem of the minimum rectangular path in the presence of hyperparallelepiped complexes that perform as barriers in any real space of finite size. Extensions of the known results for the treatment of this problem in the planar case and new original methods for their exact resolution are the main contribution of this chapter and of the work in general.

In the third chapter a particular case of the location problem with barriers is treated: the median problem in rectangular metric and in the context of hyperparallelepipeds that act as barriers in any real space of finite size. The methods developed in the second chapter are the basis for the construction of the new algorithms that solve such problem, which are presented in this chapter.

The computational performance tests of the algorithms of the second and third chapters are collected in the fourth and final chapter.

Extracto

En los problemas de localización, las funciones de distancia que modelan la distancia de viaje entre los elementos del problema juegan un papel fundamental en la adecuación o fidelidad del problema teórico al problema real considerado. Piénsese, por ejemplo, en los problemas de diseño de redes conectivas (a este tipo de problemas pertenece, por citar algún problema del ámbito real, el enrutamiento de tuberías en barcos), a menudo los tramos de estas redes deben de obedecer a una determinada estructura o patrón, las funciones de distancia son entonces convenientes para el cálculo de la distancia entre los nodos de la red. Otra característica real de los problemas de localización, de gran importancia a la hora de conseguir un buen modelado de los mismos, es la restricción del espacio de soluciones factibles. Dicha restricción se debe a la presencia en el entorno donde está considerado el problema de cuerpos u obstáculos, denominados barreras en la literatura, que no permiten el viaje o paso a través de ellos. Las funciones de distancia con barrera son, en este caso, la forma de conseguir la adecuación del problema teórico al problema real. El objeto de estudio del presente Trabajo de Fin de Máster son las mencionadas funciones de distancia con barreras y su aplicación a los problemas de localización.

En el primer capítulo se ofrece un resumen sucinto de las medidas de distancia elementales usadas en el modelado de los problemas de localización y transporte, así como de sus propiedades básicas.

Las funciones de distancia con barreras, concepto central del Trabajo de Fin de Máster, aparecen en el capítulo segundo, donde se presta especial atención al caso de barreras poliédricas y se muestran los principales resultados conocidos en la materia. Más concretamente, estas distancias son introducidas en el capítulo para abordar el problema del camino rectangular mínimo en presencia de complejos de hiperparalelepípedos barrera en cualquier espacio real de dimensión finita. Extensiones de resultados conocidos para el tratamiento de este problema en el caso plano y nuevos métodos originales para su resolución exacta son la principal contribución de este capítulo y del trabajo en general.

En el capítulo tercero se trata un caso particular del problema de localización con barreras: el problema de la mediana en métrica rectangular y en el contexto de hiperparalelepípedos que actúan como barreras en cualquier espacio real de dimensión finita. Los métodos desarrollados en el segundo capítulo son la base para construir los nuevos algoritmos que resuelven dicho problema y que se presentan en este capítulo.

Las pruebas de rendimiento computacional de los algoritmos de los capítulos segundo y tercero se recogen en el cuarto y último capítulo.

Índice general

Abstract	I
Extracto	III
1. Funciones de distancia	1
1.1. Normas y métricas	1
1.2. Normas bloque	3
1.3. Relación entre las normas bloque y la norma de Manhattan	9
2. Camino rectangular mínimo en presencia de paralelepípedos barrera	11
2.1. Caminos mínimos y el concepto de visibilidad	11
2.2. Barreras poliédricas y la propiedad de contacto con barreras	16
2.3. Camino rectangular mínimo en presencia de paralelepípedos barrera .	18
2.3.1. Formulación como un problema de camino mínimo en grafos	19
2.3.2. Formulaciones de programación lineal y entera mixta	35
2.4. Camino bloque mínimo en presencia de romboides barrera	73
3. Problema de la mediana rectangular en presencia de paralelepípedos barrera	77
3.1. Problema de localización con barreras	77
3.2. Problema de la mediana rectangular en presencia de paralelepípedos barrera	79
3.2.1. Existencia de conjunto dominante finito	80
3.2.2. Una formulación de programación lineal y entera mixta	84
3.3. Problema de la mediana bloque en presencia de romboides barrera . .	87
4. Pruebas computacionales	89
4.1. Rendimiento de los modelos de programación lineal y entera mixta . .	89
Conclusiones	93
Bibliografía	95

1

Funciones de distancia

La elección de una función de distancia adecuada juega un papel fundamental a la hora de proporcionar una buena estimación de las distancias de viaje en entornos reales. Dependiendo del modo de viaje y del tipo de problema considerado, podemos usar, por ejemplo, la distancia euclídea para modelar los desplazamientos por vía aérea o la métrica de Manhattan para problemas de transporte urbano en Nueva York. Esto significa que diferentes modos de transporte requieren diferentes formas de estimación de la distancia. Consecuentemente, el aumento de la heterogeneidad en los problemas relativos al sector del transporte ha llevado aparejado una creciente preocupación por estimar con una mayor precisión las distancias de viaje. En lo que sigue se ofrece un resumen sintético de las normas y medidas de distancia usadas en el modelado de los problemas de localización y transporte, así como de sus propiedades básicas.

1.1. Normas y métricas

Definición 1.1. *Sea S un conjunto compacto y convexo en \mathbb{R}^n conteniendo al origen en su interior. Además, sea S simétrico con respecto al origen y sea $X \in \mathbb{R}^n$. La norma $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de X con respecto a S viene dada por*

$$\gamma(X) := \inf\{\lambda > 0 : X \in \lambda S\}. \quad (1.1)$$

A menudo nos referiremos a $\gamma(X)$ como $\|X\|_\gamma$.

Toda norma γ definida de acuerdo a la Definición 1.1 satisface las *propiedades de la norma* en \mathbb{R}^n .

Lema 1.1. (Minkowski, 1911) *Sea γ definida de acuerdo a la Definición 1.1. Entonces, para todo $X, Y \in \mathbb{R}^n$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\gamma(X) \geq 0 \quad \text{y} \quad \gamma(X) = 0 \Leftrightarrow X = \underline{0}, \quad (1.2)$$

$$\gamma(\lambda X) = |\lambda| \gamma(X), \quad (1.3)$$

$$\gamma(X + Y) \leq \gamma(X) + \gamma(Y). \quad (1.4)$$

Dado un funcional $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaciendo (1.2), (1.3) y (1.4), el conjunto S puede escribirse como

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n : \gamma(X) \leq 1\}. \quad (1.5)$$

A este conjunto se le conoce como la *bola unidad* con respecto de γ . Dado que γ satisface (1.2), (1.3) y (1.4), la bola unidad de γ es compacta, convexa y simétrica con respecto al origen, además contiene al origen en su interior.

Toda norma γ define una medida de distancia en \mathbb{R}^n en el siguiente sentido.

Definición 1.2. Sea γ una norma en \mathbb{R}^n y sean $X, Y \in \mathbb{R}^n$. La métrica inducida por $\|\bullet\|_\gamma$ para los puntos X e Y en \mathbb{R}^n es

$$\gamma(X, Y) := \gamma(Y - X) = \|Y - X\|_\gamma. \quad (1.6)$$

A menudo escribiremos $d(X, Y)$ en lugar de $\gamma(X, Y)$ y nos referiremos a la norma con la métrica inducida d como $\|\bullet\|_d$.

Lema 1.2. Sea d una métrica inducida por una norma $\|\bullet\|_d$ en \mathbb{R}^n de acuerdo a la Definición 1.2. Entonces, d satisface, para todo $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$,

$$d(X, Y) \geq 0 \quad \text{y} \quad d(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y, \quad (1.7)$$

$$d(X, Y) = d(Y, X), \quad (1.8)$$

$$d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z). \quad (1.9)$$

Una familia de normas (y sus correspondientes métricas) muy estudiada es la familia de las *normas* ℓ_p , $p \in [1, \infty]$.

Definición 1.3. Sea $X \in \mathbb{R}^n$. La norma ℓ_p de $X = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ es

$$\|X\|_{\ell_p} = \ell_p(X) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{para } p \in [1, \infty), \quad (1.10)$$

$$\|X\|_{\ell_\infty} = \ell_\infty(X) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|. \quad (1.11)$$

La correspondiente métrica ℓ_p en \mathbb{R}^n para dos puntos $X = (x_1, \dots, x_n)^t$ e $Y = (y_1, \dots, y_n)^t$ viene dada por

$$\ell_p(X, Y) = \left(\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{para } p \in [1, \infty), \quad (1.12)$$

$$\ell_\infty(X, Y) = \max_{i=1, \dots, n} |y_i - x_i|. \quad (1.13)$$

Para $p = 2$ obtenemos la *norma euclídea* y la *métrica euclídea*.

En muchas aplicaciones prácticas se usan generalizaciones de las normas ℓ_p para aproximar distancias de viaje. Estas son las llamadas *normas* ℓ_p *ponderadas*.

Definición 1.4. Sea $w = (w_1, \dots, w_n)^t \in \mathbb{R}^n$ con $w_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, $p \in [1, \infty]$, y sea $X \in \mathbb{R}^n$. La norma ℓ_p ponderada de $X = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ es

$$\ell_p^w(X) = \left(\sum_{i=1}^n w_i |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{para } p \in [1, \infty), \quad (1.14)$$

$$\ell_\infty^w(X) = \max_{i=1, \dots, n} w_i |x_i|. \quad (1.15)$$

Para ilustrar el efecto de los pesos w_1, \dots, w_n , la bola unidad de la norma euclídea y la bola unidad de la norma euclídea ponderada en \mathbb{R}^2 se muestran en la Figura 1.1 para su comparación.

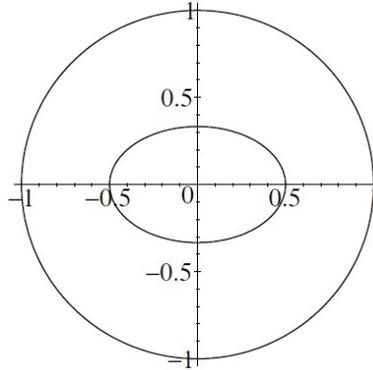


Figura 1.1: Bola unidad de la norma euclídea y bola unidad de la norma euclídea ponderada con pesos $w = (4, 9)^t$ en \mathbb{R}^2 .

Para obtener buenas aproximaciones de las distancias de viaje, los valores de w y p deben elegirse adecuadamente.

Para $p = 1$ y $p = \infty$, la bola unidad de la norma ℓ_p y la bola unidad de la norma ℓ_p ponderada son polítopos, esto es, poliedros acotados. La norma ℓ_1 es conocida también como *norma de Manhattan* o *norma rectangular*, y la norma ℓ_∞ como *norma de Chebyshev* o *norma máximo*. En general, a las normas con bola unidad poliédrica se les llama *normas bloque*. A ellas se dedica la siguiente sección.

1.2. Normas bloque

Las funciones de distancia con bola unidad poliédrica fueron introducidas inicialmente en el contexto de la localización. Desde entonces han sido aplicadas satisfactoriamente para aproximar distancias por carretera, así como otros tipos de distancias en redes. La norma bloque es un caso particular de norma donde el conjunto S de la Definición 1.1 es un polítopo P simétrico.

Definición 1.5. Sea $S = P$ un politopo en \mathbb{R}^n (por tanto S es compacto y convexo) conteniendo al origen en su interior. Además, sea P simétrico con respecto al origen y sea $X \in \mathbb{R}^n$. La norma bloque $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de X con respecto a S viene dada por

$$\gamma(X) := \inf\{\lambda > 0 : X \in \lambda S\}. \quad (1.16)$$

Sea $\text{ext}(P) = \{v^1, \dots, v^\delta\}$ el conjunto de puntos extremos de P . A v^1, \dots, v^δ se les llama vectores fundamentales y a las semirrectas d^1, \dots, d^δ que comienzan en el origen y pasan respectivamente por los puntos v^1, \dots, v^δ , i.e., $d^i = \{\lambda v^i : \lambda \geq 0\}$, $i = 1, \dots, \delta$, se les llama direcciones fundamentales.

De la misma forma que en (1.5), la bola unidad de la norma bloque γ viene dada por

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n : \gamma(X) \leq 1\}$$

y la distancia $\gamma(X, Y)$ entre dos puntos $X, Y \in \mathbb{R}^n$ sigue siendo

$$\gamma(X, Y) := \gamma(Y - X)$$

como se definió en la Definición 1.2, además, esta distancia verifica, como no puede ser de otra manera, las propiedades del Lema 1.2.

En adelante enumeraremos a los vectores fundamentales y a las direcciones fundamentales de una norma bloque mediante superíndices, mientras que las componentes de los vectores fundamentales y de las direcciones fundamentales se numeraran por subíndices.

Definición 1.6. Los vectores fundamentales definidos por los puntos extremos de la misma faceta de P constituyen un cono fundamental. Si v^{i_1}, \dots, v^{i_m} son los puntos extremos de una faceta de P denotaremos al cono que constituyen los vectores fundamentales correspondientes por $C(v^{i_1}, \dots, v^{i_m})$.

En \mathbb{R}^2 , los conos fundamentales están determinados por dos vectores fundamentales adyacentes. En la Figura 1.2 se muestra un ejemplo de norma bloque y sus vectores fundamentales v^1, \dots, v^6 en \mathbb{R}^2 .

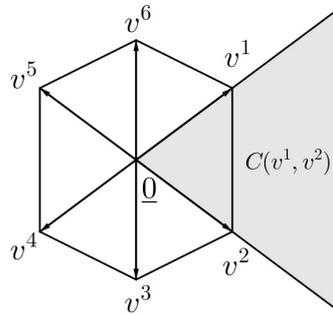


Figura 1.2: Un ejemplo de norma bloque con seis vectores fundamentales y el cono fundamental $C(v^1, v^2)$ determinado por v^1 y v^2 .

Observemos que si $X \in C(v^{i_1}, \dots, v^{i_m})$, siendo $C(v^{i_1}, \dots, v^{i_m})$ un cono fundamental, entonces, la definición de cono convexo implica que existen unos escalares $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m}$, únicos, tales que $X = \sum_{j=i_1}^{i_m} \lambda_j v^j$ con $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m} \geq 0$. Recíprocamente, si v^{i_1}, \dots, v^{i_m} son los vectores fundamentales que determinan el cono fundamental $C(v^{i_1}, \dots, v^{i_m})$ y si $X = \sum_{j=i_1}^{i_m} \lambda_j v^j$ es la única representación de X en función de v^{i_1}, \dots, v^{i_m} con $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m} \geq 0$, entonces $X \in C(v^{i_1}, \dots, v^{i_m})$. Esta observación conduce a la siguiente representación de una norma bloque γ .

Lema 1.3. *Sea γ una norma bloque en \mathbb{R}^n y sea $X \in \mathbb{R}^n$ un punto que pertenece al cono fundamental $C(v^{i_1}, \dots, v^{i_m})$, siendo $X = \sum_{j=i_1}^{i_m} \lambda_j v^j$ la única representación de X en función de v^{i_1}, \dots, v^{i_m} . Entonces*

$$\gamma(X) = \sum_{j=i_1}^{i_m} \lambda_j. \quad (1.17)$$

Demostración. Observemos en primer lugar que $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m} \geq 0$, pues $X \in C(v^{i_1}, \dots, v^{i_m})$.

Sea Z el punto en el que se produce la intersección de la frontera ∂P de P con la semirrecta que comienza en el origen y pasa por X . Entonces $X = \gamma(X)Z$ y $Z = \sum_{j=i_1}^{i_m} \alpha_j v^j$ para ciertos $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_m} \geq 0$ cumpliendo $\sum_{j=i_1}^{i_m} \alpha_j = 1$, pues la faceta de P a la que pertenece Z es un convexo de puntos extremos v^{i_1}, \dots, v^{i_m} (ver Figura 1.3).

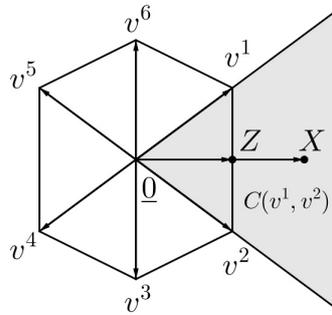


Figura 1.3: Puntos X y Z en $C(v^i, v^j)$ en el caso plano.

Tenemos por tanto dos representaciones diferentes para X :

$$X = \sum_{j=i_1}^{i_m} \lambda_j v^j,$$

$$X = \gamma(X)Z = \sum_{j=i_1}^{i_m} \gamma(X) \alpha_j v^j.$$

Como la representación de X en función de v^{i_1}, \dots, v^{i_m} es única, de las dos representaciones anteriores deducimos que $\lambda_j = \gamma(X)\alpha_j$, $j = i_1, \dots, i_m$, cumpliéndose así

$$\sum_{j=i_1}^{i_m} \lambda_j = \sum_{j=i_1}^{i_m} \gamma(X)\alpha_j = \gamma(X).$$

□

Por tanto, otra propiedad ventajosa de las normas bloque es que pueden ser calculadas usando sólo los vectores fundamentales.

Lema 1.4. (Ward and Wendell, 1985; Nickel, 1995) Sean γ una norma bloque, v^1, \dots, v^δ sus vectores fundamentales y $X \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\gamma(X) = \text{mín} \left\{ \sum_{i=1}^{\delta} \lambda_i : X = \sum_{i=1}^{\delta} \lambda_i v^i \text{ y } \lambda_i \geq 0 \ \forall i = 1, \dots, \delta \right\}. \quad (1.18)$$

El Lema 1.4 nos dice que el valor de γ en un punto dado $X \in \mathbb{R}^n$ puede obtenerse resolviendo un problema de programación lineal para $\lambda_1, \dots, \lambda_\delta$.

Más allá de usarse para aproximar distancias por carretera, puede probarse que las normas bloque proporcionan buenas aproximaciones de cualquier otra tipo de norma.

Teorema 1.1. (Ward and Wendell, 1985) El conjunto de las normas bloque es denso en el conjunto de todas las normas.

En el contexto de la localización, son de especial interés los modelos planos. Es por ello que el resto del capítulo se va a dedicar al caso bidimensional.

Para un punto dado $X \in C(v^i, v^j)$, el valor de $\gamma(X)$ puede ser determinado usando sólo los vectores fundamentales v^i y v^j de la forma que se describe a continuación. Asumamos que los vectores fundamentales de P están dados ordenados en el sentido de las agujas del reloj y sea $v^{\delta+1} = v^1$. Entonces $X \in C(v^i, v^{i+1})$ para algún $i \in \{1, \dots, \delta\}$. Usando la única representación de X en función de v^i y v^{i+1} , $X = \lambda_i v^i + \lambda_{i+1} v^{i+1}$, se puede calcular que

$$\lambda_i = \frac{x_2 v_1^{i+1} - x_1 v_2^{i+1}}{v_1^{i+1} v_2^i - v_2^{i+1} v_1^i} \text{ y } \lambda_{i+1} = \frac{x_1 v_2^i - x_2 v_1^i}{v_1^{i+1} v_2^i - v_2^{i+1} v_1^i}. \quad (1.19)$$

Dado que $\gamma(X) = \lambda_i + \lambda_{i+1}$ por el Lema 1.3, se sigue que

$$\gamma(X) = \frac{x_1(v_2^i - v_2^{i+1}) - x_2(v_1^i - v_1^{i+1})}{v_1^{i+1} v_2^i - v_2^{i+1} v_1^i}. \quad (1.20)$$

A continuación se muestran algunos ejemplos de normas bloque en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 1.1. La norma ℓ_∞ y la norma ponderada ℓ_∞^w están definidas como

$$\|X\|_{\ell_\infty} = \max_{i=1,2} |x_i|,$$

$$\|X\|_{\ell_\infty^w} = \max_{i=1,2} w_i |x_i|,$$

respectivamente, donde $w_1, w_2 > 0$ (ver Figura 1.4). Los vectores fundamentales de la norma ℓ_∞ en \mathbb{R}^2 son

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v^4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En el caso de la norma ponderada ℓ_∞^w , ésta tiene como vectores fundamentales a

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1/w_1 \\ 1/w_2 \end{pmatrix}, \quad v^2 = \begin{pmatrix} 1/w_1 \\ -1/w_2 \end{pmatrix}, \quad v^3 = \begin{pmatrix} -1/w_1 \\ -1/w_2 \end{pmatrix}, \quad v^4 = \begin{pmatrix} -1/w_1 \\ 1/w_2 \end{pmatrix}.$$

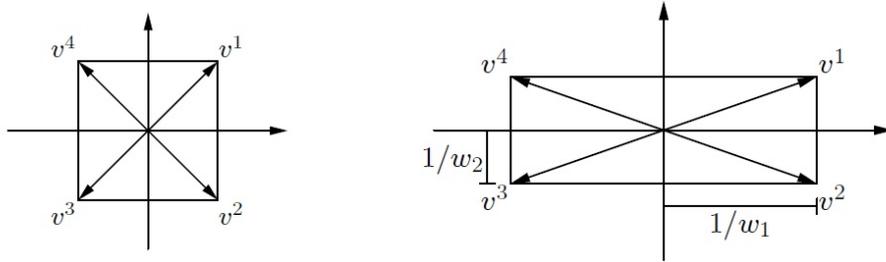


Figura 1.4: Bola unidad de la norma ℓ_∞ y bola unidad de la norma ponderada ℓ_∞^w en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 1.2. La norma ℓ_1 y la norma ponderada ℓ_1^w están definidas como

$$\|X\|_{\ell_1} = \sum_{i=1,2} |x_i|,$$

$$\|X\|_{\ell_1^w} = \sum_{i=1,2} w_i |x_i|,$$

respectivamente, donde $w_1, w_2 > 0$ (ver Figura 1.5). Los vectores fundamentales de la norma ℓ_1 en \mathbb{R}^2 son

$$v^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v^4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

y los de la norma ponderada ℓ_1^w son

$$v^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/w_2 \end{pmatrix}, \quad v^2 = \begin{pmatrix} 1/w_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/w_2 \end{pmatrix}, \quad v^4 = \begin{pmatrix} -1/w_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

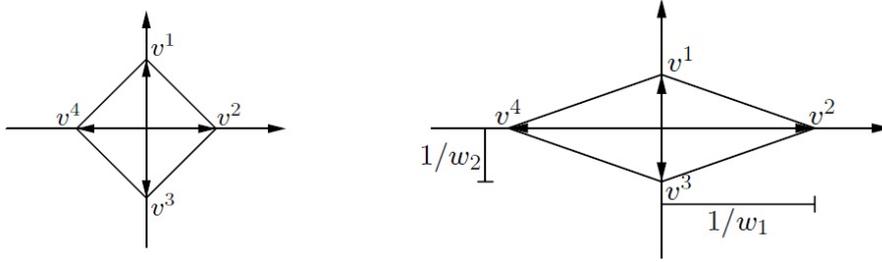


Figura 1.5: Bola unidad de la norma ℓ_1 y bola unidad de la norma ponderada ℓ_1^w en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 1.3. La norma ponderada uno-infinito $\ell_{1,\infty}^{\alpha,\beta}$ se define como la suma de las normas ponderadas ℓ_1^α y ℓ_∞^β :

$$\|X\|_{\ell_{1,\infty}^{\alpha,\beta}} = \|X\|_{\ell_1^\alpha} + \|X\|_{\ell_\infty^\beta} = \sum_{i=1,2} \alpha_i |x_i| + \max_{i=1,2} \beta_i |x_i|,$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$ (ver Figura 1.6). Los vectores fundamentales de la norma ponderada uno-infinito en \mathbb{R}^2 son de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} v^1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\alpha_2 + \beta_2} \end{pmatrix}, & v^2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1 + \beta_1 + \frac{\beta_1}{\beta_2} \alpha_2} \\ \frac{1}{\alpha_2 + \beta_2 + \frac{\beta_2}{\beta_1} \alpha_1} \end{pmatrix}, \\ v^3 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1 + \beta_1} \\ 0 \end{pmatrix}, & v^4 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1 + \beta_1 + \frac{\beta_1}{\beta_2} \alpha_2} \\ -\frac{1}{\alpha_2 + \beta_2 + \frac{\beta_2}{\beta_1} \alpha_1} \end{pmatrix}, \\ v^5 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\alpha_2 + \beta_2} \end{pmatrix}, & v^6 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha_1 + \beta_1 + \frac{\beta_1}{\beta_2} \alpha_2} \\ -\frac{1}{\alpha_2 + \beta_2 + \frac{\beta_2}{\beta_1} \alpha_1} \end{pmatrix}, \\ v^7 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha_1 + \beta_1} \\ 0 \end{pmatrix}, & v^8 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha_1 + \beta_1 + \frac{\beta_1}{\beta_2} \alpha_2} \\ \frac{1}{\alpha_2 + \beta_2 + \frac{\beta_2}{\beta_1} \alpha_1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

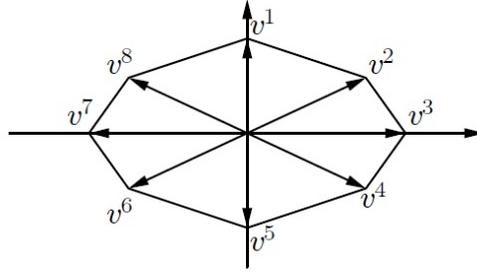


Figura 1.6: Bola unidad de la norma ponderada uno-infinito en \mathbb{R}^2 .

1.3. Relación entre las normas bloque y la norma de Manhattan

En esta sección vamos a seguir tratando el caso del espacio bidimensional real \mathbb{R}^2 , concretamente, nos vamos a centrar en las normas bloque con exactamente cuatro vectores fundamentales (ver Figura 1.7) y a discutir su relación con la norma de Manhattan ℓ_1 (ver Figura 1.5). Para distinguir estas funciones de distancia más generales de la norma de Manhattan con los vectores fundamentales v^1, \dots, v^4 etiquetados como aparecen en el Ejemplo 1.2, en adelante vamos a denotar a los vectores fundamentales de cualquier otra norma bloque con cuatro vectores fundamentales por u_1, \dots, u_4 .

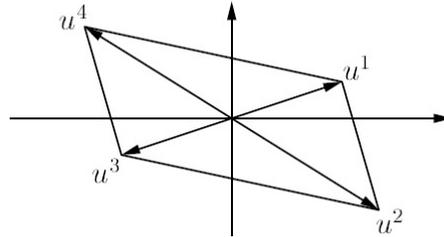


Figura 1.7: Bola unidad de una norma bloque con cuatro vectores fundamentales u_1, \dots, u_4 .

Sea γ una norma bloque con vectores fundamentales (ordenados en el sentido de las agujas del reloj)

$$u^1 = (u_1^1, u_1^2)^t, \quad u^2 = (u_2^1, u_2^2)^t, \quad u^3 = (u_3^1, u_3^2)^t, \quad u^4 = (u_4^1, u_4^2)^t,$$

cumpliendo $u^3 = -u^1$ y $u^4 = -u^2$. Si T es la transformación lineal tal que $T(u^1) = Tu^1 = v^1$ y $T(u^2) = Tu^2 = v^2$, entonces

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{u_2^1 u_1^2 - u_1^1 u_2^2} \begin{pmatrix} u_2^1 & -u_1^1 \\ -u_2^2 & u_1^2 \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Obsérvese que la correspondiente transformación inversa viene dada por

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} u_2^2 & u_1^1 \\ u_2^1 & u_1^2 \end{pmatrix}.$$

Si consideramos, por ejemplo, la norma ℓ_∞ con los vectores fundamentales etiquetados como en el Ejemplo 1.1, entonces tenemos

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estableciendo $T(X) := TX$ para todo $X \in \mathbb{R}^2$, podemos probar el siguiente resultado que relaciona las distancias en norma bloque con la métrica ℓ_1 .

Lema 1.5. *Sea γ una norma bloque con cuatro vectores fundamentales y sea T la transformación lineal definida por (1.21). Entonces*

$$\gamma(X, Y) = \ell_1(T(X), T(Y))$$

para todo $X, Y \in \mathbb{R}^2$.

Demostración. Consideremos en primer lugar el caso especial en el que $Y = \underline{0}$. Si además $X = \underline{0}$, entonces el resultado se obtiene trivialmente. Sea $X \in C(u^i, u^{i+1})$ para algún $i \in \{1, \dots, 4\}$ y sea $X = \lambda_i u^i + \lambda_{i+1} u^{i+1}$ la única representación de X en términos de u^i y u^{i+1} (recordemos que $C(u^i, u^{i+1})$ es un cono convexo).

Dado que γ tiene sólo cuatro direcciones fundamentales podemos suponer sin pérdida de generalidad que $u^i \in \{u^1, -u^1\}$ y $u^{i+1} \in \{u^2, -u^2\}$. Usando (1.19) y el Lema 1.3 se sigue que

$$\begin{aligned} \ell_1(T(X), \underline{0}) &= |t_{11}x_1 + t_{12}x_2| + |t_{21}x_1 + t_{22}x_2| \\ &= \left| \frac{u_1^2 x_1 - u_1^1 x_2}{u_2^1 u_1^2 - u_1^1 u_2^2} \right| + \left| \frac{u_1^2 x_2 - u_2^2 x_1}{u_2^1 u_1^2 - u_1^1 u_2^2} \right| \\ &= \lambda_{i+1} + \lambda_i \\ &= \gamma(X, \underline{0}). \end{aligned}$$

Ahora consideremos el caso general en el que $X, Y \in \mathbb{R}^2$ son ambos diferentes de $\underline{0}$. Dado que T es una transformación lineal, inmediatamente obtenemos

$$\begin{aligned} \ell_1(T(X), T(Y)) &= \ell_1(T(X) - T(Y), \underline{0}) = \ell_1(T(X - Y), \underline{0}) \\ &= \gamma(X - Y, \underline{0}) = \gamma(X, Y). \end{aligned}$$

□

Nótese que la definición de T para una norma bloque γ dada depende de la asignación $T(u^1) = v^1$ y cambia si fijamos $T(u^1) = -v^1$, $T(u^1) = v^2$ o $T(u^1) = -v^2$.

2

Camino rectangular mínimo en presencia de paralelepípedos barrera

El problema de hallar caminos mínimos en entornos reales tiene un gran interés en el contexto de la localización, así como en otros ámbitos más allá de éste. Los problemas de camino mínimo en presencia de barreras físicas aparecen, por ejemplo, en la planificación de rutas marítimas de mínima longitud entre diferentes puertos o en la determinación del camino óptimo de un robot en una planta industrial. En este capítulo nos vamos a centrar en los caminos mínimos entre dos puntos con respecto a la métrica de Manhattan cuando existen paralelepípedos que actúan como barreras. Consideraremos que dichos paralelepípedos pueden intersectar, dando lugar a obstáculos complejos. Diferentes algoritmos son presentados para resolver el problema de camino mínimo en métrica rectangular: por un lado, un método basado en la extensión al caso n -dimensional de resultados conocidos para la versión plana del problema; por otro lado, nuevos modelos de programación lineal y entera mixta. El capítulo comienza introduciendo los conceptos básicos empleados en el estudio de los caminos mínimos en presencia de barreras, sigue mostrando algunos resultados que se tienen cuando las barreras presentan formas poliédricas para finalmente dedicarse al problema particular en norma rectangular y barreras en forma de paralelepípedos descrito antes.

2.1. Caminos mínimos y el concepto de visibilidad

Sea d una métrica fijada en el espacio n -dimensional \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) que se quiere utilizar para medir distancias de viaje entre pares de puntos de \mathbb{R}^n . Asumimos que la métrica d está inducida por una norma $\|\bullet\|_d : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y que es por tanto simétrica (1.8) y satisface la desigualdad triangular (1.9). Como sabemos, d puede calcularse a partir de $\|\bullet\|_d$ como

$$d(X, Y) = \|Y - X\|_d \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n.$$

Además, sea $\{B_1, \dots, B_N\}$ un conjunto finito de conjuntos cerrados y disjuntos dos a dos de \mathbb{R}^n con interior no vacío. Cada conjunto B_i , $i = 1, \dots, N$, es llamado *barrera* (u *obstáculo*), y la unión de todas las barreras se denota por \mathcal{B} , i.e., $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^N B_i$. Nótese que no se está suponiendo que las barreras tengan que ser acotadas. Asumimos que moverse por el interior de las barreras está prohibido. Sin embargo, está permitido moverse por la frontera $\partial(B_i)$ de cada región barrera B_i , $i = 1, \dots, N$.

Sea $\mathcal{F} := \mathbb{R}^n \setminus \text{int}(\mathcal{B})$ la *región factible* (o *espacio libre*) en \mathbb{R}^n . Para evitar la infactibilidad, vamos a suponer que \mathcal{F} es un subconjunto conexo de \mathbb{R}^n .

La *función de distancia con barreras* (también llamada *métrica de camino mínimo* o *distancia geodésica*) $d_{\mathcal{B}} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ mide la longitud del camino más corto (o los caminos más cortos) entre dos puntos X e Y en la región factible $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n \setminus \text{int}(\mathcal{B})$ que no interseca el interior de ninguna barrera.

Definición 2.1. *Un X - Y camino es una curva continua P dada por la parametrización $p = (p_1, \dots, p_n)^t : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $p(0) = X$ y $p(1) = Y$ que es continuamente diferenciable en $[0, 1]$ salvo quizá en un número finito de puntos, donde la derivada $p' = (p'_1, \dots, p'_n)^t$ tiene límite finito por la izquierda y por la derecha.*

La longitud $l(P)$ del X - Y camino P con respecto a la métrica fijada d viene dada por

$$l(P) := \int_0^1 \|p'(t)\|_d dt.$$

Si P no interseca el interior de ninguna barrera, i.e., si $p([0, 1]) \cap \text{int}(\mathcal{B}) = \emptyset$, el X - Y camino P es un X - Y camino permitido.

Usando la noción de X - Y camino permitido, la *distancia con barreras* $d_{\mathcal{B}}$ entre dos puntos X e Y en la región factible \mathcal{F} puede definirse de la siguiente forma.

Definición 2.2. *Para $X, Y \in \mathcal{F}$, la distancia con barreras $d_{\mathcal{B}}(X, Y)$ es el ínfimo de las longitudes de todos los X - Y caminos permitidos, i.e.,*

$$d_{\mathcal{B}}(X, Y) := \inf\{l(P) : P \text{ es un } X\text{-}Y \text{ camino permitido}\}. \quad (2.1)$$

Un X - Y camino permitido con longitud $d_{\mathcal{B}}(X, Y)$ es un X - Y camino permitido d -mínimo (o X - Y camino óptimo, camino geodésico).

Nótese que la existencia de un X - Y camino permitido d -mínimo, que es una curva diferenciable salvo quizá en un número finito de puntos, no puede ser garantizada siempre. En particular, pueden existir casos donde el ínfimo en (2.1) se alcance para un camino que no satisfaga la condición de diferenciable de la Definición 2.1. Un ejemplo de esta situación en el caso bidimensional se muestra en la Figura 2.1.

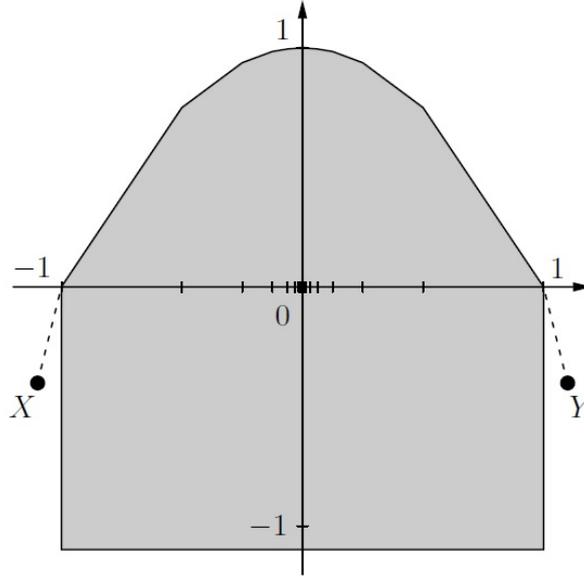


Figura 2.1: Un ejemplo en \mathbb{R}^2 donde no existe ningún X - Y camino ℓ_2 -mínimo. La frontera superior del conjunto barrera B tiene un número infinito de puntos extremos en $(1/i, 1 - 1/i^2)^t$ y $(-1/i, 1 - 1/i^2)^t$, $i \in \{2, 4, 8, 16, \dots\}$, es por ello que ningún camino sobre esta frontera es un X - Y camino permitido de acuerdo a la Definición 2.1.

En adelante nos vamos a centrar en los problemas y conjuntos de barreras para los que existe un X - Y camino permitido d -mínimo para toda elección de $X, Y \in \mathcal{F}$. Este es el caso, por ejemplo, de los conjuntos de barreras poliédricos en \mathbb{R}^n . En estos casos, el ínfimo en (2.1) puede ser reemplazado por un mínimo.

La distancia con barreras d_B no es, en general, positivamente homogénea, lo cual implica que no existe una norma induciendo la métrica d_B . Más aún, la distancia con barreras d_B tampoco es, en general, convexa. Sin embargo, d_B define una métrica en la región factible \mathcal{F} .

Lema 2.1. Sea d una métrica inducida por una norma y sea $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^N B_i$ la unión de los conjuntos barrera. Entonces, d_B define una métrica en \mathcal{F} , i.e., para todo $X, Y, Z \in \mathcal{F}$,

$$d_B(X, Y) \geq 0 \quad \text{y} \quad d_B(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y, \quad (2.2)$$

$$d_B(X, Y) = d_B(Y, X), \quad (2.3)$$

$$d_B(X, Y) \leq d_B(X, Z) + d_B(Z, Y). \quad (2.4)$$

Por consiguiente, (\mathcal{F}, d_B) es un espacio métrico n -dimensional.

Demostración. Las desigualdades e igualdades de (2.2) y (2.3) se tienen de forma trivial. Para probar la desigualdad triangular (2.4) consideremos tres puntos $X, Y, Z \in$

\mathcal{F} . Es fácil ver que para todo X - Z camino permitido $P_{X,Z}$ y para todo Z - Y camino permitido $P_{Z,Y}$ existe un X - Y camino permitido $P_{X,Y} = P_{X,Z} \cup P_{Z,Y}$ de longitud $l(P_{X,Y}) = l(P_{X,Z}) + l(P_{Z,Y})$ pasando por Z . Por tanto,

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{B}}(X, Y) &= \inf\{l(P_{X,Y}) : P_{X,Y} \text{ es un } X\text{-}Y \text{ camino permitido}\} \\ &= \inf\{l(P_{X,Z}) + l(P_{Z,Y}) : P_{X,Z} \text{ es un } X\text{-}Z \text{ camino permitido y} \\ &\quad P_{Z,Y} \text{ es un } Z\text{-}Y \text{ camino permitido}\} \\ &= d_{\mathcal{B}}(X, Z) + d_{\mathcal{B}}(Z, Y). \end{aligned}$$

□

Nos referiremos a $d_{\mathcal{B}}$ como *métrica de camino mínimo* o *distancia geodésica*. El siguiente colorario es una consecuencia inmediata de la definición de $d_{\mathcal{B}}$.

Corolario 2.1. *Sea d una métrica inducida por una norma y sea $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^N B_i$ la unión de los conjuntos barrera. Entonces*

$$d_{\mathcal{B}}(X, Y) \geq d(X, Y) \quad \forall X, Y \in \mathcal{F}.$$

Considerando la distancia desde un punto dado $X \in \mathcal{F}$ podemos distinguir, por un lado, las partes de \mathcal{F} en las que $d_{\mathcal{B}}(X, Y)$ es equivalente a la métrica $d(X, Y)$ y, por otro lado, las partes de \mathcal{F} donde $d_{\mathcal{B}}(X, Y) > d(X, Y)$.

Definición 2.3. *Dos puntos $X, Y \in \mathcal{F}$ son d -visibles si*

$$d_{\mathcal{B}}(X, Y) = d(X, Y),$$

esto es, si la distancia entre X e Y no se ve incrementada por la presencia de las regiones barrera.

El conjunto de puntos que son d -visibles desde un punto $X \in \mathcal{F}$ es, por tanto,

$$\text{visibles}_d(X) := \{Y \in \mathcal{F} : d_{\mathcal{B}}(X, Y) = d(X, Y)\}.$$

De forma similar, llamaremos d -sombra de un punto $X \in \mathcal{F}$ al conjunto de puntos $Y \in \mathcal{F}$ que no son d -visibles desde X , i.e.,

$$\text{sombra}_d(X) := \{Y \in \mathcal{F} : d_{\mathcal{B}}(X, Y) > d(X, Y)\}.$$

Definición 2.4. *La frontera de la clausura de la d -sombra de un punto $X \in \mathcal{F}$ (o, para abreviar, la frontera de $\text{sombra}_d(X)$) es*

$$\begin{aligned} \partial(\text{sombra}_d(X)) &:= \{Y \in \mathcal{F} : N_{\varepsilon}(Y) \cap \text{sombra}_d(Y) \neq \emptyset \quad \text{y} \\ &\quad N_{\varepsilon}(Y) \not\subseteq \text{sombra}_d(Y) \quad \forall \varepsilon > 0\}, \end{aligned}$$

donde $N_{\varepsilon}(Y) := \{Z \in \mathbb{R}^n : \ell_2(Z, Y) < \varepsilon\}$.

En la Figura 2.2 se muestran dos ejemplos de posibles formas de la d -sombra de un punto dado $X \in \mathbb{R}^2$ con respecto a dos métricas d diferentes.

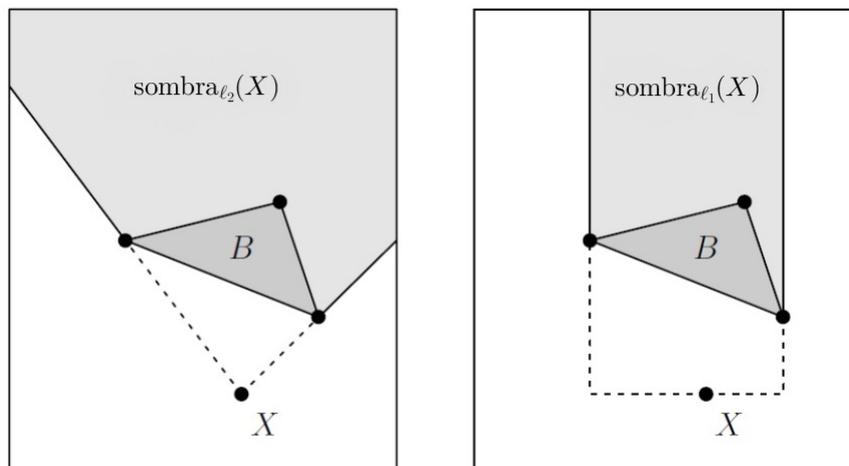


Figura 2.2: La ℓ_2 -sombra y la ℓ_1 -sombra de un punto $X \in \mathbb{R}^2$.

Obsérvese que para algunas elecciones de la métrica d un punto que es d -visible puede no ser ℓ_2 -visible, esto es, no visible en el sentido usual de visibilidad en línea recta. Por otra parte, todo par de puntos ℓ_2 -visibles son también d -visibles si d es una métrica inducida por una norma, como muestra el siguiente lema.

Lema 2.2. *Sea d una métrica inducida por una norma. Entonces*

$$\text{sombra}_d(X) \subseteq \text{sombra}_{\ell_2}(X), \quad X \in \mathcal{F}.$$

Además, si $X, Y \in \mathcal{F}$ son ℓ_2 -visibles, $X \neq Y$, entonces el segmento de recta que conecta X e Y es un X - Y camino permitido d -mínimo con longitud $d(X, Y)$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, sea $X = \underline{0}$ el origen (siempre puede hacerse una traslación que lleve X al origen) y sea $Y \in \mathcal{F}$ un punto ℓ_2 -visible desde X . Entonces, el segmento de recta que conecta X e Y es un X - Y camino permitido P dado por la parametrización $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $p(t) = t \cdot Y$, $t \in [0, 1]$. Usando la definición de distancia con barreras d_B , Definición 2.2, la longitud de P puede calcularse como

$$\begin{aligned} d_B(X, Y) &\leq l(P) = \int_0^1 \|p'(t)\|_d dt = \int_0^1 \left\| \frac{d}{dt}(tY) \right\|_d dt = \int_0^1 \|Y\|_d dt \\ &= \|Y\|_d = d(\underline{0}, Y). \end{aligned}$$

Por tanto, el segmento de recta que conecta X e Y es un X - Y camino permitido d -mínimo con longitud $d(X, Y)$. Por consiguiente, la subregión de \mathcal{F} que es ℓ_2 -visible desde un punto $X \in \mathcal{F}$ es también d -visible desde X , y $\text{sombra}_d(X) \subseteq \text{sombra}_{\ell_2}(X)$ para todo $X \in \mathcal{F}$. \square

2.2. Barreras poliédricas y la propiedad de contacto con barreras

Un *conjunto poliédrico* en \mathbb{R}^2 es un conjunto cerrado cuya frontera es un polígono. En \mathbb{R}^n con $n \geq 3$, llamaremos conjunto poliédrico a todo conjunto cerrado cuyas caras de dimensión $n - 1$ son conjuntos poliédricos en \mathbb{R}^{n-1} . Conviene hacer notar aquí la diferencia entre poliedro y conjunto poliédrico, mientras que el primero es siempre convexo por ser la intersección de un número finito de semiespacios, el segundo no tiene por qué serlo necesariamente. En esta sección nos vamos a centrar en el caso particular en el que el conjunto de barreras $\{B_1, \dots, B_N\}$ está constituido por conjuntos disjuntos dos a dos, cerrados, poliédricos, pero no necesariamente convexos, en \mathbb{R}^n . Además, asumimos que el número de caras de las barreras de $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^N B_i$ es finito para evitar casos degenerados como el que se ilustró en la Figura 2.1. Los resultados que se muestran a continuación garantizan la existencia de caminos permitidos mínimos para este tipo de barreras. Para poder abordar el caso general n -dimensional será necesario fijar antes la atención en el caso bidimensional, al conjunto finito de puntos extremos de \mathcal{B} lo vamos a denotar por $\mathcal{P}(\mathcal{B})$.

Lema 2.3. *Sea $\{B_1, \dots, B_N\}$ un conjunto finito de conjuntos barrera en \mathbb{R}^2 disjuntos dos a dos, cerrados, poliédricos y con un conjunto finito de puntos extremos $\mathcal{P}(\mathcal{B})$. Sea d una métrica inducida por una norma y sean $X, Y \in \mathcal{F}$. Entonces existe un X - Y camino permitido d -mínimo SP con la propiedad que aparece a continuación.*

Propiedad de contacto con barreras:

SP es un camino lineal a trozos con puntos críticos solamente en los puntos extremos de las barreras.

Demostración. Sean $X, Y \in \mathcal{F}$ y sea SP un X - Y camino permitido d -mínimo en \mathcal{F} que no satisface la propiedad de contacto con barreras. Nótese que, dado que el conjunto de barreras y también el conjunto de puntos extremos de las barreras $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ son finitos, SP puede subdividirse en un conjunto finito de puntos verificando que dos puntos consecutivos en SP son ℓ_2 -visibles. El Lema 2.2 implica que el segmento de recta que conecta dos puntos consecutivos en SP es un camino permitido d -mínimo uniendo estos dos puntos. Por tanto, podemos construir un camino lineal a trozos SP' uniendo X e Y con un conjunto finito de puntos críticos y cuya longitud es menor o igual a la de SP . Ahora puede construirse un X - Y camino permitido d -mínimo SP'' con la propiedad de contacto con barreras a partir SP' . Sean $[T_{i-1}, T_i]$ y $[T_i, T_{i+1}]$ dos segmentos rectilíneos consecutivos de SP' . Asumamos que T_{i-1} y T_{i+1} son ℓ_2 -visibles. Entonces, la desigualdad triangular implica que los dos segmentos rectilíneos $[T_{i-1}, T_i]$ y $[T_i, T_{i+1}]$ pueden ser reemplazados por el segmento rectilíneo $[T_{i-1}, T_{i+1}]$ sin incrementar la longitud de SP' . Supongamos ahora que T_{i-1} y T_{i+1} no son ℓ_2 -visibles, usando de nuevo la desigualdad triangular, el punto crítico T_i puede moverse a lo largo de $[T_{i-1}, T_i]$ o a lo largo de $[T_i, T_{i+1}]$ hacia T_{i-1} o T_{i+1} , respectivamente, sin incrementar la longitud de SP' , hasta que uno de estos segmentos rectilíneos sea tangente a una

barrera.

Durante la iteración de ambas operaciones todo punto extremo de una barrera que pertenezca a SP' lo interpretamos como un punto crítico T_i , incluso cuando el segmento rectilíneo $[T_{i-1}, T_{i+1}]$ es parte de SP' . De esta forma, con la iteración de ambas operaciones se consigue un camino SP'' con la propiedad deseada después de un número finito de pasos, ya que todo punto crítico de SP' que no es aún un punto extremo de una barrera puede moverse hacia X, Y , o un punto extremo de una barrera. La existencia de X - Y camino permitido d -mínimo está garantizada, pues si suponemos que $d_B(X, Y)$ se alcanza únicamente para caminos en \mathcal{F} que no satisfacen las condiciones de la Definición 2.1, repitiendo el proceso de construcción de SP'' a partir de cualquiera de estos caminos, conseguimos un X - Y camino con la propiedad de contacto con barreras, y por tanto permitido, con longitud menor o igual que $d_B(X, Y)$, lo cual es una contradicción. \square

Nótese que la propiedad de contacto con barreras no se satisface en general para los problemas en \mathbb{R}^n con $n \geq 3$. En la Figura 2.3 se muestra un ejemplo de situación en \mathbb{R}^3 en la que no existe ningún X - Y camino permitido ℓ_2 -mínimo con puntos críticos sólo en los puntos extremos de las barreras presentes. Sin embargo, el Lema 2.3 puede generalizarse al caso n -dimensional como muestra el Lema 2.4 a continuación.

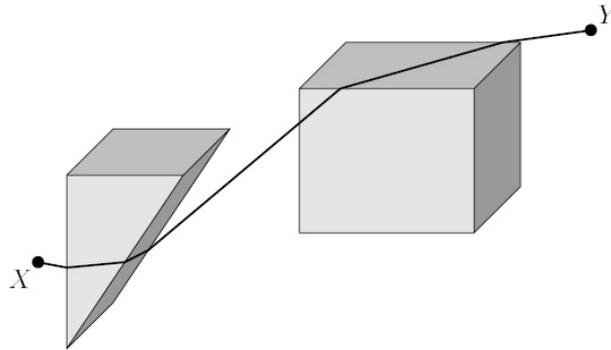


Figura 2.3: Un X - Y camino permitido ℓ_2 -mínimo en un entorno con dos barreras poliédricas en \mathbb{R}^3 .

Lema 2.4. Sea $\{B_1, \dots, B_N\}$ un conjunto finito de conjuntos barrera en \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, disjuntos dos a dos, cerrados, poliédricos y con un número finito de caras. Sea d una métrica inducida por una norma y sean $X, Y \in \mathcal{F}$. Entonces existe un X - Y camino permitido d -mínimo SP con la propiedad que aparece a continuación.

Propiedad de contacto con barreras generalizada:

SP es un camino lineal a trozos con puntos críticos solamente en las caras de las barreras de dimensión $n - 2$ o menos.

Demostración. Sean $X, Y \in \mathcal{F}$ y sea SP un X - Y camino permitido d -mínimo en \mathcal{F} que no satisface la propiedad de contacto con barreras generalizada. Siguiendo los mismos argumentos que en la demostración del Lema 2.3, puede construirse un X - Y camino permitido lineal a trozos SP' con $l(SP') \leq l(SP)$ mediante la triangulación de la región factible \mathcal{F} por un conjunto finito de símplices. Por el Lema 2.2, las porciones de curvas en estos símplices pueden reemplazarse por segmentos rectilíneos sin incrementar la longitud de SP .

Consideremos dos segmentos rectilíneos consecutivos $[T_{i-1}, T_i]$ y $[T_i, T_{i+1}]$ en SP' . Obsérvese que $[T_{i-1}, T_i] \cap [T_i, T_{i+1}] = \{T_i\}$, ya que de otra forma SP' no podría ser un X - Y camino permitido d -mínimo. Por tanto, estos segmentos rectilíneos $[T_{i-1}, T_i]$ y $[T_i, T_{i+1}]$ definen de forma única un plano H en \mathbb{R}^n que los contiene. La intersección de H con las barreras de \mathcal{B} da lugar a un conjunto de barreras poliédricas bidimensionales en H con un número finito de puntos extremos, pues las barreras de \mathcal{B} tienen un número finito de caras. Ahora podemos aplicar el Lema 2.3 al subproblema bidimensional de encontrar un T_{i-1} - T_{i+1} camino permitido d -mínimo en H . Por tanto, el camino $[T_{i-1}, T_i] \cup [T_i, T_{i+1}]$ puede ser reemplazado por un T_{i-1} - T_{i+1} camino lineal a trozos en H satisfaciendo la propiedad de contacto con barreras y de longitud menor o igual a la del T_{i-1} - T_{i+1} camino original en SP' . Dado que un punto extremo del conjunto poliédrico resultante de la intersección de una barrera $B \in \mathcal{B}$ con el plano H es una cara de dimensión 0 de $B \cap H$, por la fórmula de la dimensión, este punto corresponde a un punto de una cara de B en \mathbb{R}^n con dimensión $n - 2$ o menos. Podemos concluir así que el T_{i-1} - T_{i+1} camino construido satisface la propiedad de contacto con barreras generalizadas.

Iterando este proceso un número finito de veces se consigue un X - Y camino permitido d -mínimo lineal a trozos con puntos críticos solamente en las caras de las barreras de dimensión $n - 2$ o menos. Razonando exactamente igual a como se hizo en el final de la demostración del Lema 2.3 se prueba que la existencia de X - Y camino permitido d -mínimo está garantizada también en este caso. \square

2.3. Camino rectangular mínimo en presencia de paralelepípedos barrera

Esta sección constituye el núcleo del capítulo, los métodos que aquí se presentan para resolver el problema del camino mínimo con respecto a la métrica ℓ_1 cuando existen paralelepípedos que actúan como barreras son la base sobre la que se construyen los algoritmos para resolver los problemas que se plantearán en los capítulos siguientes.

La norma de Manhattan o rectangular es una norma muy especial que, al igual que la norma máximo, pertenece tanto a la familia de las normas ℓ_p , $p \in [0, \infty]$, como a la familia de normas bloque. Cuando consideramos la métrica que esta norma induce para medir la distancia entre dos puntos, podemos pensar que dicha distancia es en realidad la longitud de un camino constituido por segmentos rectilíneos paralelos a los ejes

de referencia con la particularidad de que los cambios de dirección que se producen en dicho camino se realizan en puntos del camino donde los segmentos incidentes forman un ángulo recto. Esto hace que la métrica de Manhattan halle aplicaciones en diversos problemas del ámbito real que involucran el cálculo de caminos mínimos, como pueden ser el diseño de rutas en ciudades con calles en estructura de cuadrícula (ciudades divididas en manzanas) o el enrutamiento de tuberías en barcos.

En aplicaciones en el plano y el espacio, los paralelepípedos constituyen una forma sencilla de englobar (aproximar) obstáculos de formas arbitrarias, simplificándose así el problema que podría suponer sortear estructuras de formas relativamente complejas. Si además permitimos que los paralelepípedos puedan intersectar dando lugar a barreras complejas podemos obtener una mejor aproximación del obstáculo que se pretende evitar.

2.3.1. Formulación como un problema de camino mínimo en grafos

En adelante vamos a denotar al sistema coordenado de \mathbb{R}^n por $O\mathcal{X}_1 \cdots \mathcal{X}_n$. Un *paralelepípedo isotético* en \mathbb{R}^n o *hiperparalelepípedo isotético de dimensión n* es un paralelepípedo en \mathbb{R}^n cuyas caras de dimensión 1 son paralelas a los ejes coordenados (ver Figura 2.4). Este tipo de paralelepípedos están caracterizados por un punto $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)^t$ denominado *centro del paralelepípedo* y por la mitad de la anchura ξ_k en cada una de las coordenadas $O\mathcal{X}_k$, de forma que, en la coordenada $O\mathcal{X}_k$ el paralelepípedo se extiende desde $\kappa_k - \xi_k$ hasta $\kappa_k + \xi_k$, $k = 1, \dots, n$. Por tanto, un paralelepípedo isotético en \mathbb{R}^n puede describirse también como un poliedro cuyos puntos extremos son los del conjunto $\{(\kappa_1 + i_1\xi_1, \dots, \kappa_n + i_n\xi_n)^t : i_k \in \{0, 1\}, k = 1, \dots, n\}$ (ver Figura 2.4).

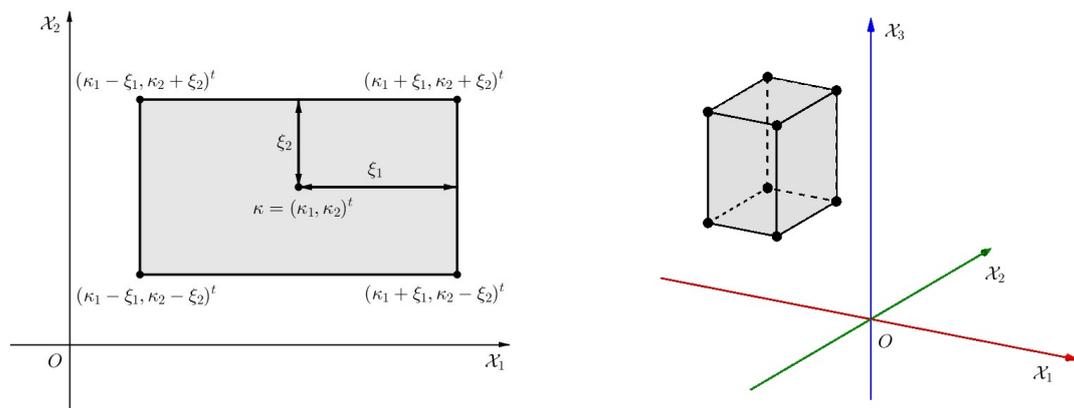


Figura 2.4: Paralelepípedos isotéticos en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 .

Llamaremos *complejo de paralelepípedos isotéticos en \mathbb{R}^n* o *complejo de hiperparalelepípedos isotéticos de dimensión n* a la unión de un número finito de paralelepípedos isotéticos en \mathbb{R}^n siempre y cuando el conjunto resultante de la unión sea conexo y sin puntos de corte (ver Figura 2.5). Vamos a considerar que cada elemento B_i del conjunto de barreras $\{B_1, \dots, B_N\}$ es un complejo de paralelepípedos isotéticos en \mathbb{R}^n , en particular, B_i puede ser un paralelepípedo isotético de \mathbb{R}^n , es decir, un complejo de paralelepípedos constituido por un único paralelepípedo, $i = 1, \dots, n$. A menudo nos referiremos a los paralelepípedos isotéticos simplemente como paralelepípedos, cuando esto no dé lugar a confusión, en cualquier caso, siempre que hablemos de barreras los paralelepípedos se consideran isotéticos. Asumimos que los complejos de paralelepípedos son disjuntos dos a dos, pues si dos de ellos intersecan entonces podemos considerarlos como un único complejo (salvo cuando la intersección de ambos consista en un único punto, en cuyo caso éste sería un punto de corte). Como siempre $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^N B_i$. Puesto que para evitar la infactibilidad venimos suponiendo que $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}$ es conexo, tenemos que asumir que ninguno de los complejo barrera posee huecos (ver Figura 2.6), esto puede evitarse añadiendo (uniendo) paralelepípedos al complejo hasta rellenar dichos huecos. En adelante, siempre que hablemos de complejos de paralelepípedos entenderemos que estos son objetos sin huecos. Por último, por motivos técnicos, vamos a considerar que los paralelepípedos $\{B_i^1, \dots, B_i^{m_i}\}$ que forman un complejo B_i , lo describen correctamente si, para cualquier punto de un paralelepípedo B_i^j , $j = 1, \dots, m_i$, que pertenezca a la frontera de B_i^j y al, mismo tiempo, al interior del complejo B_i , entonces, existe otro paralelepípedo distinto del mismo complejo B_i^k tal que dicho punto pertenece a su interior. Nótese que si la descripción por paralelepípedos que tenemos de B_i no cumple la propiedad anterior, siempre podemos hacer que se cumpla añadiendo nuevos paralelepípedos a la descripción de B_i sin cambiar su forma (ver Figura 2.7).

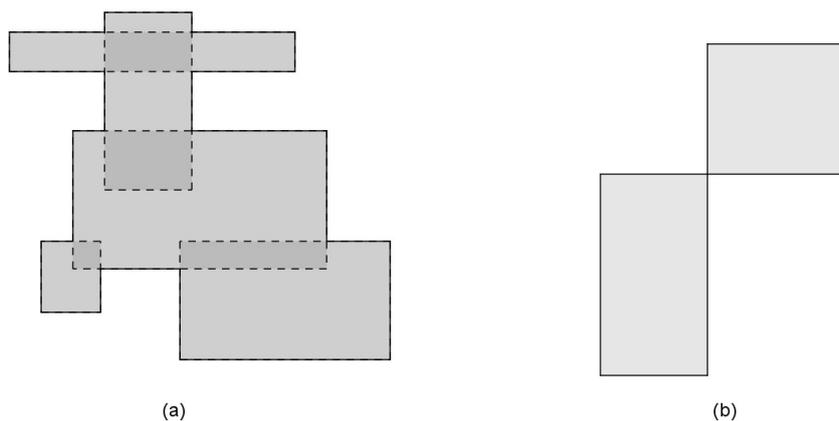


Figura 2.5: El objeto (a) es un complejo de paralelepípedos isotéticos en \mathbb{R}^2 mientras que el objeto (b) no lo es pues posee un punto de corte (el vértice común en el que intersecan los paralelepípedos).

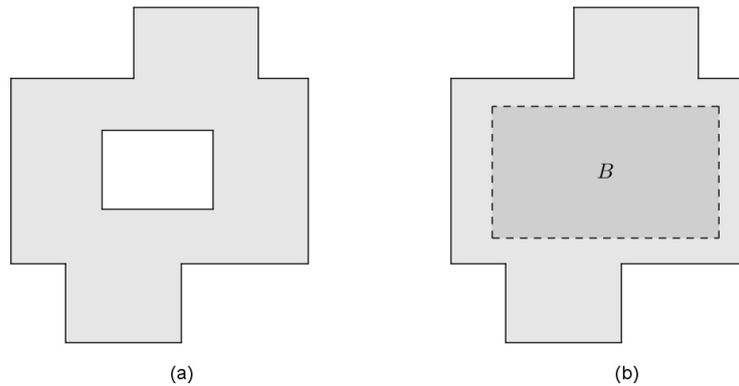


Figura 2.6: El objeto (a) no es un complejo de paralelepípedos isotéticos en \mathbb{R}^2 pues posee un hueco, pero si se le añade el paralelepípedo B como aparece en (b), entonces sí lo es.

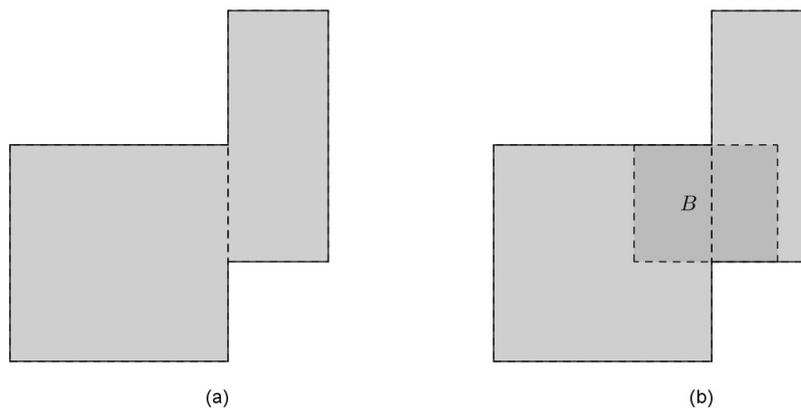


Figura 2.7: Para que el complejo de paralelepípedos isotéticos en \mathbb{R}^2 que muestra (a) quede bien descrito puede añadirse el paralelepípedo B tal y como aparece en (b).

Obsérvese que los complejos de hiperparalelepípedos de dimensión n son conjuntos poliédricos en \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, por lo tanto, para cualquier métrica d inducida por una norma y para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{F}$, la existencia de un X - Y camino permitido d -mínimo con la propiedad de contacto con barreras está garantizada por el Lema 2.3 y el Lema 2.4. No es difícil ver que, cuando $n \geq 3$, los puntos críticos del camino lineal a trozos que da el Lema 2.4 y que se encuentran solamente en las caras de dimensión $n - 2$ o menos de los complejos barrera, se encuentran de hecho en las caras de dimensión $n - 2$ o menos de los paralelepípedos que los constituyen, más concretamente en la parte de dichas caras que pertenece a la frontera del complejo correspondiente.

Como se ha indicado al comienzo de la sección, la métrica en la que estamos interesados es la inducida por la norma rectangular ℓ_1 . La siguiente definición captura la

idea de cómo son percibidos en el espacio métrico euclídeo los X - Y caminos cuando la longitud de estos está medida con respecto a la métrica ℓ_1 .

Definición 2.5. *Dados $X, Y \in \mathbb{R}^n$, llamaremos X - Y camino rectangular a todo lugar geométrico Q constituido por los segmentos $[a_1, a_2], [a_2, a_3], \dots, [a_{K-1}, a_K]$, $K \geq 2$, donde la sucesión finita de puntos $a_1, a_2, \dots, a_{K-1}, a_K$ verifica: cada punto a_i , $i = 1, \dots, K-1$, difiere del punto a_{i+1} en una coordenada, siendo el resto iguales; $a_1 = X$ y $a_K = Y$ o $a_1 = Y$ y $a_K = X$. Los puntos a_1, \dots, a_K que definen el X - Y camino rectangular son los codos del camino, en particular, a_1 y a_K son los codos triviales.*

La longitud $l(Q)$ de un X - Y camino rectangular es la suma de las longitudes de los segmentos que unen cada punto de la sucesión con el que le sigue en la misma, es decir,

$$l(Q) := \sum_{i=1}^{K-1} \ell_2(a_i, a_{i+1}).$$

Si Q no interseca el interior de ninguna barrera, i.e., si $Q \cap \text{int}(\mathcal{B}) = \emptyset$, el X - Y camino rectangular Q es un X - Y camino rectangular permitido. Un X - Y camino rectangular mínimo permitido es un X - Y camino rectangular permitido Q de longitud

$$l(Q) = \inf\{l(Q') : Q' \text{ es un } X\text{-}Y \text{ camino rectangular permitido}\}.$$

Una amalgamación de un X - Y camino rectangular Q es otro X - Y camino rectangular Q' con número de codos mayor o igual al de Q y con longitud igual a la de Q , $l(Q') = l(Q)$.

Los caminos rectangulares constituyen la forma natural de pensar en caminos uniendo pares de puntos $X, Y \in \mathbb{R}^n$ cuando utilizamos la métrica ℓ_1 para medir distancias. De hecho, cualquier camino rectangular que vaya de X a Y (o de Y a X) tal que en cada codo no trivial de la sucesión se iguale una de las coordenadas de X a la coordenada correspondiente de Y , tiene longitud, euclídea, $\ell_1(X, Y)$ (ver Figura 2.8).

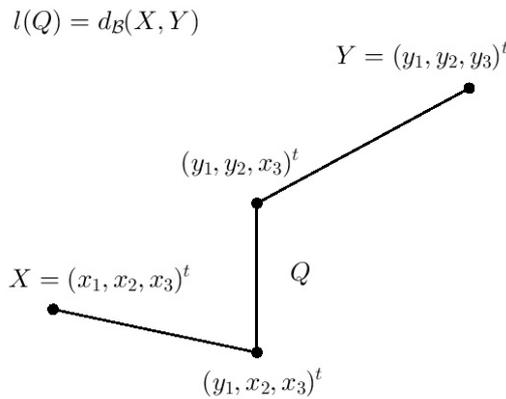


Figura 2.8: Camino rectangular entre X e Y tal que en cada no trivial se iguale una de las componentes de X a la componente de Y correspondiente.

A partir de ahora consideramos fijada la métrica ℓ_1 , esto quiere decir que en adelante, a no ser que se diga lo contrario, $d = \ell_1$, y que siempre que hablemos de un X - Y camino estaremos asumiendo que la longitud del mismo está medida con respecto a esta métrica. El siguiente resultado muestra la equivalencia de los X - Y caminos permitidos (Definición 2.1) y los X - Y caminos rectangulares permitidos (Definición 2.5) a la hora de calcular la distancia con barreras $d_{\mathcal{B}}(X, Y)$.

Lema 2.5. *Sean $X, Y \in \mathcal{F}$. Entonces, para todo X - Y camino permitido ℓ_1 -mínimo existe un X - Y camino rectangular permitido de la misma longitud, y recíprocamente, para todo X - Y camino rectangular mínimo permitido existe un X - Y camino permitido de la misma longitud con respecto a la métrica ℓ_1 . Por tanto,*

$$d_{\mathcal{B}}(X, Y) = \min\{l(Q) : Q \text{ es un } X\text{-}Y \text{ camino rectangular permitido}\}$$

y todo X - Y camino rectangular mínimo permitido tiene longitud $d_{\mathcal{B}}(X, Y)$.

Demostración. Sea SP un X - Y camino permitido ℓ_1 -mínimo. Siguiendo los mismos argumentos utilizados en la demostración del Lema 2.4 (o el Lema 2.3 si estamos en \mathbb{R}^2) podemos construir un X - Y camino permitido SP'' de la misma longitud que SP (ℓ_1 -mínimo) con la propiedad de contacto con barreras generalizada (o la propiedad de contacto con barreras si estamos en \mathbb{R}^2). Sea $[T_i, T_{i+1}]$ un segmento rectilíneo de SP'' , entonces, T_i y T_{i+1} son dos puntos críticos consecutivos de SP'' situados en las caras de dimensión $n - 2$ o menos de los paralelepípedos que constituyen los complejos barrera, más concretamente, en la parte de dichas caras que se encuentra en la frontera del complejo correspondiente (si estamos en \mathbb{R}^2 son puntos extremos de los complejos barrera). Es evidente que T_i y T_{i+1} son ℓ_2 -visibles pues el segmento de recta que los une en SP'' es un T_i - T_{i+1} camino permitido, luego por el Lema 2.2, el segmento rectilíneo $[T_i, T_{i+1}]$ en SP'' tiene longitud $\ell_1(T_i, T_{i+1})$. Si el segmento $[T_i, T_{i+1}]$ es paralelo a alguno de los ejes coordenados $O\mathcal{X}_j$, $j = 1, \dots, n$, entonces $[T_i, T_{i+1}]$ es un camino rectangular constituido únicamente por dos codos, los triviales, de longitud $\ell_2(T_i, T_{i+1}) = \ell_1(T_i, T_{i+1})$. En caso contrario, sabemos, que cualquier camino rectangular que va de T_i a T_{i+1} de forma que en cada codo no trivial de la sucesión se iguala una de las coordenadas de T_i a la coordenada correspondiente de T_{i+1} , tiene longitud $\ell_1(X, Y)$, sin embargo, puede que ninguno de estos caminos rectangulares sea un camino rectangular permitido. Sea Q cualquiera de estos caminos rectangulares. Entonces siempre se puede amalgamar Q para construir un T_i - T_{i+1} camino rectangular Q' de la misma longitud que Q y que se aproxime tanto como queramos al segmento $[T_i, T_{i+1}]$ hasta que sea un camino rectangular permitido (ver Figura 2.9). Esto puede conseguirse debido a que el número de complejos barreras es finito, así como el número de hiperparalelepípedos que constituyen cada uno de ellos y el número de caras de estos últimos, y a que podemos usar tantos codos como queramos para construir el camino rectangular Q' , siempre que sean una cantidad finita, dando lugar a un camino rectangular constituido por segmentos de longitud tan pequeña como queramos para aproximarnos a $[T_i, T_{i+1}]$ evitando las barreras, esta evasión es posible debido a que

$[T_i, T_{i+1}] \cap \text{int}(\mathcal{B}) = \emptyset$ y a que los complejos son disjuntos. De esta forma, podemos sustituir cada segmento $[T_i, T_{i+1}]$ de SP'' por un T_i - T_{i+1} camino rectangular permitido de su misma longitud, siendo el resultado de esta sustitución un X - Y camino rectangular permitido de la misma longitud que SP'' y, por tanto, que SP .

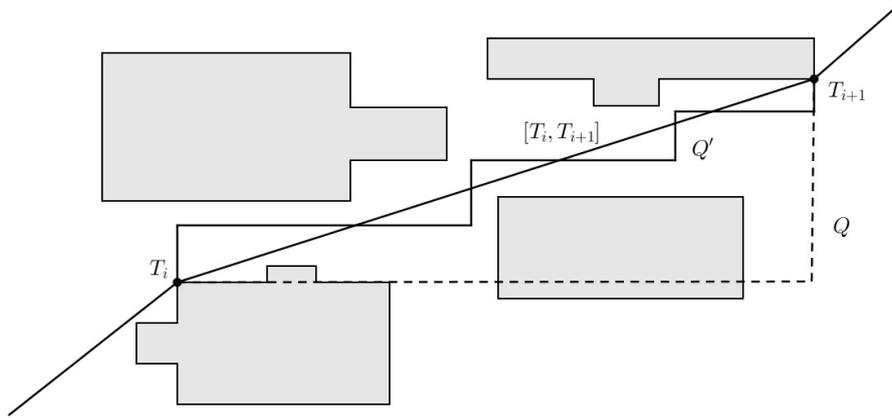


Figura 2.9: El T_i - T_{i+1} camino rectangular permitido Q' es una amalgamación del T_i - T_{i+1} camino rectangular no permitido Q .

Si Q es un X - Y camino rectangular mínimo permitido, el propio Q es un X - Y camino en el sentido de la Definición 2.1: puede parametrizarse en el intervalo $[0, 1]$, siendo continuamente diferenciable salvo en un número finito de puntos, estos son, los codos. Que el camino parametrizado es permitido es evidente pues el camino rectangular Q sin parametrizar lo es. Por último, seleccionada una parametrización p de Q (cualquier parametrización estándar para caminos lineales a trozos), puede comprarse, usando la propiedad de aditividad con respecto al intervalo de integración de la integral, que

$$l(Q) = \int_0^1 \|p'(t)\|_{\ell_1} dt.$$

□

Si el Lema 2.4 (o el Lema 2.3 según el caso) simplificaba la búsqueda de X - Y caminos permitidos ℓ_1 -mínimos para obtener $d_{\mathcal{B}}(X, Y)$ al asegurarnos la existencia de uno de estos caminos con la particularidad de ser lineal a trozos y con puntos críticos solamente en partes concretas de las barreras, la noción de X - Y camino rectangular y el Lema 2.5 facilitan aún más la tarea del cálculo de $d_{\mathcal{B}}(X, Y)$ dada la sencillez de estos últimos caminos, pues no son más que una sucesión finita de segmentos paralelos a los ejes coordenados que nos llevan de un punto al otro. Este es el momento de formalizar el problema al que queremos dar solución.

Problema 2.1. Dado el conjunto $\{B_1, \dots, B_N\}$ de complejos de paralelepípedos isotéticos en \mathbb{R}^n disjuntos dos a dos y dados dos puntos X e Y en la región factible \mathcal{F} , siendo $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^N B_i$, calcular $d_{\mathcal{B}}(X, Y)$ así como un X - Y camino rectangular permitido Q de esa longitud, es decir, mínimo.

Lo primero que debemos plantearnos es si es posible restringir la región de \mathcal{F} donde podemos encontrar un camino rectangular mínimo permitido. Dicha restricción va a ser posible y para ello se empleará el siguiente concepto.

Definición 2.6. Sea \mathcal{B} la unión de un conjunto finito de complejos de paralelepípedos isotéticos en \mathbb{R}^n disjuntos a dos a dos y sea $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}$. La envolvente rectangular iterativa $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ de $X, Y \in \mathcal{F}$ y de \mathcal{B} es el paralelepípedo isotético en \mathbb{R}^n más pequeño tal que

$$X, Y \in \mathcal{R}_{\mathcal{B}} \quad \text{y} \quad \partial \mathcal{R}_{\mathcal{B}} \cap \text{int}(\mathcal{B}) = \emptyset.$$

La envolvente rectangular iterativa de la Definición 2.6 puede obtenerse mediante el siguiente algoritmo.

Algoritmo 2.1. (Costrucción de la envolvente rectangular iterativa)

Input: Los puntos $X = (x_1, \dots, x_n)^t$ e $Y = (y_1, \dots, y_n)^t$ en \mathcal{F} y el conjunto $\{B_1, \dots, B_N\}$ de complejos de paralelepípedos barrera en \mathbb{R}^n , cada uno de ellos descrito por el conjunto de paralelepípedos $\{B_i^1, \dots, B_i^{m_i}\}$ que lo forman, $i = 1, \dots, N$.

Paso 1: Hacer \mathcal{R} igual al paralelepípedo de centro $\kappa := ((x_1 + y_1)/2, \dots, (x_n + y_n)/2)^t$ y mitad de la anchura en cada coordenada $O\mathcal{X}_k$, $\xi_k := |\kappa_k - x_k| = |\kappa_k - y_k|$, $k = 1, \dots, n$.

Paso 2: Mientras exista un paralelepípedo $B_i^j \in B_i$, $j = 1, \dots, m_i$, $i = 1, \dots, N$, tal que $\partial \mathcal{R} \cap \text{int}(B_i^j) \neq \emptyset$, hacer \mathcal{R} igual al paralelepípedo dado por: el centro de coordenadas

$$\kappa_k := (\text{máx}\{\kappa'_k + \xi'_k, \kappa''_k + \xi''_k\} - \text{mín}\{\kappa'_k - \xi'_k, \kappa''_k - \xi''_k\})/2,$$

siendo κ'_k, κ''_k y ξ'_k, ξ''_k las coordenadas de los centros y las mitades de las anchuras en la coordenada $O\mathcal{X}_k$ del paralelepípedo \mathcal{R} construido en la etapa anterior y el paralelepípedo B_i^j respectivamente, $k = 1, \dots, n$; y mitad de la anchura en cada coordenada $O\mathcal{X}_k$, $k = 1, \dots, n$,

$$\xi_k := |\kappa_k - \text{máx}\{\kappa'_k + \xi'_k, \kappa''_k + \xi''_k\}| = |\kappa_k - \text{mín}\{\kappa'_k - \xi'_k, \kappa''_k - \xi''_k\}|.$$

Output: $\mathcal{R}_{\mathcal{B}} := \mathcal{R}$.

El Algoritmo 2.1 sigue la idea elemental de ir englobando sucesivamente mediante un paralelepípedo contenedor mínimo los paralelepípedos que forman los complejos de \mathcal{B}

hasta obtener \mathcal{R}_B . La Figura 2.10 ilustra la aplicación del Algoritmo 2.1 en un ejemplo con cinco complejos de paralelepípedos barrera en el plano.

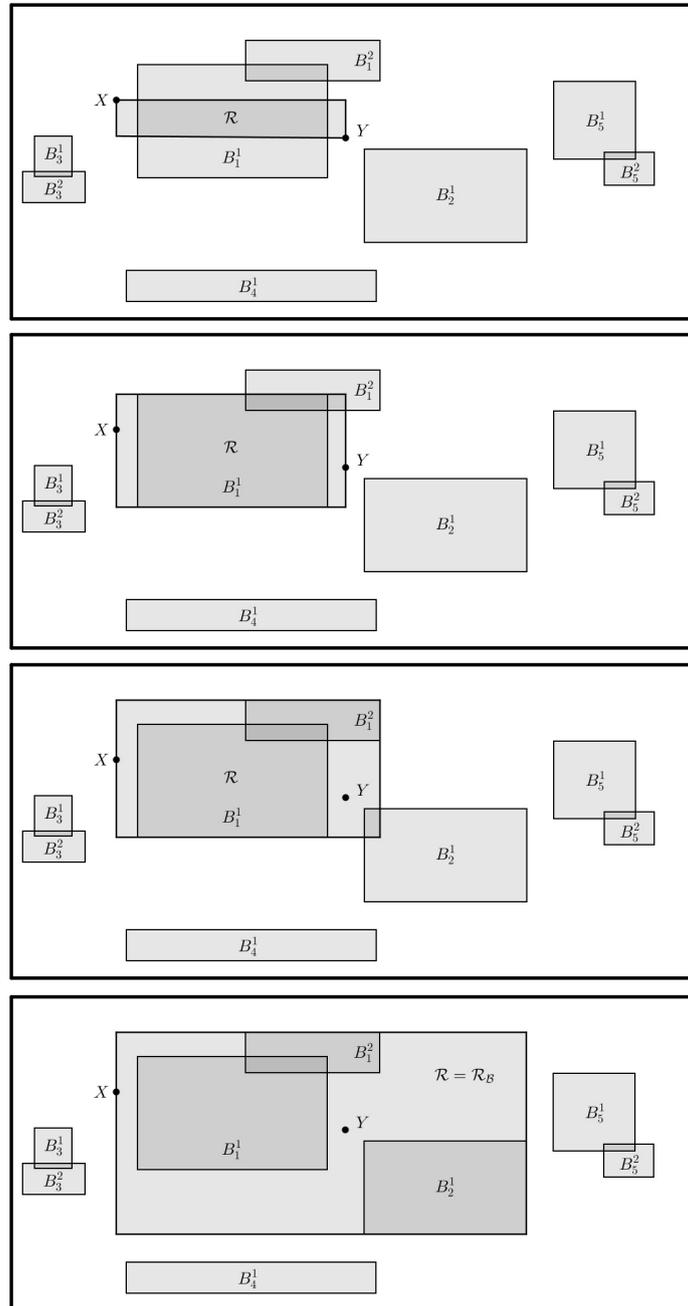


Figura 2.10: Construcción de \mathcal{R}_B usando el Algoritmo 2.1.

Lema 2.6. *El Algoritmo 2.1 halla la envolvente rectangular iterativa de $X, Y \in \mathcal{F}$ y \mathcal{B} en un número finito de pasos.*

Demostración. El Algoritmo 2.1 termina en un número finito de pasos, pues estamos asumiendo que el número de complejos barrera así como el número de paralelepípedos por los que están formados cada uno de ellos son finitos, luego el Paso 2 del algoritmo se ejecutará a lo sumo $\sum_{i=1}^N m_i$ veces, siendo N el número de complejos barrera y m_i el número de paralelepípedos que constituyen el complejo B_i , $i = 1, \dots, N$.

Para probar la corrección del Algoritmo 2.1 vamos a denotar por \mathcal{R}_l , $l = 1, \dots, L$, al paralelepípedo obtenido tras la l -ésima iteración del algoritmo, de esta forma, \mathcal{R}_1 es el paralelepípedo contenedor mínimo de X e Y , y \mathcal{R}_L es el paralelepípedo obtenido al finalizar el algoritmo. Entonces, el Algoritmo 2.1 construirá correctamente la envolvente rectangular iterativa \mathcal{R}_B si $\mathcal{R}_L = \mathcal{R}_B$.

Claramente, $\mathcal{R}_l \subseteq \mathcal{R}_{l+1}$ se tiene para todo $l = 1, \dots, L$. Por tanto, $X, Y \in \mathcal{R}_L$. Probemos ahora que $\partial\mathcal{R}_L \cap \text{int}(B_i) \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, N$. Si esto no se da, entonces existe un punto $Z \in \partial\mathcal{R}_L \cap \text{int}(B_i)$. Sea B_i^j , $j \in \{1, \dots, m_i\}$, un paralelepípedo del complejo B_i tal que $Z \in B_i^j$. Si $Z \in \text{int}(B_i^j)$ entonces llegamos a un absurdo puesto que por el Paso 2 del algoritmo el paralelepípedo B_i^j habría sido añadiendo a \mathcal{R}_L en algún momento de la ejecución, no dando lugar a que $z \in \partial\mathcal{R}_L$. Si Z pertenece a la frontera de B_i^j , entonces, por las suposiciones que estamos haciendo sobre la descripción de los complejos de paralelepípedos barrera, existirá otro paralelepípedo B_i^k del complejo B_i distinto de B_i^j tal que $Z \in \text{int}(B_i^k)$, con lo que, de nuevo por el Paso 2, se llegaría a una contradicción, teniéndose por tanto $\partial\mathcal{R}_L \cap \text{int}(\mathcal{B}) = \emptyset$. Puesto que $X, Y \in \mathcal{R}_L$ y $\partial\mathcal{R}_L \cap \text{int}(\mathcal{B}) = \emptyset$, se tiene la contención $\mathcal{R}_B \subseteq \mathcal{R}_L$, por ser \mathcal{R}_B el menor paralelepípedo isotético que verifica estas condiciones.

Por otro lado, $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_B$ se tiene por el Paso 1 del algoritmo. Supongamos ahora que $\mathcal{R}_L \not\subseteq \mathcal{R}_B$. Entonces existe un índice $r \in \{2, \dots, L\}$ tal que $\mathcal{R}_l \subseteq \mathcal{R}_B$ para todo $l \in \{1, \dots, r-1\}$, pero $\mathcal{R}_r \not\subseteq \mathcal{R}_B$. Sea B_R^r el paralelepípedo añadido en la iteración r , el cual es parte del complejo B_R . Por consiguiente, $B_R^r \not\subseteq \mathcal{R}_B$, y dado que $\partial\mathcal{R}_B \cap \text{int}(B_R) = \emptyset$, se tiene también $\partial\mathcal{R}_B \cap \text{int}(B_R^r) = \emptyset$ ya que $\text{int}(B_R^r) \subseteq \text{int}(B_R)$. Usando que $\mathcal{R}_{r-1} \subseteq \mathcal{R}_B$ llegamos a que $\text{int}(B_R^r) \cap \mathcal{R}_{r-1} = \emptyset$, lo que contradice la construcción del paralelepípedo \mathcal{R}_r en la iteración r . \square

Denotemos por W al número total de paralelepípedos que forman los complejos barrera, es decir, con la notación que venimos utilizando, $W = \sum_{i=1}^N m_i$. El Paso 1 del Algoritmo 2.1 tiene un coste $\mathcal{O}(n)$, siendo n la dimensión del espacio \mathbb{R}^n en el que estemos trabajando. Como se ha dicho en la demostración del Lema 2.6, el Paso 2 se realiza a lo sumo W veces. Las comprobaciones $\partial\mathcal{R} \cap \text{int}(B_i^j) \neq \emptyset$ del Paso 2 para los paralelepípedos $B_i^j \in B_i$, $j = 1, \dots, m_i$, $i = 1, \dots, N$, tienen un coste $\mathcal{O}(n)$, pues para llevarlas a cabo sólo tenemos que comparar los intervalos $[\kappa_k - \xi_k, \kappa_k + \xi_k]$ de ambos paralelepípedos en cada coordenada $k = 1, \dots, n$, además, estas comprobaciones se realizarán cada vez que llegamos al Paso 2 un número de veces acotado por W (una vez por cada uno de los paralelepípedos que forman los complejos barrera). Es fácil observar que la actualización de \mathcal{R} que se lleva a cabo en el Paso 2 tiene un coste $\mathcal{O}(n)$. Por tanto, una cota superior asintótica para la ejecución del Algoritmo 2.1 es $\mathcal{O}(W^2n)$.

Lema 2.7. *Sea \mathcal{B} la unión de un conjunto finito de complejos de paralelepípedos isotéticos en \mathbb{R}^n disjuntos a dos a dos y sean $X, Y \in \mathcal{F}$ con $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}$. Entonces, siempre existe un X - Y camino rectangular mínimo permitido contenido en la envolvente rectangular iterativa $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ de X, Y y \mathcal{B} .*

Demostración. Obsérvese que podemos asumir que no hay barreras en $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ puesto que esta asunción sólo podría decrementar la longitud de los caminos rectangulares que no están contenidos en $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ mientras que no tiene efecto sobre los caminos rectangulares que sí lo están. Asumimos pues que no hay barreras en $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{R}_{\mathcal{B}}$. Como sabemos, el Lema 2.3, el Lema 2.4 y el Lema 2.5 implican la existencia de un X - Y camino rectangular mínimo permitido Q . Supongamos que Q es tal que $Q \not\subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{B}}$. Sean (α_i, ω_i) los pares de puntos de la frontera de $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$, tales que, cuando consideramos Q orientado desde X hasta Y , Q abandona $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ por α_i y vuelve a entrar en la envolvente rectangular iterativa por ω_i . La parte del camino Q_{α_i, ω_i} de Q que va desde α_i a ω_i se encuentra por tanto completamente contenida en el exterior de $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$, salvo α_i y ω_i que están en la frontera. Lo que vamos a demostrar es que cada porción Q_{α_i, ω_i} de Q puede ser sustituida por un α_i - ω_i camino rectangular de la misma longitud contenido en la frontera de $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$, con lo que obtendríamos un X - Y camino rectangular mínimo permitido Q' contenido en $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$.

Sean α y ω cualquiera de los pares de puntos mencionados antes y sea $Q_{\alpha, \omega}$ la porción de Q que los une. El camino $Q_{\alpha, \omega}$ es un α - ω camino rectangular mínimo permitido, pues de lo contrario, Q tampoco sería un camino rectangular mínimo permitido. Obsérvese que, puesto que $Q_{\alpha, \omega} \cap \text{int}(\mathcal{R}_{\mathcal{B}}) = \emptyset$, si consideramos a $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ como una barrera, $Q_{\alpha, \omega}$ sigue siendo un α - ω camino rectangular mínimo permitido. Los puntos α y ω son los únicos puntos de $Q_{\alpha, \omega}$ que pertenecen a la frontera de $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$, si seguimos considerando a la envolvente rectangular iterativa $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ como una barrera (la cual contendrá a \mathcal{B} por la asunción hecha al comienzo de la demostración), por el Lema 2.4 (asumimos en adelante que \mathbb{R}^n es tal que $n \geq 3$, la demostración en \mathbb{R}^2 es análoga utilizando el Lema 2.3), existe un α - ω camino permitido ℓ_1 -mínimo P lineal a trozos con puntos críticos solamente en las caras de dimensión menor o igual que $n - 2$ de $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$. Por el Lema 2.5, $l(P) = l(Q)$. Sea $[T_i, T_{i+1}]$ cualquiera de los segmentos que forman P . Como $T_i, T_{i+1} \in \mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ y $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ es convexo por ser un poliedro, en concreto un hiperparalelepípedo de dimensión n , el segmento $[T_i, T_{i+1}] \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{B}}$. Pero $[T_i, T_{i+1}]$ es un T_i - T_{i+1} camino permitido, luego debe estar contenido en la frontera de $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$. Lo que vamos a probar a continuación es que existe una cara de dimensión $n - 1$ de $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ que contiene a $[T_i, T_{i+1}]$.

Es sabido, que las caras de dimensión k de $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ son hiperparalelepípedos de dimensión k , $k = 1, \dots, n - 1$. Como T_i está en la frontera de $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$, entonces alguna de las coordenadas $(T_i)_j$ de T_i debe ser igual a uno de los valores extremos $\kappa_j - \xi_j, \kappa_j + \xi_j$ del paralelepípedo $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ en esa coordenada, siendo κ_j la j -ésima coordenada del centro de $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ y ξ_j la mitad de la anchura en esa misma coordenada $O\mathcal{X}_j$ de $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. De lo contrario siempre podría encontrarse una bola $\mathcal{B}(T_i, \delta) \subseteq \text{int}(\mathcal{R}_{\mathcal{B}})$, $\delta > 0$, lo cual es una contradicción con que T_i pertenezca a la frontera de $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$. Lo mismo ocurre

con T_{i+1} . Si $(T_i)_j = (T_{i+1})_j = \kappa_j + s\xi_j$ con $s \in \{-1, 1\}$ para alguna coordenada $O\mathcal{X}_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$, entonces T_i y T_{i+1} están contenidos en la cara de dimensión $n-1$ de \mathcal{R}_B constiuida por el hiperparalelepípedo de dimensión $n-1$ contenido en el hiperplano $\mathcal{X}_j = \kappa_j + s\xi_j$. Si $(T_i)_j = (T_{i+1})_j \neq \kappa_j + s\xi_j$ para todo $s \in \{-1, 1\}$ y toda coordenada $O\mathcal{X}_j$, $j = 1, \dots, n$, entonces puede comprobarse que $\kappa_j - \xi_j < (T_i + T_{i+1})_j / 2 < \kappa_j + \xi_j$ para todo $j = 1, \dots, n$, es decir, el punto medio de T_i y T_{i+1} , que está contenido en $[T_i, T_{i+1}]$, pertenece al interior de \mathcal{R}_B , lo cual es una contradicción pues $[T_i, T_{i+1}]$ es un camino permitido por serlo P .

Como T_i y T_{i+1} están contenidos en un hiperparalelepípedo de dimensión $n-1$, cualquier camino rectangular que va de T_i a T_{i+1} de forma que en cada codo no trivial de la sucesión se iguala una de las coordenadas de T_i a la coordenada correspondiente de T_{i+1} (ver Figura 2.8), está contenido en dicho paralelepípedo que a su vez está contenido en la frontera de \mathcal{R}_B . Dichos T_i - T_{i+1} caminos rectangulares tienen longitud $\ell_1(T_i, T_{i+1})$, es decir, la misma que $[T_i, T_{i+1}]$ (Lema 2.2). De esta forma, podemos sustituir cada segmento $[T_i, T_{i+1}]$ de P por un T_i - T_{i+1} camino rectangular permitido de su misma longitud, siendo el resultado de esta sustitución un α - ω camino rectangular permitido de la misma longitud que $Q_{\alpha, \omega}$ contenido en la frontera de \mathcal{R}_B . \square

El Lema 2.7 nos dice que, a la hora de encontrar un X - Y camino rectangular mínimo permitido, podemos restringir la búsqueda a $\mathcal{F} \cap \mathcal{R}_B$ en lugar de considerar todo \mathcal{F} . Esto implica que, en el Problema 2.1, podemos obviar todos los complejos de hiperparalelepípedos barrera que no estén contenidos en \mathcal{R}_B , pues no son necesarios en el cálculo de $d_B(X, Y)$.

A continuación, vamos a realizar un mallado sobre \mathcal{R}_B , de forma que buscar X - Y caminos rectangulares mínimos permitidos sea equivalente a resolver un problema de camino mínimo en el grafo que constituye esta malla. La construcción de esta malla va a requerir un tratamiento distinto según estemos en el caso plano o en \mathbb{R}^n con $n \geq 3$.

Consideremos primero el caso bidimensional. Para cada punto $Z \in \{X, Y\} \cup \mathcal{P}(\mathcal{B})$, siendo $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ el conjunto finito de puntos extremos de \mathcal{B} , y para cada vector fundamental v^i de la norma rectangular, etiquetados como en el Ejemplo 1.2, y la correspondiente dirección fundamental d^i , $i = 1, \dots, 4$, sea

$$(Z + d^i)_B := \{Z + \lambda d^i : \lambda \in \mathbb{R}_+, (Z + \mu d^i) \cap \text{int}(\mathcal{B}) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{R}_B) = \emptyset \forall 0 \leq \mu \leq \lambda\}$$

el conjunto de puntos del plano que son ℓ_2 -visibles desde Z en la dirección fundamental d^i dentro de la envolvente rectangular iterativa \mathcal{R}_B de X , Y y \mathcal{B} . Diremos que $(Z + d^i)_B$ es una *línea de construcción rectangular*.

Definición 2.7. En \mathbb{R}^2 , la red

$$\mathcal{N}_{\ell_1} := \left(\bigcup_{Z \in \{X, Y\} \cup \mathcal{P}(\mathcal{B})} \bigcup_{i=1}^4 (Z + d^i)_B \right) \cup \mathcal{S}(\mathcal{B}) \cup \partial \mathcal{R}_B,$$

donde $\mathcal{S}(\mathcal{B})$ es el conjunto de las caras de dimensión 1 de todos los complejos de paralelepípedos B_i , $i = 1, \dots, N$, es la red de construcción rectangular de X , Y y \mathcal{B} .

Los puntos de intersección de los segmentos en \mathcal{N}_{ℓ_1} (los cuales pueden ser caras de dimensión 1 de un complejo de paralelepípedos barrera o caras de dimensión 1 de \mathcal{R}_B o líneas de construcción rectangular) definen el conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ de nodos de la red, y $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ es el conjunto de celdas resultantes en $\mathcal{R}_B \setminus \text{int}(\mathcal{B})$, i.e., el conjunto de poliedros con puntos extremos en $\mathcal{P}(\mathcal{B})$. Nótese que estos poliedros que constituyen las celdas son de hecho hiperparalelepípedos isotéticos, pues los segmentos en \mathcal{N}_{ℓ_1} son siempre paralelos a los ejes de coordenadas. Consideraremos que $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ está compuesto por los hiperparalelepípedos isotéticos de dimensión 2 resultantes del mallado que \mathcal{N}_{ℓ_1} produce en \mathcal{R}_B , así como por los hiperparalelepípedos isotéticos de dimensión 1 (segmentos) resultantes de dicho mallado que no están contenidos en los hiperparalelepípedos de dimensión 2 anteriores, de forma que $\bigcup_{C \in \mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})} C = \mathcal{R}_B \setminus \text{int}(\mathcal{B})$. En la Figura 2.11 se muestra un ejemplo de una red de construcción rectangular \mathcal{N}_{ℓ_1} en \mathbb{R}^2 .

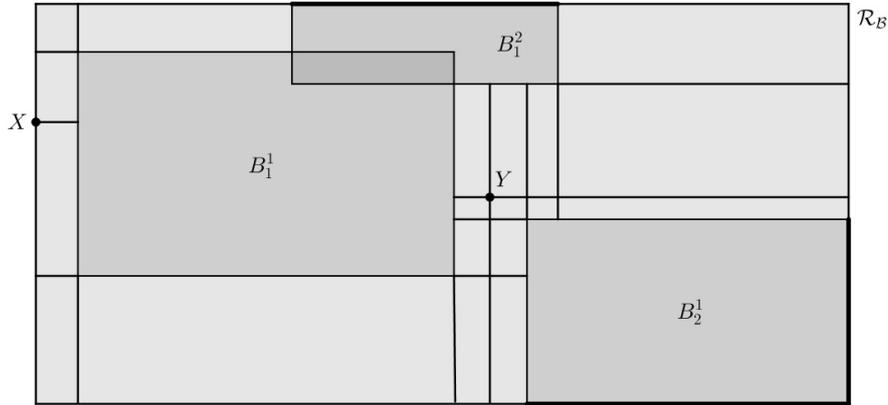


Figura 2.11: Red de construcción rectangular \mathcal{N}_{ℓ_1} de X , Y y $\mathcal{B} = B_1 \cup B_2$ en \mathbb{R}^2 . Los hiperparalelepípedos de dimensión 2 de $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ se aprecian claramente, mientras que los de dimensión 1 se han señalado como líneas de mayor grosor (hay tres).

Vamos a ver ahora cómo podemos realizar un mallado de \mathcal{R}_B en \mathbb{R}^n con $n \geq 3$. Sea B un paralelepípedo cualquiera en \mathbb{R}^n de centro $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)^t$ y mitad de la anchura en cada coordenada $O\mathcal{X}_k$ igual a ξ_k , $k = 1, \dots, n$. Las caras de dimensión $n - 1$ de B son los hiperparalelepípedos de dimensión $n - 1$ dados por $\{(z_1, \dots, \kappa_j + s\xi_j, \dots, z_n)^t \in \mathbb{R}^n : \kappa_i - \xi_i \leq z_i \leq \kappa_i + \xi_i, i = 1, \dots, n, i \neq j\}$ con $j \in \{1, \dots, n\}$ y $s \in \{-1, 1\}$, y su número es, por tanto, $2n$. Consideremos los hiperplanos \mathcal{H} paralelos a los hiperplanos $O\mathcal{X}_1 \cdots \mathcal{X}_{j-1} \mathcal{X}_{j+1} \cdots \mathcal{X}_n$, $j = 1, \dots, n$, y que cortan a B únicamente en su frontera. Cada uno de estos hiperplanos contiene una cara de dimensión $n - 1$ de B , el hiperplano \mathcal{H} dado por $\mathcal{X}_j = \kappa_j + s\xi_j$ con $s \in \{-1, 1\}$ contiene al hiperparalelepípedo $\{(z_1, \dots, \kappa_j + s\xi_j, \dots, z_n)^t \in \mathbb{R}^n : \kappa_i - \xi_i \leq z_i \leq \kappa_i + \xi_i, i = 1, \dots, n, i \neq j\}$ de dimensión $n - 1$, $j = 1, \dots, n$, luego su número es también $2n$. En cuanto a los planos Π paralelos a los planos $O\mathcal{X}_i \mathcal{X}_j$, $i, j = 1, \dots, n, i < j$, y que cortan a B únicamente

en su frontera, su número es $n(n-1)2^{n-3}$: el número de planos $O\mathcal{X}_i\mathcal{X}_j$, $i, j = 1, \dots, n$, $i < j$, es $\binom{n}{2}$, o lo que es lo mismo, $n(n-1)/2$; para cada plano $O\mathcal{X}_i\mathcal{X}_j$, las posibilidades de colocarlo en la frontera de B son 2^{n-2} , esto es, el número de posibilidades de combinar los valores extremos $\kappa_k + s\xi_k$, $s \in \{-1, 1\}$, en las coordenadas restantes $O\mathcal{X}_k$, $k = 1, \dots, n$, $k \neq i, j$. Así, $\binom{n}{2}2^{n-2} = n(n-1)2^{n-3}$ es también el número de caras (paralelepípedos) de dimensión 2 de B .

Volvamos a nuestro conjunto de complejos barreras $\{B_1, \dots, B_N\}$ y tomemos dos paralelepípedos B_i^j, B_k^h cualesquiera (que pueden pertenecer al mismo complejo o incluso ser iguales), $i, k \in \{1, \dots, N\}$, $j \in \{1, \dots, m_i\}$, $h \in \{1, \dots, m_k\}$. Sea \mathcal{H} un hiperplano de los anteriores para B_i^j tal que la cara de dimensión $n-1$ que contiene de B_i^j no está completamente contenida en el interior de B_i , y sea Π un plano de los descritos antes para B_k^h que cumple también que la cara de dimensión 2 que contiene de B_k^h no está completamente contenida en el interior de B_k . Utilizando la fórmula de la dimensión sabemos que la intersección de \mathcal{H} y Π puede ser, o bien, una recta, o bien, el propio Π . Nos interesa sólo las intersecciones de \mathcal{H} y Π que dan lugar a rectas r . Tomada la recta r , que es necesariamente paralela a uno de los ejes de coordenadas, nos quedamos con los segmentos $\{S_1, \dots, S_K\}$ de r que se obtienen al realizar el siguiente procedimiento: en primer lugar, nos quedamos con el segmento $S = r \cap \mathcal{R}_B$ de r ; y, en segundo lugar, tomamos los segmentos maximales $\{S_1, \dots, S_K\}$ de S tales $\bigcup_{i=1}^K S_i = S \setminus \text{int}(\mathcal{B})$. El número de estos segmentos es finito pues el número de paralelepípedos de cada complejo es finito así como el número de caras que poseen. Los segmentos $\{S_1, \dots, S_K\}$ son las líneas de construcción rectangular producidas por el hiperplano \mathcal{H} y el plano Π . De la misma forma, podemos construir estas líneas considerando también como hiperplanos \mathcal{H} y planos Π a los hiperplanos paralelos a $O\mathcal{X}_1 \cdots \mathcal{X}_{j-1}\mathcal{X}_{j+1} \cdots \mathcal{X}_n$, $j = 1, \dots, n$, y a los planos paralelos a $O\mathcal{X}_i\mathcal{X}_j$, $i, j = 1, \dots, n$, $i < j$, que pasan por los puntos X e Y entre los que queremos calcular $d_B(X, Y)$, así como a las caras de dimensión $n-1$ y 2 de \mathcal{R}_B . Los segmentos resultantes del proceso al considerar estos planos e hiperplanos son también líneas de construcción rectangular en \mathbb{R}^n con $n \geq 3$.

Obsérvese que, puesto que la cara de dimensión $n-1$ de B_i^j que contiene el hiperplano \mathcal{H} no está completamente contenida en el interior de B_i y la cara de dimensión 2 de B_k^h que contiene el plano Π no está completamente contenida en el interior de B_k , \mathcal{H} y Π contienen, respectivamente, una cara de dimensión $n-1$ de B_i y una cara de dimensión 2 de B_k . De hecho, en lo que estamos interesados realmente es en intersecar hiperplanos que contienen caras de dimensión $n-1$ de un complejo con planos que contienen caras de dimensión 2 de otro o el mismo complejo. Sin embargo, el procedimiento anterior constituye una forma sencilla de obtener las líneas de construcción rectangular a partir de los paralelepípedos que constituyen los complejos, y no a partir de estos últimos directamente.

Definición 2.8. En \mathbb{R}^n con $n \geq 3$, la red de construcción rectangular \mathcal{N}_{ℓ_1} de X, Y y \mathcal{B} es la formada por la unión de las líneas de construcción rectangular descritas en los párrafos anteriores formadas entre todos los pares posibles de hiperplanos \mathcal{H} y planos Π en las condiciones del mismo párrafo.

Al igual que en \mathbb{R}^2 , los puntos de intersección de los segmentos en \mathcal{N}_{ℓ_1} definen el conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ de nodos de la red, y $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ es el conjunto de celdas resultantes en $\mathcal{R}_B \setminus \text{int}(\mathcal{B})$. Los poliedros que constituyen las celdas de $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ son ahora hiperparalelepípedos isotéticos de dimensión n o $n - 1$. Para ver esta última afirmación tenemos que mostrar que dado un punto $Z \in \mathcal{P}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ existe un segmento que parte de Z en todas las direcciones fundamentales visibles desde Z (esto es, si Z pertenece a la cara de dimensión $n - 1$ de un paralelepípedo que hace de barrera o de \mathcal{R}_B , no tiene sentido considerar la dirección fundamental que al partir de Z se introduce inmediatamente después de Z en el interior del paralelepípedo o de \mathcal{R}_B). El punto Z puede ser un punto extremo de un segmento de \mathcal{N}_{ℓ_1} o el resultado de la intersección de dos segmentos de \mathcal{N}_{ℓ_1} . Supongamos que Z es un punto extremo de un segmento de \mathcal{N}_{ℓ_1} . Sea r la recta a la que pertenece dicho segmento y a partir de la cual se obtiene el mismo. Sean \mathcal{H} y Π , respectivamente, el hiperplano y el plano cuya intersección da lugar a r . Por tanto, $Z \in r, \mathcal{H}, \Pi$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $O\mathcal{X}_1$ es la dirección en la que varía r , que \mathcal{H} es paralelo al hiperplano $\mathcal{X}_2 = 0$ y que Π es paralelo al plano que varía en las direcciones $O\mathcal{X}_1$ y $O\mathcal{X}_2$ siendo constante en el resto. Por la construcción descrita de \mathcal{N}_{ℓ_1} , el que Z sea un punto extremo de un segmento S de \mathcal{N}_{ℓ_1} significa que existe una cara de dimensión $n - 1$ de un paralelepípedo de los complejos barreras o de \mathcal{R}_B que impide que el segmento S se prolongue por Z en la dirección $O\mathcal{X}_1$. Sea \mathcal{H}' el hiperplano que contiene a dicha cara, el cual será paralelo al hiperplano $\mathcal{X}_1 = 0$. Se tiene, por tanto, $Z \in \mathcal{H}'$. Por último consideremos una cara de dimensión $n - 1$ que contiene a la cara de dimensión 2 del paralelepípedo o de \mathcal{R}_B que da lugar al plano Π , en caso de que Π tenga algunos de estos orígenes. Sea \mathcal{H}'' el hiperplano que la contiene, el cual es paralelo al hiperplano $\mathcal{X}_j = 0$ con $j \neq 1, 2$. Si Π es un plano que pasa por X o Y , entonces igualmente tomamos un hiperplano \mathcal{H}'' que pase por X o Y y que contenga a Π . También en este caso \mathcal{H}'' es paralelo al hiperplano $\mathcal{X}_j = 0$ con $j \neq 1, 2$. Como $Z \in \Pi$ se tiene $Z \in \mathcal{H}''$. Por último, observemos que $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ y \mathcal{H}'' son todos hiperplanos que intervienen en la construcción de \mathcal{N}_{ℓ_1} (contienen a caras de dimensión $n - 1$ de paralelepípedos no contenidas completamente en el interior del complejo correspondiente, o de \mathcal{R}_B , o pasan por X o Y), por tanto, dado cualquier sentido para una dirección $O\mathcal{X}_k$, nótese que siempre puede tomarse uno de estos hiperplanos y un plano contenido en otro de los hiperplanos que pase por Z (plano que interviene también en la construcción de \mathcal{N}_{ℓ_1}) cuya intersección dé lugar a un segmento de \mathcal{N}_{ℓ_1} que pasa por Z y continúa en el sentido dado de $O\mathcal{X}_k$ si esto es posible. Si Z es el resultado de la intersección de dos segmentos de \mathcal{N}_{ℓ_1} se razona de la misma forma. Las celdas de dimensión $n - 1$ de $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ son las contenidas en las caras de dimensión $n - 1$ de \mathcal{R}_B y se deben, en el caso de que ocurran, a las intersecciones de las fronteras de los complejos con la frontera de \mathcal{R}_B .

Analicemos cuál es el coste computacional de la construcción de \mathcal{N}_{ℓ_1} . La red de construcción rectangular \mathcal{N}_{ℓ_1} es una red geométrica determinada por sus nodos $\mathcal{P}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ y los segmentos (con su longitud correspondiente) que los unen, por tanto, determinados estos tenemos aquella. Comencemos por el caso bidimensional. Sea Σ el número

de puntos en $\{X, Y\} \cup \mathcal{P}(\mathcal{B})$, siendo $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ el conjunto finito de puntos extremos de \mathcal{B} , y sea $W = \sum_{i=1}^N m_i$ el número total de paralelepípedos que forman los complejos barrera de \mathcal{B} . En primer lugar tenemos que obtener $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ con un coste de $\mathcal{O}(W^2)$. Dado un punto de $\{X, Y\} \cup \mathcal{P}(\mathcal{B})$ tenemos que considerar las cuatro líneas de construcción rectangular que parten de él. Para saber hasta dónde se extienden dichas líneas debemos detectar si intersecan el interior de los paralelepípedos que constituyen los complejos barrera, así como si intersecan alguna de las caras de dimensión 1 de $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$. Las comprobación de intersección con el interior de un paralelepípedo así como con una cara de dimensión 1 de $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ se realiza en tiempo constante. Las líneas de construcción se obtienen, por tanto, en un tiempo de $\mathcal{O}(4\Sigma)\mathcal{O}(W+4) = \mathcal{O}(\Sigma W)$. El número de líneas de construcción está acotado por $\mathcal{O}(\Sigma)$. Para obtener los puntos $\mathcal{P}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ y dividir las líneas de construcción en segmentos debemos comprobar las intersecciones entre líneas de construcción, lo que tiene un coste $\mathcal{O}(\Sigma^2)$. Para obtener la longitud de los segmentos, tomamos cada línea de construcción y la recorremos calculando la distancia entre nodos adyacentes en dicha línea, como el número de nodos en una línea de construcción es a lo sumo $\mathcal{O}(\Sigma)$, las longitudes de los segmentos se hallan en un tiempo $\mathcal{O}(\Sigma^2)$. Luego \mathcal{N}_{ℓ_1} se obtiene en $\mathcal{O}(\max\{W^2, \Sigma^2\})$. Puesto que si los complejos están adecuadamente descritos por sus paralelepípedos $W < \Sigma$, \mathcal{N}_{ℓ_1} se tiene en un tiempo $\mathcal{O}(\Sigma^2)$.

En \mathbb{R}^n con $n \geq 3$, el paso inicial del cálculo de $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ conlleva un tiempo $\mathcal{O}(W^2n)$. La intersección de todos los hiperplanos \mathcal{H} con los planos Π para obtener las rectas r tiene un coste $\mathcal{O}(W^2n^42^{n-3})$ (véase la discusión sobre el número de caras de dimensión $n-1$ y 2 de un paralelepípedo en \mathbb{R}^n en los párrafos precedentes, y considérese que la intersección de un hiperplano y un plano en \mathbb{R}^n requiere un número $\mathcal{O}(n)$ de operaciones). La división en segmentos de cada recta r requiere comprobar la intersección de ésta con el interior de todos los paralelepípedos que constituyen los complejos, cada una de estas comprobaciones se realiza en $\mathcal{O}(n)$, luego la división de todas las rectas r en segmento tiene un coste $\mathcal{O}(W^3n^52^{n-3})$. Por ese mismo coste calculamos las longitudes de los segmentos. Para obtener los puntos $\mathcal{P}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ debemos comprobar las intersecciones (cada comprobación de intersección requiere $\mathcal{O}(n)$ operaciones) entre los segmentos anteriores, lo que tiene un coste $\mathcal{O}(W^6n^{11}2^{2n-6})$. Si dos segmentos intersecan en un punto estos deben dividirse en nuevos segmentos cuyas longitudes deben ser calculadas (para que esto se entienda, al intersecar $[(1, 0)^t, (1, 2)^t]$ con $[(0, 1)^t, (2, 1)^t]$, debemos calcular la longitud de los segmentos $[(1, 0)^t, (1, 1)^t]$, $[(1, 1)^t, (1, 2)^t]$, $[(0, 1)^t, (1, 1)^t]$ y $[(1, 1)^t, (2, 1)^t]$, pues $(1, 1)^t$ es un nuevo nodo), pero este cálculo puede realizarse en tiempo constante en el mismo momento en el que se obtiene los puntos $\mathcal{P}(\mathcal{N}_{\ell_1})$. Por tanto, la obtención de \mathcal{N}_{ℓ_1} en \mathbb{R}^n con $n \geq 3$ tiene un coste $\mathcal{O}(W^6n^{11}2^{2n-6})$.

Teorema 2.1. *El Problema 2.1 es equivalente al problema de hallar el camino mínimo entre X e Y en la red geométrica \mathcal{N}_{ℓ_1} .*

Demostración. En primer lugar, obsérvese que efectivamente X es un nodo de \mathcal{N}_{ℓ_1} , el cual se obtiene por la intersección sucesiva entre los hiperplanos \mathcal{H} paralelos a los

hiperplanos $O\mathcal{X}_1 \cdots \mathcal{X}_{j-1}\mathcal{X}_{j+1} \cdots \mathcal{X}_n$, $j = 1, \dots, n$, y los planos Π paralelos a los planos $O\mathcal{X}_i\mathcal{X}_j$, $i, j = 1, \dots, n$, $i < j$, que pasan por dicho punto. Por el mismo motivo, $Y \in \mathcal{P}(\mathcal{N}_{\ell_1})$.

Por el Lema 2.7, existe un X - Y camino rectangular mínimo permitido Q contenido en la envolvente rectangular iterativa $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ de X , Y y \mathcal{B} . Sean C_1, \dots, C_K la sucesión ordenada de celdas de $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$, las cuales son hiperparalelepípedos de dimensión n o $n - 1$, que atraviesa Q desde X hasta Y . Si en algún momento, Q recorre la frontera de varias celdas de $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$, nos quedamos con un conjunto minimal de celdas que asegure que $Q \subseteq \bigcup_{i=1}^K C_i$. Por la construcción que se ha hecho de \mathcal{N}_{ℓ_1} , C_i y C_{i+1} comparten una y sólo una (C_i y C_{i+1} son isotéticos) cara maximal, esto es, de dimensión $n - 1$ o $n - 2$ dependiendo de la dimensiones de C_i y C_{i+1} . Notemos por $\zeta_{i,i+1}$ a la cara maximal común de C_i y C_{i+1} , $i = 1, \dots, K - 1$.

El punto X pertenece entonces a C_1 , más aún, es un vértice de este hiperparalelepípedo. Sea Z el último punto de Q en C_1 y el primer punto de Q en C_2 . El punto Z pertenece pues a la frontera de C_1 y a la frontera de C_2 , más concretamente a $\zeta_{1,2}$. Tomemos ahora el punto Z' el cual es el último punto de Q en C_2 y el primer punto de Q en C_3 . Claramente Z' pertenece a $\zeta_{2,3}$. La porción $Q_{X,Z'}$ de Q que va de X a Z' es un X - Z' camino rectangular mínimo permitido, de lo contrario Q no sería un X - Y camino rectangular mínimo permitido. Supongamos, que $\zeta_{1,2}$ es una cara de dimensión $n - 1$ de C_1 . Asumamos que dicha cara es aquella en la que $\mathcal{X}_j = \kappa_j + s\xi_j$, siendo κ_j y ξ_j , respectivamente, el centro y la mitad de la anchura en la coordenada $O\mathcal{X}_j$ de C_1 , con $j \in \{1, \dots, n\}$ y $s \in \{-1, 1\}$. Si X es el vértice $(x_1, \dots, x_n)^t$ de C_1 , el segmento $[(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)^t, (x_1, \dots, \kappa_j + s\xi_j, \dots, x_n)^t]$ es un camino rectangular mínimo permitido (permitido pues está contenido en C_1) que va de X a $\zeta_{1,2}$. Denotemos V al vértice $(x_1, \dots, \kappa_j + s\xi_j, \dots, x_n)^t$ de C_1 . Si $\zeta_{1,2}$ es una cara de dimensión $n - 2$ de C_1 , asumimos que dicha cara es aquella en la que $\mathcal{X}_j = \kappa_j + s_j\xi_j$ y $\mathcal{X}_k = \kappa_k + s_k\xi_k$, con $j, k \in \{1, \dots, n\}$, $j < k$, $s_j \in \{-1, 1\}$ y $s_k \in \{-1, 1\}$. En este caso los segmentos $[(x_1, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots, x_n)^t, (x_1, \dots, \kappa_j + s_j\xi_j, \dots, x_k, \dots, x_n)^t]$ y $[(x_1, \dots, \kappa_j + s_j\xi_j, \dots, x_k, \dots, x_n)^t, (x_1, \dots, \kappa_j + s_j\xi_j, \dots, \kappa_k + s_k\xi_k, \dots, x_n)^t]$ constituyen un camino rectangular mínimo permitido (de nuevo permitido por estar contenido en C_1) que va de X a $\zeta_{1,2}$. Ahora V es el vértice $(x_1, \dots, \kappa_j + s_j\xi_j, \dots, \kappa_k + s_k\xi_k, \dots, x_n)^t$. En cualquier caso, obsérvese que el camino rectangular Q' que surge de la unión del X - V camino rectangular permitido anterior y cualquier V - Z camino rectangular mínimo permitido tal que en cada codo no trivial se iguala una de las componentes de V a la componente de Z correspondiente (permitido en este caso pues V y Z son ℓ_1 -visibles ya que pertenecen a la misma cara $\zeta_{1,2}$ del hiperparalelepípedo C_1) es una amalgamación del camino rectangular mínimo permitido $Q_{X,Z}$ que es la porción de Q que va de X a Z . Entonces, el camino unión Q'' de Q' y $Q_{Z,Z'}$, siendo este último la porción de Q que va de Z a Z' , es una amalgamación de $Q_{X,Z'}$ y, por tanto, un X - Z' camino rectangular mínimo permitido.

Si ahora repetimos la construcción anterior de Q'' cambiando los papeles de C_1 , C_2 , X , Z , Z' y $\zeta_{1,2}$, respectivamente, por los de C_2 , C_3 , V (que es un vértice de C_2),

Z' , Z'' (último punto de Q en C_3 y primer punto de Q en C_4) y $\zeta_{2,3}$, obtenemos un V - Z'' camino rectangular mínimo permitido Q''' que pasa por un vértice V' de $\zeta_{2,3}$. Si consideramos la parte del camino $Q'' \cup Q'''$ que va de X a V' , dicha parte constituye un X - V' camino rectangular mínimo permitido el cual se realiza completamente sobre los segmentos de \mathcal{N}_{ℓ_1} y que pasa por los nodos correspondientes de la red. Repitiendo sucesivamente este proceso en la sucesión de celdas C_1, \dots, C_K , obtenemos un X - $V^{(K)}$ camino rectangular mínimo permitido $Q^{(K)}$ sobre los segmentos de \mathcal{N}_{ℓ_1} , siendo $V^{(K)}$ un vértice del hiperparalelepípedo C_K . Finalmente, puesto que $V^{(K)}$ e Y son vértices de C_K , existe un $V^{(K)}$ - Y camino rectangular mínimo permitido $Q^{(K+1)}$ sobre los segmentos de \mathcal{N}_{ℓ_1} que son caras de dimensión 1 de C_K , y por tanto, $Q^{(K)} \cup Q^{(K+1)}$ es un X - Y camino rectangular mínimo permitido sobre los segmentos de \mathcal{N}_{ℓ_1} . \square

El Teorema 2.1 deriva en el primer método para la resolución exacta del Problema 2.1: aplicar el algoritmo de Dijkstra sobre el grafo que constituye \mathcal{N}_{ℓ_1} . Demos una cota superior asintótica para la complejidad de este método. En \mathbb{R}^2 , ya habíamos razonado que el número de líneas de construcción rectangular estaba acotado por $\mathcal{O}(\Sigma)$. El número de nodos de \mathcal{N}_{ℓ_1} será entonces como mucho del orden de $\mathcal{O}(\Sigma^2)$ (en el peor de los casos todas las líneas de construcción intersecan dos a dos). Puesto que el algoritmo de Dijkstra tiene una complejidad del orden del cuadrado del número de nodos del grafo en el que se aplica, la aplicación en el caso que nos ocupa tiene un coste de $\mathcal{O}(\Sigma^4)$. A esto hay que sumarle el coste de construcción de \mathcal{N}_{ℓ_1} (que incluye el coste de construcción de \mathcal{R}_B), el cual es $\mathcal{O}(\Sigma^2)$, por lo que el coste total de este método en el caso plano es $\mathcal{O}(\Sigma^4)$. En \mathbb{R}^n con $n \geq 3$, cada recta r formada por la intersección de los hiperplanos \mathcal{H} y los planos Π , puede dar lugar a $\mathcal{O}(W)$ segmentos cuando se realiza su división para que no interseque el interior de los W paralelepípedos que forman los complejos barreras. Como el número de estas rectas es del orden de $\mathcal{O}(W^2 n^3 2^{n-3})$, el número de segmentos a los que dan lugar es del orden de $\mathcal{O}(W^3 n^3 2^{n-3})$. Los nodos de \mathcal{N}_{ℓ_1} se obtienen por la intersección dos a dos de estos segmentos, luego a lo sumo habrá $\mathcal{O}(W^6 n^6 2^{2n-6})$. La aplicación del algoritmo de Dijkstra a \mathcal{N}_{ℓ_1} tiene entonces un coste $\mathcal{O}(W^{12} n^{12} 2^{4n-12})$, que predomina sobre el coste de la construcción del propio grafo \mathcal{N}_{ℓ_1} que era $\mathcal{O}(W^6 n^{11} 2^{2n-6})$.

2.3.2. Formulaciones de programación lineal y entera mixta

El Problema 2.1 es susceptible de ser formulado como un problema de programación lineal y entera mixta. El modelado mediante un problema de programación matemática y su posterior resolución a través de un solver, es una técnica más flexible que otros métodos de resolución de problemas, en el sentido de que nuevas características pueden ser exigidas a la solución del problema considerado sin más que añadir restricciones al problema de programación matemática que lo modela. Por contra, cuando el problema de programación matemática incluye variables enteras o binarias, su resolución exacta puede llegar a ser computacionalmente muy costosa, dependiendo del

número de dichas variables, pues obtener la solución en este caso pasa por la aplicación de métodos de ramificación y acotación. En esta subsección se presentan modelos de programación matemática originales para la resolución del Problema 2.1. Puesto que la formulación de estos problemas no es inmediata, comenzaremos estudiando el caso en el que el conjunto de complejos de hiperparalelepípedos barrera está constituido por un único complejo, el cual es además un único paralelepípedo barrera. Continuaremos con el caso en el que existen dos paralelepípedos que hacen de barrera en el espacio ambiente, para finalmente, tratar el problema general que nos ocupa, el Problema 2.1. Para la obtención de los modelos, será necesario apoyarnos en propiedades que se deriven de los resultados presentados en las secciones precedentes y que proporcionen la mayor información posible sobre las soluciones de estos problemas en cada caso.

Como hemos dicho, vamos a comenzar con el caso en el que $\mathcal{B} = B$ es un único paralelepípedo en \mathbb{R}^n de centro $(\kappa_1, \dots, \kappa_n)^t$ y mitad de la anchura en cada coordenada $\xi_j, j = 1, \dots, n$. Los siguientes lemas son resultados técnicos que nos serán de ayuda en la demostración de algunos resultados posteriores. El primero de ellos no es específico para el caso en el que $\mathcal{B} = B$, sino que es válido también en el caso general en el que \mathcal{B} es la unión de un conjunto finito de complejos de paralelepípedos barrera.

Lema 2.8. *Todo camino rectangular permitido uniendo los puntos $X, Y \in \mathcal{F}$ de longitud $\ell_1(X, Y)$ está contenido en el paralelepípedo contenedor mínimo $\mathcal{R}_{X,Y}$ de X e Y , esto es, el paralelepípedo de centro $\kappa := ((x_1 + y_1)/2, \dots, (x_n + y_n)/2)^t$ y mitad de la anchura en cada coordenada $O\mathcal{X}_k, \xi_k := |\kappa_k - x_k| = |\kappa_k - y_k|, k = 1, \dots, n$*

Demostración. Supongamos que existe un X - Y camino rectangular permitido Q de longitud $\ell_1(X, Y)$ que no está completamente contenido en $\mathcal{R}_{X,Y}$. Sea $Z = (z_1, \dots, z_n)^t$ un punto de Q tal que $Z \notin \mathcal{R}_{X,Y}$. Como $Z \notin \mathcal{R}_{X,Y}$, para algún $j \in \{1, \dots, n\}$, $|x_j - z_j| > |x_j - y_j|$ o $|y_j - z_j| > |x_j - y_j|$, de lo contrario Z pertenecería a $\mathcal{R}_{X,Y}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $|x_j - z_j| > |x_j - y_j|$. Cada segmento de un X - Y camino rectangular mínimo permitido produce un acercamiento entre las coordenadas de X e Y en una de las direcciones coordenadas. En el mejor de los casos, en una dirección $O\mathcal{X}_i$ se consigue igualar las coordenadas de X e Y en esa dirección empleando una longitud total entre todos los segmentos que avanzan en esa dirección de $|x_i - y_i|$. Pero, para llegar en Q desde X a Y , en la dirección $O\mathcal{X}_j$ se recorre una longitud total entre todos los segmentos que avanzan en esa dirección al menos de $|x_j - z_j|$ (para llegar primero de X a Z), que es mayor estrictamente que $|x_j - y_j|$. Como $\ell_1(X, Y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$, si Q tiene esta longitud, como $|x_j - z_j| > |x_j - y_j|$, esto implica que en al menos una de las direcciones $O\mathcal{X}_i, i \neq j$, se recorre una longitud total entre todos los segmentos que avanzan en esa dirección menor estricta que $|x_i - y_i|$, lo cual no es posible. \square

El siguiente resultado caracteriza cuando los puntos $X, Y \in \mathcal{F}$, con $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n \setminus \text{int}(B)$, no son ℓ_1 -visibles, en cuyo caso indica el valor de $d_B(X, Y)$.

tales que su j -ésima coordenada se encuentra en el intervalo $(\kappa_j - \xi_j, \kappa_j + \xi_j)$ y a que necesariamente $\min\{x_j, y_j\} < \kappa_j - \xi_j$, $\kappa_j + \xi_j < \max\{x_j, y_j\}$ por las hipótesis $\text{Proy}_j(X), \text{Proy}_j(Y) \in \text{int}(\text{Proy}_j(B))$ y $\min\{x_j, y_j\} < \kappa_j < \max\{x_j, y_j\}$ ya que $X, Y \in \mathcal{F}$, o dicho de otro modo, $\mathcal{R}_{X,Y} \setminus \text{int}(B)$ tiene dos componentes conexas, en una está X y en la otra Y , luego no existe camino rectangular permitido contenido en $\mathcal{R}_{X,Y}$ que pueda unir X e Y . Esto contradice que Q pueda ser un X - Y camino rectangular permitido contenido en $\mathcal{R}_{X,Y}$.

Por último, vamos a probar la expresión de $d_B(X, Y)$ que da el lema. Sea $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\text{Proy}_j(X), \text{Proy}_j(Y) \in \text{int}(\text{Proy}_j(B))$ y $\min\{x_j, y_j\} < \kappa_j < \max\{x_j, y_j\}$. Esto sólo puede darse para una de las coordenadas de $O\mathcal{X}_1 \cdots \mathcal{X}_n$, la j -ésima en este caso, ya que B es isotético. Asumamos, sin pérdida de generalidad, que $x_j < \kappa_j < y_j$. Consideremos la envolvente rectangular iterativa \mathcal{R}_B de X, Y y B . Obsérvese que \mathcal{R}_B es el paralelepípedo de centro con coordenadas $\kappa'_k = \kappa_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$, $k \neq j$, y mitad de la anchura en cada coordenada $\xi'_k = \xi_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$, $k \neq j$, mientras que $\kappa'_j = (x_j + y_j)/2$ y $\xi'_j = |x_j - \kappa'_j| = |y_j - \kappa'_j|$. Usando el Lema 2.7, para determinar $d_B(X, Y)$, podemos limitarnos a buscar un X - Y camino rectangular mínimo permitido Q en \mathcal{R}_B . Pero, por la descripción que hemos hecho de \mathcal{R}_B , obsérvese que entonces Q debe pasar necesariamente por alguna de las caras ζ_i^s de dimensión $n - 1$ de B en la que la coordenada $O\mathcal{X}_i$ es constante e igual a $\kappa_i + s\xi_i$, con $i \neq j$ y $s \in \{-1, 1\}$. El camino rectangular permitido Q' en \mathcal{R}_B dado por los segmentos $[(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)^t, (x_1, \dots, \kappa_j - x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)^t]$ (suponiendo sin pérdida de generalidad $j < i$) y $[(x_1, \dots, \kappa_j - x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)^t, (x_1, \dots, \kappa_j - x_j, \dots, \kappa_i + s\xi_i, \dots, x_n)^t]$, que llega al punto $Z = (x_1, \dots, \kappa_j - x_j, \dots, \kappa_i + s\xi_i, \dots, x_n)^t$ de ζ_i^s , es un camino rectangular permitido y mínimo que va desde X a ζ_i^s , pues su longitud es $\ell_1(X, Z) = |x_j - (\kappa_j - x_j)| + |x_i - (\kappa_i + s\xi_i)|$. El punto Z es igual a X en todas sus componentes salvo dos, la j -ésima y la i -ésima, en las que toma valores extremos de B en la coordenada correspondiente, sin embargo, este cambio en las componentes de X es suficiente para que no se dé $\text{Proy}_{\hat{k}}(Z), \text{Proy}_{\hat{k}}(Y) \in \text{int}(\text{Proy}_{\hat{k}}(B))$ para ningún $k \in \{1, \dots, n\}$, luego, por lo que llevamos probado del lema, Z e Y son ℓ_1 -visibles. Entonces, nuevamente por el Lema 2.7, existe un Z - Y camino rectangular mínimo permitido Q'' en \mathcal{R}_B (\mathcal{R}_B contiene a la envolvente rectangular iterativa de Z, Y y B) de longitud $\ell_1(X, Z)$. El X - Y camino rectangular $Q = Q' \cup Q''$ es un X - Y camino rectangular permitido, mínimo entre todos los que pasan por la cara ζ_i^s de B , de longitud

$$\sum_{k=1, \dots, n, k \neq i} |x_k - y_k| + |x_i - (\kappa_i + s\xi_i)| + |y_i - (\kappa_i + s\xi_i)|.$$

Luego $d_B(X, Y)$ se obtiene al tomar como cara ζ_i^s de B la que proporciona el X - Y camino rectangular más corto, $i \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, $s \in \{-1, 1\}$. \square

Si X e Y son ℓ_1 -visibles, $d_B(X, Y) = \ell_1(X, Y)$ y hallar un X - Y camino rectangular de esa longitud no es difícil, basta buscarlo en $\mathcal{R}_{X,Y} \setminus \text{int}(B)$, siendo $\mathcal{R}_{X,Y}$ el paralelepípedo contenedor mínimo de X e Y . Si X e Y no son ℓ_1 -visibles, el Lema 2.9 nos

dice que si $\text{Proy}_{\hat{j}}(X), \text{Proy}_{\hat{j}}(Y) \in \text{int}(\text{Proy}_{\hat{j}}(B))$ y $\min\{x_j, y_j\} < \kappa_j < \max\{x_j, y_j\}$, cosa que debe darse necesariamente para un único $j \in \{1, \dots, n\}$, entonces $d_B(X, Y)$ es la menor de las distancias

$$\sum_{k=1, \dots, n, k \neq i} |x_k - y_k| + |x_i - (\kappa_i + s\xi_i)| + |y_i - (\kappa_i + s\xi_i)|,$$

siendo $i \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, y $s \in \{-1, 1\}$. Para cada una de estas distancias, un X - Y camino rectangular permitido de esa longitud es (suponiendo sin pérdida de generalidad $x_j < y_j$ y $j < i$) el dado por los segmentos

$$\begin{aligned} & [(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n)^t, (x_1, x_2, \dots, v_j^-, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n)^t], \\ & [(x_1, x_2, \dots, v_j^-, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n)^t, (x_1, x_2, \dots, v_j^-, \dots, x_{i-1}, \bar{v}_i, \dots, x_n)^t], \\ & [(x_1, x_2, \dots, v_j^-, \dots, x_{i-1}, \bar{v}_i, \dots, x_n)^t, (x_1, x_2, \dots, v_j^+, \dots, x_{i-1}, \bar{v}_i, \dots, x_n)^t], \\ & [(x_1, x_2, \dots, v_j^+, \dots, x_{i-1}, \bar{v}_i, \dots, x_n)^t, (y_1, x_2, \dots, v_j^+, \dots, x_{i-1}, \bar{v}_i, \dots, x_n)^t], \\ & [(y_1, x_2, \dots, v_j^+, \dots, x_{i-1}, \bar{v}_i, \dots, p_n)^t, (y_1, y_2, \dots, v_j^+, \dots, x_{i-1}, \bar{v}_i, \dots, x_n)^t], \quad (2.5) \\ & \quad \vdots \\ & [(y_1, y_2, \dots, v_j^+, \dots, y_{i-1}, \bar{v}_i, \dots, x_n)^t, (y_1, y_2, \dots, v_j^+, \dots, y_{i-1}, y_i, \dots, x_n)^t], \\ & \quad \vdots \\ & [(y_1, y_2, \dots, v_j^+, \dots, y_{i-1}, y_i, \dots, y_n)^t, (y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_{i-1}, y_i, \dots, y_n)^t], \end{aligned}$$

siendo $v_j^- = \kappa_j - \xi_j$, $v_j^+ = \kappa_j + \xi_j$ y $\bar{v}_i = \kappa_j + s\xi_i$, como puede observarse en la construcción que se hace del mismo en el Lema 2.9. Para un j fijado, existen $(n-1)2$ de estos caminos. Luego para resolver el problema que nos ocupa podemos formular un problema de programación matemática que decida adecuadamente qué camino escoger entre un número de caminos igual a $1 + n(n-1)2$, uno para el caso en el que X e Y son ℓ_1 -visbles, y $2n(n-1)$ para el caso en que $Y \in \text{sombra}_{\ell_1}(X)$. Dicho problema es el que se recoge en el siguiente teorema, para facilitar la formulación del mismo vamos a utilizar la notación $X^1 = X$ y $X^2 = Y$, así $x_i^1 = x_i$ y $x_i^2 = y_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Teorema 2.2. *El Problema 2.1 cuando $\mathcal{B} = B$ es un único hiperparalelepípedo de dimensión n , de centro $(\kappa_1, \dots, \kappa_n)^t$ y mitad de la anchura en cada coordenada ξ_j ,*

$j = 1, \dots, n$, es equivalente al problema de programación lineal y entera mixta

$$\text{mín } d \quad (2.6)$$

$$\text{s.a: } d \geq d^0 - (1 - \omega^0)M^2, \quad (2.7)$$

$$d \geq d^{krs} - (1 - \omega^{krs})M^2, \quad \forall k = 1, \dots, n, r = 1, \dots, n, r \neq k, s = -1, 1, \quad (2.8)$$

$$\omega^0 + \sum_{\substack{k=1, \dots, n, r=1, \dots, n, \\ r \neq k, s=-1, 1}} \omega_{krs} = 1, \quad (2.9)$$

$$u_{jk}^+ - u_{jk}^- = x_k^j - \kappa_k, \quad \forall j = 1, 2, k = 1, \dots, n, \quad (2.10)$$

$$u_{jk}^+ \leq M\delta_{jk}, \quad \forall j = 1, 2, k = 1, \dots, n, \quad (2.11)$$

$$u_{jk}^- \leq M(1 - \delta_{jk}), \quad \forall j = 1, 2, k = 1, \dots, n, \quad (2.12)$$

$$d_{jk}^c = u_{jk}^+ + u_{jk}^-, \quad \forall j = 1, 2, k = 1, \dots, n, \quad (2.13)$$

$$d_k^0 \geq x_k^1 - x_k^2, \quad \forall k = 1, \dots, n, \quad (2.14)$$

$$d_k^0 \geq x_k^2 - x_k^1, \quad \forall k = 1, \dots, n, \quad (2.15)$$

$$d_{jks}^{\zeta} \geq x_k^j - (\kappa_k + s\xi_k), \quad \forall j = 1, 2, k = 1, \dots, n, s = -1, 1, \quad (2.16)$$

$$d_{jks}^{\zeta} \geq (\kappa_k + s\xi_k) - x_k^j, \quad \forall j = 1, 2, k = 1, \dots, n, s = -1, 1, \quad (2.17)$$

$$d_{jk}^c \geq \xi_k - \xi_k \lambda_{jk}^1, \quad \forall j = 1, 2, k = 1, \dots, n, \quad (2.18)$$

$$\sum_{h=1, \dots, n, h \neq k} \lambda_{jh}^1 \leq (n-2) + \lambda_{jk}^2, \quad \forall j = 1, 2, k = 1, \dots, n, \quad (2.19)$$

$$\lambda_{1k}^2 + \lambda_{2k}^2 \leq 1 + \Lambda_k, \quad \forall k = 1, \dots, n, \quad (2.20)$$

$$-\Delta_k \leq \delta_{1k} - \delta_{2k} \leq \Delta_k, \quad \forall k = 1, \dots, n, \quad (2.21)$$

$$\Lambda_k + \Delta_k \leq 1 + \Omega_k, \quad \forall k = 1, \dots, n, \quad (2.22)$$

$$d^0 = \sum_{k=1, \dots, n} d_k^0 + M \sum_{h=1, \dots, n} \Omega_h, \quad (2.23)$$

$$d^{krs} = d_{1rs}^{\zeta} + d_{2rs}^{\zeta} + \sum_{h=1, \dots, n, h \neq r} d_h^0 + M \sum_{t=1, \dots, n, t \neq k} \Omega_t, \quad \begin{array}{l} \forall k = 1, \dots, n, \\ r = 1, \dots, n, \\ r \neq k, \\ s = -1, 1, \end{array} \quad (2.24)$$

$$d, d^0 \geq 0, \quad (2.25)$$

$$d_k^0 \geq 0, \quad \forall k = 1, \dots, n, \quad (2.26)$$

$$d^{krs} \geq 0, \quad \omega^{krs} \in \{0, 1\}, \quad \forall k = 1, \dots, n, r = 1, \dots, n, r \neq k, s = -1, 1, \quad (2.27)$$

$$u_{jk}^+, u_{jk}^-, d_{jk}^c \geq 0, \quad \lambda_{jk}^1, \lambda_{jk}^2, \delta_{jk} \in \{0, 1\}, \quad \forall j = 1, 2, k = 1, \dots, n, \quad (2.28)$$

$$d_{jks}^{\zeta} \geq 0, \quad \forall j = 1, 2, k = 1, \dots, n, s = -1, 1, \quad (2.29)$$

$$\Lambda_k, \Delta_k, \Omega_k \in \{0, 1\}, \quad \forall k = 1, \dots, n, \quad (2.30)$$

siendo $M > 0$ una constante lo suficientemente grande.

Demostración. En (2.25)-(2.30) se define la naturaleza de las variables de decisión: d es una variable positiva que en el óptimo tomará el valor $d_B(X^1, X^2)$; d_1^0, \dots, d_n^0 son

también variables positivas que en el óptimo tomarán los valores $|x_1^1 - x_1^2|, \dots, |x_n^1 - x_n^2|$, respectivamente, si estos valores son necesarios para el cálculo de $d_B(X^1, X^2)$; la variable d^{krs} representa el valor de la distancia $d_B(X^1, X^2)$ en el caso de que X^1 y X^2 no sean ℓ_1 -visibles debido a que $\text{Proy}_{\hat{k}}(X^1), \text{Proy}_{\hat{k}}(X^2) \in \text{int}(\text{Proy}_{\hat{k}}(B))$ y $\min\{x_k^1, x_k^2\} < \kappa_k < \max\{x_k^1, x_k^2\}$, y el menor X^1 - X^2 camino rectangular permitido sea el de longitud $\sum_{i=1, \dots, n, i \neq r} |x_i^1 - x_i^2| + |x_r^1 - (\kappa_r + s\xi_r)| + |x_r^2 - (\kappa_r + s\xi_r)|$, mientras que ω^{krs} es una variable binaria que tomará el valor 1 si efectivamente X^1 y X^2 se encuentran en ese caso y 0 en caso contrario; u_{jk}^+, u_{jk}^- y d_{jk}^c tomarán, respectivamente, los valores $|x_k^j - \kappa_k|$ si $x_k^j \geq \kappa_k$ o 0 en caso contrario, $|x_k^j - \kappa_k|$ si $x_k^j \leq \kappa_k$ o 0 en caso contrario, y $|x_k^j - \kappa_k|$; las variables d_{jks}^ζ son variables positivas que representan los valores $|x_k^j - (\kappa_k + s\xi_k)|$ necesarios para el cálculo de $d_B(X^1, X^2)$ en los diferentes casos; $\lambda_{jk}^1, \lambda_{jk}^2$ y Λ_k son variables binarias que determinarán la posición relativa de las coordenadas de X^1 y X^2 con respecto a las proyecciones en $\text{Proy}_{\hat{k}}(\cdot)$ de B ; δ_{jk} y Δ_k son variables binarias que determinarán la posición relativa de x_k^1 y x_k^2 con respecto al centro de B ; las variables binarias Ω_k detectan si X^1 y X^2 son ℓ_1 -visibles o no.

Las restricciones (2.10), (2.11) y (2.12) hacen que u_{jk}^+ tome el valor $|x_k^j - \kappa_k|$ si $x_k^j > \kappa_k$, en cuyo caso $\delta_{jk} = 1$, y que u_{jk}^- tome el valor $|x_k^j - \kappa_k|$ si $x_k^j < \kappa_k$, en cuyo caso $\delta_{jk} = 0$. Por tanto, con (2.13) se consigue que d_{jk}^c tome el valor $|x_k^j - \kappa_k|$. En (2.14)-(2.15) se impone que $d_k^0 \geq |x_k^1 - x_k^2|$. Las restricciones (2.16) y (2.17) obligan a d_{jks}^ζ a tomar valores mayores o iguales que $|x_k^j - (\kappa_k + s\xi_k)|$. La restricción (2.18) hace que la variable binaria λ_{jk}^1 tome el valor 1 si $d_{jk}^c < \xi_j$, pudiendo tomar el valor 0 o 1 en caso contrario. Por la tanto, la restricción (2.19) hace que la variable binaria λ_{jk}^2 tome el valor 1 si $\text{Proy}_{\hat{k}}(X^j) \in \text{int}(\text{Proy}_{\hat{k}}(B))$, pudiendo tomar el valor 0 o 1 en caso contrario. La restricción (2.20) fuerza a que Λ_k tome el valor 1 si tanto $\text{Proy}_{\hat{k}}(X^1)$ como $\text{Proy}_{\hat{k}}(X^2)$ pertenecen a $\text{int}(\text{Proy}_{\hat{k}}(B))$, pudiendo tomar el valor 0 o 1 en caso contrario. Obsérvese que si $\min\{x_k^1, x_k^2\} < \kappa_k < \max\{x_k^1, x_k^2\}$, entonces $\delta_{1k} - \delta_{2k}$ es 1 o -1 , en caso contrario $\delta_{1k} - \delta_{2k} = 0$ (pudiendo ser 1 si se da alguna de las igualdades en $\min\{x_k^1, x_k^2\} \leq \kappa_k \leq \max\{x_k^1, x_k^2\}$), luego (2.21) obliga a que $\Delta_k = 1$ si $\min\{x_k^1, x_k^2\} < \kappa_k < \max\{x_k^1, x_k^2\}$, pudiendo tomar el valor 0 o 1 en caso contrario. Teniendo en cuenta lo anterior, por (2.22), $\Omega_k = 1$ si $\text{Proy}_{\hat{k}}(X^1), \text{Proy}_{\hat{k}}(X^2) \in \text{int}(\text{Proy}_{\hat{k}}(B))$ y $\min\{x_k^1, x_k^2\} < \kappa_k < \max\{x_k^1, x_k^2\}$, cosa que sabemos sólo puede darse en todo caso para un $k \in \{1, \dots, n\}$, en caso contrario Ω_k puede tomar el valor 1 o 0. En (2.23)-(2.24) se calcula $d_B(X^1, X^2)$ según la situación en la que X^1 y X^2 se encuentren de acuerdo al Lema 2.9. En 2.23, a d^0 (que representa la distancia $\ell_1(X^1, X^2)$) se le aplica una penalización si X^1 y X^2 no son ℓ_1 -visibles (esto es, si $\Omega_k = 1$ para algún $k \in \{1, \dots, n\}$). Las distancias d^{krs} también son penalizadas si $\Omega_j = 1$ para algún $j \in \{1, \dots, n\}$ con $j \neq k$ (es decir, si $\text{Proy}_{\hat{j}}(X^1), \text{Proy}_{\hat{j}}(X^2) \in \text{int}(\text{Proy}_{\hat{j}}(B))$ y $\min\{x_j^1, x_j^2\} < \kappa_j < \max\{x_j^1, x_j^2\}$). El problema de programación matemática tiene estructura de problema minimín debido a (2.6)-(2.9), que hacen que se calcule $d_B(X^1, X^2)$ de la forma adecuada según el caso: si X^1 y X^2 son ℓ_1 -visibles entonces d^0 es la menor de las dis-

tancias que se puede seleccionar; si se da $\text{Proy}_{\hat{k}}(X^1), \text{Proy}_{\hat{k}}(X^2) \in \text{int}(\text{Proy}_{\hat{k}}(B))$ y $\min\{x_k^1, x_k^2\} < \kappa_k < \max\{x_k^1, x_k^2\}$, entonces d^0 y d^{jrs} con $j \neq k$ son penalizadas, se escogerá entonces entre las distancias d^{krs} , cumpliéndose en el óptimo $d = \min_{r=1, \dots, n, r \neq k, s=-1, 1} \{d^{krs}\} = d_B(X^1, X^2)$.

Es necesario en (2.7) y (2.8) que M esté elevada al cuadrado para que no pueda anularse con las penalizaciones que se aplican a d^0 y a cada d^{krs} en (2.23) y (2.24). Como se ha dicho, en (2.14)-(2.15) se impone que $d_k^0 \geq |x_k^1 - x_k^2|$ y en (2.16)-(2.17) que $d_{jks}^c \geq |x_k^j - (\kappa_k + s\xi_k)|$, dado que en (2.6) se está minimizando d , en la solución óptima del problema se da la igualdad para las variables que representen distancias necesarias para el cálculo de la longitud del camino rectangular permitido óptimo. Todas las variables binarias cuyo valor no quedaba fijado en determinadas situaciones, pudiendo tomar los valores 0 o 1, tomarán el valor 0 en dichas circunstancias, de lo contrario se aplicarían penalizaciones en (2.23)-(2.24) que aumentarían el valor de la función objetivo innecesariamente. \square

En el Teorema 2.2, una elección válida para M es $n \max_{i=1, \dots, n} \{2\xi'_i\} + \varepsilon$, siendo ξ'_i la mitad de la anchura en la coordenada $O\mathcal{X}_i$ de la envolvente rectangular iterativa \mathcal{R}_B de X, Y y B , y ε cualquier constante estrictamente positiva. Muchas de las variables de (2.6)-(2.30) ($d^0, d_k^0, d_{jk}^c, d_{jks}^c, \dots$) representan valores que, de hecho, podemos obtener antes de plantear el problema de programación matemática, puesto que estamos suponiendo que X^1 y X^2 son fijos, de esta forma se reduciría el número de variables binarias usadas en la formulación (δ_{jk} , los valores λ_{jk}^1 y λ_{jk}^2 se podrían saber de antemano, ...), sin embargo, la formulación (2.6)-(2.30) es una formulación general para cualquier par de puntos X^1 y X^2 de la región factible, que pueden suponerse no fijos, lo que permite integrarla en formulaciones para problemas más generales que requieran resolver el problema al que (2.6)-(2.30) da solución como subproblema. Las formulaciones que aparecerán en el resto del capítulo están dadas de forma que pueda suponerse que los puntos X^1 y X^2 no son fijos, lo que permitirá usarlas para resolver los problemas que se plantearán en los siguientes capítulos. Aún así, el número de variables binarias empleadas en la formulación (2.6)-(2.30) puede reducirse como muestra el siguiente lema.

Lema 2.10. *El problema de programación matemática (2.6)-(2.30) es equivalente al problema resultante de hacer en éste los siguientes cambios: considerar las variables de decisión $\Delta_k, k = 1, \dots, n$, en (2.30) como variables positivas en lugar de variables binarias y sustituir la restricción (2.21) por las restricciones:*

$$\Delta_k \leq 1, \quad \forall k = 1, 2, \quad (2.31)$$

$$\Delta_k \geq \delta_{1k} - \delta_{2k}, \quad \forall k = 1, \dots, n, \quad (2.32)$$

$$\Delta_k \geq \delta_{2k} - \delta_{1k}, \quad \forall k = 1, \dots, n. \quad (2.33)$$

Demostración. La variable Δ_k se comporte de la siguiente forma: si $\min\{x_k^1, x_k^2\} < \kappa_k < \max\{x_k^1, x_k^2\}$, entonces $\delta_{1k} - \delta_{2k}$ es 1 o -1 , obligando a Δ_k a tomar el valor 1

por las restricciones (2.31)-(2.33); si $\delta_{1k} - \delta_{2k} = 0$ y $\Lambda_k = 1$, Δ_k puede tomar todos los valores del intervalo $[0, 1]$, sin embargo, si Δ_k tomase un valor estrictamente mayor que cero, la restricción (2.22) activaría la variable binaria Ω_k , con lo que se produciría un aumento del valor de la función objetivo (2.6) debido a penalizaciones innecesarias producidas por las restricciones (2.23)-(2.24), luego en este caso Δ_k tomará el valor 0; por último, si $\delta_{1k} - \delta_{2k} = 0$ y $\Lambda_k = 0$, el valor que tome Δ_k no influye en el valor de la función objetivo (2.6). Por tanto, este cambio no afecta a la solución óptima que proporciona el problema de programación matemática (2.6)-(2.30). \square

Conseguida una formulación para el Problema 2.1 cuando $\mathcal{B} = B$ es un único paralelepípedo en \mathbb{R}^n , pasemos a estudiar el caso en el que $\mathcal{B} = B_1 \cup B_2$, siendo B_1 y B_2 dos hiperparalelepípedos de dimensión n disjuntos de centros $(\kappa_1^2, \dots, \kappa_n^1)^t$ y $(\kappa_1^2, \dots, \kappa_n^2)^t$, y mitad de la anchura en cada coordenada ξ_j^1 y ξ_j^2 , $j = 1, \dots, n$, respectivamente. Bajo las condiciones que indica el siguiente lema, la formulación (2.6)-(2.30) es suficiente para resolver este caso particular del Problema 2.1.

Lema 2.11. Si $\text{Proy}_{\hat{k}}(B_1) \cap \text{Proy}_{\hat{k}}(B_2) = \emptyset$, $\forall k = 1, \dots, n$, entonces $d_{\mathcal{B}}(X, Y) = \max\{d_{B_1}(X, Y), d_{B_2}(X, Y)\}$.

Demostración. Dado que la reducción de la región factible sólo puede provocar un aumento de la distancia con barreras y no al contrario, es evidente que $d_{\mathcal{B}}(X, Y) \geq d_{B_1}(X, Y), d_{B_2}(X, Y)$. Si X e Y son ℓ_1 -visibles entonces el resultado se tiene de forma trivial ya que $d_{\mathcal{B}}(X, Y) = d_{B_1}(X, Y) = d_{B_2}(X, Y) = \ell_1(X, Y)$. Supongamos que X e Y no son ℓ_1 -visibles. Entonces, debe darse para algún $j \in \{1, \dots, n\}$, o bien, $\text{Proy}_{\hat{j}}(X), \text{Proy}_{\hat{j}}(Y) \in \text{int}(\text{Proy}_{\hat{j}}(B_1))$ y $\min\{x_j, y_j\} < \kappa_j^1 < \max\{x_j, y_j\}$, o bien, $\text{Proy}_{\hat{j}}(X), \text{Proy}_{\hat{j}}(Y) \in \text{int}(\text{Proy}_{\hat{j}}(B_2))$ y $\min\{x_j, y_j\} < \kappa_j^2 < \max\{x_j, y_j\}$, o ambas situaciones, ya que de lo contrario, razonando como en la demostración del Lema 2.9, podríamos construir un X - Y camino rectangular permitido de longitud $\ell_1(X, Y)$, lo que contradice la suposición de que X e Y no son ℓ_1 -visibles. Supongamos que se tiene $\text{Proy}_{\hat{j}}(X), \text{Proy}_{\hat{j}}(Y) \in \text{int}(\text{Proy}_{\hat{j}}(B_1))$ y $\min\{x_j, y_j\} < \kappa_j^1 < \max\{x_j, y_j\}$. Consideremos el X - Y camino rectangular Q_1 de la forma (2.5) y de longitud mínima cuando sólo se considera a B_1 como barrera obviando B_2 . Como $\text{Proy}_{\hat{k}}(B_1) \cap \text{Proy}_{\hat{k}}(B_2) = \emptyset$, $\forall k = 1, \dots, n$, obsérvese que ninguno de los segmentos que constituyen Q_1 puede ser intersecados por el interior de B_2 , luego Q_1 es un X - Y camino rectangular permitido de longitud $d_{B_1}(X, Y)$. Si se tiene $\text{Proy}_{\hat{k}}(X), \text{Proy}_{\hat{k}}(Y) \in \text{int}(\text{Proy}_{\hat{k}}(B_2))$ y $\min\{x_j, y_j\} < \kappa_j^2 < \max\{x_j, y_j\}$ para algún $k \in \{1, \dots, n\}$, siguiendo el razonamiento que acabamos de hacer para el paralelepípedo B_1 , obtendríamos un X - Y camino rectangular permitido Q_2 de longitud $d_{B_2}(X, Y)$. En caso contrario $d_{B_1}(X, Y) \geq d_{B_2}(X, Y) = \ell_1(X, Y)$. Concluimos así que $d_{\mathcal{B}}(X, Y) = \max\{d_{B_1}(X, Y), d_{B_2}(X, Y)\}$. \square

En las condiciones del Lema 2.11, la estrategia de resolución del problema que nos ocupa es sencillamente la siguiente: calcular $d_{B_1}(X, Y)$ y $d_{B_2}(X, Y)$ independientemente resolviendo sendos problemas de programación matemática (2.6)-(2.30), y

tomar el X - Y camino rectangular solución de estos problemas de mayor longitud. La comprobación de si $\text{Proy}_{\hat{k}}(B_1) \cap \text{Proy}_{\hat{k}}(B_2) = \emptyset$ para algún $k \in \{1, \dots, n\}$ puede hacerse en tiempo $\mathcal{O}(n)$ comparando los pares de intervalos $[\kappa_j^1 - \xi_j^1, \kappa_j^1 + \xi_j^1]$, $[\kappa_j^2 - \xi_j^2, \kappa_j^2 + \xi_j^2]$, $j = 1, \dots, n$. Nótese, que si $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^N B_i$, siendo $\{B_1, \dots, B_N\}$ un conjunto de hiperparalelepípedos de dimensión n disjuntos dos a dos tales que $\text{Proy}_{\hat{k}}(B_i) \cap \text{Proy}_{\hat{k}}(B_j) = \emptyset$, $\forall k = 1, \dots, n$, $\forall i, j = 1, \dots, N$ con $i \neq j$, el Lema 2.11 puede extenderse a este caso y la estrategia anterior de calcular todas las distancias $d_{B_i}(X, Y)$, $i = 1, \dots, N$, y quedarnos con la mayor, seguiría siendo válida.

Si no se da $\text{Proy}_{\hat{k}}(B_1) \cap \text{Proy}_{\hat{k}}(B_2) = \emptyset$, $\forall k = 1, \dots, n$, entonces $\text{Proy}_{\hat{j}}(B_1) \cap \text{Proy}_{\hat{j}}(B_2) \neq \emptyset$, para un único $j \in \{1, \dots, n\}$, pues los paralelepípedos son isotéticos. Sean $V^1 = \kappa_j^1 + h\xi_j^1$ y $V^2 = \kappa_j^2 + i\xi_j^2$ con $h, i \in \{-1, 1\}$ tales que $|V^1 - V^2|$ es mínimo, es decir, las coordenadas en OX_j de las caras de dimensión $n-1$ de B_1 y B_2 , respectivamente, más cercanas entre sí. La coordenada j -ésima tal que $\text{Proy}_{\hat{j}}(B_1) \cap \text{Proy}_{\hat{j}}(B_2) \neq \emptyset$ así como los valores V^1 y V^2 pueden obtenerse en tiempo $\mathcal{O}(n)$, puesto que la primera se obtiene en $\mathcal{O}(n)$ y los segundos mediante un número constante de comparaciones una vez obtenida la anterior. Supongamos sin pérdida de generalidad que $V^1 < V^2$. Obsérvese que la región $R(V^1, V^2) := \{Z \in \mathbb{R}^n : V^1 \leq z_j \leq V^2\}$ separa a los paralelepípedos B_1 y B_2 en el siguiente sentido: la cara de dimensión $n-1$ de B_1 en la que la coordenada $O\mathcal{X}_j$ es constante e igual a V^1 pertenece a la frontera de $R(V^1, V^2)$, así como la cara de dimensión $n-1$ de B_2 en la que coordenada $O\mathcal{X}_j$ es constante e igual a V^2 , no existiendo puntos de B_1 ni B_2 en $\text{int}(R(V^1, V^2))$. Entonces, no es difícil ver (para ello basta considerar argumentos simples basados en la envolvente rectangular iterativa como los utilizados en pruebas anteriores) que se tiene la siguiente casuística (utilizamos de nuevo la notación $X^1 = X$ y $X^2 = Y$):

(a) Si $V^1 \leq x_j^1, x_j^2 \leq V^2$ entonces $d_{B_1 \cup B_2}(X^1, X^2) = \ell_1(X^1, X^2)$.

(b) Si $x_j^1, x_j^2 \leq V^2$ entonces $d_{B_1 \cup B_2}(X^1, X^2) = d_{B_1}(X^1, X^2)$.

(c) Si $x_j^1, x_j^2 \geq V^1$ entonces $d_{B_1 \cup B_2}(X^1, X^2) = d_{B_2}(X^1, X^2)$.

(d) Si $x_j^1 \leq V^1$ y $x_j^2 \geq V^2$ entonces existe $\rho \in \mathbb{R}^n$ con $V^1 \leq \rho_k \leq V^2$ tal que

$$d_{B_1 \cup B_2}(X^1, X^2) = d_{B_1}(X^1, \rho) + d_{B_2}(\rho, X^2).$$

(e) Si $x_j^2 \leq V^1$ y $x_j^1 \geq V^2$ entonces existe $\rho \in \mathbb{R}^n$ con $V^1 \leq \rho_k \leq V^2$ tal que

$$d_{B_1 \cup B_2}(X^1, X^2) = d_{B_1}(X^2, \rho) + d_{B_2}(\rho, X^1).$$

Las Figuras 2.12, 2.13, 2.14 y 2.15 ilustran esta casuística en \mathbb{R}^2 cuando $\text{Proy}_{\hat{1}}(B_1) \cap \text{Proy}_{\hat{1}}(B_2) \neq \emptyset$.

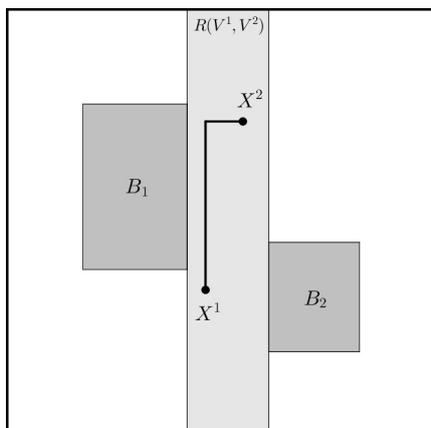


Figura 2.12: Caso (a).

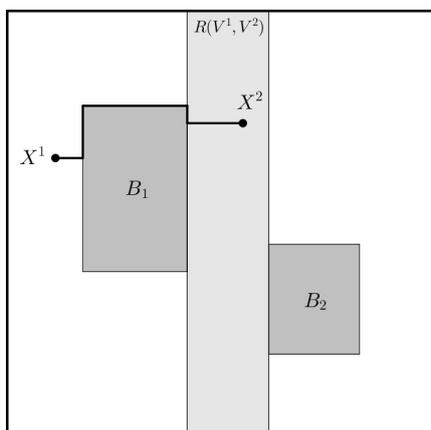


Figura 2.13: Caso (b).

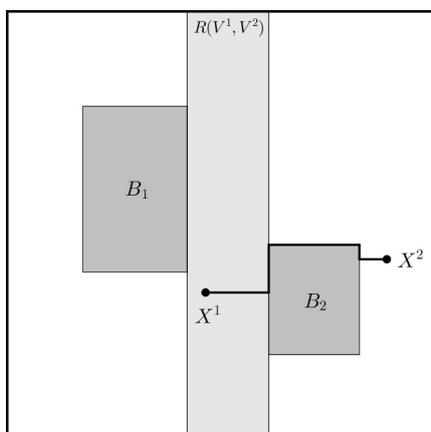


Figura 2.14: Caso (c).

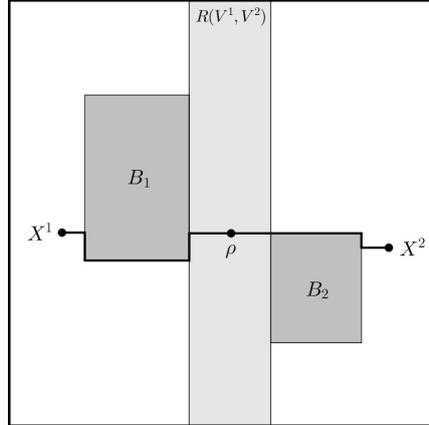


Figura 2.15: Caso (d) (el caso (e) es similar).

Si w_1^1 es una variable de decisión binaria, la restricción

$$V^1 - M(1 - w_1^1) \leq x_j^1 \leq V^1 + Mw_1^1,$$

siendo $M > 0$ una constante lo suficientemente grande, hace que $w_1^1 = 0$ si $x_j^1 < V^1$, $w_1^1 = 1$ si $x_j^1 > V^1$, mientras que si $x_j^1 = V^1$ entonces w_1^1 puede tomar el valor 0 o 1. Por tanto, las posiciones relativas de la coordenada j -ésima de los puntos X^1 y X^2 con respecto a V^1 y V^2 , las cuales nos permiten detectar en que caso de la casuística anterior se encuentran los puntos X^1 y X^2 , pueden determinarse mediante el conjunto de restricciones:

$$V^1 - M(1 - w_1^i) \leq x_j^i \leq V^1 + Mw_1^i, \quad \forall i = 1, 2, \quad (2.34)$$

$$V^2 - M(1 - w_2^i) \leq x_j^i \leq V^2 + Mw_2^i, \quad \forall i = 1, 2, \quad (2.35)$$

$$w_h^i \in \{0, 1\}, \quad \forall i = 1, 2, h = 1, 2. \quad (2.36)$$

En la casuística (a)-(e), podemos considerar sólo los casos (b), (c), (d) y (e), pues el caso (a) está contemplado tanto en (b) como en (c). Es decir, si se da (a), entonces:

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow d_{B_1 \cup B_2}(X^1, X^2) = d_{B_1}(X^1, X^2) = \ell_1(X^1, X^2),$$

$$(a) \Rightarrow (c) \Rightarrow d_{B_1 \cup B_2}(X^1, X^2) = d_{B_2}(X^1, X^2) = \ell_1(X^1, X^2).$$

Además, obsérvese que los casos (d) y (e) son excluyentes pues estamos suponiendo $V^1 < V^2$. Si ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 y ϕ_4 son variables binarias que representan, respectivamente, la ocurrencia de los casos (b), (c), (d) y (e), cuando toman el valor el 1, entonces, a partir de las posiciones relativas de x_j^1 y x_j^2 con respecto a V^1 y V^2 detectadas por las variables binarias $w_h^i, i = 1, 2, h = 1, 2$, podemos determinar en cuál de los casos nos

encontramos mediante las restricciones:

$$\sum_{k=1}^4 \phi_k = 1, \quad (2.37)$$

$$\phi_1 \leq (1 - w_2^1) + (1 - w_2^2), \quad (2.38)$$

$$\phi_2 \leq w_1^1 + w_1^2, \quad (2.39)$$

$$\phi_3 \geq w_2^2 - w_1^1, \quad (2.40)$$

$$\phi_4 \geq w_2^1 - w_1^2, \quad (2.41)$$

$$\phi_k \in \{0, 1\}, \quad \forall k = 1, \dots, 4. \quad (2.42)$$

La restricción (2.37) fuerza a que se seleccione uno y sólo uno de los casos. La restricción (2.38) indica que si $x_j^1, x_j^2 > V^2$ entonces no puede darse el caso (b), de la misma forma, la restricción (2.39) indica que si $x_j^1, x_j^2 < V^1$ entonces no puede darse el caso (c). Si $x_j^1 < V^1$ y $x_j^2 > V^2$ entonces necesariamente $\phi_3 = 1$ (restricción (2.40)) y si $x_j^2 < V^1$ y $x_j^1 > V^2$ entonces necesariamente $\phi_4 = 1$ (restricción (2.41)). Cuando estas restricciones se integren al modelo correspondiente, el cuál estará minimizando $d_{B_1 \cup B_2}(X^1, X^2)$ en la función objetivo, siempre se intentará que $\phi_1 = 1$ o $\phi_2 = 1$, pues $d_{B_1 \cup B_2}(X^1, X^2)$ es menor en los casos (b) y (c) que en los casos (d) y (e). Si se da el caso (d) o (e) (sólo puede darse uno de ellos) entonces necesariamente $\phi_3 = 1$ o $\phi_4 = 1$, no pudiendo hacerse $\phi_1 = 1$ o $\phi_2 = 1$. Luego, las restricciones (2.37)-(2.42) detectan adecuadamente el caso en el que se encuentran los puntos X^1 y X^2 . Puede comprobarse que, en los casos extremos en los que los w_h^i pueden tomar los valores 0 o 1, las restricciones (2.37)-(2.42) siguen detectando adecuadamente el caso de la casuística (b)-(e) en el que se encuentran los puntos X^1 y X^2 , pues en dichos casos extremos podemos encontrarnos en diferentes casos de la casuística (b)-(e) a la vez.

Sean $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \in \mathbb{R}^n$. La distancia $d_{B_1}(\varrho_1, \varrho_2)$ puede calcularse adaptando la formulación (2.6)-(2.30) a los puntos ϱ_1, ϱ_2 y a la barrera B_1 . Para ello, basta sustituir en (2.6)-(2.30) los papeles de X^1 y X^2 por los de ϱ_1 y ϱ_2 , y el de B por B_1 . Llamemos d_{12} a la variable positiva que habría que minimizar en la función objetivo del problema de programación matemática resultante (la que en (2.6)-(2.30) era simplemente d). De la misma forma, la distancia $d_{B_2}(\varrho_2, \varrho_3)$ puede calcularse adaptando la formulación (2.6)-(2.30) a los puntos ϱ_2, ϱ_3 y a la barrera B_2 . Llamemos ahora d_{23} a la variable positiva que habría que minimizar en la función objetivo del nuevo problema de programación matemática resultante. Consideremos el siguiente problema de programación matemática:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & d_{12} + d_{23} \\ \text{s.a:} \quad & (2.6)-(2.30), \text{ adaptadas para el cálculo de } d_{B_1}(\varrho_1, \varrho_2), \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$(2.6)-(2.30), \text{ adaptadas para el cálculo de } d_{B_2}(\varrho_2, \varrho_3). \quad (2.44)$$

Por lo dicho antes está claro que este problema de programación matemática calcula $d_{B_1}(\varrho_1, \varrho_2) + d_{B_2}(\varrho_2, \varrho_3)$. Vamos a aclarar en qué sentido podemos apoyarnos en

esta formulación para resolver nuestro problema. Obsérvese que si estamos en el caso (b) de nuestra casuística entonces $d_{B_1}(\varrho_1, \varrho_2) + d_{B_2}(\varrho_2, \varrho_3)$ es $d_{B_1 \cup B_2}(X^1, X^2) = d_{B_1}(X^1, X^2)$ si $\varrho_1 = X^1$, $\varrho_2 = X^2$ y $\varrho_3 = X^2$. Si estamos en el caso (c) entonces $d_{B_1}(\varrho_1, \varrho_2) + d_{B_2}(\varrho_2, \varrho_3)$ es $d_{B_1 \cup B_2}(X^1, X^2) = d_{B_2}(X^2, X^2)$ si $\varrho_1 = X^1$, $\varrho_2 = X^1$ y $\varrho_3 = X^2$. En el caso de encontrarnos en el caso (d), $d_{B_1}(\varrho_1, \varrho_2) + d_{B_2}(\varrho_2, \varrho_3)$ es $d_{B_1 \cup B_2}(X^1, X^2) = d_{B_1}(X^1, \rho) + d_{B_2}(\rho, X^2)$ si $\varrho_1 = X^1$, $\varrho_2 = \rho$ y $\varrho_3 = X^2$, siendo $\rho \in R(V^1, V^2)$. Por último, en el caso de encontrarnos en el caso (e), $d_{B_1}(\varrho_1, \varrho_2) + d_{B_2}(\varrho_2, \varrho_3)$ es $d_{B_1 \cup B_2}(X^1, X^2) = d_{B_1}(X^2, \rho) + d_{B_2}(\rho, X^1)$ si $\varrho_1 = X^2$, $\varrho_2 = \rho$ y $\varrho_3 = X^1$, siendo $\rho \in R(V^1, V^2)$. Luego, si conseguimos fijar adecuadamente los valores de ϱ_1 , ϱ_2 y ϱ_3 según el caso, tendríamos la formulación de un problema de programación matemática que equivaldría a nuestro problema. Si $\rho \in R(V^1, V^2)$, utilizando las variables de decisión binarias ϕ_k , $k = 1, \dots, 4$, que indicaban el caso en el que nos encontrábamos (y de las cuales sólo una podía tomar el valor 1), los valores de ϱ_1 , ϱ_2 y ϱ_3 pueden fijarse mediante las restricciones

$$x_k^1 - M(1 - \phi_1) \leq \varrho_{1k} \leq x_k^1 + M(1 - \phi_1), \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.45)$$

$$x_k^2 - M(1 - \phi_1) \leq \varrho_{2k} \leq x_k^2 + M(1 - \phi_1), \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.46)$$

$$x_k^2 - M(1 - \phi_1) \leq \varrho_{3k} \leq x_k^2 + M(1 - \phi_1), \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.47)$$

$$x_k^1 - M(1 - \phi_2) \leq \varrho_{1k} \leq x_k^1 + M(1 - \phi_2), \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.48)$$

$$x_k^1 - M(1 - \phi_2) \leq \varrho_{2k} \leq x_k^1 + M(1 - \phi_2), \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.49)$$

$$x_k^2 - M(1 - \phi_2) \leq \varrho_{3k} \leq x_k^2 + M(1 - \phi_2), \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.50)$$

$$x_k^1 - M(1 - \phi_3) \leq \varrho_{1k} \leq x_k^1 + M(1 - \phi_3), \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.51)$$

$$\rho_k - M(1 - \phi_3) \leq \varrho_{2k} \leq \rho_k + M(1 - \phi_3), \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.52)$$

$$x_k^2 - M(1 - \phi_3) \leq \varrho_{3k} \leq x_k^2 + M(1 - \phi_3), \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.53)$$

$$x_k^2 - M(1 - \phi_4) \leq \varrho_{1k} \leq x_k^2 + M(1 - \phi_4), \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.54)$$

$$\rho_k - M(1 - \phi_4) \leq \varrho_{2k} \leq \rho_k + M(1 - \phi_4), \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.55)$$

$$x_k^1 - M(1 - \phi_4) \leq \varrho_{3k} \leq x_k^1 + M(1 - \phi_4), \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.56)$$

donde ϱ_{ik} representa la k -ésima coordenada de ϱ_i y ρ_k la k -ésima coordenada de ρ .

Teniendo en cuenta la discusión anterior, una formulación para resolver el problema del camino rectangular mínimo entre X^1 y X^2 en presencia de dos paralelepípedos barrera disjuntos cuyas proyecciones $\text{Proy}_j(\cdot)$ intersecan para algún $j \in \{1, \dots, n\}$, es la que recoge el siguiente teorema.

Teorema 2.3. *El Problema 2.1 cuando $\mathcal{B} = B_1 \cup B_2$, siendo B_1 y B_2 dos hiperparalelepípedos de dimensión n disjuntos tales que $\text{Proy}_j(B_1) \cap \text{Proy}_j(B_2) \neq \emptyset$ con $j \in \{1, \dots, n\}$, y etiquetados de forma que $V^1 < V^2$ siendo $V^1 = \kappa_j^1 + h\xi_j^1$ y $V^2 = \kappa_j^2 + i\xi_j^2$ con $h, i \in \{-1, 1\}$ tales que $|V^1 - V^2|$ es mínimo, es equivalente*

al problema de programación lineal y entera mixta

$$\text{mín} \quad d_{12} + d_{23} \quad (2.57)$$

$$\text{s.a:} \quad (2.34)-(2.56), \quad (2.58)$$

$$V^1 \leq \rho_j \leq V^2, \quad (2.59)$$

$$\rho_k \in \mathbb{R}, \quad \forall k = 1, \dots, n, \quad (2.60)$$

$$\varrho_{ik} \in \mathbb{R}, \quad \forall i = 1, 2, 3, k = 1, \dots, n. \quad (2.61)$$

Demostración. La corrección de esta formulación se sigue de la discusión mantenida en los párrafos precedentes. \square

La constante M puede tomarse nuevamente $n \max_{i=1, \dots, n} \{2\xi'_i\} + \varepsilon$, siendo ξ'_i la mitad de la anchura en la coordenada $O\mathcal{X}_i$ de la envolvente rectangular iterativa $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ de X, Y y $\mathcal{B} = B_1 \cup B_2$, y ε cualquier constante estrictamente positiva. Nótese que la separación de B_1 y B_2 realizada mediante $R(V^1, V^2)$ puede hacerse también en el caso en el que $\text{Proy}_{\hat{k}}(B_1) \cap \text{Proy}_{\hat{k}}(B_2) = \emptyset, \forall k = 1, \dots, n$, para ello tomamos cualquier $k \in \{1, \dots, n\}$ para el que se cumpla $V^1 = \kappa_k^1 + \xi_k^1 \leq V^2 = \kappa_k^2 - \xi_k^2$ o $V^2 = \kappa_k^2 + \xi_k^2 \leq V^1 = \kappa_k^1 - \xi_k^1$. Este k existe, de lo contrario B_1 y B_2 no serían disjuntos, y puede obtenerse en tiempo $\mathcal{O}(n)$. Por lo tanto, la formulación (2.57)-(2.61) es válida para resolver el problema del camino rectangular mínimo entre dos puntos en presencia de dos paralelepípedos barrera disjuntos en cualquier tesitura. El Lema 2.10 también puede usarse en esta formulación para dismuir el número de variables binarias, pues la formulación (2.57)-(2.61) contiene (por duplicado) a la formulación (2.6)-(2.30).

Como último caso particular del Problema 2.1 antes de abordar el mismo, nos planteamos el problema en el que $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^N B_i$ siendo los B_i hiperparalelepípedos de dimensión n disjuntos dos a dos, es decir, consideramos el caso particular del Problema 2.1 cuando cada complejo barrera está formado por un único paralelepípedo. Como ya hemos comentado, si $\text{Proy}_{\hat{k}}(B_i) \cap \text{Proy}_{\hat{k}}(B_j) = \emptyset, \forall k = 1, \dots, n, \forall i, j = 1, \dots, N$ con $i \neq j$, el Lema 2.11 puede extenderse a este caso y la estrategia de calcular todas las distancias $d_{B_i}(X, Y), i = 1, \dots, N$, y quedarnos con la mayor, es válida también en este caso. Puesto que la comprobación de la condición $\text{Proy}_{\hat{k}}(B_i) \cap \text{Proy}_{\hat{k}}(B_j) = \emptyset, \forall k = 1, \dots, n, i \neq j$, tendría que llevarse a cabo para todos los pares posibles de paralelepípedos, dicha comprobación puede realizarse en un tiempo $\mathcal{O}(N^2n)$. No obstante, nuestro objetivo es resolver el problema en cualquier circunstancia, es decir, se cumpla o no la condición anterior. Como se ha podido comprobar al abordar el problema para el caso $N = 2$, la estrategia de detectar la posición relativa de los puntos X e Y con respecto a los paralelepípedos barrera B_1 y B_2 complica considerablemente la formulación del problema de programación matemática que se tenía para el caso $N = 1$, y hace bastante difícil la adaptación de dicha formulación cuando $N \geq 3$. Es por ello que un cambio de estrategia es necesario. En adelante, κ_k^i denota a la coordenada k -ésima del centro del paralelepípedo B_i y ξ_k^i a la mitad de la anchura de ese mismo paralelepípedo en la coordenada $OX_k, i = 1, \dots, N, k = 1, \dots, n$.

Por definición (Definición 2.5), un X - Y camino rectangular mínimo permitido es el lugar geométrico constituido por ciertos segmentos $[a_1, a_2], [a_2, a_3], \dots, [a_{K-1}, a_K]$, cuya suma de longitudes es mínima, cumpliendo que ningún punto del camino interseca el interior de ninguna barrera, donde la sucesión de puntos a_1, \dots, a_K , llamados codos, verifica: cada codo $a_i, i = 1, \dots, K - 1$, difiere del codo a_{i+1} en una coordenada, siendo el resto iguales; $a_1 = X$ y $a_K = Y$ o $a_1 = Y$ y $a_K = X$. Una estrategia para resolver el problema que nos ocupa puede consistir en formular un problema de programación matemática donde estos codos se muevan libremente en \mathbb{R}^n y se impongan restricciones que prohíban que el camino rectangular que determinen no sea un X - Y camino rectangular permitido, de esta forma, al minimizar la longitud de este camino en la función objetivo del problema, se obtendría un X - Y camino rectangular mínimo permitido como camino óptimo y $d_{\mathcal{B}}(X, Y)$ como valor óptimo. El inconveniente que presenta esta estrategia es que el número de codos del X - Y camino rectangular óptimo del problema no se sabe de antemano. No obstante, sí podemos calcular a priori una cota superior para el número de codos que tendrá este camino. Para ello basta que consideremos el peor caso (el caso en el que más codos son necesarios) dado el número de barreras y la dimensión del espacio en el que nos encontramos. Queda por explicar cómo decidir en el problema de programación matemática cuántos codos son utilizados para construir el X - Y camino rectangular óptimo, y decir cuál es la cota superior del número de codos empleados por un X - Y camino rectangular mínimo permitido en función del número de barreras y la dimensión del espacio en el que se está considerando el problema.

Demostremos en primer lugar una cota superior para el número de codos suficientes para construir un X - Y camino rectangular mínimo permitido.

Lema 2.12. *Consideremos a los hiperparalelepípedos de dimensión n y disjuntos dos a dos B_1, \dots, B_N actuando como barreras. Sea N' el número de estos paralelepípedos contenidos en la envolvente rectangular iterativa $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ de X, Y y $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^N B_i$. Entonces, siempre puede encontrarse un X - Y camino rectangular mínimo permitido con a lo sumo $\bar{S} = N'(n + 2) + 2$ codos si $N' \geq 1$, y con a lo sumo $\bar{S} = n + 1$ codos si $N' = 0$.*

Demostración. Por el Lema 2.7, basta que consideremos sólo los N' paralelepípedos contenidos en la envolvente rectangular iterativa $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ de X, Y y $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^N B_i$ como relevantes en la búsqueda de la cota superior para el número de codos del X - Y camino rectangular mínimo permitido, obviando el resto. Dado que el número de codos de un X - Y camino rectangular mínimo permitido que pasa por la frontera de exactamente $N'' < N'$ de los N' paralelepípedos anteriores sólo puede aumentar si pedimos que dicho camino pase por la frontera de otro de los paralelepípedos por el que no pasa, el peor caso en términos del número de codos se tiene cuando el camino rectangular mínimo permitido que une X e Y pasa por la frontera de los N' paralelepípedos contenidos en $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$. Supongamos que nos encontramos en ese caso y sea Q el X - Y camino rectangular mínimo permitido contenido en $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$. Entonces, podemos

suponer, que una vez que Q , orientado desde X hasta Y , abandona la frontera de un paralelepípedo barrera B_i , no vuelve a pasar por ella. Veamos esto último. Sea Z^1 el primer punto de Q en la frontera de B_i y sea Z^2 el último punto de Q en la frontera de B_i , entonces, aplicando de nuevo el Lema 2.7, existe un Z^1 - Z^2 camino rectangular mínimo permitido Q_i sobre la frontera de B_i (la envolvente rectangular iterativa de Z^1 , Z^2 y \mathcal{B} es el propio B_i , pues Z^1 y Z^2 pertenecen a la frontera de B_i y los paralelepípedos barrera son disjuntos) de longitud menor o igual a la porción de camino Q_{Z^1, Z^2} de Q que va de Z^1 a Z^2 . El camino anterior es permitido pues está sobre la frontera de B_i y los paralelepípedos barrera son disjuntos dos a dos. De esta forma, al sustituir en Q , Q_{Z^1, Z^2} por Q_i , el camino resultante es un X - Y camino rectangular mínimo permitido que, orientado desde X hasta Y , una vez que abandona la frontera de B_i , no vuelve a pasar por ella. Teniendo en cuenta estas consideraciones, pasamos a probar el resultado mediante inducción.

Si $N' = 0$, es evidente que se puede construir un X - Y camino rectangular mínimo permitido con $n + 1$ codos, basta considerar cualquier X - Y camino rectangular donde en cada codo no trivial se iguale una de las coordenadas de X a la coordenada de Y correspondiente, dicho camino es permitido y tiene longitud $\ell_1(X, Y)$. Si $N' = 1$, entonces, o bien X e Y son ℓ_1 -visibles y puede construirse un X - Y camino rectangular mínimo permitido con $n + 1$ codos de longitud $\ell_1(X, Y)$ como el indicado para el caso $N' = 0$, o bien X e Y no son ℓ_1 -visibles, en cuyo caso el camino rectangular dado por el camino (2.5) adaptado a X , Y y el único paralelepípedo barrera B_k , contenido en $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$, que da la distancia $d_{B_k}(X, Y)$ de acuerdo al Lema 2.9, es un X - Y camino rectangular mínimo permitido. Este último camino rectangular posee a lo sumo $n + 4$ codos, como puede verse en (2.5), luego la cota superior que da el lema es válida también en este caso.

Supongamos que el resultado es cierto para $N' = m \leq N - 1$, $m \geq 1$, y veamos que entonces se cumple también para $N' = m + 1 \leq N$. Sean $B_{i_1}, \dots, B_{i_{m+1}}$ los paralelepípedos barrera contenidos en $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$. Como ya hemos comentado, en el peor caso, en términos del número de codos, todo camino rectangular mínimo permitido que une X e Y pasa necesariamente por la frontera de todos los paralelepípedos barrera $B_{i_1}, \dots, B_{i_{m+1}}$. Supongamos que estamos en dicho caso y sea Q un X - Y camino rectangular mínimo permitido que pasa por la frontera de todas las barreras. Como también se ha comentado, podemos suponer que Q , orientado de X a Y , una vez que pasa por la frontera de una de las barreras, no vuelve a pasar por ella. Sea $B_{(1)}, \dots, B_{(m+1)}$ la secuencia ordenada de barreras por cuyas fronteras Q pasa al ir desde X hasta Y . Considerando el sentido de recorrido indicado, sea b_{m+1} el primer punto de Q en la frontera de $B_{(m+1)}$. Sea Q_{m+1} el camino rectangular (2.5) adaptado a b_{m+1} , Y y $B_{(m+1)}$, que daría la distancia $d_{B_{(m+1)}}(b_{m+1}, Y)$ del Lema 2.9 cuando sólo se considera como barrera al paralelepípedo $B_{(m+1)}$. Vamos a probar que dicho camino es permitido y que no interseca con la frontera de ninguna barrera que no sea $B_{(m+1)}$. En caso contrario, puesto que los paralelepípedos barrera son disjuntos, las barreras $B_{(1)}, \dots, B_{(m)}$ intersecarán con el último segmento, digamos $[b'_{m+1}, Y]$, de Q_{m+1} (por la forma de (2.5),

b'_{m+1} es el último punto de Q_{m+1} en la frontera de $B_{(m+1)}$ cuando Q_{m+1} se recorre desde b_{m+1} hasta Y). Sea Z el último punto en la frontera del último paralelepípedo $B_{(k)}$, $1 \leq k < m + 1$, por el que pasa $[b'_{m+1}, Y]$ al ir desde b'_{m+1} hasta Y . Si b_k es el primer punto de Q en $B_{(k)}$, entonces, aplicando el Lema 2.7 existe un b_k - Z camino rectangular mínimo permitido $Q_{b_k, Z}$ sobre la frontera de $B_{(k)}$ (la envolvente rectangular iterativa de b_k , Z y \mathcal{B} es el propio $B_{(k)}$). Si Q_{X, b_k} es la porción de Q que va de X a b_k , obsérvese que $Q_{X, b_k} \cup Q_{b_k, Z} \cup [Z, Y]$ es un X - Y camino rectangular permitido que no pasa por la frontera de $B_{(m+1)}$ y cuya longitud es menor que la de Q , lo cual es una contradicción. Por tanto, si $Q_{X, b_{m+1}}$ es la porción de Q que va de b_1 a b_{m+1} , el X - Y camino rectangular $Q' = Q_{X, b_{m+1}} \cup Q_{m+1}$ es un X - Y camino rectangular mínimo permitido que pasa por todas las fronteras de los paralelepípedos barrera una sola vez.

Consideremos ahora como barreras solamente a los paralelepípedos $B_{(1)}, \dots, B_{(m)}$, obviando a $B_{(m+1)}$. Por hipótesis de inducción, existe un X - $b_{(m+1)}$ camino rectangular mínimo permitido $Q'_{X, b_{m+1}}$ con a lo sumo $m(n+2) + 2$ codos. Veamos que $Q'_{X, b_{m+1}}$ no puede intersectar con $B_{(m+1)}$, salvo en b_{m+1} , y que por tanto es permitido cuando se consideran como barreras todos los paralelepípedos $B_{(1)}, \dots, B_{(m+1)}$. Si esto no ocurre, sea Z' el primer punto de $Q'_{X, b_{m+1}}$ en la frontera de $B_{(m+1)}$. Entonces, aplicando el Lema 2.7 existe un Z' - b'_{m+1} camino rectangular mínimo permitido $Q_{Z', b'_{m+1}}$ sobre la frontera de $B_{(m+1)}$ (la envolvente rectangular iterativa de Z' , b'_{m+1} y \mathcal{B} es el propio $B_{(m+1)}$). Basta observar que, si $Q_{X, Z'}$ es la porción de $Q'_{X, b_{m+1}}$ que va de X a Z' , $Q_{X, Z'} \cup Q_{Z', b'_{m+1}} \cup [b'_{m+1}, Y]$ es un X - Y camino rectangular permitido de longitud menor que la de Q' (y, por tanto, la de Q) para llegar a una contradicción. Deducimos entonces que $Q'' = Q'_{X, b_{m+1}} \cup Q_{m+1}$ es un X - Y camino rectangular mínimo permitido, cuyo número de codos es, el número de codos de $Q'_{X, b_{m+1}}$ ($m(n+2) + 2$), más el número de codos de Q_{m+1} (a lo sumo $n+3$ pues b_{m+1} está sobre la frontera de $B_{(m+1)}$), menos uno (el codo b_{m+1} se cuenta una vez en $Q'_{X, b_{m+1}}$, y una segunda vez en Q_{m+1}), es decir, a lo sumo $\bar{S} = (m+1)(n+2) + 2$. \square

El siguiente lema caracteriza a los X - Y caminos rectangulares permitidos en función de las coordenadas de sus codos.

Lema 2.13. *Consideremos a los hiperparalelepípedos de dimensión n y disjuntos dos a dos B_1, \dots, B_N actuando como barreras y sea \mathcal{B} la unión de estos. Sean κ_k^i y ξ_k^i , respectivamente, la coordenada k -ésima del centro del paralelepípedo B_i y la mitad de la anchura de ese mismo paralelepípedo en la coordenada OX_k , $i = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, n$. Sea Q el lugar geométrico constituido por los segmentos $[a_1, a_2], [a_2, a_3], \dots, [a_{K-1}, a_K]$ con $a_1 = X$ y $a_K = Y$ o $a_1 = Y$ y $a_K = X$. Si $(a_i)_j$ denota a la j -ésima coordenada del punto a_i , $i = 1, \dots, K$, $j = 1, \dots, n$, entonces Q es un X - Y camino rectangular permitido si y sólo si los puntos a_i , $i = 1, \dots, K$, verifican las siguientes condiciones:*

1. Los puntos a_i y a_{i+1} se diferencian en una coordenada, siendo el resto iguales, $i = 1, \dots, K - 1$.
2. Se tiene $a_i \notin \text{int}(\mathcal{B})$ para todo $i = 1, \dots, K$.

3. Si $(a_i)_j < \kappa_j^r < (a_{i+1})_j$ o $(a_{i+1})_j < \kappa_j^r < (a_i)_j$ para $j \in \{1, \dots, n\}$, entonces, o bien, $(a_i)_h, (a_{i+1})_h \leq \kappa_h^r - \xi_h^r$, o bien, $(a_i)_h, (a_{i+1})_h \geq \kappa_h^r + \xi_h^r$, para cierto $h \neq j$, $h \in \{1, \dots, n\}$, $r = 1, \dots, N$, $i = 1, \dots, K - 1$.

Demostración. Por la Definición 2.5, si Q cumple la condición 1 entonces es un X - Y camino rectangular. Si Q verifica además las condiciones 2 y 3, Q es un camino rectangular permitido. Veamos esto. Dado un punto Z de Q , éste pertenece a algún segmento $[a_i, a_{i+1}]$, $i \in \{1, \dots, K - 1\}$. Si $Z \in \text{int}(B_r)$, esto es porque $\kappa_s^r - \xi_s^r < z_s < \kappa_s^r + \xi_s^r$ para todo $s \in \{1, \dots, n\}$. Los puntos a_i y a_{i+1} se diferencian por la condición 1 en una coordenada, digamos que es la j -ésima, $j \in \{1, \dots, n\}$. Como $a_i, a_{i+1} \notin \text{int}(B_r)$ por la condición 2, $(a_i)_j < \kappa_j^r < (a_{i+1})_j$ o $(a_{i+1})_j < \kappa_j^r < (a_i)_j$, de lo contrario a_i o a_{i+1} estarían en el interior de B_r . Por la condición 3, o bien, $(a_i)_h, (a_{i+1})_h \leq \kappa_h^r - \xi_h^r$, o bien, $(a_i)_h, (a_{i+1})_h \geq \kappa_h^r + \xi_h^r$, para cierto $h \neq j$, $h \in \{1, \dots, n\}$. Pero $(a_i)_h = (a_{i+1})_h = z_h$, lo que contradice $\kappa_s^r - \xi_s^r < z_s < \kappa_s^r + \xi_s^r$ para todo $s \in \{1, \dots, n\}$.

Si Q es un X - Y camino rectangular permitido, entonces, por la Definición 2.5), satisface las condiciones 1 y 2. Si se da $(a_i)_j < \kappa_j^r < (a_{i+1})_j$ o $(a_{i+1})_j < \kappa_j^r < (a_i)_j$ para algún $j \in \{1, \dots, n\}$, entonces $(a_i)_h = (a_{i+1})_h$, $\forall h \neq j$, $h = 1, \dots, n$, pues los codos consecutivos de Q se diferencian en una sólo coordenada por la condición 1, la j -ésima en este caso, siendo el resto iguales. Luego si $\kappa_h^r - \xi_h^r < (a_i)_h = (a_{i+1})_h < \kappa_h^r + \xi_h^r$, $\forall h \neq j$, entonces el segmento $[a_i, a_{i+1}]$ interseca con el interior de B_r (tómese por ejemplo el punto del segmento $((a_i)_1, \dots, (a_i)_{j-1}, \kappa_j^r, (a_i)_{j+1}, \dots, (a_i)_n)^t$). Luego Q debe verificar la condición 3. \square

Apoyándonos en el Lema 2.12, con el que se garantiza una cota superior del número de codos necesarios para formar un X - Y camino rectangular mínimo permitido, y en el Lema 2.13, el cual permite caracterizar a dicho camino en función de las coordenadas de sus codos, podemos formular el problema que nos ocupa como un problema de programación matemática como muestra el siguiente teorema. Como se verá en la demostración de su corrección, el problema de programación matemática que da el teorema decide cuántos codos son utilizados para construir el X - Y camino rectangular óptimo, no teniéndose que usar un número de codos igual a la cota superior dada si no es necesario. Como venimos haciendo en las formulaciones anteriores para simplificar éstas, denotaremos $X^1 = X$ y $X^2 = Y$.

Teorema 2.4. *El Problema 2.1 cuando $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^N B_i$ donde cada B_i es un hiperparalelepípedo de dimensión n , disjunto con el resto, siendo κ_k^i la coordenada k -ésima de su centro y ξ_k^i la mitad de su anchura en la coordenada OX_k , $i = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, n$,*

es equivalente al problema de programación lineal y entera mixta

$$\text{mín} \quad \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\bar{S}-1} d_{ik}^{aa} \quad (2.62)$$

$$\text{s.a:} \quad a_{1k} = x_k^1, \quad \forall k = 1, \dots, n, \quad (2.63)$$

$$a_{\bar{S}N} = x_k^2, \quad \forall k = 1, \dots, n, \quad (2.64)$$

$$u_{imk}^{ac+} - u_{imk}^{ac-} = a_{ik} - \kappa_k^m, \quad \forall i = 1, \dots, \bar{S}, m = 1, \dots, N, k = 1, \dots, n, \quad (2.65)$$

$$u_{imk}^{ac+} \leq M \delta_{imk}^{ac}, \quad \forall i = 1, \dots, \bar{S}, m = 1, \dots, N, k = 1, \dots, n, \quad (2.66)$$

$$u_{imk}^{ac-} \leq M(1 - \delta_{imk}^{ac}), \quad \forall i = 1, \dots, \bar{S}, m = 1, \dots, N, k = 1, \dots, n, \quad (2.67)$$

$$d_{imk}^{ac} = u_{imk}^{ac+} + u_{imk}^{ac-}, \quad \forall i = 1, \dots, \bar{S}, m = 1, \dots, N, k = 1, \dots, n, \quad (2.68)$$

$$u_{ik}^{aa+} - u_{ik}^{aa-} = a_{(i+1)k} - a_{ik}, \quad \forall i = 1, \dots, \bar{S} - 1, k = 1, \dots, n, \quad (2.69)$$

$$u_{ik}^{aa+} \leq M \delta_{ik}^{aA}, \quad \forall i = 1, \dots, \bar{S} - 1, k = 1, \dots, n, \quad (2.70)$$

$$u_{ik}^{aa-} \leq M(1 - \delta_{ik}^{aA}), \quad \forall i = 1, \dots, \bar{S} - 1, k = 1, \dots, n, \quad (2.71)$$

$$u_{ik}^{aa+} \leq M(1 - \delta_{ik}^{Aa}), \quad \forall i = 1, \dots, \bar{S} - 1, k = 1, \dots, n, \quad (2.72)$$

$$u_{ik}^{aa-} \leq M \delta_{ik}^{Aa}, \quad \forall i = 1, \dots, \bar{S} - 1, k = 1, \dots, n, \quad (2.73)$$

$$d_{ik}^{aa} = u_{ik}^{aa+} + u_{ik}^{aa-}, \quad \forall i = 1, \dots, \bar{S} - 1, k = 1, \dots, n, \quad (2.74)$$

$$\sum_{k=1}^n (\delta_{ik}^{aA} + \delta_{ik}^{Aa}) \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, \bar{S} - 1, \quad (2.75)$$

$$d_{imk}^{ac} \geq \xi_k^m - \xi_k^m \lambda_{imk}, \quad \forall i = 1, \dots, \bar{S}, m = 1, \dots, N, k = 1, \dots, n, \quad (2.76)$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_{imk} \leq n - 1, \quad \forall i = 1, \dots, \bar{S}, m = 1, \dots, N, \quad (2.77)$$

$$\theta_{imk} \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, \bar{S} - 1, m = 1, \dots, N, k = 1, \dots, n, \quad (2.78)$$

$$\theta_{imk} \geq \delta_{(i+1)mk}^{ac} - \delta_{imk}^{ac}, \quad \forall i = 1, \dots, \bar{S} - 1, m = 1, \dots, N, k = 1, \dots, n, \quad (2.79)$$

$$\theta_{imk} \geq -(\delta_{(i+1)mk}^{ac} - \delta_{imk}^{ac}), \quad \forall i = 1, \dots, \bar{S} - 1, m = 1, \dots, N, k = 1, \dots, n, \quad (2.80)$$

$$d_{imk}^{ac} \geq \xi_k^m \omega_{imk} - M(1 - \sum_{h=1}^n \theta_{imh}), \quad \begin{array}{l} \forall i = 1, \dots, \bar{S} - 1, \\ m = 1, \dots, N, \\ k = 1, \dots, n, \end{array} \quad (2.81)$$

$$\sum_{k=1}^n \omega_{imk} = 1, \quad \forall i = 1, \dots, \bar{S} - 1, m = 1, \dots, N, \quad (2.82)$$

$$\omega_{imk} \leq 1 - \theta_{imk}, \quad \forall i = 1, \dots, \bar{S} - 1, m = 1, \dots, N, k = 1, \dots, n, \quad (2.83)$$

$$a_{ik} \in \mathbb{R}, \quad \forall i = 1, \dots, \bar{S}, k = 1, \dots, n, \quad (2.84)$$

$$u_{imk}^{ac+}, u_{imk}^{ac-}, d_{imk}^{ac} \geq 0, \delta_{imk}^{ac} \in \{0, 1\}, \quad \forall i = 1, \dots, \bar{S}, m = 1, \dots, N, k = 1, \dots, n, \quad (2.85)$$

$$u_{ik}^{aa+}, u_{ik}^{aa-}, d_{ik}^{aa} \geq 0, \delta_{ik}^{aA}, \delta_{ik}^{Aa} \in \{0, 1\}, \quad \forall i = 1, \dots, \bar{S} - 1, k = 1, \dots, n, \quad (2.86)$$

$$\lambda_{imk} \in \{0, 1\}, \quad \forall i = 1, \dots, \bar{S}, m = 1, \dots, N, k = 1, \dots, n, \quad (2.87)$$

$$\theta_{imk} \geq 0, \omega_{imk} \in \{0, 1\}, \quad \forall i = 1, \dots, \bar{S} - 1, m = 1, \dots, N, k = 1, \dots, n, \quad (2.88)$$

siendo \bar{S} una cota superior para el número de codos del camino rectangular óptimo

que asegure que éste pueda ser un X^1 - X^2 camino rectangular mínimo permitido y $M > 0$ una constante lo suficientemente grande.

Demostración. En (2.84)-(2.88) se define la naturaleza de las variables de decisión: a_{ik} representa la k -ésima coordenada del i -ésimo codo del camino rectangular que une X^1 y X^2 , siendo $a_1 = X^1$ (restricción (2.63)) y $a_{\bar{S}} = X^2$ (restricción (2.64)); el conjunto de variables $u_{imk}^{ac+}, u_{imk}^{ac-}, d_{imk}^{ac}, \delta_{imk}^{ac}$ tiene por objeto determinar las posiciones relativas en la coordenada k -ésima de cada uno de los codos a_i con respecto a cada uno de los centros de los paralelepípedos barrera B_m , su significado y el sentido de las restricciones (2.65)-(2.68) es análogo al que tenían las variables $u_{jk}^+, u_{jk}^-, d_{jk}^c, \delta_{jk}$ y las restricciones (2.10)-(2.13) en la formulación (2.6)-(2.30) para determinar las posiciones relativas en la coordenada k -ésima de los puntos X^1 y X^2 con respecto al centro de B ; el conjunto de variables $u_{ik}^{aa+}, u_{ik}^{aa-}, d_{ik}^{aa}, \delta_{ik}^{aA}, \delta_{ik}^{Aa}$ determinan la posición relativa en la coordenada k -ésima del codo a_i con respecto a su sucesor a_{i+1} , su significado y el sentido de las restricciones (2.69)-(2.74), al igual que antes, es análogo al que tenían las variables $u_{jk}^+, u_{jk}^-, d_{jk}^c, \delta_{jk}$ y las restricciones (2.10)-(2.13) en la formulación (2.6)-(2.30) para determinar las posiciones relativas en la coordenada k -ésima de los puntos X^1 y X^2 con respecto al centro de B , con la diferencia de que ahora estamos considerando dos variables binarias en lugar de una, δ_{ik}^{aA} y δ_{ik}^{Aa} , la primera tomará el valor 1 si $(a_i)_k < (a_{i+1})_k$, mientras que la segunda lo hará si $(a_i)_k > (a_{i+1})_k$. La variable binaria λ_{imk} junto con la restricción (2.76) se utiliza de la misma forma que la variable binaria λ_{jk}^1 y la restricción (2.18) en la formulación (2.6)-(2.30) para detectar si $|(a_i)_k - \kappa_k^m| < \xi_k^m$. La variable θ_{imk} junto con las restricciones (2.78)-(2.80) se utiliza para detectar si $(a_i)_k < \kappa_k^m < (a_{i+1})_k$ o si $(a_{i+1})_k < \kappa_k^m < (a_i)_k$ de la misma forma que utilizábamos la variable Δ_k y las restricciones (2.31)-(2.33) del Lema 2.10 para detectar si $\min\{p_k, q_k\} < \kappa_k < \max\{p_k, q_k\}$. El significado de la variable ω_{imk} se explica a continuación.

La restricción (2.75) asegura la condición 1 del Lema 2.13 para garantizar que los codos $a_1, \dots, a_{\bar{S}}$ forman un X^1 - X^2 camino rectangular permitido, con ella estamos imponiendo que un punto a_i de la sucesión se diferencie de su sucesor a_{i+1} a lo sumo en una coordenada ($\delta_{ik}^{aA} = 1$ si $(a_i)_k < (a_{i+1})_k$ y $\delta_{ik}^{Aa} = 1$ si $(a_i)_k > (a_{i+1})_k$, luego $\delta_{ik}^{aA} + \delta_{ik}^{Aa} = 1$ si $(a_i)_k \neq (a_{i+1})_k$), esto permite que a_i pueda ser el mismo punto que a_{i+1} (cuando $\sum_{k=1}^n (\delta_{ik}^{aA} + \delta_{ik}^{Aa}) = 0$), de esta forma conseguimos que el número de codos del X - Y camino rectangular que el modelo construye no alcance la cota superior considerada \bar{S} para el número de codos si no es necesario (los codos se forman debido al cambio en una coordenada entre un punto de la sucesión y su sucesor). La restricción (2.77) es la condición 2 del Lema 2.13 para garantizar que los codos $a_1, \dots, a_{\bar{S}}$ forman un X^1 - X^2 camino rectangular permitido, con ella imponemos que $a_i \notin \text{int}(B_m), \forall i = 1, \dots, \bar{S}, \forall m = 1, \dots, N$. Con (2.81)-(2.83) nos aseguramos de que se cumple la condición 3 del Lema 2.13 para garantizar que los codos $a_1, \dots, a_{\bar{S}}$ forman un X^1 - X^2 camino rectangular permitido. Si $\theta_{imk} = 0, \forall k = 1, \dots, n$, entonces la restricción (2.83) se cumple trivialmente, así como la restricción (2.81), pues $d_{imk}^{ac} \geq 0$ y $\xi_k^m \omega_{imk} - M < 0$ para M suficientemente grande, la restricción (2.82) se verificará en

consecuencia pues las variables ω_{imk} sólo aparecen en esta restricción y en las anteriores ((2.81) y (2.83)). Supongamos que $(a_i)_j < \kappa_j^m < (a_{i+1})_j$ o $(a_{i+1})_j < \kappa_j^m < (a_i)_j$ para algún $j \in \{1, \dots, n\}$ (de hecho esto sólo puede ocurrir en una coordenada pues la restricción (2.75) fuerza a que a_i y a_{i+1} se diferencian a lo sumo en una coordenada), en cuyo caso $\theta_{imj} = 1$, y supongamos además que $\theta_{imk} = 0, \forall k \neq j$. En este caso, debe asegurarse, o bien, $(a_i)_r, (a_{i+1})_r \leq \kappa_r^m - \xi_r^m$, o bien, $(a_i)_r, (a_{i+1})_r \geq \kappa_r^m + \xi_r^m$, para cierto $r \neq j$, o dicho de otra forma, debe asegurarse que $d_{imr}^{ac} \geq \xi_r^m$ para algún $r \neq j$, pues dado que a_i y a_{i+1} se diferencian a lo sumo en una coordenada, siendo esta entonces necesariamente la j -ésima ya que $(a_i)_j < \kappa_j^m < (a_{i+1})_j$ o $(a_{i+1})_j < \kappa_j^m < (a_i)_j$, $d_{(i+1)mr}^{ac} \geq \xi_r^m$ se tendrá por tenerse $d_{imr}^{ac} \geq \xi_r^m$. En esta situación dado que la restricción (2.81) quedaría $d_{imk}^{ac} \geq \xi_k^m \omega_{imk}$ y alguno de los ω_{imk} tomará el valor 1 por la restricción (2.82), se tendrá que $d_{imr}^{ac} \geq \xi_r^m$ para algún r , faltaría comprobar que este r es distinto de j , pero esto se tiene por la restricción (2.83) que fuerza a que $\omega_{imj} = 0$, cumpliéndose así la condición 3 del Lema 2.13 para garantizar que los codos $a_1, \dots, a_{\bar{S}}$ forman un X^1 - X^2 camino rectangular permitido. Como sabemos, las variables θ_{imk} toman el valor 1 necesariamente si $(a_i)_k < \kappa_k^m < (a_{i+1})_k$ o $(a_{i+1})_k < \kappa_k^m < (a_i)_k$, pudiendo tomar valores en el intervalo $[0, 1]$ en caso contrario, aún así, obsérvese que las restricciones (2.81)-(2.83) funcionan correctamente en el resto de casos no desarrollados, pues valores de las variables θ_{imk} que, pudiendo tomar cualquier valor en el intervalo $[0, 1]$, hagan demasiado pequeña la cantidad $M(1 - \sum_{h=1}^n \theta_{imh})$ de la restricción (2.81), producirán un incremento innecesario del valor de la función objetivo. Dado que en la función objetivo (2.62) se está minimizando la suma de las longitudes de los segmentos que constituyen el camino rectangular permitido que une X^1 y X^2 , en el óptimo, el camino que determinan los segmentos $[a_1, a_2], \dots, [a_{\bar{S}-1}, a_{\bar{S}}]$ es un X^1 - X^2 camino rectangular mínimo permitido y la función objetivo (2.62) toma el valor $d_B(X^1, X^2)$. \square

De nuevo, M puede tomarse $n \max_{i=1, \dots, n} \{2\xi'_i\} + \varepsilon$, siendo ξ'_i la mitad de la anchura en la coordenada $O\mathcal{X}_i$ de la envolvente rectangular iterativa \mathcal{R}_B de X, Y y $B = \bigcup_{i=1}^N B_i$, y ε cualquier constante estrictamente positiva, siempre y cuando en (2.62)-(2.88) no se consideren los paralelepípedos barrera que no estén contenidos en \mathcal{R}_B . Esto último lo podemos hacer por el Lema 2.7, y además supone una disminución del número de variables binarias que emplea (2.62)-(2.88). Puesto que el número de variables binarias usadas en la formulación (2.62)-(2.88) depende directamente de la cota superior para el número de codos \bar{S} , es inmediato ver que cuanto más ajustada sea esta cota, menor será en general el tiempo que necesite el solver que estemos utilizando para encontrar la solución óptima del problema. Si en (2.62)-(2.88) tomamos \bar{S} menor que el número mínimo de codos necesario para formar un X^1 - X^2 camino rectangular mínimo permitido, entonces (2.62)-(2.88) devuelve como solución el X^1 - X^2 camino rectangular permitido de menor longitud que puede formarse con ese número de codos. Si consideramos el Problema 2.1 general, no el caso particular del Teorema 2.4, y formulamos (2.62)-(2.88) con los paralelepípedos que constituyen los diferentes complejos barrera,

las condiciones del Lema 2.13 que cumple (2.62)-(2.88), son suficientes para garantizar que la formulación (2.62)-(2.88) resuelve el Problema 2.1.

Corolario 2.2. *El Problema 2.1 es equivalente al problema de programación matemática (2.62)-(2.88) tomando como paralelepípedos en la formulación los que forman los complejos barreras.*

Demostración. Basta observar que, puesto que venimos suponiendo que los paralelepípedos $\{B_i^1, \dots, B_i^{m_i}\}$ que componen un complejo B_i , lo describen correctamente si, para cualquier punto de un paralelepípedo B_i^j , $j = 1, \dots, m_i$, que pertenezca a la frontera de B_i^j y, al mismo tiempo, al interior del complejo B_i , entonces, existe otro paralelepípedo distinto B_i^h del mismo complejo tal que dicho punto pertenece a su interior, o lo que es lo mismo, que $\bigcup_{k=1}^{m_i} \text{int}(B_i^k) = \text{int}(B_i)$, las condiciones del Lema 2.13 que cumple (2.62)-(2.88) son equivalentes a decir que el X^1 - X^2 camino rectangular formado sea un camino rectangular permitido. \square

La formulación (2.62)-(2.88) como método para resolver el Problema 2.1 presenta un inconveniente: la obtención de una cota superior \bar{S} para el número de codos de un X^1 - X^2 camino rectangular mínimo permitido no es inmediata. La asunción hecha en el Lema 2.12 de que siempre puede encontrarse un X^1 - X^2 camino rectangular mínimo permitido tal que una vez que pasa por la frontera de un paralelepípedo barrera, no vuelve a pasar por ella, no es cierta en el caso de los complejos de paralelepípedos. En la Figura 2.16 se muestra un ejemplo en el caso plano dónde todo X^1 - X^2 camino rectangular mínimo permitido pasa necesariamente dos veces por la frontera de un complejo barrera y dos veces por la frontera de un mismo paralelepípedo constituyente de dicho complejo. Del Teorema 2.1 se desprende que una cota superior \bar{S} para el número de codos de un X^1 - X^2 camino rectangular mínimo permitido necesaria en la formulación (2.62)-(2.88) cuando ésta se utiliza para resolver el Problema 2.1, es el número de nodos del grafo correspondiente a \mathcal{N}_{ℓ_1} . Sin embargo, la obtención de ese número requiere la construcción de \mathcal{N}_{ℓ_1} , cuya complejidad sólo hemos podido acotar por $\mathcal{O}(W^6 n^{11} 2^{2n-6})$. Es necesario pues explorar una nueva estrategia para resolver el Problema 2.1 en su versión general.

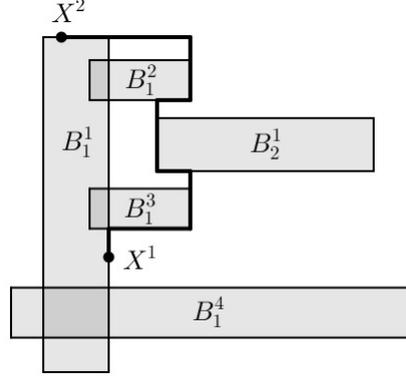


Figura 2.16: Todo X^1 - X^2 camino rectangular mínimo permitido pasa necesariamente dos veces por la frontera de B_1 y dos veces por la frontera de B_1^1 .

El método para resolver el Problema 2.1 que se va a desarrollar a continuación se basa fundamentalmente en el siguiente resultado.

Lema 2.14. Sean C_1 y C_2 dos hiperparalelepípedos isotéticos de dimensiones $n_1, n_2 \in \{n-1, n\}$, respectivamente, que intersecan en sus fronteras pero no en sus interiores. Entonces, para todo $X \in C_1$ y para todo $Y \in C_2$, existe un X - Y camino rectangular de longitud $\ell_1(X, Y)$ completamente contenido en $C_1 \cup C_2$.

Demostración. Durante toda la prueba supondremos sin pérdida de generalidad $n_1 \geq n_2$. Denotemos por $\hat{\xi}_j^1$ y $\hat{\xi}_j^2$, $j = 1, \dots, n$, a la mitad de la anchura en cada coordenada de C_1 y C_2 , y por $(\hat{\kappa}_1^1, \dots, \hat{\kappa}_n^1)^t$ y $(\hat{\kappa}_1^2, \dots, \hat{\kappa}_n^2)^t$ a sus centros, respectivamente. La intersección de C_1 y C_2 , $C_1 \cap C_2$, se encuentra necesariamente en una cara ζ_1 de C_1 de dimensión $n_1 - 1$ en la que es constante la coordenada, digamos, $O\mathcal{X}_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$, y en una cara ζ_2 de C_2 de dimensión $n_2 - 1$ en la que es constante esa misma coordenada $O\mathcal{X}_j$. Esto se tiene porque los paralelepípedos son isotéticos e intersecan en su frontera pero no en su interior. Más aún, $C_1 \cap C_2$ es un hiperparalelepípedo de dimensión $n_2 - 1$, el cual se extiende en $O\mathcal{X}_k$ en el intervalo $[f_k, g_k] = [\hat{\kappa}_k^1 - \hat{\xi}_k^1, \hat{\kappa}_k^1 + \hat{\xi}_k^1] \cap [\hat{\kappa}_k^2 - \hat{\xi}_k^2, \hat{\kappa}_k^2 + \hat{\xi}_k^2]$, $k = 1, \dots, n$. Es decir, $[f_k, g_k]$ puede ser $[\hat{\kappa}_k^1 - \hat{\xi}_k^1, \hat{\kappa}_k^2 + \hat{\xi}_k^2]$, $[\hat{\kappa}_k^2 - \hat{\xi}_k^2, \hat{\kappa}_k^1 + \hat{\xi}_k^1]$, $[\hat{\kappa}_k^1 - \hat{\xi}_k^1, \hat{\kappa}_k^1 + \hat{\xi}_k^1]$ o $[\hat{\kappa}_k^2 - \hat{\xi}_k^2, \hat{\kappa}_k^2 + \hat{\xi}_k^2]$, $k = 1, \dots, n$. En adelante supondremos $\hat{\kappa}_j^1 < \hat{\kappa}_j^2$, por tanto, todos los puntos de $C_1 \cap C_2$ tienen la j -ésima coordenada igual a $f_j = \hat{\kappa}_j^1 + \hat{\xi}_j^1 = \hat{\kappa}_j^2 - \hat{\xi}_j^2 = g_j$.

Sean $X \in C_1$ e $Y \in C_2$. Es evidente que para todo punto Z_1 de C_1 siempre existe un X - Z_1 camino rectangular de longitud $\ell_1(X, Z_1)$ contenido completamente en C_1 (el camino rectangular en el que en cada codo no trivial se iguala una de las coordenadas de X a la de Z_1 correspondiente). Lo mismo ocurre con C_2 e Y . Supongamos en primer lugar que $\zeta_2 \subseteq \zeta_1$. Entonces consideramos el segmento $s = [(y_1, \dots, y_j, \dots, y_n)^t, (y_1, \dots, f_j, \dots, y_n)^t]$, el cual está contenido en C_2 , y denotamos $Z_2 = (y_1, \dots, f_j, \dots, y_n)^t$. El punto Z_2 pertenece a $C_1 \cap C_2$, en particular a C_1 , luego existe un X - Z_2 camino rectangular Q_{X, Z_2} de longitud $\ell_1(X, Z_2)$ contenido en C_1 . El

X - Y camino rectangular $Q_{X,Z_2} \cup s$ es un X - Y camino rectangular contenido en $C_1 \cup C_2$ de longitud

$$l(Q_{X,Z_2} \cup s) = l(Q_{X,Z_2}) + l(s) = \sum_{i=1, i \neq j}^n |x_i - y_i| + |x_j - f_j| + |f_j - y_j|,$$

pero $x_j \leq f_j \leq y_j$, luego $|x_j - f_j| + |f_j - y_j| = |x_j - y_j|$, por lo que $Q_{X,Z_2} \cup s$ tiene longitud $l_1(X, Y)$. Si $\zeta_1 \subseteq \zeta_2$ se razona de la misma forma.

Consideremos ahora el caso general en el que no necesariamente $\zeta_2 \subseteq \zeta_1$ ni $\zeta_1 \subseteq \zeta_2$. Tomemos $C_1 \cap C_2$ y consideremos el paralelepípedo isotético C_3 dado por el conjunto de puntos $\{Z_2 + \tau e_j : Z_2 \in C_1 \cap C_2, 0 \leq \tau \leq 2\xi_j^2\}$, siendo $e_j \in \mathbb{R}^n$ el vector cuya única componente no nula es la j -ésima, siendo ésta igual a 1, es decir, C_3 es la región barrida cuando se desplaza $C_1 \cap C_2$ desde f_j hasta $\hat{\kappa}_j^2 + \hat{\xi}_j^2$ (ver Figura 2.17).

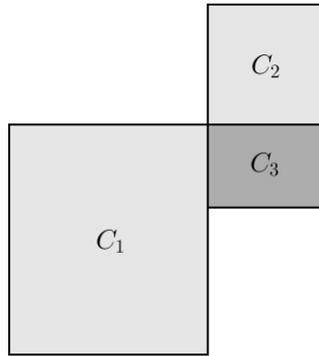


Figura 2.17: Paralelepípedos C_1 , C_2 y C_3 en \mathbb{R}^2 .

Claramente $C_3 \subseteq C_2$. Consideremos que $Y \notin C_3$, pues si $Y \in C_3$ el resultado se tiene construyendo el mismo X - Y camino rectangular que el construido en el caso en el que $\zeta_2 \subseteq \zeta_1$. El punto Y pertenece a C_3 si y sólo si $f_i \leq y_i \leq g_i$ para todo $i = 1, \dots, n$ con $i \neq j$. Como $Y \notin C_3$, sean i_1, \dots, i_m los índices para los que, o bien, $y_{i_k} < f_{i_k}$, o bien, $y_{i_k} > g_{i_k}$. Sea Q el camino rectangular compuesto por m segmentos que parte de Y y tal que en cada codo se iguala la coordenada y_{i_k} de y a f_{i_k} si $y_{i_k} < f_{i_k}$ o a g_{i_k} si $y_{i_k} > g_{i_k}$. Sea Z el punto al que llega este camino. El punto Z pertenece a C_3 y Q es un Y - Z camino rectangular contenido en C_2 (y por tanto en $C_1 \cup C_2$) de longitud $l_1(Y, Z)$. Como $Z \in C_3$, por el párrafo anterior sabemos que existe un Z - X camino rectangular Q' contenido en $C_1 \cup C_3$ (y por tanto en $C_1 \cup C_2$) de longitud $l_1(Z, X)$, pues C_1 y C_3 son dos paralelepípedos isotéticos que intersecan en sus fronteras pero no en sus interiores, y si ζ_3 es la cara de C_3 en la que está contenido $C_1 \cap C_3 = C_1 \cap C_2$, entonces $\zeta_3 \subseteq \zeta_1$. El camino rectangular $Q \cup Q'$ es así un Y - X camino rectangular contenido completamente en $C_1 \cup C_2$. Veamos que su longitud es $l_1(Y, X)$. Si $i \notin \{i_1, \dots, i_m\}$,

entonces el aporte a la longitud de $Q \cup Q'$ del desplazamiento en la i -ésima coordenada es $|y_i - z_i| + |z_i - x_i|$, pero en este caso $y_i = z_i$, luego es $|y_i - x_i|$. Por otro lado, si $i \in \{i_1, \dots, i_m\}$, entonces el aporte a la longitud de $Q \cup Q'$ del desplazamiento en la i -ésima coordenada es $|y_i - z_i| + |z_i - x_i|$, donde z_i es f_i si $y_i < f_i$ o g_i si $y_i > g_i$. Si $z_i = f_i$, entonces $y_i < z_i$ y $z_i \leq x_i$, pues como $y_i < z_i$ necesariamente $f_i = \hat{\kappa}_i^1 - \hat{\xi}_i^1$, ya que si $f_i = \hat{\kappa}_i^2 - \hat{\xi}_i^2$ no se podría tener $y_i < z_i$, luego $|y_i - z_i| + |z_i - x_i| = |y_i - x_i|$. Si $z_i = g_i$, entonces $y_i > z_i$ y $z_i \geq x_i$, pues como $y_i > z_i$ necesariamente $g_i = \hat{\kappa}_i^1 + \hat{\xi}_i^1$, ya que si $g_i = \hat{\kappa}_i^2 + \hat{\xi}_i^2$ no se podría tener $y_i > z_i$, luego $|y_i - z_i| + |z_i - x_i| = |y_i - x_i|$. Concluimos así que la longitud de $Q \cup Q'$ es $\ell_1(X, Y)$ quedando probado el lema. \square

Volvamos a pensar en la red de construcción rectangular \mathcal{N}_{ℓ_1} de X, Y y \mathcal{B} . Esta red nos permitía dar un método de cálculo de un X - Y camino rectangular mínimo permitido basado en el Teorema 2.1, el cual consistía básicamente en aplicar cualquier algoritmo de cálculo de camino mínimo en el grafo que constituye \mathcal{N}_{ℓ_1} . Hablamos entonces de la complejidad asintótica de utilizar el algoritmo de Dijkstra para hallar dicho camino. No se comentó en ese momento, pero evidentemente, una vez construido el grafo que describe \mathcal{N}_{ℓ_1} , puede utilizarse también para resolver el Problema 2.1, la formulación lineal clásica de programación matemática para resolver el problema del camino mínimo en grafos como un problema de flujo. El Lema 2.14 nos va a permitir además resolver el Problema 2.1 como un problema de camino mínimo en grafos de nodos no fijos. La idea es descomponer $\mathcal{R}_{\mathcal{B}} \setminus \text{int}(\mathcal{B})$ en regiones entre las cuales los caminos rectangulares se comportan de una forma deseable que los hace, en algún sentido, manejables. Estas regiones, como se puede intuir y deducir del Lema 2.14, son los hiperparalelepípedos isotéticos. Este es el caso de la descomposición en paralelepípedos $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ de $\mathcal{R}_{\mathcal{B}} \setminus \text{int}(\mathcal{B})$ que da la red de construcción rectangular. Los paralelepípedos de $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ sólo intersecan con otros en su frontera, más aún, por la construcción hecha de \mathcal{N}_{ℓ_1} , estas intersecciones son caras comunes de los paralelepípedos que intersecan. El Lema 2.14 puede aplicarse entonces en cualquier par de puntos de sendos paralelepípedos adyacentes (es decir, que intersecan en sus fronteras) de $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$. El siguiente lema proporciona un método para resolver el Problema 2.1 basado en el Lema 2.14, el objeto del lema es simplemente mostrar como puede ser utilizado el Lema 2.14 para dar solución al Problema 2.1, si bien este método se seguirá refinando en lo que resta de capítulo.

Lema 2.15. Sean $X^1, X^2 \in \mathcal{F}$ y sea \mathcal{N}_{ℓ_1} la red de construcción rectangular de X^1, X^2 y \mathcal{B} . Sea $G = (V, E)$ el grafo dirigido que posee un nodo $v_i \in V$ por cada paralelepípedo C_i de $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$, y tal que el arco $(i, j) \in E$ (y, por tanto, el arco $(j, i) \in E$) si y sólo si los paralelepípedos C_i y C_j de $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ son adyacentes, esto es, intersecan. Denotemos por i_0 al índice tal que $X^1 \in C_{i_0} \in \mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ (si hay más de uno i_0 será cualquiera de ellos), por i_f al índice tal que $X^2 \in C_{i_f} \in \mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ (si hay más de uno i_f será cualquiera de ellos), $i_0 \neq i_f$, y notemos $\tilde{N} = |\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})|$. Sea $\tilde{\kappa}_k^i$ la coordenada k -ésima del centro de C_i y $\tilde{\xi}_k^i$ la mitad de su anchura en la coordenada $O\mathcal{X}_k$, $i = 1, \dots, \tilde{N}$, $k = 1, \dots, n$. Entonces, el Problema 2.1 es equivalente al problema de programación

lineal y entera mixta

$$\text{mín} \quad \sum_{(i,j) \in E} D_{ij} \quad (2.89)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{(i_0,j) \in E} \eta_{i_0j} = 1, \quad (2.90)$$

$$\sum_{(h,i_f) \in E} \eta_{hi_f} = 1, \quad (2.91)$$

$$\sum_{(i,j) \in E} \eta_{ij} - \sum_{(h,i) \in E} \eta_{hi} = 0, \quad \forall j = 1, \dots, \tilde{N}, i \neq i_0, i_f, \quad (2.92)$$

$$d_{ijk} \geq c_k^i - c_k^j, \quad \forall (i,j) \in E, k = 1, \dots, n, \quad (2.93)$$

$$d_{ijk} \geq -c_k^i + c_k^j, \quad \forall (i,j) \in E, k = 1, \dots, n, \quad (2.94)$$

$$D_{ij} \geq \sum_{k=1}^n d_{ijk} - M(1 - \eta_{ij}), \quad \forall (i,j) \in E, \quad (2.95)$$

$$\tilde{\kappa}_k^i - \tilde{\xi}_k^i \leq c_k^i \leq \tilde{\kappa}_k^i + \tilde{\xi}_k^i, \quad \forall i = 1, \dots, \tilde{N}, k = 1, \dots, n, \quad (2.96)$$

$$c_k^{i_0} = x_k^1, \quad \forall k = 1, \dots, n, \quad (2.97)$$

$$c_k^{i_f} = x_k^2, \quad \forall k = 1, \dots, n, \quad (2.98)$$

$$D_{ij} \geq 0, \eta_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i,j) \in E, \quad (2.99)$$

$$d_{ijk} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in E, k = 1, \dots, n, \quad (2.100)$$

$$c_k^i \in \mathbb{R}, \quad \forall i = 1, \dots, \tilde{N}, k = 1, \dots, n, \quad (2.101)$$

siendo $M > 0$ una constante lo suficientemente grande.

Demostración. En (2.99)-(2.101) se define la naturaleza de las variables de decisión: c_k^i representa la k -ésima coordenada de un punto en el i -ésimo paralelepípedo $C_i \in \mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$; d_{ijk} es una variable positiva que en el óptimo tomará, al menos, el valor absoluto de la diferencia en la k -ésima coordenada $|c_k^i - c_k^j|$ de los puntos $(c_1^i, \dots, c_n^i)^t \in C_i$ y $(c_1^j, \dots, c_n^j)^t \in C_j$; D_{ij} es una variable positiva que en el óptimo tomará el valor $\ell_1((c_1^i, \dots, c_n^i)^t, (c_1^j, \dots, c_n^j)^t)$ si los puntos $(c_1^i, \dots, c_n^i)^t$ y $(c_1^j, \dots, c_n^j)^t$ pertenecen al X^1 - X^2 camino rectangular mínimo permitido que se encuentra en el óptimo y el punto $(c_1^i, \dots, c_n^i)^t$ se visita antes que el punto $(c_1^j, \dots, c_n^j)^t$ cuando el X^1 - X^2 camino óptimo se recorre desde X^1 hasta X^2 , en cuyo caso la variable binaria η_{ij} tomará el valor 1, en caso contrario $D_{ij} = 0$ y η_{ij} tomará también el valor 0.

Las restricciones (2.90)-(2.92) son las restricciones clásicas de conservación de flujo utilizadas en los problemas de programación matemática para hallar caminos mínimos en grafos. Estas restricciones imponen que del nodo inicial ν_{i_0} debe de salir un arco (restricción (2.90)), que al nodo final ν_{i_f} debe de llegar otro (restricción (2.91)), y que en cualquier otro nodo debe conservarse el flujo (restricción (2.92)), esto es, que al nodo llegue un arco y de él salga otro, o que al nodo no llegue ni de él salga ningún arco.

De esta forma, se construye un camino de ν_{i_0} a ν_{i_f} en G . Cada nodo ν_i está representando a un punto en el paralelepípedo $C_i \in \mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ (restricción 2.96), la longitud D_{ij} del arco (i, j) viene dada por, al menos, la distancia $\ell_1((c_1^i, \dots, c_n^i)^t, (c_1^j, \dots, c_n^j)^t)$ entre los puntos de C_i y C_j que se seleccionen en el óptimo (restricciones (2.93) y (2.94)). Como en (2.89) se está minimizando $\sum_{(i,j) \in E} D_{ij}$, en el óptimo el camino encontrado será de longitud mínima siempre y cuando $D_{ij} = 0$ si el arco (i, j) no se selecciona en el camino, es decir, si $\eta_{ij} = 0$, pero esto se consigue con (2.95), pues si esto ocurre entonces (2.95) impone $D_{ij} \geq \sum_{k=1}^n d_{ijk} - M < 0$, desigualdad que no está exigiendo nada pues $D_{ij} \geq 0$ por definición en (2.99), haciéndose $D_{ij} = 0$ por la minimización que se está haciendo en (2.89), si por el contrario el arco (i, j) se selecciona en el camino, esto es, si $\eta_{ij} = 1$, (2.95) impone $D_{ij} \geq \sum_{k=1}^n d_{ijk}$, así por la minimización que se está haciendo en (2.89), $D_{ij} = \sum_{k=1}^n d_{ijk} = \ell_1((c_1^i, \dots, c_n^i)^t, (c_1^j, \dots, c_n^j)^t)$ en el óptimo. En resumen, dado que (2.97) y (2.98) imponen que el punto de partida sea X^1 y el de llegada X^2 , el problema (2.89)-(2.101) halla en el óptimo una secuencia de puntos $X^1, \dots, (c_1^i, \dots, c_n^i)^t, \dots, X^2$ en $\bigcup_{C_i \in \mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})} C_i$ cumpliendo: que un punto y su sucesor pertenecen a paralelepípedos adyacentes de $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$; y que la suma de distancias en métrica ℓ_1 entre puntos consecutivos de la secuencia es mínima. Vamos a ver que esa suma de distancias que se obtiene en el valor óptimo de (2.89)-(2.101) es la longitud de un X^1 - X^2 camino rectangular mínimo permitido y cómo se obtiene este camino a partir de la solución óptima del problema.

Como $\bigcup_{C_i \in \mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})} C_i = \mathcal{R}_{\mathcal{B}} \setminus \text{int}(\mathcal{B})$, los puntos $(c_1^i, \dots, c_n^i)^t$ seleccionados en el óptimo pertenecen a la región factible \mathcal{F} . Por el Lema 2.14, existe un camino rectangular Q_{ij} completamente contenido en $C_i \cup C_j \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{B}} \setminus \text{int}(\mathcal{B})$ de longitud la distancia en métrica ℓ_1 uniendo al punto $(c_1^i, \dots, c_n^i)^t$ y su sucesor $(c_1^j, \dots, c_n^j)^t$ en la secuencia óptima, pues estos puntos pertenecen a sendos paralelepípedos C_i y C_j que intersecan en su frontera. De esto se deduce que efectivamente el valor óptimo de (2.89)-(2.101) es la longitud de un X^1 - X^2 camino rectangular mínimo permitido, pues la unión de los caminos rectangulares Q_{ij} es un X^1 - X^2 camino rectangular permitido (está contenido en $\bigcup_{C_i \in \mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})} C_i = \mathcal{R}_{\mathcal{B}} \setminus \text{int}(\mathcal{B})$) y mínimo, ya que se está minimizando su longitud en (2.89) y la región factible de (2.89)-(2.101) es $\bigcup_{C_i \in \mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})} C_i = \mathcal{R}_{\mathcal{B}} \setminus \text{int}(\mathcal{B})$, donde es suficiente buscar un camino rectangular mínimo permitido por el Lema (2.7). Dicho camino rectangular puede construirse uniendo los puntos $(c_1^i, \dots, c_n^i)^t$ consecutivos seleccionados en la secuencia óptima mediante el camino descrito en la demostración constructiva del Lema 2.14. \square

El método que da el Lema 2.15 para resolver el Problema 2.1 requiere la obtención del conjunto de celdas (paralelepípedos) $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ (si X^1 y X^2 están en la misma celda de $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$, entonces X^1 y X^2 son ℓ_1 -visibles y $d_{\mathcal{B}}(X^1, X^2) = \ell_1(X^1, X^2)$ trivialmente, es por ello que en el lema se supone $i_0 \neq i_f$). Esto puede hacerse a partir de \mathcal{N}_{ℓ_1} , aunque como razonamos en su momento, sólo habíamos podido acotar el coste de construcción de \mathcal{N}_{ℓ_1} por $\mathcal{O}(W^6 n^{11} 2^{2n-6})$ (exponencial) cuando $n \geq 3$, con $W = \sum_{i=1}^N m_i$ y siendo m_i el número de paralelepípedos que describen al complejo barrera B_i , $i = 1, \dots, N$.

Además, el número de variables binarias de (2.89)-(2.101) depende directamente del número de paralelepípedos de $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$, el cual, cabe esperar que sea elevado dado el número de segmentos ($\mathcal{O}(W^3 n^3 2^{n-3})$) y nodos ($\mathcal{O}(W^6 n^6 2^{2n-6})$) de \mathcal{N}_{ℓ_1} cuando $n \geq 3$. Más aún, los paralelepípedos C_i y C_j de $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ que intersecan lo hacen en una cara común, lo cual constituye un caso particular de las condiciones de aplicación del Lema 2.14, es decir, el Lema 2.14 no se está explotando todo lo que se podría explotar con la descomposición de $\mathcal{R}_B \setminus \text{int}(\mathcal{B})$ en los paralelepípedos $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$. El método que da el Lema 2.15 puede pulirse tratando de corregir esta serie de inconvenientes. Este refinamiento pasa necesariamente por una descomposición en paralelepípedos de $\mathcal{R}_B \setminus \text{int}(\mathcal{B})$ que, en algún sentido, aproveche mejor que $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ el Lema 2.14.

El número de variables binarias empleadas por el modelo de programación matemática lineal y entera mixta final basado en el Lema 2.14 que se presentará en el término de la sección, es igual al número de paralelepípedos en las condiciones del Lema 2.14 en el que se descomponga $\mathcal{R}_B \setminus \text{int}(\mathcal{B})$, por ello, trataremos de realizar una descomposición \mathcal{C}' de $\mathcal{R}_B \setminus \text{int}(\mathcal{B})$ en un número reducido de paralelepípedos. Es importante también que podamos asegurar una buena cota superior asintótica para la complejidad de realizar dicha descomposición, pues si la complejidad de llevar a cabo la descomposición en paralelepípedos \mathcal{C}' de $\mathcal{R}_B \setminus \text{int}(\mathcal{B})$ es muy elevada, de nada nos serviría el ahorro computacional conseguido al disminuir el número de variables binarias del modelo de programación matemática. Comenzaremos dando una descomposición de $\mathcal{R}_B \setminus \text{int}(\mathcal{B})$ de estas características en el plano y la extenderemos a dimensiones superiores de forma recursiva.

Algoritmo 2.2. (Construcción de \mathcal{C}' en \mathbb{R}^2)

Input: Los puntos $X = (x_1, x_2)^t$ e $Y = (y_1, y_2)^t$ en \mathcal{F} y el conjunto $\{B_1, \dots, B_N\}$ de complejos de paralelepípedos barrera en \mathbb{R}^2 , cada uno de ellos descrito por el conjunto de paralelepípedos $\{B_i^1, \dots, B_i^{m_i}\}$ que lo forman, $i = 1, \dots, N$, y estos a su vez descritos por su centro $(\kappa_1^{i,j}, \kappa_2^{i,j})^t$ y la mitad de su anchura $\xi_k^{i,j}$ en cada coordenada $O\mathcal{X}_k$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, m_i$, $k = 1, 2$.

Paso 1: Obtener \mathcal{R}_B mediante el Algoritmo 2.1. Descartar todos los complejos barrera que no estén contenidos en \mathcal{R}_B . Si ninguno de los complejos barrera está contenido en \mathcal{R}_B , hacer $\mathcal{L}_3 := \mathcal{R}_B$ e ir a Output.

Paso 2: Ordenar de menor a mayor, los valores (se entiende, de los paralelepípedos no descartados en el paso anterior) $\kappa_1^{i,j} + s\xi_1^{i,j}$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, m_i$, $s \in \{-1, 1\}$, así como el valor máximo y mínimo en la coordenada $O\mathcal{X}_1$ de \mathcal{R}_B , en una lista \mathcal{L}_1 , y los valores $\kappa_2^{i,j} + s\xi_2^{i,j}$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, m_i$, $s \in \{-1, 1\}$, así como el valor máximo y mínimo en la coordenada $O\mathcal{X}_2$ de \mathcal{R}_B , en una lista \mathcal{L}_2 , no incluyendo las posibles repeticiones de elementos en ninguna de las listas. Seleccionar la coordenada $O\mathcal{X}_1$ o la coordenada $O\mathcal{X}_2$. En adelante suponemos seleccionada la coordenada $O\mathcal{X}_1$, el algoritmo seleccionada la coordenada $O\mathcal{X}_2$ es análogo.

Paso 3: Crear una lista vacía \mathcal{L}_3 . Añadir a \mathcal{L}_3 las caras de dimensión 1 (hiperparalelepípedos de dimensión 1, segmentos paralelos a los ejes coordenados) de los paralelepípedos B_i^j contenidas en la frontera de \mathcal{R}_B , $k = 1, 2$. Para cada $i = 1, \dots, |\mathcal{L}_1| - 1$ hacer lo siguiente: si z^i es el i -ésimo elemento de \mathcal{L}_1 , z^{i+1} el $(i + 1)$ -ésimo, z_2^- y z_2^+ los valores extremos de \mathcal{R}_B en $O\mathcal{X}_2$, y $\mathcal{R}_{i,i+1}$ el paralelepípedo de vértices $(z^i, z_2^-)^t$, $(z^{i+1}, z_2^-)^t$, $(z^i, z_2^+)^t$ y $(z^{i+1}, z_2^+)^t$, entonces añadir a \mathcal{L}_3 las componentes conexas (hiperparalelepípedos de dimensión 2) de la clausura de $\mathcal{R}_{i,i+1} \setminus \mathcal{B}$.

Paso 4: Encontrar los segmentos maximales que pueden formarse mediante la unión de los segmentos de \mathcal{L}_3 obtenidos en la primera parte del paso anterior, añadir estos segmentos maximales a \mathcal{L}_3 y eliminar los segmentos que los constituyen. Para cada $i = 1, \dots, |\mathcal{L}_1| - 2$ hacer lo siguiente: para cada paralelepípedo C' obtenido de $\mathcal{R}_{i,i+1}$ (es decir, para cada componente conexa de la clausura de $\mathcal{R}_{i,i+1} \setminus \mathcal{B}$) y para cada paralelepípedo C'' obtenido de $\mathcal{R}_{i+1,i+2}$, comprobar si $C' \cup C''$ es también un paralelepípedo, en cuyo caso eliminar C' y C'' de \mathcal{L}_3 y añadir $C' \cup C''$ a \mathcal{L}_3 (en la iteración $i + 1$, $C' \cup C''$ se considera un paralelepípedo obtenido de $\mathcal{R}_{i+1,i+2}$).

Output: $\mathcal{C}' := \mathcal{L}_3$.

Lema 2.16. En \mathbb{R}^2 , el Algoritmo 2.2 descompone $\mathcal{R}_B \setminus \text{int}(\mathcal{B})$ en un número $\mathcal{O}(W)$ de paralelepípedos isotéticos, siendo $W = \sum_{i=1}^N m_i$ el número de paralelepípedos que describen los complejos barrera B_1, \dots, B_N .

Demostración. Los segmentos añadidos a \mathcal{L}_3 en el Paso 3 del Algoritmo 2.2 son hiperparalelepípedos isotéticos de dimensión 1, y sus posibles uniones en el Paso 4 también lo son. Veamos que efectivamente las componentes conexas de la clausura de $\mathcal{R}_{i,i+1} \setminus \mathcal{B}$ son hiperparalelepípedos isotéticos de dimensión 2. Para $i = 1, \dots, |\mathcal{L}_1| - 1$, puesto que en $\mathcal{R}_{i,i+1}$ no puede estar contenida ninguna cara de ningún paralelepípedo B_h^j de la forma $[(\kappa_1^{h,j} + s\xi_1^{h,j}, \kappa_2^{h,j} - \xi_2^{h,j})^t, (\kappa_1^{h,j} + s\xi_1^{h,j}, \kappa_2^{h,j} + \xi_2^{h,j})^t]$ con $s \in \{-1, 1\}$ a menos que $\kappa_1^{h,j} + s\xi_1^{h,j}$ sea el i -ésimo o el $(i + 1)$ -ésimo elemento de \mathcal{L}_3 , $\mathcal{R}_{i,i+1} \setminus \mathcal{B}$ consiste en varios hiperparalelepípedos isotéticos de dimensión 2 disjuntos unos con otros en los que faltan algunas de sus caras, entonces, la clausura de $\mathcal{R}_{i,i+1} \setminus \mathcal{B}$ añade a estos paralelepípedos isotéticos las caras faltantes. Las posibles uniones en el Paso 4 de los hiperparalelepípedos isotéticos de dimensión 2 obtenidos en el Paso 3 del Algoritmo 2.2, son claramente hiperparalelepípedos isotéticos de dimensión 2 también. Sea $Z \in \mathcal{R}_B \setminus \text{int}(\mathcal{B})$. No es difícil ver, que si Z pertenece a la frontera de \mathcal{R}_B y al mismo tiempo a la frontera de uno de los complejos barrera, entonces Z está contenido en alguno de los hiperparalelepípedos de dimensión 1 de \mathcal{C}' , en cualquier otro caso, Z pertenece a alguno de los hiperparalelepípedos de dimensión 2 de \mathcal{C}' . Luego \mathcal{C}' es una descomposición en paralelepípedos de $\mathcal{R}_B \setminus \text{int}(\mathcal{B})$, es decir, $\bigcup_{C' \in \mathcal{C}'} C' = \mathcal{R}_B \setminus \text{int}(\mathcal{B})$.

Probemos ahora que el número de paralelepípedos de \mathcal{C}' es $\mathcal{O}(W)$. Evidentemente,

el número de hiperparalelepípedos de dimensión 1 de C' es a lo sumo $\mathcal{O}(W)$. En cuanto al número de hiperparalelepípedos de dimensión 2 de C' , vamos a probar que es a lo sumo 3Σ , siendo Σ el número de puntos extremos $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ de los complejos barrera B_1, \dots, B_N . Para ello basta probar que todo hiperparalelepípedo de dimensión 2 de C' contiene un punto de $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ en su frontera, como cada punto Z de $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ puede pertenecer a lo sumo a tres hiperparalelepípedos isotéticos de dimensión 2 de C' (cuando Z es un vértice común de los tres paralelepípedos de C'), el número de hiperparalelepípedos de dimensión 2 de C' será a lo sumo 3Σ .

Supongamos que el paralelepípedo C' obtenido en el Paso 3 o en el Paso 4 del Algoritmo 2.2 no posee ningún punto de $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ en sus caras de dimensión 1 donde la coordenada $O\mathcal{X}_1$ es constante. Como C' no posee ningún punto de $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ en sus caras de dimensión 1 en las que la coordenada $O\mathcal{X}_1$ es constante, necesariamente al menos una de sus caras de dimensión 1 en las que la coordenada $O\mathcal{X}_2$ es constante está contenida en una de las caras de dimensión 1 en la que la coordenada $O\mathcal{X}_2$ es constante de un paralelepípedo B_i^j , de lo contrario, C' se extendería en $O\mathcal{X}_2$ desde el mínimo valor en $O\mathcal{X}_2$ de \mathcal{R}_B (denotado z_2^- en el Paso 3) hasta el máximo valor en $O\mathcal{X}_2$ de \mathcal{R}_B (denotado z_2^+ en el Paso 3), y como no habría puntos $z^i, z^{i+1} \in \mathcal{L}_1$, con $1 < i, i+1 < |\mathcal{L}_1|$, tales que z^i sea el mínimo valor que alcanza en $O\mathcal{X}_1$ el paralelepípedo C' y z^{i+1} el máximo valor que alcanza C' en esa misma coordenada, pues en este caso C' contendría al menos un punto de $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ en sus caras de dimensión 1 en las que la coordenada $O\mathcal{X}_1$ es constante, necesariamente $C' = \mathcal{R}_B$. Pero $C' = \mathcal{R}_B$ significa que ninguno de los complejos barrera está contenido en \mathcal{R}_B , lo cual es una contradicción pues en el Paso 1 del algoritmo se hubiese saltado directamente a Output sin pasar por el Paso 3 ni el Paso 4.

Por lo tanto, si C' no posee ningún punto de $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ en sus caras de dimensión 1 en las que la coordenada $O\mathcal{X}_1$ es constante, necesariamente al menos una de sus caras de dimensión 1 en las que la coordenada $O\mathcal{X}_2$ es constante está contenida en una de las caras de dimensión 1 en la que la coordenada $O\mathcal{X}_2$ es constante de un paralelepípedo B_i^j . La otra cara de C' en la que la coordenada $O\mathcal{X}_2$ es constante estará contenida en una de las caras de dimensión 1 en la que la coordenada $O\mathcal{X}_2$ es constante de otro paralelepípedo B_h^l o en la frontera de \mathcal{R}_B . Supongamos que nos encontramos en el último caso (ver Figura 2.18 (a)), para el otro caso se razona de forma análoga. Veamos que en el Paso 4 del algoritmo se descarta C' en \mathcal{L}_3 para sustituirlo por un paralelepípedo que lo contiene. Sea g_k el máximo valor que alcanza en $O\mathcal{X}_1$ el paralelepípedo C' . Entonces existe en \mathcal{L}_3 un paralelepípedo C'' de la misma altura que C' , compartiendo una cara de dimensión 1 con él, que en $O\mathcal{X}_1$ se extiende desde g_k hasta $z' = \min\{z^q \in \mathcal{L}_1 : z^q > g_k\}$ (ver Figura 2.18 (b)). Además, $z' \leq \kappa_1^{i,j} + \xi_1^{i,j}, \kappa_1^{h,l} + \xi_1^{h,l}$. En el Paso 4 del algoritmo se realiza entonces la unión $C' \cup C''$, que se añade a \mathcal{L}_3 , y se eliminan C' y C'' de \mathcal{L}_3 , o dicho de otro modo, se extiende C' por la derecha hasta z' . Más aún, C' se extenderá por la derecha en el Paso 4 hasta $\min\{\kappa_1^{i,j} + \xi_1^{i,j}, \kappa_1^{h,l} + \xi_1^{h,l}\}$. El paralelepípedo C''' resultante, comparte vértice con B_i^j o B_h^l (ver Figura 2.18 (c)). Si dicho vértice no es un punto extremo del complejo correspondiente es porque las

caras de dimensión 1 en las que la coordenada $O\mathcal{X}_2$ es constante de C''' están contenidas en el interior de sendas caras de dimensión 1 en las que la coordenada $O\mathcal{X}_2$ es constante de los complejos barrera B_i y B_h (ver Figura 2.18 (d)). Entonces, razonando como con C' , C''' sería descartado en el Paso 4 de \mathcal{L}_3 y sustituido por un paralelepípedo que lo contiene (ampliando C''' por la derecha), el cual comparte un vértice con un paralelepípedo B_s^r , con $s \in \{i, h\}$. El razonamiento se sigue hasta que dicho vértice es un punto extremo del complejo correspondiente (ver Figura 2.18 (e), donde $B_s^r = B_h^l$) o hasta que el paralelepípedo formado C^* se encuentra por la derecha con una cara de dimensión 1 en la que la coordenada $O\mathcal{X}_1$ es constante de uno de los complejos barrera, conteniendo por tanto C^* en una de sus caras de dimensión 1 en la que la coordenada $O\mathcal{X}_1$ es constante los dos puntos extremos contenidos en la cara mencionada del complejo barrera correspondiente (ver Figura 2.18 (f) y (g)). Concluimos así que los hiperparalelepípedos de dimensión 2 que quedan en C' tras el Paso 4 contienen todos algún punto de $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ en su frontera.

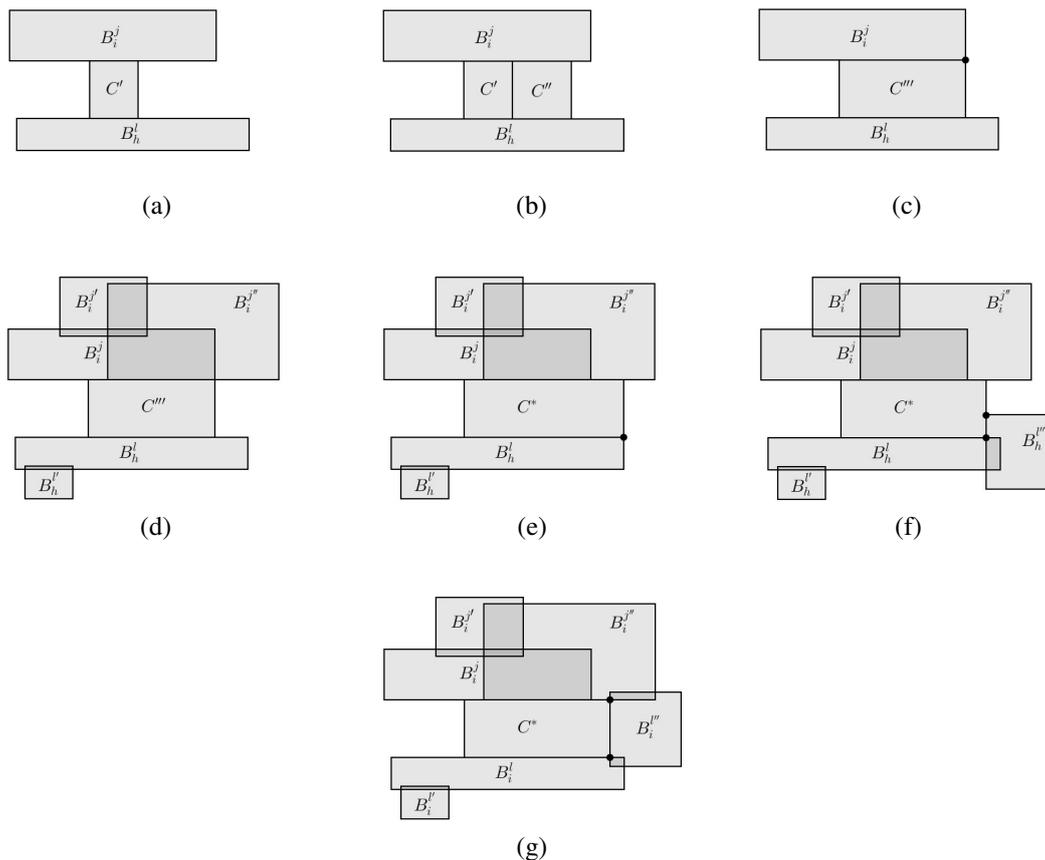


Figura 2.18: Ilustración mediante un ejemplo de la prueba del Lema 2.16.

Por último, probaremos que $\Sigma \in \mathcal{O}(W)$, con lo que se tendría que el número de paralelepípedos de dimensión 2 de \mathcal{C}' será a lo sumo $3\mathcal{O}(W)$, o lo que es lo mismo, $\mathcal{O}(W)$. Probaremos por inducción que para un complejo barrera B_i su número de puntos extremos Σ_i es una cantidad lineal del número de paralelepípedos m_i que lo forman, de donde se deriva $\Sigma \in \mathcal{O}(W)$. Cuando B_i está constituido por un único paralelepípedo, $\Sigma_i = 4$, que es cuatro veces el número de paralelepípedos que forman B_i . Cuando $m_i = 2$, el máximo número de puntos extremos que puede tener B_i es doce: los ocho vértices de los dos paralelepípedos que forman B_i más cuatro puntos extremos que surgen de la intersección perpendicular de las caras de dimensión 1 de estos dos paralelepípedos (ver Figura 2.19). Supongamos cierto el resultado para $m_i = k - 1$ y veamos que entonces es cierto para $m_i = k$. Por la forma en la que estamos suponiendo que están descritos los complejos barrera, podemos separar B_i en $k - 1$ paralelepípedos por un lado y, por otro lado, en un paralelepípedo B_i^j , de forma que los $k - 1$ paralelepípedos primeros constituyan un complejo de paralelepípedos B_i' . Por hipótesis de inducción, el número de puntos extremos de B_i' es $\mathcal{O}(k - 1)$. Como mucho, el paralelepípedo B_i^j aporta un número de puntos extremos al ser unido a B_i' de cuatro (sus vértices), más los posibles $4(k - 1)$ puntos extremos resultantes de la intersección perpendicular de las caras de dimensión 1 de B_i^j con las caras de dimensión 1 de cada uno de los paralelepípedos de B_i' . Por tanto, el número de puntos extremos de B_i es $\mathcal{O}(k - 1) + 4 + 4(k - 1)$, es decir, $\mathcal{O}(k)$, con lo que queda probado el resultado.

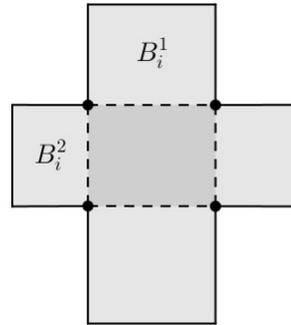
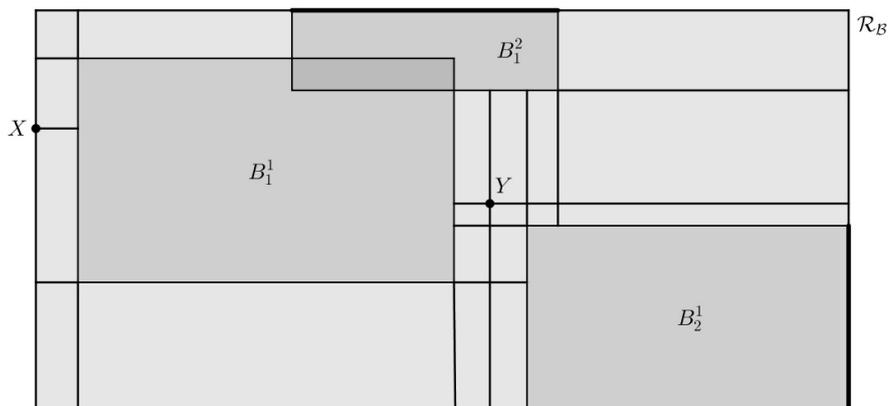


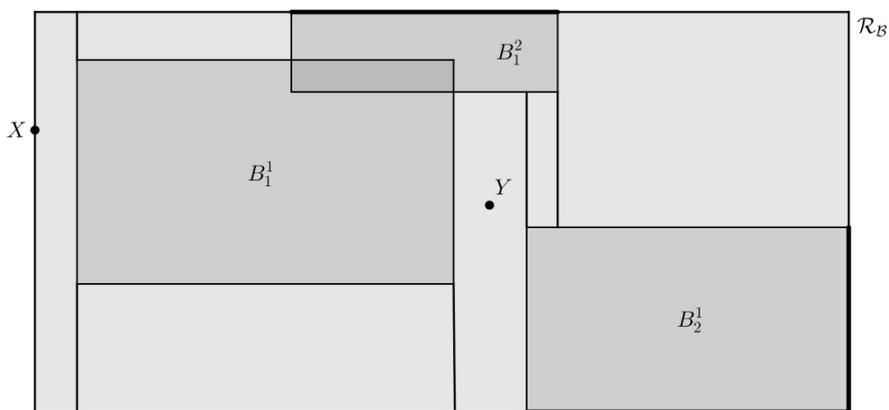
Figura 2.19: Complejo de paralelepípedos en \mathbb{R}^2 formado por dos paralelepípedos con 12 puntos extremos.

□

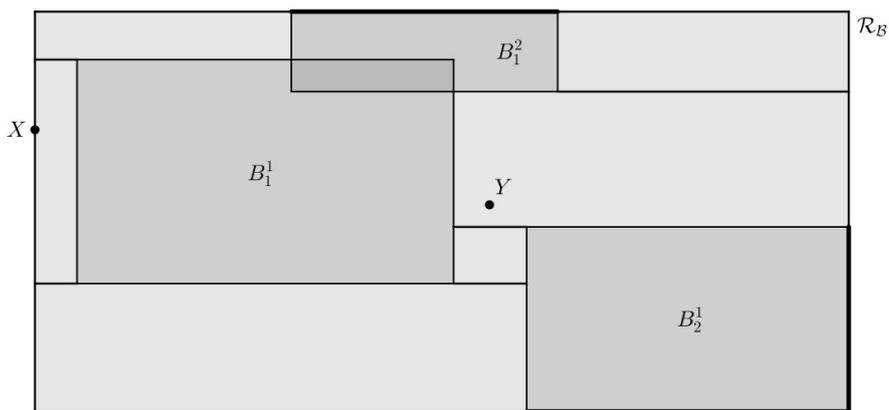
Como puede observarse, la descomposición en paralelepípedos \mathcal{C}' de $\mathcal{R}_{\mathcal{B}} \setminus \text{int}(\mathcal{B})$ hecha por el Algoritmo 2.2 depende de la coordenada seleccionada en el Paso 2 del mismo. Dependiendo de la configuración espacial de los complejos barreras en el plano, la selección de una u otra coordenada dará lugar a una descomposición con un mayor o menor número de paralelepípedos. En la Figura 2.20 se muestran las descomposiciones en paralelepípedos de $\mathcal{R}_{\mathcal{B}} \setminus \text{int}(\mathcal{B})$ que producen para un caso plano concreto, la red de construcción rectangular \mathcal{N}_{ℓ_1} , el Algoritmo 2.2 seleccionando en el Paso 2 la coordenada $\mathcal{O}\mathcal{X}_1$ y el Algoritmo 2.2 seleccionando en el Paso 2 la coordenada $\mathcal{O}\mathcal{X}_2$.



(a)



(b)



(c)

Figura 2.20: Para el mismo ejemplo en el plano, (a), (b) y (c) son, respectivamente, $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$, \mathcal{C}' seleccionando la coordenda $O\mathcal{X}_1$ en el Paso 2 del Algoritmo 2.2 y \mathcal{C}' seleccionando la coordenda $O\mathcal{X}_2$ en el Paso 2 del Algoritmo 2.2. Los hiperparalelepípedos de dimensión 1 se han señalado como líneas de mayor grosor.

Comparemos la complejidad asintótica de realizar la descomposición en paralelepípedos de $\mathcal{R}_B \setminus \text{int}(\mathcal{B})$ que proporcionan \mathcal{N}_{ℓ_1} con la del Algoritmo 2.2. Para descomponer en paralelepípedos $\mathcal{R}_B \setminus \text{int}(\mathcal{B})$ mediante \mathcal{N}_{ℓ_1} , es necesario primero construir \mathcal{N}_{ℓ_1} , que como ya vimos puede hacerse en $\mathcal{O}(\Sigma^2)$. A esto habría que añadir el tiempo necesario para obtener el conjunto de paralelepípedos $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ a partir de \mathcal{N}_{ℓ_1} mediante un algoritmo. En cuanto al Algoritmo 2.2: en el Paso 1, la construcción de \mathcal{R}_B mediante el Algoritmo 2.1 tiene un coste $\mathcal{O}(W^2)$ como ya vimos cuando se presentó dicho algoritmo, la comprobación de si $B_i \subseteq \mathcal{R}_B$ o no, puede realizarse en $\mathcal{O}(m_i)$, pues basta comprobar si todo paralelepípedo de B_i está contenido o no en \mathcal{R}_B , lo cual se hace en un número constante de operaciones para cada paralelepípedo, así, la comprobación para todo B_i se lleva a cabo en $\mathcal{O}(W)$; el Paso 2 se puede realizar en $\mathcal{O}(W \log W)$ mediante cualquier algoritmo de ordenación eficiente; la obtención de los segmentos de \mathcal{L}_3 (caras de dimensión 1 de paralelepípedos B_i^j contenidos en la frontera de \mathcal{R}_B) en el Paso 3 se realiza en $\mathcal{O}(W)$, mientras que la descomposición en paralelepípedos de cada hiperparalelepípedo $\mathcal{R}_{i,i+1}$ de dimensión 2 (a lo sumo hay $2W$) se puede realizar mediante el estudio en tiempo constante de la posible intersección de este paralelepípedo con cada paralelepípedo B_i^j de los que forman los complejos barreras, luego en total, la descomposición de todos los $\mathcal{R}_{i,i+1}$ puede hacerse en $\mathcal{O}(W^2)$; el Paso 4, realizando una comprobación ordenada de las posibles uniones de los segmentos e hiperparalelepípedos de dimensión 2 de \mathcal{L}_3 obtenidos en el Paso 3, puede efectuarse a lo sumo en $\mathcal{O}(W^2)$. En resumen, \mathcal{C}' se construye en $\mathcal{O}(W^2)$ y posee un número de paralelepípedos $\mathcal{O}(W)$. Por su parte, el número de paralelepípedos de $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ puede acotarse utilizando la fórmula de Euler para grafos planos: el número de vértices de \mathcal{N}_{ℓ_1} ($\mathcal{O}(\Sigma^2)$) menos su número de aristas ($\mathcal{O}(W)$) más el número de celdas $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ es igual a dos, por lo tanto, el número de paralelepípedos de $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ es $\mathcal{O}(\Sigma^2)$. La descomposición \mathcal{C}' de $\mathcal{R}_B \setminus \text{int}(\mathcal{B})$ es así preferible a la descomposición $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$, tanto en el tiempo de construcción ($\mathcal{O}(W^2)$ frente a, al menos, $\mathcal{O}(\Sigma^2)$) como en número de paralelepípedos ($\mathcal{O}(W)$ frente a $\mathcal{O}(\Sigma^2)$). Más aún, los paralelepípedos de \mathcal{C}' están contenidos en las celdas de $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$, independientemente de la coordenada seleccionada en el Paso 2 del Algoritmo 2.2 (ver Figura 2.20).

La construcción de \mathcal{C}' puede extenderse a \mathbb{R}^n de forma recursiva.

Algoritmo 2.3. (Costrucción de \mathcal{C}' en \mathbb{R}^n con $n \geq 3$)

Input: Los puntos $X = (x_1, \dots, x_n)^t$ e $Y = (y_1, \dots, y_n)^t$ en \mathcal{F} y el conjunto $\{B_1, \dots, B_N\}$ de complejos de paralelepípedos barrera en \mathbb{R}^n , cada uno de ellos descrito por el conjunto de paralelepípedos $\{B_i^1, \dots, B_i^{m_i}\}$ que lo forman, $i = 1, \dots, N$, y estos a su vez descritos por su centro $(\kappa_1^{i,j}, \dots, \kappa_n^{i,j})^t$ y la mitad de su anchura $\xi_k^{i,j}$ en cada coordenada $O\mathcal{X}_k$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, m_i$, $k = 1, \dots, n$.

Paso 1: Obtener \mathcal{R}_B mediante el Algoritmo 2.1. Descartar todos los complejos barrera que no estén contenidos en \mathcal{R}_B . Si ninguno de los complejos barreras está contenido en \mathcal{R}_B , hacer $\mathcal{L}_3 := \mathcal{R}_B$ e ir a Output.

Paso 2: Seleccionar una coordenada $O\mathcal{X}_j$ con $j \in \{1, \dots, n\}$. En adelante suponemos seleccionada la coordenada $O\mathcal{X}_1$, el algoritmo seleccionada cualquier otra coordenada es análogo. Ordenar de menor a mayor, los valores (se entiende, de los paralelepípedos no descartados en el paso anterior) $\kappa_1^{i,j} + s\xi_1^{i,j}$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, m_i$, $s \in \{-1, 1\}$, así como el valor máximo y mínimo en la coordenada $O\mathcal{X}_1$ de \mathcal{R}_B , en una lista \mathcal{L}_1 , no incluyendo las posibles repeticiones de elementos en la lista. Para cada $i = 1, \dots, |\mathcal{L}_1| - 1$, si z^i es el i -ésimo elemento de \mathcal{L}_1 y z^{i+1} el $(i+1)$ -ésimo, tomamos $\mathcal{R}_{i,i+1} = \{(q_1, \dots, q_n)^t \in \mathcal{R}_B : z^i \leq q_1 \leq z^{i+1}\}$, es decir, el paralelepípedo maximal contenido en \mathcal{R}_B que se extiende en $O\mathcal{X}_1$ desde z^i hasta z^{i+1} . Si $\mathcal{R}_{i,i+1} \cap \text{int}(\mathcal{B}) = \emptyset$, añadir $\mathcal{R}_{i,i+1}$ a \mathcal{L}_3 . En caso contrario: hacer $\bar{\mathcal{R}}_B = \text{Proy}_{\hat{1}}(\mathcal{R}_{i,i+1})$ y, para los B_h^l tales que $\mathcal{R}_{i,i+1} \cap \text{int}(B_h^l) \neq \emptyset$, hacer $\bar{B}_h^l = \text{Proy}_{\hat{1}}(B_h^l)$; ir al Paso 2 del Algoritmo 2.3 o del Algoritmo 2.2, según el caso, tomando como espacio ambiente $O\mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n$, como \mathcal{R}_B a $\bar{\mathcal{R}}_B$ y como complejos barrera los determinados por los \bar{B}_h^l ; para cada paralelepípedo C'' obtenido de la aplicación del Algoritmo 2.3 o del Algoritmo 2.2, según el caso, en \mathbb{R}^{n-1} , añadir a \mathcal{L}_3 el paralelepípedo $C' = \{(q_1, \dots, q_n)^t : z^i \leq q_1 \leq z^{i+1}, \text{Proy}_{\hat{1}}((q_1, \dots, q_n)^t) \in C''\}$.

Output: $C' := \mathcal{L}_3$.

Lema 2.17. En \mathbb{R}^n con $n \geq 3$, el Algoritmo 2.3 descompone $\mathcal{R}_B \setminus \text{int}(\mathcal{B})$ en un número $\mathcal{O}(W^{n-1})$ de paralelepípedos isotéticos, siendo $W = \sum_{i=1}^N m_i$ el número de paralelepípedos que describen los complejos barreras B_1, \dots, B_N .

Demostración. Evidentemente, $\mathcal{R}_B \setminus \text{int}(\mathcal{B}) = \bigcup_{i=1, \dots, |\mathcal{L}_1|-1} \mathcal{R}_{i,i+1} \setminus \mathcal{B}$, para los $\mathcal{R}_{i,i+1}$ del Paso 2 del Algoritmo 2.3. Si $\mathcal{R}_{i,i+1} \cap \text{int}(\mathcal{B}) = \emptyset$, entonces, $\mathcal{R}_{i,i+1}$ es un paralelepípedo isotético que contiene a todo punto de \mathcal{R}_B con coordenada en $O\mathcal{X}_1$ entre z^i y z^{i+1} . Si $\mathcal{R}_{i,i+1} \cap \text{int}(\mathcal{B}) \neq \emptyset$, todo paralelepípedo B_h^l tal que $\mathcal{R}_{i,i+1} \cap \text{int}(B_h^l) \neq \emptyset$, verifica que $\kappa_1^{h,l} - \xi_1^{h,l} \leq z^i$ y que $\kappa_1^{h,l} + \xi_1^{h,l} \geq z^{i+1}$, pues dichos valores están ordenados en \mathcal{L}_1 . Por ese motivo, si C'' es un paralelepípedo isotético contenido, por ejemplo, en la cara ζ de dimensión $n-1$ de $\mathcal{R}_{i,i+1}$ en la que la coordenada $O\mathcal{X}_1$ es constante e igual a z^i , y tal que no interseca el interior de ninguna barrera, $C' = \{(q_1, \dots, q_n)^t : z^i \leq q_1 \leq z^{i+1}, \text{Proy}_{\hat{1}}((q_1, \dots, q_n)^t) \in C''\}$ es un paralelepípedo isotético contenido en $\mathcal{R}_{i,i+1}$ que tampoco interseca el interior de ninguna barrera, en otras palabras, basta hacer una descomposición de $\zeta \setminus \text{int}(\mathcal{B})$ en paralelepípedos isotéticos para tener una descomposición en paralelepípedos isotéticos de $\mathcal{R}_{i,i+1}$. Esto es lo que se pretende en el Paso 2 del algoritmo al hacer $\bar{\mathcal{R}}_B = \text{Proy}_{\hat{1}}(\mathcal{R}_{i,i+1})$ y, para los B_h^l tales que $\mathcal{R}_{i,i+1} \cap \text{int}(B_h^l) \neq \emptyset$, hacer $\bar{B}_h^l = \text{Proy}_{\hat{1}}(B_h^l)$, ir al Paso 2 del Algoritmo 2.3 o del Algoritmo 2.2, según el caso, tomando como espacio ambiente $O\mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n$, como \mathcal{R}_B a $\bar{\mathcal{R}}_B$ y como complejos barrera los determinados por los \bar{B}_h^l , y finalmente, para cada paralelepípedo C'' obtenido de la aplicación del Algoritmo 2.3 o del Algoritmo 2.2, según el caso, en \mathbb{R}^{n-1} , añadir a \mathcal{L}_3 el paralelepípedo $C' = \{(q_1, \dots, q_n)^t : z^i \leq q_1 \leq z^{i+1}, \text{Proy}_{\hat{1}}((q_1, \dots, q_n)^t) \in C''\}$. Puesto que la

descomposición en paralelepípedos isotéticos en \mathbb{R}^2 es posible por el Lema 2.16, por inducción se demuestra que de esta forma se consigue descomponer $\mathcal{R}_{i,i+1} \setminus \text{int}(\mathcal{B})$ en paralelepípedos isotéticos. Se colige así que \mathcal{C}' es una descomposición en paralelepípedos isotéticos de $\mathcal{R}_{\mathcal{B}} \setminus \text{int}(\mathcal{B})$ (i.e., $\bigcup_{C' \in \mathcal{C}'} C' = \mathcal{R}_{\mathcal{B}} \setminus \text{int}(\mathcal{B})$).

Dado que en el plano, el caso base, $|\mathcal{C}'|$ es del orden de $\mathcal{O}(W)$, fácilmente se demuestra por inducción que en \mathbb{R}^n , $|\mathcal{C}'|$ es del orden de $\mathcal{O}(W^{n-1})$. \square

Como ocurría en el caso plano, la descomposición en paralelepípedos isotéticos de $\mathcal{R}_{\mathcal{B}} \setminus \text{int}(\mathcal{B})$ hecha por el Algoritmo 2.3, y en consecuencia el número de estos, depende de la coordenada seleccionada en el Paso 2 del mismo. Más aún, para cada paralelepípedo $\mathcal{R}_{i,i+1}$ del Paso 2 del algoritmo tal que interseca con el interior de alguna barrera, existen $(n-1)!$ formas de realizar su descomposición en paralelepípedos isotéticos dependiendo de la coordenada seleccionada en el Paso 2 de cada una de las llamadas recursivas al algoritmo. La complejidad del Algoritmo 2.3 es: la complejidad del Paso 1, la cual es $\mathcal{O}(W^{2n})$, pues es la suma de la complejidad de construir $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{O}(W^{2n})$, y la complejidad de descartar los complejos barreras no contenidos en $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{O}(Wn)$ (la inclusión o no en $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ de cada paralelepípedo de un complejo barrera se comprueba en $\mathcal{O}(n)$); más la complejidad del Paso 2, ésta es, la de la ordenación inicial, $\mathcal{O}(W \log W)$, más la comprobación de la contención o no en cada $\mathcal{R}_{i,i+1}$ (a lo sumo hay $\mathcal{O}(W)$) de puntos de $\text{int}(\mathcal{B})$, lo cual lleva un tiempo $\mathcal{O}(W^{2n})$, más, a lo sumo, la complejidad de realizar las descomposiciones en paralelepípedos isotéticos de todos los $\mathcal{R}_{i,i+1}$, es decir, $\mathcal{O}(W)$ veces la complejidad del algoritmo en \mathbb{R}^{n-1} . Razonando por inducción se llega a que una cota superior asintótica de la complejidad del Algoritmo 2.3 es $\mathcal{O}(W^n + W^{n-1}n)$. Por tanto, la construcción de \mathcal{C}' se realiza en $\mathcal{O}(W^n + W^{n-1}n)$ frente a la construcción de $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ que no sabemos como realizarla pero que seguro requiere la construcción de \mathcal{N}_{ℓ_1} , la cual se lleva a cabo en $\mathcal{O}(W^6 n^{11} 2^{2n-6})$. Por otro lado, \mathcal{C}' consta de $\mathcal{O}(W^{n-1})$ paralelepípedos, mientras que el número de paralelepípedo de $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$, en general, lo desconocemos. Para terminar la sección se presenta el último método que aquí se recoge para resolver el Problema 2.1, el cual es un refinamiento del modelo (2.89)-(2.101) dado en el Lema 2.15. Antes de pasar a él notemos que, mediante un procedimiento de fuerza bruta a falta de un algoritmo específico para este fin, las relaciones de adyacencia entre los paralelepípedos de \mathcal{C}' pueden obtenerse en $\mathcal{O}(W^{2n-2}n)$ (comprobando la adyacencia en un tiempo $\mathcal{O}(n)$ de cada uno de los $\mathcal{O}(W^{2n-2})$ pares de paralelepípedos) y que a lo sumo hay $\mathcal{O}(W^{2n-2})$ paralelepípedos adyacentes en dicho conjunto.

Teorema 2.5. *En \mathbb{R}^n , sean $X^1, X^2 \in \mathcal{F}$ y sea \mathcal{C}' una descomposición en paralelepípedos de $\mathcal{R}_{\mathcal{B}} \setminus \text{int}(\mathcal{B})$ obtenida con el Algoritmo 2.2 si $n = 2$ o con el Algoritmo 2.3 si $n \geq 3$. Sea $G' = (V', E')$ el grafo no dirigido que posee un nodo $v'_i \in V'$ por cada paralelepípedo C'_i de \mathcal{C}' , y tal que el arco $(i, j) \in E'$ si y sólo si los paralelepípedos C'_i y C'_j de \mathcal{C}' son adyacentes, esto es, intersecan, $i < j$. Denotemos por i_0 al índice tal que $X^1 \in C'_{i_0} \in \mathcal{C}'$ (si hay más de uno i_0 será cualquiera de ellos), por i_f al índice tal que $X^2 \in C'_{i_f} \in \mathcal{C}'$ (si hay más de uno i_f será cualquiera de ellos), $i_0 \neq i_f$, y*

notemos $\bar{N} = |\mathcal{C}'|$. Sea $\bar{\kappa}_k^i$ la coordenada k -ésima del centro de C'_i y $\bar{\xi}_k^i$ la mitad de su anchura en la coordenada $O\mathcal{X}_k$, $i = 1, \dots, \bar{N}$, $k = 1, \dots, n$. Entonces, el Problema 2.1 es equivalente al problema de programación lineal y entera mixta

$$\text{mín} \quad \sum_{(i,j) \in E'} D_{ij} \quad (2.102)$$

$$\text{s.a:} \quad \mu_{i_0} = 1, \quad (2.103)$$

$$\mu_{i_f} = 1, \quad (2.104)$$

$$\sum_{(h,i_0) \in E'} \eta_{hi_0} + \sum_{(i_0,j) \in E'} \eta_{i_0j} = 1, \quad (2.105)$$

$$\sum_{(h,i_f) \in E'} \eta_{hi_f} + \sum_{(i_f,j) \in E'} \eta_{i_fj} = 1, \quad (2.106)$$

$$\sum_{(h,i) \in E'} \eta_{hi} + \sum_{(i,j) \in E'} \eta_{ij} = 2\mu_i, \quad \forall i = 1, \dots, \bar{N}, i \neq i_0, i_f, \quad (2.107)$$

$$\eta_{ij} \leq 1, \quad \forall (i,j) \in E', \quad (2.108)$$

$$\mu_i + \mu_j \leq 1 + \eta_{ij}, \quad \forall (i,j) \in E', \quad (2.109)$$

$$\eta_{ij} \leq \mu_i, \quad \forall (i,j) \in E', \quad (2.110)$$

$$\eta_{ij} \leq \mu_j, \quad \forall (i,j) \in E', \quad (2.111)$$

$$d_{ijk} \geq c_k^i - c_k^j, \quad \forall (i,j) \in E', k = 1, \dots, n, \quad (2.112)$$

$$d_{ijk} \geq -c_k^i + c_k^j, \quad \forall (i,j) \in E', k = 1, \dots, n, \quad (2.113)$$

$$D_{ij} \geq \sum_{k=1}^n d_{ijk} - M(1 - \eta_{ij}), \quad \forall (i,j) \in E', \quad (2.114)$$

$$\bar{\kappa}_k^i - \bar{\xi}_k^i \leq c_k^i \leq \bar{\kappa}_k^i + \bar{\xi}_k^i, \quad \forall i = 1, \dots, \bar{N}, k = 1, \dots, n, \quad (2.115)$$

$$c_k^{i_0} = x_k^1, \quad \forall k = 1, \dots, n, \quad (2.116)$$

$$c_k^{i_f} = x_k^2, \quad \forall k = 1, \dots, n, \quad (2.117)$$

$$D_{ij}, \eta_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in E', \quad (2.118)$$

$$\mu_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i = 1, \dots, \bar{N}, \quad (2.119)$$

$$d_{ijk} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in E', k = 1, \dots, n, \quad (2.120)$$

$$c_k^i \in \mathbb{R}, \quad \forall i = 1, \dots, \bar{N}, k = 1, \dots, n, \quad (2.121)$$

siendo $M > 0$ una constante lo suficientemente grande.

Demostración. La formulación (2.102)-(2.121) es igual a la formulación (2.89)-(2.101) salvo por las restricciones (2.103)-(2.111) que sustituyen a (2.90)-(2.92), las variables η_{ij} que ahora son variables positivas y no binarias, y las nuevas variables μ_i definidas en (2.119). Los paralelepípedos de \mathcal{C}' están en las condiciones del Lema 2.14 al igual que lo estaban los de $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$. Obsérvese, que por las restricciones (2.108)-(2.111), a pesar de que η_{ij} esté definida como variable positiva en (2.118), en la práctica se va

a comportar como una variable binaria pues sólo se le va a permitir tomar el valor 0 o el valor 1. Por tanto, si demostramos que las restricciones (2.103)-(2.111) realizan la misma tarea que (2.90)-(2.92), estos es, encontrar un camino en G' desde ν'_{i_0} hasta ν'_{i_f} , los problemas de programación matemática (2.102)-(2.121) y (2.89)-(2.101) serán equivalentes, y por consiguiente, (2.102)-(2.121) será equivalente al Problema 2.1. La variable binaria μ_i tomará el valor 1 si el nodo ν'_i es seleccionado en el camino en G' de ν'_{i_0} a ν'_{i_f} óptimo. Con esta interpretación de las variables μ_i , las restricciones (2.108)-(2.111) indican que una arista η_{ij} es seleccionada si y sólo si se han seleccionado los puntos relativos a los paralelepípedos adyacentes C'_i y C'_j (es decir, si se han seleccionado los nodos ν'_i y ν'_j). Las restricciones (2.103) y (2.104) imponen que los nodos que representan los paralelepípedos en los que se encuentran X^1 y X^2 sean seleccionados. Las restricciones (2.105) y (2.106) fuerzan a que sólo se seleccione una arista incidente en ν'_{i_0} y ν'_{i_f} respectivamente. Y la restricción (2.107) impone, salvo para ν'_{i_0} y ν'_{i_f} , que si ν'_i es seleccionado, entonces en él inciden dos aristas, en caso contrario, ninguna. Puesto que en (2.102) se está minimizando $\sum_{(i,j) \in E'} D_{ij}$, las restricciones (2.103)-(2.111) tienen el mismo efecto que (2.90)-(2.92), y (2.102)-(2.121) es equivalente al Problema 2.1. \square

El número de variables binarias de la formulación (2.102)-(2.121) es igual al número de paralelepípedos de \mathcal{C}' ($\mathcal{O}(W^{n-1})$). En lugar de considerar las variables η_{ij} como binarias, la formulación (2.102)-(2.121) las considera como variables positivas, evitando así un número de variables binarias $\mathcal{O}(W^{2n-2})$, con lo que se espera un mejor rendimiento del modelo. Que las variables η_{ij} se comporten como binarias sin serlo se consigue con un número $\mathcal{O}(W^{2n-2})$ de restricciones. La constante M puede tomarse $n \max_{i=1, \dots, n} \{2\xi'_i\} + \varepsilon$, siendo ξ'_i la mitad de la anchura en la coordenada $O\mathcal{X}_i$ de la envolvente rectangular iterativa $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ de X , Y y $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^N B_i$, y ε cualquier constante estrictamente positiva. El X^1 - X^2 camino rectangular mínimo permitido obtenido por el modelo puede construirse uniendo los puntos $(c_i^1, \dots, c_n^i)^t$ seleccionados en el óptimo mediante el camino descrito en la demostración constructiva del Lema 2.14.

2.4. Camino bloque mínimo en presencia de romboides barrera

El Lema 1.5 del capítulo anterior ponía de manifiesto la relación existente en \mathbb{R}^2 entre la norma de Manhattan y cualquier norma bloque con cuatro vectores fundamentales. En esta última sección se aprovecha dicho resultado para dar un método de resolución de un problema plano que generaliza al Problema 2.1 en \mathbb{R}^2 . Consideremos fijada la norma bloque γ con vectores fundamentales (ordenados en el sentido de las agujas del reloj)

$$u^1 = (u_1^1, u_2^1)^t, \quad u^2 = (u_1^2, u_2^2)^t, \quad u^3 = (u_1^3, u_2^3)^t, \quad u^4 = (u_1^4, u_2^4)^t,$$

cumpliendo $u^3 = -u^1$ y $u^4 = -u^2$. Un γ -romboide centrado será un romboide con vértices de la forma

$$\epsilon^1 = \begin{pmatrix} \frac{u_1^2}{w_1} + \frac{u_1^1}{w_2} \\ \frac{u_2^2}{w_1} + \frac{u_2^1}{w_2} \end{pmatrix}, \quad \epsilon^2 = \begin{pmatrix} \frac{u_1^2}{w_1} - \frac{u_1^1}{w_2} \\ \frac{u_2^2}{w_1} - \frac{u_2^1}{w_2} \end{pmatrix}, \quad \epsilon^3 = \begin{pmatrix} -\frac{u_1^2}{w_1} - \frac{u_1^1}{w_2} \\ -\frac{u_2^2}{w_1} - \frac{u_2^1}{w_2} \end{pmatrix}, \quad \epsilon^4 = \begin{pmatrix} -\frac{u_1^2}{w_1} + \frac{u_1^1}{w_2} \\ -\frac{u_2^2}{w_1} + \frac{u_2^1}{w_2} \end{pmatrix},$$

donde $w^1, w^2 > 0$, mientras que un γ -romboide será un romboide con vértices de la forma $w + \epsilon^i$, $i = 1, \dots, 4$, siendo $w \in \mathbb{R}^2$ un vector cualquiera. Llamaremos *complejo de γ -romboides* a la unión de un número finito de γ -romboides siempre y cuando el conjunto resultante de la unión sea conexo, sin puntos de corte, sin huecos (en el sentido que venimos utilizando este término) y tal que para cualquier punto en la frontera de un γ -romboide constituyente del complejo que, al mismo tiempo, pertenezca al interior del complejo, entonces, exista otro γ -romboide del complejo distinto tal que dicho punto pertenece a su interior. Obsérvese que los complejos de γ -romboides son conjuntos poliédricos en \mathbb{R}^2 . El siguiente problema es una generalización del Problema 2.1 en \mathbb{R}^2 .

Problema 2.2. Dado el conjunto $\{B_1, \dots, B_N\}$ de complejos de γ -romboides en \mathbb{R}^2 disjuntos dos a dos y dados dos puntos X e Y en la región factible \mathcal{F} , siendo $\mathcal{F} = \mathbb{R}^2 \setminus \text{int}(\mathcal{B})$ y $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^N B_i$, calcular $d_{\mathcal{B}}(X, Y)$.

Pero el Problema 2.2 puede reducirse al Problema 2.1 en \mathbb{R}^2 (para el que conocemos diferentes métodos de resolución) como muestra el lema que aparece a continuación.

Lema 2.18. Para la norma bloque con cuatro vectores fundamentales γ fijada, sea T la transformación lineal definida en (1.21). Entonces, para todo $X, Y \in \mathcal{F}$,

$$\gamma_{\mathcal{B}}(X, Y) = \ell_{1, T(\mathcal{B})}(T(X), T(Y)).$$

Demostración. Sean $X, Y \in \mathcal{F}$ dos puntos factibles y sea SP un X - Y camino permitido γ -mínimo con la propiedad de contacto con barreras del Lema 2.3. Entonces, SP es un camino lineal a trozos con un número finito de puntos críticos $I_1, \dots, I_k \in \mathcal{F}$. Como T es lineal y biyectiva, la imagen $T(SP)$ de SP es factible en $T(\mathcal{F})$, i.e., $T(SP) \subseteq T(\mathcal{F})$. Además, los segmentos en SP son transformados en segmentos en $T(SP)$, por lo que $T(SP)$ es también un camino lineal a trozos con puntos críticos $T(I_i)$, $i = 1, \dots, k$. Fijando $I_0 := X$, $I_{k+1} := Y$ y usando el Lema 1.5, obtenemos

$$\gamma_{\mathcal{B}}(X, Y) = \sum_{i=0}^k \gamma(I_i, I_{i+1}) = \sum_{i=0}^k \ell_1(T(I_i), T(I_{i+1})) \geq \ell_{1, T(\mathcal{B})}(T(X), T(Y)).$$

Análogamente, sea SP' un $T(X)$ - $T(Y)$ camino permitido ℓ_1 -mínimo con la propiedad de contacto con barreras en $T(\mathcal{F})$. Sean $I'_1, \dots, I'_{k'} \in T(\mathcal{F})$ el conjunto finito de puntos extremos en SP' y sean $I'_0 := T(X)$ y $I'_{k'+1} := T(Y)$. Entonces

$$\ell_{1, T(\mathcal{B})}(T(X), T(Y)) = \sum_{i=0}^{k'} \ell_1(I'_i, I'_{i+1}) = \sum_{i=0}^{k'} \gamma(T^{-1}(I'_i), T^{-1}(I'_{i+1})) \geq \gamma_{\mathcal{B}}(X, Y),$$

con lo que se completa la prueba. \square

Análogamente, puede probarse que bajo los supuestos del Lema 1.5,

$$\ell_{1,\mathcal{B}}(X, Y) = \gamma_{T^{-1}(\mathcal{B})}(T^{-1}(X), T^{-1}(Y)).$$

Para ver que el Problema 2.2 puede reducirse al Problema 2.1 en \mathbb{R}^2 basta recordar que la longitud de un X - Y camino rectangular mínimo permitido es $d_{\mathcal{B}}(X, Y)$ (Lema 2.5), notar que si B_i^j es un γ -romboide entonces $T(B_i^j)$ es un paralelepípedo isotético en \mathbb{R}^2 y observar que, por la linealidad de T , si $\{B_1, \dots, B_N\}$ es un conjunto de complejos de γ -romboides disjuntos dos a dos, entonces $\{T(B_1), \dots, T(B_N)\}$ es un conjunto de complejos de paralelepípedos isotéticos en \mathbb{R}^2 disjuntos dos a dos.

3

Problema de la mediana rectangular en presencia de paralelepípedos barrera

La presencia de barreras en los problemas de localización continua modifica las características geométricas y analíticas de estos. La no convexidad de las funciones de distancia con barrera da lugar a problemas de optimización no convexos. La mayoría de métodos clásicos empleados para los problemas de localización continua se basan fundamentalmente en la convexidad de la función objetivo y por ello fallan en este contexto. Por otro lado, los métodos generales de optimización global capaces de tratar con problemas no convexos ignoran la geometría característica de los problemas específicos que estamos considerando. La forma de lidiar con estos problemas es, por tanto, desarrollando nuevos estudios teóricos y enfoques algorítmicos que permitan superar las dificultades mencionadas y poder resolverlos eficientemente. Este capítulo se dedica al tratamiento del problema, clásico en teoría de la localización, de la mediana, cuando las distancias son medidas con respecto a la métrica de Manhattan y existen complejos de hiperparalelepípedos isotéticos en la región factible que actúan como barreras. Se proponen nuevos métodos para su resolución basados en los resultados obtenidos en el capítulo anterior para el problema del camino mínimo rectangular en presencia de paralelepípedos barrera.

3.1. Problema de localización con barreras

Muchas decisiones en materia de gestión, economía, planificación de la producción, etc., presentan facetas relacionadas con la “localización de servicios”. La determinación de la ubicación de un nuevo almacén con respecto a las de un grupo determinado de clientes, teniendo en cuenta los costes de transporte y los tiempos de entrega, es sólo un ejemplo dentro de una vasta gama de aplicaciones de la localización. Por otro lado,

la teoría de la localización es en sí misma una parte de interés dentro las matemáticas, con un conjunto cada vez mayor de problemas y desafíos que no necesariamente tienen un transfondo real.

Los problemas de localización continua se plantean a partir de un conjunto finito de *puntos de demanda*, los cuales son puntos en el espacio n -dimensional \mathbb{R}^n , y que representan, por ejemplo, la ubicación espacial de clientes. Claramente $n = 2$ o $n = 3$ en los problemas del ámbito real, sobre todo estos problemas se dan en \mathbb{R}^2 , ya que en las aplicaciones prácticas a menudo se trata con decisiones de localización en el plano.

Vamos a denotar al conjunto de puntos de demanda por $\mathcal{E}x := \{Ex_1, \dots, Ex_{\mathcal{M}}\}$ con el conjunto de índices $\mathcal{M} := \{1, \dots, \mathcal{M}\}$, donde $Ex_m \in \mathbb{R}^n$ para todo $m \in \mathcal{M}$.

En un problema de localización continua debe darse además una medida de distancia $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, que modela, por ejemplo, el coste de transporte o el tiempo de viaje entre dos puntos $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Asumimos que d es una métrica inducida por una norma $\|\bullet\|_d$ en \mathbb{R}^n , es decir, d satisface (1.7), (1.8) y (1.9).

Entonces, el *problema de localización continua* consiste en localizar un nuevo servicio $X \in \mathbb{R}^n$ de tal manera que se minimice alguna función de las distancias entre el nuevo servicio X y los puntos de demanda en $\mathcal{E}x$:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & f(X) = f(d(X, Ex_1), \dots, d(X, Ex_{\mathcal{M}})) \\ \text{s.a :} \quad & X \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Normalmente f es una función convexa y no decreciente de las distancias $d(X, Ex_m)$, $m \in \mathcal{M}$.

Un problema clásico de localización continua es el *problema de la mediana*, también conocido como el *problema de Weber*:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & f(X) = \sum_{m=1}^{\mathcal{M}} w_m d(X, Ex_m) \\ \text{s.a :} \quad & X \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde el peso no negativo $w_m = w(Ex_m)$ especifica la demanda del punto de demanda Ex_m , $m \in \mathcal{M}$. Por tanto, el objetivo en el problema de la mediana es minimizar el coste total de viaje entre el nuevo servicio X y $\mathcal{E}x$. Este problema es el que modela, por ejemplo, el problema de decidir la localización de un almacén con respecto a las de un conjunto de clientes. Los pesos w_m pueden ser también interpretados como una ponderación de la importancia o prioridad del punto de demanda Ex_m , si $\sum_{m=1}^{\mathcal{M}} w_m = 1$ entonces w_m puede considerarse como la probabilidad de que una demanda aleatoria ocurra en el punto Ex_m , $m \in \mathcal{M}$, en este caso, en (3.2) se estaría minimizando el valor esperado del coste de viaje entre el nuevo servicio X y el punto de demanda de $\mathcal{E}x$ cuya demanda necesite ser satisfecha en un momento dado. Obsérvese que los puntos de demanda con $w_m = 0$ pueden omitirse del modelo sin cambiar la función objetivo. Por lo tanto, asumiremos sin pérdida de generalidad que todos los pesos w_m , $m \in \mathcal{M}$, son estrictamente positivos.

El desarrollo de modelos de localización realistas es fundamental en los procesos

de decisión donde se tienen que localizar servicios. Especialmente en el caso de los modelos de localización plana debe considerarse la representación geométrica del problema, y la realidad geográfica tiene que ser incorporada en esta representación. Esto se traduce en restricciones en el problema de localización. Dichas restricciones se corresponden con regiones tales que viajar a través de ellas está completamente prohibido o es imposible. Estas regiones son las barreras, que en el plano pueden ser, por ejemplo, áreas militares, cordilleras, o lagos, y en el espacio tridimensional, objetos físicos. Las aplicaciones de la localización con barreras se encuentran, entre otros, en los ejemplos que hemos venido dando a lo largo de la memoria: diseño de circuitos, planificación de rutas en ciudades, enrutamiento de tuberías en barcos, etc.

Consideremos el conjunto de barreras $\{B_1, \dots, B_N\}$, el cual no es más que un conjunto finito de conjuntos cerrados y disjuntos dos a dos en \mathbb{R}^n , y sea $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^N B_i$. Como en el capítulo anterior, el viaje a través de $\text{int}(\mathcal{B})$ no está permitido, lo que inmediatamente implica que el nuevo servicio no pueda localizarse en $\text{int}(\mathcal{B})$. Así, la región factible $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ para la ubicación del nuevo servicio y para moverse viene dada por $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n \setminus \text{int}(\mathcal{B})$. Para evitar casos infactibles suponemos, como en el capítulo anterior, que \mathcal{F} es un subconjunto conexo de \mathbb{R}^n . Además, debe asumirse $Ex_m \in \mathcal{F}$ para todo $m \in \mathcal{M}$. La distancia d del problema de localización continua pasa a ser ahora una distancia con barreras $d_{\mathcal{B}}$ (Definición 2.2), que, como sabemos, verifica la desigualdad triangular (2.4) pero no es, en general, positivamente homogénea.

Hechas las suposiciones anteriores, el *problema de localización continua con barreras* es:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & f_{\mathcal{B}}(X) = f(d_{\mathcal{B}}(X, Ex_1), \dots, d_{\mathcal{B}}(X, Ex_{\mathcal{M}})) \\ \text{s.a.} \quad & X \in \mathcal{F}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde $f_{\mathcal{B}}(X) = f(d_{\mathcal{B}}(X, Ex_1), \dots, d_{\mathcal{B}}(X, Ex_{\mathcal{M}}))$ es una función de las distancias entre el nuevo servicio X y los puntos de demanda en $\mathcal{E}x$. Nuevamente, en la mayoría de casos, f es una función convexa y no decreciente de las distancias $d_{\mathcal{B}}(X, Ex_m)$, $m \in \mathcal{M}$.

El *problema de la mediana con barreras* será entonces:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & f_{\mathcal{B}}(X) = \sum_{m=1}^{\mathcal{M}} w_m d_{\mathcal{B}}(X, Ex_m) \\ \text{s.a.} \quad & X \in \mathcal{F}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

siendo los pesos w_m , $m \in \mathcal{M}$, estrictamente positivos

Descrito el problema de localización con barreras, pasamos a plantear el caso especial de éste sobre el que versa el capítulo.

3.2. Problema de la mediana rectangular en presencia de paralelepípedos barrera

Diferentes extensiones y variaciones del problema de la mediana han sido ampliamente estudiadas en la literatura. Como se adelantaba al comienzo del capítulo, nos vamos

a centrar aquí en el problema de la mediana cuando las distancias son medidas con respecto a la métrica de Manhattan y existen barreras en forma de complejos de hiperparalelepípedos isotéticos en la región factible.

Problema 3.1. *Dado el conjunto $\{B_1, \dots, B_N\}$ de complejos de paralelepípedos isotéticos en \mathbb{R}^n disjuntos dos a dos y dado el conjunto de puntos de demanda $\mathcal{E}x = \{Ex_1, \dots, Ex_M\}$ en la región factible \mathcal{F} , siendo $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n \setminus \text{int}(\mathcal{B})$ y $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^N B_i$, es el problema 3.4 cuando $d = \ell_1$.*

Dos métodos se proponen para resolver el Problema 3.1: el primero consiste en la obtención de un conjunto dominante finito y es una extensión a \mathbb{R}^n con $n \geq 2$ cualquiera del método conocido para el caso plano de este problema; el segundo es una formulación de programación lineal y entera mixta. Ambos métodos se apoyan en los resultados obtenidos en el capítulo anterior.

3.2.1. Existencia de conjunto dominante finito

Nos planteamos en primer lugar, como hicimos con el Problema 2.1, si es posible restringir la región de \mathcal{F} donde podemos encontrar la solución óptima del Problema 3.1. Obsérvese que el concepto de envolvente rectangular iterativa $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ de dos puntos $X, Y \in \mathcal{F}$ y de \mathcal{B} de la Definición 2.6, puede extenderse a \mathcal{M} puntos Ex_1, \dots, Ex_M de \mathcal{F} , para ello basta exigir en la Definición 2.6 que, en lugar de $X, Y \in \mathcal{R}_{\mathcal{B}}$, $Ex_m \in \mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ para todo $m \in \mathcal{M}$. Utilizaremos la misma notación $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ para la envolvente rectangular iterativa de dos puntos que de \mathcal{M} , pues la última no es más que una extensión de la primera. No es difícil ver la corrección del Algoritmo 2.1 para hallar la envolvente rectangular iterativa de los puntos de $\mathcal{E}x$ y \mathcal{B} cuando sólo se cambia en éste el Paso 1, haciendo \mathcal{R} igual al paralelepípedo de centro $\kappa := ((z_1^+ + z_1^-)/2, \dots, (z_n^+ + z_n^-)/2)^t$ y mitad de la anchura en cada coordenada $O\mathcal{X}_k$, $\xi_k := |\kappa_k - z_k^+| = |\kappa_k - z_k^-|$, siendo $z_k^+ = \max_{m \in \mathcal{M}} \{(Ex_m)_k\}$ y $z_k^- = \min_{m \in \mathcal{M}} \{(Ex_m)_k\}$, $k = 1, \dots, n$.

Lema 3.1. *Sean el conjunto de puntos de demanda $\mathcal{E}x = \{Ex_1, \dots, Ex_M\}$ y la unión de los conjuntos barrera $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^N B_i$ del Problema 3.1, entonces, la solución óptima X^* del Problema 3.1 está contenida en la envolvente rectangular iterativa $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ de los puntos de $\mathcal{E}x$ y \mathcal{B} .*

Demostración. Si $X^* \in \mathcal{R}_{\mathcal{B}}$, entonces, por el Lema 2.5 y por el Lema 2.7, existe un X^*-Ex_m camino rectangular mínimo permitido de longitud $d_{\mathcal{B}}(X^*, Ex_m)$ completamente contenido en $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$, para todo $m \in \mathcal{M}$. Por tanto, para razonar por reducción al absurdo, podemos asumir que no hay barreras en $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{R}_{\mathcal{B}}$, puesto que esta asunción sólo podría decrementar el valor en la función objetivo del Problema 3.1 de los puntos que no están contenidos en $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$, mientras que no tiene efecto sobre el valor en la función objetivo del Problema 3.1 de los puntos que sí lo están. Supongamos que $X^* \notin \mathcal{R}_{\mathcal{B}}$. Sea Q^{Ex_m} el X^*-Ex_m camino rectangular mínimo permitido de longitud $d_{\mathcal{B}}(X^*, Ex_m)$ que da el Lema 2.5, $m \in \mathcal{M}$. Sea Z^m el último punto de Q^{Ex_m} en la

frontera de \mathcal{R}_B cuando Q^{Ex_m} se recorre desde X^* hasta Ex_m , $m \in \mathcal{M}$. Vamos a distinguir dos casos.

Supongamos en primer lugar que $\text{Proy}_{\hat{j}}(X^*) \in \text{int}(\text{Proy}_{\hat{j}}(\mathcal{R}_B))$ para cierto $j \in \{1, \dots, n\}$. El índice j es único, de lo contrario se tendría que $X^* \in \mathcal{R}_B$. Además, si denotamos por $(\kappa_1, \dots, \kappa_n)^t$ al centro de \mathcal{R}_B y a la mitad de su anchura en cada coordenada por ξ_i , $i = 1, \dots, n$, entonces, $x_j^* < \kappa_j - \xi_j$ o $x_j^* > \kappa_j + \xi_j$, pues en caso contrario nuevamente se tendría $X^* \in \mathcal{R}_B$. Sea X^J el punto de \mathbb{R}^n con todas sus componentes iguales a las de X^* salvo la j -ésima, que es $\kappa_j + s\xi_j$, siendo $s \in \{-1, 1\}$ tal que $|x_j^* - (\kappa_j + s\xi_j)|$ es mínimo. El punto X^J pertenece a la frontera de $X^* \in \mathcal{R}_B$, y por tanto, a \mathcal{F} .

Como Z^m es el último punto de Q^{Ex_m} en la frontera de \mathcal{R}_B cuando Q^{Ex_m} se recorre desde X^* hasta Ex_m , considerar a \mathcal{R}_B como una barrera, única pues contiene a las demás, no afecta al valor de $d_B(X^*, Z^m)$, es decir, $d_B(X^*, Z^m) = d_{\mathcal{R}_B}(X^*, Z^m)$, $m \in \mathcal{M}$. A partir del Lema 2.9 se deduce que, si X^* y Z^m son ℓ_1 -visibles, entonces X^J y Z^m también lo son, y si X^* y Z^m no son ℓ_1 -visibles, entonces X^J y Z^m tampoco lo son, para todo $m \in \mathcal{M}$. En cualquier caso, los sumandos de $d_{\ell_1}(X^*, Z^m)$ y $d_{\ell_1}(X^J, Z^m)$, si X^* y Z^m son ℓ_1 -visibles, o los de las expresiones de $d_{\mathcal{R}_B}(X^*, Z^m)$ y $d_{\mathcal{R}_B}(X^J, Z^m)$ que da el Lema 2.9, si X^* y Z^m no son ℓ_1 -visibles, son los mismos salvo $|x_j^* - (Z^m)_j|$ y $|x_j^J - (Z^m)_j|$, $m \in \mathcal{M}$. Pero $|x_j^J - (Z^m)_j| < |x_j^* - (Z^m)_j|$ para todo $m \in \mathcal{M}$, lo que significa que X^J proporciona un menor valor objetivo que X^* en el Problema 3.1, ya que por la desigualdad triangular se tiene que

$$d_B(X^J, Ex_m) \leq d_B(X^J, Z^m) + l(Q_{Z^m, Ex_m}^{Ex_m}) < d_B(X^*, Z^m) + l(Q_{Z^m, Ex_m}^{Ex_m}) = d_B(X^*),$$

siendo el camino rectangular $Q_{Z^m, Ex_m}^{Ex_m}$ la porción del camino rectangular Q^{Ex_m} que va de Z^m a Ex_m , $m \in \mathcal{M}$. Que X^J proporcione un menor valor objetivo que X^* en el Problema 3.1 contradice que X^* sea la solución óptima del Problema 3.1.

Supongamos ahora que $\text{Proy}_{\hat{j}}(X^*) \in \text{int}(\text{Proy}_{\hat{j}}(\mathcal{R}_B))$ no se da para ningún $j \in \{1, \dots, n\}$. Nuevamente vamos a usar que, como Z^m es el último punto de Q^{Ex_m} en la frontera de \mathcal{R}_B cuando Q^{Ex_m} se recorre desde X^* hasta Ex_m , podemos considerar a \mathcal{R}_B como única barrera a la hora de calcular $d_B(X^*, Z^m)$, $m \in \mathcal{M}$. Como $\text{Proy}_{\hat{j}}(X^*) \in \text{int}(\text{Proy}_{\hat{j}}(\mathcal{R}_B))$ no se da para ningún $j \in \{1, \dots, n\}$, entonces, utilizando el Lema 2.9, se deduce que X^* y Ex_m son ℓ_1 -visibles para todo $m \in \mathcal{M}$. Además, al menos uno de las desigualdades $x_j^* < \kappa_j - \xi_j$ o $x_j^* > \kappa_j + \xi_j$ se da para algún $j \in \{1, \dots, n\}$, de lo contrario X^* pertenecería a \mathcal{R}_B . Tomemos $k \in \{1, \dots, n\}$ donde se dé alguna de las desigualdades anteriores. Sea X^K el punto de \mathbb{R}^n con todas sus componentes iguales a las de X^* salvo la k -ésima, que es $\kappa_k + s\xi_k$, siendo $s \in \{-1, 1\}$ tal que $|x_k^* - (\kappa_k + s\xi_k)|$ es mínimo. Del Lema 2.9 se deduce que, como X^* y Z^m son ℓ_1 -visibles, entonces X^K y Z^m son también ℓ_1 -visibles, para todo $m \in \mathcal{M}$. Los sumandos de $d_{\ell_1}(X^*, Z^m)$ y $d_{\ell_1}(X^K, Z^m)$ son los mismos, salvo $|x_k^* - (Z^m)_k|$ y $|x_k^K - (Z^m)_k|$, $m \in \mathcal{M}$. Pero obsérvese que $|x_k^K - (Z^m)_k| < |x_k^* - (Z^m)_k|$ para todo $m \in \mathcal{M}$, lo que significa que X^K proporciona un menor valor objetivo que X^* en el Problema 3.1, ya que por la

desigualdad triangular se tiene que

$$d_{\mathcal{B}}(X^K, Ex_m) \leq d_{\ell_1}(X^K, Z^m) + l(Q_{Z^m, Ex_m}^{Ex_m}) < d_{\ell_1}(X^*, Z^m) + l(Q_{Z^m, Ex_m}^{Ex_m}) = d_{\mathcal{B}}(X^*),$$

siendo, como antes, el camino rectangular $Q_{Z^m, Ex_m}^{Ex_m}$ la porción del camino rectangular Q^{Ex_m} que va de Z^m a Ex_m , $m \in \mathcal{M}$. De nuevo hemos llegado a una contradicción. Concluimos así que la solución óptima X^* del Problema 3.1 está contenida en la envolvente rectangular iterativa $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ de los puntos de $\mathcal{E}x$ y \mathcal{B} . \square

Al igual que ocurre con la envolvente rectangular iterativa $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$, la red de construcción rectangular \mathcal{N}_{ℓ_1} de dos puntos $X, Y \in \mathcal{F}$ y de \mathcal{B} de la Definición 2.8 puede extenderse a \mathcal{M} puntos $Ex_1, \dots, Ex_{\mathcal{M}}$ de \mathcal{F} . Para ello, sólo tenemos que considerar en $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ todas las nuevas líneas de construcción rectangular que se forman, de la misma manera que para dos puntos, a partir de los hiperplanos \mathcal{H} y los planos Π paralelos a los hiperplanos $O\mathcal{X}_1 \cdots \mathcal{X}_{j-1}\mathcal{X}_{j+1} \cdots \mathcal{X}_n$, $j = 1, \dots, n$, y a los planos $O\mathcal{X}_i\mathcal{X}_j$, $i, j = 1, \dots, n$, $i < j$, respectivamente, que pasan por los puntos de $\mathcal{E}x$. Por los mismo motivos que con $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$, utilizamos la misma notación \mathcal{N}_{ℓ_1} para la red de construcción rectangular de dos puntos que de \mathcal{M} puntos. El siguiente teorema establece un conjunto dominante finito para el Problema 3.1, esto es, un conjunto finito de puntos entre los que se encuentra una solución óptima del problema.

Teorema 3.1. *Sean el conjunto de puntos de demanda $\mathcal{E}x = \{Ex_1, \dots, Ex_{\mathcal{M}}\}$ y la unión de los conjuntos barrera $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^N B_i$ del Problema 3.1. Sea \mathcal{N}_{ℓ_1} la red de construcción rectangular de los puntos de $\mathcal{E}x$ y de \mathcal{B} . Entonces, al menos un punto de $\mathcal{P}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ es una solución óptima del Problema 3.1.*

Demostración. Sea X^* la solución óptima del Problema 3.1. Por el Lema 3.1 sabemos que $X^* \in \mathcal{R}_{\mathcal{B}} \setminus \text{int}(\mathcal{B})$. Sea $C \in \mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ la celda (paralelepípedo isotético) de $\mathcal{C}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ a la que pertenece X^* , $X^* \in C$. Vamos a suponer que X^* no es uno de los vértices de C , en caso contrario se cumpliría el teorema pues los vértices de C son puntos de $\mathcal{P}(\mathcal{N}_{\ell_1})$.

Sea Q^{Ex_m} el Ex_m - X^* camino rectangular mínimo permitido que da la distancia $d_{\mathcal{B}}(X^*, Ex_m)$ en la función objetivo del Problema 3.1, $m \in \mathcal{M}$. Como sabemos por el Lema 2.5 y por el Lema 2.7, respectivamente, estos caminos existen y están completamente contenidos en $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$. Obsérvese que los puntos de $\mathcal{E}x$ son nodos de \mathcal{N}_{ℓ_1} , es decir, puntos de $\mathcal{P}(\mathcal{N}_{\ell_1})$, los cuales se obtienen por la intersección sucesiva entre los hiperplanos \mathcal{H} paralelos a los hiperplanos $O\mathcal{X}_1 \cdots \mathcal{X}_{j-1}\mathcal{X}_{j+1} \cdots \mathcal{X}_n$, $j = 1, \dots, n$, y los planos Π paralelos a los planos $O\mathcal{X}_i\mathcal{X}_j$, $i, j = 1, \dots, n$, $i < j$, que pasan por ellos. Entonces, razonando como en la demostración del Teorema 2.1, puede obtenerse un camino Q^m sobre las aristas de \mathcal{N}_{ℓ_1} que vaya desde Ex_m hasta un vértice \mathcal{V}^m de C , de forma que $l(Q^{Ex_m}) = l(Q^m) + \ell_1(\mathcal{V}^m, X^*)$, siendo \mathcal{V}^m y X^* ℓ_1 -visibles por estar contenidos en el mismo paralelepípedo isotético C , $m \in \mathcal{M}$.

Como sabemos que la solución óptima X^* del Problema 3.1 se encuentra en C , el

Problema 3.1 es equivalente al problema:

$$\begin{aligned} \text{mín } f_B(X) &= \sum_{m=1}^{\mathcal{M}} w_m d_B(X, Ex_m) \\ \text{s.a. : } X &\in C. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Además, por lo dicho en el párrafo anterior, f_B puede expresarse como:

$$f_B(X) = \sum_{m=1}^{\mathcal{M}} w_m (l(Q^m) + \ell_1(\mathcal{V}^m, X)). \quad (3.6)$$

El problema (3.5) es equivalente al problema resultante de sustituir en él la función objetivo f_B por $f'_B(X) = \sum_{m=1}^{\mathcal{M}} w_m \ell_1(\mathcal{V}^m, X)$, es decir, la función resultante de eliminar el valor constante $\sum_{m=1}^{\mathcal{M}} w_m l(Q^m)$ de (3.6), pues esto no afecta al valor óptimo del problema.

Como \mathcal{V}^m es un vértice del paralelepípedo isotético C y $X \in C$ en (3.5), $|(\mathcal{V}^m)_j - x_j| = x_j - (\mathcal{V}^m)_j$ si $(\mathcal{V}^m)_j = \kappa_j - \xi_j$, y $|(\mathcal{V}^m)_j - x_j| = (\mathcal{V}^m)_j - x_j$ si $(\mathcal{V}^m)_j = \kappa_j + \xi_j$, denotando $(\kappa_1, \dots, \kappa_n)^t$ al centro de C y ξ_j a la mitad de su anchura en la j -ésima coordenada, $j = 1, \dots, n$, $m \in \mathcal{M}$. Por tanto, $f'_B(X)$ puede expresarse como:

$$\begin{aligned} f'_B(X) &= \sum_{m=1}^{\mathcal{M}} \sum_{k=1}^n (\delta_k^m w_k (x_k - (\mathcal{V}^m)_k) + (1 - \delta_k^m) w_k ((\mathcal{V}^m)_k - x_k)) \\ &= \sum_{m=1}^{\mathcal{M}} \sum_{k=1}^n (2\delta_k^m - 1) w_k x_k + \sum_{m=1}^{\mathcal{M}} \sum_{k=1}^n (1 - 2\delta_k^m) w_k (\mathcal{V}^m)_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{m=1}^{\mathcal{M}} (2\delta_k^m - 1) w_k \right) x_k + \sum_{m=1}^{\mathcal{M}} \sum_{k=1}^n (1 - 2\delta_k^m) w_k (\mathcal{V}^m)_k \end{aligned}$$

siendo δ_k^m una constante con valor 1 si $(\mathcal{V}^m)_k = \kappa_k - \xi_k$ y valor 0 si $(\mathcal{V}^m)_k = \kappa_k + \xi_k$, $k = 1, \dots, n$, $m \in \mathcal{M}$. El problema (3.5) es equivalente al problema resultante de cambiar en él la función objetivo f_B por $f''_B(X) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{m=1}^{\mathcal{M}} (2\delta_k^m - 1) w_k \right) x_k$, pues el problema (3.5) era equivalente al problema resultante de cambiar en él la función objetivo f_B por $f'_B(X)$ y la eliminación del término constante $\sum_{m=1}^{\mathcal{M}} \sum_{k=1}^n (1 - 2\delta_k^m) w_k (\mathcal{V}^m)_k$ de $f'_B(X)$ no afecta al valor óptimo del problema.

La función $f''_B(X)$ es una función lineal en las componentes del punto $X \in C$, si $\sum_{m=1}^{\mathcal{M}} (2\delta_k^m - 1) w_k \geq 0$, entonces, el mínimo valor que puede aportarse en la k -ésima componente al valor de $f''_B(X)$ se da para $x_k = \hat{x}_k = \kappa_k - \xi_k$, si por el contrario $\sum_{m=1}^{\mathcal{M}} (2\delta_k^m - 1) w_k < 0$, entonces, el mínimo valor que puede aportarse en la k -ésima componente al valor de $f''_B(X)$ se da para $x_k = \hat{x}_k = \kappa_k + \xi_k$, $k = 1, \dots, n$. Es decir, hemos encontrado un vértice $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)^t$ de C , y por tanto un punto de $\mathcal{P}(\mathcal{N}_{\ell_1})$, que es una solución óptima del Problema 3.1. \square

De acuerdo al Teorema 3.1, un método para resolver el Problema 3.1 es evaluar en su función objetivo cada uno de los puntos de $\mathcal{P}(\mathcal{N}_{\ell_1})$, el que proporcione un menor valor en la función objetivo será una solución óptima. La distancia de Manhattan con barreras de cada punto de $\mathcal{P}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ a cada punto de $\mathcal{E}x$ puede obtenerse utilizando el Teorema 2.1 (la red de construcción rectangular de $Z \in \mathcal{P}(\mathcal{N}_{\ell_1})$, $Ex_m \in \mathcal{E}x$ y \mathcal{B} es un subgrafo de la red de construcción rectangular de los puntos de $\mathcal{E}x$ y \mathcal{B} , un camino mínimo entre Z y Ex_m en la segunda tiene que tener la misma longitud que un camino mínimo entre Z y Ex_m en la primera por el Teorema 2.1). Razonando de la misma forma a cómo lo hicimos en el capítulo anterior con la red de construcción rectangular de dos puntos y \mathcal{B} , se llega a que el coste de construir la red de construcción rectangular de los puntos de $\mathcal{E}x$ y \mathcal{B} es $\mathcal{O}((\Sigma + \mathcal{M})^2)$ en \mathbb{R}^2 y $\mathcal{O}((W + \mathcal{M})^6 n^{11} 2^{2n-6})$ en \mathbb{R}^n con $n \geq 3$ (el coste de la obtención de $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ es ahora $\mathcal{O}(W^2 + \mathcal{M} \log(\mathcal{M}))$ en el primer caso y $\mathcal{O}(W^2 n + \mathcal{M} \log(\mathcal{M}))$ en el segundo). En \mathbb{R}^2 el número de nodos $|\mathcal{P}(\mathcal{N}_{\ell_1})|$ de \mathcal{N}_{ℓ_1} será a lo sumo $\mathcal{O}((\Sigma + \mathcal{M})^2)$, y en \mathbb{R}^n con $n \geq 3$ a lo sumo $\mathcal{O}((W + \mathcal{M})^6 n^{11} 2^{2n-6})$. El cálculo de la longitud del camino mínimo en \mathcal{N}_{ℓ_1} entre todos los puntos de $\mathcal{P}(\mathcal{N}_{\ell_1})$ y todos los puntos de $\mathcal{E}x$, tiene un coste, utilizando el algoritmo de Dijkstra, de $\mathcal{O}(\mathcal{M}((W + \mathcal{M})^{12} n^{22} 2^{4n-12}))$, que sería el coste de obtener la solución óptima del Problema 3.1 por este método.

3.2.2. Una formulación de programación lineal y entera mixta

Los modelos (2.62)-(2.88) y (2.102)-(2.121) que dan el Corolario 2.2 y el Teorema 2.5, respectivamente, para calcular el mínimo camino rectangular permitido entre dos puntos en presencia de paralelepípedos barrera, pueden adaptarse para el problema de la mediana rectangular en presencia de paralelepípedos barrera. El siguiente teorema proporciona un modelo basado en la segunda formulación. El motivo por el que se presenta una adaptación del modelo (2.102)-(2.121) y no del modelo (2.62)-(2.88) es, por un lado, el inconveniente de no disponerse de una buena cota superior para el número de nodos de un camino rectangular mínimo permitido entre dos puntos cuando las barreras son complejos de paralelepípedos, y, por otro lado, como se verá en el siguiente capítulo, el modelo (2.102)-(2.121) presenta un mejor rendimiento que el modelo (2.62)-(2.88) al calcular el camino rectangular mínimo permitido entre dos puntos en presencia de paralelepípedos barrera, por lo que cabe esperar que la adaptación de (2.102)-(2.121) para el Problema 3.1 presente un mejor rendimiento que la que pueda hacerse a partir de (2.62)-(2.88).

Teorema 3.2. *En \mathbb{R}^n , sean el conjunto de puntos de demanda $\mathcal{E}x = \{Ex_1, \dots, Ex_M\}$ y la unión de los conjuntos barrera $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^N B_i$ del Problema 3.1. Sea $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ la envolvente rectangular iterativa de los puntos de $\mathcal{E}x$ y \mathcal{B} , y sea \mathcal{C}' una descomposición en paralelepípedos de $\mathcal{R}_{\mathcal{B}} \setminus \text{int}(\mathcal{B})$ obtenida con el Algoritmo 2.2 si $n = 2$ o con el Algoritmo 2.3 si $n \geq 3$. Sea $G' = (V', E')$ el grafo no dirigido que posee un nodo $v'_i \in V'$ por cada paralelepípedo C'_i de \mathcal{C}' , y tal que el arco $(i, j) \in E'$ si y sólo si los paralelepípedos C'_i y C'_j de \mathcal{C}' son adyacentes, esto es, intersecan, $i < j$. Denotemos*

por i_m al índice tal que $Ex_m \in C'_{i_m} \in C'$ (si hay más de uno i_m será cualquiera de ellos), $m = 1, \dots, \mathcal{M}$, y notemos $\bar{N} = |C'|$. Sea $\bar{\kappa}_k^i$ la coordenada k -ésima del centro de C'_i y $\bar{\xi}_k^i$ la mitad de su anchura en la coordenada $O\mathcal{X}_k$, $i = 1, \dots, \bar{N}$, $k = 1, \dots, n$. Entonces, el Problema 3.1 es equivalente al problema de programación lineal y entera mixta

$$\text{mín} \quad \sum_{m=1}^{\mathcal{M}} \sum_{(i,j) \in E'} w_m D_{ij}^m + \sum_{m=1}^{\mathcal{M}} w_m D_m^{\ell_1} \quad (3.7)$$

$$\text{s.a:} \quad \mu_{i_m}^m = 1, \quad \forall m = 1, \dots, \mathcal{M}, \quad (3.8)$$

$$\sum_{(h,i_m) \in E'} \eta_{hi_m}^m + \sum_{(i_m,j) \in E'} \eta_{i_m j}^m = 1 - w_{i_m}, \quad \forall m = 1, \dots, \mathcal{M}, \quad (3.9)$$

$$\sum_{(h,i) \in E'} \eta_{hi}^m + \sum_{(i,j) \in E'} \eta_{ij}^m = 2\mu_i^m - w_i, \quad \forall m = 1, \dots, \mathcal{M}, i = 1, \dots, \bar{N}, i \neq i_m, \quad (3.10)$$

$$\eta_{ij}^m \leq 1, \quad \forall m = 1, \dots, \mathcal{M}, (i,j) \in E', \quad (3.11)$$

$$\mu_i^m + \mu_j^m \leq 1 + \eta_{ij}^m, \quad \forall m = 1, \dots, \mathcal{M}, (i,j) \in E', \quad (3.12)$$

$$\eta_{ij}^m \leq \mu_i^m, \quad \forall m = 1, \dots, \mathcal{M}, (i,j) \in E', \quad (3.13)$$

$$\eta_{ij}^m \leq \mu_j^m, \quad \forall m = 1, \dots, \mathcal{M}, (i,j) \in E', \quad (3.14)$$

$$d_{ijk}^m \geq c_{ik}^m - c_{jk}^m, \quad \forall m = 1, \dots, \mathcal{M}, (i,j) \in E', i, j \neq i_m, k = 1, \dots, n, \quad (3.15)$$

$$d_{ijk}^m \geq -c_{ik}^m + c_{jk}^m, \quad \forall m = 1, \dots, \mathcal{M}, (i,j) \in E', i, j \neq i_m, k = 1, \dots, n, \quad (3.16)$$

$$d_{i_m j k}^m \geq x_k^m - c_{jk}^m, \quad \forall m = 1, \dots, \mathcal{M}, (i_m, j) \in E', k = 1, \dots, n, \quad (3.17)$$

$$d_{i_m j k}^m \geq -x_k^m + c_{jk}^m, \quad \forall m = 1, \dots, \mathcal{M}, (i_m, j) \in E', k = 1, \dots, n, \quad (3.18)$$

$$d_{hi_m k}^m \geq c_{hk}^m - x_{i_m}^m, \quad \forall m = 1, \dots, \mathcal{M}, (h, i_m) \in E', k = 1, \dots, n, \quad (3.19)$$

$$d_{hi_m k}^m \geq -c_{hk}^m + x_{i_m}^m, \quad \forall m = 1, \dots, \mathcal{M}, (h, i_m) \in E', k = 1, \dots, n, \quad (3.20)$$

$$d_{mk}^{\ell_1} \geq x_k^m - X_k, \quad \forall m = 1, \dots, \mathcal{M}, k = 1, \dots, n, \quad (3.21)$$

$$d_{mk}^{\ell_1} \geq -x_k^m + X_k, \quad \forall m = 1, \dots, \mathcal{M}, k = 1, \dots, n, \quad (3.22)$$

$$D_{ij}^m \geq \sum_{k=1}^n d_{ijk}^m - M(1 - \eta_{ij}^m) - Mw_{i_m}, \quad \forall m = 1, \dots, \mathcal{M}, \forall (i,j) \in E', \quad (3.23)$$

$$D_m^{\ell_1} \geq \sum_{k=1}^n d_{mk}^{\ell_1} - M(1 - w_{i_m}), \quad \forall m = 1, \dots, \mathcal{M}, \quad (3.24)$$

$$\sum_{k=1}^n w_k = 1, \quad (3.25)$$

$$c_{ik}^m - M(1 - w_i) \leq X_k \leq c_{ik}^m + M(1 - w_i), \quad \begin{array}{l} \forall m = 1, \dots, \mathcal{M}, \\ i = 1, \dots, \bar{N}, \\ k = 1, \dots, n, \end{array} \quad (3.26)$$

$$\bar{\kappa}_k^i - \bar{\xi}_k^i \leq c_{ik}^m \leq \bar{\kappa}_k^i + \bar{\xi}_k^i, \quad \forall m = 1, \dots, \mathcal{M}, i = 1, \dots, \bar{N}, k = 1, \dots, n, \quad (3.27)$$

$$D_{ij}^m, \eta_{ij}^m \geq 0, \quad \forall m = 1, \dots, \mathcal{M}, (i,j) \in E'; \quad d_{ijk}^m \geq 0, \quad \begin{array}{l} \forall m = 1, \dots, \mathcal{M}, \\ (i,j) \in E', \\ k = 1, \dots, n, \end{array} \quad (3.28)$$

$$D_m^{\ell_1} \geq 0, \quad \forall m = 1, \dots, \mathcal{M}; \quad d_{mk}^{\ell_1} \geq 0, \quad \forall m = 1, \dots, \mathcal{M}, k = 1, \dots, n, \quad (3.29)$$

$$\mu_i^m \in \{0, 1\}, \quad \forall m = 1, \dots, \mathcal{M}, i = 1, \dots, \bar{N}; w_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, \bar{N}, \quad (3.30)$$

$$c_{ik}^m \in \mathbb{R}, \quad \forall m = 1, \dots, \mathcal{M}, i = 1, \dots, \bar{N}, k = 1, \dots, n; X_k \in \mathbb{R}, \quad \forall k = 1, \dots, n, \quad (3.31)$$

donde x_k^m es la m -ésima coordenada del punto de demanda Ex_m , $m = 1, \dots, \mathcal{M}$, $k = 1, \dots, n$, y siendo $M > 0$ una constante lo suficientemente grande.

Demostración. En (3.28)-(3.31) se define la naturaleza de las variables de decisión: cada variable D_{ij} , η_{ij} , μ_i , d_{ijk} y c_k^i del modelo (2.102)-(2.121) se considera ahora \mathcal{M} veces (D_{ij}^m , η_{ij}^m , μ_i^m , d_{ijk}^m y c_{ik}^m), una vez por cada punto de demanda Ex_m , pues lo que pretendemos es hallar un camino rectangular mínimo permitido que una cada punto de demanda Ex_m con el valor óptimo X^* del Problema 3.1; X_k representa la k -ésima coordenada del valor óptimo X^* del Problema 3.1, y w_i el paralelepípedo C_i de \mathcal{C}' en el que se encuentra; $d_{mk}^{\ell_1}$ es una variable positiva que en el óptimo tomará, al menos, el valor absoluto de la diferencia en la k -ésima coordenada $|x_k^m - X_k|$ del punto de demanda Ex_m y el valor óptimo X^* del Problema 3.1, y D_k es una variable positiva que en el óptimo tomará el valor $\ell_1(Ex_m, X^*)$ si los puntos Ex_m y X^* se encuentran en el mismo paralelepípedo de \mathcal{C}' , y 0 en caso contrario. Estas dos últimas variables de decisión se utilizan para poder calcular $d_{\mathcal{B}}(Ex_m, X^*)$ cuando Ex_m y X^* pertenecen al mismo paralelepípedo de \mathcal{C}' , caso que no se considera en la formulación (2.102)-(2.121).

A continuación se va a explicar el significado de las restricciones o partes de las restricciones que no se deduzcan directamente del modelo (2.102)-(2.121). La variable w_i es una variable positiva que en la práctica se va a comportar como una variable binaria. Esto se debe a que por la restricción (3.25) a lo sumo puede valer 1, lo que le obliga a tomar el valor 0 o 1 debido a las restricciones (3.9) y (3.10), pues las variables que aparecen en estas igualdades son todas binarias (recuérdese que, aunque η_{ij}^m no sea binaria, en la práctica se comporta como tal debido a las restricciones (3.11)-(3.14)). El valor 1 de la variable w_i representa que la solución óptima X^* del Problema 3.1 se encuentra en el paralelepípedo C_i de \mathcal{C}' , el valor 0, lo contrario. Con la restricción (3.25) se está imponiendo entonces que X^* pertenezca a uno y sólo uno de los paralelepípedos de \mathcal{C}' . Realmente X^* puede pertenecer a varios paralelepípedos de \mathcal{C}' , $w_i = 1$ sólo indica el paralelepípedo de referencia que va a utilizar el modelo para calcular la longitud de los caminos mínimos. La restricción (3.26) iguala el punto $(X_1, \dots, X_n)^t$ que representa a la solución óptima X^* al punto del paralelepípedo correspondiente.

Si Ex_m y $(X_1, \dots, X_n)^t$ no están en el mismo paralelepípedo C_{i_m} de \mathcal{C}' , entonces $w_{i_m} = 0$, por lo que las restricciones (3.8)-(3.10), (3.15)-(3.21) y (3.23) tienen el mismo efecto que en la formulación (2.102)-(2.121). En (3.10) se añade el sustrando w_i para que el flujo que sale del paralelepípedo C_{i_m} en el que está Ex_m termine en el paralelepípedo en el que está $(X_1, \dots, X_n)^t$. En (3.15)-(3.21) se hace una distinción de casos para calcular adecuadamente D_{ij}^m , esta distinción no se hacía en el modelo (2.102)-(2.121) debido a que en dicho modelo se excluía la posibilidad de que los dos puntos a unir por un camino rectangular permitido perteneciesen al mismo paralelepípedo de \mathcal{C}' , cosa que aquí no se está haciendo (X^* puede pertenecer al mismo paralelepípedo de \mathcal{C}' que Ex_m). En este caso ($w_{i_m} = 0$), en el óptimo, $\sum_{(i,j) \in E'} D_{ij}^m = d_{\mathcal{B}}(Ex_m, (X_1, \dots, X_n)^t)$ y $D_m^{\ell_1} = 0$ debido a la restricción (3.24). Si Ex_m y $(X_1, \dots, X_n)^t$ están en el mismo paralelepípedo C_{i_m} de \mathcal{C}' , es decir, si $w_{i_m} = 1$,

entonces del nodo v'_{i_m} no sale (o entra, según se mire pues el grafo G' es no dirigido) flujo, de acuerdo a la restricción (3.9). En este caso en el óptimo, $\sum_{(i,j) \in E'} D_{ij}^m = 0$, debido al sustraendo M (proveniente de Mw_i) que se aplicaría a la restricción (3.23), y $D_m^{\ell_1} = \ell_1(Ex_m, (X_1, \dots, X_n)^t)$ por las restricciones (3.21), (3.22) y (3.24).

Teniendo en cuenta lo anterior, se deduce que el problema de programación lineal y entera mixta (3.7)-(3.31) es equivalente al Problema 3.1. \square

El número de variables binarias de la formulación (3.7)-(3.31) es igual al número de paralelepípedos de \mathcal{C}' ($\mathcal{O}(W^{n-1})$) multiplicado por el número de puntos de demanda \mathcal{M} . La constante M puede tomarse $n \max_{i=1, \dots, n} \{2\xi'_i\} + \varepsilon$, siendo ξ'_i la mitad de la anchura en la coordenada $O\mathcal{X}_i$ de la envolvente rectangular iterativa $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ de los puntos de $\mathcal{E}x$ y $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^N B_i$, y ε cualquier constante estrictamente positiva. Dos nuevas decisiones deben de tomarse en el modelo (3.7)-(3.31) con respecto al modelo (2.102)-(2.121): en qué paralelepípedo colocar $(X_1, \dots, X_n)^t$, que representa a la solución óptima X^* , y como calcular $d_{\mathcal{B}}(Ex_m, (X_1, \dots, X_n)^t)$, si mediante $\sum_{(i,j) \in E'} D_{ij}^m$ o mediante $D_m^{\ell_1}$. Ambas decisiones se toman utilizando la variable positiva w_i , que colocamos adecuadamente en las restricciones para que se comporte como una variable binaria. Al igual que ocurría con las variables η_{ij} en (2.102)-(2.121) (y ahora también con las variables η_{ij}^m en (3.7)-(3.31)), esto se hace para intentar mejorar el rendimiento del modelo a través de la reducción del número de variables binarias empleadas.

3.3. Problema de la mediana bloque en presencia de romboides barrera

Por último, al igual que se hizo con el Problema 2.1 en la última sección del capítulo anterior, vamos a dar un problema en el plano que generaliza al Problema 3.1 en \mathbb{R}^2 , y a proponer un método para su resolución. De nuevo, consideramos fijada una norma bloque γ con vectores fundamentales (ordenados en el sentido de las agujas del reloj)

$$u^1 = (u_1^1, u_2^1)^t, \quad u^2 = (u_1^2, u_2^2)^t, \quad u^3 = (u_1^3, u_2^3)^t, \quad u^4 = (u_1^4, u_2^4)^t,$$

cumpliendo $u^3 = -u^1$ y $u^4 = -u^2$. El siguiente problema es una generalización del Problema 3.1 en \mathbb{R}^2 .

Problema 3.2. *Dado el conjunto $\{B_1, \dots, B_N\}$ de complejos de γ -romboides en \mathbb{R}^2 disjuntos dos a dos y dado el conjunto de puntos de demanda $\mathcal{E}x = \{Ex_1, \dots, Ex_{\mathcal{M}}\}$ en la región factible \mathcal{F} , siendo $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n \setminus \text{int}(\mathcal{B})$ y $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^N B_i$, es el problema 3.4 en \mathbb{R}^2 cuando $d = \gamma$.*

Pero el Problema 3.2 puede reducirse al Problema 3.1 en \mathbb{R}^2 como muestra el teorema que aparece a continuación.

Teorema 3.3. *Sean el conjunto de puntos de demanda $\mathcal{E}x = \{Ex_1, \dots, Ex_M\}$ y el conjunto de barreras $\{B_1, \dots, B_N\}$ del Problema 3.2, y sea T la transformación lineal definida en (1.21). El punto $X^* \in \mathbb{R}^2$ es una solución óptima del Problema 3.2 si y sólo si $T(X^*)$ es una solución óptima del Problema 3.1 con puntos de demanda $T(\mathcal{E}x) = \{T(Ex_1), \dots, T(Ex_M)\}$ y barreras $\{T(B_1), \dots, T(B_N)\}$.*

Demostración. Notando que si B es un γ -romboide entonces $T(B)$ es un paralelepípedo isotético en \mathbb{R}^2 y que, por la linealidad de T , si $\{B_1, \dots, B_N\}$ es un conjunto de complejos de γ -romboides disjuntos dos a dos, entonces $\{T(B_1), \dots, T(B_N)\}$ es un conjunto de complejos de paralelepípedos isotéticos en \mathbb{R}^2 disjuntos dos a dos, el resultado se sigue directamente del Lema 2.18. \square

Por tanto, de acuerdo al Teorema 3.3, para resolver el Problema 3.2 podemos transformarlo mediante T en un problema del tipo del Problema 3.1, y aplicar a éste último cualquiera de los dos métodos dados en el capítulo para su resolución, la solución óptima del problema sin transformar es la transformada inversa T^{-1} de la solución óptima del problema transformado.

4

Pruebas computacionales

En este capítulo se recogen algunos resultados de rendimiento computacional obtenidos con los modelos de programación lineal y entera mixta para resolver el problema del camino mínimo rectangular y el problema de la mediana rectangular en presencia de paralelepípedos barrera presentados en los capítulos segundo y tercero, respectivamente.

4.1. Rendimiento de los modelos de programación lineal y entera mixta

En primer lugar se van a comparar el rendimiento de los modelos (2.6)-(2.30), (2.62)-(2.88) y (2.102)-(2.121) a la hora de resolver el problema del camino mínimo rectangular en presencia de un paralelepípedo isotético barrera en \mathbb{R}^n . Los resultados que se muestran en la Tabla 4.1 son la media del tiempo en segundos obtenido para diez instancias del problema. Los puntos X e Y a unir se han tomado de forma que $\text{Proy}_{\hat{1}}(X), \text{Proy}_{\hat{1}}(Y) \in \text{int}(\text{Proy}_{\hat{1}}(B))$ y $\min\{x_1, y_1\} < \kappa_1 < \max\{x_1, y_1\}$, siendo B el paralelepípedo isotético barrera y κ_1 la primera coordenada de su centro. Es decir, se han tomado puntos que no son ℓ_1 -visibles, de acuerdo al Lema 2.9. Como cota superior para el número de codos utilizados del modelo (2.62)-(2.88) se ha tomado la que da el Lema 2.12. En cuanto al modelo (2.102)-(2.121), se ha tomado una descomposición en $2n$ paralelepípedos isotéticos de $\mathcal{R}_B \setminus \text{int}(B)$ (número de caras de dimensión $n - 1$ de B), siendo \mathcal{R}_B la envolvente rectangular iterativa de X, Y y B . Ni en la Tabla 4.1, ni en ninguna de las posteriores, se añaden los tiempos de la descomposición en paralelepípedos isotéticos de $\mathcal{R}_B \setminus \text{int}(B)$ necesaria para el modelo (2.102)-(2.121), sóloamente el tiempo necesario para obtener la solución óptima del modelo.

Modelo	n					
	2	3	4	5	8	27
(2.6)-(2.30)	0	0	0.0016	0.003	0.0047	38.1341
(2.62)-(2.88)	0.0889	0.2016	2.8079	19.173	(*)	-
(2.102)-(2.121)	0.0015	0.0076	0.0111	0.0169	0.0234	48.6149

Tabla 4.1: Tiempo medio en segundos para diez instancias obtenidos por los modelos (2.6)-(2.30), (2.62)-(2.88) y (2.102)-(2.121) para resolver el Problema 2.1 en \mathbb{R}^n cuando $\mathcal{B} = B$.

Con (*) notamos que para al menos tres instancias se ha obtenido un tiempo superior a 600 segundos. La resolución del problema con cualquiera de los tres modelos es prácticamente inmediata hasta \mathbb{R}^3 . El modelo (2.62)-(2.88) es el que presenta peores resultados. Esto se debe a que el número de variables binarias que utiliza es un múltiplo de la dimensión y del número de barreras, en particular de la dimensión, es por ello que al aumentar la dimensión se obtienen peores resultados. En ocasiones, el óptimo de (2.62)-(2.88) se alcanza para un número de codos inferior al que da la cota del Lema 2.12, en estos casos, disminuir el número de codos mejora el rendimiento del modelo. Sin embargo, una reducción de la cota del número de codos que da el Lema 2.12 a priori sin que esto afecte a la solución óptima del problema no es posible. Los modelos (2.6)-(2.30) y (2.102)-(2.121) resuelven el problema de forma prácticamente inmediata hasta dimensiones elevadas. Se ha tomado \mathbb{R}^{27} para ilustrar hasta donde pueden los modelos anteriores resolver el problema en un tiempo razonable.

Para los mismos modelos anteriores, se considera el Problema 2.1 cuando $\mathcal{B} = B_1 \cup B_2$, siendo B_1 y B_2 dos paralelepípedos isotéticos disjuntos. Los puntos X e Y a unir se han tomado de forma que $\text{Proy}_1(X) \in \text{int}(\text{Proy}_1(B_1))$, $x_1 < \kappa_1^1$, $\text{Proy}_1(Y) \in \text{int}(\text{Proy}_1(B_2))$ y $\kappa_1^2 < y_1$, con $\kappa_1^1 < \kappa_1^2$, denotando κ_1^1 y κ_1^2 la primera coordenada del centro de B_1 y B_2 respectivamente. Los resultados se muestran en la Tabla 4.2. Para el modelo (2.102)-(2.121), se ha tomado una descomposición en $4n$ paralelepípedos isotéticos de $\mathcal{R}_B \setminus \mathcal{B}$, con $\mathcal{B} = B_1 \cup B_2$.

Modelo	n				
	2	3	4	5	7
(2.6)-(2.30)	0.0702	0.2528	0.7303	4.4195	53.416
(2.62)-(2.88)	1.10955	46.3977	(*)	-	-
(2.102)-(2.121)	0.0173	0.0593	0.1271	0.2103	0.5259

Tabla 4.2: Tiempo medio en segundos para diez instancias obtenidos por los modelos (2.6)-(2.30), (2.62)-(2.88) y (2.102)-(2.121) para resolver el Problema 2.1 en \mathbb{R}^n cuando $\mathcal{B} = B_1 \cup B_2$, con $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Nuevamente el modelo (2.62)-(2.88) es el que presenta peores resultados, pues como hemos dicho, el número de variables binarias que emplea es un factor, además de

la dimensión, del número de obstáculos. Esta vez el modelo (2.102)-(2.121) parece presentar mejores resultados que el modelo (2.6)-(2.30) específico para el problema. Esto puede deberse a que el número de variables binarias empleadas por el modelo (2.6)-(2.30) es cuadrático respecto a la dimensión, mientras que el de (2.102)-(2.121) es cuatro veces la de esta (recuérdese que el número de variables binarias empleadas por el modelo (2.102)-(2.121) es igual al número de paralelepípedos en las que se descompone $\mathcal{R}_B \setminus \text{int}(\mathcal{B})$). A esto hay que sumar que el número de variables positivas y restricciones del modelo (2.102)-(2.121), las cuales dependen de las conexiones (aristas) entre los paralelepípedos en los que se descompone $\mathcal{R}_B \setminus \text{int}(\mathcal{B})$, no es muy elevado para las dimensiones consideradas y la descomposición hecha de $\mathcal{R}_B \setminus \text{int}(\mathcal{B})$, de lo contrario el tiempo de resolución podría verse incrementado.

Por último, se van a mostrar los resultados en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 obtenidos con el modelo (3.7)-(3.31) para resolver el problema de la mediana rectangular en presencia de paralelepípedos barrera. En la Tabla 4.3 se indica el número de paralelepípedos W considerados en \mathbb{R}^2 así como el número de complejos de paralelepípedos N a los que dan lugar las intersecciones de estos. La descomposición en paralelepípedos de $\mathcal{R}_B \setminus \text{int}(\mathcal{B})$ en \mathbb{R}^2 se ha hecho utilizando el Algoritmo 2.2. En \mathbb{R}^3 se han tomado paralelepípedos barrera disjuntos y una descomposición en paralelepípedos de $\mathcal{R}_B \setminus \text{int}(\mathcal{B})$ consistente en $6W$ paralelepípedos. Los resultados en \mathbb{R}^3 se recogen en la Tabla 4.4.

Modelo (3.7)-(3.31) pdd: 5	$W = 5$		
	$N = 2$	$N = 3$	$N = 5$
Tiempo	0.7739	0.7941	3.11545
$ \mathcal{C}' $	11.3	11.9	15.1

Modelo (3.7)-(3.31) pdd: 10	$W = 10$			
	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$	$N = 6$
Tiempo	14.3964	88.1551	88.3272	133.2273
$ \mathcal{C}' $	16.7	20.2	20.1	22.3

Modelo (3.7)-(3.31) pdd: 15	$W = 4$		
	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$
Tiempo	2.779	9.6394	93.0912
$ \mathcal{C}' $	10	10.4	12

Tabla 4.3: Tiempo medio en segundos y número medio de paralelepípedos en los que se descompone $\mathcal{R}_B \setminus \text{int}(\mathcal{B})$ para diez instancias obtenidos por el modelo (2.102)-(2.121) en \mathbb{R}^2 . El número de puntos de demanda lo notamos por pdd.

Modelo (3.7)-(3.31)	pdd/ N		
	3/4	5/3	10/2
Tiempo	56.5247	121.3554	32.7707

Tabla 4.4: Tiempo medio en segundos para diez instancias obtenidos por el modelo (2.102)-(2.121) en \mathbb{R}^3 . El número de puntos de demanda lo notamos por pdd.

El tiempo de resolución del modelo aumenta con el número de complejos, aunque el número de paralelepípedos constituyentes sea el mismo. Esto se debe como puede verse a que el número de paralelepípedos en los que se descompone $\mathcal{R}_B \setminus \text{int}(B)$ aumenta con el número de complejos y, en consecuencia, aumenta el número de variables binarias de (3.7)-(3.31). Los resultados obtenidos con el modelo (3.7)-(3.31) pueden calificarse de modesto. Es posible que esto se deba a que la estrategia de reducir el número de variables binarias del modelo a costa de aumentar el número de restricciones no esté proporcionando los resultados deseados. Esta estrategia se traduce en un mayor tiempo de resolución del problema relajado en cada nodo del árbol que da el método de ramificación y acotación, pero reduciendo la dimensión de dicho árbol. Sería conveniente comparar estos resultados con los obtenidos al modificar el modelo (3.7)-(3.31) de forma que las variables que representan aristas sean binarias, descartándose así las restricciones necesarias para la estrategia antes descrita.

Conclusiones

En este Trabajo de Fin de Máster se han estudiado las funciones de distancia con barreras y su aplicación a los problemas de camino mínimo y localización. La presencia de barreras en estos problemas modifica las características geométricas y analíticas de los mismos. La no convexidad de las funciones de distancia con barreras da lugar a problemas de optimización no convexos. La mayoría de métodos clásicos empleados para los problemas de camino mínimo y localización continua se basan fundamentalmente en la convexidad de la función objetivo y por ello fallan en este contexto. Por otro lado, los métodos generales de optimización global capaces de tratar con problemas no convexos ignoran la geometría característica de estos problemas. La forma de lidiar con estos problemas es, por tanto, desarrollando nuevos estudios teóricos y enfoques algorítmicos que permitan superar las dificultades mencionadas y poder resolverlos eficientemente.

En esta memoria se han propuesto diferentes y novedosos métodos para resolver el problema del camino mínimo rectangular y el problema de la mediana rectangular en presencia de complejos de hiperparalelepípedos que actúan como barreras en cualquier espacio real de dimensión finita. Estos métodos se apoyan en resultados teóricos y algorítmicos que explotan la geometría de los caminos mínimos rectangulares en regiones factibles restringidas por paralelepípedos barrera. Dichos métodos son fundamentalmente problemas de programación lineal y entera mixta que pueden apoyarse en descomposiciones en paralelepípedos de la región factible. Una extensión al caso n -dimensional del método basado en la obtención de un conjunto dominante para el problema de la mediana con barreras conocido en el plano es otra de las aportaciones del trabajo.

Las pruebas computacionales obtenidas indican que el rendimiento de los modelos propuestos debe mejorarse. Dicha mejora, así como la evaluación del rendimiento de la extensión al caso n -dimensional del método basado en un conjunto dominante antes mencionado, se realizará en una colaboración más amplia con el director del trabajo. En caso de no poder mejorarse los resultados obtenidos con los modelos de programación matemática, los resultados desarrollados para su construcción podrían utilizarse para construir metaheurísticos que combinen, por ejemplo, algoritmos genéticos y búsqueda tabú. La posible extensión del problema al uso de otras normas es otro tema que se tendrá en cuenta.

Bibliografía

- [1] BISCHOFF, M., AND KLAMROTH, K. An efficient solution method for weber problems with barriers based on genetic algorithms. *European Journal of Operational Research* 177, 1 (2007), 22–41.
- [2] BUTT, S. E., AND CAVALIER, T. M. An efficient algorithm for facility location in the presence of forbidden regions. *European Journal of Operational Research* 90, 1 (1996), 56–70.
- [3] DE REZENDE, P. J., LEE, D.-T., AND WU, Y.-F. Rectilinear shortest paths with rectangular barriers. In *Proceedings of the first annual symposium on Computational geometry* (1985), ACM, pp. 204–213.
- [4] DEARING, P., HAMACHER, H., AND KLAMROTH, K. Dominating sets for rectilinear center location problems with polyhedral barriers. *Naval Research Logistics (NRL)* 49, 7 (2002), 647–665.
- [5] HAMACHER, H. W., AND KLAMROTH, K. Planar location problems with barriers under polyhedral gauges.
- [6] ICKING, C., KLEIN, R., MA, L., NICKEL, S., AND WEISSLER, A. On bisectors for different distance functions. *Discrete applied mathematics* 109, 1 (2001), 139–161.
- [7] KLAMROTH, K. A reduction result for location problems with polyhedral barriers. *European Journal of Operational Research* 130, 3 (2001), 486–497.
- [8] KLAMROTH, K. *Single-facility location problems with barriers*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [9] LARSON, R. C., AND SADIQ, G. Facility locations with the manhattan metric in the presence of barriers to travel. *Operations Research* 31, 4 (1983), 652–669.
- [10] LOVE, R. F., AND MORRIS, J. G. A computation procedure for the exact solution of location-allocation problems with rectangular distances. *Naval Research Logistics (NRL)* 22, 3 (1975), 441–453.

- [11] MINKOWSKI, H. Gesammelte abhandlungen, zweiter band. *sl*: Nabu Press.- 2010-468 S (1967).
- [12] NICKEL, S. *Discretization of planar location problems*. Verlag Shaker, 1995.
- [13] WARD, J. E., AND WENDELL, R. E. Using block norms for location modeling. *Operations Research* 33, 5 (1985), 1074–1090.